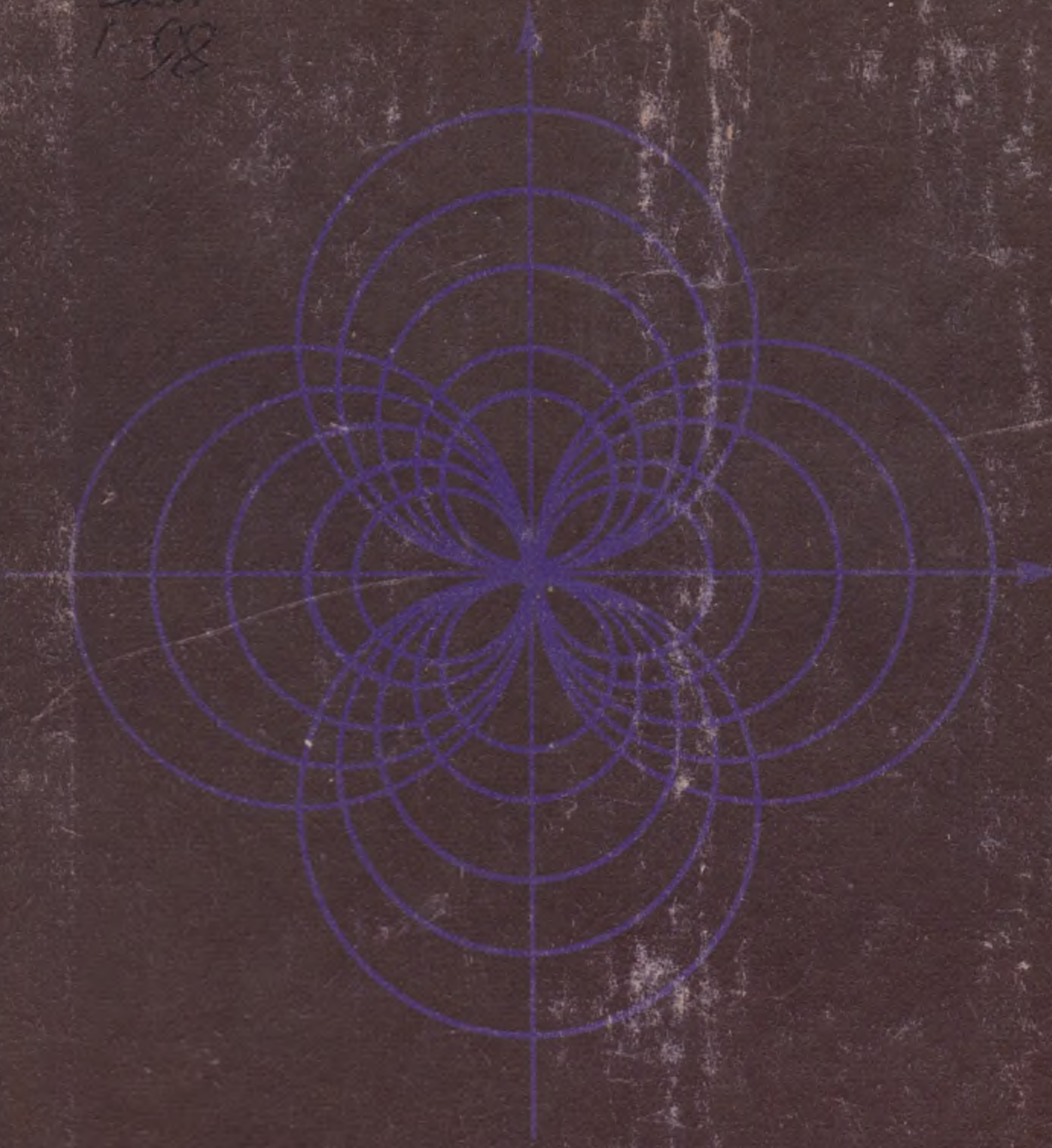


Р.С. ГУТЕР, А.Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Р. С. ГУТЕР, А. Р. ЯНПОЛЬСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

ҚАЙТА ИШЛАНГАН ВА ТЎЛДИРИЛГАН
РУСЧА ИККИНЧИ НАШРИДАН ТАРЖИМА

СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги олий техника ўқув юртларининг студентлари учун ўқув қўлланма сифатида тасдиқлаган

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
Тошкент — 1978

Ушбу китоб олий техника ўқув юртларининг студентлари учун оддий дифференциал тенгламалар бўйича ўқув қўлланмадир.

Китобда дифференциал тенгламалар ҳақида умумий назарий маълумотлар, биринчи ва юқори тартибли тенгламалар, шунингдек, дифференциал тенгламалар системаларининг айрим типларини интеграллаш усуллари баён қилинган. Назарий материални баён қилиш батафсил таҳлил қилинган кўп сондаги мисоллар билан қўшиб олиб борилади. Геометрия, механика, физика ва техниканинг дифференциал тенгламалар тузиш ва ечишни талаб этадиган масалаларига катта эътибор берилган.

Китоб олий техника ўқув юртлари студентлари учун мўлжалланган.

$Г \frac{20203 — № 271}{353(06) — 78} 117 — 78$

РУСЧА ИККИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг биринчи нашри босилиб чиққанидан буён ўн тўрт йил ўтган бўлса да, унинг асосий методик йўналиши аввалгича қолди: биз ўқувчини дифференциал тенгламаларни фақат ечишнигина эмас, балки уларни тузишни ҳам ўргатишга ҳаракат қилдик. Шу сабабли иккинчи нашрда математика татбиқ қилинадиган турли соҳалардан олинган ва дифференциал тенгламалар тузиш ҳамда уларнинг ечимларини анализ қилишни талаб этадиган мисоллар сони кўпайтирилди.

Бундан ташқари, ушбу нашрга бирмунча янги материал қўшилди. Чегаравий масалалар, ўзгарувчан коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар ва фазалар фазоси тушунчаси ҳақидаги параграфлар, шунингдек, оддий дифференциал тенгламаларни ечишда операцион ҳисобнинг қўлланилиши ҳақидаги боб янгидан ёзилди. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини баён қилишда аввалгича элементар сонли методларни қараш билан чекланган бўлсак-да, лекин уларни тақрибий ечиш тўғрисидаги материални кенгайтирдик.

Иккинчи нашрнинг қўлёзмасини ишлашда катта ёрдам бергани учун Т. А. Муратовага миннатдорлик изҳор қиламиз. Шунингдек, Москва авиация институтининг алгебра ва функциялар назарияси кафедраси коллективига, айниқса, Р. Я. Глаголевга, Г. А. Каменскийга ва Н. Н. Романовскийга ҳамда китоб редактори А. М. Суходскийга қўлёзмани диққат билан ўқиб чиқиб, бир қатор фойдали кўрсатма ва маслаҳатлар берганликлари учун миннатдорлик билдирамиз. Бундан ташқари, А. Д. Мышкиснинг олий техника ўқув юртларида математика ўқитиш ҳақидаги ғояларининг бизга кўрсатган таъсирини ҳам айтиб ўтишни ўз бурчимиз деб биламиз.

РУСЧА БИРИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИДАН

Ушбу китобга иккала авторнинг В. В. Куйбишев номидаги Ҳарбий инженерлик академиясида ўқиган лекциялари асос қилиб олинган.

Китоб дифференциал тенгламаларга бағишланган бошқа китоблар-дан дифференциал тенгламалар тузишга доир масалаларга катта эътибор берилиши билан фарқ қилади.

Биз дифференциал тенгламаларнинг физика ва техниканинг турли соҳаларига татбиқ қилинишини иложи борича кенгроқ ёритишга ҳаракат қилдик. Шу сабабли, китоб фақат студентлар учун эмас, балки ўз ишида дифференциал тенгламаларни татбиқ қилиниши билан боғлиқ масалаларга дуч келишлари мумкин бўлган инженерлар учун ҳам фойдали бўлади деб ҳисоблаймиз.

Китоб қўлёзмаси устида ишлашда ўртоқларимизнинг маслаҳатлари катта ёрдам берди. Биз китобни яхшилашга қаратилган бир қатор фойдали маслаҳатлари учун М. И. Вишик, Ю. И. Гросберг, Н. И. Вайсфельд, М. И. Сканави, Г. Л. Лунц, Е. М. Ландис, Н. К. Мановцева, В. М. Макушин ва китоб редактори Н. А. Угаровага чуқур миннатдорлик билдиришни ўз бурчимиз деб биламиз.

Ўз фикр ва мулоҳазаларини юборган барча китобхонларга ташаккур билдирамиз.

КИРИШ

Табиатшунослик ва техниканинг кўпгина масалаларини ҳал этиш қаралаётган ҳодиса ёки жараёнларни тавсифловчи номаълум функциялар ва уларнинг ҳосилаларини ўзаро боғловчи муносабатлар маълум бўлганда бу функцияларни топишга келтирилади. Бундай муносабатлар дифференциал тенгламалар дейилади. Бир нечта конкрет масалани кўриб чиқамиз.

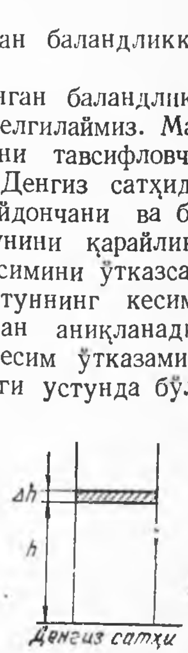
1-мисол. Ҳаво босимини денгиз сатҳидан баландликка боғлиқ равишда аниқланг.

Ечилиши. Денгиз сатҳидан ҳисобланган баландликни h (м), ҳаво босимини $p\,(\text{Н/м}^2)$ орқали белгилаймиз. Масала босимнинг баландликка боғлиқлигини тавсифловчи $p = p(h)$ функцияни топишдан иборат. Денгиз сатҳида жойлашган 1 м² ўлчамли горизонтал майдончани ва бу майдончага таянувчи призматик ҳаво устунини қарайлик. Агар h баландликда хаёлан устуннинг кесимини ўтказсак (1-расм), у ҳолда бу кесимдаги босим устуннинг кесимдан юқоридаги қисмининг оғирлиги билан аниқланади. $h + \Delta h$ баландликда иккинчи горизонтал кесим ўтказамиз. Бу кесимдаги босим иккала кесим орасидаги устунда бўлган ҳаво оғирлигига тенг Δp миқдорга кичик бўлади.

Шу сабабли

$$\Delta p = -d\Delta h$$

деб ёзишимиз мумкин, бу ерда d катталик $p(\text{Н/м}^2)$ босимдаги бир кубометр ҳавонинг оғирлиги. Бироқ d катталикнинг ўзи босимга пропорционал. Ҳақиқатан, d_0 бир кубометр ҳавонинг $p_0 = 1(\text{Н/м}^2)$ босимдаги оғирлиги бўлсин. Бойль — Мариотт



1-расм.

қонунига ($pV = p_0V_0$) кўра бундай миқдордаги ҳаво p босимда $V = \frac{1}{p}$ кубометр ҳажмга эга бўлиб, аввалгича d_0 (Н) оғирликда бўлади. Бу ҳолда бир кубометр ҳавонинг d оғирлиги $d = \frac{d_0}{V} = d_0p$ га ёки, умуман, $d = kp$ га тенг бўлади, бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти. Шундай қилиб, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\Delta p = -kp\Delta h. \tag{1}$$

(1) тенглик аниқ эмас: бу ерда h ва $h + \Delta h$ орасидаги ҳамма кесимларда босим ўзгармас ва p га тенг деб фараз қилинган. Аслида эса бу кесимларда босим турлича бўлиб, h ортиши билан у камаяди. Бироқ $p = p(h)$ функцияни узлуксиз деб фараз қилиш табиий, шу сабабли (1) тенгликнинг хатоси катта эмас ва Δh катталик қанчалик кичик бўлса, у шунчалик кичик бўлади. Энди (1) тенгликнинг иккала томонини Δh га бўлиб, $\Delta h \to 0$ да лимитга ўтсак, ундаги хато ҳам нолга интилади ва биз энди аниқ тенгликка эга бўламиз:

$$\frac{dp}{dh} = -kp. \tag{2}$$

(2) тенглик номаълум (изланаётган) $p(h)$ функцияни ва унинг ҳосиласини боғловчи *дифференциал тенгламадир*. Бу тенгламанинг *ечими* ҳаво босими p нинг h баландликка боғлиқлигини ифодаловчи функциядан иборат. Ечимларни топишнинг умумий усуллари ҳозирча номаълум бўлгани учун қуйидагича йўл тутамиз. (1) муносабатда денгиз сатҳидан h баландликни p босимнинг функцияси деб қараймиз. Масалан, жойнинг денгиз сатҳидан баландлигини барометр кўрсатиши бўйича аниқлаш талаб қилинса, барометрик нивелирлашда ана шундай йўл тутилади. Бундай ҳолда (1) тенгликнинг иккала қисмини Δp га бўлиб ва $\Delta p \to 0$ да лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-\frac{dh}{dp}kp = 1$$

ёки

$$\frac{dh}{dp} = -\frac{1}{kp}. \tag{3}$$

(3) тенглик ҳам дифференциал тенгламадир, лекин бу ерда энг содда боғланишга эгамиз: номаълум функциянинг

ҳосиласи аргументнинг маълум функцияси сифатида ифодаланади. Шу сабабли номаълум h функцияни топиш учун фақат аниқмас интеграл олиш керак, натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$h = -\frac{1}{k}\ln p + C_1. \tag{4}$$

C_1 катталик интеграллашнинг ихтиёрий ўзгармасидир, келгусида қулай бўлиши учун уни $C_1 = \frac{1}{k}\ln C$ кўринишда ёзган маъқул. У ҳолда (4) тенгликни қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{C}{p}. \tag{5}$$

(5) тенглик изланаётган $h = h(p)$ функциянинг ифодасини беради, бироқ бу ифодани унда ихтиёрий C ўзгармас борлиги туфайли жуда ҳам аниқ деб бўлмайди. Тўла аниқликка эришиш учун C ни билиш зарур, бунга h нинг бирор бир қийматида p нинг қиймати берилиши орқали эришиш мумкин. Бизнинг мисолимизда денгиз сатҳида ($h=0$ бўлганда) атмосфера босими $p=p_0$ га тенг деб олиш энг қулайдир. Бу қийматларни (5) га қўйиб, $C = p_0$ ни топамиз, натижада изланаётган функция узил-кесил

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p} \tag{6}$$

формула орқали ифодаланади.

(6) тенгликни p га нисбатан ечиш ва бу билан дастлаб қўйилган масаланинг ечимини ҳосил қилиш мумкин. Ҳаво босими p нинг денгиз сатҳидан баландлик h га боғлиқ ифодаси

$$p = p_0 e^{-kh} \tag{7}$$

формула билан ифодаланади.

Дифференциал тенгламаларга олиб келадиган масалаларнинг кўпчилиги механикага доирдир. Таъсир этувчи кучлар маълум бўлганда моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини аниқлаш нуқта динамикасининг классик масаласи ҳисобланади. Бу ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонуни дифференциал тенгламага олиб келади. Таъсир этувчи кучларга қараб ҳар хил типдаги тенгламалар ҳосил бўладики, биз улар билан бундан буён иш кўрамиз. Шу типдаги масалалардан энг соддасини кўриб чиқамиз.

2- расм.

2- мисол. Массаси m бўлган моддий нуқта оғирлик кучи таъсирида эркин тушмоқда. Нуқтанинг ҳаракат қонунини ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмасдан топинг.

Ечилиши. Саноқ боши O танлаб олинган ва пастга йўналган вертикал ўқ олайлик. Моддий нуқтанинг вазияти t вақтга боғлиқ равишда ўзгарадиган $OM = s$ координата билан аниқланади (2- расм). Динамиканинг иккинчи асосий қонунини

$$F = ma$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда m — масса, a — нуқтанинг тезланиши, F — таъсир этувчи куч. Шартга кўра нуқтага фақат оғирлик кучи таъсир этади, демак, $F = P = mg$, бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши. a тезланиш йўлдан вақт бўйича олинган иккинчи ҳосилага тенг, шунинг учун

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\ g$$

ёки

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g. \tag{8}$$

(8) тенглик номаълум $s = s(t)$ функциянинг иккинчи ҳосиласи қатнашган дефференциал тенгламадир. Ушбу ҳолда бу иккинчи ҳосила аргументнинг маълум функцияси (ҳатто, ўзгармас катталикка тенг) бўлгани учун изланаётган функцияни t бўйича икки марта интеграллаб топиш мумкин:

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1, \tag{9}$$

$$s = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \tag{10}$$

(10) тенглик изланаётган ҳаракат қонунини беради, бироқ юқорида кўрилган масаладаги каби у интеграллаш ўзгармасларига эга, айни ҳолда иккита. Нуқтанинг бошланғич вазиятини ва бошланғич тезлигини билган ҳолда бу ўзгармасларни аниқлаш мумкин. Бошланғич моментда ($t=0$) нуқтанинг тезлиги v_0 га, унинг O саноқ бошидан масофаси s_0 га тенг бўлсин дейлик. $\frac{ds}{dt}$ тезликни ифодалагани учун (9) дан $C_1 = v_0$ ни, (10) дан эса $C_2 = s_0$ ни ҳо-

сил қиламиз, натижада ҳаракат қонуни ушбу кўринишга эга бўлади:

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0. \qquad (11)$$

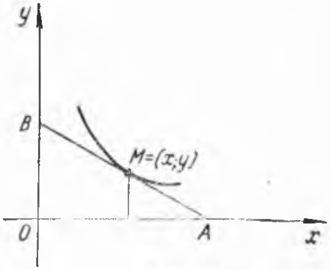
Энди геометрияга доир бўлган яна бир мисол кўрсатайлик.

3- мисол. Эгри чизиққа унинг ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан кесган кесмаси уриниш нуқтаси ординатасининг иккилланганига тенг. Шу эгри чизиқнинг тенгламасини топинг.

Ечилиши. Изланаётган эгри чизиқда ихтиёрий $M(x;y)$ нуқта оламиз (3- расм). M нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси

$$Y - y = y'(X - x)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда X, Y — уринма нуқталарининг ўзгарувчи координаталари, y' — изланаётган функциянинг берилган нуқтадаги ҳосиласи. Уринманинг Oy ўқдан ажратадиган OB кесмасини топиш учун $X=0$ деймиз. У ҳолда $OB = Y = y - xy'$. Иккинчи томондан, шартга кўра $OB = 2y$. OB кесма учун топилган иккала ифодани таққослаб,



3- расм.

$$y - xy' = 2y$$

ёки

$$xy' + y = 0 \qquad (12)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг иккала томонини dx кўпайтириб, уни дифференциал иштирок этган кўринишга келтирамиз:

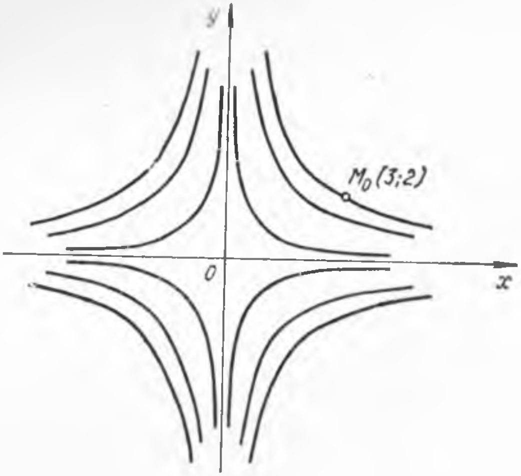
$$xdy + ydx = 0. \qquad (13)$$

(13) тенгламанинг чап томони ўзгарувчилар кўпайтмасининг дифференциали $d(xy)$ дан иборат, шунинг учун (13) тенгламани ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$d(xy) = 0,$$

бу ердан

$$xy = C, \qquad (14)$$



4- расм.

бу ерда C — ихтиёрий ўзгармас. (14) тенглик изланаётган эгри чизиқнинг тенгламасини беради, уни ошкор ҳолда ёзиш ҳам мумкин:

$$y = \frac{C}{x}. \qquad (15)$$

(14) тенглама ҳам (15) каби, аслини олганда, битта эгри чизиқни эмас, балки эгри чизиқларнинг бутун бир оиласини — асимптоталари координата ўқларидан иборат тенг ўқли гиперболалар оиласини ташкил этади (4- расм). Бу оиланинг эгри чизиқларидан бирини ажратиб олиш учун юқорида кўрилган масалалардаги каби аргументнинг бирорта тайин қиймати учун функция қийматини бериш керак. Мазкур масалада бу фикр изланаётган эгри чизиқ ўтадиган нуқтанинг координаталарини берилишига эквивалентдир. Айтайлик, изланаётган эгри чизиқ M_0 (3; 2) нуқтадан ўтсин, яъни $x = 3$ да функция $y = 2$ қийматга эга бўлсин. Бу қийматларни (14) ёки (15) га қўйиб, $C=6$ ни топамиз, шу сабабли изланаётган эгри чизиқ

$$xy = 6 \qquad (16)$$

ёки

$$y = \frac{6}{x} \tag{17}$$

кўринишига эга бўлади.

Кўрилган мисоллар биргина дифференциал тенгламани, умуман айтганда, кўп функциялар қаноатлантиришини кўрсатади, шу сабабли уларнинг биттасини ажратиб олиш учун қўшимча шартларнинг берилиши зарурдир.

Энди асосий тушунчаларни таърифлашга ўтиш мумкин.

Дифференциал тенглама деб эркли ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг турли тартибли ҳосилалари ёки дифференциалларини боғловчи тенгламага айтилади.

(2), (8), (12), (13) тенгламалар дифференциал тенгламаларга мисол бўлади. Бу тенгламаларнинг ҳаммасида номаълум функция бир аргументнинг функциясидир. Бундай дифференциал тенгламалар бир нечта аргументга боғлиқ номаълум функциялар қараладиган ***хусусий ҳосилали*** дифференциал тенгламалардан фарқли ўлароқ ***оддий дифференциал тенгламалар*** деб аталади. Биз фақат оддий дифференциал тенгламаларни текширамиз.

Дифференциал тенгламаларнинг *тартиби* деб унга кирувчи юқори ҳосиланинг (ёки дифференциалнинг) тартибига айтилади. Жумладан, (2), (12), (13) тенгламалар биринчи тартибли, (8) тенглама эса иккинчи тартибли тенгламадир, чунки иккинчи ҳосилани ўз ичига олган.

Тенглама юқори тартибли ҳосилага нисбатан алгебраик бўлган айрим ҳолларда «тенглама даражаси» терминидан фойдаланилади. Бунда *дифференциал тенгламанинг даражаси* деб, тенглама юқори ҳосилага нисбатан бутун рационал кўринишга келтирилгандан сўнг ана шу ҳосиланинг энг катта даража кўрсаткичига айтилади.

Берилган дифференциал тенгламани қаноатлантирадиган ҳар қандай

$$y = \varphi(x) \tag{18}$$

функция, яъни тенгламада y *ни ва унинг ҳосилаларини* $\varphi(x)$ *ва унинг тегишли ҳосилалари билан алмаштирилганда берилган тенгламани айниятга айлантирадиган функция дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.*

Агар тенгламани қаноатлантирадиган функция $\Phi(x,y)=0$ кўринишдаги муносабат орқали ёки параметрик берилган бўлса, у ҳолда тенгламанинг *интеграли* ҳақида гапирилади. Шу маънода (7) ва (17) ифодалар тегишли дифференциал тенгламаларнинг *ечимлари*, (6) ва (16) ифодалар эса уларнинг *интеграллари* бўлади. Биз бундай фарқлантиришга қатъий амал қилиб ўтирмаймиз.

Дифференциал тенгламани геометрик талқин этишда унинг ечими графигини қарашга тўғри келади. У тенгламанинг *интеграл эгри чизиги* деб аталади.

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1 § ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМАЛАР. УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Биринчи тартибли тенгламанинг чап томони фақат x,y ва y' га боғлиқ бўлиши мумкин бўлгани учун биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x,\ y,\ y')=0. \tag{1}$$

Одатда (1) тенгламани ҳосилага нисбатан ечилган

$$y'=f(x,\ y) \tag{2}$$

шаклда ёки дифференциаллар иштирок этган

$$M(x,\ y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3}$$

шаклда ифодалаб олишга ҳаракат қилинади.

(2) шаклдан (3) га, ва аксинча, ўтиш осон. Ҳақиқатан, агар (2) тенгламада y' ни $\frac{dy}{dx}$ билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала томонини dx га кўпайтириб, ҳамма ҳадларни бир томонга ўтказсак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$f(x,\ y)dx-dy=0,$$

бу (3) нинг ўзидир, бу ерда $M(x,\ y)=f(x,y)$, $N(x,y)=-1$. Аксинча, агар (3) тенгламанинг биринчи ҳадини ўнг томонга ўтказиб ва $N(x,\ y)\neq 0$ деб фараз қилиб, тенгламанинг иккала томонини $N(x,y)dx$ га бўлсак,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

ни, яъни (2) шаклни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$f(x,y)=-\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}.$$

Шундай қилиб, (2) ва (3) шакллар бутунлай тенг кучли; келгусида конкрет ҳол учун уларнинг қайси бири қулай бўлса, шунисидан фойдаланамиз.

Китобнинг Кириш қисмида дифференциал тенгламани, умуман айтганда, функцияларнинг бутун бир системаси қаноатлантириши кўрсатиб ўтилган эди. Бу функциялардан бирини ажратиб кўрсатиш учун унинг аргументнинг бирорта қийматига мос келадиган қийматини кўрсатиш кекак, яъни $x = x_0$ да $y = y_0$ кўринишдаги шарт берилиши керак. Бундай шарт *бошланғич шарт* дейилади. Кўпинча у қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{4}$$

Таъриф. *(2) дифференциал тенгламанинг (4) шартни қаноатлантирувчи $y = \varphi(x)$ ечими (агар бу ечим мавжуд бўлса)* [*ёки* $\Phi(x,y) = 0$ *интеграли*] *дифференциал тенгламанинг берилган шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими (ёки хусусий интеграли) дейилади.*

Масалан, $xy' + y = 0$ тенгламанинг (Киришга қаранг) $y = 6/x$ ечими $y|_{x=3} = 2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимидир. Мос равишда, $xy = 6$ бу тенгламанинг хусусий интегралидир.

Функциянинг аргументнинг бошланғич $x = x_0$ қийматига мос келадиган $y = y_0$ бошланғич қийматини ихтиёрий бериш мумкин. y_0 нинг ўзгариши билан ечим ҳам ўзгара боради, бинобарин, бу ечим фақат x аргументнинггина эмас, балки ихтиёрий $y_0 = C$ катталикнинг ҳам функцияси бўлади. Бироқ тенглама ечими ихтиёрий C ўзгармасни y_0 бошланғич қиймат сифатида ўз ичига олмаслиги ҳамма вақт ҳам шарт эмас.

Таъриф. *Агар (2) дифференциал тенгламанинг C ўзгармасга боғлиқ бўлган $y = \varphi(x,C)$ ечимидан* [*ёки* $\Phi(x,y,C) = 0$ *интегралидан*] *ихтиёрий ўзгармаснинг қийматларини танлаш йўли орқали мумкин бўлган исталган $y/_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шарт* ни қанотлантирувчи хусусий ечимни (хусусий интегрални) олиш мумкин бўлса, $y = \varphi(x, C)$ ечим* [*ёки* $\Phi(x, y, C) = 0$ *интеграл*] *(2) диф-*

---

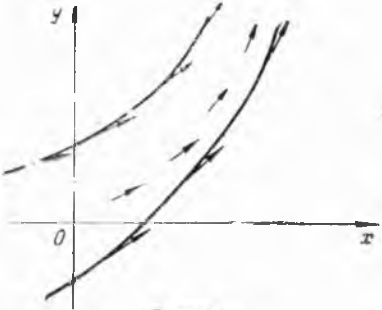
* Мумкин бўлган бошланғич шарт дейилганда ягона аниқланган интеграл эгри чизиқ ўтадиган нуқта координаталари назарда тутилади, яъни бу шундай шартки, унинг учун хусусий ечим мавжуд ва у ягонадир. Бу ҳақда 7- § да муфассал гапирилади.

ференциал тенгламанинг умумий ечими (ёки умумий интеграли) дейилади.

Амалда C ни аниқлаш учун умумий ечимда (умумий интегралда) x ва y ўрнига берилган x_0 ва y_0 қийматларни қўйиш ва $y_0=\varphi(x_0, C)$ [$\Phi(x_0, y_0, C)=0$] тенгламани C номаълумга нисбатан ечиш лозим. Айтайлик, $C=C_0$ бўлсин; у ҳолда хусусий ечим $y=\varphi(x, C_0)$ [мос равишда хусусий интеграл $\Phi(x, y, C_0)=0$] бўлади.

Умумий ечим геометрик нуқтаи назардан битта C параметрга боғлиқ бўлган интеграл эгри чизиқлар оиласидан иборат. Хусусий ечим эса бу оиланинг эгри чизиқларидан бири бўлиб, у $M_0(x_0; y_0)$ нуқтадан ўтади. Масалан, $y=C/x$ ечим (гиперболалар оиласи) $xy'+y=0$ тенгламанинг умумий ечимидир. Агар $y|_{x=3}=2$ бошланғич шарт берилса, умумий ечимга $x=3$ ва $y=2$ қийматларни қўйиб, $C=6$ ни топамиз, демак, $y=C/x$ умумий ечимдан берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи $y=6/x$ хусусий ечимни ҳосил қиламиз, яъни $M_0(3; 2)$ нуқтадан ўтувчи битта гиперболага эга бўламиз.

(2) дифференциал тенглама геометрик нуқтаи назардан қуйидагича талқин этилиши мумкин. $y=\varphi(x, C)$ — бу тенгламанинг умумий ечими, яъни xOy текисликнинг $f(x,y)$ функция аниқланган бирорта D соҳасидаги интеграл эгри чизиқлар оиласи бўлсин. (2) тенглама D соҳанинг ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтаси координаталари билан ҳосиланинг бу нуқтадаги қиймати орасида боғланиш ўрнатади. M нуқтанинг x ва y координаталари маълум бўлса, (2) тенгламадан ҳосиланинг қийматини, яъни M нуқта орқали ўтувчи интеграл эгри чизиққа ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топиш мумкин. Шундай қилиб, (2) дифференциал тенглама D соҳада йўналишлар тўпламини ёки бошқача айтганда *йўналишлар майдонини* аниқлайди. Соҳанинг ҳар бир нуқтасидаги йўналишни бу нуқтадан чиқувчи кичик стрелка билан белгиласак, (2) дифференциал тенгламанинг йўналишлар майдонини тасвирлаш мумкин (5- расм).



5- расм.

(2) дифференциал тенгламани интеграллаш масаласи геометрик жиҳатдан ўзининг ҳар қайси нуқтасида майдон берадиган йўналишга уринадиган эгри чизиқларни топишдан иборат.

Умумий ечим таърифида мумкин бўлган бошланғич шартлар тўғрисида гап кетар экан, қандай ҳолларда берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечим ҳақиқатан ҳам мавжуд бўлишига кафолат бериш мумкин ва қачон бундай ечим фақат битта бўлади деб комил ишонч билан айтиш мумкин деган саволнинг юзага чиқиши табиийдир. Бу саволларга мавжудлик ва ягоналик теоремаси жавоб беради. Бу теорема мазкур боб охирида дифференциал тенгламаларни интеграллашнинг айрим умумий методлари билан бирга қаралади (7- § га қаранг). Энди дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топиш интегралларни ҳисоблашнинг одатдаги операцияларига келтириладиган айрим турларини текширишга киришамиз.

2- §. ЎЗГАРУВЧИЛАРНИ АЖРАТИШ

Биринчи тартибли энг содда дифференциал тенглама ҳосилага нисбатан ечилган ва y ўзгарувчи қатнашмаган кўринишда бўлади:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

Интеграл ҳисоб курсидан маълумки, бу ҳолда номаълум y функцияни топиш учун $f(x)$ функциянинг аниқмас интегралини топиш етарли. (1) тенгламанинг умумий ечими ушбу кўринишда ёзилади:*

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Агар $y|_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шарт берилган бўлса, C нинг қийматини ҳисоблаш ва хусусий ечимни топиш мумкин.

Масалан, $y' = 3x^2 - 2x + 1$ дифференциал тенгламанинг $x = 1$ да $y = 2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топайлик. Интеграллаб, умумий ечимни топамиз:

$$y = x^3 - x^2 + x + C.$$

---

[*] Бу ерда ва келгусида $\int$ символ бирорта бошланғич функцияни билдиради.

Хусусий ечимни топиш учун умумий ечимда $x=1$, $y=2$ деймиз ва $C=1$ ни топамиз. Демак, изланаётган хусусий ечим

$$y=x^3-x^2+x+1$$

кўринишда бўлади.

Бошланғич шарти $y|_{x=x_0}=y_0$ бўлган (1) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини кўпинча аниқ интеграл кўринишида ёзиш қулай бўлади. Дарҳақиқат, бошланғич функцияни қуйи чегараси тайинланган, юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграл кўринишида, масалан,

$$y=\int_{x_0}^{x}f(t)dt+C \tag{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. $x=x_0$ да бу интеграл нолга айланади, шу сабабли бошланғич шартлар бажарилиши учун $C=y_0$ деб олиш керак, бинобарин, (1) тенгламанинг $y|_{x=x_0}=y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими ушбу кўринишда бўлади:

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t)dt. \tag{3}$$

dx олдидаги кўпайтувчи y га эмас, балки фақат x га боглиқ бўлиши мумкин бўлган функциядан, dy олдидаги кўпайтувчи эса x га эмас, балки фақат y га боғлиқ бўлиши мумкин бўлган функциядан иборат

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0 \tag{4}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *ўзгарувчилари ажралган тенглама* дейилади.

$y=\varphi(x)$ функция бу тенгламанинг ечими бўлсин деб фараз қилайлик. Агар $dy=\varphi'(x)dx$ ни ҳисоблаб, (4) тенгламада y ва dy ўрнига уларнинг $\varphi(x)$ ва $\varphi'(x)dx$ ифодаларини қўйсак, ечим таърифига кўра интеграллаш мумкин бўлган

$$f_1(x)dx+f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=0$$

айниятни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$\int f_1(x)dx+\int f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=C, \tag{5}$$

бу ерда чап томонда $f_1(x)$ ва $f_2[\varphi(x)]\varphi'(x)$ нинг бошланғич функциялари, ўнг томонда эса ҳар иккала интегралнинг ихтиёрий ўзгармаслари бир ихтиёрий ўзгармас қилиб ёзилган C турибди.

Иккинчи интегрални $\varphi(x) = y$ деб ўзгарувчини алмаштириш орқали ўзгартириш мумкин. Бунда (5) тенглик ушбу кўринишга келади:

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C. \tag{6}$$

Бу тенглик x ва y орасидаги охирги (ҳосила ва дифференциаллар бўлмаган) муносабат бўлиб, уни (4) тенгламанинг барча ечимлари қаноатлантиради. Агар бирорта $y = \varphi(x)$ функцияни (6) тенгликка келтириб қўйганда у тенгламани айниятга айлантирса, бу тенгламани дифференциаллаб, y (4) тенгламани ҳам қаноатлантиришни кўрамиз. Демак, (6) тенглик (4) тенгламанинг умумий интегралидир.

(6) тенгликни бевосита (4) дан ҳам ҳосил қилиш мумкин, бунинг учун биринчи қўшилувчини x, иккинчи қўшилувчини y бўйича интеграллаш керак, яъни ҳар бир қўшилувчини x ҳам, y ҳам эркли ўзгарувчи деб интеграллаш керак. Бу операцияни амалга ошириш мумкинлигини яна қуйидагича ҳам тушунтириш мумкин: y ўзгарувчи x нинг функцияси бўлгани учун $f_2(y)dy$ қўшилувчи x нинг функциясининг дифференциали бўлиб, бу функцияда y оралиқ аргумент ролини ўйнайди. Биринчи дифференциал формасининг инвариантлиги тўғрисидаги маълум теоремага кўра бу дифференциал y эркли ўзгарувчи бўлган ҳолдагидек кўринишда бўлади. Шунинг учун (4) тенгликнинг ҳар қайси қўшилувчисини ўз аргументи бўйича алоҳида интеграллаш мумкин, бу эса (6) тенгликка олиб келади.

Шундай қилиб, (4) тенгламанинг умумий интегралини излаш интеграллашга келтирилди. Айрим ҳолларда $\int f_1(x)dx$ ёки $\int f_2(y)dy$ интегралларни элементар функциялар орқали ифодалашнинг имконияти бўлмай қолиши мумкин. Шундай бўлса-да, бундай ҳолда ҳам дифференциал тенгламани интеграллаш масаласи ҳал этилди деймиз, бунда у соддароқ масалага — интегралларни ҳисоблашга келтирилганлигини кўзда тутамиз.

Масалан,

$$\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{y^2dy}{1+y^3} = 0$$

дифференциал тенгламанинг $y|_{x=0} = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган хусусий интегралини топамиз.

Интеграллаб топамиз:

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{3}\ln(1+y^3)=\frac{1}{6}\ln C,$$

бу ерда келгуси алмаштиришларда қулай бўлишини кўзда тутиб, ихтиёрий ўзгармас сифатида $\frac{1}{6}\ln C$ ифода танланган. Тенгликнинг иккала томонини 6 га кўпайтириб, сўнгра потенцирласак, умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2}=C.$$

Хусусий интегрални топиш учун умумий интеграл ифодасига $x=0$, $y=1$ ни қўйиб, $C=\frac{1}{4}$ ни топамиз. Изланаётган хусусий интеграл:

$$(1+y^3)^2-4(1+x^2)^3=0.$$

Ўнг томони иккита функциянинг кўпайтмасидан иборат бўлиб, уларнинг бири y га боғлиқ бўлмаган, иккинчиси эса x га боғлиқ бўлмаган

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \tag{7}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган тенглама* дейилади.

Бу тенглама *ўзгарувчиларни ажратиш* усули билан интегралланади. Бунда тенглама ўзгарувчилари ажралган тенгламаларнинг юқорида кўрилган (4) типига келтирилади. Бунинг учун (7) тенгламанинг иккала томонини $f_2(y)$ га бўламиз ва dx га кўпайтирамиз; натижада ўзгарувчилари ажралган*

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Интеграллаб, умумий интегрални топамиз:

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C. \tag{8}$$

Дифференциаллар билан ёзилган

$$f_1(x)f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0 \tag{9}$$

---

* Агар $f_2(x)\equiv 0$ бўлса, (7) тенглама $y'=0$ кўринишда бўлиб, ечими $y\equiv C$ бўлади. Агар бирорта $y=\overline{y}$ қийматда $f_2(y)=0$ бўлса, $y=\overline{y}$ (7) нинг, (8) билан бирликда ечими бўлади, чунки бу ҳолда $y'=0$.

кўринишдаги дифференциал тенглама ҳам ўзгарувчилари ажраладиган тенглама дейилади, чунки $f_3(x)\, f_2(y)$ га бўлиш билан у (4) кўринишга келтирилади.

Унинг умумий интеграли:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}\,dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}\,dy=C. \qquad (10)$$

Агар $y|_{x=x_0}=y_0$ бошлангич шарт берилган бўлса, у ҳолда хусусий интегрални ё C ни аниқлаб ёки

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f_1(x)}{f_3(x)}\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{f_4(y)}{f_2(y)}\,dy=0$$

формуладан топиш мумкин [(3) тенгликка қаранг].

Ушбу

$$\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0$$

тенгламанинг умумий интегралини топайлик.

Тенгламанинг иккала томонини $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ кўпайтмага бўлиб, ўзгарувчилари ажралган

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу ердан умумий интегрални топамиз:

$$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin C.$$

Агар бу тенгликда синусларга ўтадиган бўлсак, умумий интегралнинг алгебраик шаклини ҳосил қиламиз:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

$\sqrt{1-y^2}$ га бўлишда $y=\pm1$ ечимни йўқотишимиз мумкинлигини қайд қиламиз. Бевосита текшириш $y=\pm1$ ҳақиқатан ҳам ечимлар эканлигини кўрсатади.

$y|_{x=0}=0$ бошлангич шарт C ни топишга имкон беради ($C=0$) ва

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=0$$

хусусий интегралга олиб келади.

Физикага доир мисоллар

Тўғри чизиқли ҳаракат тезлиги. Агар моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги куч таъсир этадиган чизиқ йўналишида бўлса, у ҳолда моддий нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли бўлади. Ҳаракат чизиғини Ox ўқ учун қабул қиламиз.

Ньютоннинг иккинчи қонунидан нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$m\frac{dv}{dt}=X, \tag{11}$$

бу ерда $\frac{dv}{dt}$ — тезланиш (v тезликнинг t вақт бўйича ҳосиласи). m — ҳаракатланаётган нуқта массаси, X — куч катталиги.

Бу тенглама, шунингдек, жисмнинг ҳамма нуқталари бирдай ҳаракатланадиган илгариланма ҳаракатни ҳам тавсифлайди ва шунинг учун жисм ҳаракатини унинг оғирлик марказига жойлашган моддий нуқтанинг ўша жисмнинг оғирлик марказига қўйилган куч таъсири остидаги ҳаракати деб қараш мумкин.

X куч t вақтнинг функцияси сифатида берилган бўлсин: $X=X(t)$, ҳаракатнинг $t=t_0$ даги бошланғич тезлиги $v=v_0$. (11) тенгламани интеграллаб, умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$v=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}X(\tau)\,d\tau+C.$$

Ихтиёрий C ўзгармасни $t=t_0$ да $v=v_0$ бошланғич шартдан аниқлаймиз: $v_0=C$, демак,

$$v=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}X(\tau)\,d\tau+v_0.$$

Бу ечимни қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$mv-mv_0=\int_{t_0}^{t}X(\tau)\,d\tau, \tag{12}$$

бу тенглик қуйидаги қонунни ифодалайди: нуқтанинг бирор чекли вақт оралиғидаги ҳаракат миқдорининг ўзгариши таъсир этувчи кучнинг шу вақт оралиғидаги импульсига тенг.

Агар X функция нуқтанинг координатаси x га боғлиқ, яъни $X=X(x)$ бўлса ва ҳаракат $x=x_0$ бошланғич кўчишдан бошланса, у ҳолда (11) тенгликнинг иккала томонини dx га кўпайтириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\frac{dv}{dt}dx=X(x)\,dx \tag{13}$$

ёки

$$mvdv = X(x)\,dx, \text{ чунки } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

Интеграллаб, топамиз:

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X(x)\,dx + C.$$

$x = x_0$ да $v = v_0$ бошланғич шартдан ихтиёрий C ўзгармасни аниқлаймиз:

$$\frac{mv_0^2}{2} = C,$$

шундай қилиб, хусусий интегрални қуйидаги кўринишда топамиз:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} X(x)\,dx. \tag{14}$$

Бу тенглик нуқтанинг $x - x_0$ масофага кўчишида унинг кинетик энергиясининг ўзгариши кучнинг шу участкада бажарган ишига тенг эканлигини кўрсатади. Бу муносабат куч кўчиш функцияси каби берилган ва нуқтанинг тезлигини ҳам кўчиш функцияси каби ифодалаш талаб қилинган ҳолларда жуда қулайдир.

Мисол. (Ўқнинг ҳаракати). Ўқ $v_0 = 400$ м/сек тезлик билан ҳаракатланиб, $h = 20$ см қалинликдаги деворни тешиб, ундан $v_1 = 100$ м/сек тезлик билан учиб чиқади. Деворнинг қаршилик кучи ўқнинг ҳаракат тезлиги квадратига пропорционал деб олиб, ўқнинг девор ичида ҳаракатланиш вақти T ни топинг.

Ечилиши. Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан ўқ ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \tag{15}$$

кўринишга эга (манфий ишора деворнинг қаршилик кучи ўқнинг тезлигига қарама-қарши йўналган бўлгани учун олинди).

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратиб ва $\frac{k}{m}$ ни k_1 орқали белгилаб,

$$\frac{dv}{v^2} = -k_1 dt$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$-\frac{1}{v} = -k_1t - C \quad \text{ёки} \quad \frac{1}{v} = k_1t + C.$$

$t=0$ да $v=v_0$ бошланғич шартдан $C=1/v_0$ ни аниқлаймиз; шунинг учун

$$\frac{1}{v} = k_1t + \frac{1}{v_0}. \tag{16}$$

Агар бу муносабатда $v=v_1$ деб олсак, $t=T$ бўлади ва, бинобарин, изланаётган T вақт

$$\frac{1}{v_1} = k_1T + \frac{1}{v_0}$$

тенгламадан топилади, бу ердан

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right). \tag{17}$$

T учун топилган ифодада номаълум k_1 катталик иштирок этяпти. Уни аниқлаш учун (16) умумий ечимни қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+k_1v_0t},$$

бу ерда v тезлик $\frac{dx}{dt}$ билан алмаштирилган. Бу тенгламадан интеграллаб топамиз:

$$x = \frac{1}{k_1}\ln(1+k_1v_0t) + C_1.$$

$t=0$ да $x=0$ (ўқ деворга киради) ва шунинг учун $C_1=0$; $t=T$ ва $X=h$ (ўқ девордан чиқаяпти), шунинг учун $h=\frac{1}{k_1}\ln(1+k_1v_0T)$.

(17) тенгликдан

$$v_1 = \frac{v_0}{1+k_1v_0T},$$

бу ердан $1+k_1v_0T=v_0/v_1$. Шунинг учун h нинг ифодаси ушбу кўринишда бўлади:

$$h = \frac{1}{k_1}\ln\frac{v_0}{v_1} \quad \text{ёки} \quad \frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v_1}}.$$

$1/k_1$ нинг топилган қийматини (17) ифодага қўйиб, изланаётган T вақтни топиш учун формула ҳосил қиламиз.

$$T = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v_1}} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right). \tag{18}$$

Сонли ҳисоблашларни бажариб ($v_0 = 400$ м/сек, $v_1 = 100$ м/сек, $h = 20$ см деб олиб), $T = 0{,}00108$ сек ни топамиз.

Реактив ҳаракат. Массалари ўзгарувчан жисмлар (масалан, ракеталар) ҳаракатини ўрганишда Ньютоннинг иккинчи қонунини қўлланиб бўлмайди, чунки у массалари ўзгармас жисмлар учунгина ўринлидир. Бундай ҳолда кучни тезланиш билан боғловчи бошқа тенглама қўлланилади.

Массаси m бўлган моддий нуқта вақтнинг t моментида $\mathbf{v}$ (абсолют) тезликка эга бўлсин. Δt вақт ичида унга йиғинди массаси Δm, қўшилгунга қадар тезлиги $\mathbf{u}$ бўлган зарралар қўшилади. $t + \Delta t$ моментда нуқта ва унга қўшилган зарралар $m + \Delta m$ масса ва $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ тезликка эга бўлади.

Системанинг t моментдаги ҳаракат миқдори

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v} + \mathbf{u}\Delta m$$

га тенг, $t + \Delta t$ моментда эса у

$$\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q} = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$$

га тенг бўлиб қолди.

Демак, бутун система ҳаракат миқдорининг Δt вақт ичида ўзгариши

$$\Delta\mathbf{Q} = m\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\Delta m + \Delta m\,\Delta\mathbf{v}$$

га тенг.

Тезлик каби масса ҳам вақтнинг узлуксиз ва дифференцалланувчи функцияси деб фараз қиламиз. Тенгликнинг иккала томонини Δt га бўламиз ва $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтамиз. Бунда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m\,\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = 0$$

эканлигини назарда тутиб,

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{dm}{dt}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Агар ўзгарувчан массали жисмга қўйилган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси

F га тенг бўлса, ҳаракат миқдори ҳақидаги теоремага кўра

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \qquad (19)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама *Мещерский тенгламаси* деб аталади.

$\frac{dm}{dt} > 0$ да нуқтанинг массаси ортишини (зарралар қўшилади), $\frac{dm}{dt} < 0$ да камайишини (зарралар ажралиб чиқади) қайд қилиб ўтамиз. $\frac{dm}{dt} = 0$ да нуқта массаси ўзгармас ва бу ҳолда Мещерский тенгламасидан Ньютоннинг иккинчи қонуни келиб чиқади.

Мещерский тенгламасига бошқача кўриниш бериш мумкин:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt}. \qquad (20)$$

Хусусан $\mathbf{u} = 0$ бўлганда

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}.$$

Агар қўшиладиган зарраларнинг (ҳаракатланаётган ўзгарувчан массали нуқтага нисбатан) нисбий тезлик вектори

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u}_0$$

ни киритадиган бўлсак, у ҳолда

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u}_0. \qquad (21)$$

Хусусан, $\mathbf{u}_0 = 0$ да яна Ньютоннинг иккинчи қонунини ҳосил қиламиз.

$\frac{dm}{dt} \mathbf{u}_0$ ни *реактив куч* деб аташга келишилган. Уни $\mathbf{R}$ орқали белгилайдиган бўлсак, Мещерский тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{R}. \qquad (22)$$

Ўзгарувчан массали нуқта ташқи кучлар бўлмаганда ҳам тезланиш билан ҳаракатлана олишини қайд қилайлик. $\mathbf{F} = 0$ бўлганда

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R}.$$

Реактив куч катталиги

$$|\mathbf{R}| = \left|\frac{dm}{dt}\right| |\mathbf{u}_0|$$

массанинг вақт бирлигида ўзгариши $\left|\frac{dm}{dt}\right|$ га *(«секунд массага»)* ва ажралиб чиқадиган ёки қўшиладиган зарраларнинг нисбий тезлигига пропорционалдир.

1-мисол. Бошланғич массаси M_0 бўлган ракета ундан ажралиб чиқаётган газларнинг узлуксиз жараёни таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Газларнинг ажралиб чиқиш тезлиги $\mathbf{u}_0$ (ракетага нисбатан) катталиги жиҳатдан ўзгармас ва ракетанинг бошланғич $\mathbf{v}_0$ тезлигига қарши томонга йўналган. Оғирлик кучи ва ҳаво қаршилигини ҳисобга олмасдан ракетанинг ҳаракат қонунини топинг *(ракетанинг бўшлиқда тўғри чизиқли ҳаракати ҳақида Циолковский масаласи).*

Ечилиши. (21) шаклдаги Мешерский тенгламасидан фойдаланиб ва Ox ўқни $\mathbf{v}_0$ бошланғич тезлик йўналишида танлаб, ракета ҳаракатининг шу ўқдаги проекцияси бўйича дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$M\frac{dv}{dt} = -u_0\frac{dM}{dt}. \tag{23}$$

Бу ерда $\frac{dM}{dt} = \mu$ — «секунд масса», ёнилғи массасининг ҳар бир секунддаги сарфи; ёнилғининг барқарор ёниш процессида $\mu = \text{const}$, M — ракетанинг ўзгарувчан массаси.

(23) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб,

$$dv = -u_0\frac{dM}{M}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$v = -u_0 \ln M + C.$$

Ихтиёрий C ўзгармасни $t = 0$ бўлганда $v = v_0$, $M = M_0$ бошланғич шартдан топамиз; у ҳолда $C = u_0 \ln M_0 + v_0$ ва шунинг учун

$$v = u_0 \ln\frac{M_0}{M} + v_0. \tag{24}$$

Бу формула биринчи бўлиб Циолковский томонидан топилган ва унинг номи билан юритилади *(Циолковский формуласи).*

Ракета ҳаракати тенгламасини топиш учун Циолковский формуласида v ни $\frac{dx}{dt}$ га алмаштирамиз; ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \ln \frac{M_0}{M} + v_0.$$

$t = 0$ да $x = 0$ деб, уни интеграллаймиз:

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{M} d\tau + v_0 t. \tag{25}$$

Агар ҳаракат бошлангандан бирор вақт ўтгач, $t = t_к$ моментда тезлик, масса ва босиб ўтилган йўл мос равишда $v = v_к$, $M = M_к$, $x = x_к$ га тенг бўлса, (24) ва (25) формулалар қуйидагича ёзилади:

$$v_к = u_0 \ln \frac{M_0}{M_к} + v_0, \tag{26}$$

$$x_к = u_0 \int_0^{t_к} \ln \frac{M_0}{M_к} d\tau + v_0 t_к, \tag{27}$$

бу ердан бундай хулосага келамиз: охирги тезлик массанинг ўзгариш қонунига боғлиқ бўлмасдан, балки ракетанинг бошланғич тезлиги v_0 га, газларнинг ажралиб чиқиш нисбий тезлиги u_0 га ҳамда охирги ва бошланғич массалар нисбати $M_к/M_0$ га боғлиқ, $x_к$ йўл эса массанинг ёнилғи ёниш тезлиги билан аниқланувчи ўзгариш қонунига боғлиқ.

Ракета массаси

$$M = M_0 (1 - \alpha t), \text{ бу ерда } \alpha = \text{const}, \ a > 0$$

чизиқли қонун бўйича ўзгаради деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$x = u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{M_0 (1 - \alpha\tau)} d\tau + v_0 t$$

ёки

$$x = - u_0 \int_0^t \ln (1 - \alpha\tau) d\tau + v_0 t.$$

Сўнгра

$$\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]$$

бўлгани учун

$$x = \frac{u_0}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]+v_0 t.$$

Агар ракета массаси

$$M = M_0 e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = \text{const},\ \lambda > 0$$

кўрсаткичли (экспоненциал) қонун бўйича ўзгаради деб фараз қилсак, у ҳолда

$$x = u_0 \int_0^t \ln\frac{M_0}{M_0 e^{-\lambda\tau}}\,d\tau + v_0 t \ \text{ ёки } \ x = u_0\lambda\int_0^t \tau\,d\tau + v_0 t,$$

бинобарин,

$$x = \frac{u_0\lambda t^2}{2} + v_0 t. \qquad (28)$$

Механика қонунларидан космик тезликларнинг катталикларини аниқлаш учун фойдаланиш мумкин. *Биринчи космик тезликни*, яъни ракета Ер атрофида йўлдош бўлиб доиравий орбита бўйича айланиши учун зарур бўлган v_1 тезликни аниқлаймиз. Бунинг учун ракетанинг марказдан қочма кучи Ернинг тортиш кучига тенг бўлиши керак; демак,

$$M_{\text{к}}\frac{v_1^2}{r} = M_{\text{к}} g,$$

бу ерда r — орбита радиуси, яъни Ер марказидан орбитада ҳаракат қилаётган йўлдошгача бўлган масофа, g — оғирлик кучи тезланиши. Агар r ни тақрибан Ер радиуси $R_{\text{Ер}}$ га тенг деб олсак, у ҳолда

$$v_1 = \sqrt{gr} \approx \sqrt{gR_{\text{Ер}}} \approx \sqrt{10\cdot 6400\,000} = 8 \text{ км/сек}.$$

Яна ҳам аниқроғи $v_1 = 7{,}93$ км/сек.

