O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAHSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA MATEMATIKA FAKULTETI

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR FANIDAN

MA'RUZALAR MATNI

Tuzuvchi: Matematika kafedrasi katta o’qtuvchisi N. Umrzaqov

ANDIJON 2013 YIL

1-Mavzu. Differensial tenglamalar haqida dastlabki tushunchalar.

Reja

1. Differensial tenglama haqida tushuncha
2. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama
3. Koshi masalasi.
4. Mavjudlik va yagonalik teoremalari
5. Izoklina

1-reja. Ta'rif. Erkli o'zgaruvchilar, ularning noma'lum funksiyasi (yoki vector funksiya) va noma'lum funksiyaning hosilasi qatnashgan tenglik **differensial tenglama** deyiladi. Agar differensial tenglamada erkli o'zgaruvchi bitta bo'lsa u oddiy differensial tenglama deyiladi. Erkli o'zgaruvchilar soni ikkita va undan ortiq bo'lsa u **hususiy hosilali differensial tenglama** deyiladi. Differensial tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilasining eng yuqori tartibi **tenglama tartibi**ni belgilaydi.

Misol.

$y'' + y = 0$ - 2-tartibli oddiy differensial tenglama

$u_x + u_y = 0$ - 1-tartibli hususiy hosilali differensial tenglama

$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ - 2-tartibli hususiy hosilali differensial tenglama

2-reja. Hosilaga nisbatan yechilgan birirnchi tartibli oddiy differensial tenglama quyidagi korinishga ega: $y' = f(x, y)$ (1).

$f(x, y)$ funksiya $\Gamma \subset R^2$ sohada aniqlangan bo'lsin. Γ sohaning Ox o'qdagi proeksiyasi I intervaldan iborat bo'lsin.

Ta'rif. Agar I intervalda aniqlangan $y = y(x)$ funksiya quyidagi uchta shartni qanoatlantirsin:

1. $(x, y(x)) \in \Gamma,\ x \in I$ 2. $y(x) \in C^1(I)$ 3. $y'(x) = f(x, y(x)),\ x \in I$.

U holda $y = y(x)$ funksiya I intervalda (1) **tenglamaning yechimi** deb ataladi. (1) tenglamaning har bir yechimining grafigi bu tebglamaning **integral chizig'i** deyiladi.

Misol. 1. $y' = 2x$ tenglama uchun $\Gamma = R^2$. $y = x^2$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ to'plamda bu tenglamani yechimi bo'ladi. 2. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ tenglama uchun $\Gamma = \{(x, y):\ -1 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty\}$. $y = \arcsin x + 1$ funksiya $I = (-1; 1)$ intervalda bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

(2) tenglamaning yechimi oshkormas funksiya ko'rinishida bo'lishi ham mumkin. $\Phi(x, y) = 0$, oshkormas funksiyadan $y' = -\dfrac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)}$ ni topamiz. Demak $-\dfrac{\Phi_x}{\Phi_y} \equiv f(x.y)$

(2) ayniyat o'rinli bo'lsa $\Phi(x, y) = 0$ funksiya (1) tenglamaning **oshkormas yechimi** deb ataymiz.

Misol. $y' = \dfrac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)}$ tenglamani $x^2 + y^2 - 1 = 0$ oshkormas funksiya yechimi bo'lishini ko'rrsataylik: $\Phi_x = 2x$, $\Phi_y = 2y$. Bularni (2) ga qo'ysak

$-\dfrac{2x}{2y} \equiv \dfrac{x+y\cdot 0}{-y+x\cdot 0}$ ayniyatga ega bo'lamiz. Demak berilgan tenglama $x^2+y^2-1=0$ oshkormas yechimga ega ekan.

Differensial tenglama yechimi parametric ko'rinishda hosil bo'lishi ham mumkin. $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in(t_0,t_1)$ (3) parametrik funksiya uchun $\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t),\psi(t))$

(4) ayniyat (t_0,t_1) intervalda o'rinli bo'lsa (3) funksiyani (1) tenglamaning **parametrik yechimi** deymiz.

Misol. $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi]$, funksiya $y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ differensial tenglamaning $[0,2\pi]$ kesmadagi yechimi bo'ladi. Haqiqatdan ham $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}\equiv -\dfrac{b^2\cdot a\cos t}{a^2\cdot b\sin t}$ munosabat (4) ayniyat to'g'riligini ko'rsatadi.

3-reja. (1) tenglamaning $y(x_0)=y_0$ (5) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toppish masalasi – **Koshi masalasi** deyiladi. Bunda $x_0,\ y_0$ boshlang'ich berilganlar (qiymatlar) deb ataladi. Koshi masalasining geometric ma'nosi – (1) tenglamaning (x_0,y_0) nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini topishdan iborat. (1) tenglamaning faqat bitta integral chizig'i otadigan R^2 tekislikning nuqtalaridan iborat to'plamni D orqali belgilaylik.

Ta'rif. Agar 1) $y=\varphi(x,C)$ (6) bir parametrli chiziqlar oilasining har bir chizig'i (1) tenglamaning integral chizig'idan iborat; 2) ihtiyoriy $(x,y)\in D$ nuqtada (6) tenglamani C ga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin bo'lsa, u holda (6) chiziqlar oilasi (1) tenglamaning **umumiy yechimi** deyiladi.

$y=\varphi(x,C)$ chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzish uchin $\begin{cases} y=\varphi(x,C) \\ y'=\varphi'(x,C) \end{cases}$ sistemadan C ni yo'qotish kerak.

Misol. 1. $y=\sin(x+C)$ chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzaylik. $\begin{cases} y=\sin(x+C) \\ y'=\cos(x+C) \end{cases}$ sistemadan $y'^2+y^2=1$ differensial tenglamani hosil qilamiz. 2. $y'=yctgx,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$ - Koshi masalasini yechamiz. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y=C\sin x$ chiziqlar oilasidan iborat. $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{C}{2}=2$ tenglikdan masalaning yechimini aniqlaymiz: $y=4\sin x$.

Ta'rif. Agar (1) tenglamaning $y=\varphi(x)$ integral chizigi'ining barcha nuqtalarida Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'lsa $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning **hususiy yechimi** deyiladi.

Agar (1) tenglamaning $y=\varphi(x)$ integral chizigi'ining barcha nuqtalarida Koshi masalasi kamida ikkita yechimga ega bo'lsa $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning **mahsus yechimi** deyiladi.

Differensial tenglamaning barcha yechimlarini topish masalasi **differensial tenglamani integrallash** masalasi deb yuritiladi.

4-reja. Koshi teoremasi. Agar $f(x,y)$ va $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ funksisyalar Γ sohada uzluksiz bo'lsa u holda har bir $(x_0, y_0) \in \Gamma$ nuqta uchun shunday $h > 0$ son topiladiki (1),(5) Koshi masalasining $I = \{x : |x - x_0| < h\}$ intervalda aniqlangan yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Ta'rif. Agar Γ sohada aniqlangan $f(x,y)$ funksiya uchun shunday $L > 0$ son topilsaki, Γ sohadan ihtiyoriy (x, y_1), (x, y_2) nuqtalar olinganda ham

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

tengsizlik bajarilsa $f(x,y)$ funksiya bu sohada y bo'yicha **Lipshis shartini** qanoatlantiradi deymiz.

Pikar teoremasi. Agar $f(x,y)$ funksiya Γ sohada uzluksiz va y bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantirsa u holda har bir $(x_0, y_0) \in \Gamma$ nuqta uchun shunday $h > 0$ son topiladiki (1),(5) Koshi masalasining $I = \{x : |x - x_0| < h\}$ intervalda aniqlangan yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Peano teoremasi. Agar $f(x,y)$ funksiya Γ sohada uzluksiz bo'lsa u holda har bir $(x_0, y_0) \in \Gamma$ nuqta uchun (1),(5) Koshi masalasining kamida bitta yechimi mavjud bo'ladi.

5-reja. (1) tenglamaning **izoklina**si deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometric o'niga aytiladiki, u nuqtalarda (1) differensial tenglamaning integral chiziqlariga o'tkazilgan urinmalar Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan bir hil burchak tashkil etadi. Ta'rifga ko'ra izoklina tenglamasi $f(x,y) = k,\ k - const$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y' = 2x - 1$ tenglamaning izoklinalaridan foydalanib integral chiziqlarini tahminiy chizing.

2-mavzu. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar

Reja

1. Birinchi tartibli soda differensial tenglamalarni integrallash
2. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar
3. Bir jinsli tenglamalar
4. Bir jinsli tengalamaga keltiriladigan differensial teglamalar

1-reja. $y' = f(x)$ (1) – **noma'lum fuksiya qatnashmagan birinchi tartibli eng soda differensial tenglama**. Agar $f(x)$ funksiya I intervalda uzluksiz bo'lsa, tenglamaning bu intervaldagi **umumiy yechimi** $y(x) = \int f(t)dt + C$ ko'rinishda yoziladi.

$y' = g(y)$ (2) – **erkli o'zgaruvchi qatnashmagan birinchi tartibli eng soda differensial tenglama**. Agar $g(y)$ funksiya I_y intervalda uzluksiz va nolga aylanmasa u holda (2) tenglama $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{g(y)}$ tenglamaga teng kuchli bo'ladi va uning **umumiy yechimi** $x(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} + C$ ko'rinishda yoziladi.

2-reja. $f(x)dx = g(y)dy$ (3) ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan teglamalarni **o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama**lar deb ataymiz. $f(x)$, $g(y)$ funksiyalar uzluksiz bo'lgan Γ sohada (3) tenglamaning **umumiy yechimi** $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ tenglamani (3) ko'rinishda yozish mumkin: $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Umumiy yechimniyozamiz: $\int \dfrac{dy}{1+y^2} = \int \dfrac{dx}{1+x^2} + C$; yoki $arctgy = arctgx + C$.

Berilgan teglamani yechish jarayonida $1+y^2$ ifodaga bo'lish bajarildi. $1+y^2 \neq 0$ bo'lgani uchin bu amalni bajarish mumkin. **Javob:** $arctgy = arctgx + C$.

3-reja. $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (4) ko'rinishda yozish mumkin bo'lgan **tenglamalarni bir jinsli differensial tenglama**lar deb ataymiz. (4) tenenglamani integrallash uchun $y = ux$ almashtirish bajaramiz, bunda $u = u(x)$ – yangi noma'lum funksiya. Natijada $u + u'x = f(u)$; yoki $\dfrac{du}{f(u)-u} = \dfrac{dx}{x}$ – o'zgaruvchlari ajralgan differensial tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi formulasida $u = \dfrac{y}{x}$ almashtirish bajarsak (4) tenglamaning umumiy yechimi topiladi. Agar $f(u) = u$ bo'lsa (4) tenglama $y' = \dfrac{y}{x}$ ko'rinishga ega bo'ladi va uning umumiy yechimi $y = Cx$ ko'rinishga ega.

Misol. $y' = -\dfrac{y}{x}$ tenglamani integrallaymiz. $y = ux$ almashtirish bajaramiz, natijada: $u + u'x = -u$; $\dfrac{du}{u} = -\dfrac{2dx}{x}$; $\ln u = \ln \dfrac{C}{x^2}$; $u = \dfrac{C}{x^2}$. Bu formulada $u = \dfrac{y}{x}$ almashtirish bajarsak berilgan tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi: $y = \dfrac{C}{x}$.

Berilgan teglamani yechish jarayonida u ga bo'lish bajarildi. $u = 0$ bo'lgan holni tekshiramiz. Bu holda almashtirish formulasiga ko'ra $y = 0$ hosil bo'ladi. Bu funksiya qaralayotgan tenglamani qanoatlantiradi va uni umumiy yechim formulasida $C = 0$ bo'lganda hosil qilish ham mumkin. **Javob:** $y = \dfrac{C}{x}$.

4-reja. $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ (5) – ko'rinishdagi differensial tenglamalarni o'rganaylik. **I.** $c = c_1 = 0$ bo'gan hol. Bu holda (5) tenglama $y' = f\left(\dfrac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right)$

ko'rinishga ega bo'lib uni (4) ko'rinishda yoza olamiz: $y' = f\left(\dfrac{a + b\cdot\dfrac{y}{x}}{a_1 + b_1\cdot\dfrac{y}{x}}\right) = g\left(\dfrac{y}{x}\right).$

II. c va c_1 lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsin. **A)** $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo'lgan hol. Bu holda $a_1 = ka, b_1 = kb$ tengliklarga ko'ra (5) tenglama $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{k(ax+by)+c_1}\right)$ ko'rinishni oladi. Tenglamada $z = ax + by$ almashtirish bajaramiz, bunda $z = z(x)$ – yangi noma'lum funksiya. Natijada $z' = bf\left(\dfrac{z+c}{kz+c_1}\right) + a = g(z)$ – erkli o'zgaruvchi qatnashmagan birinchi tartibli eng soda differensial tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi formulasida $z = ax + by$ almashtirish bajarsak (5) tenglamaning umumiy yechimi hosil boladi.

B) $\Delta \neq 0$ bo'lgan hol. Bu holda $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$ sistema yagona (x_0, y_0) yechimga ega. (5) tenglamada $x = X + x_0,\ y = Y + y_0$ almashtirish bajaramiz, bunda X – yangi erkli o'zgaruvchi, $Y = Y(X)$ – yangi noma'lum funksiya. Natijada $Y' = f\left(\dfrac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}\right)$ tenglama hosil bo'ladi. Bunday ko'rinishdagi tenglamani yuqorida o'rgandik. Bu tenglamaning umumiy yechimi formulasida $X = x - x_0, Y = y - y_0$ almashtirish bajarsak (5) tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi.

Ba'zan $y' = f(x, y)$ tenglamada $y = z^m$ alamashtirish bajarish bilan bir jinsli differensial tenglama hosil qilinadi, bunda $z = z(x)$ – yangi noma'lum funksiya.

Misol. $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirib integrallaylik. $y = z^m$ alamashtirish bajaramiz: $\dfrac{2}{3}xz^m mz^{m-1}z' = \sqrt{x^6 - z^{4m}} + z^{2m}$;

$z' = \dfrac{3}{2m}\cdot\dfrac{\sqrt{x^6 - z^{4m}} + z^{2m}}{xz^{2m-1}}$. Agar $6 = 4m$ bo'lsa ohirgi tenglamani (4) ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni $z' = \dfrac{\sqrt{x^6 - z^6} + z^3}{xz^2} = \sqrt{\left(\dfrac{x}{z}\right)^4 - \left(\dfrac{z}{x}\right)^2} + \dfrac{z}{x}$.

$z = ux$ almashtirish bajaramiz: $u + u'x = \sqrt{\dfrac{1-u^6}{u^4}} + u$; $\quad \dfrac{u^2du}{\sqrt{1-u^6}} = \dfrac{dx}{x}$;

$$\int\frac{d(u^3)}{\sqrt{1-(u^3)^2}} = 3\int\frac{dx}{x} + \ln C; \qquad \arcsin u^3 = \ln Cx^3; \qquad \arcsin\left(\frac{z}{x}\right)^3 = \ln Cx^3;$$

$\arcsin\frac{y^2}{x^3}=\ln Cx^3$ qaralayotgan tenglamaning umumiy yechimi.

Berilgan tenglamani integrlalsh jarayonida $xz^2, \sqrt{1-u^6}$ ifodalarga bo'lish bajarildi. $xz^2=0$ bo'lgan holni tekshiraylik. Bu holda $x=0$ hmda almashtirish formulasiga ko'ra $y=0$ fuksiyalar hosil bo'ladi. Bu funksiyalar berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi. $1-u^6=0$ bo'lgan holni o'rganaylik. Bu holda $u=1, u=-1$ o'z mavbatida $z=x,\ z=-x$ va bundan $y=x^{3/2},\ (x>0)$, $y=(-x)^{3/2},\ (x<0)$ funksiyalar hosil bo'ladi. Bu funksiyalar berilgan tenglamani qanoatlantiradi va umumiy yechimda $C=x^{-3}e^{\pi/2},\ C=x^{-3}e^{-\pi/2}$ bo'lgan holda hosil bo'ladi, ya'ni o'zgarmas parametr $x$ga bo'g'liq aniqlanyapti. Demak $y=x^{3/2},\ (x>0)$, $y=(-x)^{3/2},\ (x<0)$ funksiyalar tenglamaning mahsus yechimlari ekan.

Javob: $\arcsin\frac{y^2}{x^3}=\ln Cx^3,\ y=\begin{cases} x^{3/2},\ x>0 \\ (-x)^{3/2},\ x<0 \end{cases}.$

Eslatma. Differensia tenglamani integrallash vaqtida bo'lish amalidan foydalanilganda qaralayotgan tenglamaning yechimi yo'qotilishi mumkin. Shu sababli bo'luvchi ifoda nolga aylangan hollarni tekshirish shart. Bunda, aytaylik $y=\varphi(x)$ funksiya hosil bo'lsa birinchidan bu funksiya tenglamani yechimi bo'lishi tekshiriladi, ikkinchidan funksiyani umumiy yechimda y o'rniga qo'ib Cning qiymatini aniqlaymiz. Agar Cning qiymati bir qiymatli va chekli aniqlansa javobda $y=\varphi(x)$ funksiya alohida ko'rsatilmaydi. Agar Cning qiymati ∞ gat eng bo'lsa $y=\varphi(x)$ funksiya qaralayotgan tenglamaning hususiy yechimi bo'ladi va javobda alohida ko'rsatiladi. Agar Cning qiymati $x$ga bog'liq aniqlansa $y=\varphi(x)$ funksiya qaralayotgan tenglamaning maxsus yechimi bo'ladi va javobda alohida ko'rsatiladi.

3-Mavzu. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

Reja

1. Chiziqli differensial tenglama
2. Bernilli tenglamasi
3. Rikkati tenglamasi

1-reja. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y'=a(x)y+b(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamani aytamiz.

Teorema. Agar $a(x)$ va $b(x)$ funksiyalar biror I intervalda uzluksiz bo'lsa u holda $\Gamma=\{(x,y): x\in I, -\infty<y<\infty\}$ sohaning ihtiyoriy olingan (x_0,y_0) nuqtasidan (1) tenglamaning faqat bitta integral chizig'i o'tadi va bu chiziq

$$y=\left[y_0+\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}b(t)dt\right]e^{A(x)},\quad e^{A(x)}=\int_{x_0}^{x}a(t)dt \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi.

Isbot. $f(x,y)=a(x)y+b(x)$ funksiya Γ sohada Koshi teoremasining barcha shartlarini qanoalntiradi, yani $f(x,y)$ va $\frac{\partial f}{\partial y}=a(x)$ funksiyalar bu sohada uzluksizdir. Demak, Koshi teoremasiga ko'ra Γ sohaning ihtiyoriy olingan (x_0,y_0) nuqtasidan (1) tenglamaning faqat bitta integral chizig'i o'tadi. Endi (2) funksiya izlanayotgan yechim ekanini ko'rsatamiz. $y(x_0)=y_0$ ekani ravshan. (2) funksiyni hosilasini hisoblaymiz:

$$y'=\left[y_0+\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}b(t)dt\right]e^{A(x)}a(x)+e^{-A(x)}b(x)e^{-A(x)}=a(x)y+b(x)$$

Bu tengliklar (2) funksiya (1) tenglamani kanoatlantirishini ko'rsatadi. Teorema isbotlandi.

(2) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilishning **o'zgarmasni variatsiyalash** usuli bilan tanishamiz. $y'=a(x)y$ tenglama (1)ga mos bir jinsli tenglama deb ataladi. Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo'lib uning umumiy yechini yozaylik: $y=Ce^{A(x)}$. (1) tenglamani umumiy yehimini

$$y=C(x)e^{A(x)} \qquad (3)$$

ko'rinishda qidiramiz. (3) funksiyani va uning hosilasini (1)ga qo'yamiz:

$$C'(x)e^{A(x)}+C(x)e^{A(x)}a(x)=a(x)C(x)e^{A(x)}+b(x).$$

Bundan

$$C'(x)=e^{-A(x)}b(x),\quad C(x)=C+\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}b(t)dt.$$

$C(x)$ ning topilgan ifodasini (3)ga qo'ysak (1) tenglamanaing **umumiy yechimi** hosil bo'ladi:

$$y=\left[C+\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}b(t)dt\right]e^{A(x)}. \qquad (4)$$

(1) tenglamani umumiy yechimini **integallovchi ko'paytuvchi** usulida ham hosi qilish mumkin. $\mu(x)=e^{-A(x)}$ funksiya (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi. (1)ni bu funksiyaga ko'paytiramiz:

$$e^{-A(x)}y'-e^{-A(x)}a(x)y=e^{-A(x)}b(x);$$

$$\left(e^{-A(x)}y\right)'=e^{-A(x)}b(x);$$

$$e^{-A(x)}y=C+\int_{x_0}^{x}e^{-A(t)}b(t).$$

Ohirgi tenglikni $e^{A(x)}$ ifodaga ko'paytirsak (4) umumy yechim hosil bo'ladi.

Misol. $y'-\frac{2}{x}y=x$ tenglamani o'zgarmasni variatsiyalash usulida umumiy yechimini topamiz. Unga mos bir jinsli tenglama $y'-\frac{2}{x}y=0$. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2$. Berilgan tenglamani umuiy yechimini $y=C(x)x^2$ ko'rinishda qidiramiz.

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2}{x}\cdot C(x)x^2 = x$$

$$C'(x) = \frac{1}{x}, \quad C(x) = \ln|x| + C$$

Bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz: $y = x^2(\ln|x| + C)$

Endi tenglamani integrallovchi ko'paytuvchi usulida yechamiz. Uni $\mu(x) = e^{-\int\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$ ifodaga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x}, \qquad \left(\frac{1}{x^2}y\right)' = \frac{1}{x}, \qquad \frac{1}{x^2}y = \ln|x| + C, \qquad y = x^2(\ln|x| + C).$$

Javob: $y = x^2(\ln|x| + C)$.

2-reja. Bernulli tenglamasi deb

$$y' = a(x)y + b(x)y^m \qquad (5)$$

ko'rinishdagi tenglamani aytamiz. Agar $m = 0$ bo'lsa bu tenglama (1) ko'rinishni oladi. Agar $m = 1$ bo'lsa (5) tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadan iborat. Biz $m \neq 0$ va $m \neq 1$ bo'lgan holda (5) tenglamani integrallash ketma-ketligini ko'rib chiqamiz. (5)ni y^m ga bo'lamiz:

$$y^{-m}y' = a(x)y^{1-m} + b(x)$$

No'ma'lum funksiyani $z = y^{1-m}$ formula bilan almashtiramiz ($z' = (1-m)y^{-m}y'$):

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

Bu tenlama $z$ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamadir va biz uni integralalshni yuqorida ko'rib o'tdik.

Ta'kidlash joizki $m > 0$ bo'lgan holda (1) tenglama hamma vaqt $y = 0$ yechimga ega bo'ladi. Agar $m < 1$ bolsa bu yechim mahsus yechimdan, aks holda hususiy yechimdan iborat.

Misol. $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2$ tenglamani qaraymiz. Uni y^2 ga bo'lamiz:

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x}$$

Bu yerda $y^{-1} = z$ almashtirish bajaramiz, natijada: $z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$. Bu chiziqli tenglamani umumiy yechimi $z = \frac{1}{x}(C + x)$. Bundan $y = \frac{x}{C + x}$. Berilgan tenglamaning bu umumiy yechimga kirmagan $y = 0$ hususiy yechimi ham mavjud.

Javob: $y = \frac{x}{C + x}$, $y = 0$.

3-reja. Rikkati tenglamasi deb

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (6)$$

ko'rinishdagi tenglamani aytamiz. Agar $a(x) \equiv 0$ bo'lsa bu tenglama (1) ko'rinishni olai. Agar $c(x) \equiv 0$ bo'lsa (6) tenglama Bernulli tenglamasidan iborat bo'ladi.

Teorema. Agar Rikkati tenglamasining bitta hususiy yechimi ma'lum bo'lsa u holda uni kvadraturalarda integrallash mumkin.

Isbot. $y = y_1(x)$ funksiya (6) tenglamani qanoatlantirsin. U holda

$$y_1'(x) \equiv a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x) \qquad (7)$$

ayniyat o'rinli. (6) tenglamada $y = z + y_1(x)$ almashtirish bajaramiz:

$$z' + y_1'(x) = a(x)[z + y_1(x)]^2 + b(x)[z + y_1(x)] + c(x).$$

Bu va (7) tenglikdan $z' = [2a(x)y_1(x) + b(x)]z + a(x)z^2$ Bernulli tenglamasi hosil bo'ladi va uni kvadraturalara integrallanishi bizga ma'lum. Teorema isbotlandi.

Teorema isbotida ko'rdikki Rikkati tenglamasi Bernulli tenglamasining $m = 2$ bo'lgan holiga aylanadi. Misollar yechish vaqtida agar birdan $y = \frac{1}{z} + y_1(x)$ almashtirish bajarilsa Rikkati tenglamasini yechish chiziqli tenglamani integrallashga keladi.

Misollar yechish vaqtida (6) tenglamani hususiy yechimi berilmagan bo'lsa ba'zan uni biror ko'rinishda izlab topish mumkin bo'ladi. Bunda $a(x), b(x), c(x)$ funksiyalarning ko'rinishi hisobga olinadi.

Misol. $y' = xy^2 + x^2y - 2x^3 + 1$ tenglamani qaraymiz. Bu erda $y = x$ hususiy yechim. $y = \frac{1}{z} + x$ almashtirish bajaramiz, u holda $z' + 3x^2z = -x$ bundan

$$z = e^{-x^2}\left(C - \int xe^{x^2}dx\right).$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini yozamiz:

$$y = x + \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2}xdx}.$$

Javob: $y = x + \dfrac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2}xdx}$, $y = x$.

4-Mavzu. To'liq differensialli tenglama

Reja

1. To'liq differensialli tenglama
2. Integrallovchi ko'paytuvchi

1-reja. Agar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning chap tomoni Γ sohada biror $U(x, y)$ funksiyaning to'liq differensialidan iborat bo'lsa, y'ani

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa (1) tenglama Γ sohada **to'liq differensialli** deyiladi. To'liq differensialli tenglamani $dU(x, y) = 0$ ko'rinishda yozish mumkin. Bunga ko'ra uning **umumiy yechimi** $U(x, y) = C$ ko'rinihga ega.

Misol. Ushbu $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$ tenglamani to’liq differensialli bo’lishini tekshiramiz va umumiy yechimini topamiz. Buning uchun uning chap tomonini differensial ostiga kiritishga harakat qilamiz:

$$x^3dx+ydx+xdy-ydy=0; \qquad d\left(\frac{x^4}{4}\right)+d(xy)-d\left(\frac{y^2}{2}\right)=0;$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}\right)=0.$$

Demak berilgan tenglama to’liq differensialli ekan va uning umumiy yechimi:

$$\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C$$

Javob: $\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C$.

Har doim ham berilgan tenglamani to’liq differensialli bo’lishini to’g’ridan to’g’ri tekshirish oson kechmaydi. Bizga quyidagi teorema bu ishda qo’l keladi.

Teorema. (1) tenglama Γ sohada to’liq differensialli bo’lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (3)$$

ayniyat Γ sohada o’rinli bo’lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. (1) tenglama to’liq differensialli bo’lsin. U holda (2) tenglik o’rinli. Ushbu

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y), \ \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y) \qquad (4)$$

ayniyatlardan birinchisini y bo’yicha ikkinchisini x bo’yicha differensiallaymiz: $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}$. Bu tengliklarning chap qismlari aynan tengligidan (3) ayniyat o’rinli bo’lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. (3) ayniyat o’rinli bo’lsin. (2) tenglikni qanoatlantiruvchi $U(x,y)$ funksiya mavjudligini ko’rsatamiz, yanada aniqrog’i bu funksiyani quramiz. Uni quyidagi ko’rinishda qidiraylik:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y), \qquad (5)$$

bunda $\varphi(y)$ ihtiyoriy differensiallanuvchi funksiya, $(x_0,y_0)\in\Gamma$. Bu funksiya (4) tenkliklardan birinchisini qanoatlantirishi ravshan. $\varphi(y)$ funksiyani shunday tanlaylikki (4)ning ikkinchi tengligi ham o’rinli bo’lsin:

$$N(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y)$$

Bu erda (3) ayniyatdan foydalanamiz:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y)$$

Bunga ko'ra: $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C$. Buni (5)ga olib borib qo'ysak izlanayotgan $U(x, y)$ funksiya hosil bo'ladi: $U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C$. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremaga ko'ra (3) tenglik o'rinli bo'lsa (1) tenglamaning **umumiy yechimi**

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C$$

formula bilan ifodalanadi. Agar teorema isbotida $U(x, y)$ funksiyani $U(x, y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + \phi(x)$ ko'rinishda qidirganimizda (1) tenglamaning umumiy yechimini

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = C$$

formulasiga ega bo'lar edik.

Misol. Yana $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$ tnglamani qaraymiz. Bu erda

$$M = x^3 + y,\ N = x - y,\ \frac{\partial M}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1;$$

(3) shart o'rinli. Umumiy integralni

$$\int_{0}^{x} (x^3 + y)dx + \int_{0}^{y} (-y)dy = C$$

formuladan foydalanib hosil qilamiz. **Javob:** $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C$

2-reja. Yuqorida ko'rdikki to'liq differensialli tenglamani integrallash juda oson. Bu erda shunday savol tug'iladi: to'liq differensialli bo'lmagan tnglamani to'liq differensialli tenglamaga keltirish mumkinmi?

Agar (1) tenglamani $\mu(x, y)$ funksiyaga ko'paytirsak hosil bo'lgan

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \qquad (6)$$

tenglama to'liq differensialli bo'lsa $\mu(x, y)$ni (1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deb ataymiz. (6) tenglamaniny umumiy yechimi (1) tenglama uchun ham **umumiy yechim** bo'ladi. Demak to'liq differensialli bo'lmagan tenglamani integrallovchi ko'paytuvchisini topa olsak uni integrallay olamiz. Endi (1) tenlamani faqat $x$ga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchisini qidiramiz.

$$\mu(x)M(x, y)dx + \mu(x)N(x, y)dy = 0$$

tenglama to'liq differensialli bo'lishi uchun $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli. Bunga ko'ra:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{d\mu}{dx}N\,;$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\cdot dx$$

Bu tenglikni chap tomoni faqat $x$ga bog'liq. Demak yuqoridagi tenglik ma'noga ega bo'lishi, ya'ni (1) tenglama $\mu(x)$ ko'rinishdagi integraloovchi ko'paytuvchiga ega bo'lishi uchun $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=p(x)$ kasr faqat $x$ga bog'liq bo'lishi zarur. Bu holda integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ formula bilan aniqlanadi.

Yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yuritib (1) tenglama $\mu(y)$ ko'rinishdagi integraloovchi ko'paytuvchiga ega bo'lishi uchun $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=q(y)$ kasr faqat $y$ga bog'liq bo'lishi zarurligini va integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(y)=e^{\int q(y)dy}$ formula bilan topilishini aniqlash mumkin.

Takidlash joizki (1) tenglama $\mu(x,y)$ integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa uning **mahsus yechimi** $\dfrac{1}{\mu(x,y)}=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiyalar orasidan qidiriladi.

Misol. $(xy^2-y)dx+xdy=0$ tenglamani qaraylik. Bu yerda

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2(xy-1)}{xy^2-y}=\frac{2}{y}$$

Demak berilgan tenglama $\mu(y)=e^{\int\frac{2dy}{y}}=y^{-2}$ integrallovchi ko'paytuvchiga ega. Berilgan tenglamani y^{-2}ga ko'paytiramiz:

$$(x-\frac{1}{y})dx+\frac{x}{y^2}dy=0$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini yozamiz: $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{y}=C$. Berilgan tenglama mahsus yechimga ega, chunki $\dfrac{1}{\mu(x,y)}=y^2=0$ tenglikni va tenglamani o'zini $y=0$ funksiya qanoatlantiradi. **Javob:** $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{y}=C$, $y=0$.

5-Mavzu. Pikar teoremasining isboti

Reja

1. Koshi masalasiga ekvivalent integral tenglama

2. Yechim yaqinlashuvchi $\{y_k(x)\}$ funksional ketma-ketlikni tuzish

3. $\{y_k(x)\}$ ketma-ketlikning hossalari

4. Integral tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi

1-reja. Bizga

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0, \qquad (1)$$

Koshi masalasi berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik $f(x,y)$ funksiya

$$R = \{(x,y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

yopiq sohada aniqlangan bo'lsin.

Pikar teoremasi. Agar $f(x,y)$ funksiya R sohada uzluksiz (demak R sohada chegaralangan bo'ladi: $|f(x,y)| \le M$, M - musbat o'zgarmas son) va y o'zgaruvchi bo'icha Lipshis shartini qanoatlantirsa u holda (1) Koshi masalasi yagona yechimga ega. Bu yechim

$$I = \{x :\ |x - x_0| \le h\} \qquad (2)$$

intervalda uzliksiz differensiallanuvchi bo'lib $x$ning bunday qiymatlarida R sohadan tashqariga chiqib ketmaydi, bu erda $h = \min\left(a,\ \dfrac{b}{M}\right)$.

(1) Koshi masalasi

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (3)$$

integral tenglamaga ekvivalent. $y = \varphi(x)$ funksiya (1) masalani qanoatlantirsin. U holda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x)) \qquad (4)$$

ayniyatga va $\varphi(x_0) = y_0$ tenglikka egamiz. Bu ayniyatni $[x_0, x]$ oraliqda integrallaymiz:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(x,\varphi(x))dx. \qquad (5)$$

Bu erda $\varphi(x_0) = y_0$ tenglikni hisobga olsak $y = \varphi(x)$ funksiya (3) integral tenglamani ham qanoatlanirishi ko'rinadi.

Endi $y = \varphi(x)$ funksiya (3) integral tenglamani yechimi bo'lsin. U holda $\varphi(x_0) = y_0$ tenglik bajarilishi ravshan. Bundan tashqari (5) ayniyatga ham egamiz. (4)dan hosila olsak (5) ayniyat kelb chiqadi, ya'ni $y = \varphi(x)$ funksiya (1) masalani qanoatlantirishi ko'rsailda.

2-reja. (3) integral tenglama yechimiga yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlik quramiz. Birinchi yaqinlashish quyidagicha hisoblanadi:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx.$$

n-yaqinlashishni esa quyidagicha hisoblaymiz:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx,\quad n \ge 2.$$

Shunday qilib biz $\{y_k(x)\}$ funksional ketma-ketlikni qurib oldik.

3-reja. Qurilgan ketma ketlik quyidagi hossalarga ega.

1⁰. $y_k(x), k=1,2,...$ funksiyalar I intervalda uzluksiz.

Haqiqatdan ham $f(x,y_0)$ funksiya I intervalda uzluksizligidan $y_1(x)$ funksiyani Ida uzluksizligi kelib chiqadi. Ida $f(x,y_1(x))$ funksiyani uzluksizligidan $y_2(x)$ni uzluksizligi kelib chiqadi va h.k.

2⁰. $y_k(x), k=1,2,...$ funksiyalar $x\in I$ da R sohadan chiqib ketmaydi.

Bu hossani matematik induksiya metodi bilan isbotlaymiz:

$$|y_1-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le b$$

Demak $y_1(x)$ funksiya Rdan chiqib ketmaydi. Faraz qilaylik $y_k(x)$ funksiya R sohadan chiqib ketmasin. U holda $|y_k(x)-y_0|\le b$ o'rinli. Bundan

$$|y_{k+1}-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_k)dx\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le b$$

Demak $y_{k+1}(x)$ funksiya ham R sohadan chiqib ketmaydi.

3⁰. $\{y_k(x)\}$ funksional ketma-ketlik I intervalda tekis yaqinlashadi.

Hossani isbotlash uchun

$$y_0+[y_1-y_0]+[y_2-y_1]+...+[y_n-y_{n-1}]+... \qquad (6)$$

qatorning tekis yaqinlashuvchiligini ko'rsatish etarli. (6) qatorning har bir hadini baholaymiz:

$$|y_1-y_0|\le M|x-x_0|\le Mh$$

$$|y_2-y_1|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y_1)-f(x,y_0)]dx\right|\le L\int_{x_0}^{x}|y_1-y_0|dx\le$$

$$\le ML\int_{x_0}^{x}|x-x_0|dx=ML\frac{|x-x_0|^2}{2!}\le ML\frac{h^2}{2!}$$

Shunga o'hshash quyidagi tengsizliklarni ketma-ket hosil qilamiz:

$$|y_3-y_2|\le ML^2\frac{h^3}{3!}$$

………..

$$|y_n-y_{n-1}|\le ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}.$$

………….

Bundan ko'rinadiki (6) funksional qatorning har bir hadi musbat hadli

$$|y_0|+\sum_{k=1}^{\infty}ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}$$

sonli qatorning mos hadidan katta emas. Dalamber alomatiga ko'ra yuqoridagi sonli qator yaqinlashuvchi. Shu sababli Veyershtras teoremasiga ko'ra (6) qator hamda $\{y_k(x)\}$ funksional ketma-ketlik I intervalda tekis yaqinlashuvchidir.

4-reja. $\{y_k(x)\}$ ketma-ketlik $Y(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsin. U holda ushbu $|y_k(x)-y_0|\le b$ tengsizlikda $k\to\infty$ da limitga o'sak $|Y(x)-y_0|\le b$, yani $Y(x)$ funksiya Rdan chiqib ketmasligi ko'rinadi.

$y_n = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$ tenglikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak

$$Y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, Y(x))dx$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak $Y(x)$ funksiya (3) integral tenglamani qanoatlantiradi.

Endi bu yechim yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik boshqa $y^*(x)$ funksiya ham integral tenglamani qanoatlantirsin va $I_1 = \{x : |x-x_0|\le h_1\}$ intervalda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsin, bu erda $h_1\le h$. U holda

$$y^* \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y^*)dx$$

ayniyat o'rinli. $y_n - y^*$ ayirmani baholaymiz:

$$|y_0 - y^*| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(x, y^*)dx\right| \le M\,|x-x_0|$$

Shunga o'hshash quyidagi tengsizliklarni ketma-ket hosil qilamiz:

$$|y_1 - y^*| \le ML\frac{|x-x_0|^2}{2!}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$|y_n - y^*| \le ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ohirgi tengsizlikni o'ng qismi $n\to\infty$ da nolga intiladi. Bundan $\lim\limits_{k\to\infty} y_n = y^*$ ziddiyatli tenglik kelib chiqadi. Demak yuqorida (3) integral tenglama yana bir yechimga ega bo'lsin deb qilingan faraz noto'g'ri. Teorema to'la isbotlandi.

6-Mavzu. Differensial va integral tengsizliklar

Reja

1. Gronoull-Belman tengsizligi
2. Yagonalik teoremalari
3. Differensial tengsizlik

1-reja. 1-teorema. Agar $y(x)\ge 0$, $p(x)\ge 0$ va $q(x)\ge 0$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib ular uchun

$$y(x) \le q(x) + \int\limits_{a}^{x} p(t)y(t)dt \qquad (1)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $[a,b]$ oraliqda ushbu

$$y(x) \le q(x) + \int\limits_{a}^{x} p(t)q(t)e^{A(t,x)}dt, \qquad (2)$$

Gronoull-Belman tengsizligi ham o'rinli bo'ladi, bu erda $A(t,x)=\int_t^x p(s)ds$.

Isbot. $h(x)=\int_a^x p(t)y(t)dt$ belgilash kiritamiz. Bundan:

$$h'(x)=p(x)y(x), \qquad p(x)h(x)=p(x)\int_a^x p(t)y(t)dt$$

tengliklar kelib chiqadi. Ularni ayiramiz:

$$h'(x)-p(x)h(x)=p(x)\left[y(x)-\int_a^x p(t)y(t)dt\right]\le p(x)q(x)$$

Bu tengsizlikni $e^{A(x,u)}$ ga ko'paytiramiz va $[a,x]$ oraliqda integrallaymiz:

$$\int_a^x h'(t)e^{A(t,u)}dt-\int_a^x p(t)h(t)e^{A(t,u)}dt\le\int_a^x p(t)q(t)e^{A(t,u)}dt$$

Bu erda

$$\int_a^x h'(t)e^{A(t,u)}dt=h(t)e^{A(t,u)}\Big|_{t=a}^{t=x}+\int_a^x h(t)p(t)e^{A(t,u)}dt=$$

$$=h(x)e^{A(x,u)}-h(a)e^{A(a,u)}+\int_a^x h(t)p(t)e^{A(t,u)}dt$$

tengliklarni va $h(a)=0$ ni hisobga olsak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$h(x)e^{A(x,u)}\le\int_a^x p(t)q(t)e^{A(t,u)}dt.$$

Bundan: $h(x)\le\int_a^x p(t)q(t)e^{A(t,u)}e^{-A(x,u)}dt=\int_a^x p(t)q(t)e^{A(t,x)}dt$ kelib chiqadi. Bu erda $h(x)\ge y(x)-q(x)$ munosabatni qo'llasak (2) tengsizlik hosil bo'ladi. Teorema isbotlandi.

2-teorema. Agar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $y(x)\ge 0$, $p(x)\ge 0$ funksiyalar va $C\ge 0$ o'zgarmas son uchun

$$y(x)\le C+\int_a^x p(t)y(t)dt$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $[a,b]$ oraliqda ushbu

$$y(x)\le Ce^{A(a,x)}$$

Gronoull tengsizligi ham o'rinli bo'ladi

Isbot. 1-teoremani qo'llaymiz:

$$y(x)\le C+C\int_a^x p(t)e^{A(t,x)}dt=C-C\left(e^{A(t,x)}\Big|_{t=a}^{t=x}\right)=C-C\left(1-e^{A(a,x)}\right)=Ce^{A(t,x)}$$

3-teorema. Agar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $y(x)\ge 0$ funksiya $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$ o'zgarmas sonlar uchun

$$y(x) \le \int_a^x [\alpha y(t) + \beta]dt \qquad (4)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $[a,b]$ oraliqda ushbu

1) $y(x) \le \dfrac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(x-a)} - 1\right)$ (agar $\alpha > 0,\ \beta > 0$ bo'lsa)

2) $y(x) \le \beta(x-a)$ (agar $\alpha = 0,\ \beta > 0$ bo'lsa)

tengsizliklar ham o'rinli bo'ladi.

Isbot. (4) tengsizlikni o'zgartirib yozamiz:

$$y(x) \le \beta(x-a) + \int_a^x \alpha y(t)dt$$

Endi 1-teoremani qo'llaymiz:

$$y(x) \le \beta(x-a) + \int_a^x \alpha\beta(t-a)e^{\alpha(x-t)}dt =$$

$$= \beta(x-a) - \left.\beta(t-a)e^{\alpha(x-t)}\right|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \beta e^{\alpha(x-t)}dt = \int_a^x \beta e^{\alpha(x-t)}dt\,.$$

Bu erda agar $\alpha > 0,\ \beta > 0$ bo'lsa 1) tengsizlik, agar $\alpha = 0,\ \beta > 0$ bo'lsa 2) tengsizlk hosil bo'ladi.

2-reja. Bizga

$$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0 \qquad (5)$$

Koshi masalasi berilgan bo'lsin, bunda $f(x,y)$ funksiya $\Gamma = \{(x,y): x \in I, y \in I_y\}$ sohada aniqlangan.

4-Teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya Γ sohada y bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa u holda (5) masala ko'pi bilan bitta yechimga ega.

Isbot. (5) masala ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s))ds$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_2(s))ds$$

integral ayniyatlar o'rinli. Bundan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left|\int_{x_0}^x [f(s,y_1(s)) - f(s,y_2(s))]ds\right| \le L\int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)|ds\,.$$

Agar $z(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$ desak va $z(x) \le 0 + \int_{x_0}^x Lz(s)ds$ tengsizlikka Gronoull tengsizligini tadbiq etsak $z(x) \le 0$ munosabatni olamiz. Bundan $z(x) \equiv 0$, ya'ni $y_1(x) \equiv y_2(x)$ ayniyat kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

5-teorema. Agar $f(x,y)$ funksiya uchun (x_0, y_0) nuqtaning biror atrofida

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)|(x - x_0) \le k|y_1 - y_2|,\ 0 < k \le 1$$

tengsizlik o’rinli bo’lsa, u holda (5) masala ko’pi bilan bitta yechimga ega.

Isbot. (5) masala biror $|x-x_0|\le h$ oraliqda ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimga ega bo’lsin. Quydagi funksiyani kiritamiz:

$$F(x)=\frac{y_1(x)-y_2(x)}{x-x_0},\ x\ne x_0.$$

Quyidagi limitni Lopital qoidasini qo’llab hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{y_1'(x)-y_2'(x)}{1}=f(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)=0.$$

Agar $F(x_0)=0$ deb hisoblasak $F(x)$ funksiya $|x-x_0|\le h$ oraliqda uzluksiz funksiyaga aylanadi. Shu $F(x)$ funksiya $|x-x_0|\le h$ oraliqda aynan nolga teng bo’lishini ko’rsatsak teorema isbotlangan bo’ladi. Teskarisini faraz qilaylik. U holda $|x-x_0|\le h$ oraliqda shunday x_* nuqta topilaiki unda $|F(x)|$ funksiya o’zining maksimumiga erishadi, uni Q orqali belgilaylik. Bundan

$$0<Q=\left|\frac{y_1(x_*)-y_2(x_*)}{x_*-x_0}\right|=\frac{1}{x_*-x_0}\left|\int_{x_0}^{x_*}[f(x,y_1(x))-f(x,y_1(x))]\right|\le$$

$$\frac{1}{x_*-x_0}\left|\int_{x_0}^{x_*}\left|\frac{y_1(x)-y_2(x)}{x-x_0}\right|dx\right|\le\frac{1}{x_*-x_0}\int_{x_0}^{x_*}|F(x)|dx<Q.$$

Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

3-reja. Bizga ushbu

$$y'\le a(x)y+b(x) \qquad (6)$$

differensial tengsizlik berilgan bo’lsin, bu erda $x\in I$.

Ta’rif. Agar I intervalda uzluksiz differensiallanuvchi $y=\varphi(x)$ funksiya

$$\varphi'(x)\le a(x)\varphi(x)+b(x) \qquad (7)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa uni (6) differensial tengsizlikning I intervaldagi yechimi deb ataymiz.

6-teorema. Agar $y=\varphi(x)$, $\varphi(x_0)\le y_0$ funksiya (6) differensial tengsizlikning I intervaldagi yechimi bo’lsa u holda shu yechim uchun

$$\varphi(x)\le\left(y_0+\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-A(t)}dt\right)e^{A(x)} \qquad (8)$$

tengsizlik o’rinli, bu erda $A(x)=\int_{x_0}^{x}a(s)ds$.

Isbot. (7) tengsizlikni $e^{-A(x)}$ ga ko’paytiramiz va $[x_0,x]$ oraliqda integrallaymiz:

$$\int_{x_0}^{x}[e^{-A(t)}\varphi'(t)-e^{-A(t)}a(t)\varphi(t)]dt\le\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-A(t)}dt$$

Bu erda $\int_{x_0}^{x}[e^{-A(t)}\varphi'(t)-e^{-A(t)}a(t)\varphi(t)]dt=\varphi(t)e^{-A(t)}\Big|_{t=x_0}^{t=x}=\varphi(x)e^{-A(x)}-\varphi(x_0)$ tenglikni hisobga olsak

$$\varphi(x)e^{-A(x)} \le \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt\,.$$

Ohirgi tengsizlikda $\varphi(x_0) \le x_0$ ni hisobga olsak va $e^{A(x)}$ga ko'paytirsak (8) tengsizlik kelib chiqadi.

7-Mavzu. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar

Reja

1. Yechim tushunchasi
2. Koshi masalasi
3. Umumiy, hususiy va mahsus yechim
4. Kvadraturalarda integrallanuvchi ba'zi tenglamalar

1-reja. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli oddiy diffensial tenglamalar

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishda yoziladi. Agar (a,b) intervalda uzluksiz differensiallanuvchi $y = y(x)$ funksiya (1) tenglamani shu intervalda ayniyatga aylantirsa, yani $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ tenglik barcha $x \in (a,b)$lar uchun bajarilsa $y = y(x)$ funksiya (1) tenglamaning (a,b) intervaldagi **yechimi** deyiladi.

Agar parametrik ko'rinishda berilgan $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ funksiya uchun (t_0, t_1) intervalda $F(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}) \equiv 0$ ayniyat o'rinli bo'lsa bu funksiya (1) tenglamaning (t_0, t_1) intervaldagi **parametrik yechimi** deyiladi. (1) tenglamani yechimi **oshkormas** ko'rinishda aniqlanishi ham mumkin.

(1) tenglama har bir (x, y) nuqtada y'ning bitta yoki bir nechta qiymatini aniqlaydi. Har bir (x, y) nuqtada har bir y' ga mos Ox o'qinini musbat yo'nlishi bilan α ($tg\alpha = y'$) burchak tashkil etuvchi birlik vector chizamiz. Hatijada **yo'nalishlar maydoni** hosil bo'ladi.

2-reja. (1) differensial tenglamani $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi – **Koshi masalasi** deyiladi. Agar (1) tenglamani $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday ikkita yechimi (x_0, y_0) nuqtada umumiy urinmaga ega bo'lmasa (x_0, y_0) nuqtada **Koshi masalasi yagona yechimga ega** deyiladi. Agar (1) tenglamani $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo'lmasa yoki shu shartni qanoatlantiruvchi har qanday ikkita yechimi (x_0, y_0) nuqtada umumiy urinmaga ega bo'lsa (x_0, y_0) nuqtada **Koshi masalasi yechimi yagonaligi busiladi** deymiz.

Teorema. Agar $F(x, y, y')$ funksiya quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

1) $F(x, y, y')$ funksiya (x_0, y_0, y_0') nuqtaning biror atrofida o'zinin birinchi tartibli hususiy hoslilari bilan uzluksiz;

2) $F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') \ne 0$,

u holda (1) tenglamaning $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$ tengliklarni qanoatlantiruvchi $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y=y(x)$ yechimi mavjud va yagona.

Isbot. Oshkormas funksiyalar haqidagi teoremaga ko'ra (x_0, y_0, y'_0) nuqtaning atrofida (1) tenglamani y' ga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin: $y'=f(x,y)$, bu erda $f(x,y)$ funksiya (x_0, y_0) nuqtaning atrofida o'zining birinchi tartibli hususiy hosilalari bilan uzluksiz va $y'_0 = f(x_0, y_0)$. U holda Koshi teoremasiga ko'ra $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ Koshi masalasi $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida yagona $y=y(x)$ yechimga ega. Bu funksiya (1) tenglamani ham echimidir. Bu yechim $y'(x_0)=f(x_0, y(x_0))=y'_0$ tenglikni ham qanoatlantiradi.

3-reja. (1) differensial tenglama y' ga nisbatan yechilsin:

$$y' = f_k(x,y),\ k=1.2....,m \qquad (2)$$

(2) tenglamalarnin umumiy yechimlari to'pami (1) tenglamaning **umumiy yechimi** deyiladi. Kiritilgan ta'rif (2) tenglamalar soni cheksiz bo'lgan hol uchun ham o'rinli.

Misol. $$y'^2 + (y^2-1)y' - y^2 = 0 \qquad (3)$$

tenglamani qaaymiz. U ikkita tenglamaga ajraladi: $y'=1$, $y'=-y^2$. Bu tenglamalarning umumiy yechimini mos ravishda yozamiz:

$$y = x + C,\ y = \frac{1}{x+C}$$

Bu yechimlar to'plami (3) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi. Umumiy yechimni bitta munosabat bilan quyidagicha yozish mumkin:

$$(y-x-C)\left(y - \frac{1}{x+C}\right) = 0.$$

Javob: $(y-x-C)\left(y-\dfrac{1}{x+C}\right)=0$

$y=y(x)$ yechimning har bir nuqtasida Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'lsa u (1) tenglamaning **hususiy yechimi** deyiladi. $y=y(x)$ yechimning har bir nuqtasida Koshi masalasi yechimi yagonaligi buzilsa u (1) tenglamaning **mahsus yechimi** deyiladi.

Endi (1) tenglamani mahsus yechimini toppish masalasi bilan shug'ulanamiz.

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0 \end{cases}$$

sistemadan y' ni yo'qotib biror $y=y(x)$ funksiyaga ega bo'lamiz. Bu funksiya (1) tenglamaning **diskriminant chizig'i** deyiladi. (1) tenglama mahsus yechimga ega bo'lsa u diskriminant tenglamaning chizig'idan iborat bo'ladi.

Misol. $$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0 \qquad (4)$$

tenglamani qaraymiz. Diskriminant chiziqni topamiz:

$$\begin{cases} xy'^2 - 2yy' + 4x = 0 \\ 2xy' - 2y = 0 \end{cases} \qquad y' = \frac{y}{x} \qquad \frac{xy^2}{x^2} - \frac{2y^2}{x} + 4x = 0 \qquad y^2 = 4x^2.$$

Bu tenglam ikkita $y=\pm 2x$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi va ular (4) tenglamaning mahsus yechimidan iborat.

4-reja. $F(y')=0$ (5)

ko'rinishdagi faqat hosila qatnashgan tenglamalarni o'rganamiz. (5) tenglamani y'ga nisbatan haqiqiy yechimlari $y'=k_i$, $(i=1,...,m)$ deylik. U holda $y=k_i x+C$ yoki $k_i=\dfrac{y-C}{x}$ kelib chiqadi. $y'=k_i$ni hisobga olib buni (5) ga qo'ysak $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right)=0$ bu tenglamaning **umumiy yechimi** bo'ladi.

Noma'lum funksiya qatnashmagan tenglamani o'rganamiz:

$$F(x,y')=0 \qquad (6)$$

Bu tenglamani y'ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $y'=f_k(x)$, $k=1,..,m$ u holda uning **umumiy yechimi** $y=\int f_k(x)dx+C$, $k=1,..,m$ funksiyalar to'plamidan iborat.

(6) tenglamani $x$ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $x=\varphi(y')$. Bu tenglamani integrallash uchun $y'=p$ parametr kiritamiz. U holda $x=\varphi(p)$, $dy=pdx$ tengliklardan $dy=p\varphi'(p)dp$ yoki $y=\int p\varphi'(p)dp+C$ kelib chiqadi. Natijada (6) tenglamaning umumiy yechimi parametrik formada yoziladi:

$$x=\varphi(p),\ y=\int p\varphi'(p)dp+C.$$

Erkli o'zgaruvchi qatnashmagan tenglamani o'rganamiz:

$$F(y,y')=0 \qquad (7)$$

Bu tenglamani y'ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $y'=g_k(y)$, $k=1,..,m$ u holda uning **umumiy yechimi** $\int\dfrac{dy}{g_k(y)}=x+C$, $k=1,..,m$ funksiyalar to'plamidan iborat.

(6) tenglamani $y$ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $y=\varphi(y')$. Bu tenglamani integrallash uchun ham $y'=p$ parametr kiritamiz. U holda $y=\varphi(p)$, $dx=\dfrac{dy}{p}$ tengliklardan $dx=\dfrac{1}{p}\varphi'(p)dp$ yoki $x=\int\dfrac{1}{p}\varphi'(p)dp+C$ kelib chiqadi. Natijada (6) tenglamaning **umumiy yechimi** parametrik formada yoziladi:

$$y=\varphi(p),\ x=\int\frac{1}{p}\varphi'(p)dp+C$$

8-Mavzu. Parametr kiritish usuli

Reja

1. Noma'lum funksiyaga nisbatan yechilgan tenglama
2. Erkli o'zgaruvchiga nisbatan yechilgan tenglama
3. Lagranj tenglamasi
4. Klero tenglamasi

1-reja. Hoslilaga nisbatan yechilmagan

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

tenglamani noma'lum funksiyaga nisbatan yechish mumkin bo'lsin, ya'ni

$$y=f(x,y') \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsin. $y'=p$ deb belgilaymiz. Natijada (2) tenglama

$$y=f(x,p),\ y'=p$$

ko'rinishni oladi. Bundan

$$dy = f'_x dx + f'_p dp$$

Bu erda $dy = pdx$ o'rniga qo'yishni bajaramiz:

$$pdx = f'_x dx + f'_p dp \qquad p = f'_x + f'_p \frac{dp}{dx} \qquad (3)$$

Bu hosilaga nisbatan yechilgan tenglamadir. Uning umumiy yechimi $p = \omega(x, C)$ bo'lsa (2) tenglamaning **umumiy yechimi** $y = f(x, \omega(x, C))$ formula bilan aniqlanadi. Agar (3) tenglama $p = \gamma(x)$ mahsus yechimga ega bo'lsa (2) tenglamaning $y = f(x, \gamma(x))$ mahsus yechimga ega bo'lishi mumkin.

2-reja. (1) tenglamani erkli o'zgaruvchiga nisbatan yechish mumkin bo'lsin:

$$x = f(y, y') \qquad (4)$$

$y' = p$ deb belgilaymiz. Natijada (4) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = f(y, p), \ y' = p;$$

$$dx = f'_y dy + f'_p dp; \qquad \frac{1}{p} dy = f'_y dy + f'_p dp;$$

$$\frac{1}{p} = f'_y + f'_p \frac{dp}{dy}. \qquad (5)$$

Ohirgi tenglama hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamadir. Uning umumiy yechimi $p = \omega(y, C)$ bo'lsa (4) tenglamaning **umumiy yechimi** $x = f(y, \omega(y, C))$ formula bilan ifodalanadi. (5) tenglama $p = \gamma(y)$ mahsus yechimga ega bo'lsa (4) tenglama $x = f(y, \gamma(y))$ mahsus yechimga ega bo'lishi mumkin.

3-reja. Quyidagi ko'rinishdagi tenglama **Lagranj tenglamasi** deyiladi:

$$y = \varphi(y')x + \psi(y'). \qquad (6)$$

Lagranj tenglamasini hamma vaqt kvadraturalarda integrallash mumkin. Haqiqatdan ham $y' = p$ parametr kiritsak

$$y = \varphi(p)x + \psi(p), \ y' = p$$

$$pdx = \varphi(p)dx + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp$$

$$[\varphi(p) - p]dx + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

Bu – erkli o'zgaruvchisi p dan nomalum funksiyasi x dan iborat chiziqli differensial tenglamadir. Uning umumiy yechimi $x = \omega(p, C)$ bo'lsa (6) tenglamaning **umumiy yechimi**

$$y = \varphi(p)\omega(p, C) + \psi(p), \quad x = \omega(p, C)$$

parametrik ko'rinishda ifodalanadi.

Yuqorida (7) tenglamani $\varphi(p) - p$ ifodaga bo'lishni amalgam oshirdik. Agar p_i ($i = 1, ..., m$) sonlar $\varphi(p) = p$ tenglamaning ildizlari bo'lsa Lagranj tenglamasining quyidagi yechimlari ham kelib chiqadi:

$$y = p_i x + \psi(p_i), \ (i = 1, ..., m)$$

Bu yechimlar mahsus bo'lishi ham hususiy bo'lishi ham mumkin. Demak Lagranj tenglamasining **mahsus yechim**lari faqt to'g'ri chiziq bo'lishi mumkin.

Misol. Ushbu $y = xy'^2 + y'^2$ tenglamani qaraymiz. $y' = p$ parametr kiritamiz. Natijada: $y = xp^2 + p^2$

$$pdx = p^2dx + (2px + 2p)dp$$

$$(p^2 - p)dx + 2p(x+1)dp = 0$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{2}{1-p}$$

Bu chiziqli tenglamani umumiy yechimi: $x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1$. Bu ifodani $y = xp^2 + p^2$ ga qo'yamiz: $y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}$. Demak berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha parametrik ko'rinishda yoziladi

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Bu erda p ni yo'qotsak umumiy yechim oshkor ko'rinishni oladi:

$$y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$$

Tenglamani yechish jarayonida $p^2 - p$ ifodaga bo'lish bajarildi. Bu ifoda $p = 0$ va $p = 1$da nolga aylanadi. Bularni $y = xp^2 + p^2$ga qo'yib berilgan tenglamaning ikkita yechimini topamiz:

$$y = 0 \text{ va } y = x + 1.$$

Ulardan birinchisi mahsus yechim ikkinchisi hususiy yechimdir.

Javob: $y = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$, $y = 0$, $y = x + 1$

4-reja. Agar Lagranj tenglamasida $\varphi(y') \equiv y'$ bo'lsa u

$$y = y'x + \psi(y') \qquad (8)$$

ko'rinishni oladi. (8) tenglama **Klero tenglamasi** deb ataladi. Bu erda ham $y' = p$ parametr kiritamiz. Natijada

$$y = px + \psi(p) \qquad (9)$$

$$dy = pdx + [x + \psi'(p)]dp$$

$$pdx = pdx + [x + \psi'(p)]dp$$

$$[x + \psi'(p)]dp = 0$$

Ohirgi tenglama ikkita tenglamaga ajraladi:

$$dp = 0 \text{ va } x = -\psi'(p) \qquad (10)$$

Ularning birinchsidan $p = C$ kelib chiqadi va buni (9)ga qo'ysak (8) tenglamaning **umumiy echimi**ni hosil qilamiz: $y = Cx + \psi(C)$. Berilgan tenglama va umumiy yechim ko'rinishlarini taqqoslab shunday hulosaga kelamiz: Klero tenglamasining umumiy yechimini yozish uchun tenglamda $y' = C$ o'rniga qo'yish bajarish kifoya. (10)ning ikkinchi tenglamasidan Klero tenglamasining yana bir yechimi paydo bo'ladi:

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p), \qquad x = -\psi'(p) \quad (11)$$

Parametrik ko'rinishdagi bu yechim **mahsus yechim** bo'lishini isbotlaymiz. Avvalgi darsda ta'kidlanganidek (8) tenglamaning mahsus yechimi diskriminant chiziqlar orasida bo'ladi. Bu chiziq

$$\begin{cases} y = y'x + \psi(y') \\ 0 = x + \psi'(y') \end{cases}$$

sistemadan y' ni yo'qotib aniqlanadi. Bu sistema va (11) tengliklarni solishtirsak, (11)dan p ni yo'qotsak ham ayni diskriminant chiziq hosil bo'lishini ko'rish mumkin. Qolaversa (11) funksiya Klero tenglamasining yechimidan iborat. Demak u mahsus yechimdir.

Misol. Ushbu $y = y'x - \frac{1}{4}y'^2$ tenglamani qaraymiz. $y' = C$ o'rniga qo'yishni bajarib umumiy yechimni aniqlaymiz: $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$.

Bu tenglamaning diskriminant chizigini topaylik:

$$\begin{cases} y = Cx - \frac{1}{4}C^2 \\ 0 = x - \frac{1}{2}C \end{cases}$$

Bu sistemadan $y = x^2$ fuksiyani aniqlaymiz. Bu funksiya berilgan tenglamaning mahsus yechimidir. **Jabob:** $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$, $y = x^2$

9-Mavzu. n-tartibli oddiy differensial tenglamalar

Reja

1. Yechim tushunchasi. Koshi masalasining qo'yilishi.
2. Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi
3. Umumiy yechim
4. Oraliq integrallar

1-reja. Ushbu

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama n**- tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi**. Faraz qilaylik (1) tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan yechish mumkin:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (2).$$

Bu tenglama **yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan** n**- tartibli oddiy differensial tenglama** deyiladi.

Agar I intervalda uzluksiz n marta differensiallanuvchi $y = y(x)$ funksiya uchun shu intervalda $F(x, y, y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0$ ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda $y = y(x)$ funksiyani (1) tenglamaning I intervaldagi **yechimi** deb ataymiz.

(2) tenglama uchun **Koshi masalasi.** (2) tenglamaning barcha $y = y(x)$ yechimlari orasidan

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi yechimni toping, bu erda (3) tengliklar boshlang'ich shart, $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ sonlar esa boshlang'ich qiymatlar deyiladi.

(1) tenglama uchun **Koshi masalasi** ham (1) tenglamaga qo'yilganidek keltiriladi. Lekin (1) tenglamani (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi har qanday ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlari uchun $y_1^{(n)}(x_0) \neq y_2^{(n)}(x_0)$ munosabat o'rinli bo'lsa Koshi masalasining yechimi mavjud va yagona hisoblanadi. Agar (1) tenglamaning (3) shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilmasa yoki ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlari (3) shartni va $y_1^{(n)}(x_0) = y_2^{(n)}(x_0)$ tenglikni qanoatlantirsa Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi buziladi deb aytamiz.

2-reja. Bu erda (2) tenglama uchun Koshi masalasi yechiminning mavjudligi va yagonaligi haqidagi asosiy teoremani (Pikar teoremasi) isbotsiz keltirib o'tamiz.

Teorema. $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y_0'| \leq b, ..., |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b$$

sohada aniqlangan bo'lib quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsin:

1) R sohada $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya o'zining barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz (demak chegaralangan, ya'ni $|f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})| \leq M$, bunda M o'zgarmas musbat son;

2) $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiyaning $y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)}$ argumentlar bo'yicha hususiy hosilalari R sohada chegaralangan, ya'ni $\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}\right| \leq K$, $(l = 0, 1, ..., n-1)$, bu era K o'zgarmas musbat son.

U holda (2) tenglamaning (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ yechimi mavjud va yagonadir. Bu yechim n-tartibli hosilalari bilan birga biror $I = \{x : |x - x_0| \leq h\}$ intervalda uzluksizdir.

Bu teoremaning isboti hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaga keltirilganidek amalgam oshiriladi.

Endi (1) tenglama uchun qo'ilgan Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani kltiramiz.

Teorema. Agar $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ funksiya quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa:

1) $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ funksiya $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)})$ nuqtaning biror yopiq atrofida o'zining barcha hususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz differensiallanuvchi;

2) $F(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) = 0$;

3) $F'_{y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) \neq 0$,

u holda (1) tenglamani (3) boshlangich shartni va $y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ tenglikni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ yechimi mavjud va yagona. Bu yechim $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida n-tartibli hosilalari bilan birga uzluksizdir.

Bu teoremaning isbotlash hosilaga nisbatan yechlmagan birinchi tartibli oddiy ifferensial tenglama uchun keltirilganidek olib boriladi.