Орбита бўйлаб ҳаракат қилаётган йўлдош Ер сатҳидан анча узоқлашганда, яъни $r \gg R_{\text{Ер}}$ бўлганда баландлик ўзгариши билан оғирлик кучи тезланишининг ҳам ўзгаришини ҳисобга олиш керак. Тортишиш қонунидан келиб чиқадики, Ер марказидан r масофада бўлган M массали жисм Ерга $F = \gamma M M_{\text{Ер}}/r^2$ куч билан тортишади, бу ерда

$M_{\text{Ер}}$ — Ер массаси. Бироқ, иккинчи томондан, $F = Mg_r$ (бу ерда g_r — ер марказидан r масофада оғирлик кучи тезланиши) бўлгани учун $\gamma MM_{\text{Ер}}/r^2 = Mg_r$, бу ердан $g_r = \gamma M_{\text{Ер}}/r^2$. $r = R_{\text{Ер}}$ бўлганда $g_r = g$; демак, $g = \gamma M_{\text{Ер}}/R^2_{\text{Ер}}$, бу ердан $\gamma = gR^2_{\text{Ер}}/M_{\text{ер}}$, шунинг учун $g_r = gR^2_{\text{Ер}}/r^2$. Бундай ҳолда марказдан қочма кучнинг ва оғирлик кучининг тенглигидан:

$$M_{\text{к}}\frac{v_1^2}{r} = M_{\text{к}}\frac{gR^2_{\text{Ер}}}{r^2},$$

бу ердан

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2_{\text{Ер}}}{r}}.$$

Бу формуладан, r қанча катта бўлса, яъни йўлдош Ердан қанчалик кўп узоқлашган бўлса, йўлдошнинг тегишли орбитада айланиши учун зарур бўлган биринчи космик тезлик v_1 шунчалик кичик бўлиши келиб чиқади. Масалан, 10000 км ($r \approx 16400$ км) баландликда $v_1 \approx 5$ км/сек, 380 000 км (Ердан Ойгача бўлган тақрибий масофа) баландликда эса $v_1 = 1$ км/сек. Шундай қилиб, Ой Ерга қулаб тушмаслиги учун унинг тезлиги 1 км/сек бўлиши етарлидир.

Ракета Ернинг тортиш доирасидан чиқиб кета олиши учун у v_1 дан катта тезликка эга бўлиши керак. Бу тезлик *иккинчи космик тезлик* (ёки *Ернинг таъсир доирасидан чиқиб кетиш тезлиги*) дейилади ва v_2 орқали белгиланади. Уни ҳисоблайлик. Бунинг учун Ер марказидан r масофада бўлган ракетанинг $E_{\text{п}} = M_{\text{к}}g_r r$ потенциал энергиясини тезлиги v_2 бўлган ракетанинг $E_{\text{к}} = M_{\text{к}}v_2^2/2$ кинетик энергиясига тенглаймиз; натижада

$$M_{\text{к}}\frac{v_2^2}{2} = M_{\text{к}}g_r r,$$

бу ердан

$$v_2 = \sqrt{2g_r r} = \sqrt{2\frac{gR^2_{\text{Ер}}}{r}} = v_1\sqrt{2}.$$

Шундай қилиб, иккинчи космик тезлик биринчи космик тезликдан тахминан 1,4 марта катта. Шунинг учун Ер сиртида $v_2 \approx 11{,}2$ км/сек, 1000 км баландликда $v \approx 7$ км/сек. Ой Ернинг тортиш доирасидан чиқиб кетиши учун 1,4 км/сек тезликка эга бўлиши керак.

Йўлдошнинг Ой, Марс ва Венера атрофида доиравий, орбита бўйича айланиши учун зарур бўлган v_1 тезликни, шунингдек, унинг бу осмон жисмларидан чиқиб кетиши учун зарур бўлган v_2 тезликни ҳисоблаб топиш мумкин:

Ой учун: $v_1 \approx 1{,}7$ км/сек, $v_2 \approx 2{,}4$ км/сек;

Марс учун: $v_1 \approx 3{,}6$ км/сек, $v_2 \approx 5{,}1$ км/сек;

Венера учун: $v_1 \approx 7{,}3$ км/сек, $v_2 \approx 10{,}3$ км/сек.

2-мисол. Бошланғич массаси M_0 бўлган ракета ажралиб чиқувчи газларнинг тепки кучи таъсирида юқорига вертикал ҳаракат қиляпти. Ракетанинг M массаси t вақтга боғлиқ равишда $M = f(t)$ қонун (ёнилғи ёниш қонуни) бўйича ўзгаради. Газларнинг ажралиб чиқиш тезлиги (ракетага нисбатан) ўзгармас ва пастга йўналган бўлиб, u_0 га тенг. Агар ракетанинг Ер сатҳидаги бошланғич тезлиги v_0 га тенг бўлса, ракетанинг кўтарилиш баландлигини t вақтнинг функцияси сифатида топинг. Ҳаво қаршилигини ва оғирлик кучи тезланишининг ракета кўтарилиш баландлигига мос равишда ўзгаришини ҳисобга олманг *(оғирлик кучини ҳисобга олган ҳолда ракета ҳаракати ҳақида Циолковский масаласи).*

Ечилиши. Oy ўқни юқорига йўналтирамиз. У ҳолда ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишда ёзилади:

$$f(t)\frac{dv}{dt} = -u_0 f'(t) - gf(t), \tag{29}$$

бу ерда $f'(t) = \frac{dM}{dt}$ — «секунд масса».

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$dv = -gdt - u_0\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt,$$

бу ердан

$$v = -gt - u_0 \ln f(t) + C.$$

$t = 0$ да ракета массаси $M = f(0) = M_0$, тезлиги $v = v_0$ бўлади; шунинг учун $C = u_0 \ln M_0 + v_0$, демак,

$$v = -gt + u_0 \ln\frac{M_0}{f(t)} + v_0.$$

$v = \frac{dy}{dt}$, шунинг учун кейинги тенгликни ўзгарувчилари ажралган ушбу дифференциал тенглама кўринишида ёзиш мумкин:

$$dy = \left[-gt + u_0 \ln \frac{M_0}{f(t)} + v_0\right] dt,$$

бу ердан интеграллаб, топамиз:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{f(\tau)} d\tau + v_0 t + C_1.$$

$t = 0$ да кўтарилиш баландлиги $y = 0$; шунинг учун $C_1 = 0$, ва демак,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{f(\tau)} d\tau + v_0 t.$$

Хусусий ҳолда, ракета массаси $M = f(t) = M_0(1 - \alpha t)$, бу ерда $\alpha = \text{const}$, $\alpha > 0$, чизиқли қонун бўйича ўзгарганда қуйидагига эгамиз:

$$y = -\frac{gt^2}{2} - u_0 \int_0^t \ln(1 - \alpha\tau) d\tau + v_0 t,$$

бинобарин,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{u_0}{\alpha}[(1 - \alpha t)\ln(1 - \alpha t) + \alpha t] + v_0 t.$$

Агар сон қийматлар берадиган бўлсак, масалан, $v_0 = 0$, $u_0 = 2000$ м/сек ва $\alpha = \frac{1}{100}$ сек$^{-1}$ десак,

$$y = -\frac{gt^2}{2} + 2 \cdot 10^5 \left[\left(1 - \frac{t}{100}\right) \ln\left(1 - \frac{t}{100}\right) + \frac{t}{100}\right].$$

Бундай ҳолда ракета 10 сек дан кейин 0,54 км баландликка, 30 сек дан кейин 5,65 км га, 50 сек дан кейин эса 18,4 км га кўтарилади.

Ракета массаси $M = f(t) = M_0 e^{-\lambda t}$ (бу ерда $\lambda = \text{const}$, $\lambda > 0$) кўрсаткичли қонун бўйича ўзгарганда ҳам юқоридагига ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \int_0^t \ln \frac{M_0}{M_0 e^{-\lambda\tau}} d\tau + v_0 t = \frac{u_0\lambda - g}{2} t^2 + v_0 t.$$

Ракета ҳаракатининг бутун ёнилғининг ёниб тамом бўлиш моменти $t = t_к$ гача бўлган v тезлиги y дан t бўйича олинган ҳосилага тенг:

$$v = \frac{dy}{dt} = (u_0\lambda - g)t + v_0.$$

$t = t_к$ да, яъни бутун ёнилги запаси ёниб тамом бўлиш моментида

$$v = v_к = (u_0\lambda - g)\,t_к + v_0, \quad y = y_к = \frac{u_0\lambda - g}{2}\,t_к^2 + v_0 t_к$$

w тезланишни ҳисоблаймиз. Қуйидагига эгамиз:

$$w = \frac{d^2y}{dt^2} = u_0\lambda - g = \text{const}.$$

Бу ердан ракета ўзгармас тезланиш билан ҳаракат қилади деб хулоса чиқарамиз. $u_0\lambda - g < 0$ да ҳаракат текис секинланувчан, $u_0\lambda - g > 0$ да ҳаракат текис тезланувчан, $u_0\lambda - g = 0$ да эса ҳаракат текис бўлиб, v_0 тезликда бўлади.

$u_0\lambda - g < 0$ бўлган ҳолда $t = v_0/(g - u_0\lambda)$ да нуқта тезлиги нолга тенг бўлади, бу моментда ракета максимал $y_{\max}$ баландликка кўтарилади:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2\,(g - u_0\lambda)}.$$

Бутун ёнилғи ёниб тамом бўлгандан сўнг ракета ҳаракати

$$s = -\frac{gt^2}{2} + v_к\,t + y_к$$

қонун бўйича давом этади.

Ракетанинг $y = y_к$ баландликдан энг катта узоқлашиши $s_{\max}$ ни функциянинг $t = v_к/g$ стационар нуқтадаги максимуми сифатида топамиз:

$$s_{\max} = \frac{v_к^2}{2g} + y_к.$$

Ракетанинг Ер сатҳидан максимал баландликка кўтарилиши $y_{\max}$ ни

$$y_{\max} = s_{\max} + y_к = \frac{v_к^2}{2g} + 2y_к$$

формула бўйича топамиз.

$v_к$ ва $y_к$ ни уларнинг u_0, α ва $t_к$ орқали ифодалари билан алмаштириб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_{\max} = \frac{(u_0\lambda - g)^2 t_к^2}{2g} + (u_0\lambda - g) t_к^2 + 2v_0 t_к =$$

$$= \frac{1}{2g}(u_0^2\lambda^2 - g^2) t_к^2 + 2v_0 t_к.$$

3- мисол. Кўп босқичли ракетанинг у йўлдошни орбитага чиқариб қўйгандан кейинги $v_к$ тезлигини аниқланг. Бунда реактив жараённинг тезлиги ўзгармас ва унинг катталиги u_0 га; тезлик йўналишининг горизонтга нисбатан оғиш бурчаги $\vartheta(t)$ га, аэродинамик қаршилик $X(t)$ га тенг.

Ечилиши. Агар ракетанинг вақтга боғлиқ бўлган жами массасини $G(t)$ орқали белгиласак, ракета массасининг ўзгариш тезлиги (ёнилғининг масса сарфи) $-\frac{dG}{dt}$ га, реактив тортиш эса

$$P = -\frac{u_0}{g_0} \cdot \frac{dG}{dt}$$

га тенг бўлади, бу ерда g_0 — Ер сатҳида оғирлик кучи тезланиши (h баландликдаги тезланишни g_h орқали белгилаймиз).

Оғирлик кучи ва тезлик (атака бурчаги) йўналишларининг бир хилда эмаслиги натижасида ракета тезлигининг камайиши жуда ҳам кичик бўлганлиги учун уни эътиборга олмаслик мумкин, натижада ракета ҳаракатининг унинг траекториясига уринмасидаги проекциясининг дифференциал тенгламасини

$$\frac{G}{g_0}\frac{dv}{dt} = P - X - \frac{G}{g_0} g_h \sin\vartheta$$

кўринишида ёки p ни унинг t орқали ифодаси билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала томонини G/g_0 га бўлиб

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{u_0}{G}\frac{dG}{dt} - g_0\frac{X}{G} - g_h \sin\vartheta \tag{30}$$

кўринишида ҳосил қиламиз.

Старт моменти $t = 0$ да ракета тезлиги $v = 0$ (бошланғич шарт), ракета йўлдошини орбитага чиқаргандан кейинги $t = t_к$ вақт моментида ракета тезлиги $v = v_к$. Шунинг учун t бўйича интеграллашдан ва бу қийматларни қўйиб чиққандан сўнг изланаётган тезликни ҳосил қиламиз:

$$v_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{n} u_i \ln \frac{G_{0i}}{G_{\text{к}i}} - g_0 \int_0^{t_{\text{к}}} \frac{X}{G}\, dt - \int_0^{t_{\text{к}}} g_h \sin \vartheta \, dt, \qquad (31)$$

бу ерда n — ракета босқичлари сони, u_i, G_{0i}, $G_{\text{к}i}$ — мос равишда оқим тезлиги, ҳар қайси айрим босқич учун бошлангич ва охирги массалар.

(31) формулада ўнг томондаги биринчи ҳад Циолковский формуласига мос келади ва ракетанинг *характеристик тезлигини*, яъни ракетага ташқи кучлар таъсир этмагандаги тезлигини англатади. Формуланинг ўнг томонидаги иккинчи ва учинчи ҳадлар мос равишда аэродинамик қаршилик кучларини енгишда йўқотилган тезликни ва оғирлик кучларининг таъсири туфайли йўқотилган тезликни англатади.

Радиоактив емирилиш. Баъзи элементлар атомларининг ядролари альфа-, бета- ва гамма- нурлар чиқариб бошқа элементлар ядроларига ўз-ўзидан айланиши *радиоактив емирилиш* дейилади. Радиоактив емирилиш статистик характерга эга: атомларнинг ядролари ҳаммаси бирданига емирилмай, балки изотопнинг бутун мавжуд бўлиш даврида емирилади. Бунда бирлик вақт ичида емириладиган атомлар сони ҳар бир изотоп учун ўзгармас бўлиб, унинг емирилмаган атомлари миқдорининг бирор қисмини ташкил этиши аниқланган. Бу катталик (қисм) *емирилиш доимийси* дейилади ва λ ҳарфи билан белгиланади.

Шундай қилиб, dt вақт давомида емирилган dN атомлар сони $\lambda N dt$ га тенг, бу ерда N сон t вақт моментида емирилмай қолган атомлар сонидир. Натижада ушбу дифференциал тенгламага эга бўламиз:*

$$dN = -\lambda N dt. \qquad (32)$$

Манфий ишора емирилмаган атомлар сони N вақт ўтиши билан камайишини кўрсатади.

Ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг,

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt,$$

---

* Биз бу ерда функция орттирмасини дифференциал билан алмаштиряпмиз, яъни тартиби dt дан юқори бўлган чексиз кичик миқдорларни ташлаб юборамиз (6- § га қ.).

буни интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\ln N = -\lambda t + \ln C \text{ ёки } N = Ce^{-\lambda t}.$$

Агар атомларнинг дастлабки сони N_0($t = 0$ да $N = N_0$) маълум бўлса, ихтиёрий ўзгармас (интеграллаш доимийси) C ни аниқлаш мумкин: $N_0 = C$, ва бинобарин,

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (33)$$

Изотоп атомлари миқдорининг ярми емирилиши учун керак бўлган T вақт шу изотопнинг *ярим емирилиш даври* дейилади. Турли изотоплар учун ярим емирилиш даври турлича. Масалан, радий учун $T = 1590$ йил, уран учун $T = 4{,}6$ млрд. йил, радиоактив кобальт (Co^{60}) учун $T = 5{,}3$ йил, радон учун $T = 3{,}82$ сутка.

T ва λ орасида осонгина топиш мумкин бўлган боғланиш бор. Вақтнинг $t = T$ моменти учун $N = N_0/2$, ва демак,

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

бу ердан $e^{-\lambda T} = 1/2$ ва $T = (\ln 2)/\lambda \approx 0{,}693/\lambda$, сўнгра

$$\lambda = (\ln 2)/T \approx 0{,}693T.$$

Бу N ни λ орқали эмас, балки T орқали ифодалашга имкон беради, чунончи

$$N = N_0 e^{(-t \ln 2)/T}.$$

Масалан, ярим емирилиш даври $T = 1590$ йил бўлган радий учун:

$$N = N_0 e^{-(t \ln 2)/1590} = N_0 e^{0{,}00044t}.$$

Бу формуладан атомнинг, айтайлик, 200 йил ичида қанча қисми емирилишини аниқлаш мумкин; $t = 200$ десак, 200 йилдан кейин $N|_{t=200} = N_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915 N_0$ та атом қолишини, яъни бу вақт давомида бор бўлган атомларнинг 8,5% и емирилишини кўрамиз.

Изотопнинг радиоактив емирилиш тезлиги бу изотопнинг (ёки унинг препаратининг) *активлиги* дейилади. a активлик $a = \left|\frac{dN}{dt}\right|$ га, ёки (32) дифференциал тенглама ва унинг ечимига кўра ушбуга тенг:

$$a = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активлик ярим емирилиш даври орқали

$$a = \frac{N \ln 2}{T} = \frac{0,693N}{T}$$

формула билан ифодаланади.

Агар $a_0 = \lambda N_0$ препаратнинг бошланғич моментдаги активлиги бўлса, у ҳолда

$$a = a_0 e^{-\lambda t}.$$

Радиоактив модда битта атомининг ўртача яшаш даврини ҳисоблаймиз. t вақт ичида сақланган ва кейинги dt вақт оралиғи ичида емирилган атомлар сони dN қуйидагига тенг:

$$-dN = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

Бу атомлар t га тенг бўлган ўртача яшаш даврига эга. Битта атомнинг ўртача яшаш даврини топиш учун dN ни t га кўпайтириб, t бўйича 0 дан ∞ гача интеграллаш ва атомларнинг бошланғич сони N_0 га бўлиш керак:

$$\vartheta = \frac{\int\limits_0^\infty \lambda N_0 t e^{-\lambda t} dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}.$$

Масалан, радон ($T = 3,82$ сутка) учун атомнинг ўртача яшаш даври $\vartheta = 5,552$ суткага тенг.

Химиявий реакция. Агар химиявий реакцияда A ва B модданинг ҳар бири ўтадиган C модданинг миқдори x бўлса, у ҳолда ўзгармас температурада ва бошқа баъзи шартлар бажарилганда реакция тезлиги $\frac{dx}{dt}$ қуйидагиларга пропорционал деб ҳисобланади:

1) A модда C моддага ўтганда — A модданинг қолган миқдорига; бунда ушбу дифференциал тенглама келиб чиқади: $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, бу ерда a билан A модданинг бошланғич миқдори белгиланган, k — пропорционаллик коэффициенти, $k > 0$;

2) A ва B моддалар C моддага ўтганда тегишли массалар кўпайтмасига пропорционал бўлади, бу ердан ушбу дифференциал тенглама келиб чиқади:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x),$$

бу ерда a ва b лар A ва B моддаларнинг бошланғич миқдори, k пропорционаллик коэффициенти, $k>0$.

Ҳар иккала ҳол учун x нинг t вақтга боғланишини топамиз. Тузилган дифференциал тенгламалар ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалардир. Иккала ҳолда ҳам бир хил бошланғич шартга эгамиз:

$$t=0 \text{ да } x=0.$$

Биринчи ҳолда ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг $\frac{dx}{x-a}=-kdt$ тенгламани ҳосил қиламиз, бу тенгламанинг умумий ечими: $x=a+Ce^{-kt}$. Бошланғич шартдан $C=-a$ ни топамиз бинобарин, хусусий ечим $x=a(1-e^{-kt})$ кўринишга эга бўлади. Бу ечимдан $t\to\infty$ да $x\to a$ эканлиги келиб чиқади.

Иккинчи ҳолда ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)}=kdt.$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

эканлигини эътиборга олиб, интеграллагандан сўнг

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{x-a}{x-b}=-kt+\frac{1}{b-a}\ln C$$

умумий интегрални ёки баъзи ўзгартиришлардан сўнг

$$\frac{x-a}{x-b}+Ce^{-k(b-a)t}$$

ни ҳосил қиламиз.

Бошланғич шартдан $C=a/b$ ни топамиз, яъни

$$\frac{x-a}{x-b}=\frac{a}{b}e^{-k(b-a)t}. \tag{34}$$

Бу ердан хусусий ечимни ҳосил қиламиз:

$$x=ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}.$$

Фараз қилайлик, $b>a$, яъни B модданинг бошланғич миқдори A модданинг бошланғич миқдоридан ортиқ бўлсин; у ҳолда бу ечимдан $t\to\infty$ да $x\to a$ эканлиги келиб чиқади.

Агар аксини фараз қилсак, яъни $a > b$ десак, (34) тенгликни

$$\frac{x-b}{x-a} = \frac{b}{a} e^{-k(a-b)t}$$

кўринишда қайта ёзиб олиб, $t \to \infty$ да $x \to b$ деган хулосага келамиз.

Худди шу натижанинг ўзини хусусий ечимдан, уни

$$x = ab \frac{e^{-k(a-b)t} - 1}{be^{-k(a-b)t} - a}$$

шаклда ёзиб олиб ҳам ҳосил қилишимиз мумкин эди.

Суюқликнинг идишдан оқиб чиқиши. Фараз қилайлик, кўндаланг кесим юзи S баландлик h нинг маълум $S = S(h)$ функцияси бўлган идиш H сатҳгача суюқлик билан тўлдирилган бўлсин. Идиш тубида юзи ω бўлган тешик бўлиб, ундан суюқлик оқиб чиқади. Суюқлик сатҳи дастлабки H ҳолатдан исталган h гача пасайиш вақти t ни ва идишнинг тўла бўшаш вақти T ни аниқлаймиз. Бунда идишдаги суюқлик миқдори (ҳажми) нинг ўзгариш тезлиги v идишдаги суюқлик сатҳи h нинг (босимнинг) маълум $v = v(h)$ функцияси деб фараз қиламиз.

Бирор вақт моменти t да идишдаги суюқлик баландлиги h га тенг бўлсин. t дан $t + dt$ гача бўлган dt вақт оралиғида идишдан оқиб чиқадиган суюқлик миқдори dV ни асосининг юзи ω, баландлиги $v(h)$ бўлган цилиндр ҳажми сифатида ҳисоблаб чиқиш мумкин. Шундай қилиб,

$$dV = \omega v(h)\, dt.$$

Суюқликнинг ана шу ҳажмини бошқа усул билан ҳам ҳисоблаш мумкин. Суюқлик оқиб чиққанлиги сабабли идишдаги суюқликнинг h сатҳи dh катталикка пасаяди, демак, $dV = -S(h)\, dh$ ($dh < 0$ бўлгани учун манфий ишора олинди). dV учун иккала ифодани бир-бирига тенглаб, ушбу дифференциал тенгламани тузамиз:

$$\omega v(h)\, dt = -S(h) dh. \qquad (35)$$

Ўзгарувчиларни ажратиб, топамиз:

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega v(h)} dh,$$

бу ердан

$$t = -\frac{1}{\omega} \int_H^h \frac{S(h)}{v(h)} dh = \frac{1}{\omega} \int_h^H \frac{S(h)}{v(h)} dh.$$

Идиш тамоман бўшаганда $h=0$, шу сабабли идишнинг тўла бўшаш вақти T ушбу формула бўйича топилади:

$$T=\frac{1}{\omega}\int_0^H \frac{S(h)}{v(h)}\,dh.$$

Агар суюқлик кичик тешикдан ёки қисқа найчадан оқиб чиқаётган бўлса, у ҳолда Торичелли қонунига мувофиқ, $v=\mu\sqrt{2gh}$, бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши, μ — эмпирик коэффициент (сарф бўлиш коэффициенти). Бу ҳолда ҳосил қилинган формулалар қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$t=\frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_h^H\frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh,\qquad T=\frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{S(h)}{\sqrt{h}}\,dh. \tag{36}$$

Бу формулаларни татбиқ қилишга доир конкрет мисоллар қараб чиқамиз.

1-мисол. Диаметри D, баландлиги H бўлган вертикал ўқли доиравий цилиндрик бак сув билан тўлдирилган. Бак тубидаги a диаметрли доиравий тешик орқали бакнинг тўла бўшаш вақтини аниқланг (6-расм).

Ечилиши. Бу ҳолда кўндаланг кесим юзи $S(h)$ ўзгармас ва $\pi D^2/4$ га тенг. Худди шунга ўхшаш, тешик юзи $\pi a^2/4$ га тенг. Демак,

$$T=\frac{D^2}{a^2\mu\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{dh}{\sqrt{h}}=\frac{2D^2\sqrt{H}}{a^2\mu\sqrt{2g}}.$$

Хусусан, $D=1{,}0$ м, $H=1{,}5$ м, $a=0{,}05$ м бўлганда ва сарф бўлиш коэффициенти $\mu=0{,}62$ (сув учун) деб олинса,

$$T=\frac{2\cdot 1{,}0^2\cdot\sqrt{1{,}5}}{0{,}05^2\cdot 0{,}62\cdot\sqrt{19{,}62}}=356\text{ сек}=5\text{ мин }\ 56\text{ сек}$$

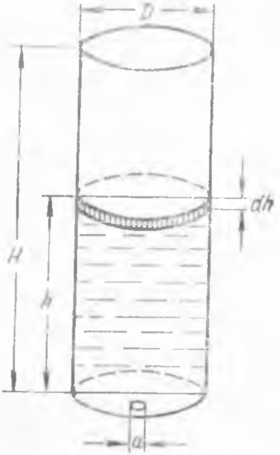
ни ҳосил қиламиз.

2-мисол. Узунлиги L ва диаметри D бўлган темир йўл цистернаси керосин билан тўлдирилган. Керосин цистерна остида жойлашган ва кесим юзи ω бўлган қисқа чиқиш найчаси (жўмраги) орқали оқизиб юборилганда, цистерна қанча вақтда бўшашини аниқланг (7-расм).

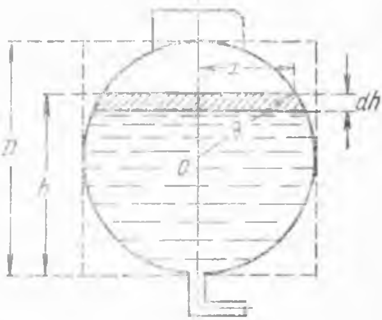
Ечилиши. Нефть маҳсулоти сатҳининг юзи $S(h)$ ўзгарувчан катталик бўлиб, қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$S(h)=2x\,L=2L\sqrt{R^2-(h-R^2)}=$$
$$=2L\sqrt{(D-h)\,h},$$

шу сабабли



6- расм.



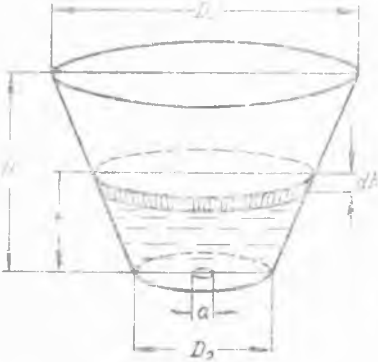
7- расм.

$$T=\frac{2L}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_0^D\frac{\sqrt{(D-h)h}}{\sqrt{h}}\,dh=\frac{4LD\sqrt{D}}{3\omega\mu\sqrt{2g}}.$$

Хусусан, $L=12$ м, $D=2,6$ м, $\omega=0,01$ м^2 ва сарф бўлиш коэффициенти $\mu=0,6$ (керосин) бўлса,

$$T=\frac{4\cdot 12\cdot 2,6\sqrt{2,6}}{3\cdot 0,01\cdot 0,6\sqrt{19,62}}=2520\ \text{сек}=42\ \text{мин}.$$

3-мисол. Устки (катта) асосининг диаметри D_1, пастки асосининг диаметри D_2, баландлиги H бўлган коник резервуар сув билан тўлдирилган. Сув резервуар тубидаги a диаметрли тешик орқали оқизиб юборилганда резервуар қанча вақтда бўшашини аниқланг (8-расм).



8- расм.

Ечилиши. Конуснинг горизонтал кесим юзи: $S(h) = \frac{\pi}{4}\left[D_2 + (D_1 - D_2)\frac{h}{H}\right]^2$, шу сабабли

$$T = \frac{1}{a^2 \mu \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{\left[D_2 + (D_1 - D_2)\frac{h}{H}\right]^2}{\sqrt{h}} dh =$$
$$= \frac{2\sqrt{H}}{15a^2 \mu \sqrt{2g}} (3D_1^2 + 4D_1D_2 + 8D_2^2).$$

Хусусан, $D_1 = 0{,}8$ м, $D_2 = 0\ 3$ м, $H = 1$ м, $a = 0{,}03$ м ва $\mu = 0{,}62$ (сув) бўлганда

$$T = \frac{2(3\cdot 0{,}8^2 + 4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 8\cdot 0{,}3^2)}{15\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}62\sqrt{19{,}62}} = 194 \text{ сек} = 3 \text{ мин } 14 \text{ сек}.$$

Агар суюқлик оқиб чиқадиган тешик юзи вақтга боғлиқ, яъни $\omega = \omega(t)$ бўлса, у ҳолда (35) дифференциал тенглама ўзгарувчиларни ажратгандан сўнг ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\omega(t)dt = -\frac{S(h)}{v(h)} dh, \tag{37}$$

бунинг интеграли эса:

$$\int_0^t \omega(t)\, dt = -\int_H^h \frac{S(h)}{v(h)} dh. \tag{38}$$

4-мисол. Сув билан тўлдирилган вертикал ўқли цилиндрик идиш тубида диафрагма билан беркитилган (фотоаппарат объективидаги каби) ω_0(см^2) юзли кичик тешик бор. Бошланғич моментда диафрагма очила бошлайди, бунда ҳосил бўлган тешик юзи ω (см^2) вақтга пропорционал: $\omega = kt$; диафрагма τ (сек) дан сўнг тўла очилади. Диафрагма тўла очилганда идишдаги сув баландлиги h_1 ни аниқланг. Цилиндрнинг баландлиги H (см), асос юзи S(см^2).

Ечилиши. Масала шартига кўра $t = \tau$ да $\omega = \omega_0$. Демак, $\omega_0 = k\tau$, бу ердан $k = \omega_0/\tau$ ва шунинг учун $\omega = \omega_0 t/\tau$.

ω нинг қийматини (38) интегралга қўйиб, топамиз:

$$\frac{\omega_0}{\tau}\int_0^t t dt = -\frac{S}{\mu\sqrt{2g}} \int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}},$$

бу ердан

$$\frac{\omega_0}{2\tau} t^2 = \frac{2S}{\mu\sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

$t = \tau$ да сув сатҳи баландлиги $h = h_1$. Шу сабабли

$$\frac{\omega_0\tau_0\mu\sqrt{2g}}{4S} = \sqrt{H} - \sqrt{h_1},$$

$$h_1 = \left(\sqrt{H} - \frac{\omega_0\tau\mu\sqrt{2g}}{4S}\right)^2 \text{ (см)}.$$

Айтайлик, идишдан суюқлик оқиб чиқиб кетиши билан бир вақтда вақт бирлигида q миқдорда (ҳажм бирлигида) доимий равишда суюқлик идишга келиб турсин. У ҳолда dt вақт давомида идишдаги суюқлиқнинг умумий камайиши dV чиқиб кетувчи суюқлик миқдори $\omega\, v(h)dt$ ва келиб қуюлувчи суюқлик миқдори qdt нинг айирмасига тенг, яъни

$$dV = [\omega\, v(h) - q]\, dt.$$

Шу сабабли дифференциал тенглама ушбу кўринишга эга бўлади:

$$[\omega\, v(h) - q]\, dt = -S(h)\, dt. \tag{39}$$

Суюқлик сатҳининг H дан h гача пасайиш вақти t ушбу тенгламанинг интеграли орқали ифодаланади:

$$t = \int_h^H \frac{S(h)}{\omega\, v(h) - q}\, dh. \tag{40}$$

Агар қуйиладиган сув миқдори q ни оқиб кетадиган сувнинг ўзгармас H^* босими орқали ифодаласак: $q = \mu\omega\sqrt{2gH^*}$, у ҳолда

$$t = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h} - \sqrt{H^*}}\, dh.$$

Призматик (ёки цилиндрик) резервуар учун $[S(h) = S = \text{const}]$

$$t = \frac{2S}{\omega\mu\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H^*}\ln\frac{\sqrt{H} - \sqrt{H^*}}{\sqrt{h} - \sqrt{H^*}} + \sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

Қовушоқлиги катта бўлган суюқлик чиқиш трубаси орқали оқиб чиқаётганда ламинар оқим кузатилиши мумкин, бунда оқиб чиқиш тезлиги босимга пропорционал, яъни $v = kh$ бўлади. Ингичка узун труба орқали суюқлик оқиши ҳам ана шундай қонун бўйича содир бўлади,

v нинг бу қийматини (35) га қўйиб, дифференциал тенглама

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega k h}\, dt. \tag{41}$$

кўринишга, интеграли эса

$$t = \frac{1}{\omega k} \int_{h}^{H} \frac{S(h)}{h}\, dh$$

кўринишга келишини кўрамиз. Хусусан, $S(h) = S = \text{const}$ бўлган призматик (ёки цилиндрик) идиш учун

$$t = \frac{S}{\omega k} \ln \frac{H}{h}.$$

Бошқа мисоллар. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларга олиб келадиган яна бир неча масалани кўриб чиқамиз.

1-мисол. (Жисмнинг совиши.) Массаси m, иссиқлик сиғими c ўзгармас бўлган жисм бошланғич моментда ϑ_0 температурага эга бўлсин. Атроф муҳит температураси ўзгармас ва $\vartheta(\vartheta_0 > \vartheta_м)$ га тенг. Жисмнинг чексиз кичик dt вақт ичида берган иссиқлиги жисм ва унинг атрофидаги муҳит температуралари орасидаги фарққа, шунингдек, вақтга пропорционал эканлигини (Ньютон қонуни) эътиборга олган ҳолда жисмнинг совиш қонунини топинг.

Ечилиши. Совиш давомида жисм температураси ϑ_0 дан $\vartheta_м$ гача пасаяди. Вақтнинг t моментида жисм температураси ϑ га тенг бўлсин. Чексиз кичик dt вақт оралиғида жисм берган иссиқлик миқдори юқорида айтилгачига кўра

$$dQ = -\alpha(\vartheta - \vartheta_м)\, dt$$

га тенг, бу ерда $\alpha = \text{const}$ — пропорционаллик коэффициенти.

Иккинчи томондан, жисм ϑ температурадан $\vartheta_м$ температурагача совиганда берадиган иссиқлик миқдори Q ушбуга тенг: $Q = mc(\vartheta - \vartheta_м)$, демак,

$$dQ = mc\, d\vartheta.$$

dQ учун топилган ҳар иккала ифодани таққослаб,

$$mc\, d\vartheta = -\alpha(\vartheta - \vartheta_м)\, dt \tag{42}$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратиш бу тенгламани ушбу кўринишга келтиради:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_м} = -\frac{\alpha}{mc}\,dt.$$

Буни интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\ln(\vartheta - \vartheta_м) = -\frac{\alpha}{mc}t + \ln C \quad \text{ёки} \quad \vartheta - \vartheta_м = Ce^{-\alpha t/(mc)}.$$

Бошланғич шарт ($t = 0$ да $\vartheta = \vartheta_0$) C ни топишга имкон беради:

$$C = \vartheta_0 - \vartheta_м,$$

шунинг учун жисмнинг совиш қонуни (хусусий ечим) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\vartheta = \vartheta_м + (\vartheta_0 - \vartheta_м)\,e^{-\alpha t/(mc)}. \qquad (43)$$

α коэффициент ё бевосита берилган, ёки қўшимча шарт, масалан, $t = t_1$ да $\vartheta = \vartheta_1$ орқали берилиши керак. Бундай ҳолда қуйидагига эгамиз:

$$\vartheta_1 - \vartheta_м = (\vartheta_0 - \vartheta_м)\,e^{-\alpha t_1/mc},$$

бундан

$$e^{-\alpha/(mc)} = \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_м}{\vartheta_0 - \vartheta_м}\right)^{1/t_1}.$$

Демак,

$$\vartheta = \vartheta_м + (\vartheta_0 - \vartheta_м)\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_м}{\vartheta_0 - \vartheta_м}\right)^{t/t_1}.$$

Сонли мисол келтирамиз. Агар муҳит температураси $\vartheta_м = 20°C$ бўлса ва $t_1 = 10$ мин ичида жисм $\vartheta_0 = 100°C$ дан $\vartheta_1 = 60°C$ гача совиса, у ҳолда

$$\vartheta = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/10}.$$

Айтайлик, жисм температураси қанча вақт ичида 25°C гача пасайишини топиш керак бўлсин. Формулада $\vartheta = 25$ деб олиб, $25 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/10}$ ни ёки $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $t = 40$ мин.

2-мисол. (қуйманинг қизиши). Температураси ϑ_a бўлган пўлат қуймани прокатка қилишдан аввал температураси бир соат ичида ϑ_a дан ϑ_b гача бир текис ортадиган печь ичига жойланади. Агар печь ва қуйма температуралари фарқи T бўлганда қуйма kT град/мин тезлик билан қизиса, унинг қизиш қонунини топинг.

Ечилиши. Печнинг вақтнинг t моментидаги температурасини θ орқали белгилаймиз. У ҳолда қуйманинг ϑ температураси $\vartheta = \theta - T$ фарққа тенг бўлади. Масала шартидан печь температурасининг ўзгариш қонуни $\theta = At + B$ ни топамиз, бу ерда A ва B доимийлар $\theta|_{t=0} = \vartheta_a$, $\vartheta|_{t=60} = \vartheta_b$ шартлардан аниқланади, улар мос ҳолда $A = (\vartheta_b - \vartheta_a)/60$ ва $B = \vartheta_a$ га тенг.

Масаланинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d\vartheta}{dt} = kT$$

кўринишда бўлади. Сўнгра

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta - T) = \frac{d}{dt}(At + B - T) = A - \frac{dT}{dt}$$

бўлгани учун юқоридаги тенглама

$$A - \frac{dT}{dt} = kT \quad \text{ёки} \quad \frac{dT}{dt} + kT - A = 0$$

кўринишга келади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама. Унинг умумий интеграли:

$$\frac{1}{k}\ln(kT - A) + t = \frac{1}{k}\ln C \quad \text{ёки} \quad kT - A = Ce^{-kt}.$$

$T|_{t=0} = 0$ бошланғич шартдан $C = -A$ ни топамиз, демак, $T = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt})$. $T = \theta - \vartheta = At + B - \vartheta$ алмаштириш бажариб,

$$\vartheta = At + B - \frac{A}{k}(1 - e^{-kt})$$

ёки

$$\vartheta = \vartheta_a - \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{60k}(1 - e^{-kt} - kt)$$

ни ҳосил қиламиз.

Қуйманинг бир соатдан кейинги, яъни $t = 60$ мин даги температурасини топамиз:

$$\vartheta|_{t=60} = \vartheta_a - \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{60k}(1 - e^{-60k} - 60k) = \vartheta_b -$$

$$- \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{60k}(1 - e^{-60k}).$$

3-мисол. (Ёруғликнинг сув орқали ўтишида ютилиши.) Ёруғлик оқимининг юпқа сув қатлами томонидан ютилиши қатлам қалинлигига ва қатлам сиртига тушаётган оқимга пропорционалдир. 2 м ли қатламдан ўтишда дастлабки ёруғлик оқимининг $^1/_3$ қисми ютилишини билган ҳолда унинг неча проценти 12 м чуқурликка етиб боришини аниқланг.

Ечилиши. h чуқурликдаги сиртга тушаётган ёруғлик оқимини Q орқали белгилайлик. Қалинлиги dh бўлган сув қатламидан ўтишда ютилган ёруғлик оқими dQ ушбуга тенг бўлади:

$$dQ = -kQ\,dh, \tag{44}$$

бу ерда $k\,(k > 0)$ — пропорционаллик коэффициенти.

Бу дифференциал тенгламанинг умумий ечими: $Q = Ce^{-kh}$. Дастлабки ёруғлик оқими Q_0 га тенг бўлсин. У ҳолда $h = 0$ да $Q = Q_0$ лигидан (бошланғич шарт) $C = Q_0$ ни топамиз, шу сабабли

$$Q = Q_0\,e^{-kh}\,.$$

Масала шартига кўра $h = 2$ да $Q = 2\,Q_0/3$, шунинг учун $\frac{2}{3}\,Q_0 = Q_0\,(e^{-k})^2$, бу ердан $e^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$ ва

$$Q = Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^{h/2}.$$

$h = 12$ м чуқурликка

$$Q_1 = Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0{,}0878\,Q_0$$

га тенг бўлган Q_1 ёруғлик оқими етиб боради, бу дастлабки ёруғлик оқими Q_0 нинг 8,78 % ини ташкил этади.

4-мисол. (Газнинг ионланиши.) Ўзгармас (доимий) нурланиш таъсирида газли муҳитда *ионланиш* процесси рўй беради, унда бир секунд ичида берилган ҳажмдаги газда q та мусбат ва шунча манфий ион ҳосил бўлади. Мусбат ва манфий ионлар яна ўзаро бирлашганликлари (ионларнинг рекомбинацияси) учун уларнинг миқдори камая боради.

n та мусбат ионнинг умумий миқдоридан ҳар секундда уларнинг миқдори квадратига пропорционал бўлган қисми бирлашишини назарда тутиб, ионлар миқдори n нинг t вақтга боғланишини топинг (пропорционаллик коэффициенти $\alpha = \text{const}$ газнинг табиати ва ҳолатига боғлиқ).

Ечилиши. Ионланиш процессининг

$$dn = qdt - \alpha n^2 dt \qquad (45)$$

дифференциал тенгламаси бевосита масала шартидан ҳосил бўлади.

Ўзгарувчиларни ажратиш тенгламани

$$\frac{1}{\alpha}\frac{dn}{n^2 - q/\alpha} + dt = 0$$

кўринишга келтиради. (45) тенгламанинг умумий интеграли:

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha q}}\ln\frac{n-\sqrt{q/\alpha}}{n+\sqrt{q/\alpha}} + t = \frac{1}{2\sqrt{\alpha q}}\ln C,$$

бу ердан

$$\frac{n-\sqrt{q/\alpha}}{n+\sqrt{q/\alpha}} = Ce^{-2\sqrt{\alpha q}t}$$

ёки

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}\,\frac{e^{\sqrt{\alpha q}\,t} + Ce^{-\sqrt{\alpha q}\,t}}{e^{\sqrt{\alpha q}\,t} - Ce^{-\sqrt{\alpha q}\,t}}.$$

$t = 0$ да $n = 0$ бўлганлигидан $C = -1$ ва ионлар сонининг вақтга боғланишини аниқловчи хусусий ечим ушбу кўринишни олади:

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}\,\mathrm{th}\,(\sqrt{\alpha q}).$$

5-мисол. (Цехни вентиляциялаш.) Сиғими 10800 м³ бўлган цехдаги ҳаводa 0,12 % карбонат ангидрид гази бор. Вентиляторлар таркибида 0,04 % карбонат ангидрид бўлган тоза ҳавони *a* м³/мин миқдорда бериб туради. Карбонат ангидриднинг концентрацияси цехни ҳамма қисмида вақтнинг ҳар қайси моментида бир хил деб ҳисоблаб (тоза ҳавонинг ифлосланган ҳаво билан қўшилиши жуда тез бўлади), 10 мин дан сўнг карбонат ангидрид 0,06 % дан ошмаслиги учун вентиляторларнинг қуввати қандай бўлишини топинг.

Ечилиши. Вақтнинг t моментида ҳаводаги карбонат ангидрид миқдорини $x(\ \%)$орқали белгилаймиз. t моментдан бошлаб ўтган dt вақт оралиғи учун цехдаги карбонат ангидрид балансини тузамиз. Шу вақт ичида вентиляторлар 0,0004 adt $м^3$ карбонат ангидрид олиб кирган бўлса, цехдан 0,01 $xadt$ м³ карбонат ангидрид чиқиб кетди. Бинобарин, dt мин ичида ҳаводаги карбонат ангидрид $dq = (0{,}01\,x - 0{,}0004)\,a\,dt$ м³ камайди. Ҳаводаги карбонат ангидрид миқдорини процентларда камайишини dx орқали белгиласак, бу миқдорни бошқа йўл билан

$$dq = -10800 \cdot 0{,}01\,dx \text{ м}^3$$

формула бўйича ҳисоблаш мумкин (манфий ишора $dx < 0$ бўлгани учун олинди). dq учун топилган иккала ифодани тенглаб, ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(0{,}01x - 0{,}0004)\,a\,dt = -10800 \cdot 0{,}01\,dx. \qquad (46)$$

Ўзгарувчиларни ажратиб, топамиз:

$$-\frac{a\,dt}{10\,800} = \frac{dx}{x - 0{,}04}.$$

Умумий интеграл:

$$x - 0{,}04 = Ce^{-at/10\,800}.$$

$t = 0$ да $x = 0{,}12$ бўлгани учун $C = 0{,}08$ ва хусусий интеграл

$$x - 0{,}04 = 0{,}08\,e^{-at/10\,800} \qquad (47)$$

кўринишда бўлади.

Вентиляторларнинг қуввати a ни аниқлаш учун $x = 0{,}06$ ва $t = 10$ деймиз. У ҳолда

$$0{,}02 = 0{,}08\,e^{-a/1080},$$

бу ердан $e^{-a/1080} = 1/4$ ва $a = 1080 \ln 4 \approx 1500$ м³/мин.

6-мисол. (Газни тозалаш.) Бирор газли аралашмадан газни тозалаш учун уни скруббер (у ёки бу ютувчи модда бўлган идиш) орқали ўтказилади. Ютқичнинг (аппаратнинг маълум тайин режимида) юпқа қатлами ютадиган газсимон аралашма миқдори аралашма концентрациясига, шунингдек, қатламнинг кўндаланг кесим қалинлиги ва юзига пропорционалдир. Скруббер асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган конус шаклига эга. Газ конус учидан киради. Агар келаётган газда аралашма концентрацияси a %, чиқиб кетаётган газда эса b% бўлса, скруббердаги газли аралашма концентрациясини қатламдан конус учигача бўлган масофанинг функцияси сифатида топинг.

Ечилиши. Аралашма концентрациясини q% орқали, қатламдан конус учигача бўлган масофани h орқали белгилаб, ушбу дифференциал тенгламани тузамиз:

$$dq = kq\pi r^2\,dh,$$

бу ерда r — конуснинг юпқа қатлами кесимининг радиуси, у конус ўлчамлари билан $r = Rh/H$ муносабат орқали боғланган, демак,

$$dq = kq\pi \frac{R^2}{H^2} h^2 dh.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$q = Ce^{k\pi R^2h^3/(3H^2)}$$

кўринишда бўлади. $h = 0$ да $q = a$, шунинг учун $C = a$, ва демак,

$$q = ae^{k\pi R^2h^3/(3H^2)}.$$

$h = H$ бўлганда $q = b$ шартдан k коэффициентни аниқласак кифоя. Қуйидагига эгамиз:

$$b = ae^{k\pi R^2H^3/(3H^2)},$$

бу ердан k ни эмас, балки k қатнашган ифодани аниқлаш қулайроқ:

$$e^{k\pi R^2/(3H^2)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/H^3}.$$

Узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$q = a\left(\frac{b}{a}\right)^{h^3/H^3}.$$

Худди шу масалани R радиусли шар шаклида бўлган скруббер учун ечайлик. Бу ҳолда $dq = kq\pi r^2 dh$, бу ерда r — шарнинг юпқа қатлами кесимининг радиуси: у шар радиуси R ва шарнинг қуйи нуқтасидан қатламгача бўлган масофа h билан $r^2 = R^2 - (h - R)^2$ муносабат орқали боғланган. У ҳолда

$$dq = kq\pi \left[R^2 - (h - R)^2\right] dh.$$

Бу тенгламанинг умумий интеграли:

$$\ln \frac{q}{C} = k\pi \left[R^2h - \frac{(h - R)^3}{3}\right].$$

C ва k ни аниқлаш учун $q|_{h=0} = a$, $q|_{h=2R} = b$ шартлардан фойдаланамиз:

$$\ln \frac{a}{C} = \frac{k\pi R^3}{3}, \quad \ln \frac{b}{C} = k\pi \left(2R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{5k\pi R^3}{3}.$$

Ушбу

$$\ln\frac{b}{C}-\ln\frac{a}{C}=\ln\frac{b}{a}=\frac{4k\pi R^3}{3}$$

айирмадан $k\pi=\frac{3}{4R^3}\ln\frac{b}{a}$ ни топамиз. Шунингдек,

$$\ln\frac{q}{C}-\ln\frac{a}{C}=\ln\frac{q}{a}=k\pi\left[R^2h-\frac{(h-R)^3}{3}-\frac{R^3}{3}\right]=k\pi\left(Rh^2-\frac{h^3}{3}\right)$$

айирмани олайлик, бунга $k\pi$ нинг ифодасини қўйиб, тенгламанинг хусусий интегралини

$$\ln\frac{q}{a}=\frac{h^2(3R-h)}{4R^3}$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

7-мисол. (Илмий ахборот оқими.) Фанда ахборотлар оқими, яъни илмий нашрлар сонининг ўсишини текширишда нашрларнинг $\frac{dy}{dt}$ ўсиш тезлиги нашрлар сонида эришилган y даражага пропорционал деган келишувга асосланилади, яъни ўсишнинг нисбий тезлиги $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ ўзгармайди. Нашрлар сонининг эришилган даражасини вақтга боғлиқ ҳолда аниқлайдиган қонун ушбу дифференциал тенгламадан топилади:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=k \quad \text{ёки} \quad \frac{dy}{dt}=ky \quad (k>0),$$

бу ерда k — у ёки бу фан соҳасида нашрга билдирилган фикрларни (ўртача) характерловчи константа.

Бу дифференциал тенгламанинг ечими

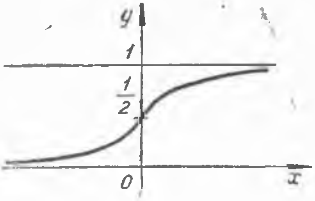
$$y=ae^{kt}$$

экспонента кўринишга эга, бу ерда a — фан ривожланишининг маълум бир бошланғич даражасини характерловчи ўзгармас катталик.

Ўсишнинг нисбий тезлиги 7% ига, яъни $k=0{,}07$ га ўсиш даражасининг тахминан 10 йил ичида иккиланиши тўғри келишини қайд қилиб ўтиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $y_0=a$ даражага $t=0$ бошланғич моментда, $2y_0$ даражага эса $t=T$ (бу ерда T — йил ҳисобида ҳисобланган, изланаётган вақт) да эришилган бўлсин: $2y_0=ae^{kT}$. Бу тенгликнинг иккала қисмини $y_0=a$ тенгликнинг мос қисмларига бўлиб, $2=e^{kT}$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан логарифмлаб топамиз:

$$T=\frac{\ln 2}{k}=\frac{0,69}{0,07}\approx 10 \text{ йил.}$$

Ташқи шароитлар кескин ўзгарганда, тутиб турувчи факторлар туфайли ўсишнинг экспоненциал қонуни сақланмайди. Даражанинг ўсиши унинг бирорта қиймати билан чекланади ва шаирлар сонининг ўсиш механизми ушбу дифференциал тенглама билан тасвирланади:



9- расм.

$$\frac{dy}{dt} = ky(b-y) \qquad (k>0,\ 0<y<b),$$

бу ерда b y катталикнинг мумкин бўлган максимал қийматини билдиради. Ўсишнинг

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k(b-y)$$

нисбий тезлиги энди ўзгармас бўлмай, балки y нинг чизиқли функцияси бўлади.

Бу дифференциал тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратамиз ва тенгламанинг иккала қисмидан интеграл оламиз:

$$\frac{dy}{y(b-y)} = kdt \text{ ёки } \int\frac{dy}{y(b-y)} = kt + C.$$

Маълумки,

$$\int\frac{dy}{y(b-y)} = \frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b-y}\right)dy = \frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y}.$$

Тенглама ечими ушбу кўринишда бўлади:

$$\frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y}+\frac{1}{b}\ln a = kt,$$

бу ерда $C = -\frac{1}{b}\ln a$ деб олинган.

Ҳосил қилинган ечимни ўзгартирамиз. Потенцирласак,

$$\frac{ay}{b-y} = e^{bkt};\quad ay = (b-y)e^{bkt};$$

$$y=(a+e^{bkt}) = be^{bkt};\quad y=\frac{be^{bkt}}{a+e^{bkt}},$$

ва ниҳоят,

$$y=\frac{b}{1+ae^{-bkt}}.$$

Бу тенглама билан аниқланадиган эгри чизиқ *логистик эгри чизиқ* дейилади. Вақтнинг бошланғич моментларида y нинг қийматлари b дан анча кичик бўлганда бу эгри чизиқ $y = be^{bkt}$ экспонента билан деярли устма-уст тушади, $y = b$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар логистик эгри чизиқнинг асимптоталари бўлади. $M\left(\frac{\ln a}{bk};\ \frac{b}{2}\right)$ нуқта букилиш нуқтасидир (9- расмга қаранг, у ерда $a = b = 1$ деб қабул қилинган).

3- §. x ВА y ГА НИСБАТАН БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА УЛАРГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

x ва y га нисбатан бир жинсли тенглама ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида осонгина ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилиши мумкин. Бир жинсли тенгламага таъриф беришдан аввал бир жинсли функция тушунчаси билан танишиб чиқиш керак.

Агар $f(x, y)$ функциянинг x ва y аргументларини ихтиёрий параметрга кўпайтирганда функция қиймати ўзгармаса, $f(x, y)$ функция ноль ўлчовли бир жинсли функция дейилади.

Ноль ўлчовли бир жинсли функция $f(x, y) = \varphi(y/x)$ кўринишда ёзилиши мумкин. Ҳақиқатан, $f(x, y)$ ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлсин. t параметрни ихтиёрий танлаб олишимиз мумкинлигидан фойдаланиб, $t = 1/x$ деймиз. У ҳолда

$$f(x,\ y) = f(tx,\ ty) = f(1,\ y/x) = \varphi(y/x).$$

Айтайлик, $f(x,\ y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ бўлсин, у ҳолда

$$f(tx,\ ty) = \frac{tx + ty}{tx - ty} = \frac{x + y}{x - y} = f(x,\ y).$$

Демак, берилган функция ноль ўлчовли бир жинсли функция экан. Сурат ва махражни x га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f(x,\ y) = \frac{1 + y/x}{1 - y/x} = \varphi(y/x),$$

бу ерда $\varphi(u) = (1 + u)/(1 - u)$.