3-reja. D orqali shunday $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ nuqtalar to'plamini belgilaylikki bu nuqtada (2) tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'lsin. Agar 1) $C_1, C_2, ..., C_n$ parametrlarning ihtiyoriy qiymatida ham $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$

funksiya (2) tenglamani qanoatlantirsa; 2) D to'plamdan olingan har bir $(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ nuqta uchun

$$\begin{cases} y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n) \\ y'=\varphi'(x,C_1,C_2,...,C_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x,C_1,C_2,...,C_n) \end{cases} \qquad (4)$$

sistemanini $C_1,C_2,...,C_n$ larga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin bo'lsa u holda $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ funksiyani (2) differensial tenglamaning D to'plamdagi **umumiy yechimi** deb ataymiz.

Umumiy yechimning bitta muhim hossasini aytib o'tamiz. (4) sistemadan aniqlangan $C_1,C_2,...,C_n$ parametrlarning qiymatlarini $y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x,C_1,C_2,...,C_n)$ tenglikka qo'ysak (2) tenglama hosil bo'ladi. Bu n parametrli chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzish qoidasi hamdir.

Misol. $y''+y=0$ tenglamani $y(0)=1$, $y'(0)=0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ formula bilan ifodalanadi. Bundan Koshi maslasining yechimini aniqlash mumkin: $y=\cos x$.

(1) tenglama $y^{(n)}=f_k(x,y,y',...,y^{(n-1)})$, $k=1,...,m$ tenglamalarga ajratilishi mumkin bo'lsin. Bu yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamalarning umumiy yechimlari to'plami (1) tenglamaning **umumiy yechimi** deyiladi.

Misol. $(y'')^2=x^4$ tenglamani qaraylik. Bu tenglama ikkita $y''=x^2$ va $y''=-x^2$ differensial tenglamaga ajraladi. Ularning umumiy yechimlarini mos ravishda yozamiz: $y=\dfrac{x^4}{12}+C_1x+C_2$, $y=-\dfrac{x^4}{12}+C_1x+C_2$. Ular birgalikda berilgan tenglamaning umumiy yechimini beradi.

4-reja. Bizga

$$\varphi(x,y,y',...,y^{(k)},C_1,C_2,...,C_{n-k})=0 \qquad (5)$$

tenglik berilgan bo'lsin. Bu tenglikni x bo'yicha $n-k$ marta differensiallab hosil bo'lgan $n-k$ ta tenglikdan $C_1,C_2,...,C_{n-k}$ parametrlarni yo'qotsak natijada (1) tenglama hosil bo'lsa (5)ni (1) differensial tenglamaning **oraliq integrali** deb ataymiz. Hususan (5) tenglikda faqat bitta o'zgarmas parametr qatnashsa u (1) differensial tenglamaning **birinchi integrali** deyiladi.

Misol. $y''=2\sqrt{y'}$ ikkinchi tartibli differensial tenglamaning birinchi integrali $y'-(x+C_1)^2=0$ tenglik bo'lishini tekshiramiz. Bu tenglikni x bo'yicha differensiallaylik: $y''-2(x+C_1)=0$. Bundan: $y''=2(x+C_1)=2\sqrt{y'}$, berilgan tenglama hosil bo'ldi.

10-Mavzu. n-tartibli differensial tenglamalarning kvadraturalarda integrallanuvchi ba'zi turlari

Reja

1. n-tartibli differensial tenglamalarning kvadraturalarda integrallanuvchi ba'zi turlari.

2. Tartibi kamayadigan differensial tenglamalar

1-reja. 1. Dastlab

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamani o'rganaylik. Agar $f(x)$ funksiya I intervalda uzluksiz bo'lsa bu tenglamani kvadraturalarda integrallash mumkin. (1) tenglamani n marta ketma-ket integrallab, umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx\ldots dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n \qquad (2)$$

Quydagi Direhle formulasini isbotlaymiz:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n\ ta} f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{n\ ta} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{n-1}dx$$

Isbotni matematik induksiya usulida olib boramiz. Dastlab n=2 uchun isbotlaylik: $\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f_1(x)$ deb hisoblaylik. U holda

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx = \int_{x_0}^{x} f_1(z)dz = \begin{bmatrix} u = f_1(z) & dv = dz \\ du = f(z)dz & v = z \end{bmatrix} = zf_1(z)\Big|_{z=x_0}^{z=x} - \int_{x_0}^{x} zf(z)dz =$$

$$x\int_{x_0}^{x} f(z)dz - \int_{x_0}^{x} zf(z)dz = \int_{x_0}^{x}(x-z)f(z)dz$$

n=k uchun Direhle formulasi o'rinli bo'lsin, yani

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{k\ ta} f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{k\ ta} = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{k-1}dx$$

tenglikka egamiz. Quydagi tenglikni isbotlash kerak

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{k+1\ ta} f(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{k+1\ ta} = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{k}dx$$

$f_1(x)$ funksiya uchun quydagi tenglikni yoza olamiz:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{k\ ta} f_1(x)\underbrace{dxdx\ldots dx}_{k\ ta} = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f_1(z)(x-z)^{k-1}dx$$

Bu tenglikning o'ng tomonini bo'laklab integrallaylik:

$$\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f_1(z)(x-z)^{k-1}dx = \begin{bmatrix} u = f_1(z) & dv = (x-z)^{k-1} \\ du = f(z)dz & v = -\dfrac{(x-z)^{k}}{k} \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{(x-z)^k}{k!}f_1(z)\Bigg|_{z=x_0}^{z=x}+\frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x}f(z)(x-z)^k dz=\frac{1}{k!}\int\limits_{x_0}^{x}f(z)(x-z)^k dz$$

Direhle formulasi isbotlandi. (2) ni bu formulasi yordamida soddaroq ko'rinishda yozish mumkin:

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}f(z)(x-z)^{n-1}dx+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+...+C_{n-1}(x-x_0)+C_n$$

2. Endi

$$F(x,y^{(n)})=0 \qquad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamani qaraymiz. Agar $F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$ ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda (3) tenglamani kvadraturalarda integrallash mumkin. Bu erda $x=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$ tengliklarga egamiz. Bundan

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1=\psi_1(t,C_1)$$

Bu erdan esa

$$dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx=\psi_1(t,C_1)\varphi'(t)dt$$

$$y^{(n-2)}=\int\psi_1(t,C_1)\varphi'(t)dt+C_2=\psi_2(t,C_1,C_2)$$

Shunday mulohazalar yuritib (3) tenglamaning umumiy yechimini parametrik ko'rinishda hosil qilamiz:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n).$$

Misol. $e^{y''}+y''=x$ bu tenglamada $y''=t$, $x=e^t+t$ almashtirsak ayniyat hosil bo'ladi. Bu tengliklarga ko'ra

$$dy'=y''dx=t(e^t+1)dt \qquad y'=(t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1$$

$$dy=y'dx=\left((t-1)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\right)(e^t+1)$$

$$y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+C_1-1\right)e^t+\frac{t^3}{6}+C_1t+C_2.$$

Javob: $x=e^t+t$, $y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+C_1-1\right)e^t+\frac{t^3}{6}+C_1t+C_2$

3. $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ (4) ko'rinishdagi tenglamani qaraylik. Bu tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$. Agar $z=y^{(n-1)}$ desak $z'=f(z)$ - o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga kelamiz. Uning umumiy yechimi $z=\omega(x,C_1)$ bo'lsa belgilashimiz bo'yicha

$$y^{(n-1)}=\omega(x,C_1)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama (1) ko'rinishga ega va uni integrallay olamiz.

Agar (4) tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan yechish mumkin bo'lmasa, lekin $F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$ ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda ham (4)ni kvadraturalarda integrallay olamiz. Bu erda $y^{(n-1)}=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$ tengliklarga egamiz. Bundan

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx \qquad\qquad dx=\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

Bu erdan $x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C_1=\psi_1(t,C_1)$, $y^{(n-1)}=\varphi(t)$ tengliklarga egamiz. 2-punktda aynan shunday parametrik tengliklarga ega bo'lgan holda (3) tenglamani integrallashni ko'rgan edik. Ana shu mulohazalarni takrorlab (4) tenglamani umumiy yechimini hosil qilish mumkin.

4. $F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$ (5) ko'rinishdagi tenglamani o'rganamiz. Faraz qilaylik bu tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan yechish mumkin bo'lsin: $y^{(n)}=f(y^{(n-2)})$. Bu erda $y^{(n-2)}=z$ deb olsak $z''=f(z)$ tenglamaga kelamiz. Uni $2z'dx$ ga ko'paytiramiz:

$$2z'z''dx=2f(z)zdx \qquad\qquad d(z'^2)=2f(z)dz$$

$$z'^2=2\int f(z)dz+C_1 \qquad\qquad z'=\sqrt{2\int f(z)dz+C_1}$$

Ohirgi o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani yechimi $z=\varphi(x,C_1,C_2)$ bo'lsin. Belgilashimizga ko'ra $y^{(n-2)}=\varphi(x,C_1,C_2)$ (1) k'rinishdagi tenglamaga kelamiz.

Agar (5) tenglamani $y^{(n)}$ga nisbatan yechish mumkin bo'lmasa, lekin $F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$ ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda ham (5)ni kvadraturalarda integrallay olamiz. Bu erda $y^{(n-2)}=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$ tengliklarga egamiz. Bundan

$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx \qquad\qquad dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx$$

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)}=y^{(n)}dy^{(n-2)} \qquad\qquad d\left(y^{(n-1)}\right)^2=2\psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1}=\psi_1(t,C_1)$$

Demak biz $y^{(n-1)}=\sqrt{2\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1}=\psi_1(t,C_1)$ va $y^{(n-2)}=\varphi(t)$ tengliklarga egamiz. 3-punktda bunday tengliklarga ega bo'lgan holda (4) tenglamani integrallashni ko'rganmiz. Ana shu mulohazalarni yuritib (5) tenglamani integrallash mumkin.

2-reja. A. $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$ ko'rinishdagi tenglamalarda $z=y^{(k)}$ almashtirish yordamida yangi z funksiya kiritsak tenglama tartibi $k$ga kamayadi, ya'ni $F(x,z',z'',...,z^{(n-k)})=0$ tenglamaga kelamiz.

B. $F(y,y',...,y^{(n)})=0$ ko'rinishdagi tenglamalarda y ni erkli o'zgaruvchi deb hisoblab, $y'=z$ almashtirish bilan yangi z funksiyani kiritsak berilgan tenglamaning tartibi bittaga kamayadi.

Misol. $(1+y^2)yy''=(3y^2-1)y'^2$ tenglamada $z=y'$ desak $y''=z'y'=z'z$. Bundan $(1+y^2)yz'z=(3y^2-1)z^2$ o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama.

C. Agar $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ tenglamada F funksiya $y,y',...,y^{(n)}$larga nisbatan bir jinsli bo'lsa, ya'ni $F(x,ty,ty',...,ty^{(n)})=t^mF(x,y,y',...,y^{(n)})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $z=\dfrac{y'}{y}$ almashtirish bilan yangi funksiya tenglama tartibini bittaga kamaytirish mumkin.

Misol. $xyy''+xy'^2-yy'=0$ tenglama y, y', y'' larga nisbatan bir jinslidir. $y'=yz$ $y''=y'z+yz'=y(z^2+z')$. Bundan $xy^2(z^2+z')+xy^2z^2-y^2z=0$ yoki $xz'+2xz^2-z=0$. Bernulli tenglamasi hosil bo'ldi.

D. Agar $F(tx, t^k y, t^{k-1}y', ..., t^{k-n}y^{(n)})=t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ tenglik o'rinli bo'lsa $F(x, y, y', ..., y^{(n)})=0$ tenglama umumlashgan bir jinsi deyladi. Bu tenglamada $x=e^t$, $y=ze^{kt}$ almashtirish bajarsak erkli o'zgaruvchi t, noma'lum funksiya $z$dan iborat tartibi $n-1$ga teng differensial tenglama hosil bo'ladi.

E. Agar $F(x, y, y', ..., y^{(n)})=0$ tenglamaning chap tomoni biror $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiyadan $x$bo'yicha olingan hosilaga teng bo'lsa, ya'ni $F(x, y, y', ..., y^{(n)})=\dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ tenglik o'rinli bo'lsa u holda qaralayotgan tenglamaning birinchi integrali $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})=C_1$ dan iborat. Demak bu holda englama tartibi bittaga kamayadi.

Misol. $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=0$ tenglamaning chap tomoni $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ ifodaning to'liq differensialidan iborat. Demak $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$ tenglamaning birinchi integralidan iborat.

11-Mavzu. n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar

Reja

1. n-tartibli chiziqli tenglamalarning umumiy hossalari
2. n-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamalar
3. Funksiyalarning chiziqli erkliligi tushunchasi
4. Ostrogradskiy-Liuvill formulasi.

1-reja. n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=g(x) \qquad (1)$$

Agar bu tenglamaning $p_1(x),\ p_2(x),\ ...,\ p_n(x),\ g(x)$ koeffisientlari I intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda (1) tenglamaning $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ boshlangich shartni qanoatlantiruvchi $y=y(x)$ yechimi mavjud va yagona, bu erda $x_0\in I$. Chunki faraz qilingan shartlar o'rinli bo'lgan vaqtda Pikar teoremasi shartlari bajariladi.

(1) differensial tenglamaning iikita muhim hossasini keltiramiz:

1$^{\text{o}}$. Erkli o'zgaruvchini almashtirish natijasida (1) differensial tenglama yana chiziqli differensial tenglamaga o'tadi.

2$^{\text{o}}$. Homa'lum funksiyani $y=\alpha(x)z+\beta(x)$ - chiziqli almashtirish natijasida (1) tenglama yana chiziqli differensial tenglamaga o'tadi.

Bundan keyingi yozuvlarni qisqartirish maqsadida quydagi **differensial operator**ni kiritamiz:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y .$$

$L(y)$ operator quyidagi hossalarga ega

1°. $L(ky) = kL(y)$, k - const.

2°. $L(y_1 + y_2) = L(y_1 + y_2)$.

$L(y)$ operator yordamida (1) tenglama $L(y) = g(x)$ ko’rinishda yoziladi.

2-reja. Agar (1) tenglamada $g(x) \equiv 0$, $x \in I$ bo’lsa bunday differensial tenglama

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \qquad (2)$$

chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi. $L(y)$ operator yordamida bu tenglama $L(y) = 0$ ko’rinishda yoziladi.

(2) tenglama yechimlarining hossalari;

1°. Agar $y = y_1(x)$ funksiya I intervalda (2) tenglamani yechimi bo’lsa, u $y = ky_1(x)$ funksiya ham (2)ning yechimi bo’ladi.

2°. Agar $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ funksiyalar I intervalda (2) tenglamani yechimlari bo’lsa, u holda ularning $y = y_1(x) + y_2(x)$ yigindisi ham (2)ning yechimi bo’ladi.

3°. Agar $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, …, $y = y_m(x)$ funksiyalar (2) tenglamani yechimlari bo’lsa, u holda ularning $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_m y_m(x)$ chiziqli kombinatsiyasi ham (2)ning yechimi bo’ladi.

3-reja. Ta’rif. Agar bir vaqtda nolga teng bo’lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o’zgarmas sonlar mavjud bo’lsaki I intervalda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \qquad (3)$$

ayniyat o’rinli bo’lsa, u holda $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar I intervalda chiziqli bog’liq deyiladi. Aks holda $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli deyiladi.

Agar $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalardan biri I intervalda aynan nolga teng bo’lsa, u holda bu funksiyar I intervalda chiziqli bog’liq bo’ladi.

1-Misol. $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ funksiyalar $(-\infty, +\infty)$ intervalda chiziqli bog’liqdir.

2-Misol. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, …, $y_n = x^{n-1}$ funksiyalar $(-\infty, +\infty)$ intervalda chiziqli erkli.

Funksiyalarning chiziqli bog’liq yoki erkliligini ta’rif bo’yicha tekshirish hamma vaqt ham oson emas. Tekshirishni osonlashtirish maqsadida Vronskiy determinanti tushunchasini kiritamiz. $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar $n-1$tartibli hosilaga ega deb faraz qilaylik va quyidagi **Vronskiy determinantini** tuzaylik:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

1-teorema. Agar $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar I intervalda chiziqli bog’liq bo’lsa, u holda ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti I intervalda aynan nolga teng bo’ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko’ra $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0$ ayniyat o’rinli va bunda α_i, $i = 1,2,..,n$ lardan birortasi noldan farqli. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $\alpha_n \neq 0$ deb olaylik. U holda:

$$y_n \equiv -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}.$$

Bu tenglikdan $n-1$ marta hosila olib natijalarni Vronskiy determinantidagi $y_n, y_n', ..., y_n^{(n-1)}$ lar o’rniga mos ravishda qo’yamiz:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1}' & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1' - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2' - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}' \\ \cdots\cdots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)} - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)} - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Bu determinantning ohirgi usyuni qolgan ustunlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Shuning uchun $W(x) \equiv 0$. Teorema isbotlandi.

Shuni takidlash kerakki isbotlangan teorema n ta $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyaning chiziqli bog’liq bo’lishi uchun faqat zaruriy shartni beradi, ya’nu bu shart umuman olganda etarli emas. Endi (2) tenglamaning koeffisientlari I intervalda uzluksiz va $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalarning har biri I intervalda (2) tenglamaning yechimi deb faraz qilaylik.

2-teorema. Agar va $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli bo’lishi uchun ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti I intervalning birorta nuqtasida ham nolga aylanmasligi zarur va etarli.

Isbot. Zarurligi. $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli bo’lsin. $W(x) \neq 0$ munosabat barcha $x \in I$ lar uchun o’rinli bo’lishini ko’rsatish kerak. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni $x_0 \in I$ nuqtada $W(x_0) = 0$ bo’lsin.Quyidagi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ noma’lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + ... + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + ... + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Bu sistemaning determinanti aynan $W(x_0)$dan iborat va nolga teng. Shuning uchun sistemaning sistemaning nolga teng bo’lmagan yechimlari cheksiz ko’p. Ulardan birini olaylik: $\alpha_1 = \alpha_1^{(0)}, \alpha_2 = \alpha_2^{(0)}, ..., \alpha_n = \alpha_n^{(0)}$. Endi aynan nolga teng bo’lmagan

$$y = \alpha_1^{(0)} y_1 + \alpha_2^{(0)} y_2 + ... + \alpha_n^{(0)} y_n \qquad (5)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya (2) tenglamaning

$$y(x_0) = y'(x_0) = ... = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad (6)$$

boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat. Boshqa tomondan $y = 0$ funksiya (2) tenglamaning (6) boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat.

Pikar teoremasiga zid natijaga keldik. Demak $W(x)\neq 0$ munosabat barcha $x\in I$ lar uchun o'rinli.

Yetrarliligi. $W(x)\neq 0$ munosabat barcha $x\in I$ lar uchun o'rinli bo'lsin. $y_1, y_2,..., y_n$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli bo'lishini ko'rsatish kerak. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y_1, y_2,..., y_n$ funksiyalar I intervalda chiziqli bog'liq bo'lsin. U holda 1-teoremaga ko'ra bu intervalda $W(x)\equiv 0$ bo'ladi. Bu ziddiyat yuqoridagi faraz noto'g'riligidan kelib chiqdi. Teorema to'la isbotlandi.

4-reja. 3-teorema. (2) tenglamaning $y_1, y_2,..., y_n$ yechimlaridan tuzilgan Vronskiy determinanti uchun quyidagi formula o'rinli:

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p_1(t)dt} \qquad (7)$$

Isbot. $W(x)$ determinantning hosilasini hisoblaymiz:

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=-p_1(x)W(x)$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaning umumiy yechimi $W(x)=Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x}p_1(t)dt}$ formula bilan yoziladi. $W(x_0)=C$ munosabatni hisobga olsak (7) formula o'rinli bo'ladi.

Agar ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani bitta hususiy yechimi ma'lum bo'lsa (7) formuladan foydalanib uni integrallash mumkin.

12-Mavzu. n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi

Reja

1. Fundamental yechimlar sistemasi
2. Umumiy yechimni qurish
3. Berilgan fundamental yechimlar sistemasiga ega chiziqli bir jinsli tenglamani qurish
4. Chiziqli erkli hususiy yechimlaridan foydalanib chiziqli bir jinsli tenglamaning tartibini pasaytirish

1-reja. Ta'rif. n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning n ta $y_1, y_2,..., y_n$ yechimi I intervalada chiziqli erkli bo'lsa ular **fundamental yechimlar sistemasi** deb ataladi.

1-Teorema. Agar

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (1)$$

tenglamaning koeffisientlari I intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda bu intervalda (1) tenglamaning fundamental yechimlar sistemsi mavjud.

Isbot. $x_0\in I$ nuqtani ihtiyoriy tanlab olaylik. Pikar teoremasiga ko'ra (1) tenglamaning $y(x_0)=1,\quad y'(x_0)=y''(x_0)=...=y^{(n-1)}(x_0)=0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona, bu yechim y_1 bo'lsin. (1) tenglamaning $y'(x_0)=1$, $y(x_0)=y''(x_0)=...=y^{(n-1)}(x_0)=0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi y_2 funksiya bo'lsin. Shu ketma ketlikda $y_3,...,y_n$ funksiyalarni tanlab boramiz. Tanlangan $y_1,y_2,...,y_n$ yechimlar I intervalda chiziqli erkli bo'lishini ko'rsatsak teorema isbotlangan bo'ladi. Bu yechimlardan tuzuligan $W(x)$ determinantning $x=x_0$ nuqtadagi qiymati 1ga teng. Oldingi darsda isbotlangan 2-teoremaga ko'ra $y_1,y_2,...,y_n$ yechimlar chiziqli erklidir.

Teoremani isbotlash usulidan ko'rinadiki (1) tenglama cheksiz ko'p fundamental yechimlar sistemasiga ega. Chunki boshlang'ich qiymat sifatida n^2ta 1 va 0 ishlatildi. Aslida qiymati noldan farqli bo'lgan ihtiyoriy n-tartibli determinantning elementlaridan boshlang'ich qiymat sifatida foydalanish mumkin edi.

2-reja. (1) tenglamaning birorta fundamental yechimlar sistemasi ma'lum bo'sa uning umumiy yechimini qurish mumkin.

2-teorema. Agar $y_1,y_2,...,y_n$ funksiyalar (1) tenglamaning I intervaldagi fundamental yechimlar sistemasidan iborat bo'lsa, u holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n \qquad (2)$$

formula (1) tenglamaning **umumiy yechimini** ifodalaydi va barcha yechimlarni o'z ichiga oladi, bu erda $C_1,C_2,...,C_n$ – ihtiyoriy o'zgarmaslar.

Isbot. 1) $C_1,C_2,...,C_n$ o'zgarmaslarning ihtiyoriy qiymatida (2) funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi

2) ushbu

$$\left.\begin{array}{l} y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n \\ y'=C_1y_1'+C_2y_2'+...+C_ny_n' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}+C_2y_2^{(n-1)}+...+C_ny_n^{(n-1)} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

sistemani $C_1,C_2,...,C_n$ larga nisbatan bir qiymatlili yechish mumkin, chunki uning determinanti $y_1,y_2,...,y_n$ yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinantining ayni o'zi bo'lib u I intervalda hech qachon nolga teng bo'lmaydi. (2) formula (1) tenglamaning umumiy yechimini ifodalashi ko'rsatildi.

Endi (1) tenglamaning barcha yechimlarini (2) formula o'z ichiga olishini ko'rsataylik. $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, $\dots$, $y_0^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini (2) yechimlar orasidan izlaymiz. Bunda $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})$ nuqta

$$x\in I\,,\ |\,y\,|<+\infty\,,\ |\,y'\,|<+\infty\,,\ \dots,\ |\,y^{(n-1)}\,|<+\infty$$

sohaning ihtiyoriy nuqtasi. Boshlang'ich berilganlarni (3) sistemaga qo'yamiz:

$$\left.\begin{array}{l} y_0=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+...+C_ny_n(x_0) \\ y_0'=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+...+C_ny_n'(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+...+C_ny_n^{(n-1)}(x_0) \end{array}\right\}$$

Bu sistemani $C_1, C_2, ..., C_n$ larga nisbatan bir qiymatlili yechish mumkin: $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, …, $C_n = C_n^{(0)}$. Topilganlarni (2) umumiy yechim formulasiga qo'ysak $y = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + ... + C_n^{(0)} y_n$ funksiya hosil bo'ladi va bu funksiya izlanayotgan yechimdan iborat. Demak (2) formula barcha yechimlarni o'z ichiga oladi. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. (2) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari soni n dan ortmaydi.

Haqiqatdan ham, n+1 ta $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ hususiy yechimlarni olsaylik. Agar ulardan dastlabki n tasi chiziqli bog'iliq bo'lsa u holda barchasi, n+1 tasi ham chiziqli bog'liq bo'ladi, chunki bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar uchun $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} = 0$ tenglik bajariladi. Agar $y_1, y_2, ..., y_n$ yechimlar chiziqli erkli bo'lsa u holda 2-teoremaga ko'ra, (1) tenglamaning ihtiyoriy yechimini, hususan y_{n+1} yechimni $y_1, y_2, ..., y_n$ larning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin: $y_{n+1} = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + ... + C_n^{(0)} y_n$. Demak $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$ yechimlar chiziqli bog'liq.

3-reja. 3-teorema. Agar biror I intervalda aniqlangan $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar chiziqli erkli bo'lib, n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyalar yagona n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat bo'ladi.

Isbot. Berilgan fundamental yechimlar sistemasiga ikkita chiziqli bir jinsli differensial tenglama mos kelsin:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \qquad (4)$$

$$y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + ... + q_{n-1}(x) y' + q_n(x) y = 0, \qquad (5)$$

bu yerda $p_i(x)$, $q_i(x)$ (i=1,..,n) funksiyalar I intervalda uzluksiz. Agar $p_i(x) \equiv q_i(x)$ (i=1,..,n) ekanini isbotlasak (4) va (5) bitta tenglamadan iboratligini ko'rsatgan bo'lamiz. (4) va (5) ni ayiramiz:

$$[p_1(x) - q_1(x)] y^{(n-1)} + ... + [p_{n-1}(x) - q_{n-1}(x)] y' + [p_n(x) - q_n(x)] y = 0. \qquad (6)$$

Bu tenglama ham $y_1, y_2, ..., y_n$ yechimlarga ega. Agar $p_i(x) \equiv q_i(x)$ (i=1,..,n) munosabat o'rinli bo'lmasa, u holda tartibi n dan kichik bo'lgan (6) chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning $y_1, y_2, ..., y_n$ chiziqli erkli yechimlari soni n ta bo'lib, bu hulosa 2-teoremaning natijasiga ziddir. Teorema isbotlandi.

Amaliy misollar yechish vaqtida fundamental yechimlar sistemasi berilgan $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalardan iborat n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama yozish uchun quyidagi determinantni yoyish kerak:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & y \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' & y' \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

4-reja. 4-teorema. Agar n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning r (r<n) ta chiziqli erkli hususiy yechimlari ma'lum bo'lsa, u holda tenglamaning tartibini r birlikka kamaytirish mumkin.

Isbot. $y_1, y_2,..., y_r$ funksiyalar (1) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsin. Yangi noma'lum u funksiyani $y = y_1 \int u dx$ yoki $u = \left(\dfrac{y}{y_1}\right)'$ formula bilan kiritamiz. U holda:

$$y' = y_1' \int u dx + y_1 u,$$
$$y'' = y_1'' \int u dx + 2y_1' u + y_1 u',$$
$$y''' = y_1''' \int u dx + 3y_1'' u + 3y_1' u' + y_1 u'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u dx + n y_1^{(n-1)} u + \ldots + n y_1' u^{(n-2)} + y_1 u^{(n-1)}.$$

Bularni (1) tenglamaga qo'ysak u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$L(y_1) \int u dx + b_{n-1}(x) u + b_{n-2}(x) u' + \ldots + b_0(x) u^{(n-1)},$$

bu erda $b_0(x) = y_1$ tenglini ko'rishimiz mumkin. $L(y_1) \equiv 0$ munosabatga ko'ra yuqoridagi tenglamani quyidagi, (n-1)-tartibli chiziqli bir jinsli tenglamaga keladi:

$$u^{(n-1)} + q_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + q_{n-2}(x) u' + q_{n-1}(x) u = 0. \qquad (7)$$

(1) tenglamada noma'lum funksiyani almashtirirsh formulasiga ko'ra $u_1 = \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)'$, $u_2 = \left(\dfrac{y_3}{y_1}\right)'$, … , $u_{r-1} = \left(\dfrac{y_r}{y_1}\right)'$ funksiyalar (7) tenglamaning yechimlari bo'ladi. Endi $u_1, u_2,..., u_{r-1}$ funksiyalarni chiziqli erkli bo'lishini ko'rsataylik. Teskarisi o'rinli bo'lsin, ya'ni $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{r-1} u_{r-1} \equiv 0$ ayniyat o'rinli bo'lsin, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_{r-1}$ sonlar bir vaqtda nolga teng emas. Bu ayniyatni integrallaymiz:

$$C_1 + \alpha_1 \int u_1 dx + \alpha_2 \int u_2 dx + \ldots + \alpha_{r-1} \int u_{r-1} dx = 0$$

Bundan:
$$C_1 + \alpha_1 \frac{y_2}{y_1} + \alpha_2 \frac{y_3}{y_1} + \ldots + \alpha_{r-1} \frac{y_r}{y_1} = 0$$
$$C_1 y_1 + \alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_3 + \ldots + \alpha_{r-1} y_r = 0$$

Ohirgi tenglik $y_1, y_2,..., y_r$ funksiyalar chiziqli erkli bo'lishini anglatadi. Bu ziddiyat $u_1, u_2,..., u_{r-1}$ funksiyalarni chiziqli erkli bo'lishini isbotlaydi.

(7) tenglamada $u = u_1 \int v dx$ yoki $v = \left(\dfrac{u}{u_1}\right)'$ formula bilan nomalum funksiyani almashtirsak (n-2)-tartibli chiziqli bir jinsli differnsial tenglamaga ega bo'lamiz. Shu ketma-ketlikda mulohazalarni davom ettirib (n-r)-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamani hosil qilamiz. **Teorema isbotlandi.**

13-Mavzu. n-tartibli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar

Reja

1. Umumiy yechim
2. O'zgarmasni variatsiyalash usuli
3. Grin funksiyasi

1-reja. Avvalgi darsimizda n-tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama bo'lmagan tenglama quydagi ko'rinishga ega bolishini aytgan edik:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

1-teorema. Agar (1) tenglamaning bitta y_1 hususiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda (1) tenglamaning umumiy yechimi (1)ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va y_1 funksiya yig'indisidan iborat.

Isbot. (1) tenglamada $y = y_1 + z$ almashtirish bajaramiz, bu era z - yangi noma'lum funksiya. Buni (1)ga qo'ysak $L(y_1 + z) = f(x)$ yoki $L(y_1) + L(z) = f(x)$. Bu yerda $L(y_1) = f(x)$ tenglikni hisobga olsak $L(z) = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Demak z funksiya

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0 \qquad (2)$$

tenglamani qanoatlantirishi kerak. Bu (1) ga mos chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning ayni o'zidir. Agar (2) tenglamanning umumiy yechimi $z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + ... + C_n z_n$ formula bilan aniqlansa, u holda (1) ning **umumiy yechimi** $z = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + ... + C_n z_n$ formula bilan yoziladi. Terema isbotlandi.

(1) tenglamaning o'ng tomoni ikkita funksiyani yig'indisi ko'rinishida, ya'ni tenglama $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ ko'rinishda bo'lsin. Agar y_1 funksiya $L(y) = f_1(x)$ tenglamani, y_2 funksiya esa $L(y) = f_2(x)$ tenglamaning hususiy yechimidan iborat bo'lsa u holda $y_1 + y_2$ funksiya $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ tenglamaning hususiy yechimi bo'ladi.

Misol. $y'' + 2y = 2 + 3e^x$ tenglamani qaraylik. $y'' + 2y = 2$ tenglama $y_1 = 1$ hususiy yechimga ega. $y'' + 2y = 3e^x$ tenglama esa $y_2 = e^x$ hususiy yechimga ega. Demak $y = 1 + e^x$ funksiya berilgan tenglamaning hususiy uechimi bo'ladi.

2-reja. Agar (1) bir jinsli bo'lmagan tenglamaga mos (2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo'lsa (1) tenglamaning umumiy yechimini kvadraturalarda aniqlash mumkinligini ko'rib chiqamiz.