Агар $f(x, y)$ функция ноль ўлчовли бир жинсли функция бўлса, $y' = f(x,\ y)$ тенглама x ва y га нисбатан бир жинсли дейилади. Шундай қилиб, бир жинсли тенгламани

$$y' = f(y/x) \tag{1}$$

кўринишда ёзиш мумкин экан.

Агар $f(x, y)$ функцияда x ва y ўзгарувчиларни мос равишда tx ва ty га алмаштирганда, бу ерда t — ихтиёрий катталик (параметр), t^n га кўпайтирилган яна ўша функция ҳосил бўлса, яъни

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

шарт бажарилса, $f(x, y)$ функция n ўлчовли бир жинсли функция дейилади. n даража кўрсаткич *функция бир жинслилигининг ўлчови (ёки даражаси)* дейилади.

Бир хил ўлчовли бир жинсли $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар қатнашган

$$M(x, y)\,dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

тенглама ҳам x ва y га нисбатан бир жинсли дифференциал тенглама бўлади.

(1) тенгламани, шунингдек, (2) тенгламани $y = xz$ (бу ерда z — янги, изланаётган функция) ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин. $y = xz$ тенгликни дифференциаллаймиз: $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. (1) тенгламага y ва $\frac{dy}{dx}$ нинг ифодаларини қўямиз; у ҳолда

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z), \qquad (3)$$

бу ердан $x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$ ёки дифференциалларда: $xdz + [z - f(z)]\,dx = 0$. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама. Унинг иккала қисмини $x[f(z) - z]$ га бўлиб,

$$\frac{dz}{z - f(z)} + \frac{dx}{x} = 0$$

ни ҳосил қиламиз*, бу ердан

$$\int\frac{dz}{z - f(z)} + \ln x = \ln C.$$

---

* Бўлишни бажариш $x \neq 0$ ва $z - f(z) \neq 0$ бўлгандагина мумкинлигини назарда тутиш лозим. $f(z) = z$ ҳол $\frac{dz}{dx} = 0$ тенгламага олиб келади, бу ердан $z = C$ ва $y = Cx$. $f(z) = z$ бўладиган айрим нуқталар тенгламанинг махсус нуқталаридир. Улар ҳақида ҳам, $x = 0$ қиймат ҳақида ҳам 7- § да сўз юритилади.

Агар $\int\frac{dz}{z-f(z)}=F(z)$ (ихтиёрий ўзгармасни ёзмай турамиз) десак,

$F(z)+\ln\frac{x}{C}=0$ ёки $x=Ce^{-F(z)}$ ва (1) тенгламанинг умумий интеграли узил-кесил ушбу кўринишга эга бўлади:

$$x=Ce^{-F(y/x)}. \tag{4}$$

Қуйидаги

$$(y-x)ydx+x^2dy=0$$

тенгламанинг умумий интегралини топайлик. $y=xz$ деймиз. У ҳолда $dy=xdz+zdx$ ва тенглама $x^2(z-1)zdx+x^2(xdz+zdx)=0$ ёки $z^2dx+xdz=0$ кўринишда бўлади. Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dz}{z^2}=0,$$

бу ердан

$$\ln x-\frac{1}{z}=C.$$

y ўзгарувчига қайтиб, умумий интегрални топамиз:

$$\ln x-\frac{x}{y}=C.$$

Бундан ташқари, $z=0$ ҳам ечим бўлади, бу ердан $y=0$ ни ҳосил қиламиз.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{5}$$

кўринишдаги тенглама бир жинсли ёки ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади. Бунинг учун x ва y лар ўрнига янги u ва v ўзгарувчиларни қуйидагича киритамиз:

$$x=u+\alpha,\ y=v+\beta.$$

Бунда α ва β сонларни шундай танлаймизки, тенглама бир жинсли тенгламага айлансин. Бундай алмаштиришда $dx=du$, $dy=dv$ бўлиб, тенглама

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{au+bv+a\alpha+b\beta+c}{a_1u+b_1v+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right)$$

кўринишни эгаллагани учун бу қуйидаги талабга тенг кучлидир:

$$\left.\begin{aligned}a\alpha+b\beta+c&=0,\\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1&=0.\end{aligned}\right\}$$

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{-x+y+1}$$

дифференциал тенгламанинг умумий интегралини топамиз: $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ деймиз; у ҳолда $dx=du$, $dy=dv$ ва тенглама

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+v+(\alpha+\beta-3)}{-u+v+(-\alpha+\beta+1)}$$

кўринишни олади. α ва β ни шундай танлаб оламизки, ушбу тенгламалар системаси ўринли бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta-3=0,\\ -\alpha+\beta+1=0,\end{array}\right\}$$

яъни $\alpha=2$, $\beta=1$ (тенгламалар системасининг илдизлари) деб оламиз. Қуйидаги бир жинсли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{du}{dv}=\frac{u+v}{-u+v}.$$

$v=uz$ деб, яъни z ўзгарувчи киритамиз, демак, $\frac{dv}{du}=u\frac{dz}{du}+z$. У ҳолда

$$u\frac{dz}{du}+z=\frac{1+z}{-1+z},\qquad u(z-1)\frac{dz}{du}=1+2z-z^2;$$

$$\frac{(z-1)dz}{1+2z-z^2}-\frac{du}{u}=0,$$

бу ердан

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2|-\ln|u|=-\frac{1}{2}\ln C,$$

$$u^2(1+2z-z^2)=C,\text{ ёки } u^2+2uv-v^2=C.$$

Олдинги x ва y ўзгарувчиларга қайтиб,

$$(x-2)^2+2(x-2)(y-1)-(y-1)^2=C,$$

ёки

$$x^2+2xy-y^2-6x-2y=C_1,$$

умумий интегрални ҳосил қиламиз, бу ерда $C_1=C-7$.

Энди

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$$

дифференциал тенгламанинг умумий интегралини топамиз.

$$3x-4y=z \text{ деймиз; у ҳолда } \frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx}$$

ва тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx}=\frac{z-2}{z-3}, \text{ ёки } \left(\frac{4}{z+1}-1\right)dz=dx,$$

бу ердан

$$4\ln|z+1|-z=x+4C.$$

Олдинги y функцияга қайтиб, умумий интегрални топамиз:

$$\ln|3x-4y+1|=x-y+C.$$

Умумлашган бир жинсли тенглама. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ тенгламада α даража кўрсаткичи $y=z^{\alpha}$ ўрнига қўйиш берилган тенгламани x ва z га нисбатан бир жинсли тенгламага айлантирадиган қилиб танлаш мумкин бўлса, берилган кўринишдаги тенглама *умумлашган бир жинсли тенглама* дейилади.

Айтайлик,

$$(x-2y^3)dx+3y^2(2x-y^3)dy=0$$

тенглама берилган бўлсин.

Бу тенглама умумлашган бир жинсли тенглама эканлигини текширамиз ва уни интеграллаймиз.

$y=z^{\alpha}$ дейлик. У ҳолда $dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$ ва тенглама ушбу кўринишга келади:

$$(x-2z^{3\alpha})dx+3\alpha z^{3\alpha-1}(2x-z^{3\alpha})dz=0.$$

dx олдидаги кўпайтувчи бир жинсли функция бўлиши учун (шу билан бирга биринчи даражали бўлиши учун, чунки биринчи қўшилувчи биринчи даражали) $3\alpha=1$ бўлишини талаб қилиш керак, бу ердан $\alpha=1/3$. dz олдидаги кўпайтувчи ҳам биринчи даражали бир жинсли функция бўлиш-бўлмаслигини текширамиз. Агар $\alpha=1/3$ бўлса, жавоб ижобий бўлади. Демак, $y=z^{1/3}$ ўрнига қўйиш берилган тенгламани қуйидаги бир жинсли кўринишга келтиради:

$$(x-2z)dx+(2x-z)dz=0.$$

Бу тенгламада $z=ux$ (ва мос равишда $dz=xdu+udx$) деб олиб, яна ўзгарувчини алмаштирамиз. Қуйидагини топамиз:

$$(1-u^2)dx+(2-u)x\,du=0$$

ёки ўзгарувчиларни алмаштиргандан сўнг

$$\frac{dx}{x}-\frac{u-2}{u^2-1}du=0\cdot$$

Бу ердан

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|u^2-1|-\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|=\frac{1}{2}\ln C$$

ёки

$$x^2(u+1)^3=C(u-1).$$

$u = z/x = y^3/x$ бўлгани учун узил-кесил қуйидагини топамиз:

$$(y^3 + x)^3 = C(y^3 - x).$$

Бундан ташқари, $u = \pm 1$, бу эса $z = \pm x$ ни беради, бу ердан $y = \pm \sqrt[3]{x}$.

Геометрик мисоллар

1- мисол. Уринма ости уриниш нуқтасининг абсциссаси ва ординатасининг йиғиндисига тенг бўлган эгри чизиқларни топинг.

Ечилиши. Масала шартидан ушбу дифференциал тенгламани тузамиз:

$$\frac{y}{y'} = x + y$$

ёки дифференциалларда ёзилса,

$$ydx = (x + y)dy.$$

Бу тенгламада $y = xz$ алмаштириш эмас, балки $x = yz$ алмаштириш бажариш қулайдир. У ҳолда $dx = ydz + zdy$ ва тенглама

$$y(y\,dz + z\,dy) = y(z + 1)\,dy;\ \ y\,dz = dy;\ \ dz = \frac{dy}{y}$$

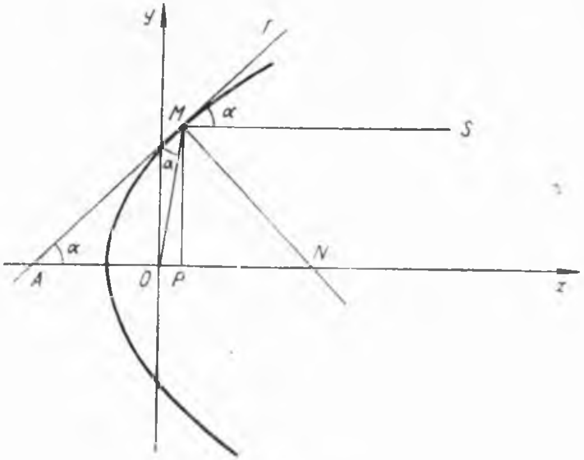
кўринишга келади. Бу ердан $z = \ln y + \ln C$; $y = Ce^z$. Умумий ечим $y = Ce^{x/y}$ эгри чизиқлар оиласидан иборат.

2- мисол. Айланиш ўқининг 0 нуқтасига жойлаштирилган ёруғлик манбаидан чиқадиган ҳамма нурлар рефлектор кўзгусидан бу ўққа параллел бўлиб қайтиши учун рефлектор кўзгусини қайси айланиш сирти бўйича силлиқлаш керак (10- расм)?

Ечилиши.* Изланаётган айланиш сиртининг меридиан кесимини оламиз. Координаталар марказини O нуқтада танлаймиз, Ox ўқни эса айланиш ўқи бўйича йўналтирамиз. Агар Ox ўқ билан эгри чизиқнинг $M(x; y)$ нуқтасига ўтказилган AT уринма орасидаги бурчакни α орқали белгиласак, у ҳолда масала шартига кўра: $\angle SMT = \alpha$. Иккинчи томондан, бурчаклар тушиш бурчаги ($\angle OMN$) ва қайтиш бурчаги ($\angle NMS$) ни $\pi/2$ га тўлдирувчи бурчаклар бўлгани сабабли $\angle OMA = \angle SMT$ ва бундан $\angle OMA = \alpha$. Шундай қилиб, OAM учбурчак тенг ёнли ва

---

* Бу масалани бошқача ечиш методини 6- §, 1- мисолдан (81, 85- бетлар) қаранг.



10- расм.

$AO = OM$. Чизмадан: $AO = AP - OP = y/y' - x$, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, натижада ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

ёки дифференциалларда ёзсак,

$$ydx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0.$$

Бу x ва y га нисбатан бир жинсли тенглама. $x = yz$ ва мос равишда $dx = zdy + ydz$ ўрнига қўйиш ёрдамида бу тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирамиз:

$$y(zdy + ydz) = y(z + \sqrt{z^2 + 1})dy \quad \text{ёки} \quad ydz = \sqrt{z^2 + 1}\, dy,$$

бу ердан

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dy}{y} \quad \text{ёки} \quad \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = \ln y - \ln C,$$

яъни

$$z + \sqrt{z^2 + 1} = \frac{y}{C}.$$

Иррационалликни йўқотиб, бу тенгламани соддалаштирамиз:

$$\left(\frac{y}{C}-z\right)^2=\sqrt{z^2+1} \text{ ёки } \frac{y^2}{C^2}-\frac{2yz}{C}=1.$$

Эски x ўзгарувчига қайтиб, қуйидаги умумий интегрални ҳосил қиламиз

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right), \tag{7}$$

бу симметрия ўқи Ox ўқ билан устма-уст тушадиган, параметри $p=C$ бўлган ва учи координаталар бошидан чап томонда $C/2$ масофада ётадиган параболалар оиласидир. Демак, айланиш сиртлари айланиш параболоидлари бўлиб, уларнинг

$$y^2+z^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$$

тенгламалари маълум қоида бўйича y^2 ни y^2+z^2 орқали алмаштириш бўйича ҳосил бўлади.

Агар кўзгунинг диаметри d ва чуқурлиги h берилган бўлса, парабола тенгламасидан $x+\frac{C}{2}=h$, $y=\frac{d}{2}$ деб, C нинг қийматини аниқлаш мумкин: $C=\frac{d^2}{8h}$, у ҳолда парабола тенгламаси $y^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right)$ (хусусий интеграл), айланиш параболоидининг тенгламаси эса

$$y^2+z^2=\frac{d^2}{h^2}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right) \tag{8}$$

бўлади.

4- §. Биринчи тартибли чизиқли тенгламалар ва уларга келтириладиган тенгламалар

Агар дифференциал тенглама изланаётган y функция ва унинг ҳосиласи $\frac{dy}{dx}$ га нисбатан чизиқли (яъни биринчи даражали) бўлса, бундай дифференциал тенглама чизиқли тенглама дейилади. Биринчи тартибли чизиқли тенгламанинг умумий кўриниши:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x). \tag{1}$$

Агар тенгламанинг ўнг томони $Q(x)=0$ бўлса, (1) тенглама *чизиқли бир жинсли**, акс ҳолда эса *бир жинсли бўлмаган* тенглама дейилади.

---

* Чизиқли бир жинсли тенгламани x ва y га нисбатан бир жинсли тенглама билан аралаштириб юбориш керак эмас. «Бир жинсли»-термини чизиқли тенгламага татбиқан шунинг учун ҳам қўлланиладики, $y'+P(x)y$ ифода y ва y' га нисбатан биринчи ўлчовли бир жинсли функциядир.

Айтайлик, (1) тенглама бир жинсли бўлмасин, яъни $Q(x) \neq 0$ бўлсин. Бу тенгламани интеграллашнинг икки усулини келтирамиз: ўрнига қўйиш усули ва ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули. Бир жинсли чизиқли тенглама бўлган ҳолни алоҳида қараб чиқиш шарт эмас, чунки $Q(x) \equiv 0$ бўлганда (1) тенглама айни вақтда ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлади.

Ўрнига қўйиш усули. (1) тенгламада $y = uv$ деб ўзгарувчини алмаштирамиз. Бу билан y ўрнига изланаётган янги ўзгарувчи, масалан, u ни киритган бўламиз. Шу сабабли иккинчи ўзгарувчи v ни ёрдамчи ўзгарувчи деб қараб уни ўз хоҳишимизга кўра танлашимиз мумкин. Келгусида шундай қилинади ҳам.

$\frac{dy}{dx}$ ни ҳисоблаб, y ва $\frac{dy}{dx}$ нинг u ва v орқали ифодаларини (1) тенгламага келтириб қўямиз:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

бўлгани учун, тенглама ушбу кўринишга келади:

$$v\frac{du}{dx} + u\left[\frac{dv}{dx} + P(x)v\right] = Q(x). \tag{2}$$

Ёрдамчи ўзгарувчи v ни ихтиёрий танлаш мумкинлигидан фойдаланиб, уни ўрта қавс ичидаги ифода нолга айланадиган қилиб оламиз, яъни

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0 \tag{3}$$

бўлишини талаб қиламиз.

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама. Унинг иккала қисмини v га бўлиб ва dx га кўпайтириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dv}{v} + P(x)dx = 0,$$

бу ердан интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$\ln v + \int P(x)dx = \ln C$$

ёки

$$v = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{4}$$

v нинг бу ифодасини (2) тенгламага қўйсак, u учун ўзгарувчилари ажраладиган тенгламани ҳосил қиламиз:

$$C\, e^{-\int P(x)dx} \frac{du}{dx} = Q(x). \tag{5}$$

Бу тенгламанинг иккала қисмини $e^{\int P(x)dx}$ га кўпайтирамиз:

$$Cdu = Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx,$$

бу ердан

$$u = \frac{1}{C}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + C_1\right]. \tag{6}$$

(6) ва (4) формулалар u ва v нинг x орқали ифодасини беради, y нинг x га боғланишини топишимиз кераклигидан ва $y = uv$ бўлгани учун (1) чизиқли тенгламанинг умумий ечими узил-кесил қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1\right]. \tag{7}$$

(3) тенгламани интеграллашдан ҳосил бўлган ихтиёрий C ўзгармас u ни v га кўпайтиришда қисқариб кетганини қайд қилиб ўтамиз. Шундай бўлиши ҳам керак эди, чунки биринчи тартибли тенгламанинг умумий ечими фақат битта ихтиёрий ўзгармасга эга бўлиши керак. Буни олдиндан билган ҳолда (4) ечимда олдиндан $C = 1$ деб олиш ва (3) тенгламанинг умумий ечими ўрнига $v = e^{-\int P(x)dx}$ хусусий ечимини олиш мумкин эди, амалда одатда ана шундай қилинади.

Бу ерда кўриб чиқилган ўрнига қўйиш усули битта (1) чизиқли тенгламани интеграллаш масаласини ўзгарувчилари ажраладиган иккита (3) ва (5) тенгламаларнинг ечимларини излашга олиб келади.

Масалан, ўрнига қўйиш усули ёрдамида

$$y' - ay = e^{bx}$$

чизиқли тенгламанинг умумий ечимини топайлик. $y = uv$ дейлик: у ҳолда $y' = vu' + uv'$ ва тенглама

$$vu + u(v' - av) = e^{bx}$$

кўринишга келади. $v' - av = 0$ бўлишини талаб қиламиз. Ўзгарувчиларни ажратиб, $\frac{dv}{v} - adx = 0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $v = Ce^{ax}$.

Юқорида айтиб ўтилганидек, $v = e^{ax}$ хусусий ечим билан чекланиш мумкин. v нинг ифодасини алмаштирилган тенгламага қўямиз: $e^{ax}u' = e^{bx}$ ёки $du = e^{(b-a)x}\,dx$, бу ердан: агар $b \neq a$ бўлса, $v = \frac{1}{b-a}e^{(b-a)x} + C$, $b = a$ бўлса, $u = x + C$. Маълумки, $y = uv$, у ҳолда умумий ечим $b \neq a$ бўлганда $y = \frac{e^{bx}}{b-a} + Ce^{ax}$, $b = a$ бўлганда эса $y = (x + C)\,e^{ax}$ кўринишда ҳосил бўлади.

Ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули. Бир жинсли бўлмаган (1) тенгламанинг $(Q(x) \neq 0)$ ечимини излаш ўрнига дастлаб унга мос бир жинсли

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{8}$$

тенгламани ечамиз, бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Унинг умумий ечими:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{9}$$

Шуниси аниқки, ифодасида C ихтиёрий ўзгармас бўлган бу функция бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими бўла олмайди. Ҳақиқатан, уни ўзининг ҳосиласи билан биргаликда (1) тенгламага қўйилганда у тенгламанинг чап томонини айнан нолга тенглаштиради, ўнг томони $Q(x)$ эса нолга тенг эмас. Шундай бўлса-да, агар C ни ихтиёрий ўзгармас деб эмас, балки x нинг бирорта $C=C(x)$ функцияси деб қарайдиган бўлсак, у ҳолда $C(x)$ функцияни шундай танлаб олиш мумкин эканки, (9) функция бир жинсли бўлмаган (1) тенгламанинг ечими бўлиб қолар экан.

$C(x)$ функцияни топиш учун $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз, y ва $\frac{dy}{dx}$ нинг ифодаларини (1) тенгламага қўямиз ва тенглама қаноатланишини, яъни айниятга айланишини талаб қиламиз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

бўлганлиги учун (1) тенглама ушбу тенгламага ўтади:

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \tag{10}$$

(ўртадаги иккита ҳад ўзаро қисқариб кетди). Биз яна ўзгарувчилари ажраладиган ва номаълум функцияси $C(x)$ бўлган тенгламани ҳосил қилдик. Унинг умумий ечими:

$$C(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + C_1.$$

$C(x)$ нинг топилган ифодасини (9) тенгликка қўйиб, бир жинсли бўлмаган (1) тенгламанинг изланаётган ечимини яна (7) кўринишда ҳосил қиламиз:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx}\, dx + C_1 \right].$$

Бу усулнинг номи ихтиёрий C ўзгармасни x нинг функцияси деб қараб, уни вариациялаганимиздан (ўзгартирганимиздан) келиб чиққан.

Бу усул ўрнига қўйиш усули каби (1) чизиқли тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган иккита (8) ва (10) тенгламага келтиради.

Масалан, ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули ёрдамида

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = a \sin x$$

чизиқли тенгламанинг умумий ечимини топайлик.

Дастлаб чизиқли бир жинсли $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Ўзгарувчиларни ажратиш бу тенгламани $\frac{dy}{y} - \operatorname{ctg} x dx = 0$ кўринишга келтиради, бу ердан $\ln y - \ln \sin x = \ln C$ ва $y = C \sin x$. Бу ерда $C = C(x)$ деб, C ни вариациялаймиз; бунда $y = C(x) \sin x$ ва $\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \sin x + C(x) \cos x$. Энди y ва $\frac{dy}{dx}$ нинг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз:

$$\frac{dC(x)}{dx} \sin x + C(x) \cos x - C(x) \sin x \operatorname{ctg} x = a \sin x$$

ёки соддалаштиришдан сўнг, $dC(x) = a dx$, бу ердан $C(x) = ax + C_1$. Бир жинсли тенглама ечимига $C(x)$ нинг ифодасини қўйиб, берилган тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = (ax + C_1) \sin x$$

y ни (7) формула бўйича аниқлашда $\int P(x)dx$ ва $\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx$ аниқмас интегралларнинг ҳар биридаги бошланғич функциялардан бирини олиш керак, чунки уларга ихтиёрий ўзгармасларни қўшиш фақат ихтиёрий ўзгармас C_1 нинг қийматини ўзгартиради, бу эса дифференциал тенгламанинг умумий ечими учун муҳим эмас.

Айрим ҳолларда (7) формулада аниқмас интегралларни юқори чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интеграллар билан алмаштириш қулайдир. Бундай алмаштиришда (7) формула ушбу кўринишни олади:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)dt} \left[\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)\, e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(u)du} dt + C_1 \right], \tag{11}$$

бу ерда x_0 ихтиёрий, бироқ тайин сон. Агар $x = x_0$ да $y = y_0$ бошлангич шарт берилса, C_1 нинг қийматини аниқлаш мумкин. Чегаралари бир хил бўлган аниқ интеграллар нолга тенг бўлгани учун $C_1 = y_0$ ва чизиқли тенгламанинг $y|_{x=x_0} = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи қуйидаги хусусий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\, dt} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t) e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(u)\, du} dt \right]. \tag{12}$$

Агар чизиқли тенгламанинг битта хусусий ечими $y = y_1(x)$ маълум бўлса, у ҳолда умумий ечимни

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)\, dx}$$

формула бўйича топиш мумкин.

Ҳақиқатан, (1) тенгламанинг ечими бўлган $y = y_1(x)$ функция бу тенгламани қаноатлантиради, яъни ушбу айният ўринли бўлади:

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x).$$

Бу айниятнинг иккала қисмини (1) тенгламанинг мос қисмларидан айирамиз:

$$(y - y_1') + P(x)(y - y_1) = 0$$

ёки

$$(y - y_1') + P(x)(y - y_1) = 0.$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, y

$$\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} = -P(x)dx$$

кўринишга келтирилади, бу ердан

$$\ln(y - y_1) = -\int P(x)dx + \ln C,$$

бинобарин,

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Агар чизиқли тенгламанинг ўзаро пропорционал бўлмаган иккита $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечими маълум бўлса, у ҳолда умумий ечимни бевосита ушбу формула ёрдамида топиш мумкин:

$$y - y_1(x) = C\,[y_2(x) - y_1(x)].$$

Ҳақиқатан ҳам, агар $y_1(x)$ (1) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда юқоридагига кўра умумий интеграл

$$y - y_1 = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

кўринишда бўлади.

Бу интегралда барча хусусий ечимлар, жумладан, умумий интегралдан ихтиёрий C ўзгармаснинг аниқ қийматида, масалан, $C = C_2$ да ҳосил бўладиган $y = y_2(x)$ иккинчи ечим ҳам бўлади. Демак, ушбу айниятга эгамиз:

$$y_2(x) - y_1(x) = C_2e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Умумий интегралнинг иккала қисмини бу айниятнинг тегишли қисмларига бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{C}{C_2}$$

ёки C/C_2 ни C га алмаштирсак,

$$y - y_1(x) = C[y_2(x) - y_1(x)].$$

Бернулли тенгламаси. *Бернулли тенгламасининг* умумий кўриниши:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\,y^n, \tag{13}$$

бу ерда $n = \text{const}$. $n = 0$ да Бернулли тенгламаси чизиқли тенгламага айланади; $n = 1$ да ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлади, чунки уни

$$\frac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)]\,y = 0$$

кўринишга келтириш, ва бинобарин, ўзгарувчиларни ажратиш билан интеграллаш мумкин.

Келгусида $n \neq 1$ деб фараз қиламиз.

Бернулли тенгламасини тегишли ўрнига қўйиш орқали чизиқли кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун тенгламанинг иккала қисмини y^n га бўламиз:

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}+P(x)\frac{1}{y^{n-1}}=Q(x).$$

$\frac{1}{y^{n-1}}=z$ дейлик. У ҳолда $(1-n)\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ ва Бернулли тенгламаси ушбу кўринишга келади:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

Бу номаълум функцияси z бўлган биринчи тартибли чизиқли тенглама; уни ўрнига қўйиш усули ёки ихтиёрий ўзгармасни вариациялаш усули билан интеграллаш ва z ни x нинг функцияси сифатида топиш мумкин. Тескари алмаштириш (z ни $1/y^{n-1}$ га) бажариш орқали дастлабки y ўзгарувчига қайтиб, Бернулли тенгламасининг умумий интегралини ҳосил қиламиз. Ундан ташқари $n>0$ бўлганда $y=0$ функция исталган Бернулли тенгламасининг ечими бўлади.

Юқорида айтилганлардан бу усуллардан исталган бирини Бернулли тенгламасига оралиқ этап — уни чизиқли кўринишга келтиришга ҳожат қолдирмай, бевосита қўлланиш мумкинлиги келиб чиқади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=-x^3y^2$$

Бернулли тенгламасининг умумий интегралини топайлик.

Тенгламанинг иккала қисмини y^2 га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}\frac{1}{y}=-x^3.$$

$\frac{1}{y}=z$ деб оламиз; у ҳолда $-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ ва тенглама ушбу кўринишга келади:

$$\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=x^3.$$

Бу чизиқли тенгламани вариация усули билан интеграллаймиз. Бир жинсли $\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=0$ тенгламанинг умумий ечими: $z=C/x^3$. Бу ерда $C=C(x)$ деб, қуйидагини ҳисоблаймиз:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}\frac{1}{x^3}-\frac{3C(x)}{x^4}$$

ни чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламага қўямиз:

$$\frac{dC(x)}{dx}\frac{1}{x^3}-\frac{3C(x)}{x^4}+\frac{3}{4}\frac{C(x)}{x^3}=x^3$$

ёки $dC(x) = x^6dx$, бу ердан $C(x) = x^7/7 + C_1$, бинобарин, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими $z = x^4/7 + C_1/x^3$ бўлади. z ни $1/y$ билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{y}=\frac{x^4}{7}+\frac{C_1}{x^3} \text{ ёки } y\left(\frac{x^7}{7}+C_1\right)=x^3.$$

Физикага доир мисоллар

1-мисол. (Электр занжиридаги ўтиш процесси.) Индуктивлик занжирида ўтиш процесси содир бўлади. L индуктивлик ва R актив қаршилик — ўзгармасдир. u кучланиш t вақтнинг функцияси сифатида берилган: $u = f(t)$. Бошланғич ток i_0 га тенг.

i токнинг t вақтга боғланишини топинг. Жумладан, $u = u_0 = \text{const}$ бўлган ҳолни қараб чиқинг.

Ечилиши. Занжирдаги i ток вақт ўтиши билан ўзгаргани ва L индуктивлик мавжудлиги туфайли ўзиндукциянинг $e_L = -L\frac{di}{dt}$ э. ю. к. ҳосил бўлади. Кирхгоф қонунига кўра занжирдаги кучланиш пасайиши Ri э. ю. к. лар йиғиндиси $u - L\frac{di}{dt}$ га тенг. Шундай қилиб,

$$u - L\frac{di}{dt} = Ri$$

ёки

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u. \qquad (14)$$

Бу биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама. u ни $f(t)$ билан алмаштириб ва тенгламанинг иккала қисмини L га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{f(t)}{L}.$$

Бу чизиқли тенгламанинг $t = 0$ да $i = i_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими [(12) формулага қаранг]

$$i = e^{-Rt/L}\left[i_0+\frac{1}{L}\int_0^t f(\tau)e^{R\tau/L}\,d\tau\right] \qquad (15)$$

функциядан иборат бўлади.

$f(t) = u_0 = \mathrm{const}$ бўлганда

$$i = e^{-Rt/L}\left[i_0 + \frac{u_0}{L}\int_0^t e^{R\tau/L}\,d\tau\right] \qquad (16)$$

ёки $\int_0^t e^{R\tau/L}\,d\tau = \frac{L}{R}\left(e^{Rt/L} - 1\right)$ бўлганлиги учун

$$i = \frac{u_0}{R} + \left(i_0 - \frac{u_0}{R}\right)e^{-Rt/L}. \qquad (17)$$

t нинг ўсиши билан $e^{-Rt/L}$ кўпайтувчи камаяди ва бирор вақт оралиғидан сўнг процессни амалда барқарор деб ҳисоблаш мумкин, бунда ток Ом қонуни бўйича аниқланади:

$$i = \frac{u_0}{R}.$$

Агар $i_0 = 0$ десак, занжирнинг уланишидаги ток учун формула ҳосил қиламиз:

$$i = \frac{u_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right). \qquad (18)$$

(18) тенгликдан кўринадики, i ток батарея улангандан сўнг Ом қонуни билан аниқланадиган u_0/R қийматгача ўсиб етади, чунки *туташув экстратоки* деб аталувчи $\frac{u_0}{R}e^{-Rt/L}$ ток жуда тез камаяди ва амалда тезда сезиларсиз бўлиб қолади деб ҳисоблаш мумкин.

Агар $u_0 = 0$ десак, занжирнинг узилишидаги сўниш токи формуласини ҳосил қиламиз:

$$i = i_0 e^{-Rt/L}. \qquad (19)$$

Занжирда кучланиш бўлмаганда фақат ўзиндукциянинг электр юритувчи кучи таъсири натижасида занжирда ўтадиган бу ток *узиш экстратоки* дейилади. t ўсиши билан у нолга интилади.

Ўзгармас L/R катталикни занжирнинг *вақт доимийси* дейилади.

Кўриб чиқилган масалалар туташиш ва узилиш кетма-кет жуда тез содир бўлганда, масалан, телеграф алоқасида муҳимдир.

Ток манбаининг кучланиши $u = E\sin\omega t$ синусоидал қонун бўйича ўзгарадиган ҳол (масалан, RL-занжир ўзгарувчан ток манбаига уланадиган ҳол) алоҳида диққат-га сазовордир. Бу ҳолда (12) формулага биноан қуйидагига эгамиз:

$$i = e^{-Rt/L}\left(i_0 + \frac{E}{L}\int_0^t e^{R\tau/L}\sin\omega\tau\,d\tau\right). \qquad (20)$$

Қуйидагини текшириб кўриш осон:

$$\int e^{R\tau/L}\sin\omega\tau\,d\tau = e^{R\tau/L}\left(\frac{RL}{\omega^2\mathrm{L}^2+R^2}\sin\omega\tau - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega\tau\right).$$

Шунинг учун

$$\int_0^t e^{R\tau/L}\sin\omega\tau\,d\tau =$$

$$= e^{Rt/L}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right) + \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}$$

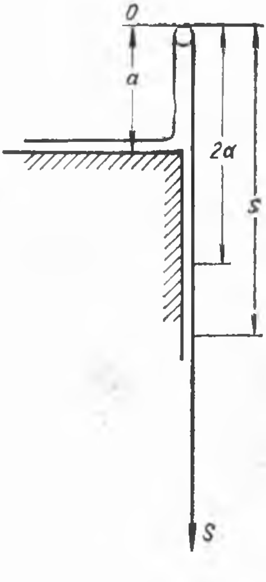
ва биз токнинг вақтга боғланишини ушбу кўринишда ҳосил қиламиз:

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-Rt/L} + \frac{RE}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2} \times$$

$$\times \cos\omega t. \qquad (21)$$

$e^{-Rt/L}$ кўпайтувчи t ўса борган сайин тез камаяди, шу сабабли бу формуладаги биринчи қўшилувчи қисқа вақт оралиғидан сўнг i катталикни аниқлашга амалда таъсир кўрсата олмайди. Қолган иккита қўшилувчининг йиғиндиси u кучланишнинг ω частотаси каби ўша ω частотали, бироқ бошқа амплитудали ва бошқа фазали синусоидал катталикдан иборат: шу билан бирга у i_0 бошланғич токка боғлиқ бўлмайди. Бу ток *барқарор* ток дейилади.

2- **мисол** (арқоннинг сирпаниши). Арқон стол устида ётибди (11- расм). унинг учларидан бири стол устидан a масофада бўлган силлиқ блок орқали ўтказилган. Бошланғич моментда $2a$ узунликдаги ар-



11- расм.

қон бўлаги блокнинг нариги томонида эркин осилиб турибди. Арқоннинг бу учининг ҳаракат тезлиги v ни s йўлга боғлиқ равишда топинг, бундай ҳаракатда ишқаланиш қаршилиги тезлик квадратига тенг, бошланғич тезлик эса нолга тенг деб қабул қилинг.

Ечилиши. Агар блокни йўлнинг саноқ боши сифатида танлаб олсак ва Os ўқни пастга йўналтирсак, Ньютоннинг иккинчи қонуни $m\frac{dv}{dt} = F$ бизнинг ҳолда ушбу дифференциал тенгламага олиб келади:

$$(s + a)\frac{dv}{dt} = (s - a)g - v^2,$$

бу ерда g — оғирлик кучи тезланиши.

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ бўлгани учун тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(s + a)v\frac{dv}{ds} + v^2 = (s - a)g. \tag{22}$$

Бу Бернулли тенгламасидир ($n = -1$). Ушбу $v^2 = z$ ўрнига қўйиш $\left(\text{ва мос равишда } v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dz}{ds}\right)$ билан уни чизиқли кўринишга келтирамиз:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{2}{s + a}z = \frac{2g(s - a)}{s + a}.$$

Бу тенгламанинг умумий ечимини (7) формула бўйича топамиз:

$$z = e^{-2\ln(s+a)}\left[2g\int\frac{s - a}{s + a}e^{2\ln(s+a)}ds + C\right]\cdot$$

Бироқ

$$e^{-2\ln(s+a)}\ \frac{1}{(s + a)^2}, \quad e^{2\ln(s+a)} = (s + a)^2,$$

$$\int\frac{s - a}{s + a}e^{2\ln(s+a)}\,ds = \int(s^2 - a^2)ds = \frac{s^2}{3} - a^2s$$

ва шу сабабли

$$z = v^2 = \frac{1}{(s+a)^2}\left[2g\left(\frac{s^3}{3} - a^2s\right) + C\right]\cdot$$

$s = 2a$ да $v = 0$ бошланғич шартдан $C = -4ga^3/3$ ни топамиз, натижада хусусий интеграл ушбу кўринишда бўлади:

$$v^2 = \frac{2g}{3(s+a)^2}(s^3 - 3a^2s - 2a^3).$$

Қавс ичидаги ифодани кўпайтувчиларга ажратиш мумкин:

$$s^3 - 3a^2s - 2a^3 = s^3 - 2as^2 + 2as^2 - 4a^2s + a^2s - 2a^3 =$$

$$= s^2(s-2a) + 2as(s-2a) + a^2(s-2a) = (s-2a)\ (s+a)^2.$$

шундай қилиб, v ни s га боғлиқ ҳолда ҳосил қиламиз:

$$v = \sqrt{\frac{2g}{3}(s-2a)}. \qquad (23)$$

Ҳаракат текис тезланувчан эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун ҳосил қилинган тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтарамиз ва t бўйича дифференциаллаймиз. Натижада

$$2v\frac{dv}{dt} = \frac{2gds}{3dt}, \text{ лекин } \frac{ds}{dt} = v \text{ ва } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

шунинг учун

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{3} = \text{const},$$

шуни исбот қилиш керак эди.

Геометрик мисоллар

1- мисол. $A(a;\ a)$ нуқтадан ўтувчи ва қуйидаги хоссага эга бўлган эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг: агар эгри чизиқнинг PM ординатали исталган $M(x;\ y)$ нуқтасидан Oy ўқнинг T нуқтаси билан кесишгунча уринма ўтказилса, $OTMP$ трапециянинг юзи ўзгармас бўлиб, a^2 га тенг бўлади (12- расм).

Ечилиши. Трапеция юзи $S = \frac{OT + PM}{2} \cdot OP$ формула бўйича аниқланади. $OT = y - xy'$, $PM = y$ ва $OP = x$ бўлгани учун дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда бўлади:

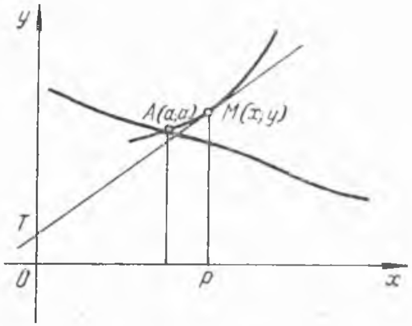
$$(2y - xy')x = 2a^2$$

ёки

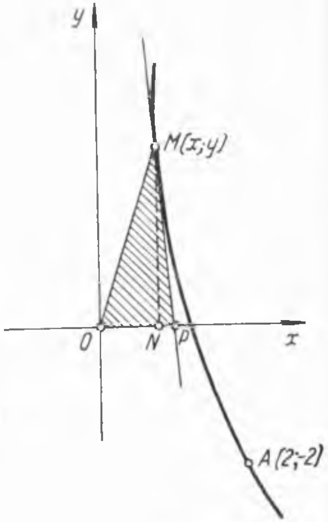
$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2a^2}{x^2}. \qquad (24)$$

Бу чизиқли тенглама. Унинг умумий ечимини (7) формула бўйича топамиз:

$$y = e^{2\ln x}\left(-2a^2\int\frac{e^{-2\ln x}}{x^2}dx + C\right),$$



12- расм.



13- расм.

бу ердан

$$y = x^2\left(-2a^2\int\frac{dx}{x^4}+C\right); \quad \text{ёки} \quad y = x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3}+C\right),$$

бинобарин,

$$y = \frac{2a^2}{3x}+Cx^2.$$

Умумий ечимга $x = a$, $y = a$ бошланғич шартни қўйиб, $C = 1/(3a)$ ни топамиз, у ҳолда изланаётган эгри чизиқ тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y = \frac{2a^2}{3x}+\frac{x^2}{3a}. \qquad (25)$$

2-мисол. Эгри чизиқнинг исталган $M(x; y)$ нуқтасининг OM радиус-вектори OM, шу нуқтадан ўтказилган MP уринма ва Ox ўқ ҳосил қилган учбурчакнинг юзи 2 га тенг. Эгри чизиқ $A(2; -2)$ нуқтадан ўтади. Унинг тенгламасини топинг (13-расм).

Ечилиши. Учбурчакнинг юзи $S=\frac{1}{2}OP\cdot MN$ формула бўйича топилади, бу ерда $MN = y$ сон M нуқтанинг ординатаси $OP = x - \frac{y}{y'}$. Дифференциал тенглама ушбу кўринишга эга:

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)y = 4$$

ёки

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x = -\frac{4}{y^2}. \qquad (26)$$

Бу y аргументнинг номаълум x функциясига нисбатан чизиқли дифференциал тенглама. Умумий интегрални (7) формула бўйича топамиз:

$$x = e^{\ln y}\left(-4\int\frac{e^{-\ln y}}{y^2}dy+C\right) \quad \text{ёки} \quad x = y\left(\frac{2}{y^2}+C\right).$$

$x = 2$ да $y = -2$, демак, $C = -3/2$. Натижада эгри чизиқнинг изланаётган тенгламасини ушбу кўринишда ҳосил қиламиз:

$$3y^2+2xy-4=0.$$

3- мисол. Координаталар бошидан ўтувчи шундай эгри чизиқ тенгламасини тузингки, унинг нормалининг эгри чизиқ исталган нуқтасидан Ox ўққача бўлган кесмасининг ўртаси $y^2 = ax$ параболада ётади.

Ечилиши. Эгри чизиқда ихтиёрий $M(x; y)$ нуқта оламиз. Эгри чизиқнинг M нуқтасига ўтказилган нормалнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси $x + yy'$ ва O координаталарга, нормал кесмаси MP нинг ўртаси N эса $x_N =$ $= x+\frac{yy'}{2}$ ва $y_N=\frac{y}{2}$ координаталарга эга. N нуқта $y^2 = ax$ параболада ётганлиги учун унинг координаталари парабола тенгламасини қаноатлантиради; натижада

$$\frac{y^2}{4} = a\left(x+\frac{yy'}{2}\right)$$

ёки

$$y'-\frac{y}{2a} = -\frac{2x}{y}. \qquad (27)$$

Дифференциал тенглама тузилди. Бу Бернулли тенгламасидир ($n = -1$). Уни $2yy'-\frac{y^2}{a} = -4x$ кўринишда қайта ёзамиз ва $y^2 = z$ деймиз, мос равишда $2yy' = z'$. Тенглама чизиқли кўринишга келади:

$$z'-\frac{z}{a} = -4x.$$

Унинг умумий ечимини (7) формула бўйича ёзамиз:

$$z = e^{x/a}\left(-4\int xe^{-x/a}dx + C\right).$$

Сўнгра

$$\int xe^{-x/a}\,dx = -axe^{-x/a} - a^2e^{-x/a}$$

бўлгани учун

$$z = y^2 = e^{x/a}\left[4a(xe^{-x/a} + ae^{-x/a}) + C\right]$$

ёки

$$y^2 = 4ax + 4a^2 + Ce^{x/a}.$$

$x = 0$ да $y = 0$ бошланғич шартдан $C = -4a^2$ ни топамиз. Эгри чизиқнинг изланаётган тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y^2 = 4ax + 4a^2\left(1 - e^{x/a}\right),$$

5-§. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР. ИНТЕГРАЛЛОВЧИ КЎПАЙТУВЧИ

Агар

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг чап томони бирорта $U(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y)$$

бўлса, (1) тенглама *тўлиқ дифференциаллардаги тенглама* дейилади. Бу ҳолда уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dU(x. y) = 0,$$

бу ердан интеграллаш билан қуйидаги умумий интегрални ҳосил қиламиз:

$$U(x, y) = C.$$

Масалан,

$$2xydx + (x^2 - 2y)dy = 0$$

тенгламанинг чап қисми $U(x, y) = x^2y - y^2$ функциянинг тўлиқ дифференциали эканлигини кўриш осон. Шунинг учун тенгламани

$$d(x^2y - y^2) = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ердан

$$x^2y - y^2 = C$$

умумий интегрални топамиз.

Бу фактдан биз китобнинг кириш қисмидаёқ фойдаланган эдик. Қуйидаги саволнинг юзага келиши табиий: қандай шартларда (1) тенглама тўлиқ дифференциаллардаги $dU(x, y) = 0$ тенглама бўлади ва $U(x, y)$ функция қандай топилади? Қуйидаги теорема бу саволга жавоб беради.

Теорема. *Ушбу*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2}$$

дифференциал ифода (бу ерда $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар xOy текисликнинг D соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлиб, узлуксиз $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга) бирорта $U(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиши учун D соҳанинг барча нуқталарида

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

шарт бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Дастлаб бу шартнинг зарурийлигини исбот қиламиз. Бунинг учун шундай $U(x, y)$ функция мавжудки, унинг учун

$$dU = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлади деб фараз қиламиз ва (3) тенглик ўринли бўлишини исбот қиламиз. $U(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$ ифода бўлади. У (2) га тенг бўлгани сабабли исталган dx ва dy учун ўринли бўлган

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

айниятга эга бўламиз. dx ва dy олдидаги кўпайтувчиларни таққослаб топамиз:

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Биринчи тенгликнинг иккала томонини y бўйича, иккинчи тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз, натижада:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}.$$

Аралаш ҳосилаларнинг тенглиги $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ дан $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ деган хулосага келамиз.

Энди теоремадаги шартнинг етарлилигини исботлаймиз. Бунинг учун (3) шарт бажарилган деб фараз қилиб, (2) ифода бирорта $U(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлишини, яъни

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \tag{4}$$

тенглик ўринли эканлигини исбот қиламиз.

Бу билан масала хусусий ҳосилали иккита дифференциал тенгламадан иборат (4) системани қаноатлантирувчи $U(x, y)$ функцияни топишга келтирилади.

(4) тенгламаларнинг биринчисини оламиз. Унинг ечимини

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi(y) \tag{5}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда x_0 D соҳадаги бирорта $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг абсциссаси, $\varphi(y)$ эса унинг ихтиёрий C ўзгармаснинг ўрнини босувчи бирорта функциясидир, чунки интеграллаш y ўзгармас қиймат сақлайди деган шартда x бўйича бажарилади. $\varphi(y)$ ни шундай аниқлаймизки, (4) тенгламаларнинг иккинчиси ҳам қаноатлантирилсин. (5) тенгликнинг иккала қисмини y бўйича дифференциаллаймиз; у ҳолда

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \varphi'(y),$$

бироқ $\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y)$ бўлгани ва аниқ интегрални параметр бўйича дифференциаллаш теоремасига кўра

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx$$

бўлгани учун

$$N(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx + \varphi'(y).$$

Шартга кўра $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, демак,

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dx.$$

Кейинги интеграл

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x}\,dx = N(x,\ y)\Bigg|_{x_0}^{x} = N(x,\ y) - N(x_0,\ y)$$

га тенг, шу сабабли

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

бу ердан

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)\,dy + C,$$

бу ерда y_0 D соҳадаги $P_0(x_0\ y_0;)$ нуқтанинг ординатаси, C— ихтиёрий ўзгармас. $\varphi(y)$ нинг топилган қийматини (5) тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$U(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x,\ y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)\,dy + C. \qquad (6)$$

Шундай қилиб, $U(x,\ y)$ функциянинг мавжуд эканлиги исботланибгина қолинмасдан, ҳатто бу функцияни топиш учун формула ҳам келтириб чиқарилди. Аслини олганда тегишли масалалар ечганда тайёр (6) формуладан фойдаланмасдан, умумий ҳолдаги каби йўл тутиш мумкин (ёки аниқ интегралларни аниқмас интеграллар билан алмаштириш керак).

Масалан, ушбу

$$(7x + 3y)\,dx + (3x - 5y)\,dy$$

дифференциал ифода $dU(x,\ y)$ тўлиқ дифференциал эканлигини текширамиз ва $U(x,\ y)$ функцияни топамиз.

Бу ҳолда $M(x,\ y) = 7x + 3y$, $N(x,\ y) = 3x - 5y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 3$, демак, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ шарт бажарилган. Энди

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 7x + 3y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 3x - 5y$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи $U(x,\ y)$ функцияни топамиз. Бу тенгламаларнинг биринчисидан:

$$U(x,\ y) = \int (7x + 3y)dx + \varphi(y) = \frac{7}{2}x^2 + 3xy + \varphi(y).$$

Бу ердан $\frac{\partial U}{\partial y} = 3x + \varphi'(y)$. Маълумки, $\frac{\partial U}{\partial y} = 3x - 5y$, шунинг учун $3x - 5y = 3x + \varphi'(y)$. Бу ердан $\varphi'(y) = -5y$ ва $\varphi(y) = -\frac{5}{2}y^2 + C$.

Демак,

$$U(x,\ y) = \frac{7}{2}x^2 + 3\,xy - \frac{5}{2}\,y^2 + C.$$

Агар

$$(7x + 3y)\,dx + (3x - 5y)\,dy = 0$$

дифференциал тенгламани интеграллаш зарур бўлганда эди, у ҳолда уни

$$d\left(\frac{7}{2}\,x^2 + 3xy - \frac{5}{2}\,y^2\right) = 0$$

кўринишда қайта ёзиб олиб, ушбу умумий интегрални ҳосил қилган бўлар эдик:

$$7x^2 + 6xy - 5y^2 = C.$$

Яна бир мисол қараймиз. Ушбу дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0.$$

Бу тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари оиласидан координаталар бошидан ўтадиганини танлаб оламиз.
Бу ҳолда

$$M(x,\ y) = 2x\cos^2 y,\ N(x,\ y) = 2y - x^2\sin 2y.$$

Сўнгра

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\,4x\cos y\sin y = -\,2x\sin 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\,2x\sin 2y,$$

бўлгани учун $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ шарт бажарилади ва тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага эга бўламиз. Ушбу

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\,x\cos^2 y, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - x^2\sin 2y$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи $U(x,\ y)$ функцияни топиш қолди. Биринчи тенгламадан:

$$U(x,\ y) = \int 2x\cos^2 y dx + \varphi(y) = x^2\cos^2 y + \varphi(y),$$

бу ердан

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\,x^2\sin 2y + \varphi'(y).$$

$\frac{\partial U}{\partial y}$ ни $2y - x^2\sin 2y$ билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$2y - x^2\sin 2y = -\,x^2\sin 2y + \varphi'(y)$ ёки $\varphi'(y) = 2y$, демак, $\varphi(y) = y^2 + C$. Шундай қилиб, интеграл эгри чизиқлар оиласининг тенгламаси ушбу, кўринишда бўлади:

$$x^2\cos^2 y + y^2 + C = 0 \text{ ёки } \frac{x^2}{2} + \frac{x^2\cos 2y}{2} + y^2 + C = 0.$$

Бошланғич шарт $x = 0$ да $y = 0$ дан $C = 0$ келиб чиқади, натижада изланаётган интеграл эгри чизиқнинг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + x^2\cos 2y + 2y^2 = 0.$$

Агар $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ шарт бажарилмаган бўлса, у ҳолда (1) дифференциал тенглама тўлиқ дифференциаллардаги тенглама бўлмайди. Бироқ бу тенгламани тегишли $\mu(x, y)$ функцияга кўпайтириш билан уни тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага келтириш мумкин. Бундай функция берилган дифференциал тенглама учун *интегралловчи кўпайтувчи* номи билан юритилади. Ҳар қандай дифференциал тенглама учун ҳам интегралловчи кўпайтувчи мавжуд, бироқ бу уни топиш осон деган сўз эмас. (1) тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиси қандай изланишини кўрсатамиз.

Ушбу

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x, y)\,dy = 0$$

тенглама тўлиқ дифференциаллардаги тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

ёки

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (7)$$

шарт бажарилиши керак.

(7) тенглик (1) тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчиларининг дифференциал тенгламасидир, чунки унинг ҳар бир ечими (1) тенгламанинг иккала томонига кўпайтирилгандан сўнг уни тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага келтиради. $\mu(x, y)$ ни топиш учун хусусий ҳосилали (7) дифференциал тенгламани интеграллаш керак. Умумий ҳолда бу масала (1) оддий дифференциал тенгламани интеграллашдан қийинроқдир. Агар μ фақат биргина x ёки y ўзгарувчига боғлиқ бўлса, масала анча соддалашади. Биз фақат ана шу икки хусусий ҳолни қараймиз.

$\mu = \mu(x)$ бўлсин. У ҳолда (7) тенглама ушбу кўринишни эгаллайди.

$$N\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \text{ ёки } \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{dx}}{N}dx,$$

бу ердан

$$\ln\mu(x) = \int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx + C,$$

яъни

$$\mu(x) = e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\partial x} \tag{8}$$

(ихтиёрий C ўзгармас нолга тенг деб олинган, чунки қандайдир битта интегралловчи кўпайтувчига эга бўлсак, кифоя).

Бу ҳолда $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N$ ифода y га боғлиқ бўлмаслиги равшан. Акси ҳам тўғри: агар $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\Big/N$ ифода y га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда фақат x га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи μ мавжуд. У (8) тенглик билан ифодаланади.

Энди $\mu = \mu(y)$ бўлсин. У ҳолда (7) тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$M\frac{d\mu(y)}{dy} = -\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \text{ ёки } \frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{dx}}{M}dy,$$

бу ердан

$$\mu(y) = e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy}, \tag{9}$$

бу ерда $C = 0$ деб олинган.

Бу ҳолда $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/M$ ифода x га боғлиқ эмас, ва аксинча, агар бу ифода x га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда фақат y га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи μ мавжуд ва у (9) тенглик билан ифодаланади.

(1) тенгламани тўлиқ дифференциаллардаги тенглама кўринишига келтириш учун қаралаётган хусусий ҳолларда одатда қуйидагича йўл тутилади. $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ ифода тузилади ва унинг N га нисбати олинади. Агар бу ифода y га боғлиқ бўлмаса, интегралловчи кўпайтувчини топиш учун (8) формуладан фойдаланиш керак; акс ҳолда $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ ифоданинг x га нисбати олинади, агар бу нисбат x га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда x га боғлиқ бўлмаган μ кўпайтувчи мавжуд ва уни (9) формула бўйича топиш мумкин.

Масалан,

$$(x^2-y)\,dx+(x^2y^2+x)dy=0$$

дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топайлик ва бу тенгламани интеграллайлик.