(2) tenglamaning umumiy yechimi $z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + ... + C_n z_n$ bo'lsin, bu erda $z_1, z_2, ..., z_n$ - (2) tenglamaning biror fundamental yechimlar sistemasi. (1) tenglamaning umumiy yechimini

$$y = C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2 + ... + C_n(x)z_n \qquad (3)$$

ko'rinishda qidiramiz. $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ funksiyalarni quydagi sistemadan aniqlaymiz:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 + ... + C_n'(x)z_n = 0 \\ C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' + ... + C_n'(x)z_n' = 0 \\ .... \\ C_1'(x)z_1^{(n-2)} + C_2'(x)z_2^{(n-2)} + ... + C_n'(x)z_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)z_1^{(n-1)} + C_2'(x)z_2^{(n-1)} + ... + C_n'(x)z_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Buni hisobga olib (3)funksiyaning hosilalarini topamiz:

$$y' = C_1(x)z_1' + C_2(x)z_2' + ... + C_n(x)z_n'$$
$$y'' = C_1(x)z_1'' + C_2(x)z_2'' + ... + C_n(x)z_n''$$

……………………………………
$y^{(n-1)} = C_1(x)z_1^{(n-1)} + C_2(x)z_2^{(n-1)} + ... + C_n(x)z_n^{(n-1)}$
$y^{(n)} = C_1(x)z_1^{(n)} + C_2(x)z_2^{(n)} + ... + C_n(x)z_n^{(n)} + f(x)$
Bularni (1) tenglamaga qo'ysak (3) funksiya (1) tenglamani qanoatlantirishini ko'ramiz. (4) sistemadana $C_1'(x), C_2'(x),..., C_n'(x)$ larni bir qiymatli aniqlash mumkin, chunki sistemaning determinanti $z_1, z_2,..., z_n$ chiziqli erkli funksiyalardan tuzilgan Vronskiy determinantidan iborat bo'lib u noldan farqli. Topilgan $C_1'(x), C_2'(x),..., C_n'(x)$ larga ko'ra $C_1(x), C_2(x),..., C_n(x)$ funksiyalarni aniqlaymiz va (3) formulaga qo'yib (10 tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

Misol. $y'' + y'tgx = \frac{1}{\cos x}$ tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaga mos bir jinsli tenglama $y'' + y'tgx = 0$ bo'lib uning umumiy yechimini topamiz: $y' = z$ yangi funksiya kiritamiz $z' + ztgx = 0$ o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama $\frac{dz}{z} = -tgxdx$
$\ln z = \ln\cos x + \ln C_1$; $z = C_1\cos x = y'$; $y = C_1\sin x + C_2$.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini $y = C_1(x)\sin x + C_2(x)$ ko'rinishda qidiramiz. (4)sistemani tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)\sin x + C_2'(x) = 0 \\ &C_1'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadan $C_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $C_2'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ topiladi. Bundan $C_1(x) = tgx + C_1$, $C_2(x) = -\frac{1}{\cos x} + C_2$ ifodalar aniqlanadi. Demak berilgan tenglamani umumiy yechimi $y = -\cos x + C_1\sin x + C_2$.

3-reja. Bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning hususiy yechimini topishning yana bir usluli – **Koshi** usuli bilan tanishamiz. (1) tenglamaning $p_i(x)$, $(i = 1,...,n)$ koeffisientlari $[a,b]$ intervalda uzluksiz. (1) ga mos bir jinsli (2) tenlamaning biror fundamental yechimlar sistemasi ma'lum bo'lsin. Bu fundamental sistemadan foydalanib (2) tenglamaning ($a \le t \le b$)

$$z(t) = 0,\ z'(t) = 0,\ \dots,\ z^{(n-2)}(t) = 0,\ z^{(n-1)}(t) = 1$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $z = \varphi(x,t)$ deb belgilaylik, chunki u t ga ham x ga ham bog'liq. Quyidagi funksiyani qaraylik:

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(x,t) f(t)dt. \qquad (5)$$

Bu funksiya (1) tenglamani hususiy yechimidan iboratligini ko'rsataylik. Dastlab uning hosilalarini topamiz:

$$\psi'(x) = \varphi(x,x) f(x) + \int_a^x \varphi'(x,t) f(t)dt = \int_a^x \varphi'(x,t) f(t)dt$$

$$\psi''(x) = \varphi'(x,x)f(x) + \int_a^x \varphi''(x,t)f(t)dt = \int_a^x \varphi''(x,t)f(t)dt$$

....

$$\psi^{(n-1)}(x) = \varphi^{(n-2)}(x,x)f(x) + \int_a^x \varphi^{(n-1)}(x,t)f(t)dt = \int_a^x \varphi^{(n-1)}(x,t)f(t)dt$$

$$\psi^{(n)}(x) = \varphi^{(n-1)}(x,x)f(x) + \int_a^x \varphi^{(n)}(x,t)f(t)dt = f(x) + \int_a^x \varphi^{(n)}(x,t)f(t)dt$$

Chegaralari o’zgaruvchi integrally ifodaning hosilasi quyidagi formuladan topiladi:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = b'(x)f(x,b(x)) - a'(x)f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx}[f(x,t)]dt$$

(5) funksiani va uning hosilalarini (1) tenglamaning chap tomoniga qo’yamiz: $f(x) + \int_a^x L(\varphi(x,t))f(t)dt = f(x)$. Demak (5) funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi.

Endi (1) tenglamaning hususiy yechimini aniq integral ko’rinishida yozish maqsadida quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$G(x,t) = \begin{cases} 0, & a \le x \le t \\ \varphi(x,t), & t < x \le b \end{cases}$$

Bu funksiya quyidagi hossalarga ega

1°. $G(t,t) = 0$

2°. Bu funksiyadan x bo’yicha olingan n-2 tartibligacha hosilalarning x=t dagi qiymati nolga teng, ya’ni $G^{(i)}(t,t) = 0$, $i = 1,...,n-2$

3°. Bu funksiyadan x=t nuqtada x bo’yicha olingan n-1 tartibli o’ng hosila 1ga chap hosila esa 0ga teng, ya’ni $G^{(n-1)}(t+0,t) = 1$, $G^{(n-1)}(t-0,t) = 1$

$[a,t)$ va $(t,b]$ yarim intervallarda x argumenti bo’yicha chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning yechimidan iborat va yuqorida sanalagan 1°-3° hossalarga ega bo’lgan $G(x,t)$ funksiya (1) tenglama uchun qo’yilgan Koshi masalasining **Grin funksiyasi** deyiladi. Grin funksiyasidan foydalanib (5) formulani aniq integral shaklida yozish mumkin:

$$\psi(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt.$$

Misol. $y'' + y'tgx = \frac{1}{\cos x}$ tenglamani Grin unksiyasi yordamida hususiy yechimini topaylik. Bir jinsli tenglamani umumiy yechimi $y = C_1 \sin x + C_2$ ekanini yuqorida hisoblaganmiz. Umumiy yechim orasidan $y(t) = 0$, $y'(t) = 1$ boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni qidiramiz:

$$\begin{cases} C_1 \sin t + C_2 = 0 \\ C_1 \cos t = 1 \end{cases}$$

Bu sistemadan $C_1 = \dfrac{1}{\cos t}$, $C_2 = -tgt$ aniqlanadi. Demak izlanayotgan yechim $\varphi(x,t) = \dfrac{\sin x}{\cos t} - tgt$. Endi (5) formula yordamida hususiy yechimni topamiz, bunda $a = 0$ deb olish mumkin:

$$\psi(x) = \int_0^x \left[\frac{\sin x}{\cos^2 t} - \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right] dt = \sin x \cdot tgx - \frac{1}{\cos x} + 1 = 1 - \cos x.$$

14-Mavzu. n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffisientli differensial tenglamalar

Reja

1. Haqiqiqy argumentli kompleks funksiya
2. Bir jinsli tenglamaning harakteristik tenglamasi

1-reja. Ushbu $z(x) = u(x) + iv(x)$ funkisiya **haqiqiqy argumentli kompleks funksiya** deyiladi, bunda $u(x)$ va $v(x)$ haqiqiy x argumentli haqiqiy funksiyalar. $u(x)$ va $v(x)$ mos ravishda $z(x)$ kompleks funksiyaning **haqiqiy** va **mavhum qismi** deyiladi. Bunday funksiyaga misol keltiramiz: $e^{\alpha x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$, bu yerda $\alpha = a + ib$.

Faraz qilaylik $u^{(n)}(x)$ va $v^{(n)}(x)$ hosilalar mavjud bo'lsin, u holda $z(x)$ funksiyadan x bo'yicha n-tartibli hosila $z^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)$ formula bilan aniqlanadi. Masalan, ihtiyoriy α o'zgarnas (haqiqiqy yoki kompleks) son uchun $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$ formula o'rinli.

Agar $z(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0 \qquad (1)$$

tenglamani biror I intervalda ayniyatga aylantirsa, uni (1) chiziqli bir jinsli tenglamaning I intervaldagi **kompleks yechimi** deb aytamiz. Komleks yechimning bitta muhim hossasini keltiraylik. Agar $z(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya (1) tenglamaning kompleks yechmi bo'lsa, u holda $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (1) tenglamaning haqiqiqy yechimlari bo'ladi.

2-reja. Ushbu

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

tenglama **n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffisientli differensial tenglama** deyiladi. (2) tenglamaning hususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ ko'rinishda qidiraylik, bu erda λ - biror o'zgarmas (haqiqiy yoki kompleks) son. Buni (2)ning chap qismiga qo'yamiz:

$$L(e^{\lambda x}) = [\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n]e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Bundan ko'rinadiki $y = e^{\lambda x}$ funksiya (2) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun λ son

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (3)$$

tenglamaning ildizi bo'lishi zarur va yetarli. (3) tenglama (2) bir jinsli chiziqli tenglamaning **harakteristik tenglamasi**, uning ildizlari esa **harakteristik sonlari** deyiladi.

Faraz qilaylik harakteristik tenglamaning $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ (haqiqiqy yoki kompleks sonlar) ildizlari turlicha bo'lsin. U holda biz (2) tenglamaning n ta hususiy yechimiga ega bo'lamiz:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ .\ .\ .\ ,\ y_n = e^{\lambda_n x}. \qquad (4)$$

(4) yechimlar chiziqli erkli bo'lishini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + ... + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0 \qquad (5)$$

ayniyat o'inli bo'lsin, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o'zgarmas sonlardan kamida bittasi noldan farqli. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $\alpha_n \neq 0$ deb olaylik. (5)ni $e^{\lambda_1 x}$ ga bo'lamiz va hoslasini olamiz:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} + ... + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} = 0.$$

Bu ayniyatni $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ ga bo'lamiz va hosilasini olamiz:

$$\alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} + ... + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)e^{(\lambda_n - \lambda_2)x} = 0$$

Ketma ket shunday mulohazlar yuritib quydagi ayniyatga kelamiz:

$$\alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\cdot ...\cdot(\lambda_n - \lambda_{n-1})e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} = 0$$

Bu esa noto'g'ri ayniyatdir. Demak (4) funksiyalar ihtiyoriy oraliqda chizqli erklidir.

Hulosa qiladigan bo'lsak, agar (2) tenglamaning $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ **harakteristik sonlari haqiqiy va turlicha** bo'lsa, u holda (4) yechimlar haqiqiy funksiyalar bo'lib, (2) bir jinsli chiziqli tenglamaning **umumiy yechimi** $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$ formula bilan ifodalanadi.

Agar harakteristik sonlar orasida $a + ib$ kompleks son ham bor bo'lsa, u holda, algebra kursidan ma'lumki $a - ib$ kompleks son ham harakteristik son bo'ladi. O'z navbatida (4) funksiyalar quiydagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$y_1 = e^{(a+ib)x},\ y_2 = e^{(a-ib)x},\ y_3 = e^{\lambda_3 x},\ ,\ .\ .\ .\ ,\ y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (6)$$

y_1 va y_2 funksiyalarning haqiqiy qismlari aynan bir hil, mavhum qismlari esa ishorasi bilan farqlanadi shu bilan birga ular (2) tenglamani qanoatlantiradi. (6) sistemada y_1 va y_2 funksiyalar o'rniga ularni qoyamiz:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx,\ y_2 = e^{ax}\sin bx,\ y_3 = e^{\lambda_3 x},\ ,\ .\ .\ .\ ,\ y_n = e^{\lambda_n x}. \qquad (7)$$

(6) yechimlarning chiziqli erkliligidan (7) funksiyalarning chiziqli erkliligi kelib chiqadi, chunki

$$\alpha_1 e^{(a+bi)x} + \alpha_2 e^{(a-bi)x} + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} + ... + \alpha_n e^{\lambda_n x} \equiv$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)e^{ax}\cos bx + i(\alpha_2 - \alpha_1)e^{ax}\sin bx + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} + ... + \alpha_n e^{\lambda_n x}$$

ayniyat o'rinli. Demak, qaralayotgan holatda har bir λ haqiqiy harakteristik son (2) tenglamaning bitta $y = e^{\lambda x}$ hususiy haqiqiy yechimini aniqlaydi, har bir $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ kompleks harakteristik sonlar jufti ikkita $y_1 = e^{ax}\cos bx$, $y_2 = e^{ax}\sin bx$ hususiy haqiqiy yechimini aniqlaydi. Hullas, (2) tenglamaning harakteristik sonlari turlicha bo'lganda biz hamma vaqt n ta haqiqiqy yechimga ega bo'lamiz va ularning ihtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi tenglamaning umumiy yechimini aniqlaydi.

Misol. $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$ tenglamani qaraylik. Uning harakteristik tenglamasi $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$. Harakteristik sonlar $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$.

Demak e^{-x}, $e^{2x}\cos 3x$, $e^{2x}\sin 3x$ funksiyalar berilgan tenglamaning chiziqli fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi. Umumiy yechim:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}\cos 3x + C_3e^{2x}\sin 3x$$

Endi harakteristik tenglama ildizlari orasida karralilari ham bor deb faraz qilaylik. λ_1 (haqiqiqy yoki kompleks son) – (3) harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo'lsin, u holda

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = ... = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0,\ P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0 \qquad (8)$$

munosabatlar o'rinli. Ushbu $L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$ ayniyatni λ bo'yicha m marta differensiallaymiz, bunda chap tomondagi operator λ ga bog'liq bo'lmaganligi sababli differensiallash amalini operator belgisi ichiga kiritish mumkin. O'ng tomonda esa ko'paytmanianag differensiali hisoblanadi:

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}L(e^{\lambda x}) = L\left(\frac{d^m}{d\lambda^m}e^{\lambda x}\right) = L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i P^{(i)}(\lambda)x^{m-i}e^{\lambda x}.$$

Bu yerda (8)ga ko'ra $m = 0,1,...,k-1$ larda $L(x^m e^{\lambda_1 x}) \equiv 0$ ayniyat hosil bo'ladi, ya'ni

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \qquad (9)$$

funksiyalar (2) chziqli bir jinsli tenglamaning yechimlaridan iborat. Bu yechimlarning chiziqli erkliligini yuqorida (4) funksiyalarni chiziqli erkliligini ko'rsatgandek ko'rsatish mumkin.

Demak, harakteristik tenglamaning k karrali har qanday λ_1 haqiqiy ildizizi (2) tenglamaning k ta haqiqiqy chiziqli erkli hususiy yechimini aniqlaydi.

Agar harakteristik tenglama k karrali $a+ib$ ildizga ega bo'lsa, u holda k karrali $a-ib$ ildizga ham ega bo'ladi. (9)ga ko'ra bu ildizlar 2k ta

$$e^{(a+ib)x},\ e^{(a-ib)x},\ xe^{(a+ib)x},\ xe^{(a-ib)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(a+ib)x},\ x^{k-1}e^{(a-ib)x} \qquad (10)$$

chiziqli erkli kompleks yechimni aniqlaydi. Ularning haqiqiqy va mavhum qismlarini ajratib olamiz:

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

(10) funksiyalarning chiziqli ekliligidan bu funksialarning ham chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi. Demak, harakteristik tenglamaning k karrali har qanday $a+ib$, $a-ib$ qo'shma kompleks ildizizi (2) tenglamaning 2k ta haqiqiqy chiziqli erkli hususiy yechimini aniqlaydi.

Algebra kursidan ma'lumki n-tartibli algebraik chiziqli tenglama hamma vaqt n ta ildizga ega, ya'ni $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_r$ sonlar (3) tenglamaning mos ravishda $k_1, k_2,..., k_r$ karrali ildizlari bo'lsa u holda $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$ tenglik o'rinli bo'ladi. Hulosa qilib aytganda, (2) tenglamaning harakteristik sonlari qanday bo'lmasin biz hamma vaqt n ta haqiqiy yechimga ega bo'lamiz va ularning ihtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi korinishida tenglamaning umumiy yechimini aniqlaymiz.

Misol. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$ tenglamani qaraymiz. Harakteristik tenglama $\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0$. Uning ildizlari: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -2i$. Bu harakteristik sonlarga mos hususiy yechimlar:

$$e^x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ x\cos 2x,\ x\sin 2x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x.$$

15-Mavzu. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgarmas koeffisientli tenglamalar

Reja

1. Tenglamaning o'ng qismi ko'phad va ko'rsatkichli funksiya ko'paytmasidan iborat bo'lganda hususiy yechimni qidirish.

2. Tenglamaning o'ng qismi ko'phad va komleks ko'rsatkichli funksiya ko'paytmasidan iborat bo'lganda hususiy yechimni qidirish.

1-reja. n-tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan ozgarmas koeffisientli tenglama

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

korinishga ega, bu yerda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - o'zgarmas haqiqiqy sonlar. Oldingi darsda biz har qanday n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffisientli tenglamani umumiy yechimini qurishni o'rgandik. U holda (1) tenglamaning umumiy yechimini o'zgarmasni variatsiyalash usulida kvadraturalarda topa olamiz. Lekin $f(x)$ funksiyaning ayrim hususiy ko'rinishlarida (1)tenglamaning hususiy yechimi kvadraturalarsiz aniqlanadi. Bunday holatlarda, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimiga bu hususiy yechimni qo'shib (1) tenglamaning umumiy yechimini kvaraturalarsiz hosil qilamiz.

(1) tenglamada $f(x)$ funksiya ko'phad va ko'rsatkichli funksiyaning ko'paytmasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$f(x) = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x} = P(x) e^{\alpha x}.$$

bu yerda $p_0, p_1, \ldots, p_m, \alpha$ - o'zgarmas sonlar (ular nolga teng bo'lishi ham mumkin). (1) tenglamaning hususiy yechimini qidirishni 2ta holatga ajratib olib boramiz.

1-holat. α - tenglamaning harakteristik soni emas, ya'ni $P(\alpha) \neq 0$. Bu holatda y_1 hususiy yechimni

$$y_1 = (q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x} \qquad (2)$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $q_0, q_1, \ldots, q_m$ - noma'lum o'zgarmas sonlar. (2) funksiyani (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$L[(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1} x + q_m) e^{\alpha x}] = q_0 L(x^m e^{\alpha x}) + q_1 L(x^{m-1} e^{\alpha x}) + \ldots +$$
$$+ q_{m-1} L(x e^{\alpha x}) + q_m L(e^{\alpha x}) = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}.$$

Bu yerda $L(e^{\alpha x}) = P(\alpha) e^{\alpha x}$ va $L(x^s e^{\alpha x}) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i P^{(i)}(\alpha) x^{s-i} e^{\alpha x}$ formulalardan foydalanaylik:

$$q_0 \sum_{i=0}^{m} C_m^i P^{(i)}(\alpha) x^{m-i} e^{\alpha x} + q_1 \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i P^{(i)}(\alpha) x^{m-1-i} e^{\alpha x} + \ldots + q_{m-1} \sum_{i=0}^{1} C_1^i P^{(i)}(\alpha) x^{1-i} e^{\alpha x} +$$
$$+ q_m P(\alpha) e^{\alpha x} = (p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m) e^{\alpha x}$$

Ohirgi tenglikni $e^{\alpha x}$ ga bo'lamiz va $x$ning bir hil darajalari oldidagi koefisientlarni tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned}
&x^m: \quad q_0 P(\alpha) = p_0 \\
&x^{m-1}: \quad q_0 C_m^1 P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) = p_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (3) \\
&x^1: \quad q_0 C_m^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-2} P^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P(\alpha) = p_{m-1} \\
&x^0: \quad q_0 C_m^m P^{(m)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-1} P^{(m-1)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P'(\alpha) + q_m P(\alpha) = p_m
\end{aligned}$$

$P(\alpha)\neq 0$ bo'lgani uchun (3) tengliklardan $q_0, q_1,..., q_m$ koeffisientlarning barchasi ketma-ket va bir qiymatli aniqlanadi.

Misol. $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$ tenglamani umumiy yechimini topaylik. Bir jinsli tenglama: $z''-5z'+6z=0$. Uni integrallaymiz; $\lambda^2-5\lambda+6=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$; $z=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $P(x)e^{0x}$ ko'rinishida. $\alpha=0$ harakteristik tenglamaning ildizi emas. Tenglamaning hususiy yechimini $y_1=ax^2+bx+c$ ko'rinishda qidiramiz: $y_1'=2ax+b$, $y_1''=2a$. Bularni tenglamaga qo'yamiz:

$$6ax^2+(6b-10a)x+6c-5b+2a=6x^2-10x+2$$

x ning bir hil darajalari oldidagi koeffisientlarni tenglasak quydagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases}6a=6\\ 6b-10a=-10\\ 6c-5b+2a=2\end{cases}$$

Bu yerdan $a=1,\ b=0,\ c=0$. Demak $y_1=x^2$ va berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x^2$.

2-holat. α - harakteristik tenglamaning k $(k\geq 1)$ karrali ildizi bo'lsin, ya'ni

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=...=P^{(k-1)}(\alpha)=0, \qquad P^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

Bu holatda y_1 hususisy yechimni (2) ko'rinishda qurib bo'lmaydi, chunki $P(\alpha)=0$. Husussiy yechimni

$$y_1=x^k(q_0x^m+q_1x^{m-1}+...+q_{m-1}x+q_m)e^{\alpha x} \qquad (4)$$

ko'rinishda qidiramiz. (4)funksiyani (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$L\left(\sum_{s=0}^{m}q_sx^{k+m-s}e^{\alpha x}\right)=\sum_{s=0}^{m}q_s\sum_{i=k}^{k+m-s}C_{k+m-s}^{i}P^{(i)}(\alpha)x^{k+m-s-i}e^{\alpha x}=\sum_{s=0}^{m}p_sx^{m-s}e^{\alpha x}$$

Bundan $\sum_{s=0}^{m}q_s\sum_{i=k}^{k+m-s}C_{k+m-s}^{i}P^{(i)}(\alpha)x^{k+m-s-i}=\sum_{s=0}^{m}p_sx^{m-s}$. Bu yerda x ning bir hil darajalari oldidagi koefisientlarni tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned}
&x^m: \quad q_0C_{k+m}^{k}P^{(k)}(\alpha)=p_0\\
&x^{m-1}: \quad q_0C_{k+m}^{k+1}P^{(k+1)}(\alpha)+q_1C_{k+m-1}^{k}P^{(k)}(\alpha)=p_1\\
&\text{...} \qquad\qquad (5)\\
&x^1: \quad q_0C_{k+m}^{k+m-1}P^{(k+m-1)}(\alpha)+q_1C_{k+m-1}^{k+m-2}P^{(k+m-2)}(\alpha)+...+q_{m-1}C_{k+1}^{k}P^{(k)}(\alpha)=p_{m-1}\\
&x^0: \quad q_0P^{(k+m)}(\alpha)+q_1P^{(k+m-1)}(\alpha)+...+q_{m-1}P^{(k+1)}(\alpha)+q_mP^{(k)}(\alpha)=p_m
\end{aligned}$$

Bu tenglilardan izlanayotgan barcha $q_0, q_1,..., q_m$ koeffisientlar bir qiymatli aniqlnadi, chunki $P^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

Misol. $y''-5y'=-5x^2+2x$ tenglamani qaraymiz. Unga mos bir jinsli tenglama: $z''-5z'=0$. Bir jinsli tenglamani yechamiz: $\lambda^2-5\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$. $z=C_1+C_2e^{5x}$. Berilgan tenglamaning o'ng tomoni $P(x)e^{0x}$ ko'rinishga ega va $\alpha=0$ harakteristik tenglamaning oddiy (k=1 karrali) ildizi. Shuning uchun tenglamaning hususiy yechimini

$y_1 = x(ax^2+bx+c)$ ko'rinishda qidiramiz: $y_1' = 3ax^2+2bx+c$, $y_1'' = 6ax+2b$. Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-15ax^2+(6a-10b)x+2b-5c = -5x^2+2x$$

Bundan $a=\frac{1}{3}$, $b=0$, $c=0$. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{x^3}{3}.$$

2-reja. Endi (1) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = e^{ax}[P_m^{(1)}(x)\cos bx + P_m^{(2)}(x)\sin bx]$$

ko'rinishga ega bo'lganda uning hususiy yechimini qidirish usulini ko'rib chiqamiz, bu yerda $P_m^{(1)}(x)$ va $P_m^{(2)}(x)$ – m-darajali berilgan ko'phadlar. Buning uchun 2ta holatni ajratib olamiz.

1-holat. $\alpha = a+ib$ - harakteristik tenglamaning ildizi emas. Bu holatda hususiy yechimni $y_1 = e^{ax}[Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx]$ ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $Q_m^{(1)}(x)$ va $Q_m^{(2)}(x)$ - m darajali koeffisentlari noma'lum ko'phadlar.

Misol. $y''+y'-2y = e^x(\cos x - 7\sin x)$ tenglamani umumiy yechimini topamiz (bu yerda $a=1$, $b=1$). Avval chiziqli bir jinsli tenglamani yozaylik: $z''+z'-2z=0$. Uni integrallaymiz:

$$\lambda^2+\lambda-2=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=-2,\ z=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

$a+ib=1+i$ son harakteristik tenglamaning ildizi eamas. Shuning uchun Berilgan tenglamaning hususiy yechimini $y_1 = e^x(A\cos x + B\sin x)$ ko'rinishda qidiramiz:

$$y_1''+y_1'-2y_1 = e^x[(-A+3B)\cos x - (B+3A)\sin x] = e^x(\cos x - 7\sin x)$$

$$\begin{cases} -A+3B=1 \\ B+3A=7 \end{cases}$$

Bundan $A=2$, $B=1$. $y_1 = e^x(2\cos x+\sin x)$. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi: $y_1 = e^x(2\cos x+\sin x)+C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

2-holat. $\alpha = a+ib$ - harakteristik tenglamaning k ($k\geq 1$) karrali ildizi. Bu holatda hususiy yechimni $y_1 = x^k e^{ax}[Q_m^{(1)}(x)\cos bx + Q_m^{(2)}(x)\sin bx]$ ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $Q_m^{(1)}(x)$ va $Q_m^{(2)}(x)$ -- m-darajali koeffisentlari noma'lum ko'phadlar.

Misol. $y''+y = 2\sin x$ tenglamani qaraymiz (bu erda $a=0$, $b=1$).

$$z''+z=0,\ \lambda^2+1=0,\ \lambda_{1,2}=\pm i,\ z=C_1\cos x + C_2\sin x.$$

$a+ib=i$ son harakteristik tenglamaning oddiy ildizi (bir karrali) bo'lgani uchun berilgan tenglamaning hususiy yechimini $y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$ ko'rinishda qidiramiz: $A=-1$, $B=0$, $y_1 = -x\cos x$ hosil bo'ladi. Berilgan tenglamanig umumiy yechimi: $y = -x\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

16-Mavzu. O'zgarmas koeffisientliga keltiriladigan tenglamalar

Reja

1. O'zgarmas koeffisientliga keltiriladigan tenglamalar
2. Eylerning chiziqli tenglamasi

3. Chebishev tenglamasi

1-reja. Bizga chiziqli bir jinsli tenglama berilgan:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \qquad (1)$$

Erkli o’zgaruvchini almashtirish bilan bu tenglamani o’zgarmas koeffisientli chiziqli tenglamaga olib kelish masalasi bilan shug’ullanamiz. $t = u(x)$ almashtirish bajaraylik. U holda:

$y' = y'_t t'_x = y'_t u'(x)$

$y'' = y''_{t^2}[u'(x)]^2 + y'_t u''(x)$

. . . .

$y^{(n)} = y^{(n)}_{t^{(n)}}[u'(x)]^n + ... + y'_t u^{(n)}(x)$

Bu hisoblashlar ko’rsatadiki yuqoridagi almashtirishdan keyin (1) tenglama $y^{(n)}_{t^n}[u'(x)]^n + ... + p_n(x)y = 0$ ko'rinishni oladi. Buni $[u'(x)]^n$ ga bo’lamiz: $y^{(n)}_{t^n} + ... + \dfrac{p_n(x)}{[u'(x)]^n}y = 0$. Bu yerda $u(x)$ funksiyani shunday tanlash kerakki y oldidagi koeffisient o’zgarmas songa aylansin. $\dfrac{p_n(x)}{[u'(x)]^n} = \dfrac{1}{c^n}$ desak, u holda $u'(x) = c\sqrt[n]{p_n(x)}$ yoki $u(x) = c\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx$. Shunday qilib, agar (1) tenglama erkli o’zgaruvchini almashtirish bilan o’zgarmas koeffisisentli tenglamaga aylansa u holda almashtirirsh fomulasi

$$t = c\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx \qquad (2)$$

ko'rinishda bo’lishi zarur.

2-reja. Endi **Eylerning chiziqli tenglamasini** qaraymiz:

$$D(y) \equiv x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_n y = 0, \qquad (3)$$

bu yerda $a_1, a_2, ..., a_n$ - o’zgarmas haqiqiqy sonlar. Bu tenglamani (1) tenglama bilan taqqoslab $p_n(x) = \dfrac{a_n}{x^n}$ ekanligini ko’ramiz. (2)ni hisobga olib (3) tenglamada $t = c\int\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{x^n}}dx$ yoki $c = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ deb olib, $t = \ln x$ almashtirish bajaramiz. U holda:

$y' = y'_t \cdot \dfrac{1}{x}$

$y'' = y''_{t^2}\dfrac{1}{x^2} - y'_t\dfrac{1}{x^2}$

$y''' = y'''_{t^3}\dfrac{1}{x^3} - 3y''_{t^2}\dfrac{1}{x^3} + 2y'_t\dfrac{1}{x^3}$

. . . .

$y^{(n)} = y^{(n)}_{t^n}\dfrac{1}{x^n} + ... + (-1)(n-1)!\,y'_t\dfrac{1}{x^n}$

Bu hisoblashlar ko’rsatadiki $x^i y^{(i)}$ ifoda $y'_t, y''_{t^2}, ..., y^{(i)}_{t^i}$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat va (3) tenglamada ularni mos ravishda qo’ysak o’zgarmas koeffisientli tenglama hosil bo’ladi.

Misol. $x^2y''-2xy'+2y=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $t=\ln x$ almashtirish bajarsak: $y'=y'_t\cdot\frac{1}{x}$, $y''=y''_{t^2}\frac{1}{x^2}-y'_t\frac{1}{x^2}$. Bularni berilgan tenglamaga qo'yamiz: $y''_{t^2}-y'_t-2y'_t+2y=0$ yoki $y''_{t^2}-3y'_t+2y=0$. Bu o'zgarmas koeffisientli tenglamaning harakteristik tenglamasi: $\lambda^2-3\lambda+2=0$. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$. Demak $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$. Almashtirish formulasi bo'yicha x o'zgaruvchini qaytaramiz: $y=C_1x+C_2x^2$. **Javob:** $y=C_1x+C_2x^2$.

Oldingi maruzamizda ko'rdikki o'zgarmas koeffisientli tenglamaning hususiy yechimlari $e^{\lambda t}$ ko'rinishida bo'lar edi. (3) Eyler tenglamasini hususiy yechimi ko'rinishini aniqlash uchun yuqoridagi $t=\ln x$ almastirishdan foydalanaylik: $e^{\lambda t}=e^{\lambda\ln x}=x^{\lambda}$.

(3) tenglamaning hususiy yechimini $y=x^{\lambda}$ ko'rinishda qidiramiz. U holda:

$$y^{(k)}=\lambda(\lambda-1)...(\lambda-k+1)x^{\lambda-k} \qquad (k=1,...,n)$$

$y=x^{\lambda}$ funksiyani va uning hosislalarini (3) tenglamaning chap qismiga qo'yamiz:

$$D(x^{\lambda})=[\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+2)+...+a_{n-1}\lambda+a_n]x^{\lambda}.$$

Bundan ko'rinadiki $y=x^{\lambda}$ eyler tenglamsini hususiy yechimi bo'lishi uchun λ

$$P(\lambda)\equiv\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+2)+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

tenglamaning ildizi bo'lishi zarur va yetarli. Bu tenglama **Eyler tenglamasining harakteristik tenglamasi**, uning idizlari esa **harakteristik sonlari** deyiladi.

Faraz qilaylik harakteristik tenglamaning ildizlari turlicha bo'lsin. u holda Eyler tenglamasining n ta hususiy yechimiga ega bo'lamiz:

$$y_1=x^{\lambda_1},\ y_2=x^{\lambda_2},\ \dots,\ y_n=x^{\lambda_n} \qquad (4)$$

Bu yechimlar $(0,+\infty)$ intervalda chiziqli erkli. Agar barcha $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ildizlar haqiqiqy bo'lsa, u holda (4) yechimlar haqiqiy bo'lib Eyler tenglamasining **umumiy yechimi** $y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}+...+C_nx^{\lambda_n}$ formula bilan ifodalanadi.

Agar $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ildizlar orasida $a+ib$ kompleks son bor bo'lsa, u holda unga $x^{a+ib}=x^a[\cos(b\ln x)+i\sin(b\ln x)]$ kompleks yechim mos keladi. Demak $x^a\cos(b\ln x)$ va $x^a\sin(b\ln x)$ funksiyalar haqiqiqy yechimlardan iborat. Bu vaqtda $a-ib$ ham harakteristik tenglamaning ildizi bo'lib unga ham aynan yuqoridagi haqiqiqy yechimlar mos keladi. Umumiy yechim formulasida $a\pm ib$ kompleks sonlar juftligiga mos $x^a[C_1\cos(b\ln x)+C_2\sin(b\ln x)]$ qo'shiluvchi qatnashadi.