Бу ҳолда

$$M(x,\ y)=x^2-y,\, N\,(x,\ y)=x^2y^2+x,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2+1,\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-2(1+xy^2).$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/\ M=\frac{-2(1+xy^2)}{x^2-y}\quad \text{нисбат } x \text{ ва } y \text{ га боғлиқ.}$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/\ \ N=\frac{-2(1+xy^2)}{x(xy^2+1)}=-\frac{2}{x}$$

нисбат фақат x га боғлиқ. Демак, $\mu=\mu(x)$ интегралловчи кўпайтувчи (8) формула бўйича топилиши мумкин:

$$\mu(x)=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=e^{-2\ \ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Тенгламанинг иккала томонини $1/x^2$ га кўпайтирамиз:

$$\left(1-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y^2+\frac{1}{x}\right)dy=0\ \text{ ёки }\ dx+y^2dy+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=0.$$

$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$ бўлгани учун умумий интеграл интеграллаш йўли билан

$$x+\frac{y^3}{3}+\frac{y}{x}=\frac{C}{3}\quad \text{ёки}\ 3x^2+xy^3+3y-Cx=0$$

кўринишда ҳосил бўлади.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

чизиқли тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топамиз.

Бунинг учун тенгламани дифференциаллар қатнашган кўринишда қайта ёзиб оламиз:

$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$. Бу ерда $M(x,\ y) = P(x)y - Q(x)$, $N(x, y) = 1$; шу сабабли

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x); \frac{\partial N}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = P(x).$$

Нисбат: $\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ N = P(x)$. (8) формулага кўра $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Чизиқли тенгламанинг иккала томонини $e^{\int P(x)dx}$га кўпайтириш уни тўлиқ дифференциаллардаги тенгламага келтиради. Шундай қилиб, чизиқли тенгламани интеграллашнинг яна бир усули ҳосил қилинди.

$\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx}$ дифференциал тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топайлик ва бу тенгламани $a+m \neq 0$ бўлса, интеграллайлик.

Мазкур ҳолда $P(x) = a$. Шунинг учун $\mu(x) = e^{ax}$.Қуйидагига эгамиз:

$$e^{ax}[(ay - e^{mx})dx + dy] = 0,\ ae^{ax}y\,dx + e^{ax}dy - e^{(a+m)x}dx = 0$$

ёки

$$d(e^{ax}y) - e^{(a+m)x}dx = 0.$$

Умумий интеграл:

$$e^{ax}y - \frac{e^{(a+m)x}}{a+m} = C,$$

умумий ечим:

$$y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m}.$$

6-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ТУЗИШ ҲАҚИДА

Дифференциал тенгламалар тузишни талаб этадиган геометрик ва физикавий масалаларни ечиш кўпинча қийинчиликлар туғдиради: конкрет физикавий масалаларнинг спецификаси турли физикавий қонунларни билишни талаб этади. Дифференциал тенгламаларни тузишнинг барча ҳоллар учун яроқли бўлган универсал усулини кўрсатиш мумкин эмас; фақат баъзи бир умумий кўрсатмалар бериш мумкин, холос.

Геометрик ёки физикавий масалалар шартларига қараб биринчи тартибли дифференциал тенгламалар тузишда кўпинча тенгламаларнинг қуйидаги уч кўринишидан бирига келинади:

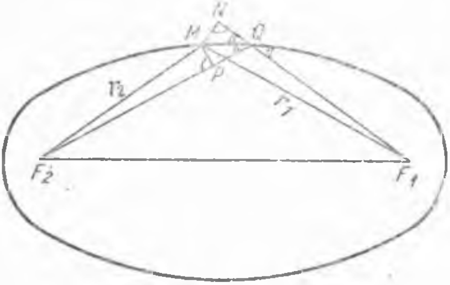
1) дифференциаллар иштирок этган дифференциал тенгламалар;

2) ҳосилалар иштирок этган дифференциал тенгламалар;

3) кейинчалик дифференциал тенгламаларга алмаштириладиган энг содда интеграл тенгламалар.

Бундай кўринишдаги тенгламалар қандай тузилишини айрим-айрим кўриб чиқамиз.

I. Дифференциаллар иштирок этган тенгламалар. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар тузишда кўпинча *дифференциаллар усули* деб аталадиган усулдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади. Бу усул шундан иборатки, масала шартидан тақрибий йўл билан дифференциаллар орасида муносабатлар тузилади. Бунда масалани соддалаштирувчи ва натижаларга таъсир қилмайдиган йўл қўйишларга рухсат этилади. Жумладан, катталикларнинг кичик орттирмалари уларнинг дифференциаллари билан алмаштирилади, нотекис ўтадиган физикавий жараёнлар (нуқтанинг нотекис ҳаракати, жисмнинг қизиши ёки совиши, идишдан сувнинг оқиши ва ҳ. к.) кичик вақт оралиғида текис, ўзгармас тезлик билан юз берадиган жараёнлар сифатида қаралади. Орттирмаларни дифференциаллар билан алмаштириш кичиклиги энг юқори бўлган чексиз кичик миқдорларни ташлаб юборишга келтирилганлиги учун бундай йўл қўйишлар охирги натижанинг тўғрилигига таъсир этмайди. Функциянинг



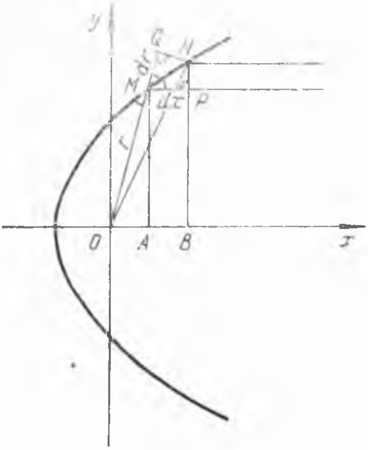
14- расм.

ва унинг аргументи дифференциалларининг нисбати уларнинг орттирмалари нисбатларининг лимити бўлганлиги сабабли, орттирмалар нолга интила борган сари бизнинг йўл қўйган фаразларимиз катта аниқлик билан бажарилади. Агар бунда ҳосил бўладиган дифференциал тенгламалар дифференциалларга нисбатан бир жинсли ва чизиқли бўлса, бу тенгламалар аниқ бўлади.

Дифференциаллар методининг татбиқ қилинишига доир геометрик мисол кўрамиз.

1- мисол. Бир нуқтадан чиқувчи ёруглик пурлари рефлектор кўзгусидан қайтиб, бошқа бир нуқтада кесишиши учун рефлектор кўзгусини қандай айланиш сирти бўйича силлиқлаш керак?

Ечилиши. Масала изланаётган сиртнинг ёруғлик манбаи жойлашган F_1 нуқта ва қайтган нурлар кесишадиган F_2 нуқта орқали ўтадиган меридиан текислик билан кесилишидан ҳосил бўлган кесимнинг тенгламасини топишга келтирилиши равшандир (14- расм). MQ — бу кесимнинг кичик ёйи бўлсин. Уни тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблаб ҳамда F_1 ва F_2 нуқталарни марказ қилиб $F_1M = r_1$ ва $F_2M = r_2$ радиусли айланаларнинг MN ва MP ёйларини чизамиз. Бу ёйларни ҳам тўғри чизиқ кесмалари деб ҳисоблаймиз. MQN ва MQP учбурчаклар умумий MQ гипотенузага эга бўлиб, тўғри бурчаклидирлар ($\angle MNQ$ ва $\angle MPQ$ — тўғри бурчаклар). Оптикадаги тушиш ва қайтиш бурчакларининг тенглиги ҳақидаги маълум теоремадан ва вертикал бурчаклар тенглиги хоссасидан фойдаланиб, $\angle MQN = \angle MQP$ эканлигини топамиз, бинобарин, учбурчаклар ўзаро тенг экан. Бу ердан $QN = QP$ эканлиги келиб чиқади, бироқ $ON = -\Delta r_1$, $QP = \Delta r_2$ бўлганлиги учун r_1 ва r_2 радиус-векторларнинг орттирмаларини уларнинг дифференциаллари билан алмаштириб, топамиз:



15- расм.

$$dr_1 + dr_2 = 0. \qquad (1)$$

Дифференциал тенглама тузилди. Уни интеграллаш осон. Бунинг учун уни қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$d(r_1 + r_2) = 0.$$

Бу ердан умумий интегрални топамиз.

$$r_1 + r_2 = C. \tag{2}$$

Шундай қилиб, изланаётган сиртнинг меридиан текислик билан кесими эллипс экан. Демак, рефлектор кўзгусини айланиш эллипсоиди бўйича силлиқлаш керак экан.

Бу масалани қуйидагича ўзгартирамиз. F_1 нуқтадан чиқаётган нурлар қайтгандан сўнг параллел бўлсинлар деб фараз қилайлик.*

Координаталар системасини шундай танлаб оламизки, ёруғлик манбаи координаталар бошида жойлашсин, қайтган нурлар эса Ox ўққа параллел бўлсин (15- расм). MN— кесимнинг кичик ёйи бўлсин, уни илгаригидек, тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблаймиз. O ни марказ қилиб, $ON = OM + MQ$ радиусли айлананинг NQ ёйини ўтказамиз. Бу ёйни ҳам тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблаймиз. Абсциссалари x ва $x + dx$ бўлган M ва N нуқталардан Ox ўққа MA ва NB перпендикулярлар туширамиз, бундан ташқари M нуқтадан BN га у билан P нуқтада кесишадиган перпендикуляр ўтказамиз. MQN ва MPN учбурчакларнинг MN гипотенузаси умумий бўлиб, улар тўғри бурчаклидир ($\angle MQN$ ва $\angle MPN$ — тўғри бурчаклар). Бу учбурчаклар ўзаро тенг, чунки уларнинг биттадан ўткир бурчаклари тенг: $\angle QMN = \angle PMN$; бу тушиш ва қайтиш бурчакларининг тенглигидан ҳамда вертикал бурчакларнинг тенглигидан келиб чиқади. Шу сабабли $MQ = MP$ ва $MQ = dr$ (Δr орттирмани dr дифференциал билан алмаштирдик) ҳамда $MP = dx$ бўлганлигидан дифференциал тенглама

$$dr = dx \tag{3}$$

кўринишга эга бўлади.

Умумий интегрални интеграллаш билан топамиз:

$$r = x + C \tag{4}$$

ёки r ни $\sqrt{x^2 + y^2}$ билан алмаштирсак,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

---

* 57, 58- бетлардаги 2- мисолга қаранг (3-§).

Агар тенгламанинг ҳар иккала томонини квадратга оширсак,

$$y^2 = 2Cx + C^2 \tag{5}$$

ни ҳосил қиламиз, бу кесим парабола эканини кўрсатади. Демак, бу ҳолда рефлектор кўзгусини айланиш параболоиди бўйича силлиқлаш керак.

Дифференциал метод татбиқ қилиб ечиладиган физикага доир мисолларни бу ерда келтириб ўтирмаймиз. 2-§нинг бир қатор масалалари у ерда очиқ-ойдин гапирилмаган бўлса-да, бу метод билан ечилган. Уларни ана шу нуқтаи назардан яна бир бор диққат билан қараб чиқишни маслаҳат берамиз.

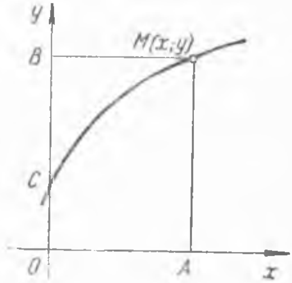
II. Ҳосилалар иштирок этган тенгламалар. Кўп ҳолларда дифференциаллар ўрнига ҳосилалар (улар катталикларнинг ўзгариш тезликлари каби қаралади) иштирок этган дифференциал тенгламалар тузиш мумкин. Бунда, хусусан, ҳосилаларнинг геометрик маъноси (уринманинг бурчак коэффициенти) ва физикавий маъноси (нотекис процесснинг рўй бериш тезлиги) дан фойдаланилади. Бу усул дифференциаллар усулининг ўзгартирилган туридир. Бу ерда чексиз кичикларнинг йўқлиги шартлидир: бу усулда катталикнинг ўзгариш тезлигининг тайёр тушунчасидан фойдаланилади, ваҳоланки, унинг ўзи чексиз кичик элементларни текшириш туфайли пайдо бўлган.

Олдинги параграфларда геометрик ва физикавий характердаги кўп мисоллар келтирилган бўлиб, уларда дифференциал тенгламалар ана шу усулда тузилди.

III. Энг содда интеграл тенгламалар. Баъзи масалаларни ечиш номаълум функциялари интеграл белгиси остида бўлган тенгламаларга олиб келади. Бундай тенгламалар *интеграл тенгламалар* дейилади. Улар, жумладан, аниқ интегрални эгри чизиқли трапециянинг юзи деб геометрик маъно беришдан ва бошқа интеграл формулалардан (ёй узунлиги, сирт юзи, жисм ҳажми, куч бажарган иш ва ҳ. к.) фойдаланишдан келиб чиқади. Энг содда ҳолларда интеграл тенгламаларни дифференциаллаш орқали одатдаги усул билан ечиладиган дифференциал тенгламаларга келтиришга эришилади. Мисоллар келтирамиз.

2- мисол. $M_0(2; 4)$ нуқтадан ўтувчи ва ушбу ҳоссага эга бўлган эгри чизиқни топинг: агар эгри чизиқнинг исталган нуқтасидан координата ўқларига параллел қилиб, улар билан кесишгунча иккита тўғри чизиқ ўтказсак, у ҳолда ҳосил бўлган тўғри тўртбурчак эгри чизиқ орқали икки қисмга бўлиниб, улар бирининг (Ox ўққа ёпишганининг) юзи иккинчисиникидан икки марта ортиқ бўлади.

Ечилиши. Эгри чизиқнинг $M(x; y)$ нуқтаси орқали Oy ўққа параллел MA тўғри чизиқ ва Ox ўққа параллел MB тўғри чизиқ ўтказамиз (16- расм). Масала шартига кўра $OCMA_{юз}=2CBM_{юз}$. Маълумки, $OCMA_{юз}=\int\limits_0^x ydx$, $CBM_{юз}=OBMA_{юз}-OCMA_{юз}=xy-\int\limits_0^x ydx$. Ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:



16- расм.

$$\int\limits_0^x ydx = 2\left(xy - \int\limits_0^x ydx\right) \quad \text{ёки}$$

$$3\int\limits_0^x ydx = 2xy.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$3y = 2y + 2xy' \quad \text{ёки} \quad 2xy' = y.$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама. Ўзгарувчиларни ажратиб топамиз:

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

бу ердан

$$y^2 = Cx.$$

Шундай қилиб, учлари координаталар бошида ва симметрия ўқлари Ox ўқ билан устма-уст тушадиган парабола масалалар шартида айтилган хоссага эга бўлишини кўрамиз. Бошланғич шартдан фойдаланиб, $C = 8$ ни топамиз. Шундай қилиб, изланаётган эгри чизиқ $y^2 = 8x$ параболадан* иборат экан.

3- мисол. m массали моддий нуқтага таъсир этадиган куч бажарган иш ҳаракат бошлангандан бери ўтган t вақтга пропорционал (k — пропорционаллик коэффициенти) экан-

---

* Топилгандан кўриниб турибдики, эгри чизиқ координаталар бошидан ўтади, яъни C нуқта O нуқта билан устма-уст тушади (16- расмга қаранг).

лиги маълум бўлса, нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини топинг. Бошланғич йўл ва бошланғич тезлик мос равишда s_0 ва v_0 га тенг.

Ечилиши. Механикадан маълумки, нуқтанинг тўғри чизиқли кўчишида (куч ва тезлик йўналишлари бир хил) бажарилган иш: $A = \int_{s_0}^{s} F(u)\,du$, бу ерда $F(s)$ — нуқтага таъсир этаётган куч. Масала шартига кўра $A = kt$. A нинг ҳар иккала ифодасини солиштириб топамиз:

$$\int_{s_0}^{s} F(u)du = kt.$$

s бўйича дифференциалласак:

$$F(s) = k\frac{dt}{ds}.$$

Маълумки, $\frac{ds}{dt} = v$ (ҳаракат тезлиги) ва $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{v}$, шунинг учун $F(s) = \frac{k}{v}$.

Иккинчи томондан, Ньютоннинг иккинчи қонунидан: $F(s) = m\frac{dv}{dt}$. Энди $F(s)$ учун топилган ифодаларни таққослаб, ушбу дифференциал тенгламани тузамиз:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{k}{v},$$

бу ердан

$$\frac{mv^2}{2} = kt + C_1.$$

$t = 0$ да $v = v_0$ бошланғич шартдан $C_1 = mv_0^2/2$ ни топамиз, шунинг учун

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m}t + v_0^2}.$$

v ни $\frac{ds}{dt}$ билан алмаштириб ва интеграллаб топамиз:

$$s = \frac{m}{3k}\left(\frac{2k}{m}t + v_0^2\right)^{3/2} + C_2.$$

$t = 0$ да $s = s_0$ бошланғич шартдан $C_2 = s_0 - \frac{mv_0^2}{3k}$ ни топамиз. Ниҳоят, нуқтанинг ҳаракат қонуни ушбу кўринишни олади:

$$s = \frac{m}{3k}\left(\frac{2k}{m}t + v_0^2\right)^{3/2} + s_0 - \frac{mv_0^3}{3k}.$$

7-§ БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ҲАҚИДА ҚЎШИМЧА МАЪЛУМОТЛАР

1- § да умумий ечимни аниқлашда берилган бошланғич шартни қаноатлантирадиган хусусий ечимнинг мавжудлик шартлари тўғрисида савол туғилган эди. Бундай ечимларнинг энг соддаларини биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаси беради.

Коши теоремаси. *Агар $f(x,y)$ функция xOy текисликнинг D соҳасида аниқланган ва узлуксиз ҳамда бу соҳанинг барча нуқталарида узлуксиз $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда D соҳанинг $M_0(x_0; y_0)$ нуқтаси қандай бўлишидан қатъи назар x_0 нуқтани ўз ичига олувчи интервалда аниқланган ва узлуксиз, шу билан бирга ягона $y = \varphi(x)$ функция мавжуд бўлиб, у $y' = f(x, y)$ тенгламанинг ечими бўлади ва $x = x_0$ да $y = y_0$ қийматни қабул қилади.*

Геометрия нуқтаи назаридан бу D соҳанинг исталган нуқтаси орқали ягона интеграл эгри чизиқ ўтишини, яъни дифференциал тенглама билан аниқланадиган майдон йўналишига ўзининг ҳар бир нуқтасида уринадиган эгри чизиқ ўтишини билдиради.

Теореманинг исботига тўхталиб ўтирмасдан, ечимни топиш мумкин бўладиган методни кўрсатамиз.

Бошланғич шарти $y|_{x=x_0} = y_0$ бўлган

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

дифференциал тенгламани

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt \tag{2}$$

кўринишда қайта ёзиб олиш мумкин, бу ерда t интеграллаш ўзгарувчисини билдиради.

Бу тенглама бошланғич шарти $y|_{y=x_0} = y_0$ бўлган (1) дифференциал тенгламага эквивалент бўлган энг содда интеграл тенгламадир. Ҳақиқатан ҳам, $x = x_0$ да аниқ интеграл нолга айланади ва $y = y_0$ бўлади. Интегралнинг юқори чегара бўйича ҳосиласи эса интеграл остидаги функцияга тенг бўлиб, унда интеграллаш ўзгарувчиси юқори чегара билан алмаштирилган, яъни $y' = f(x, y)$.

(2) тенгламанинг ечимини бевосита интеграллаш йўли билан топиб бўлмайди, чунки y нинг t га боғланиши маълум эмас. Шундай бўлса-да, ундан тақрибий ечимларни ҳосил қилиш учун фойдаланиш мумкин. Ана шу мақсадда нолинчи яқинлашиш сифатида ўзгармасга тенг функцияни, яъни $y = y_0$ ни қабул қиламиз. У ҳолда биринчи яқинлашишни ушбу тенгликдан фойдаланиб топиш мумкин:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

y_1 функцияни энди топа оламиз, чунки бу ерда интеграл белгиси остида t нинг маълум функцияси турибди. Худди шунга ўхшаш

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt,$$

умуман

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt.$$

Кўрсатиш мумкинки, юқорида келтирилган Коши теоремаси шартларида $\{y_n\}$ функциялар кетма-кетлиги x_0 ни ўз ичига олган бирорта интервалда яқинлашади ва унинг лимити (2) интеграл тенгламани, ва демак, бошланғич шартлари берилган (1) дифференциал тенгламани ҳам қаноатлантирувчи y функция бўлади. Ана шу Коши теоремасининг исботи булади.

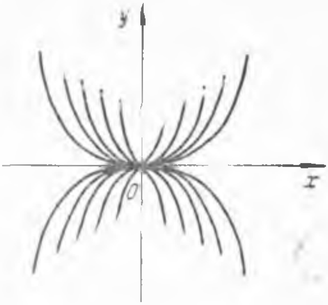
Бирор нуқтада Коши теоремаси шартларидан бирортасининг бузилиши бу нуқтанинг координаталари 1-§ да айтилган маънода «бўлиши мумкин бўлган шартлар» бўлмаслигига олиб келиши мумкин. Бундай нуқта орқали битта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмаслиги мумкин, шу билан бирга у орқали бир нечта интеграл эгри чизиқ ўтиши мумкин. Текисликнинг берилган дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ёки ягоналиги бузиладиган нуқтаси бу тенгламанинг *махсус нуқталари* дейилади.

Коши теоремасининг шартлари фақат етарли бўлиб, зарурий эмаслигини қайд қилиб ўтайлик. Шунинг учун (1) дифференциал тенгламанинг махсус нуқталарини $f(x, y)$ функциянинг узилиш нуқталари орасидан ва $\frac{\partial f}{\partial y}$ ҳосила мавжуд бўлмаган нуқталар орасидан излаш керак, бироқ бу нуқталарнинг ҳаммаси ҳам махсус нуқталар бўлиши шарт эмас.

Интеграл эгри чизиқлар махсус нуқта атрофида ўзини ҳар хил тутиши мумкин. Махсус нуқталарнинг мумкин бўлган айрим турлари билан мисоллар орқали танишамиз. Бир жинсли

$$y' = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$$

дифференциал тенгламани қараш билан чекланамиз. Бу тенгламанинг кўриниб турган махсус нуқтаси (0; 0) бўлиб, унда ўнг томон аниқланмаган. Коэффициентлар орасида турли муносабатлар махсус нуқта (координата маркази) атрофида интеграл эгри чизиқлар жойлашишининг у ёки бу типига олиб келади.



17- расм.

1- мисол. Ушбу

$$y' = \frac{2y}{x} \tag{3}$$

тенгламани текширамиз. Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб умумий ечимни топамиз:

$$y = Cx^2. \tag{4}$$

Шундай қилиб, умумий ечим учи координаталар бошида бўлиб абсциссалар ўқига уринадиган параболалар оиласидан иборат экан. Махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар жойлашишининг умумий кўриниши 17- расмда тасвирланган. Интеграл эгри чизиқлари ана шундай жойлашган дифференциал тенгламанинг махсус нуқтаси *тугун* дейилади.

2- мисол. Ушбу тенглама берилган:

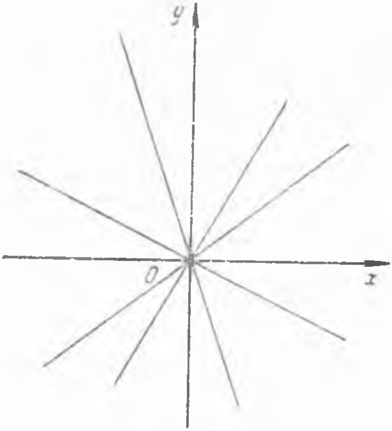
$$y' = \frac{y}{x}, \tag{5}$$

унинг умумий ечими $y = Cx$ дан, яъни координаталар бошидан ўтувчи барча тўғри чизиқлар (ордината ўқи ҳам, чунки ечимни $x = Cy$ кўринишда ёзиш мумкин эди) оиласидан иборат. Бундай нуқта ҳам *тугун (дикритик тугун)* дейилади; ушбу ҳол олдинги ҳолдан ҳар бир интеграл эгри чизиқ махсус нуқтада ўз йўналишига эгалиги билан фарқ қилади (18- расм).

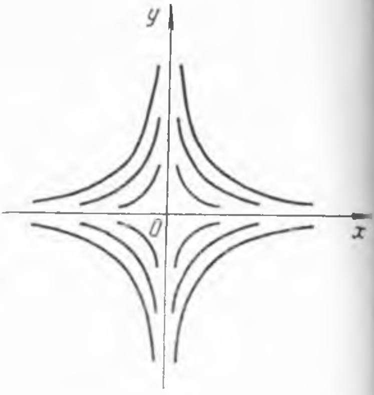
3- мисол. Ушбу

$$y' = -\frac{y}{x} \tag{6}$$

тенглама учун умумий интеграл $xy = C$ дан, яъни асимптоталари координата ўқларидан иборат бўлган гиперболалар оиласидан иборат. Хусусий ҳолда, $C = 0$ да $x = 0$ ва $y = 0$ (координаталар ўқлари) ни ҳосил қиламиз. Бу интеграл эгри чизиқлар координаталар боши-



18- расм.



19- расм.

дан ўтади, қолган ҳамма чизиқлар эса махсус нуқта орқали ўтмайди. Бу ҳол 19- расмда тасвирланган; бу турдаги махсус нуқта *эгар* дейилади.

4- мисол. Ушбу тенгламани қараймиз:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}. \tag{7}$$

$y = ux$ ўрнига қўйиш (7) ни

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

кўринишга келтиради, бу ердан ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб топамиз:

$$\ln C + \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x$$

ёки

$$x\sqrt{1+u^2} = C\,e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Эски ўзгарувчиларга қайтсак:

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}(y/x)}. \tag{8}$$

Қутб координаталарга ўтиб, (8) тенгламани $\rho = Ce^{\varphi}$ кўринишга келтирамиз. Бу координаталар боши атрофида чексиз сондаги ($\varphi \to -\infty$ да) ўрамлар ҳосил қилувчи логарифмик спираллар оиласидир. Махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар оиласининг кўриниши 20- расмда келтирилган. Бундай махсус нуқта *фокус* деб номланган.

5- мисол. Ушбу тенгламани қарайлик:

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{9}$$

Бу тенгламани интеграллаш

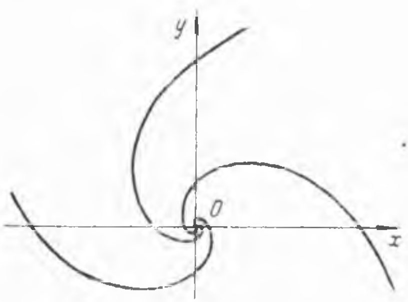
$$x^2 + y^2 = C$$

ни, яъни маркази координаталар бошида бўлган айланалар оиласини беради. Махсус нуқта орқали битта ҳам интеграл эгри чизиқ ўтмайди (21- расм). Бундай махсус нуқта *марказ* дейилади.

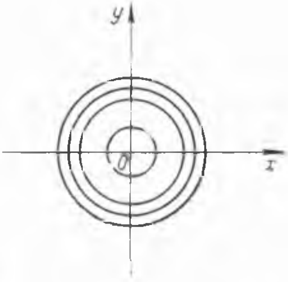
8- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ ТАҚРИБИЙ УСУЛЛАРИ

Бундан аввалги параграфларда чекли кўринишда интегралланадиган дифференциал тенгламаларнинг айрим турлари қаралган эди. Улар унчалик кўп эмас (кейинги параграфда улар бир оз кўпаяди), бунга олий техника юрти курсининг чегараланганлиги сабаб эмас. Гап шундаки, бундай турдаги тенгламалар, умуман, кам. Бироқ амалий масалалар кўпинча турли-туман дифференциал тенгламаларга олиб келадики, уларни ечиш учун тақрибий усулларга мурожаат қилишга тўғри келади.

Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг турли усулларига кўпдан-кўп китоблар* бағишланган. Одатда улар ҳисоблаш математикаси усулларига махсус бағишлан-



20- расм.



21- расм.

---

* Баён қилиниш стили ва савияси бўйича ушбу китобларни тавсия этиш мумкин: Р. С. Гутер и Б. В. Овчинский — Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, М., «Наука», 1970; Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова — Численные методы анализа. М., «Наука», 1966; Р. В. Хемминг — Численные методы, М., «Наука», 1972.

ган бўлимда ўрганилади. Шундай бўлса-да, ўқувчини дифференциал тенгламани текширишнинг ана шу томонлари билан таништириш мақсадида бу усулларнинг энг соддалари устида қисқача тўхтаб ўтамиз.

Бу материал билан танишишни *кетма-кет яқинлашиш усулидан* бошлаймиз. Бу усул бошланғич шарти $y|_{x=x_0} = y_0$ бўлган $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг ечимига яқинлашадиган функцияларнинг $\{y_n\}$ кетма-кетлигини тузишга асосланган. Бундай кетма-кетликни тузиш аввалги параграфда Коши теоремасини исботлаш усулини баён қилишда амалга оширилган эди. $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг исталган функциясини масаламизнинг тақрибий ечими деб қабул қилиш мумкин. Бундай кетма-кетликни тузиш билан мисол орқали танишиш мақсадга мувофиқ.

Бошланғич шарти $y|_{x=0} = 1$ бўлган $y' = xy$ тенгламани кетма-кет яқинлашиш усули билан ечайлик.

Нолинчи яқинлашиш учун $y = 1$ функцияни қабул қиламиз. У ҳолда

$$y_1 = 1 + \int_0^x t \cdot 1 \cdot dt = 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8},$$

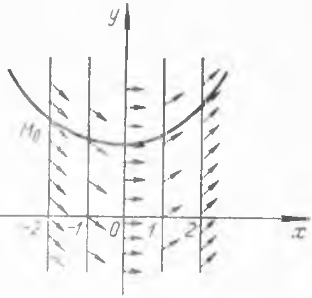
$$y_3 = 1 + \int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48},$$

……

Бу кетма-кетликнинг функцияларидан ҳеч бири берилган тенгламани аниқ қаноатлантирмайди, бироқ бу яқинлашишнинг аниқлиги яқинлашиш номери ортиши билан тез орта боради. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун тенгламанинг аниқ ечимини топиб, уни даражали қаторга ёйиш етарли. Буни мустақил бажаришни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Дифференциал тенгламанинг ечимини график усул ёрдамида ҳам излаш мумкин, бунинг учун тенглама аниқлайдиган йўналишлар майдонидан фойдаланилади. Агар *изоклиналардан,* яъни майдоннинг бир хил йўналишли нуқталаридан тузилган чизиқлардан фойдаланилса, майдонни тузиш анча енгиллашади. Бирорта изоклинани кесиб ўтувчи барча интеграл эгри чизиқлар кесишиш нуқталарида Ox ўққа бир хил бурчак остида оғган (изоклинанининг номи—

бир хил огган чизиқлар ана шундан келиб чиққан). Изоклинанинг таърифидан унинг тенгламасини тузиш усули келиб чиқади: $y' = f(x, y)$ тенгламанинг чап томонини бирор k катталикка тенглаш керак, у ҳолда $f(x, y) = k$ тенглама (k — параметр) изоклиналар оиласининг тенгламаси бўлади. k параметрга турли: $k_1, k_2, k_3, \ldots$ қийматлар бериб, берилган дифференциал тенгламанинг турли изоклиналарини ҳосил қиламиз.

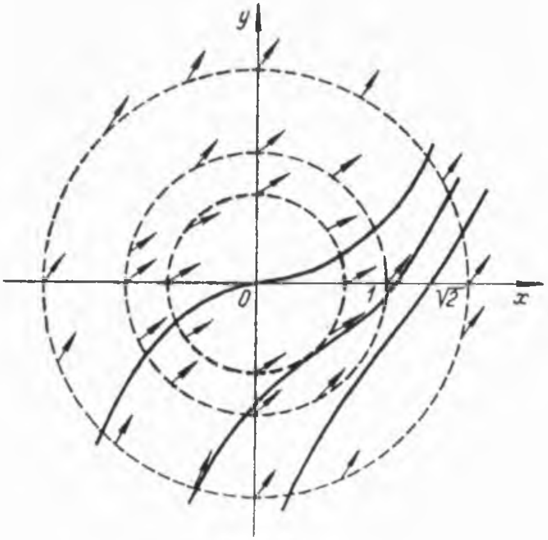


22- расм.

Масалан, изоклиналар ёрдамида $y' = \frac{x}{2}$ дифференциал тенгламанинг йўналишлар майдонини ясайлик. Берилган тенгламанинг изоклиналар оиласининг тенгламаси: $\frac{x}{2} = k$ ёки $x = 2k$. Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқлар изоклиналар бўлади (22- расм). $k = 0$ деб $x = 0$ изоклинани (Oy ўқни) ҳосил қиламиз, унинг барча нуқталарида майдон йўналиши Ox ўққа параллел. $k = 1$ да $x = 2$ изоклинани оламиз, унинг барча нуқталарида майдон Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этади; $k = -1$ деб, $x = -2$ изоклинанинг барча нуқталарида майдон йўналиши Ox ўқ билан —45° бурчак ташкил этишини кўрамиз ва ҳ. к.

Агар бирорта нуқта, масалан, $M_0(-2; 3)$ нуқтани олсак, у ҳолда бу нуқта орқали ўтувчи интеграл эгри чизиқни тақрибан ясаш мумкин, бунинг учун эгри чизиққа ҳар бир нуқтада ўтказилган уринма майдоннинг бу нуқтадаги йўналиши билан бир хилда бўлишидан фойдаланиш керак. Чизмадан кўриниб турибдики, интеграл эгри чизиқ параболани эслатади. Бу табиийдир: $y' = \frac{x}{2}$ тенгламанинг умумий ечими $y = \frac{x^2}{4} + C$ параболалар оиласидан иборат, $y|_{x=-2} = 3$ бошланғич шарт эса бу параболалардан бирини аниқлайди.

Иккинчи мисол сифатида $y' = x^2 + y^2$ дифференциал тенгламанинг йўналишлар майдонини ясаймиз. Бу тенгла-



23- расм.

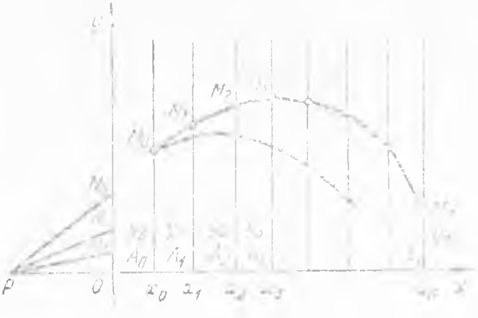
манинг изоклиналари маркази координаталар бошида бўлган концентрик айланалардан иборат бўлади: $x^2 + y^2 = k$ (23- расм). $k = 0$ да нуқтани — координаталар боши O (0; 0) ни ҳосил қиламиз, бу нуқтада майдоннинг йўналиши Ox ўққа параллел. $k = 1$ да $x^2 + y^2 = 1$ айланага эгамиз, унинг ҳар бир нуқтасида майдон йўналиши Ox ўқ билан 45° бурчак ташкил этади ва ҳ. к.

Агар тайин нуқтани, масалан, координаталар боши O (0; 0) ни олинса, ундан ўтувчи интеграл эгри чизиқни ясаш мумкин. 23- расмда бу эгри чизиқдан ташқари яна иккита интеграл эгри чизиқ тасвирланган.

$y'=f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг берилган M_0 (x_0; y_0) нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиғини йўналишлар майдонини аввалдан ясаб ўтирмасдан, синиқ чизиқ кўринишида тақрибий ясаш мумкин. Бунинг учун қуйидаги усулдан фойдаланиш мумкин.

xOy текисликда Oy ўққа параллел ва Ox ўқ билан абсциссалари $x_0, x_1, x_2, \dots$ бўлган $A_0, A_1, A_2, \dots$ нуқталарда кесишадиган тўғри чизиқлар ўтказамиз (24- расм).

$x = x_0$ тўғри чизиқда $M_0(x_0; y_0)$ нуқта олиб, интеграл эгри чизиқнинг ўрнини босадиган синиқ чизиқни бу нуқ-



24- расм.

тадан бошлаб чиза бошлаймиз. Тенгламанинг ўнг томонига M_0 нуқтанинг координаталарини қўямиз ва бу нуқтада интеграл эгри чизиққа ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини ҳисоблаймиз: $\operatorname{tg}\alpha_0 = y'_0 = f(x_0, y_0)$. Агар вертикал тўғри чизиқлар бир-бирларига етарлича яқин олинган бўлса, у ҳолда эгри чизиқнинг $x = x_0$ ва $x = x_1$ тўғри чизиқлар орасига жойлашган қисмини унга M_0 нуқтада ўтказилган уринма кесмаси билан алмаштириш мумкин. Уни ясаш учун M_0 нуқтадан $y'_0 = \operatorname{tg}\alpha_0$ бурчак коэффициенти юқорида ҳисобланган нур (энг яқин $x = x_1$ тўғри чизиқ билан $M_1(x_1; y_1)$ нуқтада кесишгунча) ўтказамиз.

Бу ясашни бирмунча соддалаштириш мумкин, бунинг учун Ox ўқнинг координаталар бошидан чап томонида $PO = 1$ масофа P қутб олиш ва Oy ўқда $ON_0 = f(x_0, y_0)$ кесма ажратиш керак. Агар N_0 нуқтани қутб билан тўғри чизиқ ёрдамида туташтирсак: $\frac{ON_0}{PO} = f(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$. Энди M_0 нуқтадан PN_0 га параллел тўғри чизиқ ўтказсак, уринманинг M_0M_1 кесмасини ҳосил қиламиз, бу билан эгри чизиқни (x_0, x_1) оралиқда M_0M_1 кесмага алмаштирамиз.

Бундан кейинги ясаш худди шундай давом эттирилади. $M_1(x_1; y_1)$ нуқтани интеграл эгри чизиқнинг нуқтаси учун қабул қиламиз. y_1 ординатани расмдан топамиз, унинг қийматини x_1 нинг қиймати билан биргаликда тенгламага қўямиз ва $\operatorname{tg}\alpha_1 = y'_1 = f(x_1, y_1)$ ни ҳисоблаймиз. Сўнгра Oy ўқда $ON_1 = f(x_1, y_1)$ кесма ажратамиз, N_1 нуқтани P қутб билан тўғри чизиқ кесмаси ёрдамида туташтирамиз ва M_1 нуқтадан $x = x_2$ тўғри чизиқ билан M_2 $(x_2; y_2)$ нуқтада кесишгунча $M_1M_2 \| PN_1$ тўғри чизиқ кесмаси ўтказамиз. Шундан сўнг худди шу ясашни M_2 нуқта учун бажарамиз ва ҳ. к. Бу ясашларни ҳам ўсувчи, ҳам камаювчи абсциссалар йўналишида бажариш мумкин. M_0M_1 M_2M_3. . . синиқ чизиқ $M_0(x_0; y_0)$ нуқтадан ўтувчи изланаётган интеграл эгри чизиқни тақрибий тасвирлайди. У *Эйлер синиқ чизиғи* дейилади.

OP кесмани ва ON_0, ON_1 ,ON_2 кесмаларни ясашда координата ўқларида қабул қилинган масштаблардан бошқача масштабдан ҳам фойдаланиш мумкин, чунки PN_0, PN_1, PN_2 кесмаларнинг йўналишлари бу кесмалар учун олинган масштабнинг танланишига боғлиқ эмас.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг тақрибий ечимини график топишнинг кўриб чиқилган усули *Эйлернинг синиқ чизиқлар усули* дейилади.

Бу усул амалда кўп қўлланилади, бироқ тавсифланган график шаклда эмас, балки сонли шаклда ишлатилиб, уни татбиқ қилиш натижасида тақрибий ечимнинг қийматлари жадвалини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, биринчи нуқтани ясашнинг ўзидаёқ унинг ординатасини ушбуга тенг деб оламиз:

$$y_1 = y_0 + y_0'(x_1 - x_0) = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0).$$

Агар x_0, x_1, x_2, . . . нуқталар бир-биридан бир хил масофада бўладиган қилиб танланган деб фараз қилсак ва улар орасидаги бу масофани $h = x_{k-1} - x_k$ деб белгиласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$y_1 = y_0 + y_0' h = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

$$y_2 = y_1 + y_1' h = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

умуман

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h = y_k + hf(x_k, y_k). \qquad (1)$$

Эйлер усули билан 94- бетдаги бошланғич шарти $y|_{x=0} = 1$ бўлган $y' = xy$ тенгламани ечайлик. Қийматлар жадвалини $h = 0{,}1$ қадам билан ҳисоблаймиз.

Ҳисоблашларни қуйида келтирилган жадвал кўринишда ёзилган схема тарзида тасвирлаймиз. x ва y нинг биринчи сатрда берилган бошланғич қийматлари бўйича ҳосила ҳисобланади ва (4) устуннинг ўша сатрига ёзилади. Сўнгра (3) устун учун $\Delta y = y'h$ топилади. Δy ни y нинг олдинги сатрдаги қийматига қўшиш y нинг кейинги сатрдаги қийматини беради. Бундан кейинги ҳисоблашлар шу схема бўйича кетаверади.

(1)	(2)	(3)	(4)
x	y	Δy	$y' = xy$
0	1	0,000	0
0,1	1,000	0,010	0,100
0,2	1,010	0,020	0,202
0,3	1,030	0,031	0,309
0,4	1,061	0,042	0,424
0,5	1,103		

$y = e^{x^2/2}$ аниқ ечимининг $x = 0{,}5$ нуқтадаги қиймати $y = 1{,}133$ га тенг, демак, топилган тақрибий ечимнинг абсолют хатоси 0,030 га, нисбий хатоси эса 3% га тенг.

Келтирилган мисолдан кўриниб турибдики, конкрет амалий (татбиқий) масалаларни ҳал этишда сонли методлар бошқа тақрибий методларга нисбатан анча қулай, чунки у ечимни келгусида ҳам фойдаланиш учун яроқли бўлган шаклда топишда имкон беради. Бироқ Эйлер усули мазкур ҳол учун ҳар ҳолда қўпол яқинлашиш беради: ҳатто $h = 0{,}1$ қадамда нисбий хато бешта қадамдан сўнг 3% ни ташкил этяпти. Бу нарса ечимнинг катта тезлик билан ўсиши орқали тушунтирилади. Бошқа тенгламалар учун бундан яхшироқ аҳволга дуч келамиз. Шундай бўлса-да, энг содда ҳисобланган Эйлер усулининг аниқлиги энг камдир.

Аниқликни оширишнинг имкониятларидан бири эгри чизиқни унинг оралиқ охирида эмас, балки унинг ўртасида ўтказилган уринмаси билан алмаштиришдан иборат. Бунинг учун (x_k, x_{k+1}) оралиқ ўрнига ўртасида x_k нуқта бўлган (x_{k-1}, x_{k+1}) оралиқни қараймиз. Агар бу оралиқда интеграл эгри чизиқни абсциссаси x_k бўлган нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштирсак, унинг бурчак коэффициенти $y'_k = f(x_k, y_k)$ га тенг бўлади ва оралиқ узунлиги $2h$ га тенг бўлганлигидан:

$$\Delta y_k = 2hy'_k = 2hf(x_k, y_k), \tag{2}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \Delta y_k = y_{k-1} + 2hy'_k = y_{k-1} + 2hf(xk, y_k). \tag{3}$$

Анча аниқроқ натижа берадиган бу формулалар *Эйлернинг аниқлаштирилган усули* дейилади. Уни қўлланишдаги кичик бир қийинчилик шундан иборатки, келтирилган формулаларни фақат $k = 1$ дан бошлаб татбиқ қилиш мумкин, бу $y_2 = y_0 + 2hy_1' = y_0 + 2hf(x_1, y_1)$ ни топишга имкон беради; бу ерда фақат y_0 эмас, балки y_1 ҳам маълум деб фараз қилинади. y_1 ни топиш учун Эйлернинг одатдаги усулидан фойдаланиш мумкин. Яна ҳам яхшироғи, Эйлер усули бўйича дастлаб $y_{1/2}$ нинг қийматини $x_{1/2} = x_0 + h/2$ «ярим нуқтада» ҳисоблаб олишдир.

Эйлернинг аниқлаштирилган усулининг татбиқ қилинишини юқоридаги $y' = xy$, $y|_{x=0} = 1$, $h = 0,1$ тенглама мисолида кўрайлик.

$y_0' = x_0 y_0 = 0$ бўлгани сабабли «ярим нуқта» учун $\Delta y_0 = 0$ ва $y_{1/2} = 1,000$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда

$$y'_{1/2} = x_{1/2}\, y_{1/2} = 0,050.$$

Энди қуйидагини ёзиш мумкин:

$$y' = y_0 + hy'_{1/2} = 1 + 0,005 = 1,005.$$

Кейинги ҳисоблашларни (2) ва (3) формулалар бўйича бажариш мумкин. Жумладан,

$$y'_1 = x_1 y_1 = 0,101; \qquad y_2 = y_0 + 2hy'_1 = 1 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,101 = 1,020;$$
$$y'_2 = x_2 y_2 = 0,204; \qquad y_3 = y_1 + 2hy'_2 = 1,005 + 0,041 = 1,046.$$

Ҳисоблашларни одатдагидек, қуйидаги жадвал кўринишида ёзиш мумкин:

(1)	(2)	(3)	(4)
x	y	Δy	y'
0	1	0	0
0,05	1,000	0,005	0,050
0,1	1,005	0,020	0,101
0,2	1,020	0,041	0,204
0,3	1,046	0,063	0,314
0,4	1,083	0,087	0,433
0,5	1,133	0,113	0,567
0,6	1,196	0,144	0,718
0,7	1,277	0,179	0,894
0,8	1,375		

Аниқ ечим билан таққослаш $x = 0,5$ учун Эйлернинг аниқлаштирилган усули ёрдамида олинган қиймат аниқ қиймат билан бир хилда эканлигини кўрсатади. $x = 0,8$ учун аниқ қиймат $y = 1,377$ га тенг, бинобарин, абсолют хато 0,002 ни ташкил этади, нисбий хато эса 0,2% дан кам.

Эйлернинг аниқлаштирилган усули кўрилган усуллар каби меҳнат талаб қилса-да, одатда, кўпроқ аниқ натижалар беради. Бироқ у муҳим бир камчиликка — барқарор эмаслик камчилигига эга: қадамлар сони катта бўлганда бу усул ёрдамида топилган тақрибий ечим қийматлари аниқ ечим атрофида ўсиб бориш тартибида тебрана бошлайди. Бундай тебранишларни сезганда бу усулдан воз кечиш ва бошқа аниқроқ усулларга мурожаат қилиш керак.

Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг турли ғояларга, кўпинча Эйлер усулига таянадиган бундай сонли усуллари Δy орттирмани иложи борича аниқ ҳисоблашга келтирилади. Натижада формулаларнинг мураккаблашиб, ҳисоблашларнинг эса чўзилиб кетиши табиийдир. Ҳозирги пайтда *прогноз* ва *коррекция усуллари* деб аталувчи усуллар кенг қўлланиляпти. Биз бу синфнинг энг содда намояндасига тўхтаб ўтамиз: номнинг[1] келиб чиқиши баён қилиш борасида кўринади.

Яна ихтиёрий (x_k, x_{k+1}) оралиқни оламиз ва барча x_k қийматлар бир-биридан баравар узоқлашган деб фараз қиламиз. Қуйидагини ёза оламиз:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx. \qquad (4)$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш формулаларидан бирини, масалан, трапециялар формуласини қўллаш мумкин. У ҳолда (4) формулани

$$\Delta y_k = \frac{h}{2}(y'_k + y'_{k+1}) \qquad (5)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(5) формулани изланаётган ечимнинг Δy_k орттирмасини ҳисоблашда татбиқ этишда y' ҳосиланинг қиймати фақат x_k нуқтада эмас, балки x_{k+1} нуқтада ҳам маълум деб фараз қилинади. Уни $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$ дифференциал тенгламадан ҳосил қилиш мумкин; бироқ бунинг учун бизга ўша изланаётган y_{k+1} керак бўлади! Мураккаб аҳволга тушиб қолдик. Ундан қуйидагича қутилиш мумкин.

Дастлаб бирон-бир содда усул ёрдамида y_{k+1} нинг қийматини ҳисоблаймиз (прогноз). Бу қийматни дифференциал тенгламага қўйиб, у ердан y'_{k+1} ҳосиланинг қийматини ҳосил қилиш мумкин. Натижада (5) формуладан фойдаланиш ва изланаётган функциянинг тузатилган, янги орттирмасини ҳисоблаш имкониятига эга бўламиз (коррекция). Агар прогноз Эйлернинг аниқлаштирилган усули бўйича қилинаётган бўлса, баён этилаётган прогноз ва коррекция усули учун қилинадиган амаллар кетма-кетлиги қуйидагича бўлади:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hy'_k, \text{ (прогноз)}$$

$$y'_{k+1} = f(x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + h(y'_k + y'_{k+1})/2 \text{ (коррекция)}$$

Прогноз ва коррекциянинг бошқа усуллари худди шундай ғояга асосланган бўлиб, баён этилган усулдан шуниси билан фарқ қиладики, ечимнинг навбатдаги қийматини прогноз қилишда ҳам, коррекция қилишда ҳам бошқа, мураккаброқ бўлса-да, лекин аниқроқ формулалар қўлланилади. Масалан, (4) формулада интегрални ҳисоблашда коррекция учун трапециялар формуласидан эмас, балки аниқроқ бўлган параболалар формуласидан фойдаланиш мумкин.

Функциянинг навбатдаги нуқтада прогноз қилинган ва коррекцияланган қийматлари орасидаги айирма (фарқ) ҳосил бўлган тақрибий ечимнинг хатолари тўғрисида фикр юритишга имкон беради, бу эса аниқ ечим номаълум бўлиб, баҳолашнинг бошқа усуллари мумкин бўлмаган ёки жуда ҳам машаққатли бўлган амалий масалаларда жуда муҳимдир.

Юқорида баён қилинган прогноз ва коррекция усули ёрдамида бошланғич шарти $y|_{x=0} = 0,25$ бўлган $y' = 2xy^2$ дифференциал тенгламанинг [0,1] кесмада $h = 0,2$ қадам билан ечимини топайлик.

Барча ҳисоблашлар одатдагидек қуйида жадвалда келтирилган. Уларни яхшироқ тушунтириш учун улар қандай топилганини муфассал баён қиламиз.

Жадвалнинг (1) устунида x нинг қийматлари туради. (2)—(5) устунларда илгариги усулдаги (Эйлернинг аниқлаштирилган усули) y нинг прогноз қилинган қийматлари ҳисобланади, бу ерда ҳосилани ҳисоблашни коррекциялаштириш мақсадида y^2 катталик қўйилган (4) устун киритилган. (6) — (9) устунларда худди шу қийматларнинг ўзи фақат қулай формулалари бўйича топилгандан кейин жойлаштирилган. Ниҳоят, (10) устунда солиштириш учун аниқ ечим $y = \frac{1}{4-x^2}$ нинг қийматлари келтирилган.

Ҳисоблашлар қуйидаги тартибда бажарилади. Дастлаб, биринчи сатрда берилган бошланғич шартлар бўйича ҳосила ҳисобланади [(4)—(5) устунлар] ва иккинчи сатрда (бу сатр ёрдамчи ҳисобланиб, кейинги ҳисоблашларда иштирок этмайди) турган «ярим нуқта» ($x_{1/2} = 0,1$) учун Δy орттирма [(3) устун] ҳисобланади.

Бу нуқтадаги ҳосила $y_{1/2} = 0,012$ топилгандан сўнг $\Delta y = 0,002$ ни ҳисоблаймиз [(3) устун] ва уни y_0 бошланғич қийматга қўшиб, y

нинг $x_1 = 0,2$ нуқтадаги прогноз қилинган қийматини топамиз. Бу қиймат (2) устунга ёзилган, у $y_1 = 0,252$ га тенг. Бу ерда ҳосила $y'_1 = 0,026$ га тенг ва $y'_0 = 0$ эканлигини назарга олган ҳолда (қиймат биринчи сатрдан олинади; иккинчи сатр ҳисоблашларда қатнашмайди!) (5) формулага кўра (6) устун учун $\Delta y = 0,003$ ни топамиз, демак, коррекцияланган қиймат: $y_2 = 0,253$ [(7) устун]. Бу қийматга биноан (8) — (9) устунларда тузатилган y'_2 қиймат ҳособланади, бу ерда у бошлангич қиймат билан бир хил.

Ҳосиланинг тузатилган қийматидан y нинг янги қийматини прогноз қилиш учун (2) формула бўйича Δy ни топишда фойдаланилади. Бу $\Delta y = 0,010$ қиймат (3) устунга ёзилади. y нинг навбатдаги прогноз қилинган қийматини топиш учун y_0 га топилган Δy ни қўшиш керак. Кейинги ҳисоблашлар худди юқоридагидак давом этаверади. Бунда фақат бир нарсани назарда тутиш лозим: навбатдаги прогнозни ҳосил қилиш учун (3) устундаги Δy қиймат y нинг ундан олдинги сатрдаги қийматига қўшилиб, унинг бу қиймати сифатида (7) устундан олинган коррекция қилинган қиймат хизмат қилади. Жадвалдаги берилганларни текшириб кўришни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз, бунинг учун логарифмик линейка булса етарли.

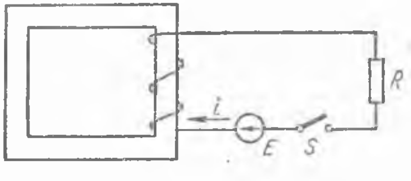
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
x	y	Δy	y^2	y'	Δy	y	y^2	y'	$y_{\text{аниқ}}$
0	0,250	0	0,062	0					0,250
0,1	0,250	0,002	0,062	0,012					
0,2	0,252	0,010	0,064	0,026	0,003	0,253	0,064	0,026	0,252
0,4	0,260	0,022	0,068	0,054	0,008	0,261	0,068	0,054	0,260
0,6	0,275	0,036	0,075	0,090	0,014	0,275	0,075	0,090	0,278
0,8	0,297	0,057	0,088	0,141	0,023	0,298	0,089	0,142	0,298
1	0,332		0,110	0,220	0,036	0,334			0,333

Энди дифференциал тенгламани сонли ечиш заруратини келтириб чиқарадиган физикавий масалани кўриб чиқамиз.

Мисол. Электр занжирига темир ўзакли ғалтак уланган (25- расм). Ўзакнинг магнитланиш эгри чизиги

$$i = \frac{1}{N}(A\varphi + B\varphi^3)$$

формула орқали берилган, бу ерда i — ампер ҳисобидаги ток, N — ғалтакдаги ўрамлар сони, φ — магнит оқими (вебер ҳисобида). Магнит



25- расм.

кўринишга эга бўлиши мумкин, шу билан бирга (2) кўринишдаги тенгламадан (1) кўринишдаги тенгламага ҳар доим ҳам ўтиш мумкин бўлавермайди. Шундай бўлишига қарамай, (2) дифференциал тенгламани интеграллаш масаласини параметр киритиш йўли билан ҳосилага нисбатан ечилган тенгламани интеграллаш масаласига келтириш мумкин.

(2) тенгламанинг айрим хусусий ҳолларини қараб чиқамиз ва уларни интеграллаш йўлларини кўрсатамиз.

1) *n-даражали биринчи тартибли тенглама.* Тенгламанинг чап томони y' га нисбатан бутун рационал функциядан иборат, яъни қуйидаги кўринишга эга:

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + p_2(y')^{n-2} + \dots + p_{n-1}y' + p_ny = 0,$$

бу ерда n — бутун мусбат сон, p_1, p_2, $p_3, \dots, p_n$ лар x ва y нинг функциялари.

Бу тенгламани y' га нисбатан еча оламиз деб фараз қилайлик. Бунда y' учун, умуман айтганда, n та ҳар хил ифода ҳосил бўлади:

$$y' = f_1(x, y), \; y' = f_2(x, y), \; \dots, \; y' = f_n(x, y). \qquad (3)$$

Бу ҳолда (2) тенгламани интеграллаш биринчи тартибли n та (1) тенгламани интеграллашга келтирилди. Уларнинг умумий интеграллари мос равишда қуйидагилар бўлсин:

$$\Phi_1(x, y, C_1) = 0, \; \Phi_2(x, y, C_2) = \\ = 0, \; \dots, \; \Phi_n(x, y, C_n) = 0. \qquad (4)$$

(4) интегралларнинг чап томонларини ўзаро кўпайтириб, нолга тенглаймиз:

$$\Phi_1(x, y, C_1)\,\Phi_2(x, y. C_2) \dots \Phi_n(x, y, C_n) = 0. \qquad (5)$$

Агар (5) тенгламани y га нисбатан ечадиган бўлсак, (2) тенгламанинг ечимини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, (5) тенгламанинг ҳар қандай ечими (4) тенгламаларнинг бирини, бинобарин, (1) тенгламаларнинг бироргасини ва шундай қилиб, (2) тенглама —(1) тенгламаларга ёйилгани учун уни ҳам қаноатлантиради. Умумийликка зиён келтирмасдан, (5) даги барча C_1, C_2, $\dots$, C_n ўзгармасларни битта C билан алмаштириш ва тенгламани

$$\Phi_1(x, y, C)\,\Phi_2(x, y, C) \dots \Phi_n(x, y, C) = 0 \qquad (6)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу (2) тенгламанинг умумий ечими бўлади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун (6) тенгламанинг n та тенгламага ажралишини кўриш мумкин:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \ \Phi_2(x, y, C) = 0, \ \ldots, \ \Phi_n(x, y, C) = 0, \qquad (7)$$

бу ерда C — исталган қийматларни қабул қилувчи ихтиёрий ўзгармас, шу сабабли (4) тенгламадан ҳосил қилинадиган барча ечимлар (7) тенгламадан ҳосил қилинадиган ечимлар орасида бўлади.

Ушбу $(y')^2 - \frac{xy}{a^2} = 0$ тенгламанинг умумий интегралини топамиз. Тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(y' - \frac{\sqrt{xy}}{a}\right)\left(y' + \frac{\sqrt{xy}}{a}\right) = 0,$$

бу ердан $y' - \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0$ ва $y' + \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0$. Бу иккала тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уларнинг умумий интеграллари:

$$\sqrt{y} - \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0, \quad \sqrt{y} + \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0.$$

Шунинг учун берилган тенгламанинг умумий интеграли ушбу кўринишда бўлади:

$$(\sqrt{y} - C)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0.$$

2) *y га нисбатан ечилган ва x қатнашмаган тенглама.* Гап

$$y = \varphi(y') \qquad (8)$$

кўринишдаги тенглама устида кетяпти.

Бу ҳолда параметр киритиш усулини қўллашш мақсадга мувофиқдир. У қаралаётган ўзгарувчиларни параметр орқали ифодалаш ва ечимни параметрик шаклда излашдан иборат. $y' = p$ дейлик. У ҳолда берилган тенглама

$$y = \varphi(p) \qquad (9)$$

кўринишда ёзилади. Агар x ни p ва C орқали ифодаловчи яна битта тенглама топиш мумкин бўлса, у ҳолда бу иккита тенгламадан иборат тўплам (8) тенгламанинг параметрик шаклдаги умумий ечими бўлади. Улардан p ни оқимини топинг. Магнитланиш эгри чизиғининг A ва B коэффициентлари ўзакнинг физикавий хоссалари ва ўрамнинг конструктив хусусиятлари билан белгиланади.

Ечилиши. Кирхгоф қонуни бу занжир учун

$$E = Ri + L\frac{di}{dt},$$

кўринишга ёки электротехникадан маълум бўлган $L\frac{di}{dt} = N\frac{d\varphi}{dt}$ муносабатни эътиборга оладиган бўлсак,

$$E = Ri + N\frac{d\varphi}{dt}$$

кўринишга эга бўлади. Бу ерга i нинг юқоридаги ўзакнинг магнитланиш эгри чизиғи қонунидаги қийматини келтириб қўйсак, ушбу дифференциал тенгламага келамиз:

$$E = \frac{R}{N}(A\varphi + B\varphi^3) + N\frac{d\varphi}{dt},$$

бу ерда вақт секунд ҳисобида ўлчанади.

Оддий электротехникавий пўлат учун $A = 0{,}6\cdot10^5$ ва $B = 0{,}33\cdot10^{13}$ деб олиш мумкин. Хусусий ҳолда $E = 18$ В, $R = 300$ Ом ва $N = 100$ деб олиб ва магнит оқимини 10^{-5} Вб ($\varphi = 10^{-5}\Phi$) да, вақтни эса миллисекундларда ($t = 10^{-3}\tau$) ўлчаб, тенгламани

$$\frac{d\Phi}{d\tau} + 1{,}8\,\Phi + 0{,}01\,\Phi^3 = 18$$

кўринишга келтирамиз. Агар S калит $\tau = 0$ моментда уланса, дифференциал тенгламамиз учун бошланғич шарт $\Phi(0) = 0$ бўлади.

Биз ҳосил қилган тенглама чекли кўринишда ечимга эга эмас. Сонли методларни қўлланиш қулай бўлиши учун бундай тенгламалар одатда ўлчамсиз шаклга келтирилади. Мазкур ҳолда бу қуйидагича амалга оширилиши мумкин. Физикавий мулоҳазалардан τ чексиз ортганда Φ оқим тўйинишга интилиши келиб чиқади. Оқимнинг тўйинишга мос максимал қиймати Φ_m энди ўзгаришсиз сақланади, яъни унинг учун $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ бўлади. Шунинг учун Φ_m қийматни дифференциал тенгламадан, у ерда $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ деб, ҳосил қилиш мумкин. Натижада ушбу содда куб тенгламага келамиз:

$$0{,}01\,\Phi_m^3 + 1{,}8\,\Phi_m - 18 = 0.$$

Бу тенглама ягона ҳақиқий илдизга эга: $\Phi_m = 7{,}58023$.

Биз энди дифференциал тенгламани $\Phi(\tau) = \Phi_m\, y(\tau)$ деб олиб, ўлчамсиз шаклга келтиришимиз мумкин. У ҳолда y вақт τ нинг ўлчамсиз функцияси бўлади. Тенглама

$$\Phi_m y' = 18 - 1{,}8\Phi_m y - 0{,}01\,\Phi_m^3 y^3$$

ёки

$$y' = 2{,}37460 - 1{,}8y - 0{,}57460y^3$$

кўринишга келтирилади. Бошланғич шартдан эса $y(0) = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Ҳосил қилинган тенгламага (0; 0,5) оралиқ учун $h = 0{,}05$ қадам билан Эйлернинг аниқлаштирилган усулини қўлланиш мумкин. Ҳисоблашлар жадвалда келтирилган. φ нинг веберлар ҳисобидаги якуний қийматлари (илгари киритилган Φ_m ва 10^5 коэффициентларни ҳисобга олган ҳолда) (6) устунда келтирилган.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
x	y	Δy	$0{,}57460\ y^3$	y'	φ
0	0	0,0594	0	2,3746	0
0,025	0,594	0,1134	$0{,}1204\cdot10^{-3}$	2,2676	
0,05	0,1134	0,2169	$0{,}8379\cdot10^{-3}$	2,1697	$0{,}8595\cdot10^{-5}$
0,10	0,2170	0,1978	$0{,}5871\cdot10^{-2}$	1,9781	$0{,}1645\cdot10^{-4}$
0,15	0,3112	0,1797	$0{,}1732\cdot10^{-1}$	1,7971	$0{,}2359\cdot10^{-4}$
0,20	0,3967	0,1625	$0{,}3587\cdot10^{-1}$	1,6246	$0{,}3007\cdot10^{-4}$
0,25	0,4737	0,1461	$0{,}6108\cdot10^{-1}$	1,4608	$0{,}3591\cdot10^{-4}$
0,30	0,5428	0,1306	$0{,}9189\cdot10^{-1}$	1,3057	$0{,}4114\cdot10^{-4}$
0,35	0,6043	0,1160	0,1268	1,1601	$0{,}4580\cdot10^{-4}$
0,40	0,6588	0,1024	0,1643	1,0245	$0{,}4994.10^{-4}$
0,45	0,7067	0 0900	0,2028	0,8997	$0{,}5357\cdot10^{-4}$
0,50	0,7488				$0{,}5676\cdot10^{-4}$

9-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМАЛАР. ИЗОГОНАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАР ҲАҚИДА МАСАЛА

Шу пайтга қадар ҳосилага нисбатан ечилган, яъни

$$y' = f(x,\ y) \tag{1}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламаларни текшириш билан чекланиб келдик. Бироқ, юқорида айтиб ўтилганидек, биринчи тартибли тенглама, умуман айтганда,

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \tag{2}$$

йўқотиб, x, y ва C орасидаги муносабатни, яъни одатдаги шаклдаги умумий интегрални ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи тенгламани қуйидагича топамиз. $y' = p$ тенгликни $dx = \frac{dy}{p}$ кўринишида қайта ёзиб оламиз, бу ердан $x = \int \frac{dy}{p} + C$. Бу ердаги интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y dp}{p^2} = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p)\, dp}{p^2}.$$

Демак,

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p) dp}{p^2} + C. \tag{10}$$

(10) ва (9) тенгламалар системаси (8) тенгламанинг параметрик шаклдаги умумий ечими бўлади. Агар иложи бўлса, бу тенгламалардан P ни йўқотиб, $\Phi(x, y, C) = 0$ шаклдаги умумий интегрални ҳосил қиламиз.

$y = (y')^2 + 2(y')^3$ тенгламанинг умумий ечимини параметрик шаклда топамиз.

$y' = p$ деймиз; у ҳолда $y = p^2 + 2p^3$. Буни x бўйича дифференциалласак: $y' = (2p + 6p^2)\frac{dp}{dx}$ ёки $y' = p$ бўлгани ва p га қисқартириш мумкин бўлгани учун: $1 = (2 + 6p)\frac{dp}{dx}$. Бу ердан $dx = (2 + 6p)dp$ ва $x = 2p + 3p^2 + C$. Умумий ечим бундай ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2p + 3p^2 + C, \\ y &= p^2 + 2p^3. \end{aligned}\right\}$$

Бу ерда биз $p \neq 0$ деб фараз қилдик. Агар $p = 0$ бўлса, $y = C$ га эгамиз; бу ечим эса тенгламани $C = 0$ бўлгандагина қаноатлантиришини кўриш осон.

3) *x га нисбатан ечилган ва y қатнашмаган тенглама.* Бу ҳолда тенглама

$$x = \varphi(y') \tag{11}$$

кўринишга эга.

Юқоридагидек иш кўрамиз. $y' = p$ деймиз. Тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = \varphi(p). \tag{12}$$

$y' = p$ тенгликни бундай ёзиб оламиз: $dy = pdx$. Бу ердан

$$y = \int p\, dx = px - \int x\, dp,$$

ёки

$$y=p\varphi(p)-\int\varphi(p)\,dp+C. \qquad (13)$$

(12) ва (13) тенгламалар системаси (11) тенгламанинг параметрик шаклдаги умумий ечимидир. Улардан p параметрни йўқотиб, $\Phi(x, y, C)=0$ умумий интегрални ҳосил қиламиз.

Шуни қайд қилиб ўтиш керакки, (9), (10), (12) ва (13) тенгликлардаги p ўзгарувчи ихтиёрий параметр ролини ўйнайди ва исталган бошқа ҳарф билан алмаштирилиши мумкин.

$x=y'\sin y'$ тенгламанинг умумий ечимини параметрик шаклда топамиз.

$y'=p$ деймиз; у ҳолда $x=p\sin p$. Энди $\frac{dy}{dx}=p$ тенгликни $dy=pdx$ каби ёзиб оламиз. Сўнгра

$$\int p\,dx=px-\int x\,dp=px-\int p\sin p\,dp=px+p\cos p-\int\cos p\,dp=$$
$$=px+p\cos p-\sin p+C$$

бўлгани учун $y=px+p\cos p-\sin p+C$. Умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned}x&=p\sin p,\\ y&=p^2\sin p+p\cos p-\sin p+C.\end{aligned}\right\}$$

4) x ёки y қатнашмаган, бироқ y ёки x га нисбатан ечилган бўлиши шарт бўлмаган тенглама. Тенглама ушбу кўринишга эга:

$$F(y, y')=0 \qquad (14)$$

ёки

$$F(x, y')=0,$$

шу билан бирга тенгламадан y ни (биринчи тенгламада) ёки x ни (иккинчи тенгламада), шунингдек, $p=y'$ ни t параметр орқали ифодалаш мумкин деб фараз қиламиз. 2) ва 3) ҳоллардаги каби бу ерда ҳам тенгламанинг умумий ечими параметрик шаклда ҳосил бўлади.

Масалан, $F(y, p)=0$ тенглама бўлган ҳолни кўрайлик. $y=\varphi(t)$ деб, тенгламадан $p=\psi(t)$ ни ёки, аксинча, $p=\psi(t)$ деб тенгламадан $y=\varphi(t)$ ни топдик деб фараз қилайлик. У ҳолда, бир томондан, $dy=pdx=\psi(t)dx$, иккинчи томондан, $dy=\varphi'(t)dt$. Бу dy учун иккала ифодани таққослаб, $\psi(t)dx = \varphi'(t)\,dt$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$ ва $x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C$.

Умумий ечим параметрик шаклда қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \\ y &= \varphi(t). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$y = a\sqrt{1 + (y')^2}$ тенгламанинг умумий ечимини топайлик.

$p = y' = \operatorname{sh} t$ деймиз; у ҳолда $y = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = a \operatorname{ch} t$. Ушбу $\frac{dy}{dx} = p$ тенгликдан $dx = \frac{dy}{p}$ ни топамиз. $dy = a \operatorname{sh} t\, dt$ бўлгани учун $dx = adt$ ва $x = at - C$. Умумий ечим параметрик шаклда қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= at - C, \\ y &= a \operatorname{ch} t. \end{aligned}\right\}$$

t параметрни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламадан t ни топиб, иккинчи тенгламага қўямиз. Натижада $t = (x + C)/a$ ва

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x + C}{a}.$$

5) *Лагранж тенгламаси.* x ва y га нисбатан чизиқли бўлган, яъни

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \tag{16}$$

кўринишга эга бўлган тенглама шундай аталади. $\varphi(y') \neq y'$ деб фараз қиламиз. $\varphi(y') = y'$ бўлган ҳол кейинроқ қаралади. Лагранж тенгламасини интеграллаш учун ҳам параметрик усулни қўлланамиз. $y' = p$ деймиз. У ҳолда тенглама

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p) \tag{17}$$

кўринишда ёзилади.

x бўйича дифференциаллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \tag{18}$$

ёки y' ни p билан алмаштириб, $\frac{dy}{dp}$ га кўпайтириш ва алгебраик алмаштиришлардан сўнг:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{19}$$

Бу x функция ва $\frac{dx}{dp}$ ҳосилага нисбатан чизиқли тенглама. Унинг умумий интеграли

$$\Phi(x, p, C) = 0 \tag{20}$$

кўринишга эга. У (17) тенглама билан биргаликда Лагранж тенгламасининг параметрик шаклдаги умумий интегралини беради. (17) ва (20) тенгликлардан p ни йўқотиб, Лагранж тенгламасининг умумий интеграли $\Phi_1(x, y, C) = 0$ ни ҳосил қиламиз.

(18) тенгламани ўзгартиришимиз $p - \varphi(p) \neq 0$ бўлгандагина мумкин эканлигини қайд қилиб ўтайлик. Ага $p - \varphi(p) = 0$ тенглама $p = p_i$ илдизларга эга бўлса, у ҳолда улар $y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ечимларни ҳам беради.

$y = x(y')^2 + (y')^2$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

$y' = p$ деймиз. У ҳолда $y = xp^2 + p^2$ ёки $y = (x + 1)p^2$. Буни x бўйича дифференциаллаб, топамиз:

$$y' = p^2 + 2(x + 1)p\frac{dp}{dx}.$$

Бир қатор содда ўзгартиришлардан сўнг қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$1 - p = 2(x + 1)\frac{dp}{dx} \quad \text{ёки} \quad \frac{dx}{x + 1} = \frac{2dp}{1 - p},$$

бу ердан

$$\ln(x + 1) = -2\ln(1 - p) + 2\ln C.$$

Потенцирласак:

$$x + 1 = \frac{C^2}{(1 - p)^2}.$$

Демак, умумий ечим параметрик шаклда ушбу кўринишда бўлади

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C^2}{(1 - p)^2} - 1, \\ y &= \frac{C^2p^2}{(1 - p)^2}. \end{aligned}\right|$$

p параметрни йўқотамиз. Бунинг учун

$$p^2 = [1 - (1 - p)]^2 = \left(1 - \frac{C}{\sqrt{x + 1}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x + 1} - C)^2}{x + 1}$$

ифодани топамиз ва $y = (x + 1)p^2$ тенгламага қўямиз. Шундай қилиб, умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$y = (\sqrt{x + 1} - C)^2.$$

6) *Клеро тенгламаси.* Клеро тенгламаси деб Лагранж тенгламасининг $\varphi(y') = y'$ бўлган хусусий ҳолига айтилади. Клеро тенгламасининг умумий кўриниши:

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{21}$$

$y' = p$ деймиз. У ҳолда

$$y = xp + \psi(p). \tag{22}$$

x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

яъни

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0,$$

бу ердан

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

ёки

$$x + \psi'(p) = 0. \tag{23}$$

$\frac{dp}{dx} = 0$ тенгламадан $p = C$ келиб чиқади, (22) да p ўрнига C ни қўйиб, Клеро тенгламасининг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$y = Cx + \psi(C). \tag{24}$$

Бу геометрик нуқтаи назардан тўғри чизиқлар оиласини тасвирлайди.

(23) тенглама (22) билан биргаликда Клеро тенгламасининг параметрик шаклдаги ечимини беради:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -p\psi'(p) + \psi(p). \end{aligned}\right\}$$

Ҳақиқатан ҳам, бу тенгламалардан:

$$dx = -\psi''(p)\,dp,$$

$$dy = [-p\psi''(p) - \psi'(p) + \psi'(p)]\,dp = -p\psi''(p)\,dp,$$

бу ердан $\frac{dy}{dx} = p$. Буни Клеро тенгламасига қўйиш —

$$-p\psi'(p) + \psi(p) = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

айниятга олиб келади.

Системанинг иккала тенгламасидан p параметрни йўқотиб, (21) тенгламанинг интеграли $\Phi(x\ y) = 0$ ни ҳосил қиламиз. Бу интегралда C иштирок этмайди, бинобарин, у умумий интеграл бўла олмайди. Уни, шунингдек, умумий интегралдан C нинг ҳеч қандай қийматида ҳосил қилиб бўлмайди, чунки чизиқли функция эмас. У *махсус интеграл* дейилади

Ушбу

$$y = px + \frac{1}{p}, \qquad \text{бу ерда } p = y'$$

тенгламанинг умумий ва махсус ечимини топамиз.

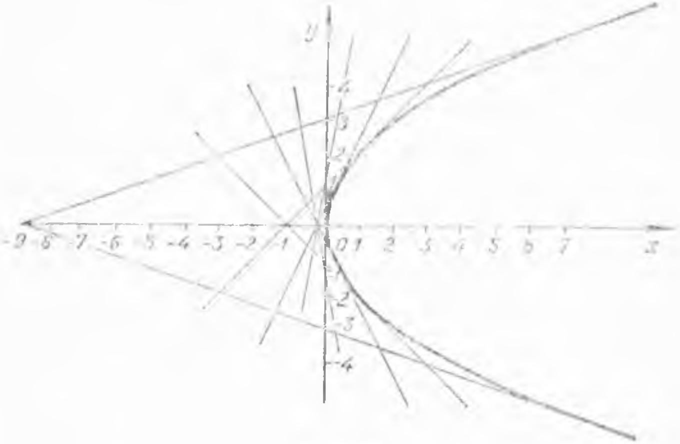
Умумий ечимни бевосита тенгламадан p ни C га алмаштириб топамиз:

$$y = Cx + \frac{1}{C}\cdot$$

Махсус ечимни топиш учун $\psi'(p) = -1/p^2$ ни топамиз. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{p^2} \\ y &= \frac{2}{p} \end{aligned}\right\}$$

тенгламалар системаси параметрик шаклдаги махсус ечимдан иборатдир. p параметрни йўқотамиз. Бунинг учун иккинчи тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариб, уларни биринчи тенгламанинг мос қисмларига бўламиз; $y^2/x = 4$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $y^2 = 4x$. Геометрик нуқтаи назардан $y = Cx + 1/C$ (C — параметр) умумий ечим тўғри чизиқларнинг бир параметрли оиласини, махсус интеграл эса параболани тасвирлайди (26- расм).



26- расм.

Расмдан кўриниб турибдики, махсус интеграл (парабола) умумий ечим билан аниқланадиган интеграл эгри чизиқлар (тўғри чизиқлар) ни ўровчи чизиқ экан. Бу хосса тасодифий эмас.

Махсус ечимларнинг мавжуд бўлиши мумкинлиги Коши теоремасининг шартлари бузилиши билан боғлиқ. Бизга маълумки, бу шартларнинг бажарилиши ечимнинг мавжуд ва ягона бўлишига кафолат беради — битта бошланғич шартни қаноатлантирадиган иккита ҳар хил ечим бўлиши мумкин эмас. 7- § да бу шартлар фақат **айрим** махсус нуқталарда бузилган ҳоллар қаралган эди. Шундай бўлсада, ягоналик шартлари бирорта чизиқнинг барча нуқталарида бузилиши ҳам мумкин бўлиб, бу чизиқнинг ўзи тенгламанинг ечими бўлиб қолиши мумкин. Ана шу ечим махсус ечим дейилади.

Шундай қилиб, *дифференциал тенгламанинг махсус ечими деб шундай ечимга айтиладики, у ўзининг барча нуқталарида ягоналик хоссасини Коши масаласи маъносида қаноатлантирмайди*, яъни махсус ечимнинг ҳар бир нуқтасининг исталган атрофида бу нуқтадан ўтадиган ҳеч бўлмаганда иккита интеграл эгри чизиқ мавжуд бўлади.

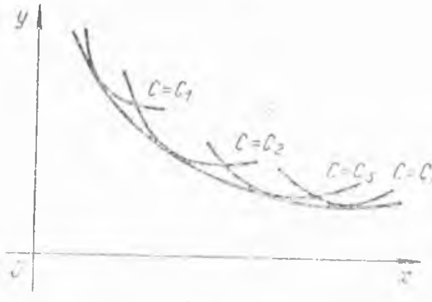
Параметрик усул x га нисбатан чизиқли бўлмаган

$$y = \psi(x, y')$$

кўринишдаги тенгламаларни, яъни Лагранж ёки Клеро тенгламалари бўлмаган тенгламаларни, шунингдек, баъзи бошқа тенгламаларни интеграллашда ҳам қўлланиши мумкинлигини қайд қилиб ўтайлик. Мазкур ҳолда $y' = p$ деб, $y = \psi(x,p)$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан x бўйича дифференциаллаш билан

$$[\psi'_x(x, p) - p] + \psi'_p(x, p)\frac{dp}{dx} = 0$$

тенгламага келамиз. Агар бу тенгламанинг умумий интеграли $\Phi(x, p, C) = 0$ ни топилса, у $y = \psi(x, p)$ тенглама билан биргаликда берилган тенгламанинг умумий интегралини параметрик шаклда беради. Улардан p параметрни йўқотиб, умумий интегрални $\Phi_1(x, y, C) = 0$ шаклда ҳосил қиламиз.



27- расм.

Таърифга кўра C параметрга боғлиқ бўлган $\Phi(x, y, C) = 0$ чизиқлар оиласини *ўровчи* чизиқ деб, ўзининг ҳар бир нуқтасида оиланинг бирорта чизиғига уринадиган чизиққа айтилади, шу билан бирга у ўзининг турли нуқталарида оиланинг турли чизиқларига уринади (27- расм).

Айтайлик, $F(x, y, y') = 0$ дифференциал тенгламанинг ўровчи чизиққа эга бўлган интеграл чизиқлари оиласи $\Phi(x, y, C) = 0$ дан иборат бўлсин. Агар оиланинг бирорта эгри чизиғида $M(x, y)$ нуқтани оладиган бўлсак, у ҳолда x, y ва y' бу нуқтада тенгламани қаноатлантиради. Бироқ ўровчи чизиқ учун x, y ва y' нинг ўша $M(x, y)$ нуқтадаги қийматлари илгаригича бўлади. Демак, ўровчи чизиқ ҳам интеграл эгри чизиқ шу билан бирга махсус интеграл эгри чизиқ бўлади, чунки унинг ҳар бир нуқтаси орқали бир йўналишда иккита интеграл эгри чизиқ: ўровчи чизиқнинг ўзи ва интеграл эгри чизиқлардан бири ўтади. Шундай қилиб, ўровчи чизиқнинг ҳар бир нуқтасида ягоналик бузилади.

Умумий интегралдан махсус интегрални ҳосил қилиш учун бир парзметрли $\Phi(x, y, C) = 0$ эгри чизиқлар оиласининг ўровчи чизигини ҳосил қилиш қоидасидан фойдаланиш мумкин. Бу қоидага мувофиқ, оила тенгламаларининг иккала томонидан C бўйича хусусий ҳосила олиш йўли билан яна бир тенглама тузилади. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0, \\ \frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

тенгламалар системаси тенгламанинг махсус интеграли (эгар у мавжуд бўлса) бўлади. Бунда бу тенгламалар системаси умуман ҳеч қандай эгри чизиқни аниқламаслиги ҳам мумкинлигини назарда тутиш керак, у ҳолда тенглама махсус интегралга эга бўлмайди. Бироқ (25) система эгри чизиқни *(дискриминант эгри чизиқни)* аниқлаган тақдирда ҳам, у чизиқ ўровчи чизиқ бўлмасдан, балки оила эгри чизиқлари махсус нуқталарининг геометрик ўрни бўлиши ҳам мумкин ва, демак, барибир махсус интеграл бўлмаслиги мумкин. Интеграл эгри чизиққа ва ўровчи чизиққа уларнинг умумий нуқталаридаги уринмаларнинг бурчак коэффициентларининг бир хиллигини текшириш керак бўлади. Фақат ана шу ҳолда дифференциал тенглама махсус интегралга эга бўлиб, унинг параметрик тенгламалари (25) система бўлади. Бу системадан C параметрни йўқотиб, махсус интегрални $\varphi(x, y) = 0$ шаклда ҳосил қиламиз.

Бу қоидани Клеро тенгламасига татбиқ қилсак,

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + \psi(C), \\ x &+ \psi'(C) = 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз, бу система юқорида келтириб чиқарилган Клеро тенгламаси махсус интегралининг параметрик тенгламалари билан бир хил (фақат p параметр C параметр билан алмаштирилган).

Юқорида дискриминант эгри чизиққа нисбатан келтирилган изоҳ Клеро тенгламаси учун роль ўйнамайди: агар Клеро тенгламаси умумий ечимининг дискриминант эгри чизиғи мавжуд бўлса, у албатта ўровчи чизиқ бўлади, демак, Клеро тенгламасининг хусусий ечимлари чизиқли функциялар бўлгани учун ва тўғри чизиқлар ҳеч қандай махсус нуқталарга эга бўлмаганлиги учун бу эгри чизиқ махсус интеграл ҳам бўлади.

$y = x(y')^2 + (y')^2$ тенгламанинг махсус интегралини топамиз. Умумий интеграл илгари (111-бетга қаранг) топилган эди.

$$y = (\sqrt{x+1} - C)^2.$$

C бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-2(\sqrt{x+1} - C) = 0.$$

Бу иккала тенгламадан C ни йўқотамиз. Иккинчи тенгламадан $C =$ $= \sqrt{x+1}$ ни топамиз. Уни биринчи тенгламага қўйсак, $y = 0$ ни ҳосил қиламиз. $y = 0$ функция тенгламани қаноатлантиради, демак, унинг махсус ечими бўлади.

Айрим ҳолларда махсус интегрални умумий интегрални билмасдан туриб ҳам топиш мумкин. Тенгламани интеграллаш процессида баъзан тенгламанинг тенг кучлилигини бузиши мумкин бўлган амаллар бажаришга тўғри келади (масалан, ўзгарувчилари бўлган ифодага бўлиш). Бундай ҳолларда махсус интеграллар бўлиши мумкин бўлган интегралларнинг йўқолиш-йўқолмаслигини ҳар гал текшириб бориш керак.

Ушбу

$$y^2 + y^2(y')^2 = a^2 \qquad (a \neq 0)$$

тенгламанинг умумий ва махсус интегралларини топамиз.

Тенгламани y' га нисбатан ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y' = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

Бу ерда y га бўлаётганимиз учун $y=0$ функция биз йўқотишимиз мумкин бўлган ечим бўлиш-бўлмаслигини текшириб кўриш керак. Тенгламага $y=0$ ва $y'=0$ ни қўйиш $y=0$ берилган тенгламани қаноатлантирмаслигини кўрсатади, $(a\neq0)$, демак, унинг ечими бўлмайди.

Ўзгартирилган тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни $\sqrt{a^2-y^2}$ га бўлиш ва ydx га кўпайтириш билан ажратамиз:

$$\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \pm\, dx,$$

бу ердан $-\sqrt{a^2-y^2} = \pm(x+C)$ ва умуман интеграл $(x+C^2)+y^2=$ $=a^2$ кўринишга эга бўлади. Бу айланалар оиласи. $\sqrt{a^2-y^2}$ га бўлишда ечимлар йўқотмаганмикинмиз, шуни текшириб кўрамиз. Берилган тенгламага $y=\pm a$ ва $y'=0$ ни қўйиш $y=\pm a$ функция тенгламани қаноатлантиришини кўрсатади $[(\pm a)^2=a^2]$, демак, улар ечимлар бўлади. Бу ечимлар хусусий ечим бўлмай, балки махсус ечимлар бўлади, чунки улар тўғри чизиқлар бўлиб, умумий интегрални ташкил этадиган айланалар қаторида бўла олмайди.

Худди шу натижанинг ўзини умумий интегрални C бўйича дифференциаллашнинг умумий қоидасидан фойдаланиб ҳам ҳосил қилиш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз. Бунда $2(x+C)=0$, бу ердан $C=$ $=-x$. Буни умумий интегралга қўйиб, ўша $y=\pm a$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай йўл билан Лагранж тенгламаси ҳам махсус интегралга эга бўлишини текшириш осон. $p-\varphi(p)$ айирма бирорта $p=p_0$ қийматда нолга тенг бўлади деб фараз қилайлик. У ҳолда $p=p_0$ (18) тенгламани қаноатлантиради. $p=p_0$ ни (16) Лагранж тенгламасига қўйиб, унинг тўғри чизиқдан иборат бўлган $y=x\,\varphi(p_0)+\psi(p_0)$ ечимини ҳосил қиламиз.

Лагранж тенгламаси таҳлил қилиб чиқилган мисолга (117-бетдаги мисолга қаранг) яна қайтиб, унинг учун $\varphi(p)=p^2$ эканлигини ва $p-p^2=0$ тенглама $p_1=0$, $p_2=1$ илдизларга эга эканлигини кўрамиз. Биринчи илдиз $y=0$ махсус ечимга, иккинчиси эса $y=x+1$ ечимга олиб келади, бу ечим хусусий ечимдир, чунки у $y=(\sqrt{x+1}-C)^2$ умумий ечимдан $C=0$ бўлганда ҳосил бўлади.

Ҳосилага нисбатан ечилмаган тенгламаларга кўпинча турли геометрик масалалар, масалан, изогонал траекториялар тўғрисидаги масала олиб келади.

Агар

$$F(x, y, a) = 0 \tag{26}$$

(бу ерда a — параметр) эгри чизиқларнинг бир параметрик оиласи бўлса, у ҳолда унинг *изогонал траекториялари* деб, (26) оила эгри чизиқлари билан бир хил φ бурчак остида кесишадиган эгри чизиқларнинг бошқа оиласига айтилади.

Хусусий ҳолда, агар бу бурчак тўғри бўлса, яъни $\varphi = \pi/2$ бўлса, траекториялар *ортогонал* траекториялар деб аталади.

Берилган эгри чизиқлар оиласи (26) нинг дифференциал тенгламасини тузамиз. Бунинг учун (26) тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{27}$$

(26) ва (27) тенгламалардан a параметрни йўқотамиз. Натижада (26) оиласининг дифференциал тенгламаси

$$y' = f(xy) \tag{28}$$

кўринишга эга бўлсин деб фараз қилайлик.

$M(x;\ y)$ нуқтада кесишувчи иккита эгри чизиқ орасидаги бурчак деб, маълумки, эгри чизиқларга бу нуқтада ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади (28-расм). Агар (26) оиласининг I эгри чизиғига M нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқ билан ташкил қилган бурчагини α орқали, шу оиланинг II эгри чизиғига ана шу нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчагини β орқали белгиласак, у ҳолда $\varphi = \pm(\beta - \alpha)$ ёки $\beta = \alpha \pm \varphi$ бўлади. Бу ердан

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\varphi}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi}.$$

28- расм.

$\operatorname{tg}\varphi$ катталик берилган, уни k орқали белгилаймиз; $\operatorname{tg}\alpha = y' = f(x, y)$, шунинг учун

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x,\ y) \pm k}{1 \mp kf(x,\ y)}.$$

Изогонал траекториянинг исталган нуқтасининг координаталари билан бу нуқтадаги уринманинг бурчак коэффициенти орасидаги муносабатни, яъни траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини ҳосил қилдик. $\operatorname{tg}\beta$ ни y' орқали белгилаймиз; у ҳолда

$$y' = \frac{f(x, y) \pm k}{1 \mp kf(x, y)}. \tag{29}$$

Бу дифференциал тенгламанинг умумий интеграли (26) эгри чизиқлар оиласи учун изогонал траекториялар оиласи бўлади; улар (26) эгри чизиқларни бир хил φ бурчак остида кесиб ўтади.

Агар траекториялар ортогонал бўлса, у ҳолда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \ \beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}, \ \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{f(x,y)}$$

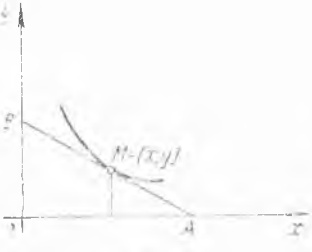
ва ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)} \quad \text{ёки} \quad -\frac{1}{y'} = f(x, y). \tag{30}$$

Шундай қилиб, қуйидаги қоидани ҳосил қиламиз: *берилган (26) эгри чизиқлар оиласи учун изогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини топиш учун бу оиланинг (28) дифференциал тенгламасида y' ни $\frac{y' \mp k}{1 \pm ky'}$ билан алмаштириш лозим, бу ерда k — эгри чизиқларнинг траекториялар билан кесишиш бурчагининг тангенси. Хусусан, ортогонал траекториялар учун y' ни $-\frac{1}{y'}$ га алмаштириш керак.*

Геометрик мисоллар

1-мисол. Шундай эгри чизиқни топингки, унга ўтказилган исталган уринманинг координата ўқлари орасидаги кесмаси l га тенг бўлган ўзгармас узунликка эга бўлсин (29- расм).



29- расм.

Ечилиши, $y=f(x)$ эгри чизиққа $M(x;\ y)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси

$$Y - y = y'(X - x)$$

кўринишга эга, бу ерда X, Y — уринма нуқтасининг ўзгарувчи координаталари. Бу тенгламадан уринманинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси A нинг абсциссасини $Y=0$ деб, Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси B нинг ординатасини эса $X=0$ деб топамиз. Қуйидагига эгамиз: $X_A = x - \frac{y}{y'}$ ва $Y_B = y - xy'$. $A(X_A;\ 0)$ ва $B\ (0;\ Y_B)$ нуқталар орасидаги масофани икки нуқта орасидаги масофа формуласи бўйича топамиз ва уни l га тенглаймиз; ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2 = l}.$$

Бу тенгламани ўзгартиришлардан сўнг:

$$y = xy' \pm \frac{ly'}{\sqrt{1+(y')^2}}. \tag{31}$$

Бу Клеро тенгламасидир. Унинг

$$y = Cx \pm \frac{Cl}{\sqrt{1+C^2}}$$

умумий ечими координата ўқлари орасидаги кесмалари l га тенг узунликка эга бўлган тўғри чизиқлар оиласидан иборат. Ечимни C бўйича дифференциаллаймиз ва параметрик шаклдаги махсус интегрални ифодалайдиган ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx \pm \frac{Cl}{\sqrt{1+C^2}}, \\ x &= \mp \frac{l}{(1+C^2)^{3/2}}. \end{aligned}\right|$$

C параметрни йўқотиш учун иккинчи ифодадаги x нинг қийматини биринчи ифодага қўямиз:

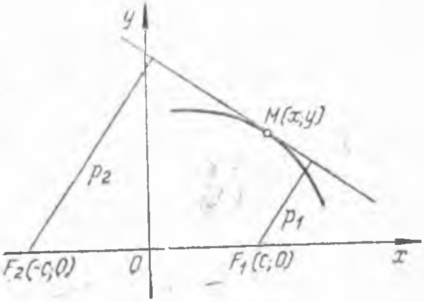
$$y = \mp \frac{lC^3}{(1+C^2)^{3/2}}.$$

Агар охирги иккита тенгликнинг иккала қисмини $^2/_3$ даражага кўтарсак ва қўшсак, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}.$$

Шундай қилиб, махсус интеграл астроидадан иборат экан; у интеграл тўғри чизиқлар оиласининг ўровчи чизиғи бўлади.

2-мисол. Шундай эгри чизиқларни топингки, улар учун берилган иккита нуқтадан исталган уринмагача бўлган масофалар кўпайтмаси ўзгармас бўлиб, b^2 га тенг бўлсин. Берилган нуқталар орасидаги масофа $2c$ га тенг (30-расм).



30- расм.

Ечилиши. Координата ўқларини шундай танлаб оламизки, берилган F_1 ва F_2 нуқталар Ox ўқда, координаталар боши O эса бу нуқталарнинг ўртасида жойлашган бўлсин, бу системада берилган нуқталар бундай ёзилади: $F_1(c;\ 0)$ ва $F_2(-c;\ 0)$. Эгри чизиқнинг исталган $M(x;\ y)$ нуқтасидаги уринма тенгламасини

$$y'X - Y - (xy' - y) = 0$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда X ва Y — уринма нуқталарининг ўзгарувчи координаталари. Уринма тенгламасини нормал кўринишга келтириб, берилган нуқталардан уринмагача бўлган p_1 ва p_2 масофаларни топамиз:

$$p_1 = \pm \frac{cy' - (xy' - y)}{\sqrt{(y')^2+1}}, \quad p_2 = \pm \frac{-cy' - (xy' - y)}{\sqrt{(y')^2+1}}.$$

Шартга кўра $p_1 p_2 = b^2$, шунинг учун

$$(xy' - y)^2 - c^2 (y')^2 = \pm b^2 [(y')^2 + 1]$$

ёки

$$y = xy' \pm \sqrt{a^2 (y')^2 \pm b^2}, \qquad (32)$$

бу ерда $c^2 \pm b^2 = a^2$ деб олинган.

Бу Клеро тенгламаси. Унинг

$$y = Cx \pm \sqrt{a^2C^2 \pm b^2}$$

умумий ечими тўғри чизиқлар оиласидан иборат—тривиал жавоб.

Махсус интегрални топамиз. Бунинг учун умумий ечимни C бўйича дифференциаллаймиз ва ушбу тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mp \frac{a^2C}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}}, \\ y &= \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}} \end{aligned}\right|$$

(иккинчи тенглама x нинг ифодасини умумий ечимга қўйиш орқали ҳосил қилинган).

Бу системани қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \mp \frac{aC}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}}, \\ \frac{y}{b} &= \pm \frac{b}{\sqrt{a^2C^2 \pm b^2}}. \end{aligned}\right|$$

b^2 олдида мусбат ишора оламиз ва ҳар қайси тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариб, қўшамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Энди b^2 олдида манфий ишора оламиз ва ҳар қайси тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтариб, биринчи тенгламадан иккинчисини айирамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Шундай қилиб, изланаётган эгри чизиқлар эллипслар ва гиперболалар экан.

3-мисол. Эгри чизиқнинг исталган нуқтасидаги уринма ости ва нормал остининг ярим айирмаси уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг. Шу эгри чизиқни топинг.

Ечилиши. Масала шартига мувофиқ, ушбу дифференциал тенгламани тузамиз:

$$\frac{y}{y'} - yy' = 2x$$

ёки

$$y = \frac{2y'}{1-(y')^2}\,x. \tag{33}$$

Бу Лагранж тенгламасидир $[\psi(y') = 0]$. Уни интеграллаш учун қуйидаги кўринишда ёзиб олиш:

$$x = \frac{1-(y')^2}{2y'}\,y \text{ ёки } x = \frac{yx'}{2} = \frac{y}{2x'}$$

ва x ни y аргументнинг функцияси деб ҳисоблаш қулайдир. $x' = p$ деймиз. У ҳолда $x = \frac{yp}{2} - \frac{y}{2p}$ ёки $x = \frac{y}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$. y бўйича дифференциалласак:

$$x' = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{y}{2}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}.$$

x' ни p билан алмаштириб ва ўзгартиришлар бажаргач,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан $y = Cp$. Умумий интеграл параметрик шаклда

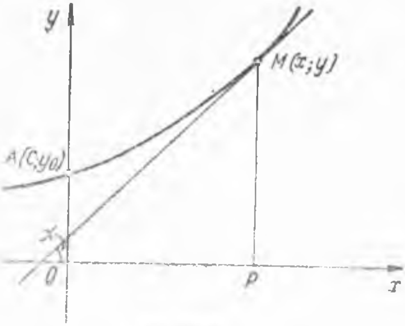
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{Cp}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right), \\ y &= Cp \end{aligned}\right\}$$

кўринишга эга. p ни йўқотамиз. Бунинг учун иккинчи тенгламадан $p = y/C$ ни топамиз ва биринчи тенгламага қўямиз; натижада

$$x = \frac{y^2}{2C} - \frac{C}{2}$$

ни ёки $2Cx = y^2 - C^2$ ни, яъни параболалар оиласини ҳосил қиламиз.

4-мисол. Ёруғлик нури $A(0;\ y_0)$ нуқтадан чиқади. Ёруғликнинг синиш қонуни $\frac{\cos\alpha_1}{v_1} = \frac{\cos\alpha_2}{v_2}$ $(= \text{const})$ дан фойдаланиб (бу ерда α_1 ва α_2 — нур траекториясининг



31- расм.

исталган иккита нуқтасида ўтказилган уринмаларнинг Ox ўққа оғиш бурчаклари, v_1 ва v_2 — нурнинг бу нуқталардаги тезликлари), нур тезлиги ординатага тескари пропорционал бўлган оптикавий муҳитда нур формаси тенгламасини топинг.

Ечилиши. Нурда ихтиёрий $M(x;\ y)$ нуқта оламиз (31-расм). $\alpha_1 = \alpha$ ва $v_1 = v$ деб (бу ерда α — уринманинг оғиш бурчаги, v эса нурнинг шу нуқтадаги тезлиги), ёруғликнинг синиш қонунидан $\frac{\cos\alpha}{v} = c$ (c — бирорта ўзгармас бўлиб, M нуқтанинг танланишига боғлиқ эмас) ни топамиз. Масала шартига кўра $v = k/y$, бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти. Демак, $y\cos\alpha = kc$ ёки $kc = a$ десак:

$$y \cos\alpha = a.$$

$1/\cos\alpha = \sec\alpha = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1 + (y')^2}$ бўлгани учун

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = a \tag{34}$$

дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг ечими (110-бетдаги мисолга қаранг):

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x+C}{a}.$$

$x = 0$ да $y = y_0$ бошланғич шартдан $C = a\operatorname{Arch}\frac{y_0}{a}$ ни топамиз, бинобарин,

$$y = a\operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + \operatorname{Arch}\frac{y_0}{a}\right).$$

5-мисол. $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ (a — ихтиёрий параметр) айланалар оиласининг ортогонал траекторияларини топинг.

Ечилиши. Айланалар оиласининг дифференциал тенгламасини тузамиз, бунинг учун берилган тенгламанинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз ва a ни бундай йўл билан топилган тенгламадан ва берилган тенгламадан йўқотамиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$2x + 2yy' + 2ay' = 0.$$

Бу ерга айланалар оиласидан топилган $2a = -(x^2 + y^2)/y$ ифодани қўямиз:

$$2x + 2yy' - \frac{(x^2 + y^2)\,y'}{y} = 0$$

ёки ўзгартиришлардан сўнг:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \qquad (35)$$

Ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини бу тенгламада y' ни $-\frac{1}{y'}$ га алмаштириш орқали ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}.$$

Бу бир жинсли тенглама. Унинг умумий ечимини бир жинсли тенгламаларни интеграллашнинг умумий қоидасидан фойдаланиб топиш мумкин, бироқ осонроқ йўли ҳам бор. Тенгламани дифференциалларда қайта ёзиб оламиз:

$$2xydy - y^2dx + x^2dx = 0.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини x^2 га бўламиз:

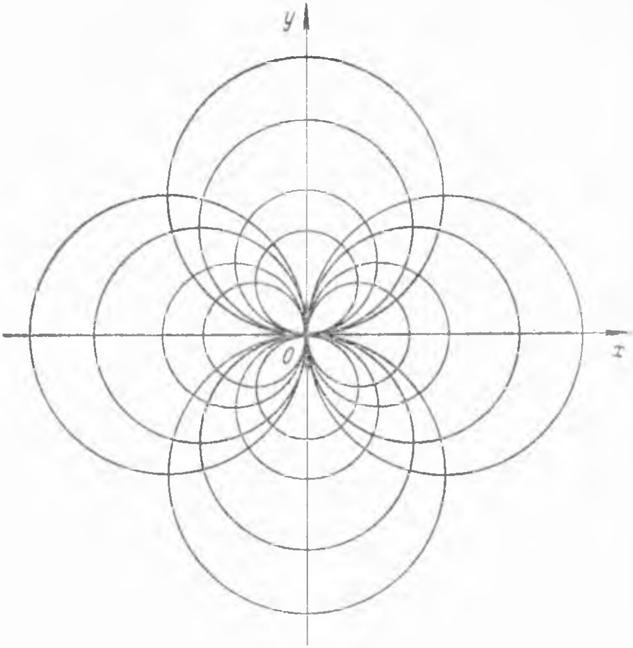
$$\frac{2xydy - y^2dx}{x^2} + dx = 0$$

ёки

$$d\left(\frac{y^2}{x}\right) + dx = 0,$$

бу тўлиқ дифференциаллардаги тенгламадир. Уни интеграллаб,

$$\frac{y^2}{x} + x = 2C \text{ ёки } x^2 + y^2 - 2Cx = 0$$



32- расм.

га, яъни яна айланалар оиласига эга бўламиз. Иккала оиланинг барча айланалари координаталар бошидан ўтади (32- расм), бироқ берилган оила айланаларининг марказлари Oy ўқда, траекторияларининг марказлари эса Ox ўқда жойлашган.

6- мисол. Битта O нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқларни бир хил ω бурчак остида кесиб ўтувчи эгри чизиқларни, яъни маркази координаталар бошида бўлган тўғри чизиқлар дастасининг изогонал траекторияларини топинг (33- расм).

Ечилиши. O нуқтани координаталар боши учун қабул қиламиз. Агар изланаётган эгри чизиқнинг исталган $M(x, y)$ нуқтасидаги уринманинг Ox ўқ билан ташкил этган бурчагини α орқали, бу нуқта радиус-векторининг Ox ўқ билан ҳосил қилган бурчагини φ орқали белгиласак, $\alpha = \varphi + \omega$ бўлади.

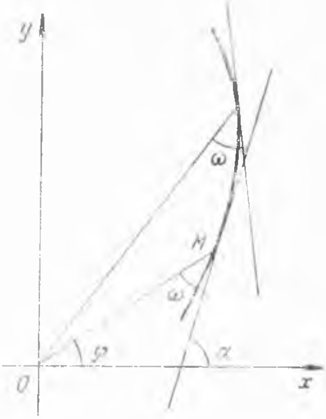
Бу тенгликнинг иккала томонидан тангенслар олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega}.$$

Сўнгра $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ бўлгани учун

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y/x + k}{1 - ky/x} \qquad (36)$$

дифференциал тенгламага келамиз, бу ерда $\operatorname{tg}\omega = k$ деб олинган.



33- расм.

Бу — бир жинсли тенглама. $\frac{y}{x} = z$ деймиз; у ҳолда $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$. Натижада ўзгарувчилари ажраладиган ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{z+k}{1-kz} \quad \text{ёки} \quad x(1-kz)\frac{dz}{dx} = k(z^2+1).$$

Ўзгарувчиларни ажратсак:

$$\frac{1-kz}{z^2+1}dz = k\frac{dx}{x},$$

бинобарин, умумий интеграл қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{arctg} z - \frac{k}{2}\ln(z^2+1) = k\ln x - k\ln C$$

ёки ўзгартиришлардан сўнг,

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg} y/x}.$$

Қутб координаталарда умумий ечим

$$r = Ce^{\varphi/k}$$

кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, изланаётган эгри чизиқлар логарифмик спираллардан иборат экан.

II БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ТАРТИБИНИ ПАСАЙТИРИШ

10-§ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМАЛАР. УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Биринчи тартибдан юқори тартибга эга бўлган барча дифференциал тенгламалар *юқори тартибли дифференциал тенгламалар* дейилади. n-тартибли тенглама y^n ҳосиладан ташқари қуйи тартибли ҳосилаларга ҳам эга бўлиши мумкин, шунинг учун бундай тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича:

$$F\ (y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ \ldots,\ y',\ y,\ x) = 0 \tag{1}$$

ёки, агар мумкин бўлса, юқори ҳосилага нисбатан ечилган кўринишда

$$y^{(n)} = f\ (x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \tag{2}$$

бўлади.

Биринчи тартибли тенгламалар учун бўлгани каби, бу ерда ҳам умумий ечим ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлади. Шу сабабли умумий ечимдан хусусий ечимни ажратиб олиш учун ихтиёрий ўзгармасларни аниқлашга имкон берадиган баъзи қўшимча шартлар ҳам берилган бўлиши керак. Биринчи тартибли тенглама учун бундай қўшимча шарт $y|_{x=x_0} = y_0$ қийматнинг, яъни интеграл эгри чизиқ ўтадиган нуқта координаталарининг берилиши эди. Юқори тартибли тенгламалар учун бу шартларни турли усуллар билан бериш мумкин. Масалан, қуйида кўрсатилишича, иккинчи тартибли тенглама учун умумий ечим иккита ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ бўлади. Уларни топиш учун иккита шартга эга бўлиш керак. Бу шартларни изланаётган функциянинг иккита нуқтадаги қийматини ёки изланаётган функциянинг ва унинг биринчи ҳосиласининг битта нуқтадаги қийматларини бериш билан ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи усул механика масалаларини ҳал этишда келтириб чиқариладиган дифференциал тенгламаларни ечишда кенг қўлланилади. Ҳақиқатан ҳам, агар механика терминларидан фойдаланадиган бўлсак, сўз ҳаракат қонуни тўғрисида кетаётган бўлади, шу билан бирга нуқтанинг бошланғич ҳолати (функция қиймати) ва унинг бошланғич тезлиги (биринчи ҳосила) берилган бўлади. Шунинг учун хусусий ечимни умумий ечимдан функциянинг бирор нуқтадаги берилган қиймати ва унинг биринчи ҳосиласи бўйича топиш *бошланғич шартлари берилган масала* дейилади.

Тартиби n бўлган тенгламалар учун бошланғич шартлар сифатида изланаётган функциянинг ва унинг $(n-1)$-тартибгача (у ҳам киради) барча ҳосилаларининг бирорта нуқтада қийматлари, яъни $x = x_0$ да

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0, \\ y' = y'_0, \\ \quad . \quad . \quad . \\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

берилади. (3) сонлар системаси *бошланғич шартлар системаси* дейилади. Берилган (2) дифференциал тенгламанинг (3) бошланғич шартлар системасини қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш *Коши масаласи* дейилади. Коши биринчи бўлиб ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги теоремани исботлади, уни қуйидагича таърифлаш мумкин.

Теорема. *(2) дифференциал тенглама ва (3) бошланғич шартлар системаси берилган бўлсин. Агар* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *функция бошланғич шартлар атрофида узлуксиз ва* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *аргументлар бўйича узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда* x_0 *ни ўз ичига олган интервалда аниқланган ва узлуксиз ҳамда берилган бошланғич шартлар системасини қаноатлантирувчи ечим мавжуд бўлиб, у ягона бўлади.*

Бу теореманинг исботига тўхталиб ўтирмаймиз.

Материаллар қаршилиги курсида кўпинча изланаётган функциянинг бир нечта нуқтадаги қийматлари маълум бўлганда хусусий ечимни топиш зарурати туғилади. Ана шундай ва янада умумийроқ масалалар дифференциал тенгламалар қўлланишини талаб этиладиган бошқа соҳаларда ҳам учрайди. Бу масалаларнинг кўпчилигида хусусий ечимларни *чегаравий шартлар* деб аталадиган бошқа турдаги шартлардан излашга тўғри келади. Бундай масалалар, умуман айтганда, бошланғич шартлари берилган масалага нисбатан анча мураккабдир. Биз бошланғич шартли масалалар билангина чегараланамиз. n-тартибли тенгламанинг умумий ечимига таъриф берамиз.