Endi λ_1 son harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo'lsin, ya'ni

$$P(\lambda_1)=P'(\lambda_1)=...=P^{(k-1)}(\lambda_1)=0, \quad P^{(k)}(\lambda_1)\neq 0.$$

$D(x^{\lambda})\equiv P(\lambda)x^{\lambda}$ ayniyatni λ bo'yicha m marta differensiallaymiz:

$$D(x^{\lambda}(\ln x)^m)=\sum_{i=0}^{m}C_m^iP^{(i)}(\lambda)x^{\lambda}(\ln x)^{m-i}$$

Bundan $x^{\lambda_1}(\ln x)^m$ $(m=1,...,k-1)$ funksiyalar Eyler tenglamasining hususiy yechimlari ekanligi kelib chiqadi. Demak λ_1 - harakteristik tenglamaning haqiqiy k karrali ildizi bo'lsa, Eyler tenglamasining umumiy yechim formulasida bu ildizga mos $[C_1 + C_2 \ln x + ... + C_k (\ln x)^{k-1}]x^{\lambda_1}$ qo'shiluvchi qatnashadi.

Yuqoridagidek mulohazalar yuritib $a \pm ib$ kompleks sonlar harakteristik tenglamaning k karrali ildizi bo'lsa, Eyler tenglamasining umumiy yechimida bu ildizlarga mos

$$\{[C_1 + ... + C_k (\ln x)^{k-1}]\cos(b \ln x) + [C_1 + ... + C_k (\ln x)^{k-1}]\sin(b \ln x)\}x^{\lambda_1}$$

qo'shiluvchi qatnashishini ko'rsatish mumkin.

3-reja. Chebishev tenglamasini qaraymiz:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad (5)$$

Bu tenglama $(-\infty,-1)$, $(-1,+1)$, $(1,+\infty)$ intervallarning har birida mavjudlik va yagonalik teoremalarini qanoatlantiradi. Biz (5) tenglamaning $(-1,+1)$ intervaldagi umumiy yechimini quramiz. (2) formulaga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$t = c\int\sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}dx$$

Bu yerda $c = -\frac{1}{n}$ deb olsak $t = \arccos x$ yoki $x = \cos t$ almashtirish formulasi hosil bo'ladi. Bundan

$$y' = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = -y'_t \frac{1}{\sin t}$$

$$y'' = y''_{t^2} \frac{1}{\sin^2 t} - y'_t \frac{\cos t}{\sin^3 t}$$

Bularni (5) tenglamaga qo'ysak $y''_{t^2} - y'_t \frac{\cos t}{\sin t} + y'_t \frac{\cos t}{\sin t} + n^2 y = 0$ yoki

$$y''_{t^2} + n^2 y = 0$$

o'zgarmas koeffisientli tenglamani hosil qilamiz. Uning umumiy yechimi $y = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$ formulaga ega. Bundan **Chebishev tenglamasining umumiy yechimini** hosil qilamiz: $y = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x$.

17-mavzu. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama ko'rinishini soddalashtirish. Yechimning nollari.

Reja

1. Tenglama ko'rinishini soddalashtirish
2. O'ziga qo'shma differensial tenglama
3. Tebranuvchi va tebranmas yechimlar

1-reja. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamani qaraylik:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \qquad (1)$$

Bu tenglamada hamma vaqt birinchi tartibli hosilani yo'qotish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun $y = ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ almashtirish bajaramiz, bu erda z yangi nomalum funksiya. Bundan:

$$y' = z'e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} - \frac{1}{2}p(x)ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

$$y'' = z''e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} - p(x)z'e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} - \frac{1}{2}p'(x)ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} + \frac{1}{4}p^2(x)ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

Bularni (1) tenglamaga qo'yamiz va $e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$ ifodaga bo'lamiz:

$$z'' + \left[-\frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) + q(x)\right]z = 0.$$

Bu tenglamada $Q(x) = -\frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x) + q(x)$ funksiya (1) tenglamaning **invarianti** deyiladi. Demak (1) tenglamani invariant orqali

$$z'' + Q(x)z = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishga yozish mumkin ekan. Agar (2) tenglama kvadraturalarda integrallansa u holda (10 tenglama ham kvadraturalarda integrallanadi.

Misol. $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ **Bessel tenglamasini** qaraylik. Bu yerda $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{n^2}{x^2}$, $Q(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{n^2}{x^2} = 1 + \frac{1-4n^2}{4x^2}$. Agar Bessel tenglamasining $n = \pm\frac{1}{2}$ bo'lganda hususiy holini qarasak, $Q(x) = 1$ hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \qquad (3)$$

tenglamada $y = ze^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx} = \frac{z}{\sqrt{x}}$ almashtirish bajarilsa, u

$$z'' + z = 0 \qquad (4)$$

ko'rinishga keladi. (4) tenglamaning umumiy yechimi $z = C_1\sin x + C_2\cos x$. Almashtirish formulasiga ko'ra (3) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

O'rni kelganda shuni aytish kerakki $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ funksiyalar **Bessel funksiyalari** deb ataladi. (3) tenglamaning umumiy yechimini Bessel funksiyalari orqali ifodalash mumkin: $y = C_1J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

2-reja. Ushbu

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0 \qquad (5)$$

tenglama ikkinchi tartibli **o'ziga qo'shma differensial tenglama** deyiladi.

Koeffisientlari I intervalda uzluksiz bo'lgan har qanday ($p_0(x) \neq 0$)

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

bir jinsli tenglamani $\frac{p(x)}{p_0(x)}$ ga ko'paytirsak (5) ko'rinishga keladi, bu erda $p(x) = e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}$. Haqiqatdan ham

$$p(x)y'' + \frac{p(x)p_1(x)}{p_0(x)}y' + \frac{p(x)p_2(x)}{p_0(x)}y = 0$$

$$e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}}y'' + \frac{p_1(x)}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}}y' + \frac{p(x)p_2(x)}{p_0(x)}y = 0$$

$$\left(e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}}y'\right)' + \frac{p(x)p_2(x)}{p_0(x)}y = 0.$$

Ohirgi tenglama (5) ko'rinishga ega.

Misol. $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ Bessel tenglamasini o'ziga qo'shma ko'rinishga keltiramiz. Bu yerda $p(x) = e^{\int\frac{dx}{x}} = x$, $\frac{p(x)}{p_0(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Bunga ko'ra Bessel tenglamasini o'ziga qo'shma ko'rinishi quyidaicha bo'ladi:

$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0 \text{ yoki } (xy)' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0.$$

3-reja. Oddiy differensial tenglamaning $y = 0$ yechimi – **trivial yechim** deyiladi. Aynan nolga teng bo'lmagan har qanday yechimi esa **notrivial yechim** deyiladi. Agar tenglamaning $y(x)$ notrivial yechimi $x = x_0$ nuqtada nolga aylansa, bu nuqta $y(x)$ yechimning **noli** deb ataladi. Oddiy differensial tenglamaning I intervalda aniqlangan $y(x)$ notrivial yechimi shu intervalda kamida ikkita nolga ega bo'lsa, u holda $y(x)$ – I intervalda **tebranuvchi yechim** deyiladi, aks holda **tebranmas yechim** deyiladi.

Misol. 1. $y'' - y = 0$ tenglamani qaraymiz. Uning umumiy yechimi $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Tenglamaning ihtiyoriy notrivial yechimi $(-\infty,+\infty)$ intervalda bittadan ortiq nolga ega bo'lmasligini ko'rsataylik. Tenglamaning biror $y(x)$ yechimi $x_1 \neq x_2$ nuqtalarda nolga aylanadi deb teskari faraz yuritsak, quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} C_1e^{x_1} + C_2e^{-x_1} = 0 \\ C_1e^{x_2} + C_2e^{-x_2} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemadan $C_1 = C_2 = 0$ aniqlanadi. Demak x_1, x_2 nuqtalarda nolga aylangan yechim trivial yechimdan iborat. Shunday qilib berilgan tenglamaning ihtiyoriy notrivial yechimi $(-\infty,+\infty)$ intervalda tebranmas yechimdan iborat.

2. $y'' + y = 0$ tenglamani qaraylik. Umumiy yechimi $y = C_1\sin x + C_2\cos x$. Tenglamaning ihtiyoriy notrivial yechimi har qanday 2π uzunlikdagi intervalda kamida ikkita nolga ega. Demak bunday intervallarda tenglamaning notrivial yechimlari tebranuvchi bo'ladi.

Lemma. (1) tenglamaning $y(x)$ notrivial yechimining ihtiyoriy $x = x_0$ noli izolirlangan (yakkalangan) bo'ladi, yani shunday $\varepsilon > 0$ son mavjudki, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ intervalda yechim boshqa nolga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teskari faraz o'rinli bo'lsin, yani ihtiyoriy $\varepsilon_n > 0$ $(\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1})$ son olinganda ham, $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$ intervalda $y(x)$ yechimnining $x_0$dan farqli x_n noli mavjud bo'lsin. U holda $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ limit o'rinli. $y'(x_0)$ hosilani ta'rif bo'yicha hisoblaylik:

$y'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y(x_n)-y(x_0)}{x_n-x_0}=0$. Demak (1) tenglamaning $y(x)$ notrivial yechimi $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantirar ekan. Pikar teoremasiga ko'ra bu boshlang'ich shartlarni faqat $y=0$ trivial yechim qanoatlantiradi. Bu ziddiyat lemmani isbotlaydi.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama yechimining tebranuvchanlik hususiyatini o'rganish uchun (2) ko'rinishdagi

$$y''+q(x)y=0 \qquad (6)$$

tenglama yechimlarini o'rganamiz, chunki yuqorida ko'rdikki har qachon (1) tenglamani (2) ko'rinishga olib kela olamiz.

Teorema. Agar $q(x)$ funksiya I intervalda uzluksiz va $q(x)\le 0$, $x\in I$, tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda (6) tenglamaning yechimlari shu intervalda tebranmas bo'ladi.

Isbot. Teskarisi o'rinli bo'lsin, ya'ni notrivial $y=y(x)$ yechim topilib, x_1, x_2 ($x_1<x_2$) bu yechimning I intervaldagi kema-ket kelgan nollari bo'lsin. Demak (x_1,x_2) intervalda $y=y(x)$ yechim nolga aylanmaydi. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $y(x)>0$ tengsizlik barcha $x\in(x_1,x_2)$larda o'rinli deb olamiz. U holda $x=x_0$ nuqtada $y=y(x)$ funksiya kamaymaydi, ya'ni $y'(x_0)\ge 0$. Bu yerda $y'(x_0)=0$ bo'lishi mumkin emas, chunki $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$ boshlang'ich shartni faqat trivial yechim qanoatlantiradi. Demak $y'(x_0)>0$.

$y=y(x)$ funksiya (6) tenglamani qanoatlantirganligidan foydalanamiz:

$$y''(x)=-q(x)y(x)\ge 0.$$

Demak $y'(x)$ funksiya $[x_1,x_2]$ kesmada kamaymaydi. Bunga ko'ra barcha $x\in(x_1,x_2)$lar uchun $y'(x)\ge y'(x_1)>0$. Chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga ko'ra shunday $c\in(x_1,x_2)$ son topiladiki $y(x_2)-y(x_1)=y(c)(x_2-x_1)$ tenglik o'rinli. Bu tenglik noto'g'ri, chunki uning chap tomoni nolga teng, o'ng qismi esa musbat. Teorema isbotlandi.

18-mavzu. Shturm teoremasi. Taqqoslash teoremalari

Reja

1. Shturm teoremasi
2. Taqqoslash teoremasi
3. Salohitdinov teoremasi

1-reja. Shturm teoremasi. (1) tenglama yechimining ketma-ket kelgan ikkita noli orasida bu yechim bilan chiziqli erkli ihtiyoriy boshqa yechimning aniq bitta noli bor.

Isbot. Teorema isbotini ikki qismga ajratamiz. A) (1) tenglama yechimining ketma-ket kelgan ikkita noli orasida bu yechim bilan chiziqli erkli ihtiyoriy boshqa yechimning kamida bitta noli borligini ko'rsatamiz. B) (1) tenglama yechimining ketma-ket kelgan ikkita noli orasida bu yechim bilan chiziqli erkli ihtiyoriy boshqa yechimning ikkita noli mavjud emasligini isbotlaymiz.

$y=y_1(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lib x_1, x_2 ($x_1<x_2$) nuqtalar uning ketma-ket kelgan nollari bo'lsin. $y=y_2(x)$ funksiya (1) tenglamaning $y=y_1(x)$ yechimi bilan chiziqli erkli bo'lgan ihtiyoriy yechimi bo'lsin.

Avval barcha $x \in (x_1, x_2)$lar uchun $y_2(x) \neq 0$ deb faraz qilaylik. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarning Vronskiy determinantini tuzamiz:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

$y_2(x)$ yechim $[x_1, x_2]$ kesmaning chetki nuqtasida nolga aylansa, u holda shu nuqtada Vronskiy determinanti ham nolga aylanadi. Bu esa $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarning chiziqli erkli ekanligiga zid. Demak, $y_2(x_1) \neq 0$, $y_2(x_2) \neq 0$.

Quyidagi ayniyatni yozamiz:

$$\frac{W(x)}{y_2^2(x)} \equiv -\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)'$$

Uni $[x_1, x_2]$ kesmada integrallaylik

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{W(x)}{y_2^2(x)} \equiv -\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]_{x=x_1}^{x=x_2}$$

Ohirgi tenglik o'rinli bo'lishi mumkin emas, chunki $W(x)$ determinant $[x_1, x_2]$ kesmada nolga aylanmaydi va bunga ko'ra tenglikning chap qismi noldan farqli, o'ng tomoni esa nolga teng. Isbotning A) qismi ko'rsatildi.

Endi B) qismini, yani $y_2(x)$ yechimning (x_1, x_2) intervalda ikkita nolga ega bo'la olmasligini ko'rsatamiz. Agar (x_1, x_2) intervalda $y_2(x)$ funksiya ikkita nolga ega bo'lsa, ya'ni $y_2(\tau_1) = y_2(\tau_2) = 0$, $x_1 < \tau_1 < \tau_2 < x_2$ bo'lsa, u holda teoremaning isbotlangan A) qismiga ko'ra $y_2(x)$ yechimning ketma-ket kelgan τ_1, τ_2 yechimlari orasida $y_1(x)$ yechimning kamida bitta noli topiladi. Bu esa x_1, x_2 nuqtalar $y_1(x)$ funksiyaning ketma-ket kelgan ikkita noli ekanligiga zid. Teorema to'la isbotlandi.

Natija. Agar biror I intervalda (1) tenglamaning birorta yechimi uchta nolga ega bo'lsa, u holda tenglamaning barcha yechimlari I intervalda tebranuvchi bo'ladi.

Haqiqatdan ham, (1) tenglamaning $y_1(x)$ yechimi I intervalning x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) nuqtalarida nolga aylansin. Tenglamaning boshqa $y_2(x)$ yechimini olamiz. Agar $y_1(x)$, $y_2(x)$ yechimlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda Shturm teoremasiga ko'ra (x_1, x_2) va (x_2, x_3) intervallarning har birida $y_2(x)$ funksiyaning bittadan noli bor. Demak (x_1, x_3) intervalda, umuman I intervalada $y_2(x)$ yechim tebranadi. Agar $y_1(x)$, $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bo'gliq bo'lsa, u holda I intervalning x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ nuqtalarida $y_2(x)$ funksiya ham nolga aylanadi, yani I intervalada tebranadi.

2-reja. Taqqoslash teoremasi. Bizga (5) ko'rinishdagi ushbu ikkita

$$\left(p(x)y'\right)' + q_1(x)y = 0, \qquad (7)$$

$$\left(p(x)z'\right)' + q_2(x)z = 0, \qquad (8)$$

differensial tenglama berilgan, bu erda $p(x) > 0$, $x \in I$. Agar $q_1(x)$, $q_2(x)$ - I intervalda aynan teng bo'lmagan uzluksiz funksiyalar bo'lib, shu intervalda $q_1(x) \leq q_2(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda (7) tenglamaning ihtiyoriy $y = y(x)$ yechimining ketma-ket kelgan ikkita noli orasida (8) tenglamaning ihtiyoriy $z = z(x)$ yechimining kamida bitta noli yotadi.

Isbot. x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ – nuqtalar $y = y(x)$ yechimning ketma-ket kelgan nollari bo'lsin. Teorema tasdig'iga teskari faraz o'rinli bo'lsin, yani (x_1, x_2) intervalda $z(x) \neq 0$ munosabat bajarilsin. Umumiylikka ziyon keltirmagan holda (x_1, x_2) intervalda $y(x) > 0$, $z(x) > 0$ deb hisoblaymiz. Bu holda $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$, $z(x_1) \geq 0$, $z(x_2) \geq 0$ tengsizliklar bajariladi. Quyidagi ayniyatlarga egamiz:

$$\left(p(x)y'(x)\right)'z(x) + q_1(x)y(x)z(x) \equiv 0,$$

$$\left(p(x)z'(x)\right)'y(x) + q_2(x)z(x)y(x) \equiv 0.$$

Ularni ayiramiz:

$$[q_2(x) - q_1(x)]y(x)z(x) \equiv \left(p(x)y'(x)\right)'z(x) - \left(p(x)z'(x)\right)'y(x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(z(x)y'(x) - z'(x)y(x)\right)\right]. \qquad (9)$$

Bu ayniyatni $[x_1, x_2]$ kesmada integrallaymiz:

$$\int_{x_1}^{x_2} [q_2(x) - q_1(x)]y(x)z(x)dx \equiv p(x_2)y'(x_2)z(x_2) - p(x_1)y'(x_1)z(x_1)$$

Bu tenglik o'rinli bo'la olmaydi, chunki uning chap tomoni musbat, o'ng tomoni esa nomusbat.

Isbotlangan teoremadan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. (7) va (8) tenglamalarning yechimlari mos ravishda funksiyalar bo'lsin. $y(x)$ va $z(x)$ yechimlarning ketma-ket kelgan nollari mos ravishda x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ va x_3, x_4 $(x_3 < x_4)$ nuqtalar jufligidan iborat bo'lsin. Agar $x_1 = x_3$ bo'lib, (x_1, x_2) intervalda aynan teng bo'lmagan $q_1(x)$ va $q_2(x)$ uzluksiz funksiyalar uchun $q_2(x) \geq q_1(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $x_4 < x_2$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham isbotlangan teoremaga ko'ra (x_1, x_2) intervalda $z(x)$ funksiyaning kamida bitta noli bor. $x_3 = x_1 \notin (x_1, x_2)$ munosabatga ko'ra $z(x)$ funksiyaning x_3 dan keyingi noli qaralayotgan (x_1, x_2) intervalda yotadi, ya'ni $x_4 < x_2$.

3-reja. Salohitdinov teoremasi. Agar (1) differensial tenglamaning $p(x)$, $q(x)$ koeffisientlari I intervalda uzluksiz va $|p(x)| \leq M_1$, $|q(x)| \leq M_2$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda (1) tenglamaning har bir notrivial yechimining ketma-ket ikkita noli orasidagi masofa h uchun quyidagi baholashlar o'rinli:

1) $M_1 > 0$ bo'lsa $h \geq \dfrac{\sqrt{9M_1^2 + 12M_2} - 3M_1}{M_2}$;

2) $M_2 = 0$ bo'lsa $h \geq \dfrac{2}{M_1}$;

3) $M_1 = 0$ bo'sa $h \geq \sqrt{\dfrac{12}{M_2}}$;

4) $M_1 = M_2 = 0$ bo'lsa $h = +\infty$.

Isbot. (1) tenglamaning biror $y(x)$ yechimini olaylik. $x = 0$ va $x = h$ uning ketma-ket kelgan ikkita noli bo'lsin. Quyidagi ifodani soddalshtiraylik:

$$\int_0^x ty''(t)dt-\int_x^h (h-t)y''(t)dt=\int_0^h ty''(t)dt-h\int_x^h y''(t)dt=ty'(t)\Big|_0^h-\int_0^h y'(t)dt-$$
$$-hy'(t)\Big|_x^h=hy'(h)-y(h)-y(0)-hy'(h)+hy'(x)=hy'(x).$$

Demak $hy'(x)=\int_0^x ty''(t)dt-\int_x^h (h-t)y''(t)dt$ ayniyat barcha $x\in[0,h]$larda o'rinli. Bu ayniyatda $y''(t)$ o'rniga $-p(t)y'(t)-q(t)y(t)$ qo'yamiz:

$$hy'(x)=-\int_0^x tp(t)y'(t)dt+\int_x^h (h-t)p(t)y'(t)dt+$$
$$+\int_x^h (h-t)q(t)y(t)dt-\int_0^x tq(t)y(t)dt. \qquad (10)$$

$\max\limits_{x\in[0,h]}|y'(x)|=m$ deb belgilaylik. Chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasiga ko'ra, $y(x)$ funksiya uchun barcha $x\in[0,h]$ larda quyidagi

$$|y(t)|=|y(t)-y(0)|=|y'(c)|(t-0)\le mt, \qquad |y(t)|=|y(h)-y(t)|=m(h-t)$$

tengsizliklar bir vaqtda o'rinli. (10) ayniyat va bulardan foydalanib quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$|hy'(x)|=\left|-\int_0^x tp(t)y'(t)dt+\int_x^h (h-t)p(t)y'(t)dt+\int_x^h (h-t)q(t)y(t)dt-\int_0^x tq(t)y(t)dt\right|\le$$
$$\le M_1m\left[\left|\int_0^x tdt\right|+\left|\int_x^h (h-t)dt\right|\right]+M_2\left[\left|\int_x^h (h-t)y(t)dt\right|+\left|\int_0^x ty(t)dt\right|\right]\le M_1m\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(h-x)^2}{2}\right)+$$
$$+M_2\left[\int_x^{\frac{h}{2}} (h-t)|y(t)|dt+\int_{\frac{h}{2}}^h (h-t)|y(t)|dt+\int_0^{\frac{h}{2}} t|y(t)|dt+\int_{\frac{h}{2}}^x t|y(t)|dt\right]\le$$
$$\le M_1m\frac{h^2}{2}+M_2m\left[\int_x^{\frac{h}{2}} (h-t)tdt+\int_{\frac{h}{2}}^h (h-t)^2dt+\int_0^{\frac{h}{2}} t^2dt+\int_{\frac{h}{2}}^x t(h-t)dt\right]=$$
$$=M_1m\frac{h^2}{2}+M_2m\left[\frac{h^3}{24}+\frac{h^3}{24}\right]=M_1m\frac{h^2}{2}+M_2m\frac{h^3}{12}.$$

Yuqoridagi tengsizlik $|y'(x)|$ ga maksimum qiymat beradigan nuqtada ham o'rinli. Shuning uchun quyidagi tengsizlikni yoza olamiz:

$$hm\le M_1m\frac{h^2}{2}+M_2m\frac{h^3}{12}$$
$$M_2\frac{h^2}{12}+M_1\frac{h}{2}-1\ge 0.$$

Bundan Salohitdinov teoremasida 1),2) va 3) baholashlar to'g'riligi kelib chiqadi.

Agar $M_1 = M_2 = 0$ bo'lsa (1) tenglamada $p(t) \equiv 0$, $q(t) \equiv 0$ bo'lib tenglama $y'' = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Uning umumiy yechimi $y = C_1 x + C_2$. Tenglamaning barcha yechimlari to'g'ri chiziqdan iborat va notrivial yechimlar Ox o'qini bir martadan ortiq kesa olmaydi, ya'ni nollar orasidagi masofa $+\infty$ga teng. **Teorema isbotlandi.**

19-mavzu. Chegaraviy masalalar

Reja

1. Chegaraviy masala haqida tushuncha
2. Grin funksiyasi

1-reja. Avvalgi darslarimizda Koshi masalasi bilan tanishganmiz. Ma'lumki Koshi masalasida boshlangich shart argumentning bitta qiymati ustida beriladi. Masalan $y'' + y = 0$ tenglamaning $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (har ikkala tenglikda argument 0 ga teng) shartni qanoatlantiruvchi yechimini toppish masalasi – Koshi masalsidan iborat. Agar ma'lum bir shartlar argumentning ikkita qiymati ustida berilsa, u holda qaralayotgan masala – chegaraviy masala deb ataladi. Masalan

$$y'' + y = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning

$$y(0) = 0, \; y(\frac{\pi}{2}) = 2 \qquad (2)$$

(bunda birichi tenglikda argument 0 ga, ikkinchisida esa $\frac{\pi}{2}$ ga teng) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. Bu masala – chegaraviy masala b'lib, (2) shart – chegaraviy shart hisoblanadi.

(1) tenglamaning umumiy yechimi $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. (2) shartlardan birinchisiga ko'ra $C_2 = 0$, yoki bundan $y = C_1 \sin x$ ni aniqlaymiz. $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ shartdan $C_1 = 2$ aniqlanadi. Demak qaralayotgan chegaraviy masala yagona $y = 2\sin x$ yechimga ega ekan. Agar (2) ning ikkinchi sharti $y(\pi) = 0$ bo'lganda, bu masala cheksiz ko'p yechimga ega bo'lar edi, chunki $y = C_1 \sin x$ chiziqlar oilasining barcha funksiyasi $y(\pi) = 0$ shartni qanoatlantiradi.

2-reja. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglama uchun qoyilgan quyidagi chegaraviy masalani qaraylik:

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \qquad (3)$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \qquad (4)$$

Ta'rif. (3),(4) chegaraviy masalani Grin funksiyasi deb quyidagi to'rtta hossaga ega $G(x,s)$ funksiyaga aytamiz:

1) $G(x,s)$ funksiya x bo'yicha $[x_0, x_1]$ kesmada uzluksiz, bunda $s \in (x_0, x_1)$ fiksirlangan.

2) $G(x,s)$ funksiya

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = 0 \qquad (5)$$

tenglamaning $[x_0, s) \cup (s, x_1]$ to'plamdagi yechimi

3) $G(x,s)$ funksiya $G(x_0,s)=G(x_1,s)=0$ chegaraviy shartni qanoatlantiradi.

4) $G'_x(x,s)$ hosila funksiya $x=s$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'lib uning bu nuqtadagi sakrashi $\dfrac{1}{p(s)}$ ga teng, ya'ni $G'(s+0,s)-G'(s-0,s)=\dfrac{1}{p(s)}$.

Grin funksiyasining ohirgi hossasini shunday tushunish kerak: $G'_x(x,s)$ hosila funksiyaning birinchi argumenti ikkinchisidan katta bo'lib unga intiganda funksiya chekli $a(s)$ ga intiladi, boshqa tomondan $G'_x(x,s)$ hosila funksiyaning birinchi argumenti ikkinchisidan kichik bo'lib unga intiganda funksiya chekli $b(s)$ ga intiladi va $a(s)-b(s)$ ayirma $\dfrac{1}{p(s)}$ ga teng bo'ladi. Grin funksiyasining bu hossasini $G'(x,x-0)-G'(x,x+0)=\dfrac{1}{p(x)}$ ko'rinishda yozish ham mumkin va bu ko'rinishdan quyidagi teorema isbotida foydalanamiz.

1-Teorema. Ushbu

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds \qquad (6)$$

funksiya (3),(4) chegaraviy masalani yechimidan iborat.

Isbot. Grin funksiyasining 3) hossasiga ko'ra (6) funksiya (4) chegaraviy shartni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Bu funksiya (3) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)ds=\int_{x_0}^{x} G'_x(x,s)f(s)ds+\int_{x}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)ds$$

$$y''(x)=G'_x(x,x-0)f(x)+\int_{x_0}^{x} G''_x(x,s)f(s)ds-G'_x(x,x+0)f(x)+\int_{x}^{x_1} G''_x(x,s)f(s)ds=$$

$$=[G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0)]f(x)+\int_{x_0}^{x_1} G''_x(x,s)f(s)ds$$

Bularni (3) tenglama chap tomonining quyidagi ko'rinishiga keltirib qoyamiz:

$$p(x)y''+p'(x)y'+q(x)y=$$

$$=p(x)[G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0)]f(x)+\int_{x_0}^{x_1} p(x)G''_x(x,s)f(s)ds+$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} p'(x)G'_x(x,s)f(s)ds+\int_{x_0}^{x_1} q(x)G(x,s)f(s)ds=$$

$$=f(x)+\int_{x_0}^{x_1}[p(x)G''_x(x,s)+p'(x)G'_x(x,s)+q(x)G(x,s)]f(s)ds=f(x).$$

Ohirgi integral ostidagi ifoda Grin funksiyasining 2) hossasiga ko'ra nolga aylandi. Teorema isbotlandi.

2-Teorema. Agar (5) tenglamani (4) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi notrivial yechimi mavjud bo'lmasa, u holda (3),(4) chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud va yagona bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash usuli Grin funksiyasini qurish usulidan iborat. (5) tenglamani $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=y_0'\neq 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $y_1(x)$ deb belgilaylik. Teorema shartiga ko'ra bu yechim (4) chegaraviy sharlardan ikkinchisini, yani $y(x_1)=0$ tenglikni qanoatlantirmaydi.

Tabiiyki $c_1y_1(x)$ funksiya ham (5) tenglamani va $y(x_0)=0$ shartni qanoatlantiradi, bunda c_1 - ihtiyoriy o'zgarmas son. (5) tenglamani $y(x_1)=0$, $y'(x_1)=y_1'\neq 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $y_2(x)$ deb belgilaylik. $c_2y_2(x)$ funksiyalar oilasi (5) tenglamani va $y(x_1)=0$ tenglikni qanoatlantiradi. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinantining (uni $W(x)$ deb belgilaylik) $x=x_1$ nuqtadagi qiymati $y_1(x_1)\cdot y_1'$ ga teng va noldan farqli. Demak tuzilgan yechimlar chiziqli erkli bo'ladi.

Grin funksiyasini

$$G(x,s)=\begin{cases} c_1y_1(x) & x_0\le x\le s, \\ c_2y_2(x) & s<x\le x_1, \end{cases} \tag{7}$$

ko'rinishda qidiramiz. Grin funksiyasi x bo'yicha $[x_0,x_1]$ kesmada uzluksiz bo'lishi kerak, hususan $x=s$ nuqtada ham. Bundan $c_1y_1(s)=c_2y_2(s)$ shart kelib chiqadi. $G'(s+0,s)-G'(s-0,s)=\dfrac{1}{p(s)}$ shart $c_2y_2'(s)-c_1y_1'(s)=\dfrac{1}{p(s)}$ ko'rinishni oladi. Ushbu

$$\begin{cases} c_2y_2(s)-c_1y_1(s)=0 \\ c_2y_2'(s)-c_1y_1'(s)=\dfrac{1}{p(s)} \end{cases} \tag{8}$$

sistemaning determinanati $y_2(x)$ va $-y_1(x)$ yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinantining $x=s$ nuqtadagi ko'rinishini ayni o'zidan iborat va u noldan farqli. Bu sistemadan c_1 va c_2 nomalumlarni bir qiymatli aniqlaymiz: $c_1=C_1^0$, $c_2=C_2^0$. Bularni (7) ga qoysak quyidagi funksiya hosil bo'ladi:

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1^0y_1(x) & x_0\le x\le s, \\ C_2^0y_2(x) & s<x\le x_1. \end{cases}$$

Bu funksiya (3),(4) chegaraviy masalaning Grin funksiyasi ega bo'lishi kerak bo'lgan 1)-4) hossalarga ega. Grin funksiyasi mavjudligi ko'rsatildi.

Endi uning yagonaligini ko'rsataylik. Teskarisidan faraz qilaylik, yani (3),(4) chegaraviy masala ikkita turli $G_1(x,s)$ va $G_2(x,s)$ Grin funksiyasiga ega bo'lsin. U holda 1-teoremaga ko'ra bu masalaning ikkita turli yechimini hosil qilamiz: $y_1(x)=\int_{x_0}^{x_1}G_1(x,s)f(s)ds$ va $y_2(x)=\int_{x_0}^{x_1}G_2(x,s)f(s)ds$. Bu yechimlarning ayirmasi bir jinsli (5) tenglamaning (4) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi notrivial yechimidan iborat. Bu esa teorema shartiga zid. Teorema to'la isbotlandi.

Misol. Quyidagi chegaraviy masalani Grin funksiyasini topaylik

$$y'' + y = f(x),\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning $y(0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimlari $y_1 = c_1 \sin x$ chiziqlar oilasidan iborat. $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi yechilari esa $y = c_2 \cos x$. (8) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} c_2 \cos s - c_1 \sin s = 0 \\ -c_2 \sin s - c_1 \cos s = 1 \end{cases}$$

Bundan $c_1 = -\cos s$, $c_2 = -\sin s$. Grin funksiyasi quydagicha aniqlandi:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x & 0 \le x \le s, \\ -\sin s \cos x & s < x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

20-mavzu. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi

Reja

1. Differensial tenglamalarning normal sistemasi. Yechim tushunchasi.
2. Koshi masalasi
3. Umumiy, hususiy va mahsus yechimlar.

1-reja. Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi deb

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi sistemaga aytiladi, bu yerda $y_1, y_2, ..., y_n$ – erkli o'zgaruvchi $x$ning izlanayotgan funksiyalari. Ba'zan (1) sistemani quyidagi ko'rinihga keltirish mumkin bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(2) ko'rinishdagi sistema – **differensial tenglamalarning normal sistemasi** deyiladi. Sistemada qatnashgan tenglamalar soni sistemaning **tartibi** hisoblanadi, ya'ni (2) sistema n-tartibli sistemadir.

Agar biror I intervalada differensiallanuvchi

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x) \qquad (3)$$

funksiyalar sistemasi shu intervalda (2) sistemaning barcha tenglamalarini ayniyatga aylantirsa, ya'ni

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(x) \equiv f_1(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \\ y_2'(x) \equiv f_2(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y_n'(x) \equiv f_n(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \end{array}\right\}$$

ayniyatlar o'rinli bo'lsa, (3) funksiyalar sistemasi (2) differensial tenglamalar sistemasining I intervaladagi **yechimi** deb ataladi. (3) yechim $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ nuqtalar fazosida biror egri chiziqni ifodalaydi. Bu egri chiziq (2) sistemaning **integral cjizig'i** deyiladi.

Misol. Ikkita birinchi tartibli differensial tenglamaning sistemasi beilgan:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 5z \end{array}\right\}$$

Bu sistemani $y = e^x$, $z = -e^x$ funksiyalar sistemasi $(-\infty, +\infty)$ intervaldagi yechimi-dan iborat. Berilgan sistemani har qanday $y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$, $z = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}$ ko'rinishdagi funksiyalar sistemasi qanoatlantiradi.

2-reja. $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ nuqada (2) sistema uchun **Koshi masalasi** shunday qo'yilai: sistemaning usbu

$$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \; \dots \;, \; y_n(x_0) = y_n^0 \qquad (4)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi quyidagi teoremani isbotsiz keltirib o'tamiz.

Pikar teoremasi. (2) sistemada $f_1, f_2, ..., f_n$ funksiyalar

$$R: |x - x_0| \le a, \; |y_k - y_k^0| \le b \quad (k = 1, ..., n)$$

sohada aniqlangan bo'lib quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. $f_k(x, y_1, ..., y_n)$ $(k = 1, ..., n)$ funksiyalar barcha arumentlari bo'yicha uzluksiz bo'lsin. Bu shartdan ularni R yopiq sohada chegaralanganligi kelib chiqadi:

$$|f_k(x, y_1, ..., y_n)| \le M \quad (k = 1, ..., n);$$

2. $f_k(x, y_1, ..., y_n)$ $(k = 1, ..., n)$ funksiyalarning $y_1, ..., y_n$ argumentlar bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni

$$|f_k(x, y_{11}, ..., y_{n1}) - f_k(x, y_{12}, ..., y_{n2})| \le L \sum_{i=1}^{n} |y_{i1} - y_{i2}|,$$

bu yerda L – musbat o'zgarmas son, $(x, y_{11}, ..., y_{n1})$ va $(x, y_{12}, ..., y_{n2})$ – R sohaning ihtiyoriy ikkita nuqtasi.

U holda (2) sistemaning (4) boshlangich shartni qanoatlantiruvchi (3) yechimi mavjud va yagona. Shu bilan birga bu yechim (bu yerda $y_k(x)$ $(k = 1, ..., n)$ funksiyalar haqida gap boryapti) $|x - x_0| \le h$ intervalda differensiallanuvchi bo'ladi, bu yerda $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.

3-reja. D orqali $(x, y_1,..., y_n)$ nuqtalarning shunday to'plamini belgilaylikki, bu to'plamning ihiyoriy nuqtasida (2) sistema uchun qoyilgan Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'lsin.

Ushbu n ta uzluksiz differensiallanuvchi

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1,..., C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1,..., C_n) \\ . \qquad . \qquad . \\ y_n = \varphi_n(x, C_1,..., C_n) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

funksiyani olaylik. Agar, birinchidan D sohada (5) sistemani $C_1,..., C_n$ lara nisbatan bir qiymatli yechish mumkin bo'lsa, ikkinchidan $C_1,..., C_n$ larning ihtiyoriy o'zgarmas qiymatida (5) funksiyalar sistemasi (2) sistemani yechimidan iborat bo'lsa u holda, (5) funksiyalar sistemasi (2) sistemaning **umumiy yechimi** deyiladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y, \end{cases} \qquad (6)$$

sistemaning umumiy yechimi aniqlaylik. Uning birinchi tenglamasini differensiallaymiz: $y'' = z' = -y$. Bundan $y'' + y = 0$ ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaga ega bo'ldik. Uning umumiy yechimi $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Buni (6)ning birinchi tenglamasiga qo'yamiz: $z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Endi (6) sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x, \end{cases} \qquad (7)$$

funksiyalar sistemasidan iboratligini tekshiramiz.

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x = z, \; z' = -C_1 \cos x + -C_2 \sin x = -y.$$

Bu hisoblashlar ko'rsatadiki C_1, C_2 larning ihtiyoriy o'zgarmas qiymatida (7) funksiyalar sistemasi (6) sistemani yechimidan iborat. (7) sistema C_1, C_2 noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib uning determinanti $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$ noldan farqli. Shuning uchun (7) sistemani C_1, C_2 larga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin.

Agar (3) funksiyalar sistemasi (2) differensial tenglamalar sistemasining I intervaladagi yechimidan iborat bo'lib, bu yechimga mos integral chiziqning har bir nuqtasida (2) sistema uchun qo'yilgan Koshi masalasi yagona (3) yechimgagina ega bo'lsa, u holda bu yechimni **hususiy yechim** deb aytamiz.

Agar (3) funksiyalar sistemasi (2) differensial tenglamalar sistemasining I intervaladagi yechimidan iborat bo'lib, bu yechimga mos integral chiziqning har bir nuqtasida (2) sistema uchun qo'yilgan Koshi masalasi (3) dan boshqa yechimga ham ega bo'lsa, u holda (3)yechimni **mahsus yechim** deb aytamiz.

Misol. Ushbu $\left.\begin{aligned} y' &= x+\frac{2}{x}y-\sqrt{z} \\ z' &= 2\sqrt{z} \end{aligned}\right\}$ (8) sistemani qaraymiz. Uning ikkinchi tenglamasini integrallaymiz: $z=(x+C_1)^2$ $(x>-C_1)$. Buni sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yamiz: $y'=\frac{2}{x}y-C_1$. Bu birinchi tartibli chiziqli tenglamani yechamiz: $y=C_1x+C_2x^2$. (8) sistemaning umumiy yechimini yozamiz:

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1x+C_2x^2, \\ z &= (x+C_1)^2 \end{aligned}\right\} \quad (x>-C_1). \qquad (9)$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi $z=0$ mahsus yechimga ega. Uni birinchi tenglamaga qo'yamiz: $y'=x+\frac{2}{x}y$. Bu tenglamni yechimi $y=x^2(C+\ln x)$. Shunday qilib (8) sistema umumiy yechimdan tashqari yana bir yechimlar oilasiga ega:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2(C+\ln x), \\ z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Bu oilaning har bir sistemasi (8) differensial tenglamalar sistemasining mahsus yechimi bo'ladi. Haqiqtdan ham (10) oilaning ihtiyoriy $y=x^2(C_0+\ln x)$, $z=0$ sistemasini olaylik. Bu yechimning ihtiyoriy nuqtasini fiksirlab olamiz: $y=x_0^2(C_0+\ln x_0)$, $z=0$. (9) umumiy yechim orasidan shu nuqtadan o'tuvhi yechimni qidiramiz: $\left.\begin{aligned} C_1x_0+C_2x_0^2 &= C_0x_0^2+x_0^2\ln x_0 \\ (x_0+C_1)^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$. Bundan $C_1=-x_0$, $C_2=C_0+1+\ln x_0$. Demak (8) sistemani

$$\left.\begin{aligned} y &= -x_0x+(C_0+1+\ln x_0)x^2, \\ z &= (x-x_0)^2 \end{aligned}\right\}$$

yechimi (10) oiladan ihtiyoriy tanlangan $y=x^2(C_0+\ln x)$, $z=0$ sistemanning ihtiyoriy fiksirlangan $y=x_0^2(C_0+\ln x_0)$, $z=0$ nuqtasidan o'tadi.

21-mavzu. Boshlang'ich berilganlar va parametrlarning funksiyasi sifatida normal sistema yechimining uzluksizligi va differensiallanuvchilgi

Reja

1. Yechimning parametrlarga uzluksiz bog'ilqligi
2. Yechimining boshlang'ich qiymatlarga uzluksiz bog'liqligi
3. Yechimning boshlang'ich qiymat bo'yicha differensialanuvchiligi

1-reja. Bizga differensial tenglamalarning normal sistemasi berilgan:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x,y,z,\lambda) \\ z' &= f_2(x,y,z,\lambda) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

bunda f_1, f_2 funksiyalar x,y,z argumentlarning funksiyalari sifatida

$$R:\quad |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b,\ |z-z_0|\le b \qquad (2)$$

sohada, λ parametrning funksiyalari sifatida

$$\lambda^{(0)} \le \lambda \le \lambda^{(1)} \qquad (3)$$

sohada aniqlangan.

1-teorema. (1) sistemaning o'ng qismidagi f_1, f_2 funksiyalar quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsin:

1. f_1, f_2 funksiyalar barcha argumentlari bo'yicha (2),(3) sohada uzluksiz. (Bu shartdan qaralayotgan funksiyalarni (2),(3) yopiq sohada chegaralanganligi kelib chiqadi, ya'ni $|f_k| \le M$ $(k=1,2)$, bu yerda M - musbat o'zgarmas son)

2. f_1, f_2 funksiyalar y, z argumentlarga nisbatan Lipshits shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$|f_k(x, y_1, z_1, \lambda) - f_k(x, y_2, z_2, \lambda)| \le L(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \quad (k=1,2)$$

bu yerda (x, y_1, z_1) va (x, y_2, z_2) – (2) sohaning ihtiyoriy nuqtalari, λ – (3) sohaning ihtiyoriy nuqtasi, L – λ ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas musbat son.

U holda (1) sistemaning

$$y(x_0) = y_0, \; z(x_0) = z_0 \qquad (4)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y = y(x, \lambda), \; z = z(x, \lambda) \qquad (5)$$

mavjud va yagona. Bu yechim x argumentining $I = \{x : |x - x_0| \le h\}$ o'zgarish intervalida uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi, bu yerda $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Shuningdek (5) yechim (3) sohada λ parametrning uzluksiz funksiyasidan iborat.

Isbot. Dastlab (1),(4) Koshi masalasiga ekvivalent integral tenglamalar sistemasiga o'tib olaylik:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y, z, \lambda)dx \\ z &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y, z, \lambda)dx \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Bu sistema yechimiga no'linchi yaqinlashish sifatida y_0, z_0 ni olamiz va k-yaqinlashishni quyidagicha quramiz ($k = 1,2,...$):

$$\left.\begin{aligned} y_k(x, \lambda) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{k-1}(x, \lambda), z_{k-1}(x, \lambda), \lambda)dx \\ z_k(x, \lambda) &= z_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_{k-1}(x, \lambda), z_{k-1}(x, \lambda), \lambda)dx \end{aligned}\right\}$$

Shunday qilib ikkita funksiyalar ketma-ketligiga ega bo'ldik:

$$\left.\begin{aligned} &y_0,\; y_1(x, \lambda),\; y_2(x, \lambda),\; \dots,\; y_n(x, \lambda),\; \dots, \\ &z_0,\; z_1(x, \lambda),\; z_2(x, \lambda),\; \dots,\; z_n(x, \lambda),\; \dots, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Avvalgi darslarimizning birida Pikar teoremasini isbotini ko'rib chiqqan edik va o'sha mulohazalarni deyarli takrorlab (7) ketma-ketlik bilan bo'gliq quyidagi tasdiqlarni isbotlash qiyin emas:

1. (7) ketma-ketlikning barcha funksiyalari x ning funksiyasi sifatida I intervalda va λ parametrning funksiyasi sifatida (3) intervalda uzluksiz hamda x va λ ning bu qiymatlarida R sohadan chiqib ketmaydi.

2. (7) ketma-ketliklar $x$ga nisbatan I intervalda va λ parametrga nisbatan (3) intervalda tekis yeqinlashubchi bo'ladi.

Bu tasdiqdan $y(x,\lambda)$ va $z(x,\lambda)$ limit funksiyalarning x argumentga nisbatan I intervalda va λ parametrga nisbatan (3) intervalda uzluksizligi kelib chiqadi.

3. x va λ mos ravishda I va (3) intervalda o'zgarganda $y(x,\lambda)$ va $z(x,\lambda)$ limit funksiyalar R sohadan chiqib ketmaydi va (6) integral tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

Bu tasdiqdan $y(x,\lambda)$ va $z(x,\lambda)$ limit funksiyalarning x argumentga nisbatan I intervalda uzluksiz differensiallanuvchiligi kelib chiqadi.

4. (6) integral tenglamalar sistemasining $y = y(x,\lambda)$, $z = z(x,\lambda)$ yechimi yagona bo'ladi.

Ta'kidlash joizki (1) sistema n-tartibli bo'lib, u m ta parametrga bog'liq bo'lganda ham 1-teoremaga o'hshash teoremani isbotlash mumkin.

2-reja. Quyidagi sistemani qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x,y,z) \\ z' &= f_2(x,y,z) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

bunda f_1, f_2 funksiyalar

$$R:\quad |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b,\ |z-z_0| \le b$$

sohada aniqlangan.

2-teorema. Agar f_1, f_2 funksiyalar R sohada Pikar teoremasining ikkala shartini ham qanoatlantirsa, u holda (8) sistemaning

$$y(x^*) = y^*,\ z(x^*) = z^* \qquad (9)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $y = y(x,x^*,y^*,z^*)$, $z = z(x,x^*,y^*,z^*)$ yechimi x, x^*, y^*, z^* larga nisbatan

$$|x-x_0| \le \frac{h}{2} - \omega,\ |x^*-x_0| \le \omega,\ |y^*-y_0| \le \frac{b}{2},\ |z^*-z_0| \le \frac{b}{2} \qquad (10)$$

sohada uzluksiz funksiyadan iborat, bu yerda $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $0 \le \omega < \frac{h}{4}$.

Isbot. (8) sistemada erkli o'zgaruvchini va noma'lum funksiyalarni

$$x - x^* = \xi,\ y - y^* = \eta,\ z - z^* = \zeta$$

formulalar bilan almashtirsak u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= f_1(\xi + x^*, \eta + y^*, \zeta + z^*) \equiv g_1(\xi,\eta,\zeta,x^*,y^*,z^*) \\ \frac{d\zeta}{d\xi} &= f_2(\xi + x^*, \eta + y^*, \zeta + z^*) \equiv g_2(\xi,\eta,\zeta,x^*,y^*,z^*) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

(9) boshlang'ich shartlar esa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\eta(0) = 0,\ \zeta(0) = 0. \qquad (12)$$

Teorema shartiga ko'ra (11) sistemada g_1, g_2 funksiyalar ξ,η,ζ o'zgaruvchilarga nisbatan

$$|\xi + x^* - x_0| \le a,\ |\eta + y^* - y_0| \le b,\ |\zeta + z^* - z_0| \le b \qquad (13)$$
sohada Pikar teoremasi shartlarini qanoatlantiradi va x^*, y^*, z^*larni parametr sifatida o'z ichiga oladi. Agar ξ, η, ζ ozgaruvchilar

$$R_1:\quad |\xi| \le \frac{a}{2},\ |\eta| \le \frac{b}{2},\ |\zeta| \le \frac{b}{2}$$

sohada, x^*, y^*, z^* parametrlar esa

$$|x^* - x_0| \le \frac{a}{2},\ |y^* - y_0| \le \frac{b}{2},\ |z^* - z_0| \le \frac{b}{2} \qquad (14)$$

sohada o'zgaradi desak, (13) tengsizliklar ham bajariladi. O'z navbatida (11) sistemaning ong qismi 1-teorema shartlarini qnoatlantiradi. Bundan sistemaning (12) boshlangich shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi $\eta = \eta(\xi, x^*, y^*, z^*)$, $\zeta = \zeta(\xi, x^*, y^*, z^*)$ ξ argumentining $|\xi| \le \frac{h}{2}$ o'zgarish intervalida uzluksiz differensiallanuvchiligi va (14) sohada x^*, y^*, z^* parametrlarningning uzluksiz funksiyasidan iboratligi kelib chiqadi.

O'zgaruvchilarni orgaga qaytarib (8) sistemaning (9) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini hosil qilamiz:

$$y = y^* + \eta(x - x^*, x^*, y^*, z^*),\ z = z^* + \zeta(x - x^*, x^*, y^*, z^*). \qquad (15)$$

$|\xi| \le \frac{h}{2}$ tensizlikdan bu yechimni $x$ning funksiyasi sifatida

$$|x - x^*| \le \frac{h}{2} \qquad (16)$$

intervalda aniqlanganligi kelib chiqadi. (16) tengsizlik $|x - x_0| \le \frac{h}{2} - \omega$ va $|x^* - x_0| \le \omega$ tengsizliklar bir vaqtda bajarilganda ham o'rinli bo'ladi. Demak (15) yechim x, x^*, y^*, z^* larga nisbatan (10) sohada uzluksiz funksiyadan iborat. Teorema isbotlandi.

3-reja. 3-teorema. (8) sistemada f_1, f_2 funksiyalar y va z boyicha hususiy hosilalari bilan R sohada uzluksiz bo'lsin. U holda sistemaning (9) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi

$$y = y(x, x^*, y^*, z^*),\ z = z(x, x^*, y^*, z^*) \qquad (17)$$

yechimidan x^*, y^*, z^* bo'yicha olingan hususiy hosilalar x, x^*, y^*, z^* larning funksiyasi sifatida (10) sohada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremani isbotlash jaroyoni ko'p vaqt talab qilganligi sababli bu ishni chetlab o'tamiz.

Misol. $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2 \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y^2 \end{cases}$ sistemani $x(1) = x_0 = 3$, $y(1) = y_0 = 2$ boshlangich shartni qanoatlantiruvchi yechimini va $\frac{\partial x}{\partial y_0}$ hususisy hosilani aniqlang.

Sistemaning ikkinchi tenglamasi – o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Uni integrallaymiz: $y = \frac{2}{t + C_1}$. Buni sistemaning birinchi tenlamasiga qo’yamz: $\dot{x} = \dfrac{2}{t + C_1} x + t^2$. Bu birinchi tertibli chiziqli differensial tenglamani integrallaymiz: $x = (t + C_1)^2 \left[-2C_1 \ln(t + C_1) + C_2\right] + 3C_1^2 (t + C_1)$. Bu yerda $t_0 = 1$, $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ desak $C_1 = 0$ kelib chiqadi va bundan berilgan boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni aniqlaymz: $x = t^2(t + 2)$, $y = \dfrac{2}{t}$.

Agar y_0 ni o’zgartirsak, u holda C_1, C_2 lar ham o’zgaradi, ya’ni aniqlangan yechim y_0 ga nisbatan murakkab funksiyadan iborat. Shu sababli aniqlanishi talab etilgan $\dfrac{\partial x}{\partial y_0}$ hususisy hosila ($x_0 = 3$, $y_0 = 2$ nuqtadagi qiymati) quyidagicha hisoblanadi: $\dfrac{\partial x}{\partial y_0} = \dfrac{\partial x}{\partial C_1} \cdot \dfrac{\partial C_1}{\partial y_0} + \dfrac{\partial x}{\partial C_2} \cdot \dfrac{\partial C_2}{\partial y_0}$. Dastlab $\dfrac{\partial x}{\partial C_1}$ ni hisoblaymiz: $\dfrac{\partial x}{\partial C_1} = 2t(t + 2) - 2t^2 \ln t$. Endi $C_1 = \dfrac{2}{y_0} - 1$ munosabatdan $\dfrac{\partial C_1}{\partial y_0} = -\dfrac{1}{2}$ ni aniqlaymiz. $\dfrac{\partial x}{\partial C_2} = t^2$. Ushbu $3 = \left(\dfrac{2}{y_0}\right)^2 \left[3 - 2\left(\dfrac{2}{y_0} - 1\right) \ln\left(\dfrac{2}{y_0}\right) + C_2\right] + 3\left(\dfrac{2}{y_0} - 1\right)^2 \dfrac{2}{y_0}$ tenglikdan $\dfrac{\partial C_2}{\partial y_0} = 3$ kelib chiqadi. Demak: $\dfrac{\partial x}{\partial y_0} = t^2 \ln t + 2t^2 - 2t$.

22-Differensial tenglamalar sistemasini integrallash

Reja

1. Sistemani bitta yuqori tartibli tenglamaga keltirib integrallash
2. Sistemaning birinchi integrallari
3. Normal sistemaning immetrik ko’rinishi

1-reja. Bizga

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

differensial tenglamalarning normal sistemasi berilgan bo’lsin. Ayrim hollada bu sistemaning tenglamalarini differensialllab, noma’lum funksiyalardan faqat bittasi qatnashgan n-tartibli differensial tenglama hosil qilish mumkin. Hosil bo’lgan n-tartibli tenglamani integrallasak (1) sistemaning tartibi bittaga kamayadi.

1-misol.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

sistemaning birinchi tenglamasini differensiallaylik: $y'' = z' = y$. Bu yerda $y'' - y = 0$ tenglama hosil bo’ldi. Uning umumiy yechimi $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Buni sistemaning birinchi tenglamasiga qoysak $z = y' = (C_1 e^x + C_2 e^{-x})' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. Demak qaralayotgan sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} y = C_1e^x + C_2e^{-x} \\ z = C_1e^x - C_2e^{-x} \end{cases}$$

2-misol.

$$\begin{cases} y' = 3y - 2z \\ z' = 2y - z \end{cases}$$

Dastlab sistemani y va y'ga nisbatan yehib olaylik: $y = \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}z,\ y' = 3\left(\frac{1}{2}z' +\right.$ *12zz′−2z=32z′−12z*. Endi sistemaning ikkinchi tenglamsini differensiallaymiz: $z'' = 2y' - z' = 3z' - z - 2y + z = 3z' - z' - z = 2z' - z$. Bu yerda $z'' - 2z' + z = 0$ differensial tenglama hosil bo'ldi. Uning umumiy yechimi $z = (C_1 + C_2x)e^x$. Buni $y = \frac{1}{2}z' + \frac{1}{2}z$ tenglikka qo'ysak:

$y = \left(C_1 + \frac{1}{2}C_1 + C_2x\right)e^x$ kelib chiqadi. Demak qaralayotgan sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} y = \left(C_1 + \dfrac{1}{2}C_1 + C_2x\right)e^x \\ z = (C_1 + C_2x)e^x \end{cases}$$

2-reja. Agar (1) sistemadan

$$dF(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \qquad (2)$$

tenglik hosil bo'lsa, (2) tenglikni sistemaning **integrallanuvchi kombinatsiyasi** deb ataymiz.

Ta'rif. Agar (1) sistemaning ihtiyoriy $y_1, y_2, \dots, y_n$ yechimini $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ funksiyga keltirib qo'yish natijasida, funksiya o'zgarmasga aylansa, u holda

$$F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C$$

tenglik (1) sistemaning **birinchi integrali** deb ataladi.

(1) sistemaning (2) integrallanuvchi kombinatsiyasidan uning bitta birinchi integrali kelib chiqadi $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1$.

Misol.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

sistemaning tenglamalarini qo'shamiz: $(y + z)' = y + z$. Bundan

$$\frac{d(y + z)}{y + z} = dx,\ \ d(\ln(y + z) - x) = 0.$$

Bu tenglik sistemaning integrallanuvchi kombinatsiyasidir. Undan sistemaning

$$\ln(y + z) - x = \ln C_1\,, \quad y + z = C_1e^x$$

birinchi integrali hosil bo'ladi.

Boshqa tomondan, agar sistema tenglamalarini ayirsak: $(y - z)' = z - y$. Bundan

$$\frac{d(y - z)}{y - z} = -dx,\ \ d(\ln(y - z) + x) = 0.$$

Bu tenglik sistemaning integrallanuvchi kombinatsiyasidir. Undan sistemaning

$$\ln(y - z) + x = \ln C_2\,, \quad y - z = C_2e^{-x}$$

birinchi integrali hosil bo'ladi. $y + z = C_1e^x,\ y - z = C_2e^{-x}$ tengliklardan y va z ni aniqlaymiz: $y = \frac{1}{2}C_1e^x + \frac{1}{2}C_2e^{-x},\ z = \frac{1}{2}C_1e^x - \frac{1}{2}C_2e^{-x}$. O'zgarmas parametrlarni boshqatdan tanlasak yuqorida hosil qilnga umimy yechim ko'rinishini olamiz:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

Agar sistemaning k ta integrallanuvchi kombinatsiyasini hosil qilsak, u holdabu kombinatsiyaladan sistemaning k ta birinchi integralini olamiz:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1 \\ F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_k \end{cases} \qquad (3)$$

Agar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1} & \frac{\partial F_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi k ga teng bo'lsa, (3) birinchi integarllar chiziqli erkli deyiladi. (1) sistemanining n ta chiziqli erkli birinchi integrali uning umumiy yechimi bo'ladi. Agar sistemaning k ta chiziqli erkli birinchi integrali ma'lum bo'lsa, u holda sistema tartibini k birlikka pasaytirish mumkin.

Misol.

$$\begin{cases} y_1' = y_3 - y_2 \\ y_2' = y_1 - y_3 \\ y_3' = y_2 - y_1 \end{cases}$$

sistema tenglamalarini qo'shamiz $(y_1 + y_2 + y_3)' = 0$. Bundan $y_1 + y_2 + y_3 = C_1$ birinchi integral aniqlanadi. Sistema tenglamalarini mos ravishda y_1, y_2 va y_3 ga ko'paytiramiz, so'nra qo'shamiz: $y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3' = 0 \Rightarrow (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)' = 0 \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2$.

Aniqlangan birinchi integrallarni chiziqli erkli bo'lishini tekshiramiz, bu yerda $F_1 = y_1 + y_2 + y_3,\ F_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning rangi 2 ga teng. Demak topilgan birinchi integrallar chiziqli erkli.

3-reja. Normal sistemaning simmetrik ko'rinishi deb ushbu

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

sistemaga aytiladi. Ushbu

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

normal sitemaga quyidagi simmetrik ko'rinishdagi sstema mos keladi:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n)}=\frac{dy_2}{f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n)}=\ldots=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n)}$$

Simmetrik ko'rinishdagi sistemaning afzal tomoni shundaki, ko'p hollarda undagi noma'lumlardan ihtiyoriy bittasini erkli o'zgaruvchi, qolgan noma'lumlarni izlanayotgan funksiya deb hisoblab, uning birinchi integralini topish oson bo'ladi.

Misol.

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz} \qquad (4)$$

simmetrik ko'rinishdagi sistemani qaraymiz. Uning ohirgi tengligidan

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama hosil bo'ladi. Undan $\frac{y}{z}=C_1$ birinchi integral aniqlanadi. (4)sistemada birinchi nisbatning surat mahrajini x ga, ikkinchisini y ga, uchinchisini z ga ko'paytirib, quyidagi nisbatni olamiz:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{2xy}$$

Bundan $\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln y$ yoki $\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$ ikkinchi integralni olamiz. Aniqlangan birinchi integrallar chiziqli erkli bo'lgani uchun ular (4) sistemaning umumiy integralini ifodalaydi:

$$\frac{y}{z}=C_1, \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2.$$

23-mavzu. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

Reja

1. Umumiy tushunchalar.
2. Chiziqli operator.
3. Chiziqli bir jinsli sistemalar
4. Vektor funksiyalarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi

1-reja. Ushbu

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\ldots+a_{1n}(x)y_n+b_1(x) \\ y_2'=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\ldots+a_{2n}(x)y_n+b_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n'=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\ldots+a_{nn}(x)y_n+b_n(x) \end{cases} \qquad (1)$$

sistema n-tartibli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. Yozuvlarni qisqartirish uchun quydagi matritsalarni kiritamiz:

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad B(x)=\begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Bir ustunli $B(x)$ va $Y(x)$ kabi matrisalarni **vektor-funksiya** deb ataymiz. Bu matrisalar yordamida (1) sistema

$$Y' = A(x)Y + B(x) \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ matritsalarning barcha elementlari biror I intervalada uzluksiz bo'lsa, $A(x)$ va $B(x)$ matritsalar I intervalada uzluksiz deyiladi.

1-teorema. (**chiziqli sistema yechimining mavjudligi va yagonaligi haqida**) Agar $A(x)$ va $B(x)$ matritsalar biror I intervalada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$x_0 \in I, \qquad -\infty < y_i^0 < \infty, \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

sohadan olingan ihtiyoriy boshlang'ich qiymatlarga ega bo'lgan (1) (yoki(2)) tenglamaning yechimi mavjud va yagona.

Isbot. Teorema sharti o'rinli bo'lsa (1) sistema normal sistemalar uchun keltirilgan Koshi teoremasi shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

1. Barcha $f_i = a_{i1}(x)y_1 + a_{i1}(x)y_2 + \ldots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$ funksiyalar (3) sohada uzluksiz; 2. $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x)$ hususiy hosilalar (3) sohada uzluksiz. Demak Koshi teoremasiga ko'ra teorema tasdig'i o'rinli.

2-reja. Ushbu

$$L(Y) = \frac{dY}{dx} - A(x)Y \qquad (4)$$

tenglik bilan aniqlangan operator, chiziqli operator deyiladi, bu yerda $A(x)$ – $n \times n$ tartibli matrisa, y – $n \times 1$ tartibli matrisa. Chiziqli operator yordamida (2) sistemani

$$L(Y) = B(x)$$

ko'rinishda yoza olamiz.

$L(Y)$ operatorning hossalari

1. $L(cY) = cL(Y),\ c - const.$
2. $L(Y_1 + Y_2) = L(Y_1) + L(Y_2).$

1 va 2 hossalardan chiziqli operator uchun quyidagi tenglik bajalishi kelib chiqadi

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(Y_i)$$

3-reja. Ushbu

$$Y' = A(x)Y \qquad (5)$$

sistema (2) ga mos chiziqli bir jinsli sistema deyiladi. Chiziqli operator yordamida bu sistemani $L(Y) = 0$ ko'rinishda yoza olamiz.

2-teorema. Agar $Y(x)$ vektor-funksiya (5) sistemani yechimi bo'lsa, u holda $cY(x),\ (c - const)$ vektor-funksiya ham (5) sistemani yechimi bo'ladi.

3-teorema. Agar $Y_1(x)$ va $Y_2(x)$ vektor-funksiyalar (5) sistemani yechimlari bo'lsa, u holda $Y_1(x) + Y_2(x)$ vektor-funksiya ham (5) sistemani yechimi bo'ladi.

4-teorema. Agar $Y_1(x),\ Y_2(x),\ \dots, Y_m(x)$ vektor-funksiyalar (5) sistemani yechimlari bo'lsa, u holda $c_1Y_1(x) + c_2Y_2(x) + \ldots + c_mY_m(x)$ vektor-funksiya ham (5) sistemani yechimi bo'ladi.

5-teorema. (5) sistema $Y(x) = U(x) + iV(x)$ kompleks yechimga ega bo'lsa, u holda $U(x)$ va $V(x)$ vektor-funksiyalar (5) sistemani haqiqiy yechimi bo'ladi.

4-reja. Bizga I intervalda aniqlangan va uzluksiz $Y_1(x),\ Y_2(x),\ \dots, Y_m(x)$ vektor-funksiyalar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ o'zgarmas sonlar uchun

$$\alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \ldots + \alpha_m Y_m(x) \equiv 0 \qquad (6)$$

ayniyat I intervalda o'rili bo'lsa, u holda $Y_1(x),\ Y_2(x),\ \ldots, Y_m(x)$ vektor-funksiyalar bu interbalda **chiziqli bo'gliq** deyiladi. Aks holda, ya'ni (6) ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ bo'lgandagina bajarilsa, $Y_1(x),\ Y_2(x),\ \ldots, Y_m(x)$ vektor-funksiyalar I interbalda **chiziqli erkli** deyiladi.

Hususan ikkita $Y_1(x) = \left(y_{11}(x), y_{12}(x), \ldots, y_{1n}(x)\right)^T$ va $Y_1(x) = \left(y_{21}(x), y_{22}(x), \ldots, y_{2n}(x)\right)^T$ vektor-funksiyalar chiziqli bo'g'liq bo'lishi uchun

$$\frac{y_{11}(x)}{y_{21}(x)} = \frac{y_{12}(x)}{y_{22}(x)} = \ldots = \frac{y_{1n}(x)}{y_{2n}(x)} = k, \quad k - const$$

nisbatlarning o'zgarmas songa tengligi zarur va yetarli.

Misol. $Y_1(x) = (e^{3x}, e^{3x}, e^{3x})^T$ va $Y_1(x) = (e^{6x}, -2e^{6x}, e^{6x})^T$ vektor-funksiyalar ihtiyoriy intervalda chiziqli erkli.

Tasdiq. Agar $Y_1(x),\ Y_2(x),\ \ldots, Y_m(x)$ vektor-funksiyalardan birortasi I interbalda aynan nol vektordan iborat bo'lsa, u holda ular I interbalda chiziqli bo'gliq bo'ladi.