(2) дифференциал тенгламанинг умумий ечими деб ихтиёрий ўзгармасларга эга бўлган ечимга айтилади, бу ўзгармасларни бошланғич шартларнинг исталган йўл қўйиладиган системасини қаноатлантирадиган қилиб танлаб олиш мумкин.*

Агар ечимнинг бошланғич шартларга ҳам боғлиқлигини эътиборга олсак, уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = \varphi\ (x,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}). \tag{4}$$

Бошланғич шартлар системаси ихтиёрий танлаб олиниши мумкин бўлгани учун (4) ифодадан n-тартибли тенгламанинг умумий ечими n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ эканлиги кўринади.

Юқори тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш масаласи биринчи тартибли тенгламани интеграллаш масаласидан анча қийин бўлиб, ҳар доим ҳам биринчи тартибли тенгламани интеграллашга келтиравериЛмайди. Шундай бўлса-да, чизиқли тенгламалардан ташқари (уни текширишга III боб махсус ажратилган) барча турдаги юқори тартибли тенгламалар учун интеграллашнинг асосий усули тартибни пасайтириш, яъни берилган тенгламани унда ўзгарувчиларни алмаштириш орқали тартиби пастроқ тенгламага келтириш бўлиб ҳисобланади.

Тартибни пасайтириш чекли кўринишда интегралланмайдиган биринчи тартибли тенгламага ёки биринчидан юқори тартибли тенгламага олиб келган ҳолларда ҳам мақсадга мувофиқдир. Бироқ тартибни пасайтиришга ҳар доим ҳам эришиш мумкин эмас. Кейинги параграфда тартибини пасайтиришга имкон берадиган тенгламаларнинг айрим турлари кўриб чиқилади.

---

* Йўл қўйиладиган система деганда, илгаригидек, Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирувчи системани тушунамиз.

11-§. ТАРТИБИНИ ПАСАЙТИРИШГА ИМКОН БЕРАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Тартибини пасайтиришга имкон берадиган n-тартибли тенгламаларнинг энг содда тури

$$y^{(n)} = f\ (x) \tag{1}$$

кўринишдаги тенгламадир.

Бу ерда тартибни пасайтириш кетма-кет интеграллаш йўли билан амалга оширилади. (1) дан дарҳол қуйидагини топамиз:

$$y^{(n-1)} = \int f\ (x)\ dx + C_1.$$

Шу йўсинда керакли марта интеграл олиб, (1) тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз, бунда ихтиёрий ўзгармаслар $(n-1)$-даражали кўпҳаднинг коэффициентлари сифатида киради.

Масалан, $y''' = \sin x - \cos x$ тенгламани ечайлик.

Тенгламанинг иккала томонини x бўйича уч марта интеграллаб, кетма-кет ҳосил қиламиз:

$$y'' = -\cos x - \sin x + 2C_1,$$
$$y' = -\sin x + \cos x + 2C_1x + C_2,$$
$$y = \cos x + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Бу турдаги тенгламаларнинг соддалигига қарамай, у муҳим роль ўйнайди, чунки бошқа кўринишдаги тенгламалар, шунингдек, материаллар қаршилигига доир бир қатор масалаларни ечишда ҳосил бўладиган баъзи тенгламалар бу турдаги тенгламаларга келтирилади.

Биз ҳозир бу масалаларни қараб ўтирмай (барча татбиқлар ва физикага оид мисолларни кейинги параграфга қолдирамиз), тартибини пасайтиришга имкон берадиган бошқа турдаги тенгламаларни қарашга ўтамиз.

Изланаётган функция ошкор ҳолда иштирок этмаган ва $k-1$-тартибгача (y ҳам киради) қуйи тартибдаги ҳосилалар иштирок этмаган

$$F(x,\ y^{(k)},\ \ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

дифференциал тенгламанинг тартибини k бирликка пасайтириш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, янги изланаётган функция учун

$$u = y^{(k)} \tag{3}$$

ни қабул қиламиз; (3) ни дифференциаллаймиз:

$$u' = y^{(k+1)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$u^{(n-k)} = y^{(n)},$$

шунинг учун (3) ўрнига қўйиш (2) тенгламани

$$F\,(x,\ u,\ u',\ \dots,\ u^{(n-k)}) = 0$$

кўринишга, яъни $(n-k)$- тартибли тенгламага келтиради.

Бу тенгламани интеграллаб ва янги изланаётган u функцияни аниқлаб, y функцияни топиш мумкин. Бунда (3) тенгликни u функцияси маълум бўлган k- тартибли янги

$$y^{(k)} = f\,(x,\ C_1,\ \dots,\ C_{n-k}) \qquad (4)$$

дифференциал тенглама сифатида қаралади. (4) тенглама юқорида таҳлил қилинган турдаги тенглама бўлиб, бевосита интеграллашга имкон беради.

Ушбу $y^{IV} = \sqrt{y'''}$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бу тенгламада изланаётган функция, унинг биринчи ва иккинчи ҳосилалари иштирок этмайди. Шундай қилиб, тенглама тартибини уч бирликка пасайтириш мумкин. $y''' = u$ деб ва уни дифференциаллаб, $y^{IV} = u'$, биринчи тартибли $u' = \sqrt{u}$ тенгламага келамиз.

Ўзгарувчиларни ажратиб, $\frac{du}{\sqrt{u}} = dx$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$2\sqrt{u} = x + C_1; \qquad u = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$

шунингдек, $u = 0$. Демак,

$$y''' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2 \qquad \text{ва} \qquad y''' = 0.$$

Бу тенгламаларни уч марта интеграллаб, кетма-кет қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y'' = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + 2C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}(x + C_1)^4 + 2C_2x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{240}(x + C_1)^5 + C_2x^2 + C_3x + C_4$$

ва

$$y = C_1^* x^2 + C_3^* \; x + C_3^* .$$

Бу турдаги тенгламаларнинг хусусий ҳоли *изланаётган функция ошкор иштирок этмаган иккинчи тартибли тенгламадир:*

$$F\ (x,\ y',\ y'') = 0. \tag{5}$$

Бу ерда $y' = u$ ўрнига қўйиш орқали тенглама тартиби бир бирликка пасайтирилади.

$y'' + \dfrac{y'}{x} = x$ тенгламани интеграллаймиз.

$y' = u$ деймиз, бу ердан $y'' = u'$ ва тенглама

$$u' + \frac{u}{x} = x$$

кўринишни олади, яъни биринчи тартибли чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз (4- § га қаранг):

$$u = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} .$$

Шундай қилиб,

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} ,$$

бу ердан умумий ечимни топамиз:

$$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln |x| + C_2.$$

Изланаётган функциянинг n дан қуйи тартибли ҳосилаларини, изланаётган функциянинг ўзини, n тадан кам миқдордаги ихтиёрий ўзгармасларни ва эркли ўзгарувчини боғловчи (4) кўринишдаги ифодани (2) дифференциал тенгламанинг *оралиқ интеграли* деб аташ қабул қилинган. Кўриб чиқилган мисолларда биз дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топдик. Хусусий ечимни топишда, юқорида кўрсатилганидек, ҳосил қилинган умумий ечимдан фойдаланиш мумкин, бироқ ихтиёрий ўзгармасларнинг қийматларини оралиқ интегралдаёқ кейинги интеграллашгача берилган бошланғич шартлардан фойдаланиб топиш осондир.

Бошланғич шартлари $x = 0,\ y = 1,\ y' = 3$ бўлган $y''\ (x^2 + 1) = 2xy'$ тенгламани ечамиз.

$y' = u$ ўрнига қўйиш (бу ердан $y'' = u'$) ни қўлланиб, биринчи тартибли

$$u'\,(x^2+1) = 2xu$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Ўзгарувчиларни ажратиш ва интеграллаш ушбуни беради:

$$\frac{du}{u} = \frac{2x\,dx}{x^2+1}\ ;\ \ln u = \ln\,(x^2+1) + \ln C_1;\quad u = C_1(x^2+1),$$

бу ердан

$$y' = C_1\,(x^2+1).$$

Бу муносабат дастлабки тенгламанинг оралиқ интегралидир. Бошланғич шартлардан фойдаланиб топамиз: $3 = C_1\,(0+1)$, бу ердан $C_1 = 3$. Демак, $y' = 3x^2 + 3$. Интегралласак:

$$y = x^3 + 3x + C_2.$$

Бошланғич шартлардан: $1 = 0 + 0 + C_2$ ёки $C_2 = 1$; шу сабабли берилган бошланғич шартлар системасини қаноатлантирадиган хусусий ечим

$$y = x^3 + 3x + 1$$

кўринишга эга.

Тартибини пасайтиришга имкон берадиган тенгламаларнинг яна бир тури эркли ўзгарувчи ошкор иштирок этмаган

$$F\,(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

кўринишдаги тенгламадир. Бу ерда иккала ўзгарувчини алмаштириш орқали тенглама тартиби бир бирликка пасайтирилади. Янги изланаётган функция сифатида $y' = p$ ни, янги эркли ўзгарувчи учун y ни қабул қиламиз. Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича топамиз:

$$y'' = \frac{d}{dx}\,p = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = y\,\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dp}{dy}\right) = p\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) + \frac{d}{dx}\,p\,\frac{dp}{dy} =$$

$$= p^2\,\frac{d^2p}{dy^2} + p\cdot\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

$y^{(n)}$ ҳосила $p,\ \frac{dp}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}$ лар орқали ифодаланишини тўлиқ индукция методи ёрдамида кўрсатиш мумкин, демак, (6) тенглама бундай ўрнига қўйиш орқали

$$F_1\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0 \tag{7}$$

кўринишга, яъни $(n-1)$-тартибли тенгламага келтирилади.

$(y')^2 - yy'' = 1$ тенгламани интеграллаймиз.

$y' = p$ бўлсин ва y — янги эркли ўзгарувчи дейлик. Юқоридагига ўхшаш, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ ва ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$p^2 - yp\frac{dp}{dy} = 1.$$

Ўзгарувчилари ажраладиган биринчи тартибли

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2 - 1$$

тенгламани ҳосил қилдик, бу ердан кетма-кет топамиз:

$$\frac{p\,dp}{p^2-1} = \frac{dy}{y}; \qquad \frac{1}{2}\ln(p^2-1) = \ln y + \frac{1}{2}\ln C_1;$$

$$p^2 - 1 = C_1y^2; \qquad p = \sqrt{1+C_1y^2}\,,$$

бу ерда аниқлик учун илдиз олдида мумкин бўлган қийматлардан бири олинган, шунингдек ($p^2 - 1$ га бўлиш натижаси) $p = \pm 1$.

p ўрнига y' нинг қийматини қўйиб, топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+C_1y^2}; \qquad \frac{dy}{\sqrt{1+C_1y^2}} = dx; \qquad x + C_2 = \int\frac{dy}{\sqrt{1+C_1y^2}},$$

шунингдек, $y' = \pm 1$; $y = \pm x + C^*$.

Интегралнинг шакли C_1 ўзгармаснинг ишорасига, яъни бошланғич шартларга мутлақо боғлиқ. Бу ерда умумий ечимни топиш талаб қилингани ва бошланғич шартлар эса йўқлиги учун иккала ҳолни қараб чиқиш зарур.

Агар $C_1 > 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1+C_1y^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left(y\sqrt{C_1} + \sqrt{1+C_1y^2}\right)$$

ва тенгламанинг умумий ечими

$$\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\left(y\sqrt{C_1} + \sqrt{1+C_1y^2}\right) = x + C_2$$

кўринишни олади.

Агар, аксинча, $C_1 < 0$ бўлса, у ҳолда ечим

$$x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{-C_1}}\arcsin y\sqrt{-C_1}$$

кўринишда бўлади.

Ниҳоят, тенглама тартибини пасайтиришга имкон берадиган яна бир ҳолни қайд қилиб ўтамиз. Бу — *тенгла-*

манинг чап томони аниқ ҳосила бўлган ҳол. Бу ҳолда тенглама тартибини бир бирликка пасайтириш бевосита интеграллаш йўли билан амалга оширилишини тушуниш осон. Албатта, бундай ҳол камдан-кам учрайди. Кўпчилик ҳолларда тенгламани бундай кўринишга келтиришга баъзи сунъий шакл алмаштиришлар орқали эришилади, бироқ бундай шакл алмаштиришларнинг бирон-бир умумий усулини бу ерда кўрсата олмаймиз ва мисоллар билан чегараланамиз.

$y'' - xy' - y = 0$ тенгламани ечамиз.

Тенгламанинг чап томони

$$(y' - xy)' = 0$$

кўринишга эгалигини сезиш осон, бу ердан $y' - xy = C_1$.

Оралиқ интеграл биринчи тартибли чизиқли тенгламадир, уни интеграллаб топамиз (I боб, 4-§ га қаранг):

$$y = C_1 e^{x^2/2} \left(\int e^{-x^2/2} \, dx + C_2 \right).$$

Ҳосил бўлган интеграл элементар функциялар билан ифодаланмайди, бироқ бундай ноэлементар функция учун тўлиқ жадваллар мавжуд.

Энди $yy'' - (y')^2 - y^2 = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

Бу тенгламанинг чап томони аниқ ҳосила эмас. Бироқ бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$yy'' - (y')^2 = y^2 \quad \text{ёки} \quad \frac{yy' - (y')^2}{y^2} = 1,$$

бу ердан бу тенглама $\left(\frac{y'}{y} \right) = 1$ кўринишга эгалиги кўринади.

Интеграллаб, топамиз:

$$\frac{y'}{y} = x + C_1 \quad \text{ёки} \quad y' = y\,(x + C_1).$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dy}{y} = (x + C_1)\,dx; \qquad \ln y = \frac{(x + C_1)^2}{2} \ln C_2,$$

яъни

$$y = C_2 e^{(x + C_1)^2/2}.$$

12-§. ФИЗИКАВИЙ МИСОЛЛАР. МЕХАНИКАНИНГ ВА МАТЕРИАЛЛАР ҚАРШИЛИГИНИНГ БАЪЗИ МАСАЛАЛАРИ

Бу ерда тартибини пасайтиришга имкон берадиган ва чекли кўринишда интегралланадиган* дифференциал тенг-

---

* Юқори тартибли дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш тўғрисида 25-§ га қаранг.

ламаларга олиб келадиган бир қатор масалалар қараб чиқилади.

Нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати. Биринчи навбатда m массали моддий нуқтанинг F куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракатини текширамиз. F куч фақат қуйидаги аргументларнинг бирига боғлиқ бўлади: вақт, тезлик ёки нуқтанинг координаталари.

Ox ўқни нуқта ҳаракатланаётган тўғри чизиқ бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда қўйилган куч, ва бинобарин, нуқтанинг тезланиши бу тўғри чизиқ бўйлаб йўналади ва ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F. \tag{1}$$

Ушбу бошланғич шартларни қабул қиламиз:

$$t=t_0 \text{ да } x=x_0 \text{ ва } v=v_0.$$

Учта ҳолни қараб чиқамиз:

1) куч вақтга боғлиқ: $F=F(t)$.

$\frac{dx}{dt}=v,\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$ бўлгани учун (1) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган биринчи тартибли тенгламага келтирилади:

$$m\frac{dv}{dt}=F(t),$$

бу ердан

$$v=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(u)\ du+C_1,$$

бу ерда u — интеграллаш ўзгарувчиси.

C_1 ихтиёрий ўзгармасни $x=x_0$ да $v=v_0$ бошланғич шартдан аниқлаймиз: $C_1=v_0$, демак,

$$v=v_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(u)\ du$$

ёки

$$\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(u)\ du.$$

Иккинчи марта интеграллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = v_0 t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{z} F(u)\,du\right)dz + C_2,$$

бу ерда $\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{z} F(u)\,du\right)dz$ такрорий интегралдир. Ихтиёрий ўзгармасни $t = t_0$ да $x = x_0$ бошланғич шартдан топамиз: $C_2 = x_0 - v_0 t_0$, демак, нуқтанинг ҳаракат қонуни узил-кесил ушбу кўринишда ёзилади:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{z} F(u)\,du\right)dz$$

Масалан, массаси m бўлган нуқта вақт ўтиши билан бир текис камаядиган ва T секунддан сўнг нолга айланадиган куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин. Бошланғич $t = 0$ моментда куч $F = F_0$, тезлик $v = 0$ ва координата $x = 0$ бўлсин. Юқорида топилган формулаларимиздан фойдаланиш мумкин бўлиши учун F кучни топамиз. Масала шартига кўра $F = F_0 - kt$, бу ерда k коэффициентни топиш керак. $t = T$ да $F = 0$ бўлгани учун $F_0 - kT = 0$, бу ердан $k = F_0/T$, ва демак, $F = F_0\,(1 - t/T)$. Шунинг учун

$$v = \frac{F_0}{m}\int_{0}^{t}\left(1 - \frac{u}{T}\right)du \quad \text{ёки} \quad v = \frac{F_0}{m}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right),$$

$$x = \frac{F_0}{m}\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{z}\left(1 - \frac{u}{T}\right)du\right)dz \quad \text{ёки} \quad x = \frac{F_0 t^2}{2m}\left(1 - \frac{t}{3T}\right).$$

Вақтнинг T моментидаги тезлик ва ўтилган йўлни топиш учун ҳосил қилинган муносабатларда $t = T$ дейиш керак. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$v|_{t=T} = \frac{F_0 T}{2m}, \qquad x|_{t=T} = \frac{F_0 T^2}{3m}.$$

2) куч тезликка боғлиқ: $F = F(v)$.

Бу ҳолда дифференциал тенглама

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(v)$$

кўринишда бўлади. Юқоридагига ўхшаш, $\frac{dx}{dt} = v$ алмаштириш бажариб, қуйидагинии ҳосил қиламиз:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v),$$

бу ердан

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dt}{F(u)} = t + C_1.$$

$t = t_0$ да $v = v_0$, шунинг учун $C_1 = -t_0$ ва энг кейинги тенгламани қуйидагича қайта ёзиб олиш мумкин:

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{du}{F(u)} = t - t_0. \qquad (2)$$

Айтайлик, бу тенгламани интеграллашга эришган ва ҳосил бўлган муносабатни $v = \frac{dx}{dt}$ га нисбатан ечган бўлайлик:

$$v = \varphi(t,\ t_0,\ v_0),$$

у ҳолда

$$x = \int_{t_0}^{t}\varphi(z,\ t_0,\ v_0)dz + C_2,$$

бу ерда C_2 ўзгармас $t = t_0$ да $x = x_0$ бошланғич шартдан аниқланади: $C_2 = x_0$. Шундай қилиб, нуқтанинг ҳаракат қонуни

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t}\varphi(z,\ t_0,\ v_0)\ dz$$

шаклда ҳосил бўлади.

Агар (2) тенгламадан v ни t нинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин бўлмаса, у ҳолда берилган дифференциал тенгламада қуйидагича алмаштиришлар ўтказамиз:

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

ва тенгламани

$$mv\frac{dv}{dx} = F(v)$$

кўринишда қайта ёзиб оламиз, бу ердан

$$x = m\int_{v_0}^{v}\frac{u\,du}{F(u)} + C$$

ни топамиз. C ни $x = x_0$ да $v = v_0$ бошланғич шартдан аниқлаймиз: $C = x_0$. У ҳолда

$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{u\,du}{F(u)}. \qquad (3)$$

Таъсир этувчи куч тезликка боғлиқ бўлгандаги тўғри чизиқли ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи муҳитдаги ҳаракат (қаршилик кучи тезликка пропорционал бўлганда) мисол бўлади. Бу ҳолда $F(v) = -kv$ деб ҳисоблаш мумкин бўлгани учун (3) тенглик

$$x = x_0 - \frac{m}{k}(v - v_0)$$

кўринишни олади, (2) формула эса

$$\frac{m}{k}\ln\frac{v_0}{v} = t - t_0$$

ёки

$$v = v_0 e^{-k(t-t_0)/m} \qquad (4)$$

кўринишга келади.

Бундай турдаги конкрет масалани кўрайлик.

1-мисол. Моторли қайиқ 10 км/соат тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Шундай кетаётган қайиқнинг мотори ўчириб қўйилди, натижада 20 сек дан кейин унинг тезлиги 6 км/соатга тенг бўлиб қолди. Мотор ўчирилгандан кейин 2 мин ўтгач, қайиқнинг тезлиги қандай бўлганини ва ўчирилгандан кейинги бир минут ичида қайиқ қанча масофани босиб ўтганлигини аниқланг.

Ечилиши. Масала шартига кўра: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 10$*км/соат*. $v|_{t=20\ \text{сек}} = 6$ *км/соат*. Шунинг учун (4) формулага биноан: $6 = 10\,e^{-k/(180\,m)}$, бу ердан

$e^{-k/m} = (0{,}6)^{180}$ ёки $k/m = -180\ \ln\ 0{,}6 = 180\cdot 0{,}5108 =$
$= 91{,}944.$

Демак,

$$v|_{t=1\ \text{мин}} = 10\cdot(0{,}6)^{180/60} = 10\cdot(0{,}6)^3 = 2{,}16\ \text{км/соат}$$

ва

$$x|_{t=1\ \text{мин}}=(10-2{,}16)/91{,}944=7{,}84/91{,}944\approx 85{,}3\ \text{м}.$$

Энди $v_2=1{,}5$ м, $v|_{t=4\ \text{сек}}=1$ м/сек деб фараз қиламиз. Қанча вақтдан сўнг қайиқнинг тезлиги 0,01 м/сек га тушиб қолишини ва тўхтагунча қайиқ қанча мусофани босиб ўтишини ҳисоблаймиз. Қуйидагига эгамиз: $1=1{,}5\,e^{-4k/m}$, бу ердан

$$e^{-k/m}=\left(\frac{1}{1{,}5}\right)^{1/4}\ \text{ёки}\ \frac{k}{m}=\frac{1}{4}\ln 1{,}5=\frac{1}{4}\cdot 0{,}4055=0{,}1014,$$

Демак,

$$t_{v=0{,}01\ \text{м/сек}}=\frac{1}{0{,}1014}\ln\frac{1{,}5}{0{,}01}=\frac{1}{0{,}1014}\ln\ 150=\frac{5{,}0107}{0{,}1014}\approx 50\ \text{сек}$$

$$x|_{v=0}=1{,}5/0{,}1014\approx 14{,}8\ \text{м}.$$

Энди массаси m бўлган жисмнинг юқори баландликдан тушиш ҳолини қарайлик, бунда жисм моддий нуқта каби ҳаракат қилади, ҳаво қаршилиги эса тезликнинг квадратига пропорционал деб фараз қиламиз. Шунингдек, ушбу бошланғич шартларни ҳам қабул қиламиз: $t=0$ да $x=0$ ва $v=v_0$.

Тушаётган жисмга иккита куч: жисмнинг оғирлик кучи ва ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади: уларнинг тенг таъсир этувчиси: $F=mg-kv^2$, шунинг учун

$$t=m\int_{v_0}^{v}\frac{du}{mg-ku^2}.$$

Жисм фақат $F>0$ бўлгандагина тушгани учун $mg-ku^2>0$ ёки $v<\sqrt{mg/k}$. Бу ерда $\sqrt{mg/k}=v_{\text{кр}}$ (критик тезлик) деб белгилаймиз. У ҳолда

$$t=\frac{m}{2kv_{\text{кр}}}\left(\ln\frac{v_{\text{кр}}+v}{v_{\text{кр}}-v}-\ln\frac{v_{\text{кр}}+v_0}{v_{\text{кр}}-v_0}\right)$$

ёки

$$t=\frac{m}{kv_{\text{кр}}}\left(\operatorname{Arth}\frac{v}{v_{\text{кр}}}-\operatorname{Arth}\frac{v_0}{v_{\text{кр}}}\right).$$

$\frac{m}{k}=\frac{v^2_{\text{кр}}}{g}$ лигидан, ва бинобарин, $\frac{kv_{\text{кр}}}{m}=\frac{g}{v_{\text{кр}}}$ лигидан кейинги тенгликни қуйидагича ўзгартириб ёзамиз:

$$\operatorname{Arth}\frac{v}{v_{\text{кр}}} = \operatorname{Arth}\frac{v_0}{v_{\text{кр}}} + \frac{gt}{v_{\text{кр}}}.$$

Тенгликнинг иккала томонидан гиперболик тангенс оламиз:

$$v = v_{\text{кр}}\frac{v_0/v_{\text{кр}} + \operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})}{1 + (v_0/v_{\text{кр}})\ \operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})}$$

ёки

$$v = v_0 + v_{\text{кр}}\frac{(1 - v_0^2/v_{\text{кр}}^2)\operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})}{1 + (v_0/v_{\text{кр}})\operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})}. \qquad (5)$$

Хусусан, $v_0 = 0$ да

$$v = v_{\text{кр}}\operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}}), \qquad (6)$$

$v_0 = v_{\text{кр}}$ да эса

$$v(t) = v_0 = v_{\text{кр}}$$

га эгамиз, яъни жисмнинг тушиши ўзгармас тезлик билан содир бўлади.

Аргумент чексиз ортганда гиперболик тангенс бирга интилгани учун $t = \infty$ да $v(t)$ тезлик $v_{\text{кр}}$ га интилишини қайд қилиб ўтайлик. Бу $v(t) \neq v_{\text{кр}}$ тезлик билан тушаётган жисмнинг тезлиги критик тезликка асимптотик яқинлашиб келса-да, лекин жисм критик тезликка ҳеч қачон эриша олмаслигини билдиради.

Чекли ўлчамларга эга бўлган жисмларнинг тушишида ҳавонинг қаршилиги жисмнинг катталиги, шакли ва оғирлигига, шунингдек, ҳавонинг зичлигига боғлиқ бўлади. Бу боғланиш $k_1 = k/m$ коэффициент орқали ҳисобга олиниб, у

$$k_1 = \alpha\frac{Sd}{P} \qquad (7)$$

эмпирик формула билан аниқланади, бу ерда d — 1 м³ ҳавонинг оғирлиги (Н ларда; ўртача $d = 12$ Н/м³), бу 760 мм босимдаги ва 15°С даги 1 м³ ҳавонинг оғирлигига мос келади; S — жисмнинг ҳаракат йўналишига перпендикуляр бўлган текисликдаги проекциясининг юзи (м² ларда); P — жисмнинг оғирлиги (Н ларда), α эса жисм шаклига боғлиқ бўлган ва тажриба йўли билан топиладиган ўлчамсиз «қаршилик коэффициенти», масалан, горизонтал тушувчи квадрат пластинка учун $\alpha = 0{,}631$; тирқиши (очиқ томони) пастга қараган яримсфера (парашют) учун $\alpha = 0,664$ ва ҳ. к.

(7) формула юқоридаги натижалар билан биргаликда, масалан, ҳаракат бошлангунча тинч ҳолатда турган ҳамда томони 1 м ва оғирлиги 19,6 Н бўлган квадрат пластинка туша бошлагандан 2 сек ўтгач, у қандай тезликка эга бўлиш масаласини ҳал этишга имкон беради. Бу ҳолда

$$k_1 = \frac{0,631 \cdot 12 \cdot 1}{19,6} = 0,386, \ v_{\text{кр}} = 5,038, \ \frac{g}{v_{\text{кр}}} = 1,947.$$

Бу қийматларни, шунингдек, $t = 2$ сек ни (4) формулага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$v|_{t=2} = 5,038 \operatorname{th} 3,894 = 5,038 \cdot 0,999 = 5,033 \ \text{м/сек}.$$

Бу натижа тик тушаётган пластинка умуман эга бўлиши мумкин бўлган $v_{\text{кр}} = v|_{t=\infty} = 5,038$ м/сек тезликдан деярли фарқ қилмайди. Шундай қилиб, назарий жиҳатдан чексиз катта вақт оралиғидан сўнг эришиладиган энг юқори тезликка, амалда тушишнинг иккинчи секунди охиридаёқ эришилар экан.

x нинг координаталарини топиш учун

$$dx = v_{\text{кр}} \frac{v_0/v_{\text{кр}} + \operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})}{1 + (v_0/v_{\text{кр}}) \operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})} dt \tag{8}$$

дифференциал тенгламани интеграллаймиз, натижада:

$$x = v_{\text{кр}} \int_0^t \frac{v_0/v_{\text{кр}} + \operatorname{th}(gz/v_{\text{кр}})}{1 + (v_0/v_{\text{кр}}) \operatorname{th}(gz/v_{\text{кр}})} dz + C.$$

Ўнг томондаги интегрални $\operatorname{th}(gz/v_{\text{кр}}) = u$ ёки $z = (v_{\text{кр}}/g) \operatorname{Ar th} u$ ўрнига қўйиш билан ва бир вақтда $v_0/v_{\text{кр}}$ ни α билан алмаштириб ҳисоблаймиз; унда интеграл ($v_{\text{кр}}$ кўпайтувчи билан биргаликда) ушбу кўринишни олади:

$$I = \frac{v_{\text{кр}}^2}{g} \int_0^{u_0} \frac{\alpha + u}{(1 + \alpha u)(1 - u^2)} du,$$

бу ерда $u_0 = \operatorname{th}(gt/v_{\text{кр}})$. Қасрни элементар касрларга ёямиз:

$$\frac{\alpha + u}{(1 + \alpha u)(1 - u^2)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha u} - \frac{1}{2(1 + u)} + \frac{1}{2(1 - u)}.$$

Бунинг натижасида

$$I = \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\left[\ln(1+\alpha u) - \frac{\ln(1+u)}{2} - \frac{\ln(1-u)}{2}\right]_0^{u_0} =$$

$$= \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\frac{1+\alpha u}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^{u_0} = \frac{u_{\text{кр}}^2}{g}\ln\frac{1+v_0/v_{\text{кр}}\,\text{th}\,(gt/v_{\text{кр}})}{\sqrt{1-\text{th}^2\,(gt/v_{\text{кр}})}} =$$

$$= \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\text{ch}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}} + \frac{v_0}{v_{\text{кр}}}\,\text{sh}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}}\right).$$

Шундай қилиб,

$$x = \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\text{ch}\frac{gt}{v_{\text{кр}}} + \frac{v_0}{v_{\text{кр}}}\,\text{sh}\frac{gt}{v_{\text{кр}}}\right) + C.$$

C ни топиш учун $t = 0$ да $x = x_0$ деймиз. У ҳолда $C = x_0$ ва демак,

$$x = x_0 + \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\text{ch}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}} + \frac{v_0}{v_{\text{кр}}}\,\text{sh}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}}\right). \tag{9}$$

Агар $x_0 = 0$ деб фараз қилсак.

$$x = \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\left(\text{ch}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}} + \frac{v_0}{v_{\text{кр}}}\,\text{sh}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}}\right).$$

Хусусан, яна $v_0 = 0$ ҳам десак,

$$x = \frac{v_{\text{кр}}^2}{g}\ln\text{ch}\,\frac{gt}{v_{\text{кр}}}.$$

Бу формуладан, масалан, қуйидаги масалани ечиш учун фойдаланиш мумкин.

2-мисол. Парашютчи 1,5 км баландликдан сакради ва парашютни 0,5 км баландликда очди. Одамнинг нормал зичликка эга бўлган ҳавода тушишининг критик тезлиги 50 м/сек деб олиб ва ҳаво зичлигининг баландликка қараб ўзгаришини ҳисобга олмай, парашютчи парашют очилгунча қанча вақт тушганини аниқланг.

Ечилиши. Бу ерда $x = 1{,}5$ км $-$ $0{,}5$ км $= 1$ км $= 1000$ м. Демак,

$$1000 = \frac{50^2}{g}\,\text{in}\,\text{ch}\,\frac{gT}{50},$$

бу ердан $g \approx 10$ м/сек^2 деб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\ln\text{ch}\,(T/5) = 4 \text{ ёки } T = 5\,\text{Ar}\,\text{ch}\,e^{-4}.$$

Кўрсаткичли ва гиперболик функциялар жадвалларидан $e^4 = 54,598$, $\operatorname{Ar\,ch} 54,598 = 4,693$ ни топамиз. Демак,

$$T = 5 \cdot 4,693 = 23,465 \text{ сек} \approx 23 \text{ сек}.$$

3) куч нуқтанинг вазиятига боғлиқ: $F = F(x)$. Ушбу

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

дифференциал тенгламада

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$mv\frac{dv}{dx} = F(x),$$

бу ердан ўзгарувчиларни ажратиш орқали қуйидагини топамиз:

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(u)\,du + C_1,$$

бу ерда u — интеграллаш ўзгарувчиси. $x = x_0$ да $v = v_0$ бошланғич шартдан $C_1 = mv_0^2/2$ ни аниқлаймиз, демак,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \int_{x_0}^{x} F(u)\,du.$$

Бу тенгламани v га нисбатан ечиб ва v ни $\frac{dx}{dt}$ орқали алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(u)\,du},$$

бу ердан

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{z} F(u)\,du}} + C_2.$$

$t = t_0$ да $x = x_0$ бўлгани учун $C_2 = t_0$ ва узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$t = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{z} F(u)\,du}}. \tag{10}$$

Бу ердан x ни t нинг функцияси сифатида ифодалаб, нуқтанинг ҳаракат қонунини ҳосил қиламиз.

Масалан, агар нуқта $F = km/x^3$ куч таъсирида $t = t_0$ да $x = x_0$ ва $v = v_0$ бошланғич шартларда тўғри чизиқли ҳаракат қилса, у ҳолда

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dz}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int\limits_{x_0}^{z} \frac{km}{u^3}\,du}} = x_0 \int\limits_{x_0}^{x} \frac{z\,dz}{\sqrt{(v_0^2 x_0^2 + k)z^2 - kx_0^2}},$$

ёки

$$t = \frac{x_0}{v_0^2 x_0^2 + k}\left[\sqrt{(v_0^2 x_0^2 + k)\,x^2 - kx_0^2} - v_0 x_0\right]. \tag{11}$$

Бу тенгламани x га нисбатан ечиб, нуқтанинг ҳаракат қонунини топамиз:

$$x = \sqrt{(x_0 + v_0 t)^2 + \frac{kt^2}{x_0^2}}.$$

Агар нуқта 0 марказдан итариш кучи таъсирида ҳаракат қилаётган бўлса, $k > 0$; тортишиш кучи таъсирида ҳаракат қилаётганда эса $k < 0$ бўлади; кейинги ҳолда нуқта марказга T вақтдан сўнг етади, T ни $t = T$ бўлганда $x = 0$ шартдан топилади. $k = -k_1^2$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(x_0 + v_0 T)^2 - \frac{k_1^2 T}{x_0^2} = 0.$$

Бу тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратиб, уларнинг ҳар қайсисини нолга тенглаймиз:

$$x_0 + v_0 T - \frac{k_1 T}{x_0} = 0, \qquad x_0 + v_0 T + \frac{k_1 T}{x_0} = 0.$$

Иккинчи тенгламани ташлаб юборамиз, чунки T манфий бўла олмайди. Биринчи тенгламадан

$$T = \frac{x_0^2}{k_1 - v_0 x_0}$$

ни топамиз.

Куч нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўлган мисоллар қаторига қуйидаги масала ҳам киради.

3- мисол. Ердан чексиз катта масофада дастлаб тинч ҳолатда бўлган метеор тўғри чизиқли ҳаракат қилиб Ерга тушмоқда, шу билан бирга метеорнинг тезланиши ундан Ер марказигача бўлган масофанинг квадратига тескари пропорционал деб фараз қиламиз. Метеор Ерга қандай тезлик билан урилишини аниқланг.

Ечилиши. Метеордан Ер марказигача бўлган масофани r орқали белгилаймиз ва

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k}{r^2}$$

дифференциал тенгламани тузамиз. Тезланиш $w = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ (бу ерда v — метеорнинг ҳаракат тезлиги) бўлгани учун тенглама ушбу кўринишга келади:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \quad \text{ёки} \quad v\frac{dv}{dr} = \frac{k}{r^2},$$

чунки $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$.

Кейинги тенгламанинг умумий интеграли

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{k}{r} + C$$

кўринишга эга, бу ердаги C ни $r = \infty$ да $v = 0$ бошланғич шартдан аниқлаймиз, яъни $C = 0$. Демак, $v^2 = -2k/r$.

Ерга тушишдаги тезликни r ўрнига Ер радиуси $R \approx 6{,}377\cdot 10^6$ ни қўйиб топамиз, пропорционаллик коэффициенти k ни Ердаги оғирлик кучи тезланиши $g = 9{,}8$ м/сек^2 ва R орқали ифодалаш мумкин: $-g = k/R^2$, бу ердан $k = -gR^2$ [масофа $r = 0$ дан (саноқ боши) бошлаб ҳисобланганлиги ва тезланиш марказга томон йўналгани учун манфий ишора олинди].

Шундай қилиб, изланаётган тезлик қуйидагича бўлади:

$$v = \sqrt{2gR^2/R} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6{,}377\cdot 10^6} =$$
$$= 11\,180 \text{ м/с} \approx 11 \text{ км/сек.}$$

Маятникнинг тебраниши. Массаси m бўлган P моддий нуқта массасини эътиборга олмаса ҳам бўладиган l узунликдаги чўзилмайдиган ипга осилган. Оғирлик кучи таъсири остида P нуқта вертикал текисликда ётувчи l радиусли айлана бўйлаб ҳаракатланади. Агар маятник бошланғич моментда вертикал ҳолатдан $\alpha < \pi/2$ бурчакка оғган ва нолга тенг бўлган бошланғич тезликка эга бўлса, унинг ҳаракат қонунини топамиз (34-расм).

Маятникнинг вазиятини вертикалдан бошлаб ҳисобланадиган $\varphi = \angle AOP$ бурчак билан аниқлаймиз. Маятникка пастга вертикал йўналган mg оғирлик кучи ва ипнинг таранглик кучи таъсир этади. s — нуқтанинг айлананинг $\overset{\frown}{PA}$ ёйи бўйлаб ўтган йўли бўлсин, $s = l\varphi$. Оғирлик кучининг уринма ташкил этувчиси, 34-расмдан кўринишича, $mg \sin\varphi$ га тенг бўлиб, s нинг камайиш томонига йўналган, шунинг учун Ньютон қонунидан ушбу дифференциал тенглама келиб чиқади:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\varphi, \tag{12}$$

m га қисқартириб ва s ни $l\varphi$ билан алмаштириб, уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{13}$$

Бу математик маятникнинг тенгламаси бўлиб, эркли ўзгарувчи иштирок этмаган иккинчи тартибли тенгламадир. Тартибни пасайтиришга $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$ ўрнига қўйиш орқали эришилади, натижада (13) тенглама ушбу кўринишга келтирилади:

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

ёки

$$\omega\, d\omega = -\frac{g}{l}\sin\varphi\, d\varphi,$$

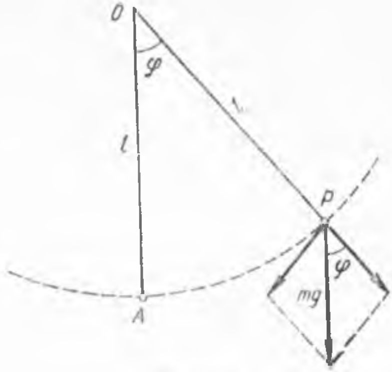
бу ердан

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi + C_1.$$

ω бурчак тезлик бўлгани учун $t = 0$ да $v = 0$ дан $\omega = 0$ ҳам келиб чиқади. Шунинг учун бошлангич шартлардан:

$$0 = \frac{g}{l}\cos\alpha + C_1,$$

бу ердан $C = -\frac{g}{l}\cos\alpha$, демак, оралиқ интеграл



34- расм.

$$\omega^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

кўринишга келади.

t ортиши билан φ бурчак камая боради ва $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ҳосила манфий бўлиши керак, шунинг учун илдиз чиқаришда манфий ишора олиш керак:

$$\omega = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}.$$

ω ўрнига $\frac{d\varphi}{dt}$ ни қўйиб ва ўзгарувчиларни ажратиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)};$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}};$$

$$t + C_2 = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Бошланғич шартларни эътиборга олган ҳолда бу ечимни аниқ интеграл кўринишда ёзиш мумкин:

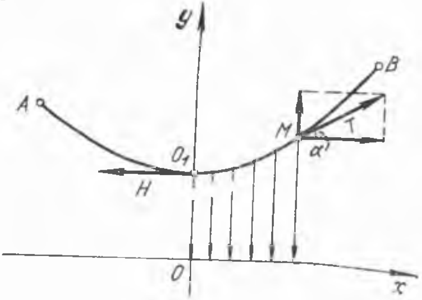
$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\varphi}^{\alpha}\frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos\alpha)}}. \qquad (14)$$

Маълум бўлишича, (14) формуладаги интеграл элементар функциялар ёрдамида ифодаланмай, балки эллиптик интеграллар деб аталувчи интегралларнинг бир туридан иборат экан.

Агар маятникнинг оғишлари кичик бўлса, у ҳолда (13) тенгламада $\sin\varphi \approx \varphi$ деб олиш мумкин ва у

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

кўринишга келади. Бу тенглама эркин гармоник тебранишлар тенгламасидан иборат. У кейинги параграфда қаралади



35- расм.

Ипнинг мувозанати. Иккита учи билан A ва B нуқталарга осиб қўйилган оғир эгилувчан бир жинсли чўзилмайдиган ипни кўз олдимизга келтирайлик (35- расм). Ип жойлашадиган эгри чизиқ текисликда ётади деб фараз қилиб, бу текисликни xOy координата текислиги учун қабул қиламиз. Координата системасини шундай танлаб оламизки, Ox ўқ горизонтал жойлашсин. Oy ўқ эса ипнинг энг пастки O_1 нуқтасидан ўтсин (O_1 нуқта A ва B нуқталардан пастда жойлашган).

Ипнинг O_1 нуқта ва ихтиёрий $M(x; y)$ нуқтаси орасидаги қисми O_1M ни ажратамиз. Ипнинг бу қисми қуйидаги кучлар таъсири остида бўлади:

1) O_1 нуқтага қўйилган **H** таранглик кучи, у ипнинг AO_1 қисми томонидан ҳосил қилинган ва O_1 нуқтадаги уринма бўйлаб (горизонтал) йўналган;

2) M нуқтага қўйилган **T** таранглик кучи, у ипнинг MB қисми томонидан ҳосил қилинган ва M нуқтадаги уринма бўйлаб йўналган;

3) ипнинг O_1M қисмига тушган **W** нагрузка, у пастга йўналган.

Ип мувозанатда бўлгани учун статика қонунларига кўра бу барча кучларнинг координата ўқларига проекциялари йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Демак,

$$T\cos\alpha - H = 0, \quad T\sin\alpha - W = 0,$$

бу ерда α — таранглик кучи **T** ва Ox ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак, H, T, W — тегишли кучларнинг катталиклари.

Агар бу тенгламаларда мос равишда H ва W ни ўнг томонга ўтказиб, ҳосил бўлган иккинчи тенгламанинг иккала қисмини биринчи тенгламанинг тегишли қисмларига бўлсак,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W}{H}$$

ни ҳосил қиламиз. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ бўлгани учун биринчи тартибли

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} \tag{15}$$

дифференциал тенгламага келамиз, унинг интеграли ипнинг мувозанатда бўлгандаги шаклини тасвирловчи эгри чизиқдан иборат.

Горизонтал таранглик H — ўзгармас катталик. Шунинг учун агар W нагрузка x нинг функцияси сифатида маълум бўлса, $W = F(x)$, у ҳолда (15) ни бевосита интеграллаш мумкин. Бу ҳолда унинг ечими

$$y = \frac{1}{H}\int F(x)\,dx + C$$

кўринишда бўлади, бу ерда C бошланғич шартлардан аниқланади.

Бироқ, шундай ҳоллар бўлиши мумкинки, унда W функция эмас, балки унинг x бўйича ҳосиласи маълум бўлади. Бундай ҳолда (15) тенгламанинг иккала томонини x бўйича дифференциаллаб, иккинчи тартибли

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx} \tag{16}$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз. Агар $\frac{dW}{dx} = f(x)$ (бу ерда $f(x)$ маълум функция) бўлса, бу тенгламанинг ечими (ипнинг мувозанат ҳолатдаги шакли тенгламаси) ушбу кўринишда бўлади:

$$y = \frac{1}{H}\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

бу ерда C_1 ва C_2 бошланғич шартлардан аниқланади.

Умумийроқ ҳолларда, (15) ва (16) тенгламаларнинг ўнг томонлари фақат x гагина боғлиқ бўлмай, балки y ва y' га ҳам боғлиқ бўлиб, бу ҳолларда ечимни топиш учун турли усулларни қўлланишга тўғри келади, чунки бевосита интеграллаш мумкин эмас.

Барча ҳолларда ҳам ечимда ўзгармас катталик H қатнашишини қайд қилиб ўтайлик. Ипнинг учлари A ва B нинг координаталарини ва O_1 нуқтани билган ҳолда H ни ҳисоблаб топиш мумкин.

1-мисол. Эгилувчан (эластик) бир жинсли чўзилмайдиган арқон учлари билан икки нуқтада маҳкамланган ва арқонга унинг горизонтал проекцияси бўйлаб бир хил тақсимланган qН/м нагрузка тушади. Арқоннинг оғирлигини ҳисобга олмай, унинг мувозанат ҳолатдаги шаклини аниқланг.

Одатда осма кўприкларнинг занжир ёки арқонларининг мувозанат ҳолатидаги шаклини аниқлашда бундай масала юзага келади: Нагрузка (занжир ёки арқонга осилган кўприк) горизонтал проекция бўйлаб бир текис тақсимланган ва унинг катталиги шундайки, занжир ёки арқоннинг оғирлигини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Ечилиши. Бу ҳолда $W = qx$, бу ерда x арқоннинг M нуқтасининг координатаси, бир вақтнинг ўзида у арқоннинг O_1M қисмининг горизонтал проекцияси ҳам бўлади. Шунинг учун (15) дифференциал тенглама $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H}$ кўринишни олади. Унинг умумий ечими $y = \frac{qx^2}{2H} + C$ параболалар оиласидан иборат.

C ни аниқлаш учун O_1 нуқтанинг $y = q/H$ ординатасини берамиз. У ҳолда бошланғич шарт $x = 0$ да $y = q/H$ бўлади, демак, $C = q/H$ ва изланаётган хусусий ечим

$$y = \frac{q}{H}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$$

параболадан иборат бўлади.

2-мисол. (Занжир чизиқ.) Эгилувчан бир жинсли чўзилмайдиган арқон икки учидан маҳкамланган бўлиб, ўзининг оғирлиги остида осилиб туради. Агар арқоннинг бир бирлик узунлигининг оғирлиги q га тенг бўлса, арқоннинг мувозанат ҳолатдаги шаклини аниқланг.

Ечилиши. Бу ҳолда $W = qs$, бу ерда s — арқоннинг $\overset{\smile}{O_1M}$ ёйининг узунлиги. Математик анализ курсидан маълумки. $s=\int\limits_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$. Шунинг учун $W=$ $=q\int\limits_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$, демак, $\frac{dW}{dx}=q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. $\frac{dW}{dx}$ ҳосиланинг ифодасини (16) тенгламага қўйиб, x аргумент ва изланаётган y функция қатнашмаган ушбу иккинчи тартибли дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{17}$$

$\frac{dy}{dx}=u$ ўрнига қўйиш орқали бу тенглама ўзгарувчилари ажраладиган ушбу биринчи тартибли тенгламага келтирилади:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+u^2},$$

бу ерда $H/q=a$ деб белгиланган. Ўзгарувчиларни ажратиб интегралласак,

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)=\frac{x}{a}+\ln C_1,$$

бу ердан

$$u+\sqrt{u^2+1}=C_1e^{x/a}.$$

$\sqrt{u^2+1}$ илдизни яккалаб ва ҳосил бўлган тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтариб, соддалаштирсак,

$$1=C_1^2e^{2x/a}-2C_1ue^{x/a}$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{2}e^{x/a}-\frac{1}{2C_1}e^{-x/a}, \tag{18}$$

чунки $u=\frac{dy}{dx}$.

Биринчи тартибли энг содда тенглама ҳосил бўлади. Унинг умумий ечими:

$$y=\frac{aC_1}{2}e^{x/a}+\frac{a}{2C_1}e^{-x/a}+C_2. \tag{19}$$

C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун O_1 нуқтанинг $y=a$ ординатасини оламиз. O_1 нуқтада уринма Ox ўққа параллел эканлигини эътиборга олиб, бошланғич шартни қуйидагича ёзамиз: $x = 0$ да $y = a$, $y' = 0$. x ва y' нинг қийматларини (18) тенгликка қўйиб, C_1 ни аниқлаш учун ушбу алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$0 = \frac{C_1}{2} - \frac{1}{2C_1},$$

бу ердан

$$C_1 = 1.$$

Иккинчи (манфий илдиз) ярамайди, бу дифференциал тенгламадан бевосита келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, $C_1 < < 0$ тенгсизликдан $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ келиб чиқади, бу эса тенгламага зид, чунки унинг ўнг томони бутунлай мусбат катталик.

x ва y нинг қийматларини (19) тенгламага қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + C_2,$$

бу ердан $C_2 = 0$.

Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) \quad \text{ёки} \quad y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

функциядан иборат экан.

Бу масаланинг ечими икки учидан осилган эгилувчан чўзилмайдиган арқон ўз оғирлиги таъсирида гиперболик косинуснинг графиги шаклини олишини кўрсатади. Гиперболик косинуснинг занжир чизиқ деб аталиши ҳам шу билан тушунтирилади.

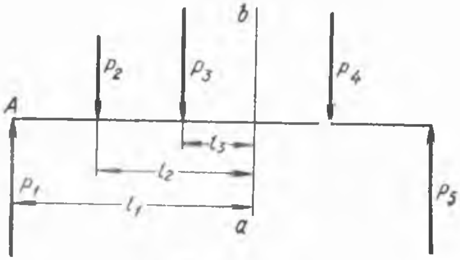
$a = H/q$ катталикка геометрик талқин берадиган бўлсак, у занжир чизиқнинг қуйи O_1 нуқтадаги эгрилик радиусидан иборат бўлишини қайд қилиб ўтамиз. Бунга қуйидаги ҳисоблашлар билан ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$y'\big|_{x=0} = 0,\ y''\big|_{x=0} = \frac{1}{a},\ R\Big|_{x=0} = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}\Big|_{x=0} = a.$$

Шундай қилиб, a катталик занжир чизиқнинг шаклини характерлайди: a қанчалик кичик бўлса, чизиқ шунчалик тор ва тикроқ бўлади.

Балканинг эгилиши. Цилиндрик сирт билан чегараланган горизонтал жойлашган балкани кўрайлик. Сирт вертикал симметрия текислигига эга. Шундай қилиб, балканинг ҳар бир кўндаланг кесими вертикал симметрия ўқига эга. Ўзаро тенг кўндаланг кесимлар оғирлик марказларининг геометрик ўрни балканинг *ўқи* (ёки *нейтрал ўқ*) деб аталувчи горизонтал тўғри чизиқдан иборат.

Таъсир этувчи кучлар симметрия текислигида жойлашган ва вертикал йўналган, яъни балка ўқига перпендикуляр бўлсин.



36- расм.

Ана шу фаразларда балка ва унга таъсир этувчи кучлар, масалан, 36- расмда кўрсатилганидек схематик тасвирланиши мумкин. Бу кучлар таъсири остида балка эгилади, шу билан бирга балкада ички эластиклик кучлари пайдо бўлади.

Балкани хаёлан кўндаланг кесим бўйича қирқамиз ва балканинг ўнг ёки чап қисмининг мувозанатда бўлиш шартларини текширамиз (36- расм). Мувозанатни сақлаш учун *ab* кесимга балканинг ташлаб юборилган қисмидаги зўриқишни, яъни балканинг ташлаб юборилган қисмига қўйилган кучлар системасига тенг кучли бўлган системани унинг қолган қисмига қўйиш керак. Маълумки, бир текисликда таъсир этаётган кучларни уларнинг алгебраик йиғиндиси бўлган тенг таъсир этувчи кучга ва моменти мос жуфтлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг бўлган кучлар жуфтига келтириш мумкин. 36- расмда тасвирланган ҳол учун бу қуйидагича бўлади:

тенг таъсир этувчи:

$$Q = P_1 - P_2 - P_3 \tag{20}$$

ва моменти:

$$M = P_1 l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3. \tag{21}$$

(20) ва (21) ифодалардан кўринадики, балканинг чап қисми учун кучнинг мусбат йўналиши пастдан юқорига томон бўлади, моментнинг мусбат йўналиши эса балканинг чап қисми соат стрелкасининг ҳаракат йўналиши бўйича айланишидаги йўналиши бўлади. Агар балканинг ўнг қисми ўрнига унинг чап қисми қараладиган бўлса, унинг учун тенг таъсир этувчи куч ва (йиғинди) момент (20) ва (21) ифодалардан мос равишда фақат ишораси билангина фарқ қилади. Бу балканинг ўнг қисми учун пастдан юқорига томон йўналган кучни мусбат деб ҳисобланишини, момент учун эса мусбат йўналиш соат стрелкаси ҳаракатининг йўналишига тескари йўналиш бўлишини билдиради.

Q кучни ab кесимдаги *кесувчи куч* деб, M ни эса шу кесимдаги *букувчи момент* деб аталади.

Балканинг эгилган ўқининг шаклини топиш масаласини қўямиз. Ox ўқни ўнг томонга балканинг зўриқмаган ҳолдаги ўқи бўйича горизонтал равишда, Oy ўқни эса вертикал тик йўналтирамиз. Агар координата марказидан (масалан, балканинг чап учи) дан x масофада жойлашган кесимдаги эгилишни y орқали белгиласак, $y = y(x)$ функциянинг графиги балка эгилган ўқининг шакли бўлади.