Ta'rif.

$$Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x) \qquad (7)$$

vektor-funksiyalar I interbalda aniqlangan bo'lsin, bu yerda $Y_i(x) = \left(y_{i1}(x), y_{i2}(x), \ldots, y_{in}(x)\right)^T, i = 1,2, \ldots, n$. Ushbu

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \ldots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{n2}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

determinant (7) vektor-funksiyalarning **Vronskiy determinanti** deyiladi.

6-teorema. (**n ta vektor-funksiya chiziqli bog'liqligining zaruriy sharti**) Agar (7) vektor-funksiyalar I interbalda chiziqli bo'gliq bo'lsa, u holda I intervalda $W(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Isbot. Teorema shariga ko'ra, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o'zgarmas sonlar uchun

$$\alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \ldots + \alpha_n Y_n(x) \equiv 0$$

yoki

$$\begin{cases} y_{11}(x)\alpha_1 + y_{21}(x)\alpha_2 + y_{n1}(x)\alpha_n \equiv 0 \\ y_{12}(x)\alpha_1 + y_{22}(x)\alpha_2 + y_{n2}(x)\alpha_n \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_{1n}(x)\alpha_1 + y_{2n}(x)\alpha_2 + y_{nn}(x)\alpha_n \equiv 0 \end{cases}$$

ayniyat I intervalda o'rili

Teorema tasdig'iga teskari faraz yuritaylik, ya'ni biror $x_0 \in I$ nuqtada $W(x_0) \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} y_{11}(x_0)\alpha_1 + y_{21}(x_0)\alpha_2 + y_{n1}(x_0)\alpha_n = 0 \\ y_{12}(x_0)\alpha_1 + y_{22}(x_0)\alpha_2 + y_{n2}(x_0)\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_{1n}(x_0)\alpha_1 + y_{2n}(x_0)\alpha_2 + y_{nn}(x_0)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

sistemaning determinanti $W(x_0) \neq 0$ bo'lgani uchun u yagona $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ yechimga ega bo'ladi. Bu esa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o'zgarmaslarning bir vaqtda nolga teng emasligiga ziddir. Teorema isbotlandi.

Shuni ta'kidlash joizki teoremaga teskari tasdiq har doim ham o'rinli bo'lmaydi. Boshqacha aytganda Agar (7) vektor-funksiyalarning Vronsky determinanti $W(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda, bu vunksiyalar I interbalda chiziqli bo'gliq bo'lmasligi ham mumkin.

Misol. $Y_1(x) = (x, x)^T$ va $Y_2(x) = (x^2, x^2)^T$ vektor-funksiyalar ihtiyoriy intervalda chiziqli erkli, lekin ularning Vronsky determinanti ihtiyoriy intervalda aynan nolga teng.

24-mavzu. **Chiziqli bir jinsli sistema yechimlarining fundamental sistemasi**.

Reja

1. Yechimlarning chiziqli bog'liqligi va chiziqli erkliligi.
2. Yechimlarning fundamental sistemasi
3. Umumiy yechim
4. Ostrogradskiy-Liuvill fomulasi

1-reja. Ushbu

$$Y' = A(x)Y \qquad (1)$$

chiziqli bir jinsli sistemani qaraymiz, bun yerda $A(x)$ matritsa Iintervalda uzliksiz.

$$Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_m(x), \quad Y_i(x) = \left(y_{i1}(x), y_{i2}(x), \ldots, y_{in}(x)\right)^T, i = 1,2, \ldots, m \qquad (2)$$

vektor-funksiyalar I interbalda (1) sistemaning yechimlari bo'lsin.

1-teorema. Agar biror $x_0 \in I$ uchun $Y_1(x_0), Y_2(x_0), \ldots, Y_m(x_0)$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda (2) yechimlar I intervalda chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ o'zgarmas sonlar uchun

$$\alpha_1 Y_1(x_0) + \alpha_2 Y_2(x_0) + \alpha_m Y_m(x_0) = 0$$

tenglik o'rinli. U holda (1) sistemaning

$$Y = \alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \alpha_m Y_m(x)$$

yechimi

$$y_1(x_0) = y_2(x_0) = \ldots = y_n(x_0) = 0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Chiziqli sistema yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaga ko'ra (1) sistemaning bu boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi $Y \equiv 0$ vektor-funksiyadan iborat. Demak bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ o'zgarmas sonlar uchun

$$Y = \alpha_1 Y_1(x) + \alpha_2 Y_2(x) + \alpha_m Y_m(x) \equiv 0$$

ayniyat I intervalda o'rinli va (2) yechimlar I intervalda chiziqli bog'liq. Teorema isbotlandi.

(1) Sistemaning I interbaldagi n ta yechimini qaraymiz:

$$Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Y_n(x) \qquad (3)$$

2-teorema. (3) yechimlar I intervalda chiziqli erkli bo'lishi uchun ularning $W(x)$ Vronskiy determinanti I intervalning hech bir nuqtasida nolga aylanmasligi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. (3) yechimlar I intervalda chiziqli erkli bo'lsin. Barcha $x \in I$ nuqtalarda $W(x) \neq 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskari faraz yuritaylik, ya'ni biror $x_0 \in I$ nuqtada $W(x_0) = 0$ bo'lsin. U holda $Y_1(x_0), Y_2(x_0), \ldots, Y_n(x_0)$ vektorlar chiziqli bo'gliq bo'ladi. 1-teoremaga ko'ra I intervalda (3) yechimlar chiziqli bog'liq bo'ladi. Bu ziddiyat teskari faraz noto'g'riligidan hosil bo'ldi.

Yetarliligi. Barcha $x \in I$ nuqtalarda $W(x) \neq 0$ bo'lsin. (3) yechimlar I intervalda chiziqli erkli bo'lishini ko'rsatamiz. Teskari faraz yuritaylik, ya'ni (3) yechimlar I intervalda chiziqli bog'liq bo'lsin. Avvalgi darsdagi 6-teoremaga ko'ra I intervalda $W(x) \equiv 0$ ayniyatga egamiz. Bu ziddiyat teoremani to'la isbotlaydi.

2-reja. **Ta'rif**. Agar (1) sistemaning (3) yechimlari I intervalda chiziqli erkli bo'lsa, bu yechimlar sistemaning fundamental yechimlari sistemasi deyiladi.

3-teorema. Agar $A(x)$ matritsa I intervalda uzliksiz bo'lsa, shu intervalda (1) sistemaning fundamental yechimlari sistemasi mavjud.

Isbot. Ihtiyoriy $x_0 \in I$nuqtani tanlab olamiz. Avvalgi darsdagi chiziqli sitema yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaga ko'ra (1) sistemaning

$$y_1(x_0) = 1, y_2(x_0) = 0, y_3(x_0) = 0, \dots, y_n(x_0) = 0$$

boshlangich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona. Bu yechimni $Y_1(x)$ orqali belgilaymiz. (1) sistemaning

$$y_1(x_0) = 0, y_2(x_0) = 1, y_3(x_0) = 0, \dots, y_n(x_0) = 0$$

boshlangich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $Y_2(x)$ orqali belgilaymiz. Shu tarzda davom etib

$$y_1(x_0) = 0, y_2(x_0) = 0, y_3(x_0) = 0, \dots, y_n(x_0) = 1$$

boshlangich shartni qanoatlantiruvchi yechimini $Y_n(x)$ orqali belgilaymiz. Bu yechimlar Vronskiy determinantining x_0 nuqtadagi qiymati

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{21}(x_0) & \dots & y_{n1}(x_0) \\ y_{12}(x_0) & y_{22}(x_0) & \dots & y_{n2}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n}(x_0) & y_{2n}(x_0) & \dots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

noldan farqli. Demak yuqorida tuzilgan $Y_1(x), Y_2(x), \dots\ , Y_n(x)$ yechimlar I intervalda chiziqli erkli va ular (1) sistemaning fundamental yechimlari sistemasidan iborat. Teorema isbotlandi.

Teoremani isbotlashda boshlang'ich qiymat sifatida n-tartibli birlik determinant elementlaridan foydalanildi. Aslida qiymati noldan farqli ihtiyoriy n-tartibli determinant elementlaridan foydalanish mukin edi va bunday determinantlar soni cheksiz ko'p. Demak (1) sistemaning fundamental yechimlari sistemasi cheksiz ko'p ekan.

3-reja. **4-teorema**. Agar (3) yechimlar fundamental sistemani tashkil etsa, u holda (1) sistemaning umumiy yechimi

$$Y = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \dots + C_nY_n(x) \qquad (4)$$

formula bilan ifodalanadi va sistemani barcha yechimlari (4) formuladan aniqlanadi.

Isbot. (4) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = C_1y_{11}(x) + C_2y_{21}(x) + \dots + C_ny_{n1}(x) \\ y_2 = C_1y_{12}(x) + C_2y_{22}(x) + \dots + C_ny_{n2}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = C_1y_{1n}(x) + C_2y_{2n}(x) + \dots + C_ny_{nn}(x) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

(5) sistemani $C_1, C_2, \dots, C_n$ larga nisbatan bir qiymatli yechish mumkinligini ko'rsatish kerak. Bu noma'lumlarga nisbatan qaraganda (5) chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib uning determinanti $W(x)$ dan iborat va u noldan farqli. Avvalgi darsdagi 4-teoremaga ko'ra $C_1, C_2, \dots, C_n$ larning ihtiyoriy o'zgarmas qimatlarida (5) vektor-funksiya (1) sitestemani qanoatlantiradi. Demak (4) formula (1) sistemaning

umumiy yechimini ifodalar ekan. Endi sistemaning barcha yechimlari (4) formuladan aniqlanishini ko'rsatamiz. Buning uchun ihtiyoriy tanlangan

$$x_0 \in I, \qquad -\infty < y_i^0 < \infty, \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (6)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni (4) formuladan aniqlash mumkinligini ko'rsatish kerak. Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} y_1^0 = C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{21}(x_0) + \dots + C_n y_{n1}(x_0) \\ y_2^0 = C_1 y_{12}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \dots + C_n y_{n2}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n^0 = C_1 y_{1n}(x_0) + C_2 y_{2n}(x_0) + \dots + C_n y_{nn}(x_0) \end{array}\right\}$$

sistemani $C_1, C_2, \dots, C_n$ larga nisbatan bir qiymatli yechish mumkin: $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$. Bularni (4) ga qo'ysak, hosil bo'lgan $Y = C_1^0 Y_1(x) + C_2^0 Y_2(x) + \dots + C_n^0 Y_n(x)$ yechim (6) boshlang'ich shartni qanoatlantiradi. Teorema isbotlandi.

4-reja. **5-teorema**. (3) vektor-funksiyalar I intervalda (1) sistemaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat bo'lsa, ularning Vronskiy determinanti uchun ushbu

$$W(x) = Ce^{\int SpA(x)dx} \qquad (7)$$

formula o'rinli, bu yerda $SpA(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \dots + a_{nn}(x)$ funksiya $A(x)$ **matritsaning izi** deyiladi. (7) formula – **Ostrogradskiy-Liuvill formulasi** deyiladi.

Teorema isbotini 3-tartibli sistema uchun keltiramiz. Ushbu

$$Y_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13})^T, \qquad Y_2 = (y_{21}, y_{22}, y_{23})^T, \qquad Y_3 = (y_{31}, y_{32}, y_{33})^T$$

vektor-funksiyalar

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + a_{13}(x)y_3 \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + a_{23}(x)y_3 \\ y_3' = a_{31}(x)y_1 + a_{32}(x)y_2 + a_{33}(x)y_3 \end{cases}$$

sitemaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} y_{11}' = a_{11}y_{11} + a_{12}y_{12} + a_{13}y_{13} \\ y_{12}' = a_{21}y_{11} + a_{22}y_{12} + a_{23}y_{13} \\ y_{13}' = a_{31}y_{11} + a_{32}y_{12} + a_{33}y_{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{21}' = a_{11}y_{21} + a_{12}y_{22} + a_{13}y_{23} \\ y_{22}' = a_{21}y_{21} + a_{22}y_{22} + a_{23}y_{23} \\ y_{23}' = a_{31}y_{21} + a_{32}y_{22} + a_{33}y_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{31}' = a_{11}y_{31} + a_{12}y_{32} + a_{13}y_{33} \\ y_{32}' = a_{21}y_{31} + a_{22}y_{32} + a_{23}y_{33} \\ y_{33}' = a_{31}y_{31} + a_{32}y_{32} + a_{33}y_{33} \end{cases} \qquad (8)$$

ayniyatlar o'rinli. Bu yerda yozuvlarni qisqartirish maqsadida argumentlarni yozmadik. Y_1, Y_2, Y_3 yechimlarning Vronskiy determinatidan hosila olamiz:

$$W' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{21}' & y_{31}' \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} \\ y_{12}' & y_{22}' & y_{32}' \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13}' & y_{23}' & y_{33}' \end{vmatrix} = W_1 + W_2 + W_3 \qquad (9)$$

(8) ayniyatlardan foydalanib W_1 determinantni hisoblaymiz:

$$W_1 = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + a_{12}y_{12} + a_{13}y_{13} & a_{11}y_{21} + a_{12}y_{22} + a_{13}y_{23} & a_{11}y_{31} + a_{12}y_{32} + a_{13}y_{33} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} y_{13} & y_{23} & y_{33} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{11}W$$

Shunday hisoblashlardan keyin $W_2 = a_{22}W$, $W_3 = a_{33}W$ tengliklarni hosil qilish mumkin. Natijada (9) tenglik $W' = (a_{11} + a_{22} + a_{33})W$ yoki $W' = SpA(x) \cdot W$ ko’rinshni oladi. Bundan

$$\frac{dW}{W} = SpA(x)dx, \quad \ln W = \ln Ce^{\int SpA(x)dx}$$

tengliklar yoki (7) formula kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

25-mavzu. Chiziqli o’zgarmas koeffifientli bir jinsli sistemalar

Reja

1. Harakteristik tenglama
2. Hos sonlar karrali bo’lmaganda sistemaning umumiy yechimini qurish
3. Hos sonlar karrali bo’lganda sistemaning umumiy yechimini qurish

1-reja. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (1)$$

sistema n-tartibli chiziqli o’zgarmas koeffisientli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu tenglamaning hususiy yechimini

$$Y = \left(\gamma_1 e^{\lambda x}, \gamma_2 e^{\lambda x}, \ldots, \gamma_n e^{\lambda x}\right) \qquad (2)$$

ko'rinishda qidiramiz. (2) ni (1) ga olib borib qoysak, keyin tengliklarni $e^{\lambda x}$ ga qisqartirsak

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0 \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

sistema hosil bo’ladi.

Bizga bu sistemaning nolmas yechimi kerak. Bunday yechim esa sistemaning determinanti nolga teng bo’lgandagina mavjud bo’ladi, ya’ni

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

(4) tenglama (1) sistemaning **harakteristik tenglamasi**, uning ildizlari esa **hos sonlari** deyiladi. Ba’zi adabiyotlarda hos sonlar **harakteristik sonlar** ham deyiladi

2-reja. Faraz qilaylik barcha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hos sonlar turlicha bo’lsin. Bu holda $P(\lambda) = 0$, lekin $P'(\lambda) \neq 0$. Hos sonlardan ihtiyoriy bittasini, masalan λ_i ni olib

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda_i \end{pmatrix}$$

matritsani qarasak, uning rang $n - 1$ga tengligini ko’ramiz. Haqiqatdan ham, agar teskari faraz yuritsak

$$P'(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & -1 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ziddiyatli tenglikka kelamiz. Demak, (3) sistemada λ o'rniga λ_i qo'yilsa, hosil bo'lgan ushbu

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0 \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda_i)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0 \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_i)\gamma_n = 0 \end{cases}$$

sistemaning tenglamalaridan bittasi qolgan tenglamalarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi va sitemaning ana shu tenglamasini tashlab yuborish mumkin. Hosil bo'lgan n noma'lumli $n-1$ ta chiziqli tenglamalar sistemasining noldan farqli biror $(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in})$ yechimini topamiz va (2) ga ko'ra (1) sistemaning $Y_i = \left(\gamma_{i1}e^{\lambda_i x}, \gamma_{i2}e^{\lambda_i x}, \ldots, \gamma_{in}e^{\lambda_i x}\right)$ yechimi aniqlanadi. $(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in})$ vektor (1) sistemaning λ_i hos soniga mos **hos vektor** deyiladi.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hos sonlarning har biriga mos aniqlangan

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \left(\gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, \ldots, \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}\right) \\ Y_2 = \left(\gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, \ldots, \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}\right) \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ Y_n = \left(\gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, \gamma_{n2}e^{\lambda_n x}, \ldots, \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}\right) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

yechimlar ihtiyoriy I intervalda chiziqli erkli bo'ladi. Bu tasdiqni isbotlash uchun

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_n Y_n \equiv 0 \qquad (6)$$

ayniyat faqat va faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ bo'lgandagina bajarilishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni α_i koeffisientlardan birortasi noldan farqli bo'lsin. Aniqlik uchun $\alpha_1 \neq 0$ deb olaylik. (6) ayniyat quyidagi n ta ayniyatga teng kuchli

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\gamma_{21}e^{\lambda_2 x} + \cdots + \alpha_n\gamma_{n1}e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \alpha_1\gamma_{12}e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + \cdots + \alpha_n\gamma_{n2}e^{\lambda_n x} \equiv 0 \\ \ . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ \alpha_1\gamma_{1n}e^{\lambda_1 x} + \alpha_2\gamma_{2n}e^{\lambda_2 x} + \ldots + \alpha_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \equiv 0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Avvalgi darslarimizning birida $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sonlar turlicha bo'lganda $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ funksiyalarning ihtiyoriy intervalda chiziqli erkli bo'lishini isbotlagan edik. Demak yuqoridagi (7) ayniyatlar o'rinli bo'lishi uchun $e^{\lambda_i x}$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ lar oldidagi barcha koeffisientlar nolga teng bo'lishi kerak. Hususan $e^{\lambda_1 x}$ oldidagi koeffisientlar $\alpha_1\gamma_{11} = \alpha_1\gamma_{12} = \ldots = \alpha_1\gamma_{1n} = 0$. Yuqorida $\alpha_1 \neq 0$ deb faraz qilinganligidan $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \ldots = \gamma_{1n} = 0$ tengliklarni hosil qilamiz. Biz $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n})$ orqali (3) sistemadaning λ o'rniga λ_1 bo'lgandagi noldan farqli yechimini belgilaganmiz. Hosil qilingan ziddiyat (5) yechimlar ihtiyoriy I intervalda chiziqli erkli bo'lishini ko'rsatadi.

Demak, agar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ hos sonlar har hil va haqiqiqy bo'lsa, u holda (1) chiziqli bir jinsli sistemaning (5) ko'rinishdagi n ta haqiqiy chiziqli erkli yechimini hosil qilia olamiz. Boshqacha aytganda bu holda (5) funksiyalar (1) chiziqli sistemaning fundamental yechimlar sistemasidan iborat. O'tgan darsdagi 4-teoremaga ko'ra, (1) sistemaning $(-\infty, \infty)$ oraliqdagi umumiy yechimi

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{21}e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\gamma_{n1}e^{\lambda_n x} \\ y_2 &= C_1\gamma_{12}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\gamma_{n2}e^{\lambda_n x} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n &= C_1\gamma_{1n}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{2n}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \end{aligned}\right\}$$

formula bilan ifodalanadi.

Hos sonlar har hil lekin ular orasida $a+ib$ kompleks son ham bor bo'lsa, u holda $a-ib$ komleks son ham hos son bo'ladi. (2) ga ko'ra $a+ib$ ildizga mos yechimni yozaylik:

$$Y = \left((\gamma_{11}+i\gamma_{21})e^{(a+ib)x}, (\gamma_{12}+i\gamma_{22})e^{(a+ib)x}, \ldots, (\gamma_{1n}+i\gamma_{2n})e^{(a+ib)x}\right),$$

bu yerda $\gamma_1 = \gamma_{11}+i\gamma_{21}$, $\gamma_2 = \gamma_{12}+i\gamma_{22}, \ldots$, $\gamma_n = \gamma_{1n}+i\gamma_{2n}$ kompleks sonlar (3) sistemada λ o'rniga $a+ib$ qo'yib aniqlangan. Bu yechimning haqiqiy va mavhum qismalrini ajratib olib (1) sistemaning ikkita haqiqiy yechimiga ega bo'lamiz:

$$\left.\begin{gathered} y_{11} = e^{ax}(\gamma_{11}\cos bx - \gamma_{21}\sin bx), y_{12} = e^{ax}(\gamma_{12}\cos bx - \gamma_{22}\sin bx), \ldots, \\ y_{1n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\cos bx - \gamma_{2n}\sin bx), \\ y_{21} = e^{ax}(\gamma_{11}\sin bx + \gamma_{21}\cos bx), y_{22} = e^{ax}(\gamma_{12}\sin bx + \gamma_{22}\cos bx), \ldots, \\ y_{2n} = e^{ax}(\gamma_{1n}\sin bx + \gamma_{2n}\cos bx) \end{gathered}\right\} \quad (8)$$

Bu yechimlar ihtiyoriy intervalda chiziqli erkli. $a-ib$ hos songa mos haqiqiy yechimlar yuqoridagi iikita yechimga chiziqli bog'liq bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Shunday qilib, agar (1) sistemaning hos sonlari har hil va ular orasida $a \pm ib$ kompleks sonlar bor bo'lsa, u holda ularga mos (1) sistemaning haqiqiy yechimlar soni ham 2ta bo'lishini ko'rsatdik. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra (1) sistemaning hos sonlari har hil bo'lganda, har doim n ta chizqli erkli haqiqiy yechimlarini, ular yordamida esa sistemaning umumiy yechimini aniqlay olamiz.

1-misol. Sitemaning umumi yechimini toping:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 5y + 4z \\ z' &= 4y + 5z \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Harakteristik tenglama $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$. Hos sonlar haqiqiy va har hil. $\lambda_1 = 1$ ga mos hos vektorni

$$\begin{cases} (5-\lambda)\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \\ 4\gamma_1 + (5-\lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

sistemada λ o'rniga 1 ni qo'yib topamiz. $\begin{cases} 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \\ 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \end{cases}$ sistemaning bitta tenglamasini tashlab yuborish mumkin $4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0$. Bu tenglamaning noldan farqli biror yechimini aniqlaymiz: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1$. Hos vektor $(1; -1)$. Natijada (9) sistemaning $y_1 = e^x$, $z_1 = -e^x$ yechimi aniqlanadi. Yuqoridagiga o'hshash hisoblashlar bajarib $\lambda_2 = 9$ hos songa mos (9) sistemaning $y_2 = e^{9x}$, $z_2 = e^{9x}$ hususiy yechimini aniqlaymiz. Shunday qilib

$$\left.\begin{aligned} y_1 = e^x, \qquad z_1 = -e^x \\ y_2 = e^{9x}, \qquad z_2 = e^{9x} \end{aligned}\right\}$$

fundamental yechimlar sistemasi hosil bo'ldi. (9) sistemaning umumiy yechimi

$$y = C_1e^x + C_1e^{9x}, \qquad z = -C_1e^x + C_1e^{9x}$$

2-misol. Sitemaning umumi yechimini toping:

$$\left.\begin{aligned} y' &= 2y - z \\ z' &= y + 2z \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Harakteristik tenglama $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0,\ \lambda_1 = 2 \pm i$.Hos sonlar kompleks. $\lambda_1 = 2 + i$ ga mos hos vektorni

$$\begin{cases} (2-\lambda)\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1 + (2-\lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

sistemada λ o'rniga $2 + i$ ni qo'yib topamiz $\begin{cases} i\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ \gamma_1 + i\gamma_2 = 0 \end{cases}$ sistemaning bitta tenglamasini tashlab yuborish mumkin $i\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Bu tenglamaning noldan farqli biror yechimini aniqlaymiz: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = i$. Hos vektor $(1; i)$. Natijada (9) sistemaning $y = e^{(2+i)x},\ z = ie^{(2+i)x}$ kompleks yechimi aniqlanadi. Uning aqiqiy va mavhum qismlarini ajratamiz:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = e^{2x}\cos x, \qquad z_1 = e^{2x}\sin x \\ y_2 = e^{2x}\sin x, \qquad z_2 = -e^{2x}\cos x \end{aligned}\right\}$$

bu yechimlar (10) sistemaning fundamental yechimlri sistemasidan iborat. **Umumiy yechim**

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x), \qquad z = e^{2x}(C_1\sin x - C_2\cos x)$$

3-reja. Agar λ_1 hos son k karrali bo'lsa, u holda (1) sitemaning unga mos yechimi

$$y_1 = \left(b_{11}x^{k-1} + b_{12}x^{k-2} + \dots + b_{1,k-1}\right)e^{\lambda_1 x}, y_2 = \left(b_{21}x^{k-1} + b_{22}x^{k-2} + \dots + b_{2,k-1}\right)e^{\lambda_1 x},$$
$$\dots, y_n = \left(b_{n1}x^{k-1} + b_{n2}x^{k-2} + \dots + b_{n,k-1}\right)e^{\lambda_1 x} \qquad (11)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda b_{ij} koeffisientlardan k tasi ihtiyoriy o'zgarmas, qolganlari esa ular orqali chiziqli ifodalandi. Bu koeffisientlarni aniqlash uchun (11) ni (1) sistemaga olib borib qo'yish va k tasini parameter deb hisoblab qolganlarini ullar orqali ifodalash kerak.

3-misol. Sitemaning umumi yechimini toping:

$$\left.\begin{aligned} y' = y - z \\ z' = y + 3z \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Harakteristik tenglama $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,\ \lambda = 2$. Hos son ikki karrali. Sistema yechimini

$$y = (ax + b)e^{2x}, \qquad z = (cx + d)e^{2x} \qquad (13)$$

ko'rinishda qidiramiz. (13) ni (12) sistemaga qoyamiz

$$\begin{cases} (2ax + 2b + a)e^{2x} = (ax + b - cx - d)e^{2x} \\ (2cx + 2d + c)e^{2x} = (ax + b + 3cx + 3d)e^{2x} \end{cases}$$

Bundan

$$\begin{cases} 2a = a - c \\ 2b + a = b - d \\ 2c = a + 3c \\ 2d + c = b + 3d \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} a = -c \\ b + a = -d \end{cases}$$

sistema hosil bo'lai. Bu yerda ikkita o'zgarmasni, masalan a va b larni parameter deb hisoblamiz, qolgan o'zgarmaslarni a va b orqali chiziqli ifodalaymiz: $c = -a,\ d = -a - b$. Bularni (13) ga qo'yib izlanayotgan yechimni aniqlaymiz:

$$y = (ax + b)e^{2x}, \qquad z = (-ax - a - b)e^{2x}$$

Bu ikkita ihtiyoriy o'zgarmasni o'z ichiga olgan yechim (12) sistemaning umumiy yechimini ifodalaydi.

26-mavzu. Eksponentsial matritsa

Reja.

1. Eksponentsial matritsa va uning hossalari
2. Chiziqli o'zgarmas koeffifientli bir jinsli bo'lmagan sistemalarni o'zgarmasni variatsialash usulida yechish

1-reja. Chiziqli o'zgarmas koefisientli bir jinsli

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (1)$$

sistema koeffisientlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa yordamida quyidagi cheksiz matritsalar yig'indisini tuzamiz va yig'indi matrisani e^{Ax} orqali belgilaymiz:

$$E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nx^n}{n!} + \ldots = e^{Ax},$$

bu yerda E – birlik matritsa. e^{Ax} – (1) sistemaning **eksponentsial matritsasi** deb ataladi.

Eksponentsial matritsaning hossalari.

1. $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$
2. $e^{Ax} \cdot e^{Ay} = e^{A(x+y)}$
3. e^{Ax} matritsaning har bir ustuni (1) sistemaning yechimidan iborat
4. $e^{A\cdot 0} = E$
5. (1) sistemaning umumiy yechimini $y = e^{Ax}C$ formula bilan ifodalash mumkin, bu yerda $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ ihtiyoriy o'zgarmas vektor.

1-hossaning isboti.

$$(e^{Ax})' = \left(E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nx^n}{n!} + \ldots\right)' = A + A^2x + \frac{A^3x^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{n+1}x^n}{n!} \ldots$$

$$= A\left(E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nx^n}{n!} + \ldots\right) = Ae^{Ax}$$

2-hossaning isboti.

$$e^{Ax} \cdot e^{Ay} = \left(E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{A^nx^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$\cdot\left(E + Ay + \frac{A^2y^2}{2!} + \cdots + \frac{A^ny^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= E + A(x+y) + A^2\left(\frac{x^2}{2!} + xy + \frac{y^2}{2!}\right) + \cdots$$

$$+A^n\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y}{1!} + \cdots \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} + \cdots \frac{y^n}{n!}\right) + \cdots =$$

$$E + A(x+y) + \frac{A^2}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \cdots + \frac{A^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}x^{n-k}y^k + \cdots =$$

$$E + A(x+y) + \frac{A^2(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n(x+y)^n}{n!} + \cdots = e^{A(x+y)}.$$

3-hossaning isbotini $n = 3$ uchun keltiramiz. e^{Ax} matritsa

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31}\\ e_{12} & e_{22} & e_{32}\\ e_{13} & e_{23} & e_{33}\end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsin. 1-hossaga ko'ra

$$\begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{21} & e'_{31}\\ e'_{12} & e'_{22} & e'_{32}\\ e'_{13} & e'_{23} & e'_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31}\\ e_{12} & e_{22} & e_{32}\\ e_{13} & e_{23} & e_{33}\end{pmatrix}$$

Bundan

$$\left.\begin{aligned} e'_{11}&=a_{11}e_{11}+a_{12}e_{12}+a_{13}e_{13}\\ e'_{12}&=a_{21}e_{11}+a_{22}e_{12}+a_{23}e_{13}\\ e'_{13}&=a_{31}e_{11}+a_{32}e_{12}+a_{33}e_{13}\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} e'_{21}&=a_{11}e_{21}+a_{12}e_{22}+a_{13}e_{23}\\ e'_{22}&=a_{21}e_{21}+a_{22}e_{22}+a_{23}e_{23}\\ e'_{23}&=a_{31}e_{21}+a_{32}e_{22}+a_{33}e_{23}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} e'_{31}&=a_{11}e_{31}+a_{12}e_{32}+a_{13}e_{33}\\ e'_{32}&=a_{21}e_{31}+a_{22}e_{32}+a_{23}e_{33}\\ e'_{33}&=a_{31}e_{31}+a_{32}e_{32}+a_{33}e_{33}\end{aligned}\right\}$$

ayniyatlarga ega bo'lamiz, ya'ni e^{Ax} matritsaning har bir ustuni

$$\begin{cases} y'_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3\\ y'_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3\\ y'_3=a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3\end{cases}$$

sistemani echimidan iborat.

4-hossa to'g'riligi e^{Ax} matritsa tuzilishidan ko'rinib turibdi.

5-hossaning isboti. 3-hossaga ko'ra e^{Ax} matritsaning har bir ustuni (1) sitemaning yechimidan iborat. 4-hossaga ko'ra bu n ta yechimning Vronskiy determinanti $x=0$ nuqtada birlik matritsa determinantidan iborat, yani qiymati 1 ga teng. Demak e^{Ax} matritsaning ustunlari (1) sistemaning fundamental yechimlar sitemasidan iborat va sistema umumiy yechimini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{pmatrix} e_{11}\\ e_{12}\\ \cdots\\ e_{1n}\end{pmatrix}C_1+\begin{pmatrix} e_{21}\\ e_{22}\\ \cdots\\ e_{2n}\end{pmatrix}C_2+\cdots+\begin{pmatrix} e_{n1}\\ e_{n2}\\ \cdots\\ e_{nn}\end{pmatrix}C_n=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{n1}\\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ e_{1n} & e_{2n} & \cdots & e_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ \cdots\\ C_n\end{pmatrix}=e^{Ax}C.$$

1-misol. Sistemaning eksponentsial matritsasini tuzing

$$\begin{cases} y'=z\\ z'=0\end{cases}$$

Bu yerda $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. A matritsa darajalarini hisoblaylik:

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Demak A^n matritsalar $n\geq 2$ bo'lganda nol matritsadan iborat. Bundan

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1) sistemaning eksponentsial matritsasini qator yordamida tuzish hamma vaqt ham oson bo'lavermaydi. Agar 3 va 4 hosslardan foydalanadigan bo'lsak, e^{Ax} matritsaning birinchi ustuni (1) sistemaning $y_1(0)=1, y_2(0)=0,\dots,y_n(0)=0$shartni qanoatlantiruvchi yechimidan, ikkinchi ustuni esa $y_1(0)=0, y_2(0)=1,\ y_3(0)=0\ \dots, y_n(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimidan va hakazo ohirgi ustuni $y_1(0)=0,\dots,y_{n-1}(0)=0, y_n(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat.