Материаллар қаршилиги курсидан маълум бўлган ва бу функцияни топишга имкон берадиган асосий муносабат

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \qquad (22)$$

тенгламадан иборат, бу ерда ρ — эгилган ўқнинг берилган нуқтадаги эгрилик радиуси, $M(x)$ — букувчи моментнинг тегишли кесимдаги аналитик ифодаси, E — эластиклик (Юнг) модули, у материалнинг физикавий хоссаларига боғлиқ, I кўндаланг кесимнинг балканинг нейтрал ўқи билан устма-уст тушадиган ўққа нисбатан инерция моменти. Эгриликнинг дифференциал ҳисоб курсидан маълум бўлган формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M(x)}{EI}. \qquad (23)$$

(23) тенглик изланаётган функция иштирок этмаган ва шунинг учун тартибни пасайтиришга имкон берадиган иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир. Бироқ бундай тенгламани интеграллаш, умуман айтганда, анча қийинчиликлар билан боғлиқ. Шу сабабдан (23) тенгламани, амалда фақат кичик эгилишларга йўл қўйилишини эътиборга олиб, янада соддароқ кўринишга келтирилади. Шу-

нинг учун y' балканинг эгилган ўқига ўтказилган уринманинг абсциссалар ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсидан иборат бўлиб, бирга нисбатан шунчалик кичик миқдорки, эгрилик формуласидаги махражда y' қатнашган ифодани ташлаб юбориш мумкин. Натижада ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$y'' = \pm \frac{M(x)}{EI}, \qquad (24)$$

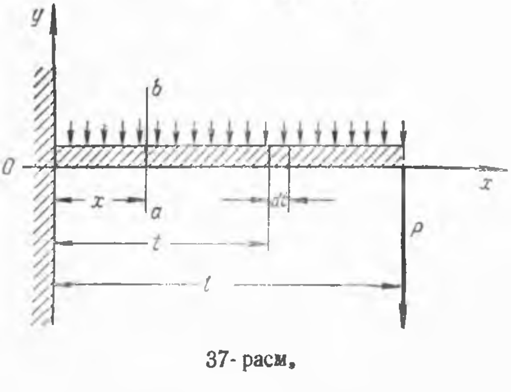
бу тенгламани *балканинг эгилган ўқининг дифференциал тенгламаси* деб аташ қабул қилинган. Бу тенглама бевосита интеграллланади. Букувчи моментнинг ифодаси балка ишининг шароитларига боғлиқ.

Бир нечта конкрет масала кўрамиз.

1-мисол. (Консоль балканинг эгилиши.) Чап қиеми қаттиқ маҳкамланган, ўнг томони эса эркин бўлган l *м* узунликдаги балка берилган. Агар балка бир хил тақсимланган q Н/М интенсивликдаги нагрузка остида бўлса ва ўнг томонга PН куч қўйилган бўлса, эгилган ўқ шаклини ва ўнг томондаги максимал эгилишни аниқланг.

Ечилиши. (24) тенгламадан фойдаланишимиз мумкин, шунинг учун иш $M(x)$ букувчи моментни топишга келтирилади; сўнгра икки марта интеграллаш етарлидир. Координата ўқларини 37-расмдагидек танлаб оламиз ва чап томондан x масофада турган ab кесимни қараймиз. Бу кесимда ўнг томонга қўйилган P кучдан вужудга келадиган букувчи момент

$$M_1(x) = -P(l-x) \qquad (25)$$



37-расм.

га тенг, шу билан бирга (21) дан келтириб чиқарилган ишоралар қоидасига мувофиқ манфий ишора олинган, чунки *P* куч балканинг ўнг қисмини соат стрелкаси ҳаракат йўналиши бўйича буради.

Ўнг томонга қўйилган бир хил тақсимланган нагрузка вужудга келтирадиган букувчи моментни ҳисоблаш қолди. Бунинг учун координаталар бошидан *t* масофада жойлашган *dt* элементни қараймиз, унга *qdt* куч таъсир этади. (25) дагига ўхшаш *ab* кесимда бу элементга таъсир этадиган куч вужудга келтирган букувчи момент

$$dM_2(x) = -q(t-x)\,dt \tag{26}$$

га тенг.

ab кесимда балканинг ўнг томонида бир хил тақсимланган нагрузка вужудга келтирадиган букувчи моментни топиш учун барча (26) ифодаларни балканинг ўнг томони бўйича йиғиб чиқиш керак, яъни

$$M_2(x) = -q\int_x^l (t-x)\,dt = -q\frac{(t-x)^2}{2}\Big|_{t=x}^{t=l} = -$$

$$-q\frac{(l-x)^2}{2}. \tag{27}$$

Энди ҳар иккала кўринишдаги нагрузкадан пайдо бўладиган букувчи моментни топиш учун (23) ва (25) ифодаларни қўшиш керак, холос, шундан сўнг балканинг эгилган ўқининг дифференциал тенгламаси бизнинг ҳол учун ушбу кўринишда бўлади:

$$y'' = -\frac{1}{EI}\left[P(l-x) + q\frac{(l-x)^2}{2}\right]. \tag{28}$$

E ва *I* ўзгармас бўлгани учун икки марта интеграллаш натижасида кетма-кет қуйидагига эга бўламиз:

$$y' = -\frac{1}{EI}\left[P\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}q\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right)\right] + C_1,$$

$$y = -\frac{I}{EI}\left[P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)\right] + C_1x + C_2.$$

Мазкур ҳол учун бошланғич шартлар $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$ кўринишда бўлади. Ҳақиқатан ҳам, балканинг чап томони маҳкамланган бўлгани учун у қўзғалмас ва бу нуқтадаги ўққа уринма горизонталдир. Бошланғич шартлардан $C_1 =$

$= C_2 = 0$ ни ҳосил қиламиз, шундай қилиб, эгилган ўқнинг шакли қуйидаги тенглама билан ифодаланади:

$$y = -\frac{1}{EI}\left[P\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}q\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)\right]\cdot \qquad (29)$$

Ўнг учдаги максимал эгилиш

$$y\Big|_{x=l} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}Pl^3 + \frac{1}{8}ql^4\right) \qquad (30)$$

га тенг.

2- мисол. (Учлари шарнирли маҳкамланган балканинг эгилиши.) l м узунликдаги балканинг учлари шундай маҳкамланганки, у айланиши мумкин, бироқ силжиши мумкин эмас. Балкага унинг чап учидан m м масофада P Н нагрузка таъсир этади. Балканинг эгилган ўқининг шаклини аниқланг.

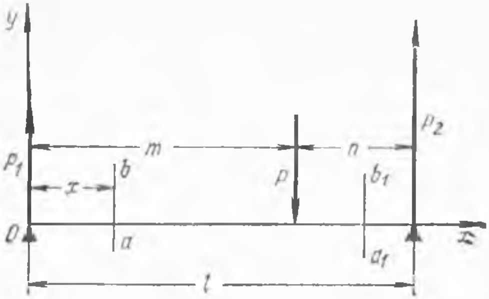
Ечилиши. Балка мувозанатда бўлгани учун P кучнинг таъсири таянч реакциялар келтириб чиқарадиган таянчларнинг балкага босим кучлари P_1 ва P_2 кучлар билан мувозанатлашиши керак (38- расм). Бу кучларни топиш учун йўналтирилган P нагрузка қўйилган нуқтадан балканинг ўнг учигача бўлган масофани $n = l - m$ билан белгилаймиз ва мувозанатлик шартларига биноан барча кучларнинг исталган нуқтага нисбатан моментлари йиғиндиси нолга тенг бўлишини эътиборга оламиз. Балканинг ўнг томонидаги таянч нуқтасига нисбатан моментлар йиғиндисини олиб, $P_1l - Pn = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз, бу ердан $P_1 = nP/l$. Худди шунга ўхшаш, балканинг чап учига нисбатан моментлар йиғиндиси $-P_2l + Pm = 0$ бўлади, бу ердан $P_2 = mP/l$.

Эгилган ўқнинг дифференциал тенгламасини тузиш учун, олдинги масалага ўхшаш, (24) тенгламадан фойдаланамиз. У ерга букувчи моментнинг аналитик ифодасини қўйиш етарли. Балканинг чап учидан x масофада жойлашган ab кесимни кўрайлик. Агар $x < m$ деб фараз қилсак, у ҳолда балканинг чап ярмига фақат чап таянчнинг реакцияси P_1 таъсир қилади ва бу ҳолда букувчи момент

$$M_1(x) = P_1(x) = \frac{nPx}{l}$$

га тенг бўлади.

Шундай қилиб, $x < m$ учун, яъни балканинг чап қисми учун (ташқи йўналтирилган нагрузка қўйилган нуқтага



38- расм.

нисбатан олганда) эгилган ўқнинг дифференциал тенгламаси

$$y'' = \frac{1}{EI}\frac{nPx}{l} \tag{31}$$

кўринишда бўлади.

Бу тенгламани икки марта интеграллasак,

$$y' = \frac{nP}{EIl}\frac{x^2}{2} + C_1, \tag{32}$$

$$y = \frac{nP}{EIl}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2. \tag{33}$$

(33) тенгламадаги ихтиёрий ўзгармасларни топилгандан сўнг (бу ҳақда кейинроқ сўз юритилади), у балканинг эгилган ўқи чап қисмининг шаклини беради.

Ўнг қисмдаги эластик эгри чизиқнинг шаклини аниқлаш учун балканинг чап учидан $m < x < l$ тенгсизликни қаноатлантирадиган x масофада жойлашган a_1b_1 кесимни қараш керак. Бу ҳолда балканинг чап қисмига бундай кесимга нисбатан энди иккита: P_1 ва P кучлар таъсир этади: бу кесимда букувчи момент

$$M_2(x) = P_1x - P(x - m) = \frac{Pnx}{l} - P(x - m)$$

га тенг. (29) дифференциал тенглама мос равишда қуйидагича бўлади:

$$y'' = \frac{P}{El}\left[\frac{nx}{l} - (x - m)\right]. \tag{34}$$

Бу тенгламани кетма-кет интеграллаб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y' = \frac{P}{EI}\left[\frac{nx^2}{2l} - \frac{(x-m)^2}{2}\right] + C_3, \qquad (35)$$

$$y = \frac{P}{EI}\left[\frac{nx^3}{6l} - \frac{(x-m)^3}{6}\right] + C_3x + C_4. \qquad (36)$$

(33) га ўхшаш (36) ифода балка ўқининг P куч қўйилган нуқтадан ўнг томондаги эгилган шаклини ифодалайди.

Шундай қилиб, балканинг эгилган ўқи икки оралиқда турлича: $0 < x < m$ учун (33) тенглама билан, $m < x < l$ учун (36) тенглама билан аналитик ифодаланар экан.

Ихтиёрий ўзгармасларни топишга ўтамиз. Бу ерда одатдаги бошланғич шартлар системаси йўқлигини эслатиб ўтамиз. Ҳақиқатан ҳам, балканинг чап қисми маҳкамланганлиги (тиралиб тургани) учун y пастга тушмайди, (эгилмайди), яъни $y|_{x=0} = 0$, бироқ у айланиши (буралиши) мумкин, шунинг учун $y'|_{x=0} \neq 0$. Бунинг ўрнига балканинг ўнг учида $y|_{x=l} = 0$ шарт мавжуд. Шундай қилиб, иккита бошланғич шарт системаси ўрнига иккита чегаравий шартга эгамиз: $y|_{x=0} = y|_{x=l} = 0$.

Бироқ бу шартлар иккинчи тартибли иккита турли тенгламани интеграллашда пайдо бўладиган тўртта ихтиёрий ўзгармасни аниқлаш учун етарли эмас. Етишмаётган иккита шарт балканинг эгилган ўқи бурчак нуқталарга эга бўлмаган узлуксиз силлиқ эгри чизиқ деган шартдан ҳосил қилинади. Узлуксизликдан $x = m$ да (33) ва (36) ифодалардан ҳисобланган ординаталар бир хил бўлиши лозимлиги келиб чиқади. Силлиқлик шарти $x = m$ да (32) ва (35) ифодалардан ҳисобланган y' бурчак коэффициентларнинг бир хил эканлигини кўрсатади.

$y|_{x=0} = 0$ бўлгани учун (33) дан $C_2 = 0$ эканлиги келиб чиқади. (32) ва (35) ифодалардан $x = m$ да топилган бурчак коэффициентларни тенглаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{nP}{EIl}\,\frac{m}{2} + C_1 = \frac{P}{EI}\,\frac{nm}{2l} + C_3,$$

бу ердан $C_1 = C_3$ эканлиги келиб чиқади. Сўнгра $x = m$ да (33) ва (36) ифодаларни тенглаб ва бунда C_3 ни C_1 га алмаштириб, ушбуни топамиз:

$$\frac{nP}{EIl}\,\frac{m^3}{6} + C_1m = \frac{P}{EI}\,\frac{nm^3}{6l} + C_1m + C_4,$$

яъни $C_4=0$. Энди C_1 ни топиш қолди, бунинг учун охирги $y|_{x=l}=0$ шартдан фойдаланамиз. $x=l$ ни (36) ифодага қўйсак,

$$\frac{P}{EI}\left[\frac{nl^3}{6l}-\frac{(l-m)^3}{6}\right]+C_1l=0$$

ни ёки $m=l-n$ эканлигини назарга олиб,

$$\frac{Pn}{6EI}(l^2-n^2)+C_1l=0$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$C_1=-\frac{Pn}{6EIl}(l^2-n^2).$$

Ихтиёрий ўзгармасларнинг топилган қийматларини (33) ва (36) ифодаларга қўйиб, балка эгилган ўқининг чап ва ўнг қисмларининг шаклини ифодаловчи тенгламаларни ҳосил қиламиз.

Труба орқали иссиқлик узатилиши. Ички радиуси r, ташқи радиуси R бўлган қалин цилиндрик трубага эга бўлайлик. Труба ичидан ташқарига иссиқлик узатилишини аниқлаш талаб қилинади, бунда стационар иссиқлик режими тайин бўлган, чунончи бирорта юздан ўтадиган иссиқлик миқдори ўзгармас, яъни трубанинг ҳар қандай нуқтасининг ϑ температураси вақтга боғлиқ эмас ва нуқтанинг труба ўқидан бўлган масофасига қараб ўзгаради деб фараз қилинади.

Иссиқлик ўтказувчанлик назариясининг бу ерда бизга зарур бўладиган асосий муносабати қуйидагидан иборат:

Бирорта ўққа перпендикуляр бўлган чексиз кичик юзчадан бу ўқ йўналишида dt вақт оралиғида ўтадиган иссиқлик миқдори юзчанинг юзи dF га, вақт оралиғи давомийлигига ва бу йўналишдаги температура пасайиши тезлигига пропорционал, яъни

$$dq=-\lambda\, dF\frac{d\vartheta}{dn}dt.$$

Манфий ишора иссиқлик оқими температура пасайиши томонига ҳаракат қилишини билдиради, λ ўзгармас коэффициент қаралаётган жисмнинг моддасига боғлиқ ва *иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти* дейилади.

Труба ичида радиуси ρ, $r<\rho<R$ (39-расм) бўлган цилиндрик сиртни ажратамиз. У ҳолда бу сиртнинг dF элементи учун

$$dq=-\lambda\, dF\frac{d\vartheta}{d\rho}dt. \qquad (37)$$

Иссиқлик миқдори dF элементга ҳам, dt вақт оралиғига ҳам боғлиқ бўлмагани учун (37) кўринишидаги ифодаларни жамлаб, бутун сирт учун вақт бирлигидаги тўла (бутун) иссиқлик миқдорини ҳосил қиламиз:

$$Q = -\lambda F \frac{d\vartheta}{d\varrho}.$$

Агар труба узунлиги l бўлса, у ҳолда $F = 2\pi\varrho l$, демак,

$$Q = -2\pi\lambda l\rho \frac{d\vartheta}{d\varrho}. \tag{38}$$

Шартга кўра жараён барқарордир, демак, трубанинг ҳеч бир қисмида иссиқлик тўпланиб қолиши мумкин эмас. Бу ердан Q миқдор ϱ га боғлиқ эмаслиги келиб чиқади, яъни $\frac{dQ}{d\varrho} = 0$. (38) тенгликни ϱ бўйича дифференциаллаб ва ўзгармас кўпайтувчига қисқартириб, изланаётган дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\varrho \frac{d^2\vartheta}{d\varrho^2} + \frac{d\vartheta}{d\varrho} = 0. \tag{39}$$

Изланаётган функция ошкор иштирок этмаётган дифференциал тенгламани ҳосил қилдик. Бироқ бу тенгламани ҳосил қилиш борасидаёқ, унинг чап томони аниқ ҳосила эканлиги маълум бўлди. Бу ҳолдан фойдаланиб, тезда оралиқ интегрални ушбу кўринишда ҳосил қиламиз:

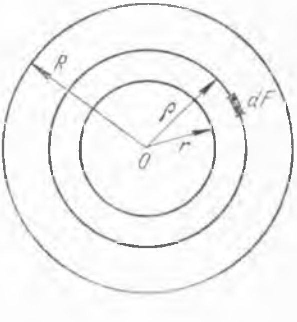
$$\varrho \frac{d\vartheta}{d\varrho} = C_1.$$

Иккинчи марта интеграллаш умумий ечимни

$$\vartheta = C_1 \ln \varrho + C_2 \tag{40}$$

кўринишда топишга имкон беради.

Ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш қолди. Бу ерда бошланғич шартларни ҳосил қила олмаймиз. Бу ерда чегаравий шартлар энг қулай ва табиий бўлади. Энг осони ички ва ташқи сиртлардаги температураларни беришдир.



39- расм.

$$\vartheta\big|_{\rho=r}=\vartheta_0; \qquad \vartheta\big|_{\rho=R}=\vartheta_1. \tag{41}$$

(41) қийматларни (40) умумий ечимга қўйиб, ихтиёрий ўзгармасларни топиш учун ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\vartheta_0=C_1\ln r+C_2,$$
$$\vartheta_1=C_1\ln R+C_2.$$

Иккинчи тенгликдан биринчи тенгликни айириб,

$$\vartheta_1-\vartheta_0=C_1(\ln R-\ln r)$$

га эга бўламиз, бу ердан

$$C_1=\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{\ln R-\ln r}.$$

C_1 нинг топилган қийматини системамизнинг тенгламаларидан бирига қўйиб, C_2 ни топамиз:

$$C_2=\frac{\vartheta_0\ln R-\vartheta_1\ln r}{\ln R-\ln r}.$$

Энди ихтиёрий ўзгармасларнинг топилган ифодаларини (40) ифодага қўя оламиз, натижада труба нуқталарининг температуралари ўзгаришини улардан ўққача бўлган масофаларига боғлиқ ҳолда тавсифловчи функцияни ҳосил қиламиз. (38) ифода труба орқали ўтувчи иссиқлик миқдорини ҳисоблашга имкон беради.

Шуни қайд қилиб ўтиш керакки, одатда (41) кўринишдаги шартлар камдан-кам топилади. Кўпчилик ҳолларда ϑ_0 ва ϑ_1 температуралар эмас, балки труба ичини тўлдириб турган модда температураси ва труба атрофидаги муҳитнинг температураси маълум бўлади. Бу анча мураккаб кўринишдаги чегаравий шартларга олиб келади.

III БОБ

ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

13-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОР

n-тартибли чизиқли дифференциал тенглама деб

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = b \qquad (1)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади.

x эркли ўзгарувчи тенгламага ихтиёрий кириши мумкин (чизиқли тенглама таърифида x тенгламага қандай кириши тўғрисида ҳеч қандай чеклашлар йўқ). Шунинг учун a_0, a_1, ..., a_n коэффициентларни ҳам ўнг қисмдаги b каби x нинг ихтиёрий функциялари деб ҳисоблаш керак. Одатда чизиқли тенгламани «келтирилган кўринишда» ёзиш қабул қилинган, бунга тенгламанинг иккала қисмини a_0 коэффициентга бўлиш билан эришилади. Ҳосил бўлган янги коэффициентларни p_1, p_2, ..., p_n ҳарфлар билан, озод ҳадни эса q ҳарфи билан белгилаймиз, шу билан бирга уларнинг x га боғлиқлигини ошкор ҳолда кўрсатамиз. Бундай ҳолда n-даражали чизиқли дифференциал тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)y = q(x). \qquad (2)$$

Бундай бўлиш мумкин бўлиши учун $a_0 \neq 0$ бўлишни талаб қилишимиз керак, бинобарин, (2) тенглама (1) тенгламага бу шарт бажариладиган $\alpha < x < \beta$ интерваллардагина эквивалентдир (a_0 коэффициент айнан нолга тенг бўлиши мумкин эмас, чунки акс ҳолда тенглама n-тартибли бўлмас эди).

Олдинги бобда келтирилган ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги тўғрисидаги теоремани чизиқли тенгламаларга ҳам татбиқ қилиш мумкин. Маълумки, ёпиқ интервалда узлуксиз бўлган функциялар унда чегаралангандир. Шунинг учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги шартлари чизиқли тенглама учун бошланғич шартларнинг етарлича кичик атрофидагина эмас (умумий ҳолдагина ўхшаш), балки $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ функциялар узлуксиз бўлган исталган оралиқда ҳам бажарилади. Хусусан, агар (1) тенгламанинг коэффициентларини узлуксиз деб фараз қилсак, бу шартлар $a_0(x) \neq 0$ бўлган (α, β) интервалнинг ичидаги исталган оралиқда бажарилади.

Шундай қилиб, чизиқли дифференциал тенгламалар учун ечимнинг мавжудлик ва ягоналик теоремасини қуйидагича таърифлаш мумкин:

(2) *чизиқли дифференциал тенгламанинг* $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ *коэффициентлари бирорта* $[a, b]$ *кесмада узлуксиз бўлсин. Агар* x_0 *қиймат* (a, b) *интервалга тегишли бўлса, у ҳолда* (2) *тенгламанинг уни ва унинг исталган бошланғич шартлари системасини қаноатлантирувчи, бутун* (a, b) *интервалда аниқланган ҳамда узлуксиз бўлган битта ва фақат битта* $y = \varphi(x)$ *ечими мавжуд бўлади.*

Бу теореманинг исботини келтирмаймиз. Бироқ келгусида ундан фойдаланишга тўғри келади.

(2) кўринишдаги тенглама чизиқли *бир жинсли бўлмаган* ёки *ўнг томони мавжуд* тенглама дейилади. Агар $q(x) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда тенглама

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

кўринишга келиб, у *чизиқли бир жинсли* дифференциал тенглама ёки *ўнг томони йўқ* тенглама дейилади.

Чизиқли дифференциал тенгламалар юқори тартибли тенгламаларнинг энг батафсил ўрганилган туридир. Техника ва табиатшуносликнинг кўп масалалари чизиқли тенгламаларга олиб келади. Бундан ташқари, бир қатор ҳолларда масала шартига чизиқли кўринишдаги дифференциал тенгламалар ҳосил қилишга имкон берадиган шартлар махсус киритилади. Бундай қўшимча шартларни киритиш *чизиқлаштириш* дейилади.

Мазкур параграфда (3) тенглама хусусий ечимларининг баъзи хоссалари қаралади.

(3) тенгламанинг чап қисмини $L[y]$ орқали белгилаймиз:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y, \qquad (4)$$

шу билан бирга, қисқалик учун $p_1, p_2, \ldots$ функцияларда x аргументни ёзмаймиз. Бу ифодани y функциянинг *чизиқли дифференциал оператори* деб атаймиз.

$L[y]$ чизиқли дифференциал операторни $f(x)$ функциянинг аналоги каби қараш мумкин. Дарҳақиқат, $f(x)$ функция x сонга янги $f(x)$ сонни мос қўяди, $L[y]$ оператор эса y функцияга янги $L[y]$ функцияни мос қўяди. Масалан,

$$L[y] = y'' - xy' + 2y$$

бўлсин. У ҳолда $y = x^3$ функция учун

$$L[x^3] = (x^3)'' - x(x^3)' + 2x^3 = 6x - x \cdot 3x^2 + 2x^3 = 6x - x^3$$

ни ҳосил қиламиз, яъни $y = x^3$ функцияга $L[y] = 6x - x^3$ функция мос қўйилади. $y = \sin x$ функция учун:

$$L[\sin x] = (\sin x)'' - x(\sin x)' + 2\sin x =$$
$$= -\sin x - x\cos x + 2\sin x = \sin x - x\cos x.$$

Агар $L[y]$ оператор $L[y] = y'' + xy$ бўлса, $y = x^3$ учун

$$L[x^3]' = (x^3)'' + x \cdot x^3 = 6x + x^4$$

га, $y = \sin x$ учун эса

$$L[\sin x] = -\sin x + x\sin x = (x - 1)\sin x$$

га эгамиз.

$L[y]$ чизиқли дифференциал оператор қуйидаги иккита асосий хоссага эга.

1. *Ўзгармас кўпайтувчини оператор белгисидан ташқарига чиқариш мумкин,* яъни n марта дифференциалланувчи исталган y_1 функция учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$L[Cy_1] = CL[y_1], \text{ бу ерда } C = \text{const}. \qquad (5)$$

Ҳақиқатан ҳам, $L[Cy_1]$ ни ҳисобласак,

$$L[Cy_1] = (Cy_1)^{(n)} + p_1(Cy_1)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(Cy_1)' + p_nCy_1 =$$
$$= Cy_1^{(n)} + p_1Cy_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}Cy_1' + p_nCy_1 =$$
$$= C(y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny_1) = CL[y_1].$$

Шуни исботлаш керак эди. Бу хосса *бир жинслилик* хоссаси дейилади.

2. *Иккита функция йиғиндисининг оператори ҳар қайси қўшилувчи операторларининг йиғиндисига тенг,* яъни

n марта дифференциалланувчи исталган y_1 ва y_2 функциялар учун

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \tag{6}$$

тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатан ҳам,

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + p_n(y_1 + y_2).$$

Йиғиндининг ҳосиласи ҳосилалар йиғиндисига тенг бўлгани учун бу ердан қуйидагини топамиз:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + p_1(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \dots$$
$$\dots + p_{n-1}(y_1' + y_2') + p_n(y_1 + y_2) = (y^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + p_{n-1} y_1' + p_n y_1) + (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y_2' + p_n y_2) =$$
$$= L[y_1] + L[y_2].$$

Бу хосса чизиқли дифференциал операторнинг *аддитивлик* хоссаси дейилади. Равшанки, бу хосса фақат иккита эмас, балки чекли сондаги қўшилувчилар учун ҳам ўринлидир.

Чизиқли дифференциал операторнинг тайинланган хоссалари (3) тенглама ечимларининг айрим хоссаларини ифодаловчи теоремаларни исботлашга имкон беради.

Дастлаб (3) чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани чизиқли оператордан фойдаланиб,

$$L[y] = 0 \tag{7}$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини қайд қилиб ўтайлик. Шундай қилиб, тенгламанинг ечими шундай y функцияки, унга $L[y]$ оператор нолни мос қўяди. Бундай формулировка оддий $f(x) = 0$ тенгламани ечиш масаласининг формулировкасига ўхшашдир.

Энди чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама хусусий ечимларининг хоссалари тўғрисидаги теоремаларни кўриб чиқамиз.

1-теорема. *Агар y_1 функция (3) тенгламанинг ечими бўлса, Cy_1 функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исботи. Агар y (3) тенгламани қаноатлантирса, (7) га кўра $L[y_1] = 0$. Сўнгра чизиқли дифференциал оператор бир жинсли бўлгани учун $L[Cy_1] = CL[y_1]$, яъни $L[Cy_1] = 0$. Бу Cy_1 функция ҳам (3) тенгламани қаноатлантиришини билдиради.

2- теорема. *Агар y_1 ва y_2 функциялар (3) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда y_1+y_2 функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Бу теореманинг исботи олдинги теореманинг исботи кабидир. y_1 ва y_2 лар тенгламани қаноатлантиргани учун $L[y_1]=0$ ва $L[y_2]=0$. Иккинчи томондан, (6) тенгликка кўра $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$, яъни $L[y_1+y_2]=0$, бу эса y_1+y_2 ҳам (3) тенгламани қаноатлантиришини билдиради.

Векторларнинг чизиқли комбинациясига ўхшаш, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функцияларнинг чизиқли комбинацияси деб, $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n(C_1, C_2, \ldots, C_n$—ихтиёрий ўзгармас коэффициентлар) кўринишдаги ифодага айтилади.

3- теорема. *Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама (3) нинг хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда уларнинг $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ чизиқли комбинацияси ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади.*

Бу теорема олдинги икки теореманинг натижасидир.

$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ ифода n та ихтиёрий ўзгармасга эга бўлиб, n-тартибли тенгламани қаноатлантиради. Бу ифода тенгламамизнинг умумий ечими ва шундай қилиб, чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини бизга маълум бир нечта хусусий ечимдан тузиш мумкин деган табиий фикр келиб чиқади. Бу фикр ҳақиқатан ҳам ўринлидир, бироқ $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ ифода ҳар қандай $y_1, y_2, \ldots, y_n$ хусусий ечимларда ҳам (3) тенгламанинг умумий ечими бўла бермайди.

Олдинги бобда айтилганидек, ихтиёрий ўзгармасларга эга бўлган ечим бирорта дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлиши учун ихтиёрий ўзгармасларни улар бошланғич шартларнинг исталган системасини қаноатлантирадиган қилиб танлаш имконияти мавжуд бўлиши керак. Маълум $y_1, y_2, \ldots, y_n$ хусусий ечимларни бундай танлашда юқорида айтилган имконият бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш, яъни $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ ифода умумий ечим бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш учун функцияларнинг *чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги* тушунчаларини киритишга тўғри келади. Бу тушунчаларга ва уларнинг чизиқли дифференциал тенгламалар назариясига татбиқига кейинги параграф бағишланган.

14-§. ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЧИЗИҚЛИ БОҒЛИҚЛИГИ. ВРОНСКИЙ ДЕТЕРМИНАНТИ ВА УНИНГ ҚЎЛЛАНИШИ

Ох ўқнинг $[a, b]$ кесмасида аниқланган ва узлуксиз $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *функциялар* системасини қараймиз. *Агар* $[a, b)$ *кесмада барча х лар учун*

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0 \qquad (1)$$

айний муносабат бажариладиган n та $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *сон мавжуд бўлса, бу функциялар системаси* $[a, b]$ *кесмада чизиқли боғлиқ дейилади.* Бунда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар бир вақтда нолга тенг эмас деб фараз қилинади. Агар, масалан, $\alpha_n \neq 0$ деб фараз қилсак, (1) айниятни

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1} \qquad (2)$$

кўринишда қайта ёзиб олиш мумкин, бу ерда $\beta_i = -\alpha_n/\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Шунинг учун функциялар системасининг чизиқли боғлиқлиги система функцияларининг ҳеч бўлмаганда биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлишини билдиради.

Агар бундай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ коэффициентларни топиш мумкин бўлмаса, яъни $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *функцияларнинг ҳеч қандай чизиқли комбинацияси айнан ноль бўлмаса**, у ҳолда функцияларнинг бундай системаси *чизиқли эркли* дейилади.

Бир нечта мисол кўрамиз.

$y_1 = \cos^2 x$; $y_2 = \sin^2 x$; $y_3 = a$ бўлсин.

Функцияларнинг бу системаси исталган кесмада [баъзан $(-\infty, +\infty)$ интервалда ҳам дейилади] чизиқли боғлиқ.

Ҳақиқатан ҳам $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1/a$ да қуйидагига эгамиз:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \equiv \cos^2 x + \sin^2 x - 1 \equiv 0.$$

Энди

$$y_1 = \cos^2 x, \quad y_2 = \sin^2 x, \quad y_3 = e^x,$$
$$y_4 = \sin 2x, \quad y_5 = \cos 2x, \quad y_6 = \ln x$$

бўлсин.

Бу система ҳам чизиқли боғлиқ, чунки y_5 функция y_1 ва y_2 функцияларнинг айирмасига тенг. Агар $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_5 = -1$, $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$ десак, у ҳолда

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 + \alpha_5 y_5 + \alpha_6 y_6 \equiv \cos^2 x - \sin^2 x - \cos 2x \equiv 0$$

бўлади.

---

* Ўз-ўзидан маълумки, тривиал комбинациядан, яъни $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ дан ташқари. Бу комбинация ҳар доим айнан нолга тенг.

Бу ердан кўринадики, агар функциялар системасининг бир қисми чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда бутун система ҳам чизиқли боғлиқ бўлади. Бу системадан y_1, y_2, y_5 функциялардан бирини чиқариб ташлашдан кейин қолган система чизиқли эркли бўлишини қайд қилиб ўтайлик. Бироқ бу даъвонинг исботи унчалик осон эмас.

Чизиқли боғлиқликни исботлаш учун айнан нолга тенг комбинацияни берадиган коэффициентларнинг қийматларини кўрсатиш етарли. Агар бундай коэффициентларни танлай олмасак, у ҳолда, ё бу коэффициентлар мавжуд бўлса-да, биз уларни топа олмаган бўламиз, ёки система чизиқли эркли ва бундай коэффициентларни умуман топиш мумкин эмас деб тўла асос билан айта оламиз. Шунинг учун чизиқли эркликликни бошқача йўл билан исботлашга тўғри келади.

$y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = x^3$ система чизиқли эркли. Ҳақиқатан ҳам, α_1, α_2, α_3, α_4 бир вақтда нолга тенг бўлмаган исталган ўзгармас сонлар бўлсин. У ҳолда

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$$

тенглик куб тенглама бўлиб, у учтадан ортиқ илдизга эга бўла олмайди. Шунинг учун

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

ифода исталган α кўпайтувчиларда учтадан ортиқ бўлмаган нуқталарда нолга тенг бўлиши мумкин, демак, ҳеч қандай коэффициентларда айнан нолга тенг бўлмайди.

Бирорта функциялар системасининг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эрклилигини тайинлашга имкон берадиган аломатларни қараб чиқиш зарурати туғилади.

Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ системанинг функциялари $n-1$ марта дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда улардан n-тартибли детерминант тузиш мумкин, у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминант ҳам x нинг функцияси бўлиб, у бундай белгиланади:

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv W.$$

Биринчи марта уни киритган поляк математиги И. Вронский (1778—1853) шарафига бу детерминант берилган функциялар системасининг *Вронский детерминанти* (ёки *вронскиани*) деб аталган. Хусусан, $n=3$ да y_1, y_2, y_3 функциялар системасининг вронскиани

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2 & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

кўринишда бўлади.

Вронскиан функциялар системасининг чизиқли боғлиқлиги ёки чизиқли эрклилигини текшириш воситаси ҳисобланади. Унинг қўлланилиши қуйидаги иккита теоремага асосланган.

1- теорема. *Агар y_1, y_2, . . ., y_n функциялар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда системанинг вронскиани айнан нолга тенг бўлади.*

Исботи. Янада яққол бўлиши учун $n=3$ ҳол билан чекланамиз. y_1, y_2, y_3 функциялар чизиқли боғлиқ функциялар системасини ташкил этсин. У ҳолда шундай α_1, α_2, α_3 коэффициентлар мавжуд бўладики, улар учун

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\alpha_3 y_3=0 \tag{3}$$

бўлади.

$\alpha_3\neq 0$ деб фараз қилайлик (агар $\alpha_3=0$ бўлса, функцияларнинг номерланишини ўзгартириш кифоя, чунки шартга кўра α коэффициентларнинг ҳаммаси ҳам нолга тенг эмас). Бу ҳолда (3) тенгликни y_3 га нисбатан ечиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y_3=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2, \tag{4}$$

бу ерда, юқоридагига ўхшаш, $\beta_i=-\alpha_i/\alpha_3$ $(i=1,\ 2)$.

Энди берилган функциялар системаси учун Вронский детерминантини тузамиз ва унда y_3 функция ва унинг ҳосилалари турган устунни (4) ифода билан ва ундан олинадиган ҳосилалар билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$W[y_1,\ y_2,\ y_3]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \beta_1 y_1+\beta_2 y_2 \\ y_1' & y_2' & \beta_1 y_1'+\beta_2 y_2' \\ y_1'' & y_2'' & \beta_1 y_1''+\beta_2 y_2'' \end{vmatrix}.$$

Кейинги детерминант нолга тенг. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун охирги устундан β_1 га кўпайтирилган биринчи устунни, сўнгра β_2 кўпайтирилган иккинчи устунни айирамиз. Натижада детерминантнинг охирги устунида фақат ноллар турган бўлади, демак,

$$W(x) = W[y_1, y_2, y_3] = 0.$$

2- теорема. *Агар* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *чизиқли эркли функциялар бўлиб, улар бирорта n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда бундай системанинг вронскиани ҳеч бир нуқтада нолга айланмайди.*

Бунда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар бирорта кесмада қаралиб, бу кесма ечимнинг мавжудлиги ва ягоналигига кафолат бериш мумкин бўлган (a, b) интервалнинг бутунлай ичида ётади. Шундай қилиб, бу системанинг вронскиани юқорида айтилган ўшанақа кесмада ётади ва теорема у берилган кесмада нолдан фарқли эканлигини даъво қилади.

Исботни, яна $n=3$ бўлган ҳол билан чекланиб, «тескарисини фараз қилиш» усули бўйича олиб борамиз. Фараз қилайлик, $W(x)$ ҳеч бўлмаганда битта x_0 нуқтада нолга тенг бўлсин; бу ердан системанинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқишини кўрсатамиз, бу эса фаразимизга зид бўлади. Шундай қилиб, $W(x_0) = 0$ бўладиган x_0 нуқта мавжуд бўлсин. x_0 нуқтада функцияларнинг қийматларини y_{10}, y_{20}, y_{30} орқали, биринчи тартибли ҳосилаларнинг шу нуқтадаги қийматларини y'_{10}, y''_{20}, y'_{30} орқали ва иккинчи тартибли ҳосилаларнинг қийматларини $y''_{10}, y''_{20}, y''_{30}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & y_{30} \\ y'_{10} & y'_{20} & y'_{30} \\ y''_{10} & y''_{20} & y''_{30} \end{vmatrix} = 0.$$

Энди коэффициентлари детерминантимизнинг сатрлари бўлган учта $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ номаълумли учта бир жинсли тенглама системасини кўрайлик;

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_{10} + \alpha_2 y_{20} + \alpha_3 y_{30} &= 0, \\ \alpha_1 y'_{10} + \alpha_2 y'_{20} + \alpha_3 y'_{30} &= 0, \\ \alpha_1 y''_{10} + \alpha_2 y''_{20} + \alpha_3 y''_{30} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Бу системанинг детерминанти $D = W(x_0) = 0$. Маълумки, уч номаълумли учта алгебраик тенгламадан иборат бир жинсли система бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлганда ва фақат шунда нолдан фарқли ечимларга эга бўлар эди. Шунинг учун (5) система ноль бўлмаган α_1, α_2, α_3 ечимга эга. Топилган сонлар ёрдамида янги

$$\bar{y} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 \tag{6}$$

функцияни тузамиз, у берилган системанинг функцияларининг коэффициентлари (5) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи чизиқли комбинациясидан иборатдир. (6) функциянинг баъзи хоссаларини тайинлаймиз. Аввало, y_1, y_2, y_3 бирорта чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлганлигидан 13- § даги 3- теоремага кўра $\bar{y}$ функция ҳам бу тенгламанинг ечими бўлади. Сўнгра α_1, α_2, α_3 коэффициентлар (5) тенгламаларнинг биринчисини қаноатлантиришидан $\bar{y}$ функциянинг x_0 нуқтадаги қиймати

$$\bar{y}(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \alpha_3 y_3(x_0) =$$
$$= \alpha_1 y_{10} + \alpha_2 y_{20} + \alpha_3 y_{30} = 0$$

га тенглиги келиб чиқади. $\bar{y}$ функциянинг ҳосилалари (6) даги каби y_1, y_2, y_3 функциялар ҳосилаларининг чизиқли комбинацияси

$$y' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \alpha_3 y_3',$$
$$y'' = \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' + \alpha_3 y_3''$$

дан иборат бўлгани сабабли x_0 нуқтадаги ҳосилалар учун (5) системанинг қолган тенгламаларига кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\bar{y}'(x_0) = \alpha_1 y_{10}' + \alpha_2 y_{20}' + \alpha_3 y_{30}' = 0,$$
$$\bar{y}''(x_0) = \alpha_1 y_{10}'' + \alpha_2 y_{20}'' + \alpha_3 y_{30}'' = 0.$$

Шундай қилиб, $\bar{y}$ функция фақат берилган тенгламаларнигина қаноатлантириб қолмасдан, балки бошланғич шартларнинг ноль системасини ҳам қаноатлантиради, яъни x_0 нуқтада ўзининг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда нолга айланади. Бироқ шу билан бирга қаралаётган тенглама ўша бошланғич шартларнинг ноль системасини қаноатлантирадиган аёний ечим $y \equiv 0$ га ҳам эга. Мавжудлик ва ягоналик теоремасига (13- §) кўра битта бошланғич шартлар системасини қаноатлантирадиган иккита ҳар хил ечимнинг бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун $\overline{y}$ функция айнан ноль ечим билан устма-уст тушиши лозим, яъни (6) тенглик ушбу кўринишни олади:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0,$$

шу билан бирга ҳамма α_i лар ҳам нолга тенг эмас. Бироқ бу сўнгги тенглик y_1, y_2, y_3 функцияларнинг чизиқли боғлиқлигини билдиради, бу эса теорема шартларига зиддир.

Чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани текширишга қайтамиз. n- тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг y_1, $y_2, \ldots, y_n$ хусусий ечимлари системаси n та *чизиқли эркли функциядан иборат бўлса, бу системани фундаментал система деймиз.*

Ҳар қандай чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама чексиз кўп фундаментал системаларга эга бўлишини кўрсатиш мумкин.

Ечимларнинг фундаментал системаси тушунчасини ва юқоридаги Вронский детерминанти тўғрисидаги теоремаларни татбиқ қилиш олдинги параграфда қўйилган ушбу масалани ҳал этишга имкон беради: қандай ҳолда чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини хусусий ечимлардан тузиш мумкин?

Теорема (чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими тўғрисидаги теорема). Агар y_1, $y_2, \ldots, y_n$ функциялар

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x) = 0 \qquad (7)$$

тенглама ечимларининг фундаментал системасини ташкил этса, у ҳолда уларнинг

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_n y_n \qquad (8)$$

чизиқли комбинацияси бу тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Исботи. Олдинги иккита теоремадаги каби $n = 3$ ҳолни қараш билан чекланамиз. У ҳолда (7) тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$y''' + p_1(x)\, y'' + p_2(x)\, y' + p_3(x)\, y = 0 \qquad (9)$$

ва теорема

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \qquad (10)$$

чизиқли комбинация (бу ерда C_1, C_2, C_3 — ихтиёрий ўзгармаслар, y_1, y_2, y_3 — (9) тенглама ечимларининг фундаментал системаси) (9) тенгламанинг умумий ечими бўлади деб даъво қилади.

Олдинги параграфдаги 3-теоремадан (10) функция (9) тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади. Энди C_1, C_2, C_3 қийматларни (10) функция бошланғич шартларнинг исталган системасини ҳам қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкинлигини кўрсатиш қолди.

Бошланғич шартларнинг бирорта системаси берилган бўлсин:

$$x = x_0 \text{ да } y = y_0, \; y' = y_0', \; y'' = y_0''. \qquad (11)$$

Агар (10) функция бу шартларнинг биринчисини қаноатлантирса, у ҳолда

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + C_3 y_{30} = y_0,$$

бу ерда y_{10}, y_{20}, y_{30} лар y_1, y_2, y_3 функцияларнинг x_0 нуқтадаги қийматлари.

(10) ни дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3';$$

иккинчи шартдан:

$$C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + C_3 y_{30}' = y_0'.$$

(10) функцияни яна бир марта дифференциаллаб,

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3''$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$C_1 y_{10}'' + C_2 y_{20}'' + C_3 y_{30}'' = y_0''.$$

Шундай қилиб, y функция бошлангич шартларининг берилган системасини қаноатлантириши учун ихтиёрий ўзгармаслар қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши керак:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + C_3 y_{30} = y_0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + C_3 y_{30}' = y_0', \\ C_1 y_{10}'' + C_2 y_{20}'' + C_3 y_{30}'' = y_0''. \end{array}\right| \qquad (12)$$

(12) система биринчи даражали уч номаълумли учта алгебраик тенгламадан иборат бир жинсли бўлмаган системадир. Унинг детерминанти y_1, y_2, y_3 системанинг x_0 нуқтадаги вронскианидан иборатдир. y_1, y_2, y_3 хусусий ечимлар системаси фундаментал, бинобарин, чизиқли эркли бўлгани учун 2-теоремага кўра унинг вронскиани ҳар

бир нуқтада нолдан фарқли. Шунинг учун бир жинсли бўлмаган (12) системанинг детерминанти нолдан фарқли ва унга ягона ечимни топишга имкон берадиган маълум қоидани татбиқ қилиш мумкин. Демак, (12) тенглама ечимга эга, яъни C_1, C_2, C_3 ихтиёрий ўзгармасларни (10) функция (11) бошланғич шартларни қаноатлантирадиган қилиб танлаш мумкин. Бу эса (10) функция (9) тенгламанинг умумий ечими эканлигини билдиради.

Келтирилган бу исботни ҳеч бир ўзгаришсиз исталган $n > 3$ учун ҳам такрорлаш мумкин.

Шундай қилиб, агар y_1, y_2, $\ldots$, y_n хусусий ечимлар системаси фундаментал бўлса, у ҳолда (7) тенгламанинг умумий ечимини хусусий ечимлардан уларнинг ихтиёрий коэффициентли чизиқли комбинацияси каби тузиш мумкин. Бу билан чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламани интеграллаш масаласи унинг хусусий ечимларининг фундаментал системасини излаш масаласига келтирилади. Лекин бу масалани умумий кўринишда ечиш мумкин эмас. Чунончи ихтиёрий юқори тартибли чизиқли тенглама учун хусусий ечимларнинг бирорта фундаментал системасини фақат элементар функцияларда эмас, шунингдек, уларнинг интеграллари шаклида ҳам ҳосил қилиб бўлмайди. Бироқ бундай тенгламаларнинг баъзи энг содда турлари учун фундаментал системаларни ҳатто фақат биргина алгебраик амаллар ёрдамида аниқлаш мумкин. Бундай турдаги чизиқли тенгламалар қуйида қаралади.

15-§. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (1)$$

кўринишдаги чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама ана шундай ном билан аталади, бу ерда барча p_1, p_2, $\ldots$, p_n коэффициентлар юқорида кўрилган умумий ҳолдан фарқли ўлароқ ўзгармасдир. Бу ҳолда хусусий ечимларнинг фундаментал системасини, бинобарин, умумий ечимни излаш соф алгебраик операцияларни бажаришга — n-даражали битта алгебраик тенгламани ечишга келтирилади.

(1) тенгламанинг кўриниши бу тенгламанинг хусусий ечимларини, дастлаб, алгебраик маънода ўз ҳосилаларига тенг бўлган функциялар орасидан излаш керак эканлигини кўрсатади. Маълумки, элементар функциялар ичида кўрсаткичли функция ана шу хоссага эга. Шунинг учун хусусий ечимларни дастлаб $y = e^{rx}$ кўринишда излаймиз. Энди

$$y' = re^{rx}, \; y'' = r^2e^{rx}, \; \dots, \; y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

бўлгани сабабли (1) тенгламанинг чап томони учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L[e^{rx}] = r^n e^{rx} + p_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + p_{n-1} re^{rx} + p_n e^{rx} =$$
$$= e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n).$$

Шундай қилиб, (1) тенгламада $y = e^{rx}$ ўрнига қўйиш уни

$$e^{rx} f(r) = 0 \qquad (2)$$

кўринишга келтиради, бу ерда $f(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n$ ни берилган дифференциал тенгламанинг *характеристик кўпҳади* деб аташга келишилган. (2) ифодадаги e^{rx} кўпайтувчи x нинг ҳеч қандай қийматида нолга айланмайди. Шунинг учун r сон

$$f(r) = 0 \qquad (3)$$

тенгламанинг илдизи бўлган ҳолда ва фақат шундагина $y = e^{rx}$ функция ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли (1) дифференциал тенгламани қаноатлантиради.

(3) алгебраик тенглама берилган дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади. У (1) дифференциал тенгламадан изланаётган функциянинг ҳосилаларини r номаълумнинг мос даражалари билан алмаштиришдан ҳосил бўлади, бунда функциянинг ўзи «нолинчи тартибли ҳосила» сифатида r нинг нолинчи даражаси, яъни бир билан алмаштирилади. (3) характеристик тенгламанинг ечими (1) дифференциал тенгламанинг бирорта хусусий ечимлари системасини беради. Бунда турли имкониятлар бўлиши мумкин бўлиб, уларни муфассал таҳлил қилиб чиқиш керак.

1. **Характеристик тенгламанинг барча илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил**, яъни характеристик тенглама каррали илдизларга ҳам, комплекс илдизларга ҳам эга эмас. Алгебраик тенглама унинг даражаси қанча бўлса, шунча илдизга эга бўлгани учун характеристик тенгламанинг роппа-расо n та ҳар хил $r_1, r_2, \ldots, r_n$ илдизи бўлади. Бу илдизларнинг ҳар бирига дифференциал тенгламанинг хусусий ечими мос келади. Демак, n та хусусий ечимни топамиз:

$$y_1 = e^{r_1 x},\quad y_2 = e^{r_2 x},\quad \ldots,\quad y_n = e^{r_n x}. \tag{4}$$

Энди система фундаментал бўлишини, яъни, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар чизиқли эркли эканлигини кўрсатсак, кифоя. Бунинг учун бу функциялар системасининг Вронский детерминантини тузиш лозим. $n = 3$ да вронскиан ушбу кўринишда бўлади:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_3 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & r_3 e^{r_3 x} \\ r_1^2 e^{r_1 x} & r_2^2 e^{r_2 x} & r_3^2 e^{r_3 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + r_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Бу ерда детерминантнинг ҳар қайси устунидан e^{rx} кўринишдаги кўпайтувчи қавс ташқарисига чиқарилган. Сўнгги детерминантни учбурчак қоидасидан фойдаланиб, ҳисоблаш осон. Бироқ система вронскиани n-тартибли детерминант бўлган умумий ҳолда, яъни

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

бўлганда бу қоидани татбиқ қилиб бўлмайди. Шунинг учун умумий ҳолда ҳам фойдаланиш мумкин бўлган (5) детерминантни ҳисоблаш усулини қараб чиқамиз.

Детерминантнинг учинчи устунини биринчи ва иккинчи устунлардан айирамиз. У ҳолда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r_1 - r_3 & r_2 - r_3 & r_3 \\ r_1^2 - r_3^2 & r_2^2 - r_3^2 & r_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (r_1 - r_3)\,(r_2 - r_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 + r_3 & r_2 + r_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\,(r_1 - r_2)\,(r_1 - r_3)\,(r_2 - r_3),$$

бу ерда биринчи устундан $r_1 - r_3$ умумий кўпайтувчи, иккинчи устундан $r_2 - r_3$ умумий кўпайтувчи ташқарига чиқарилган ва қолган учинчи тартибли детерминант биринчи сатри бўйича ёйиш орқали иккинчи тартибли детерминантга келтирилган. Шундай қилиб, учта функциядан иборат система учун

$$W\,[y_1,\ y_2,\ y_3] = e^{(r_1+r_2+r_3)x}\,(-1)^3\,(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\,(r_2 - r_3).$$

Умумий ҳолда ҳам худди шунга ўхшаш ушбу формула ўринли бўлишини кўрсатиш мумкин:

$$W\,[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] =$$

$$= e^{(r_1+r_2+\ldots+r_n)x}\,(-1)^n\,(r_1 - r_2)\,(r_1 - r_3)\ \ldots$$

$$\ldots\ (r_1 - r_n)\,(r_2 - r_3)\ \ldots\ (r_{n-1} - r_n),$$

бу формула (6) детерминантни юқоридаги усул билан ҳисоблаш орқали ҳосил бўлади. Характеристик тенгламанинг барча $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ илдизлари шартга кўра турлича, e^{rx} функция эса ҳеч қандай x ларда нолга айланмаганлиги учун

$$W\,[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] \neq 0.$$

Бу билан характеристик тенгламанинг барча $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлса, хусусий ечимлар системаси (4) фундаментал бўлиши исботланди. Демак, бу система функцияларининг

$$y = C_1\,e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx} \qquad (7)$$

чизиқли комбинацияси дифференциал тенгламамизнинг умумий ечимини беради.

Ушбу

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

тенглама учун характеристик тенглама $r^2 - 3r + 2 = 0$ кўринишга эга; унинг илдизлари $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Хусусий ечимлар: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} .$$

$y''' - 5y'' + 6y' = 0$ тенглама учун $r^3 - 5r^2 + 6r = 0$ характеристик тенглама $r_1 = 0$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ илдизларга эга. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Ниҳоят, $y^{\mathrm{IV}} - 5y'' + 4y = 0$ тенглама учун характеристик тенглама $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ дан иборат, унинг илдизлари: $r_{1,2} = \pm 1$, $r_{3,4} = \pm 2$; дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} .$$

II. Характеристик тенгламанинг барча илдизлари ҳар хил, бироқ уларнинг орасида комплекс илдизлар ҳам бор. Умумий ечим учун (7) ифодага олиб келган мулоҳазалар бу ерда ҳам ўз кучини сақлайди. Бироқ (7) ифода ноқулай, чунки $e^{(a+bi)x}$ кўринишдаги комплекс функцияларга эга, биз эса шу пайтгача ҳақиқий x аргументнинг ҳақиқий функциялари билан чекланган эдик. Шунинг учун (7) ифодани характеристик тенглама комплекс илдизларга эга бўлган ҳолда ҳам фақат ҳақиқий функцияларга эга бўладиган қилиб ўзгартиришни мақсад қилиб қўямиз.

Айтайлик, $r = a + bi$ характеристик тенгламанинг комплекс илдизларидан бири бўлсин. $f(r)$ кўпҳад фақат ҳақиқий коэффициентларга эга бўлгани учун, алгебрадан маълумки, $\overline{r} = a - bi$ қўшма комплекс сон ҳам характеристик тенгламанинг илдизи бўлади. $a \pm bi$ қўшма комплекс сонлар жуфтига иккита хусусий ечим $y_k = e^{(a+bi)x}$ ва $y_s = e^{(a-bi)x}$ мос келади. Бу иккита ечим ўрнига уларнинг баъзи комбинацияларини кўрамиз, булар ҳам 13-§ даги 1 ва 2-теоремаларга кўра (1) тенгламанинг ечимлари бўлади. Чунончи $\tilde{y}_k = (y_k + y_s)/2$ ва $\tilde{y}_s = (y_k - y_s)/2i$ функцияларни кўрайлик. Эйлернинг маълум

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

формулаларини қўлланиб, бу ифодаларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\tilde{y}_k = \frac{e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}}{2} = e^{ax} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} = e^{ax} \cos bx,$$

$$\tilde{y}_s = \frac{e^{(a+bi)x} - e^{(a-bi)x}}{2i} = e^{ax}\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} = e^{ax} \sin bx.$$

Шундай қилиб, характеристик тенгламанинг қўшма комплекс илдизлари жуфти $r_{k,s} = a \pm bi$ га дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари жуфти $\tilde{y}_k = e^{ax} \cos bx$ ва $\tilde{y}_s = e^{ax} \sin bx$ ни мос келтириш мумкин. Эйлер формуласига кўра y_k ва y_s функцияларни $\tilde{y}_k$ ва $\tilde{y}_s$ функцияларнинг чизиқли комбинациялари сифатида ҳосил қилиш мумкин бўлгани учун Эйлернинг ўша формулаларига асосан бундай алмаштириш хусусий ечимлар системасининг чизиқли эрклилигини бузмайди. Умумий ечимни яна хусусий ечимларнинг ихтиёрий коэффициентли чизиқли комбинацияси каби ҳосил қилиш мумкин, бироқ бу ечим энди (7) кўринишга эга бўлмайди. Характеристик тенгламанинг ҳар бир r ҳақиқий илдизига e^{rx} кўринишидаги хусусий ечим, характеристик тенгламанинг қўшма комплекс илдизлари жуфти $a \pm bi$ га $e^{ax} \cos bx$ ва $e^{ax} \sin bx$ кўринишдаги хусусий ечимлар жуфти мос келтирилади.