2-misol. Sistemaning eksponentsial matritsasini tuzing

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases} \quad (2)$$

Bu sistemaning umumiy yechimi $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $z = C_1 \cos x - C_2 \sin x$. (2) sistemaning $y(0) = 1, z(0) = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlaymiz:

$$y = \cos x, \qquad z = -\sin x$$

Demak e^{Ax} matritsaning birinchi ustuni $\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ dan iborat. $y(0) = 0, z(0) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechim $y = \sin x$, $z = \cos x$ bo'lgani uchun e^{Ax} matritsaning ikkinchi ustuni $\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ko'rinishdadir. Shunday qilib

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

2-reja. Chiziqli o'zgarmas koefisientli bir jinsli bo'lamagan

$$y_i' = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n + b_i(x), \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

sistemani qaraymiz. Uni matritsalar yordamida yozib olamiz

$$Y' = AY + B(x) \qquad (3)$$

(3) sistemaning yechimini

$$Y = e^{Ax}C(x) \qquad (4)$$

ko'rinishda qidiramiz, bu yerda $e^{Ax}-$ exponentsial matritsa, $C(x) = (C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x))^T$. (4) ni (3) ga olib borib qo'yamiz:

$$Y' = Ae^{Ax}C(x) + e^{Ax}C'(x) = Ae^{Ax}C(x) + B(x)$$

Bundan

$$e^{Ax}C'(x) = B(x)$$

Bu tenglikni chapdan e^{-Ax} ga ko'paytiramiz. Eksponentsial matrisaning 2- va 4-hossalariga ko'ra $e^{-Ax} \cdot e^{Ax} = e^{A(-x+x)} = E$. Natijada

$$C'(x) = e^{-Ax}B(x), \quad C(x) = \int e^{-Ax}B(x)dx + C,$$

bu yerda $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ – ihtiyoriy o'zgarmas vektor. $C(x)$ ning topilgan ifodasini (4) ga qo'yib (3) sistemaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$Y = e^{Ax}\left(\int e^{-Ax}B(x)dx + C\right) \qquad (5)$$

Bu umumiy yechim formulasidan foydalanib (3) sistemaning $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$, … , $y_n(x_0) = y_n^0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlymiz:

$$Y = e^{Ax}\left(Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-At}B(t)dt\right)$$

yoki

$$Y = e^{Ax}Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)}B(t)dt$$

bu yerda $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$. Bu formula **Koshi formulasi** deb ataladi.

3-misol. O'zgarmasni variatsiyalash usulida yeching

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t \end{cases} \qquad (6)$$

Bu yerda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Eksponentsial matritsani 2-misolda tuzgan edik:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

(5) formulaga ko'ra (6) sistemaning umumiy yechimini aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\int \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tg}^2\, t - 1 \\ \mathrm{tg}\, t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\int \begin{pmatrix} -\cos t \\ (-\sin t + \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t + C_1 \\ \cos t + \dfrac{1}{\cos t} + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + \mathrm{tg}\, t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{pmatrix}.$$

27-mavzu. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistema

Reja.

1. Umumiy yechimning tuzilishi.
2. Chiziqli o'zgarmas koeffisientli bir jinsli bo'lmagan sistema hususiy yechimini noma'lum koeffisientlar usulida qidirish.

1-reja. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalar sistemasi chiziqli chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistema deyiladi. Chiziqli L operator yordamida (1) sistema

$$L(Y) = B(x) \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

1-teorema. Agar $\Psi(x)$ vektor-funksiya (2) sistemaning, $\Phi(x)$ vektor-funksiya esa (2) ga mos bir jinsli

$$L(Y) = 0 \qquad (3)$$

sistemaning yechimi bo'lsa, u holda shu vektor-funksiyalar yig'indisdan iborat $\Psi(x) + \Phi(x)$ vektor-funksiya (2) sistemaning yechimi bo'ladi.

Isbot. $L\big(\Psi(x) + \Phi(x)\big) = L\big(\Psi(x)\big) + L\big(\Phi(x)\big) = B(x)$

2-teorema. Agar $\Psi(x)$ vektor-funksiya $L(Y) = B_1(x)$ sistemaning, $\Phi(x)$ vektor-funksiya esa $L(Y) = B_2(x)$ sistemaning yechimi bo'lsa, u holda shu vektor-funksiyalar yig'indisdan iborat $\Psi(x) + \Phi(x)$ vektor-funksiya $L(Y) = B_1(x) + B_2(x)$ sistemaning yechimi bo'ladi.

Isbot. $L\big(\Psi(x) + \Phi(x)\big) = L\big(\Psi(x)\big) + L\big(\Phi(x)\big) = B_1(x) + B_2(x)$

3-teorema. (3) bir jinsli sistemaning umumiy yechimiga (2) sistemaning birorta hususiy yechiminiqo'shsak, (2) birjinsli bo'lmagan sistemaning **umumiy yechimi** hosil bo'ladi.

Isbot. Agar $\Psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)\big)^T$ vektor-funksiya (2) sistemaning hususiy yechimi bo'lsin. (2) sistemada

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = \psi_1(x) + z_1 \\ y_2 = \psi_2(x) + z_2 \\ \ldots \\ y_n = \psi_n(x) + z_n \end{array}\right\} \qquad (4)$$

formulalar yordamida noma’lum funksiyalarni almashtiramiz. Bu larni (2) sistemaga qoyamiz:

$$L(\Psi(x) + Z) = B(x) \;\Rightarrow\; L(\Psi(x)) + L(Z) = B(x) \;\Rightarrow L(Z) = 0.$$

Ohirgi hosil bo’lgan bir jinsli sistama aynan (3) sisemaning o’zi. Demak (2) sistemani integrallash uchun (4) almashtirish bajarsak (2) ga mos bir jinsli $L(Z) = 0$ sistema hosil bo’ladi va uming umumiy yechimi

$$Z = C_1Z_1 + C_2Z_2 + \cdots + C_nZ_n$$

formula bilan ifodalansa, u holda (4) ga ko’ra (2) bir jinsli bo’lmagan sistemaning umumiy yechimi

$$Y = C_1Z_1 + C_2Z_2 + \cdots + C_nZ_n + \Psi(x)$$

formula bilan ifodal;anadi.

2-reja. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + (b_{1m}x^m + \cdots + b_{11}x + b_{10})e^{\lambda x} \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + (b_{2m}x^m + \cdots + b_{21}x + b_{20})e^{\lambda x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + (b_{nm}x^m + \cdots + b_{n1}x + b_{n0})e^{\lambda x} \end{cases} \qquad (5)$$

ko’rinishdagi sistemaninng hususiy yechimini qidirishni ko’rib chiqamiz, bu yerda $b_{1m}, b_{2m}, \ldots, b_{nm}$ koeffisientlardan kamida bittasi noldan farqli.

1-hol. Agar λ soni (5) ga mos bir jinsli sistemaning hos soni bo’lmasa, u holda (5) sistemaning hususiy yechimi

$$\begin{cases} y_1 = (p_{1m}x^m + \cdots + p_{11}x + p_{10})e^{\lambda x} \\ y_2 = (p_{2m}x^m + \cdots + p_{21}x + p_{20})e^{\lambda x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n = (p_{nm}x^m + \cdots + p_{n1}x + p_{n0})e^{\lambda x} \end{cases} \qquad (6)$$

ko’rinishda izlaymiz, bu yerda $p_{ij},\ (i = 1, \ldots, n,\ \ j = 0, \ldots, m)$ no’ma’lum ko’efisientlar. (6) funksiyalarni (5) sistemaga olib borib qo’yib, noma’lum koeffisientlar usulida p_{ij} koeffisientlar aniqlanadi.

2-hol. Agar λ soni (5) ga mos bir jinsli sistemaning k karrali hos soni bo’lsa, u holda (5) sistemaning hususiy yechimi

$$\begin{cases} y_1 = (p_{1m+k}x^{m+k} + \cdots + p_{11}x + p_{10})e^{\lambda x} \\ y_2 = (p_{2m+k}x^{m+k} + \cdots + p_{21}x + p_{20})e^{\lambda x} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n = (p_{nm+k}x^{m+k} + \cdots + p_{n1}x + p_{n0})e^{\lambda x} \end{cases} \qquad (7)$$

ko’rinishda izlaymiz, bu yerda $p_{ij},\ (i = 1, \ldots, n,\ \ j = 0, \ldots, m + k)$ no’ma’lum ko’efisientlar. (7) funksiyalarni (5) sistemaga olib borib qo’yib, noma’lum koeffisientlar usulida p_{ij} koeffisientlar aniqlanadi.

Endi ushbu

$$\left.\begin{array}{r}y_1' = a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n + [(b_{1m}x^m + \cdots + b_{10})\cos bx + (c_{1m}x^m + \cdots + c_{10})\sin bx]e^{ax} \\ y_2' = a_{21}y_1+\ldots+a_{2n}y_n + [(b_{2m}x^m + \cdots + b_{20})\cos bx + (c_{2m}x^m + \cdots + c_{20})\sin bx]e^{ax} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n' = a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n + [(b_{nm}x^m + \cdots + b_{n0})\cos bx + (c_{nm}x^m + \cdots + c_{n0})\sin bx]e^{ax}\end{array}\right\} \quad (8)$$

ko'rinishdagi sistemaninng hususiy yechimini qidirishni ko'rib chiqamiz, bu yerda $b_{1m}, b_{2m}, \ldots, b_{nm}, c_{1m}, c_{2m}, \ldots, c_{nm}$ koeffisientlardan kamida bittasi noldan farqli.

1-hol. Agar $\lambda = a + bi$ kompleks son (8) ga mos bir jinsli sistemaning hos soni bo'lmasa, u holda (5) sistemaning hususiy yechimi

$$\left.\begin{array}{r}y_1 = [(p_{1m}x^m + \cdots + p_{10})\cos bx + (d_{1m}x^m + \cdots + d_{10})\sin bx]e^{ax} \\ y_2 = [(p_{2m}x^m + \cdots + p_{20})\cos bx + (d_{2m}x^m + \cdots + d_{20})\sin bx]e^{ax} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n = [(p_{nm}x^m + \cdots + p_{n0})\cos bx + (d_{nm}x^m + \cdots + d_{n0})\sin bx]e^{ax}\end{array}\right\}$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda p_{ij}, d_{ij} $(i = 1, \ldots, n,\ \ j = 0, \ldots, m)$ no'ma'lum ko'efisientlar.

2-hol. Agar $\lambda = a + bi$ kompleks son (8) ga mos bir jinsli sistemaning k karrali hos soni bo'lsa, u holda (5) sistemaning hususiy yechimi

$$\left.\begin{array}{r}y_1 = [(p_{1m+k}x^{m+k} + \cdots + p_{10})\cos bx + (d_{1m+k}x^{m+k} + \cdots + d_{10})\sin bx]e^{ax} \\ y_2 = [(p_{2m+k}x^{m+k} + \cdots + p_{20})\cos bx + (d_{2m+k}x^{m+k} + \cdots + d_{20})\sin bx]e^{ax} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ y_n = [(p_{nm+k}x^{m+k} + \cdots + p_{n0})\cos bx + (d_{nm+k}x^{m+k} + \cdots + d_{n0})\sin bx]e^{ax}\end{array}\right\}$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda p_{ij}, d_{ij} $(i = 1, \ldots, n,\ \ j = 0, \ldots, m + k)$ no'ma'lum ko'efisientlar.

28-mavzu. Differentsial yenglamalar sistemasining avtonom (muhtor) sistemasi

Reja

1. Avtonom (muhtor) sistemalar.
2. Normal avtonom sistemaning muvozanat nuqtasi.
3. Mahsus nuqta.

1-reja. Agar oddiy differensial tenglamalar sistemasida erkli o'zgaruvchi oshkor holda qatnashmasa, bunday sistema avtonom sistema deyiladi.

Normal avtonom sistema

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{cases} \qquad (1)$$

ko'rinishda yoki

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2)$$

vektorli ko'rinishda yoziladi, bu yerda t erkli o'zgaruvchi. (1) sistema qaralayotgan sohada mavjudlik va yagonalik haqidagi Pikar teoremasi shartlarini qanoatlantirsin.

1-teorema. Agar $x = \varphi(t)$ vektor funksiya (2) avtonom sistemaning yechimi bo'lsa, u holda ihtiyoriy o'zgarmas C lar uchun $x = \varphi(t + C)$ vektor funksiya ham (2) sistemaning yechimi bo'ladi.

Isbot. $\frac{d}{dt}\varphi(t) = f(\varphi(t))$ ayniyat barcha t lar uchun o'rinli. Bundan $\frac{d}{d(t+C)}\varphi(t+$ $C=f\varphi t+C$ hosil bo'ladi. $dd(t+C)\varphi t+C=ddt\varphi t+C$ tenglikni hisobga olsak $\frac{d}{dt}\varphi(t+C) = f(\varphi(t+C))$ ayniyatga ega bo'lamiz. **Teorema isbotlandi**.

2-teorema. Agar $x = \varphi(t)$ va $x = \psi(t)$ vektor funksiyalar (2) avtonom sistemaning yechimi bo'lsa, u holda bu yechimlar yo birorta nuqtada ham kesishmaydi yo butunlay ustma ust tushadi.

Isbot. Faraz qilaylik $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ vektor funksiyalar kesishsin, yani $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$, bu yerda $t_1 \neq t_2$. Agar $t_1 = t_2$ bol'sa yagonalik teoremasiga zid hulosaga ega bolamiz. Agar barcha t lar uchun $\varphi(t) \equiv \psi(t + t_2 - t_1)$ ayniyat bajarilishini ko'rsatsak, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ yechimlar ustma-ust tushishini ko'rsatgan bo'lamiz. $\varphi(t)$ va $\psi(t + t_2 -$ $t1$ yechimlar (2) sistemaning ayni bitta $\varphi t1=\psi t2$ nuqtasidan chiqadi. Yagonalik teoremasiga ko'ra $\varphi(t) \equiv \psi(t + t_2 - t_1)$ ayniyat o'rinli. **Teorema isbotlandi**.

2-reja. Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array}\right\}$$

sistemaning yecimi bo'lgan $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nuqta (1) normal sistemaning **muvozanat nuqtasi** deyiladi.

Misol. Differensial tenglamalar sistemasining muvozanat nuqtalarini aniqlang.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = xy - 6 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 13 \end{array}\right\}$$

Yechish.

$$\left.\begin{array}{l} xy - 6 = 0 \\ x^2 + y^2 - 13 = 0 \end{array}\right\}$$

sistemani yechamiz: $x = \pm 2,\ y = \pm 3$. **Javob**. $(-2; -3), (2; 3)$

Hususan

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{array}\right\} \qquad (3)$$

chiziqli o'zgarmas koeffisientli bir jinsli sistema uchun $(0; 0)$ nuqta hamma vaqt muvozanat nuqta bo'ladi. Koordinatalar boshi atrofida (3) sistemaning integral chiziqlari hosil qilgan shaklga ko'ra, $(0; 0)$ muvozanat nuqta turlarga ajratiladi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning ildizlari haqiqiy, har-hil va musbat bo'lsa, u holda $(0; 0)$ muvozanat nuqta turi **noturg'un tugun** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari haqiqiy, har-hil va manfiy bo'lsa, u holda $(0; 0)$ muvozanat nuqta turi **turg'un tugun** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari haqiqiy va turli ishorali bo'lsa, u holda $(0; 0)$ muvozanat nuqta turi **egar** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari $\mu \pm i\vartheta$ kompleks sonlar bo'lib $\mu > 0$ bo'lsa, u holda $(0; 0)$ muvozanat nuqta turi **noturg'un fokus** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari $\mu \pm i\vartheta$ kompleks sonlar bo'lib $\mu < 0$ bo'lsa, u holda $(0;0)$ muvozanat nuqta turi **turg'un fokus** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari sof mavhum $\pm i\vartheta$ sonlar bo'lsa, u holda $(0;0)$ muvozanat nuqta turi **markaz** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari haqiqiy, karrali va musbat bo'lsa, u holda $(0;0)$ muvozanat nuqta turi **turg'un tugilma (dikritik, aynigan) tugun** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlari haqiqiy, karrali va manfiy bo'lsa, u holda $(0;0)$ muvozanat nuqta turi **noturg'un tugilma (dikritik, aynigan) tugun** hisoblanadi.

Agar (3) sistemaning hos sonlaridan **kamida bittasi nolga teng** bo'lgan holda $(0;0)$ muvozanat nuqta turi nomlanmagan.

Mvozanat nuqta atrofida (3) sitema integral chiziqlari hosil qilgan shakllar chizmasini Salohitdinov M.C., Nasritdinov G'.N. Oddiy differensial tenglamalar. T. O'zbekiston. 1994. 383b. kitobidan topish mumkin.

Misol. Sistemaning $(0;0)$ muvozanat holati turini aniqlang

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x - 2y\\ \dot{y} &= 2y - 3x\end{aligned}\right\}$$

Yechish. Harakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Bundan $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$. Hos sonlar sonlar haqiqiqy va turli ishorali. Demak muvozanat nuqta **egar** tipga mansub.

3-reja. Hosilaga nisbatan yechilgan brinchi tartibli ushbu

$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

differensial tenglamani qaraylik.

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$$

sistemaning $(x_0; y_0)$ yechimi bu differensial tenglamaning **mahsus nuqtasi** deyiladi.

Misol. differensial tenglamaning mahsus nuqtasini toping

$$y' = \frac{x-3}{2y-3x-3}$$

Yechish.

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2y - 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz: $x = 3,\ y = 6$. **Javob**: $(3;6)$.

Hususan

$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy} \qquad (4)$$

bir jinsli differensial tenglama uchun $(0;0)$ nuqta mahsus nuqta bo'ladi. Koordinatalar boshi atrofida (4) differensial tenglamaning integral chiziqlari hosil qilgan shaklga ko'ra, $(0;0)$ mahsus nuqta turlarga ajratiladi. Shuni ta'kidlash joizki (3) sistemaning $(0;0)$ muvozanat nuqtasi qaysi turga mansub bo'lsa, (4) differensial tenglamaning $(0;0)$ mahsus nuqtasi ham ayni shu turga mansub hisoblanadi.

Misol. Differensial tenglamaning $(0;0)$ mahsus nuqtasi turini aniqlang

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Yechish. Harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0$$

Bundan $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$. Hos sonlar sof mavhum. Demak mahsus nuqta turi **fokus**.

29-Mavzu. Turg'un ko'phadlar.

Reja

1. Turg'un ko'phad tushunchasi
2. Kvadrat uchhad turg'unligi.
3. Yuqori darajali ko'phadlarning turg'unligi uchun zaruriy va yetarli shartlar.

1-reja. **Ta'rif**. Agar koeffisientlari haqiqiy bo'lgan

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (1)$$

ko'phadning barcha nollari, ya'ni $L(\lambda) = 0$ tenglamaning ildizlari musbat haqiqiqy qismga ega bo'lsa, u holda (1) ko'phad **turg'un ko'phad** deyiladi.

1-misol. Ko'phadni turg'unlikka tekshiring

$$L(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6$$

Yechish. $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0$ tenglamaning ildizlarini topamiz: $\lambda_1 = -3, \lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Barcha nollarning haqiqiqy qismi $\{-3;\, -1\}$ manfiy son. Demak yuqoridagi ko'phad turg'un.

2-misol. Ko'phadni turg'unlikka tekshiring

$$L(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4$$

Yechish. $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ tenglamaning ildizlarini topamiz: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. Bunda ko'phadning bitta nolining haqiqiy qismi 1 bo'lib musbat sondir. Demak yuqoridagi ko'phad turg'un emas.

(1) ko'phad $n = 1$ bo'lsa $L(\lambda) = \lambda + a$ ko'rinishni oladi va u yagona $\lambda = -a$ nolga ega. Demak birinchi tartibli ko'phad turg'un bo'lishi uchun $a > 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

2-reja. Endi kvadrat uchhadni tur'gunligi masalasini o'rganamiz.

1-teorema. Ushbu

$$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q \qquad (2)$$

kvadrat uchhad turg'un bo'lishi uchun p va q koeffisientlar musbat bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. **Zarurligi**. (2) uchhad turg'un bo'lsin. U holda quyidagi holatlardan biri yuz berishi mumkin:

1-hol. Uchhadning nollari haqiqiy, manfiy va har-hil: $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2-hol. Uchhadning nollari haqiqiy, manfiy va teng: $\lambda_1 = \lambda_2$;

3-hol. Uchhadning nollari kompleks, haqiqiy qismi manfiy: $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\vartheta,\ \mu < 0$.

Ucchala holda ham p va q koeffisientlar musbat bo'lishini ko'rsatamiz.

1-holda Viet teoremasiga ko'ra $p = -(\lambda_1 + \lambda_2) > 0,\ \ q = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

2-holda $p = -2\lambda_1 > 0,\ \ q = \lambda_1^2 > 0$.

3-holda $p = -2\mu > 0,\ \ q = \mu^2 + \vartheta^2 > 0$.

Yetarliligi. $p > 0,\ q > 0$ bo'lsin. Bu yerda (2) uchhad nollarning haqiqiy qismi manfiyligini ko'rsatish kerak. Agar $D = p^2 - 4q > 0$ bo'lsa uchhadning nollari

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}\right)$$

ko'rinishda aniqlanadi. Bu nollardan kattasi bo'lgan

$$\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{p^2-4q}\right)$$

sonni manfiyligini ko'rsatsak har ikkala nolning manfiyligi kelib chiqadi.

$$\sqrt{p^2-4q}<\sqrt{p^2}=p$$

tengsizlikka ko'ra $\frac{1}{2}\left(-p+\sqrt{p^2-4q}\right)$ sonning manfiyligi ko'rinadi.

Agar $D=0$ bo'lsa uchhad karrali

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}p<0$$

manfiy no'lga ega. Agar $D<0$ bo'lsa uchhadning nollari

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-p\pm i\sqrt{|D|}\right)$$

kompleks sonlardan iborat bo'lib, haqiqiy qismi $-\frac{1}{2}p<0$ manfiydir. Teorema isbotlandi.

3-reja. **2-teorema**. (1) ko'phad turg'un bo'lsa uning barcha koeffisientlari musbat bo'ladi.

Isbot. (1) ko'phad n ta nolga ega. Aytaylik ulardan $2k$ tasi komleks (bu yerda $=0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$)

$$\lambda_{1,2}=\mu_1\pm i\vartheta_1,\lambda_{3,4}=\mu_2\pm i\vartheta_2,\dots\ ,\lambda_{2k-1,2k}=\mu_k\pm i\vartheta_k,\qquad \mu_j<0,j=1,\dots,k$$

qolganlari esa haqiqiy sonlar

$$\lambda_{2k+1}=b_1,\lambda_{2k+2}=b_2,\dots,\lambda_n=b_{n-2k},\qquad b_l<0,l=1,\dots,n-2k$$

bo'lsin. Algebra kursidan ma'lumki (1) ko'phadni uning nollari yordamida n ta ko'paytmaga ajratish mumkin

$$P(\lambda)=(\lambda-\mu_1-i\vartheta_1)(\lambda-\mu_1+i\vartheta_1)(\lambda-\mu_2-i\vartheta_2)(\lambda-\mu_2+i\vartheta_2)\dots$$
$$(\lambda-\mu_k-i\vartheta_k)(\lambda-b_k+i\vartheta_k)(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\dots(\lambda-b_{n-2k})=$$
$$=(\lambda^2-2\mu_1\lambda+\mu_1^2+\vartheta_1^2)(\lambda^2-2\mu_2\lambda+\mu_2^2+\vartheta_2^2)\dots(\lambda^2-2\mu_k\lambda+\mu_k^2+\vartheta_k^2)(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)$$
$$\dots(\lambda-b_{n-2k})$$

Ohirgi ko'paytmada qatnashgan bacha birinchi va ikkinchi darajali ko'phadlarning koeffisientlari musbat, chunki $\mu_j<0,j=1,\dots,k,\ \ b_l<0,l=1,\dots,n-2k$. Bundan (1) ko'phad musbat koeffisientli haqiqiy ko'phadlarning ko'paytmasidan iboratligini ko'ramiz. Bunday ko'phadlarni ko'aytirib chiqsak koeffisientlari musbat bo'lgan ko'phad chiqishi tayin.

Endi uchinchi va undan darajali ko'phadning turg'un bo'lishi uchun zarury va yetarli shartlarga ega bo'lgan quyidagi teoremalarni isbotsiz keltirib o'tamiz. Teoremalar isbotini Salohitdinov M.C., Nasritdinov G'.N. Oddiy differensial tenglamalar. T. O'zbekiston. 1994. 383b. kitobidan topish mumkin.

3-Teorema. Koeffisientlari haqiqiy bo'lgan

$$L(\lambda)=\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$$

ko'phad tur'g'un bo'lishi uchun a,b,c koeffisientlar musbat bo'lishi bilan birga

$$ab>c$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

Misol. a ning qanday qiymatlarida quyidagi ko'phad turg'un bo'lishini aniqlang

$$L(\lambda)=\lambda^3+a\lambda^2+2\lambda+1$$

Yechish. 3-teoremaga ko’ra a parametr

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \cdot 2 > 1 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantirishi zarur va yetarli. Bundan $a > \frac{1}{2}$.

4-Teorema. (Raus-Gurvis belgisi) Koeffisientlari haqiqiy bo’lgan ushbu

$$L(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n, \ \ a_0 > 0$$

ko'phad tur’g’un bo’lishi uchun ushbu

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

n-tartibli matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo’lishi zarur va yetarli.

Misol. a ning qanday qiymatlarida quyidagi ko’phad turg’un bo’lishini aniqlang

$$L(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + a\lambda^2 + 2\lambda + 1 \qquad (4)$$

Yechish. Bu ko’phad uchun (3) matritsani tuzamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

4-teoremaga ko’ra (5) matritsaning bosh minorlari musbat bo’lishi zarur va yetarli, ya’ni

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 3a - 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6a - 13 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 6a - 13 > 0$$

Bu uchta tengsizlikni birgalikda yechib a parametr uchun $a > \frac{13}{6}$ tengsizlikni aniqlaymiz.

30-mavzu. Normal sistema yechimining turg’unligi

Reja

1. Yechimning turg’unligi
2. Birinchi yaqinlashish usulida turg’unlikka tekshirish

1-reja. Differensial tenglamalarning normal sistemasini qaraylik

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemada barcha f_i va $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ funksiyalar biror D sohada uzluksiz deb hisoblaymiz. U holda D sohaning ihtiyoriy nuqtasidan (1) sistemaning bitta va faqat bitta integral chizig’i oo’tadi. (1) sistemani vektorli ko’rinishda yozib olaylik

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (2)$$

(2) sistemaning $x(t_0) = x_0$ va $x(t_0) = \varphi(t_0)$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini mos ravishda $x(t)$ va $\varphi(t)$ orqali orqali belgilaylik.

Ta'rif. Agar ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki

$$|\varphi(t_0) - x_0| < \delta \qquad (3)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday x_0 ga mos aniqlangan $x(t)$ yechim barcha $t \geq t_0$ larda

$$|\varphi(t) - x(t)| < \varepsilon \qquad (4)$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $x = \varphi(t)$ yechim **turg'un** deyiladi. Boshqacha aytganda t_0 vaqtda boshlang'ich shartlar $\varphi(t_0)$ vektorga yetarlicha yaqin tanlanganda, hosil bo'lgan yechimlar barcha $t \geq t_0$ nuqtalarda $\varphi(t)$ yechimga istalgancha yaqin bo'lsa, sistemaning $\varphi(t)$ yechimi turg'un deyiladi. Sistemaning turg'un bo'lmagan yechimi **notur'un yechim** deyiladi.

$\varphi(t)$ yechim turg'un bo'lsin. (2) sistemaning (3) va (4) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ihtiyoriy $x(t)$ yechimi uchun

$$\lim_{t\to\infty}\big(\varphi(t) - x(t)\big) = 0$$

limit o'rinli bo'lsa, $\varphi(t)$ yechim **asimptotik turg'un** deyiladi.

1-misol. Differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini turg'unlikka tekshiring

$$y' = -a^2 y, \quad y(x_0) = y_0 \qquad (5)$$

Yechish. (5) Koshi maslasining yechimi $\varphi(t) = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$ funksiyadan iborat. y_0 ga $\delta = \varepsilon$ yaqinlikda bo'lgan, ya'ni $|y_0 - y_1| < \delta = \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi y_1 boshlang'ich qiymatni ihtoyoriy tanlaylik. (5) tenglamaning $y(x_0) = y_1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi $y(t) = y_1 e^{-a^2(t-t_0)}$ funksiyadan iborat. $t \geq t_0$ bolganda quyidagi ayirmani baholaymiz:

$$|\varphi(t) - y(t)| = \left|y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - y_1 e^{-a^2(t-t_0)}\right| = |y_0 - y_1| e^{-a^2(t-t_0)} < \varepsilon.$$

Demak (5) differensial tenglamaning $\varphi(t)$ yechimi turg'un ekan. Boshlang'ich shart ihtiyoriyligiga ko'ra sistemaning ihtiyoriy yechimi turg'un bo'ladi. Shu bilan birga

$$\lim_{t\to\infty}\big(\varphi(t) - y(t)\big) = \lim_{t\to\infty}\left((y_0 - y_1)e^{-a^2(t-t_0)}\right) = 0$$

limitga ko'ra (5) sistemaning barcha yechimlari asimptotik turg'unligini ko'ramiz.

2-misol. Differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini turg'unlikka tekshiring

$$y' = a^2 y, \quad y(x_0) = y_0 \qquad (6)$$

Yechish. (6) Koshi maslasining yechimi $\varphi(t) = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$ funksiyadan iborat. Tenglamaning $y(x_0) = y_1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi esa $y(t) = y_1 e^{a^2(t-t_0)}$ funksiyadan iborat, bu yerda $y_1 (\neq y_0)$ ihtiyoriy chekli son. Ushbu

$$\lim_{t\to\infty} e^{a^2(t-t_0)} = +\infty$$

limitga

$$|\varphi(t) - y(t)| = \left|y_0 e^{a^2(t-t_0)} - y_1 e^{a^2(t-t_0)}\right| = |y_0 - y_1| e^{a^2(t-t_0)}.$$

ayirmaning qiymati istalgan sondan katta bo'la oladi. Demak (6) differensial tenglamaning ihtiyoriy yechimi noturg'un ekan.

2-reja. (2) sistemaning $x = \varphi(t)$ yechimini turg'unlikka tekshirish masalasini hamma vaqt biror sistemaning nol yechimini turg'unlikka tekshirish masalasiga aylantirish mumkin. Buning uchun (2) sistemada $z = x - \varphi(t)$ almashtirish bajarish kifoya. Natijada hosil bo'ladigan $z = g(t, z)$ sitemaning nol yechimini turg'unlikka tekshirish masalasi yuzaga keladi. Shu sababli umumiylikka ziyon keltirmagan holda (1) sistema nol yechimga ega deb hisoblaymiz va bu yechimni turg'unlikka tekshirish masalasi bilan shug'ulanamiz.

(1) sistemadagi $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, n$ funksiyalarni $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyish bilan (1) sistemani

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (7)$$

ko'rinishga keltirib olamiz, bu yerda $g_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\ \ i = 1, \dots, n$ funksiyalar darajasi birdan katta bo'lgan cheksiz kichik miqdorlar, yani

$$\lim_{|x| \to 0} \frac{|g_i|}{|x|} = 0, \ \ |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

(7) sistemadagi $a_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$ koeffisientlar yordamida tuzilgan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{2n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

n-darajali tenglamaning ildizlari (1) sistemaning hos sonlari hisoblanadi.

Lyapunov teoremasi. Agar (1) sistemaning barcha hos sonlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsa, u holda sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi. Agar (1) sistemaning birorta hos sonining haqiqiy qismi musbat bo'lsa, u holda sistemaning nol yechimi noturg'un bo'ladi.

Teorema isbotini Salohitdinov M.C., Nasritdinov G'.N. Oddiy differensial tenglamalar. T. O'zbekiston. 1994. 383b. kitobidan topish mumkin.

Misol. Sistemaning nol yechimini turg'unlikka tekshiring

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y} \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1 - 4y) \end{cases} \qquad (8)$$

Yechish. Sistemaning o'ng qismidagi funksiyalarni ushbu

$$f(x; y) = f(0; 0) + f'_x(0; 0)x + f'_y(0; 0)y + \varphi(x, y)$$

Teylor formulasi yordamida birinchi darajali qismini ajiratib olamiz:

$$\sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y} = -2x - y + \varphi_1(x, y); \quad \sin ax + \ln(1 - 4y) = ax - 4y + \varphi_2(x, y).$$

Natijada (8) sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \varphi_1(x, y) \\ \dot{y} = ax - 4y + \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Sistemaning hos sonlarini aniqlaylik

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ a & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \ \ \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1 - a}.$$

Agar $a > 1$ bo'lsa sistemaning hos sonlari kompleks bo'lib haqiqiy qismi -3 ga teng. Agar $-8 < a \leq 1$ bo'lsa hos sonlar haqiqiy va manfiy bo'ladi. Demak sanab o'tilgan hollarda (8) sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi. Agar $a < -8$ bo'lsa hos sonlardan kamida bittasi, aniqrog'i $\lambda_1 = -3 + \sqrt{1 - a}$ ildizi musbat bo'ladi va teoremaga ko'ra nol yechim noturg'un bo'ladi. Agar $a = -8$ bo'lsa hos sonlar $\lambda_1 =$

0, $\lambda_2 = -6$ bo'lib Lyapunov teoremasi yordamida nol yechimni turg'unlikka tekshira olmaymiz.