Масалан,

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

тенглама учун $r^2 - 2r + 5 = 0$ характеристик тенглама $r_{1,2} = 1 \pm 2i$ илдизларга эга. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x \quad \text{ёки} \quad y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Ушбу

$$y''' - 8y = 0$$

тенгламанинг характеристик тенгламаси: $r^3 - 8 = 0$. Чап томонни кўпайтувчиларга ажратиб, $(r - 2)(r^2 + 2r + 4) = 0$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $r_1 = 2$, $r_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos x\sqrt{3} + C_3 e^{-x} \sin x\sqrt{3}$$

ёки

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3}).$$

Ниҳоят,

$$y^{\mathrm{V}} + 13y''' + 36y' = 0$$

тенглама учун характеристик тенглама: $r^5 + 13r^3 + 36r = 0$; унинг илдизлари $r_1 = 0$; $r_{2,3} = \pm 2i$, $r_{3,4} = \pm 3i$ дан иборат. Дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x.$$

III. **Характеристик тенглама илдизлари орасида каррали илдизлар бор.** Бу ерда (7) ифода умумий ечим учун ўз кучини йўқотади, чунки чизиқли эркли ечимлар сони n дан кичик бўлади. Ҳақиқатан, агар r характеристик тенгламанинг α каррали илдизи бўлса, у ҳолда унга α та эмас, балки битта e^{rx} ечим мос келади ва фундаментал системани ҳосил қилиш учун $\alpha - 1$ та ечим етишмайди. Бундай ҳолда етишмаётган хусусий ечимларни қандай топишни аниқлаймиз.

Дастлаб, характеристик тенглама $\alpha > 1$ каррали ноль ечимга эга бўлган ҳолни текширамиз. Характеристик тенглама бу ҳолда

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-\alpha} r^\alpha = 0 \qquad (p_{n-\alpha} \neq 0)$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда r^α ни қавс ташқарисига чиқариш мумкин. Тенглама r нинг кичик даражаларини ўз ичига ола олмайди. Бу ҳолда (1) дифференциал тенглама ушбу кўринишда ҳосил бўлади:

$$y^n + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-\alpha}\, y^{(\alpha)} = 0,$$

яъни бу ерда α дан паст тартибли ҳосилалар қатнашмайди. Бундай тенгламани $\alpha - 1$ дан юқори тартибли барча ҳосилалари айнан нолга тенг бўлган, даражаси α дан юқори бўлмаган исталган кўпҳад қаноатлантиради. Бундай кўпҳадлар чексиз кўп, бироқ уларнинг орасидан ўзаро чизиқли эркли бўлган α тасини танлаб олиш мумкин. Бунинг учун

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,\ \ldots,\ y_\alpha = x^{\alpha-1}$$

деб олиш етарли.

Бу функциялар системасининг чизиқли эрклилиги. 171-бетдаги мисолдагига ўхшаш исботланади. Иккинчи томондан, даражаси $\alpha - 1$ дан юқори бўлмаган ҳар қандай кўпҳад бу система функцияларининг чизиқли комбинацияси сифатида ҳосил қилиниши мумкин. Шундай қилиб, α каррали $r = 0$ илдиз учун дифференциал тенгламанинг α та чизиқли эркли ечимлари топилади.

Энди (3) характеристик тенгламанинг α каррали бўлган илдизи $r_1 \neq 0$ сондан иборат бўлсин, (1) тенгламада $p = ze^{r_1x}$ деб, ўзгарувчини алмаштирамиз. У ҳолда

$$y' = z' e^{r_1x} + r_1 z e^{r_1x},$$
$$y'' = z'' e^{r_1x} + 2r_1 z' e^{r_1x} + r_1^2 z e^{r_1x}.$$

. . . .

Бу ифодаларни (1) тенгламага қўйиб, номаълум функцияси z бўлган дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз. У n-тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли тенглама бўлади, чунки унинг барча ҳадлари e^{r_1x} кўпайтувчига эга бўлиб, уни қисқартириш мумкин. Бу тенгламани

$$z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \ldots = 0. \qquad (8)$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^n + q_1 k^{n-1} + \ldots = 0 \qquad (9)$$

бўлсин. Агар k сон (9) характеристик тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда $z = e^{kx}$ (8) дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Бироқ у ҳолда

$$y = ze^{r_1x} = e^{kx} e^{r_1x} = e^{(k+r_1)x} \qquad (1)$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради ва юқорида исботланганига кўра $r = k + r_1$ сон (3) характеристик тенгламанинг илдизи бўлади. Аксинча, (1) тенгламани (8) тенгламадан $z = ye^{-r_1x}$ ўрнига қўйиш билан ҳосил қилиш мумкин, шунинг учун (3) характеристик тенгламанинг ҳар бир r илдизига (9) характеристик тенгламанинг $k = r - r_1$ илдизи мос келади. Шундай қилиб, (3) ва (9) характеристик тенгламаларнинг илдизлари орасида $r = k + r_1$ тенглик билан ифодаланадиган боғланиш мавжуд, шу билан бирга (3) тенгламанинг ҳар хил илдизларига (9) тенгламанинг ҳар хил илдизлари мос келади ва, аксинча.

(3) характеристик тенглама α каррали $r = r_1$ илдизга эга бўлгани учун (9) характеристик тенглама α каррали $k = 0$ илдизга эга бўлиши керак. Ҳақиқатан ҳам, (3) тенгламанинг $r = r_1$ илдизига (9) тенгламанинг $k = 0$ илдизи ва (9) тенгламанинг ҳар хил илдизларига (3) тенгламанинг ҳар хил илдизлари мос келгани учун $k = 0$ илдиз-

нинг карралиги $r = r_1$ илдизнинг карралигига тенг бўлиши керак. Бироқ бундай ҳолда юқорида исбот қилинганига кўра (8) дифференциал тенглама ўзаро чизиқли эркли бўлган ушбу α та ечимга эга бўлади:

$$z = 1,\ z = x,\ z = x^2, \ldots,\ z = x^{\alpha-1},$$

булар (1) дифференциал тенгламанинг ушбу кўринишдаги α та ечимини беради:

$$y = e^{r_1 x},\ y = xe^{r_1 x},\ y = x^2 e^{r_1 x},\ \ldots,\ y = x^{\alpha-1} e^{r_1 x}.$$

Шундай қилиб, (3) характеристик тенгламанинг α каррали r_1 илдизига дифференциал тенгламанинг роса α та ҳар хил ечими мос келади. Яна хусусий ечимлар системаси ҳосил бўлиб, унда n та функция бўлади. Ҳосил қилинган хусусий ечимлар системасининг чизиқли эрклилигини исбот қилиб ўтирмаймиз.

Аввалги мулоҳазаларимизда каррали r_1 илдиз ҳақиқий сон деб фараз қилинмаган эди. Шунинг учун барча мулоҳазалар каррали илдизлар комплекс бўлган ҳол учун ҳам ўз кучида қолади. Масалан, $a \pm bi$ комплекс илдизлар жуфти икки каррали бўлса, унга қуйидаги кўринишдаги тўртта хусусий ечим мос келади:

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx.$$

Масалан,

$$y'' - 2y' + y = 0$$

тенглама учун $r^2 - 2r + 1 = 0$ характеристик тенглама $r_{1,2} = 1$ каррали илдизга эга, шунинг учун умумий ечим ушбу кўринишда ёзилади:

$$y = C_1 e^x + C_2 xe^x \text{ ёки } y = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Ушбу $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} + 2y''' = 0$ тенглама $r^5 - 2r^4 + 2r^3 = 0$ характеристик тенгламага эга, бу ердан $r_{1,2,3} = 0$, $r_{4,5} = 1 \pm i$. Бинобарин, умумий ечим:

$$y = C_1 + C_2 x = C_3 x^2 + C_4 e^x \cos x + C_5 e^x \sin x.$$

Ниҳоят,

$$y^{\mathrm{V}} + 8y''' + 16y' = 0$$

тенглама $r^5 + 8r^3 + 16r = 0$ характеристик тенгламага эга, унинг илдизлари: $r_1 = 0$, $r_{2,3} = 2i$, $r_{4,5} = -2i$. Умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \cos 2x + C_5 x \sin 2x.$$

Барча мумкин бўлган ҳолларда умумий ечимни тузишга имкон берадиган хусусий ечимларнинг фундаментал системаси ҳосил бўлади. Шунинг учун n-тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш масаласи n-даражали алгебраик тенгламанинг барча илдизларини топишга келтирилади.

16-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенглама (13-§ га қаранг) деб,

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots \\ \dots\ p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = q(x) \tag{1}$$

кўринишдаги тенгламага айтилади.

Чизиқли дифференциал оператор ифодасидан фойдаланиб, (1) тенгламани

$$L[y] = q(x) \tag{2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими шундай функцияки, $L[y]$ оператор бу функцияга берилган $q(x)$ функцияни мос қўйишини билдиради. Кўпинча (2) тенглама билан бир вақтда ундан ўнг томонни ташлаб юбориш натижасида ҳосил бўладиган бир жинсли $L[y] = 0$ тенгламани ҳам қарашга тўғри келади. Бундай бир жинсли тенглама бир жинсли бўлмаган тенгламага *мос тенглама* дейилади.

Бир жинсли бўлмаган тенгламани ечишда мос бир жинсли тенгламани текширишнинг муҳимлиги ушбу теоремадан келиб чиқади.

1-теорема. *Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бу тенгламанинг хусусий ечими ва унга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат.*

Исботи. (2) тенгламани кўрамиз ва $\bar{y}$ орқали бу тенгламанинг маълум хусусий ечимини белгилаймиз: $L[\bar{y}] = q(x)$. y функция билан $y = Y + \bar{y}$ тенглик орқали боғланган янги Y функцияни киритамиз.

У ҳолда (2) тенглама $L[Y+\bar{y}]=q(x)$ га ўтади, бу чизиқли дифференциал операторнинг аддитивлиги (13-§ га қаранг) туфайли

$$L[\bar{y}]+L[Y]=q(x)$$

тенгламага олиб келади. $L[\bar{y}]=q(x)$ бўлгани учун Y функция мос бир жинсли тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади, яъни $L[Y]=0$.

Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар бу тенглама хусусий ечимларининг фундаментал системасини ташкил этса, у ҳолда

$$Y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n.$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими ушбу кўринишни олади:

$$y=\bar{y}+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n. \tag{3}$$

(3) ифода умумий ечим эканлигининг исботи 14-§ даги умумий ечим тўғрисидаги теореманинг исботи каби олиб борилади. $\bar{y}$ нинг бўлиши ихтиёрий ўзгармасларни топиш учун тузилган системанинг фақат ўнг томонларинигина ўзгартиради, бу эса тенгламанинг ечилиш-ечилмаслигига таъсир қилмайди.

Ҳақиқатан ҳам, масалан, учинчи тартибли

$$y'''+p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3(x)y=q(x)$$

тенглама учун ушбу бошланғич шартлар берилган бўлсин:

$$x=x_0 \text{ да } y=y_0,\ y'=y_0',\ y''=y_0''.$$

(3) функция $n=3$ да бу шартларни қаноатлантириши учун

$$\begin{aligned}
y_0&=\bar{y}_0+C_1y_{10}+C_2y_{20}+C_3y_{30},\\
y_0'&=\bar{y}_0'+C_2y_{10}'+C_2y_{20}'+C_3y_{30}'.\\
y_0''&=\bar{y}_0''+C_1y_{10}''+C_2y_{20}''+C_3y_{30}''
\end{aligned}$$

бўлиши керак, бу ерда $\bar{y}_0, \bar{y}_0', \bar{y}_0''$ лар $\bar{y}$ функциянинг ва унинг ҳосилаларининг $x=x_0$ нуқтадаги қийматлари. Бу системани қуйидагича қайта ёзиб олиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}
C_1y_{10}+C_2y_{20}+C_3y_{30}&=y_0-\bar{y}_0,\\
C_1y_{10}'+C_2y_{20}'+C_3y_{30}'&=y_0'-\bar{y}_0',\\
C_1y_{10}''+C_2y_{20}''+C_3y_{30}''&=y_0''-\bar{y}_0''.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(4) система 14-§ даги (12) системадан фақат ўнг томонлари билан фарқланади. Бу системанинг детерминанти у ердагига ўхшаш нолдан фарқли $W(x_0)$ вронскиандан иборат. Демак, (4) система биргаликда ва ягона ечимга эга, бу ердан (3) функция қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими эканлиги келиб чиқади. Худди шундай мулоҳазани исталган тартибли тенглама учун ҳам юритиш мумкин.

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани ечишнинг бир жинсли тенгламани ечишдан фарқи фақат бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечимини топишдадир. Бир жинсли бўлмаган тенгламаларни ечиш усули ана шунга асосланган, бу яна қуйидаги теорема билан ҳам енгиллаштирилади.

2-теорема. *Агар бир жинсли бўлмаган (2) тенгламанинг ўнг томони иккита функциянинг йиғиндисидан иборат, яъни*

$$L[y] = q_1(x) + q_2(x)$$

бўлса, бундай тенгламанинг хусусий ечимини ўнг томонлари мос равишда $q_1(x)$ ва $q_2(x)$ бўлган худди шундай тенгламаларнинг хусусий ечимлари йиғиндиси сифатида ҳосил қилиш мумкин.

Исботи. $L[y] = q_1(x)$ ва $L[y] = q_2(x)$ тенгламаларни қараймиз. $\overline{y}_1$ ва $\overline{y}_2$ функциялар мос равишда биринчи ва иккинчи тенгламаларни қаноатлантирсин дейлик, яъни

$$L[\overline{y}_1] = q_1(x),\ L[\overline{y}_2] = q_2(x).$$

Чизиқли дифференциал операторнинг аддитивлик хоссасига кўра

$$L[\overline{y}_1 + \overline{y}_2] = L[\overline{y}_1] + L[\overline{y}_2] = q_1(x) + q_2(x),$$

яъни $y = \overline{y}_1 + \overline{y}_2$ функция

$$L[y] = q_1(x) + q_2(x)$$

тенгламани қаноатлантиради, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг аниқмас коэффициентлар усулини қарашга ўтамиз.

Аниқмас коэффициентлар усули коэффициентлари ўзгармас ва ўнг томони махсус кўринишда бўлган бир жинсли бўлмаган тенгламалар учун татбиқ қилинади. Агар ўнг томонда кўрсаткичли функциялар, синуслар, косинуслар ва кўпҳадлар ёки уларнинг бутун рационал комбинациялари турган бўлса, у ҳолда аниқмас коэффициентлар усули бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топишга имкон беради. Хусусий ечимни билиш, 1-теоремага кўра, умумий ечимни топиш учун етарлидир, чунки мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими 15-§ даги қоидалар бўйича топилади.

Аниқмас коэффициентлар усули хусусий ечимнинг шаклини билишга асосланган. Табиийки, хусусий ечимни ўнг томоннинг шаклига ўхшаш шаклда излаш керак. Бироқ хусусий ечимнинг шакли тенгламанинг чап томонига ҳам боғлиқ эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон. Бунинг учун қуйидаги мисолларни кўриб чиқамиз.

$y'' - 2y' - y = 6xe^x$ тенгламани ечамиз.

Бу ерда тенгламанинг ўнг томони e^x кўрсаткичли функциянинг биринчи даражали кўпҳадга кўпайтмасидан иборат. Бинобарин, хусусий ечимни e^x кўрсаткичли функциянинг биринчи даражали кўпҳадга кўпайтмаси шаклида қуйидагича излаш табиийдир:

$$\bar{y} = (Ax + B)e^x .$$

Номаълум A ва B коэффициентларни топиш учун $\bar{y}$ функцияни ва унинг x бўйича ҳосилаларини тенгламага қўямиз ҳамда чап ва ўнг томондаги коэффициентларни таққослаймиз. Бунинг учун y, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ нинг ифодаларини ёзиб оламиз ва ҳар бирининг чап томонига улар тенгламага кирадиган коэффициентларни ёзиб қўямиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{array}{r|l} -1 & \bar{y} = (Ax + B)\, e^x, \\ -2 & \bar{y}' = (Ax + B)\, e^x + A\, e^x, \\ 1 & \bar{y}'' = (Ax + B)\, e^x + 2A\, e^x. \end{array}$$

Ҳисоблашларни бажариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$-2\,(Ax + B)\, e^x = 6xe^x ,$$

бу ердан коэффициентларни тенглаб, $A = -3$, $B = 0$ ни топамиз, яъни тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y} = -3xc^x$ кўринишга эга. Бу нарса тенгламани ечиш учун етарли, чунки мос бир жинсли $y'' - 2y' - y = 0$ тенглама осон ечилади. Унинг $r^2 - 2r - 1 = 0$ характеристик тенгламаси $r_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ илдизларга эга, бу ердан $Y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$ ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y = -3xc^x + C_1 e^{(1+\sqrt{2})\,x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})\,x}$$

бўлади.

Энди $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ тенгламани ечайлик.

Ҳар иккала мисолдаги ўнг томонлар бир хил бўлганлиги учун хусусий ечимни олдинги мисолдаги шаклда топишга ҳаракат қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \bar{y} = (Ax + B)\, e^x\,, \\ -2 & \bar{y}' = (Ax + B)\, e^x + Ae^x\,, \\ 1 & \bar{y}'' = (Ax + B)\, e^x + 2Ae^x. \end{array}$$

Чап томонда ўхшаш ҳадларни ихчамласак, улар ўзаро қисқариб кетади, натижада $0 = 6xe^x$ тенглик ҳосил бўлади, у айният эмас. Бу— берилган тенглама учун юқорида фараз қилинган $\bar{y} = (Ax + B)\, e^x$ шаклда хусусий ечим мавжуд эмаслигини кўрсатади. Маълум бўлишича, хусусий ечимни бошқача шаклда ҳосил қилиш мумкин экан. Чунончи, агар $\bar{y} = (Ax^3 + Bx^2)\, e^x$ десак, юқоридагига ўхшаш ҳисоблар қуйидагиларни беради:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \bar{y} = (Ax^3 + Bx^2)\, e^x\,, \\ -2 & \bar{y}' = (Ax^3 + Bx^2)\, e^x + (3Ax^2 + 2Bx)\, e^x\,, \\ 1 & \bar{y}'' = (Ax^3 + Bx^2)\, e^x + (6Ax^2 + 4Bx)\, e^x + (6Ax + 2B)\, e^x, \end{array}$$

бу ердан $(6Ax + 2B)\, e^x = 6xe^x$, яъни $A = 1$, $B = 0$ шунинг учун хусусий ечим $\bar{y} = x^3e^x$ кўринишга эга. Мос бир жинсли тенглама: $y'' - 2y' + y = 0$, унинг $r^2 - 2r + 1 = 0$ характеристик тенгламаси $r_{1,\,2} = 1$ илдизларга эга, демак, $Y = C_1e^x + C_2xe^x$ ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y = x^3e^x + C_1e^x + C_2xe^x$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, битта ўнг томон учун хусусий ечимнинг кўриниши турлича бўлиши мумкин ва шунинг учун у нимага боғлиқлигини ва қандай боғлиқлигини аниқлаш керак. Умумий ҳолни текширар эканмиз, тўртинчи тартибли тенглама билан чекланамиз, чунки у етарлича умумий бўлиб, бироқ тенглама тартиби n нинг ихтиёрийлиги билан боғлиқ бўлган узундан-узоқ ҳисоблашлардан бизни халос этади. Ўнг томон сифатида e^{kx} кўрсаткичли функциянинг m-даражали кўпҳадга кўпайтмасини оламиз. Шундай қилиб,

$$y^{\mathrm{IV}} + p_1y''' + p_2y'' + p_3y' + p_4y = P_m(x)\, e^{kx}, \qquad (5)$$

тенгламани текширамиз, бу ерда p_1, p_2, p_3, p_4 коэффициентлар ўзгармас. Хусусий ечимни $\bar{y} = Q(x)\, e^{kx}$ шаклда излаймиз, бу ерда $Q(x)$ — даражаси ва коэффициентларини танлаш лозим бўлган кўпҳад. Бу кўпҳаднинг даражаси кераклигича танланганда ечимни бундай шаклда топиш ҳар доим мумкин эканлиги кўрсатилади. $\bar{y} = Qe^{kx}$ функцияни $(Q(x)$

нинг аргументи қисқалик учун ёзилмаган) (5) тенгламага қўйиш натижасини юқорида қаралган мисоллардаги каби ёзамиз:

$$\begin{array}{l|l} p_4 & \bar{y} = Qe^{kx}, \\ p_3 & \bar{y}' = Qke^{kx} + Q'e^{kx}, \\ p_2 & \bar{y}'' = Qk^2e^{kx} + 2Q'ke^{kx} + Q''e^{kx}, \\ p_1 & \bar{y}''' = Qk^3e^{kx} + 3Q'k^2e^{kx} + 3Q''ke^{kx} + Q'''e^{kx}, \\ 1 & \bar{y}^{IV} = Qk^4e^{kx} + 4Q'k^3e^{kx} + 6Q''k^2e^{kx} + 4Q'''ke^{kx} + Q^{IV}e^{kx}. \end{array}$$

Чап томонда турган коэффициентларга кўпайтириб, қўшиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$[Q(k^4 + p_1k^3 + p_2k^2 + p_3k + p_4) +$$
$$+ Q'(4k^3 + 3p_1k^2 + 2p_2k + p_3) + Q''(6k^2 + 3p_1k + p_2) +$$
$$+ Q'''(4k + p_1) + Q^{IV}]\,e^{kx} = P_m(x)\,e^{kx}.$$

Тенгликнинг чап қисмидаги Q олдидаги коэффициент (5) тенгламанинг r ўрнига k қўйилган характеристик кўпҳади. Q' олдидаги коэффициент $f'(k)$ дан, Q'', Q''', Q^{IV} лар олдидаги коэффициентлар эса сонли коэффициентлари кераклича танлаб олинган характеристик кўпҳаднинг мос равишда кейинги ҳосилаларидан иборат. Бундан фойдаланиб ва ҳосил бўлган ифодани e^{kx} га қисқартириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$Qf(k) + \frac{1}{1!}Q'f'(k) + \frac{1}{2!}Q''f''(k) + \frac{1}{3!}Q'''f'''(k) +$$
$$+ \frac{1}{4!}Q^{IV}f^{IV}(k) = P_m(x). \tag{6}$$

(6) тенгликдан $Q(x)$ кўпҳаднинг аниқмас коэффициентларини топиш учун (6) тенгликнинг чап ва ўнг қисмларидаги кўпҳадларнинг даражалари бир хил бўлиши, яъни чап қисмнинг даражаси ўнг қисмнинг даражаси каби m га тенг бўлиши керак. Бу ердан энди Q нинг даражалари турли ҳолларда қандай бўлиши равшан. Агар k сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, $f(k) \neq 0$ ва Q кўпҳад асосан (6) тенгликнинг чап қисмида бўлади. Шунинг учун чап қисмнинг даражаси худди Q нинг даражаси билан бир хилдир (Q кўпҳаднинг ҳосилалари Q никидан паст даражага эга) ва аниқмас коэффициентларни

топиш имконига эга бўлишимиз учун $Q(x)$ кўпҳаднинг даражаси m бўлиши керак. Бинобарин, ўнг қисм $P_m(x)e^{kx}$ кўринишга эга ва $f(k) \neq 0$ бўлганда, хусусий ечимни $\overline{y} = Q_m(x)e^{kx}$ шаклда излаш керак.

Энди k сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлсин. Агар бу илдиз оддий бўлса, у ҳолда $f(k) = 0$, бироқ $f'(k) \neq 0$. Агар илдиз $\alpha \geqslant 1$ каррали бўлса, у ҳолда $f(k) = f'(k) = \ldots = f^{(\alpha-1)}(k) = 0$, бироқ $f^{(\alpha)}(k) \neq 0$. Кейинги ҳолда (6) тенгламанинг чап томони Q кўпҳадга ҳам, унинг $\alpha - 1$ тартибгача (у ҳам киради) ҳосилаларига ҳам эга эмас. Масалан, $\alpha = 3$ бўлса, (6) тенглик қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{1}{3!}Q'''f'''(k) + \frac{1}{4!}Q^{IV}f^{IV}(k) = P_m(x)$$

(тўртинчи тартибли тенглама текширилаётгани учун $\alpha \leqslant 4$). (6) тенгликнинг чап қисми $Q^{(\alpha)}$ дан (бизнинг мисолда Q''' дан) бошланади; шунинг учун Q кўпҳаднинг даражасини $Q^{(\alpha)}$ ҳосила m даражага эга бўладиган қилиб танлаш керак. Бу ҳолда Q кўпҳаднинг ўзи $m + \alpha$ даражага эга бўлади. Бундан ташқари, (6) тенглик $Q^{(\alpha)}$ нинг коэффициентларини, яъни Q кўпҳаднинг юқори ҳадлари коэффициентларини аниқлашга имкон беради. Q нинг даражаси α дан паст бўлган барча ҳадлари (6) тенгликка кирмайди, шунинг учун улар ихтиёрий бўлиши мумкин ва уларни нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин. Демак. Q кўпҳаднинг кичик ҳадини α даражали деб, бутун кўпҳаднинг ўзини эса x^{α} нинг даражаси m бўлган кўпҳадга кўпайтмаси деб ҳисоблаш мумкин.

Шундай қилиб, агар бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ўнг қисми $P_m(x)e^{kx}$ кўринишга эга бўлса ва k сон характеристик кўпҳаднинг α каррали илдизи бўлса, хусусий ечимни $\overline{y} = x^{\alpha}Q_m(x)e^{kx}$ кўринишда излаш керак.

Бу ҳол *резонанс ҳол* деб аталиб, у ҳақда 18-§ да батафсил гапирилади.

$y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$ тенгламани ечамиз.

Бу ерда ўнг қисм $P_m(x)e^{kx}$ кўринишга эга, шу билан бирга $k = 1$. Мос бир жинсли тенгламанинг $r^2 - 5r + 6 = 0$ характеристик тенгламаси $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ илдизларга эга, бинобарин, $k = 1$ илдиз характеристик тенгламанинг илдизи бўлмайди ва хусусий ечимни $\overline{y} = (Ax + B)\,e^x$ кўринишда излаш керак. Юқорида қаралган мисоллардагига ўхшаш қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} 6 & \overline{y} = (Ax + B)\,e^x\ , \\ -5 & \overline{y}' = (Ax + B)\,e^x + Ae^x\ , \\ 1 & \overline{y}'' = (Ax + B)\,e^x = 2Ae^x\ . \end{array}$$

Бу ердан $2Axe^x + (-3A + 2B)\,e^x = 2xe^x$, яъни $2A=2,\ -3A+2B=0$. Системани ечиб, $A = 1$, $B = 3/2$ ни топамиз. Хусусий ечим $\overline{y} = \left(x + \frac{3}{2}\right)e^x$. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)e^x + C_1\, e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

(6) тенгликдан аниқмас коэффициентларни $\overline{y}$ функцияни ва унинг ҳосилаларини тенгламага қўймасдан ҳам топиш учун фойдаланиш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, қаралган мисолда:

$$Q(x) = Ax + B;\ Q'(x) = A;\ Q''(x) \equiv 0,$$
$$f(r) = r^2 - 5r + 6;\ f'(r) = 2r - 5,\ f(1) = 2;\ f'(1) = -3.$$

Бу ифодаларнинг ҳаммасини (6) тенгликка қўйиб,

$$(Ax + B)\cdot 2 + \frac{1}{1}\,(A\,(-3) = 2x$$

га эга бўламиз, бу ердан коэффициентларни тенглаб, юқоридагига ўхшаш, $2A = 2$, $2B - 3A = 0$ ни ҳосил қиламиз.

Энди ушбу $y''' - 3y'' + 2y' = (x^2 + 1)\,e^{3x}$ тенгламани ечайлик.

Бу ерда $k = 3$, $m = 2$. Мос бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $r^3 - 3r^2 + 2r = 0$, бу ердан $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, бинобарин, $f(k) \neq 0$ ва $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$. (6) тенгликдан фойдаланамиз, бунинг учун қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C,\quad Q'(x) = 2Ax + B,\quad Q''(x) = 2A,\quad Q'''(x) \equiv 0,$$
$$f(r) = r^3 - 3r^2 + 2r,\ f'(r) = 3r^2 - 6r + 2,\ f''(r) = 6r - 6,$$
$$f'''(r) = 6,\ f(3) = 6,\ f'(3) = 11,\ f''(3) = 12.$$

Буларни (6) га қўйсак,

$$6\,(Ax^2 + Bx + C) + 11\,(2Ax + B) + 12\cdot\frac{1}{2!}\cdot 2A = x^2 + 1$$

ёки $6A = 1$, $6B + 22A = 0$, $6C + 11B + 12A = 1$, бу ердан $A = 1/6$, $B = -11/18$, $C = 103/108$; демак, $Q(x) = x^2/_6 - 11x/18 + 103/108$. Шундай қилиб, хусусий ечим: $\overline{y} = (18x^2 - 6x + 103)\,e^{3x}/108$, умумий ечим эса

$$y = \frac{18x^2 - 66x + 103}{108}\,e^{3x} + C_1 + C_2 e^x + C_3\, e^{2x}.$$

Ниҳоят, $y^{\mathrm{IV}} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 2e^x$ тенгламани ечайлик. Бу ерда $k = 1$, $m = 0$. Мос бир жинсли тенгламанинг характеристик тенгламаси $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$, яъни $(r - 1)^4 = 0$ кўринишда бўлади, бу ердан $r_{1,2,3,4} = 1$. Резонанс ҳол эканлиги равшан. $Q(x)$ кўпҳад x^4 ($\alpha = 4$) га кўпайтирилган нолинчи ($m = 0$) даражали кўпҳад бўлиши керак, яъни $Q(x) = Ax^4$. Юқоридагига ўхшаш топамиз:

$$Q(x) = Ax^4,\ Q'(x) = 4Ax^3,\ Q''(x) = 12Ax^2,$$

$$Q'''(x) = 24Ax,\ Q^{\mathrm{IV}} = 24A,$$

$$f(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1,\ f'(r) = 4r^3 - 12r^2 + 12r - 4,$$

$$f''(r) = 12r^2 - 24r + 12,\ f'''(r) = 24r - 24,\ f^{\mathrm{IV}}(r) \equiv 24,$$

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0,\ f^{\mathrm{IV}}(1) = 24.$$

(6) тенгликдан:

$$\frac{1}{4!}24A \cdot 24 = 2,\ A = \frac{1}{12}.$$

Шунинг учун $\overline{y} = \frac{x^4}{12}e^x$ ва

$$y = \frac{x^4}{12}e^x + C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4x^3e^x$$

ёки бошқача ёзсак,

$$y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \frac{1}{12}x^4\right)e^x.$$

Аниқмас коэффициентлар усулини қўлланишга имкон берадиган барча имкониятлар ўнг қисмнинг юқорида кўрилган кўриниши билан чегараланади. Ҳақиқатан ҳам, кўпҳадни $P_m(x)e^{kx}$ ифоданинг $k = 0$ бўлгандаги хусусий ҳоли каби, $\cos lx$ ва $\sin lx$ ларга эга бўлган ўнг қисмни e^{ilx} ва e^{-ilx}ларга эга бўлган ифодаларнинг комбинацияси каби, $e^{kx}\cos lx$ ва $e^{kx}\sin lx$ комбинацияларни эса $e^{(k+li)x}$ ва $e^{(k-li)x}$ каби қараш мумкин. Бунда комплекс кўрсаткичли даражага ўтиш мутлақо шарт эмас: хусусий ечимнинг энг охирги ифодасида Эйлер формулалари бўйича яна тригонометрик функцияларга ўтилган деб фараз қилиш мумкин.

Бундан равшанки, ўнг қисми кўпҳад шаклда бўлганда резонанс ҳол, яъни хусусий ечимда m-даражали кўпҳадни x^{α} га кўпайтириш зарур бўлган ҳол характеристик тенглама α каррали ноль илдизга эга бўлганда рўй беради; ўнг қисмда $\cos lx$ ва $\sin lx$ иштирок этганда резонанс ҳол характеристик тенгламанинг илдизлари $\pm li$ сонлар бўлганда, ниҳоят, $e^{kx}\cos lx$, $e^{kx}\sin lx$ комбинациялар учун резонанс ҳол характеристик тенглама $k \pm li$ илдизларга эга бўлганда руй беради. Хусусий ечимнинг ўнг қисмнинг кўринишига ва характеристик тенгламанинг илдизларига боғлиқ ҳолдаги турли шакллари 196-бетдаги жадвалда берилган.

3 ва 4-ҳоллардаги P ва $\overline{P}$ кўпҳадларнинг даражаларини ҳар доим бир хил деб ҳисоблаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар улар турлича бўлса, у ҳолда кўпҳадлардан биридаги етишмаётган даражалар олдидаги коэффициентларни нолга тенг деб олиш мумкин.

Барча б) ҳоллар резонанс ҳоллардир.

Тенгламанинг ўнг қисми бир нечта қўшилувчига эга бўлиши мумкин; бу ҳолда хусусий ечим ҳам 2-теоремага кўра бир неча қўшилувчидан тузилади.

Ушбу

$$y''' + 2y'' + 5y' = 4xe^{-x} - 68 \cos 2x + x$$

тенгламани ечайлик.

Бу ерда ўнг қисм учта қўшилувчидан иборат, шунинг учун хусусий ечим учта қўшилувчидан иборат бўлиши керак. Уларни айрим ҳам, биргаликда ҳам аниқлаш мумкин. Дастлаб мос бир жинсли $y''' + 2y'' + 5y' = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Унинг $r^3 + 2r^2 + 5r = 0$ характеристик тенгламаси $r_1 = 0$; $r_{2,3} = -1 \pm 2i$ илдизларга эга, демак,

$$Y = C_1 + C_2 e^{-x} \cos 2x + C_3 e^{-x} \sin 2x.$$

Характеристик тенглама -1 илдизга ва $2i$ илдизга эга эмас, шунинг учун биринчи қўшилувчи 2а) турга, иккинчиси 3а) турга қарашлидир. Учинчи қўшилувчига келсак, у 1б) турга қарашли, чунки характеристик тенглама $\alpha = 1$ каррали ноль илдизга эга. Шунинг учун хусусий ечимни қуйидаги кўринишда излаш керак:

$$\overline{y} = (Ax + B)\, e^{-x} + (C \cos 2x + D \sin 2x) + (Ex + F)x.$$

Биринчи ва учинчи қўшилувчидаги коэффициентларни олдинги мисоллардаги каби, (6) тенгликдан фойдаланиб, алоҳида излаш мумкин эди. Тригонометрик функциялар учун бу бирмунча мураккаброқдир. Бундан ташқари, ҳисоб-китобларнинг баъзи қисмларини бир неча марта бажариш керак бўлар эди. Шунинг учун $\overline{y}$ нинг ифодасини дифференциаллаймиз ва юқорида кўрилган мисоллардагига ўхшаш тенгламага қўямиз:

$$\begin{array}{r|l}
0 & \overline{y} = (Ax + B)\, e^{-x} + C \cos 2x + D \sin 2x + Ex^2 + Fx, \\
5 & \overline{y}' = Ae^{-x} - (Ax + B)\, e^{-x} - 2C \sin 2x + 2D \cos 2x + 2E + F, \\
2 & \overline{y}'' = -2A\, e^{-x} + (Ax + B)\, e^{-x} - 4C \cos 2x - 4D \sin 2x + 2E, \\
1 & \overline{y}''' = 3A\, e^{-x} - (Ax + B)\, e^{-x} + 8C \sin 2x - 8D \cos 2x.
\end{array}$$

№		Ўнг томоннинг тури	Характеристик тенглама илдизлари	Хусусий ечимнинг тури
1	а)	$P_m(x)$	O сони характеристик тенгламанинг илдизи эмас	$Q_m(x)$
	б)		O сони характеристик тенгламанинг α каррали илдизи	$x^\alpha Q_m(x)$
2	а)	$P_m(x)e^{kx}$	k сон характеристик тенгламанинг илдизи эмас	$Q_m(x)e^{kx}$
	б)	(x — ҳақиқий)	k сон характеристик тенгламанинг α каррали илдизи	$x^\alpha Q_m(x)e^{kx}$
3	а)	$P_m(x) \cos lx + \bar{P}_m(x) \sin lx$	$\pm li$ сонлар характеристик тенгламанинг илдизлари эмас	$Q_m(x) \cos lx + \bar{Q}_m(x) \sin lx$
	б)		$\pm li$ сонлар характеристик тенгламанинг α каррали илдизлари	$x^\alpha Q_m(x) \cos lx + x^\alpha \bar{Q}_m(x) \sin lx$
4	а)	$P_m(x) e^{kx} \cos lx + \bar{P}_m(x) e^{kx} \sin lx$	$k \pm li$ сонлар характеристик тенгламанинг илдизлари эмас	$Q_m(x) e^{kx} \cos lx + \bar{Q}_m(x) e^{kx} \sin lx$
	б)		$k \pm li$ сонлар характеристик тенгламанинг α каррали илдизлари	$x^\alpha Q_m(x) e^{kx} \cos lx + x^\alpha \bar{Q}_m(x) e^{kx} \sin lx$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб ҳамда айниятнинг чап ва ўнг қисмларидаги коэффициентларни таққослаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$-4A = 4, 4A - 4B = 0, \ -8C + 2D = -68,$$

$$-2C - 8D = 0, \ 10E = 1, 4E + 5F = 0,$$

бу ердан

$$A = -1, \ B = -1, \ C = 8, \ D = -2, \ E = 1/10, \ F = -2/25.$$

Шундай қилиб, хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\overline{y} = -(x+1)e^{-x} + 8\cos 2x - 2\sin 2x + \frac{x^2}{10} - \frac{2x}{25},$$

берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = -(x+1)e^{-x} + 8\cos 2x - 2\sin 2x + \frac{x^2}{10} - \frac{2x}{25} +$$

$$+ C_1 + C_2 e^{-x}\cos 2x + C_3 e^{-x}\sin 2x.$$

Аниқмас коэффициентлар усулининг татбиқ қилиниш соҳаси тор ва чеклангандир. Ўнг қисмда ҳеч бўлмаганда $\operatorname{tg} x$ ёки каср-кўрсаткичли функция турган бўлса, аниқмас коэффициентлар усулини қўлланиб бўлмайди. Шунинг учун бир жинсли бўлмаган тенгламаларни ечишнинг қўлланилиш соҳаси анча кенг бўлган яна бир усули билан танишиб чиқиш керак.

Ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули ўнг қисми қандай бўлишидан қатъи назар ҳар қандай бир жинсли бўлмаган чизиқли тенглама учун қўлланилишга эга бўлиб, мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими маълум бўлган барча ҳолларда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топишга имкон беради. Аниқмас коэффициентлар усулини баён қилганимиздагидек, бу ерда ҳам тўртинчи тартибли тенгламани қараш билан чекланамиз. Шундай қилиб,

$$y^{\mathrm{IV}} + p_1 y''' + p_2 y'' + p_3 y' + p_4 y = q \qquad (7)$$

бўлсин, бу ерда p_1, p_2, p_3, p_4, q лар x нинг ихтиёрий функциялари; ушбу

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \qquad (8)$$

ифода (7) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими бўлиб, маълум деб фараз қилинади.

Ўзгармасларни вариациялаш усулида умумий ечим (8) га ўхшаш кўринишда изланади, лекин бу ерда ихтиёрий ўзгармаслар x нинг номаълум функциялари билан алмаштирилган. Номаълум функциялар аввалгидек C_1, C_2, C_3, C_4 ҳарфлар билан белгиланади. Бошқача айтганда, ечим

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + C_4(x)y_4 \tag{9}$$

кўринишда изланади.

Ўзгармасларни вариациялаш усули биринчи тартибли чизиқли тенглама учун 4- § да қаралган ўзгармасни вариациялаш усулига ўхшайди. Номаълум функцияларни (9) ифода (7) тенгламани қаноатлантирадиган қилиб танлаш талаб этилади. Бунинг учун (9) функциянинг ҳосилаларини топиб, уларни (7) га қўямиз. Бунда тўртта номаълум функция учун фақат битта тенглама ҳосил бўлишини кўриш мумкин. Шунинг учун бу битта тенгламага яна учта (n- тартибли тенглама бўлган умумий ҳолда $n-1$ та) тенгламани ҳосил бўладиган система биргаликда бўладиган қилиб қўшиш мумкин.

Биз бу учта тенгламани тезда керакли шаклда ёзишимиз мумкин эди, бироқ бошқа йўл тутиш мақсадга мувофиқдир. Қўшимча тенгламалар кетма-кет шундай танланадики, (9) функция ва унинг ҳосилаларини (7) тенгламага қўйиш натижасида ҳосил бўладиган асосий тенглама энг содда кўринишга эга бўлсин. C_1, C_2, C_3, C_4 ўзгарувчилар олдидаги биринчи учта ҳосила C_1, C_2, C_3, C_4 ўзгармаслар олдидаги ҳосилаларга ўхшаш кўринишга эга бўлишига ҳаракат қиламиз. Бунда система фақат биринчи $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$, $C_4'(x)$ ҳосилаларга эга бўлади.

(9) функцияни дифференциаллашдан бошлаймиз, бунда қисқалик учун барча функцияларда x аргументни ёзмаймиз:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + C_4 y_4' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 + \\ + C_4' y_4.$$

Қўшимча тенгламаларнинг биринчиси сифатида бу ифоданинг иккинчи ярмини нолга тенглаймиз, яъни

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 + C_4' y_4 = 0 \tag{10}$$

деймиз. У ҳолда y' ифода C_1, C_2, C_3, C_4 функциялар ўзгармас бўлгандаги каби кўринишга эга бўлади. Сўнгра

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + C_4 y_4'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \\ + C_3' y_3' + C_4' y_4'.$$

Юқоридагига ўхшаш, иккинчи қўшимча тенглама сифатида

$$C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + C'_3 y'_3 + C'_4 y'_4 = 0 \qquad (11)$$

ни олиб, қолган қисмини ташлаб юборамиз. У ҳолда учинчи ҳосила қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$y''' = C_1 y_1''' + C_2 y_2''' + C_3 y_3''' + C_4 y_4''' +$$
$$+ C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + C'_3 y''_3 + C'_4 y''_4$$

бу ердан

$$C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + C'_3 y''_3 + C'_4 y''_4 = 0 \qquad (12)$$

деб, яна бир марта иккинчи қолган қисмини ташлаб юбориш мумкин.

Бундан ҳам соддалаштириш мумкин эмас: учта қўшимча тенглама қўшиб бўлинди. Яъни y нинг ва унинг ҳосилаларини ўрнига қўйишда уларни кўпайтириш лозим бўлган тенгламанинг коэффициентлари билан қайтадан ёзиб чиқамиз:

$$\begin{array}{c|l}
p_4 & y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4, \\
p_3 & y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + C_3 y'_3 + C_4 y'_4, \\
p_2 & y'' = C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + C_3 y''_3 + C_4 y''_4, \\
p_1 & y''' = C_1 y'''_1 + C_2 y'''_2 + C_3 y'''_3 + C_4 y'''_4, \\
1 & y^{IV} = C_1 y_1^{IV} + C_2 y_2^{IV} + C_3 y_3^{IV} + C_4 y_4^{IV} + \\
 & \qquad C'_1 y'''_1 + C'_2 y'''_2 + C'_3 y'''_3 + C'_4 y'''_4.
\end{array}$$

Биринчи устуннинг элементларининг тегишли кўпайтувчиларга кўпайтмаларини алоҳида *қўшиб қуйидагини* ҳосил қиламиз:

$$C_1 y_1^{IV} + C_1 p_1 y'''_1 + C_1 p_2 y''_1 + C_1 p_3 y'_1 + C_1 p_4 y_1 = C_1 L[y_1].$$

Бу ифода y_1 функцияни (7) тенгламанинг чап қисмига қўйиш натижасидир, y_1 мос бир жинсли тенгламанинг ечими бўлганлиги учун $L[y_1] = 0$. Мос равишда $C_2L[y_2]$, $C_3L[y_3]$ ва $C_4L[y_4]$ га тенг бўлган қолган устунларнинг йиғиндиси ҳам нолга тенг бўлади. Демак, тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$C'_1 y'''_1 + C'_2 y'''_2 + C'_3 y'''_3 + C'_4 y'''_4 = q. \qquad (13)$$

Шундай қилиб, C_1, C_2, C_3, C_4 номаълум функцияларни топиш учун (10), (11), (12), (13) дан иборат тўртта тенглама системасини ҳосил қилдик:

$$\left.\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 + C_4' y_4 &= 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3' y_3' + C_4' y_4' &= 0, \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' + C_4' y_4'' &= 0, \\ C_1' y_1''' + C_2' y_2''' + C_3' y_3''' + C_4' y_4''' &= q. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

(14) системани эсда яхши сақлаб қолиш учун қуйидагини айтиб ўтамиз: номаълумлар бўлиб, C_1', C_2', C_3', C_4' ҳосилалар, коэффициентлар бўлиб маълум фундаментал система Вронский детерминантининг сатрлари хизмат килади, барча тенгламаларда уларнинг ўнг томонлари, охирги тенгламадан ташқари (у ерда q — берилган (7) тенгламанинг ўнг қисми туради), нолга тенг.

(14) система чизиқли алгебраик тенгламаларнинг бир жинсли бўлмаган системасидир, у биргаликда, чунки бу системанинг детерминанти $D = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$. Уни ечиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$C_1' = \varphi_1(x),\ C_2' = \varphi_2(x),\ C_3' = \varphi_3(x),\ C_4' = \varphi_4(x),$$

бу ердан

$$C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx + k_1,\ C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx + k_2,$$

$$C_3 = \int \varphi_3(x)\,dx + k_3,\quad C_4 = \int \varphi_4(x)\,dx + k_4,$$

бу ерда k_1, k_2, k_3, k_4 — ихтиёрий ўзгармаслар (дифференциал тенгламаларда ихтиёрий ўзгармаслар одатда аниқмас интеграл белгисига қўшиб ёзилмайди). Ҳосил бўлган ифодаларни (9) тенгликка қўйиб, бир жинсли бўлмаган (7) тенгламанинг умумий ечимини ушбу кўринишда ҳосил қиламиз:

$$y = y_1 \int \varphi_1(x)\,dx + y_2 \int \varphi_2(x)\,dx + y_3 \int \varphi_3(x)\,dx +$$

$$+ y_4 \int \varphi_4(x)\,dx + k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4.$$

Бир жинсли бўлмаган (7) тенгламанинг умумий ечими икки группа ҳадларга бўлинишини айтиб ўтайлик: улардан биринчиси ихтиёрий ўзгармасларга эга бўлмай, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимидан, иккинчи группа ҳадлар эса мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимидан иборат. Шундай қилиб, яна 1-теореманинг натижасини ҳосил қилдик.

Келтирилган исботда p_1, p_2, p_3, p_4 коэффициентлар x нинг функциялари деб фараз қилинади. Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган тенгламани интеграллаш учун мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини билиш етарлидир. Бироқ амалда коэффициентлари ўзгармас бўлган ёки унга келтириладиган тенглама билан чекланишимизга тўғри келади, чунки фақат улар учунгина бир жинсли тенглама ечимларининг фундаментал системасини топиш усуллари маълумдир.

$y''' + y' = \operatorname{tg} x$ тенгламани ечамиз.

Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

бу ерда

$$y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x.$$

Бундай тенглама учун (14) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0, \\ &-C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0, \\ &-C_2' \cos x - C_3' \sin x = \operatorname{tg} x. \end{aligned}\right|$$

Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини $\sin x$ га, учинчи тенгламанинг иккала қисмини—$\cos x$ га кўпайтириб қўшсак, $C_2' = -\sin x$ ни ҳосил қиламиз. У ҳолда иккинчи тенгламадан $C_3' = -\sin^2 x/\cos x$ келиб чиқади. Биринчи ва учинчи тенгламаларнинг иккала қисмини қўшиб, $C_1' = \operatorname{tg} x$ ни топамиз. Интеграллаш ушбуни беради:

$$C_1 = -\ln \cos x + k_1,\ C_2 = \cos x + k_2,\ C_3 = \sin x - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + k_3.$$

Бу ердан берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = -\ln \cos x + \cos^2 x + \sin^3 x - \sin x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) +$$

$$+ k_1 + k_2 \cos x + k_3 \sin x$$

ёки бошқача,

$$y = -\ln \cos x - \sin x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \overline{k}_1 + k_2 \cos x + k_3 \sin x,$$

бу ерда $k_1 = k_1 + 1$ деб олинган.

17-§ ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ

Эйлер тенгламаси коэффициентлари ўзгарувчан бўлган чизиқли дифференциал тенглама бўлиб, уни коэффициентлари ўзгармас бўлган тенгламага келтириш мумкин. Ушбу тенглама *Эйлер тенгламаси* дейилади:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1} x y' + p_n y = q(x), \qquad (1)$$

бу ерда p_1, $p_2, \ldots, p_n$ — ўзгармас сонлар. Шундай қилиб, *Эйлер тенгламасининг коэффициентлари даражали функциялардир, шу билан бирга коэффициентнинг даражаси y билан бирга турган ҳосила тартибига тенг.*

Эйлер тенгламаси эркли ўзгарувчини $x = e^t$ (ёки $t = \ln x$) ўрнига қўйиш орқали коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли тенгламага келтирилади.

Ҳақиқатан ҳам, $x = e^t$, яъни $t = \ln x$ дейлик ($x > 0$ деб фараз қилинади; $x < 0$ учун $t = \ln |x|$ деб ҳисоблаш керак). t ни оралиқ аргумент деб ҳисоблаб ва $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}$ эканлигини назарда тутиб, y нинг x бўйича ҳосиласини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасига кўра, x бўйича яна дифференциалласак,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right), \qquad (3)$$

бу ердан

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \qquad (4)$$

Яна x бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{2}{x^3}\right) - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

ва, бинобарин,

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}. \qquad (5)$$

(2), (4) ва (5) тенгликлар қуйи ҳосилалар учун $x^n y^{(n)}$ кўпайтма y нинг t бўйича ўзгармас коэффициентли ҳосилалари орқали ифодаланишини кўрсатади. Тўлиқ математик индукция методидан фойдаланиб, бу хосса исталган мусбат n лар учун ўринли эканлигини исбот қилиш мумкин, бу ердан исталган тартибли Эйлер тенгламасини ўзгармас коэффициентли тенгламага келтириш мумкинлиги келиб чиқади.

$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ тенгламани ечамиз.

$x = e^t$ деб ва (2), (4), (5) тенгликлардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

ёки

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 2y = 0,$$

яъни коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли тенгламани ҳосил қилдик. Унинг характеристик тенгламаси $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ кўриниб турган $r_1 = 1$ илдизга эга, уни $(r-1)^2(r-2) = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг илдизлари: $r_{1,2} = 1$, $r_3 = 2$. Тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^t + C_2te^t + C_3 e^{2t}$$

ёки эски ўзгарувчиларга қайтсак,

$$y = C_1x + C_2x \ln x + C_3x^2.$$

Юқорида айтилганлар Эйлернинг

$$x^ny^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}xy' + p_ny = 0 \qquad (6)$$

бир жинсли тенгламасини эркли ўзгарувчини алмаштирмасдан, бевосита интеграллашга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам, коэффициентлари ўзгармас бўлган ўзгартирилган тенгламада каррали илдизлар йўқлигида хусусий ечим e^{rt} кўринишга, яъни Эйлернинг дастлабки тенгламасида $y=x^r$ кўринишга эга. Шунинг учун аргументни ўзгартириб ўтирмасдан, дарҳол Эйлер тенгламасининг хусусий ечимларини $y=x^r$ кўринишда излаш мумкин:

$$\frac{d^k(x^r)}{dx^k} = r(r-1)\ldots(r-k+1)x^{r-k} \qquad (k \leqslant r)$$

бўлгани учун барча $k \leqslant r$ ларда:

$$x^k\frac{d^k(x^r)}{dx^k} = r(r-1)\ldots(r-k+1)x^r.$$

Бу ифодаларни (6) тенгламага қўйиб ва x^r га қисқартириб, r ни топиш учун n- даражали алгебраик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-2}\,r(r-1) + p_{n-1}\,r + p_n = 0. \qquad (7)$$

(7) тенгламани Эйлер тенгламаси учун *характеристик* тенглама деб аташ табиийдир. У ўзгартирилган, коэффициентлари ўзгармас бўлган тенглама учун ҳам характеристик тенглама бўлади. Агар (7) тенглама n та турли r_1, $r_2, \ldots, r_n$ илдизларга эга бўлса, n та хусусий ечим топилади. Эйлер тенгламасининг умумий ечими

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \ldots + C_n x^{r_n}$$

функция бўлади. α каррали r_1 илдизга x^{r_1}, $x^{r_1} \ln x$, $x^{r_1} (\ln x)^2 \ldots x^{r_1} (\ln x)^{\alpha-1}$ кўринишдаги α та хусусий ечим мос келади, комплекс қўшма $\alpha \pm bi$ илдизлар жуфтига $x^{\alpha} \cos(b \ln x)$ ва $x^{\alpha} \sin(b \ln x)$ ечимлар жуфти мос келади.

$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$ тенгламани ечамиз. $y = x^r$ дейлик. У ҳолда $y' = rx^{r-1}$ ва $xy' = rx^r$; куйидагини топамиз:

$$y'' = r(r-1)x^{r-2} \text{ ва } x^2 y'' = r(r-1)x^r.$$

Энди $y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$, бу ердан $x^3 y''' = r(r-1)(r-2)x^r$.

Бу ифодаларни тенгламага қўйиб ва x^r га қисқартириб, ушбуга эга бўламиз:

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - r + 1 = 0 \text{ ёки } r^3 - r^2 - r + 1 = 0.$$

Бу тенгламани $(r-1)^2 (r+1) = 0$ кўринишда ёзиб, $r_{1,2} = 1$, $r_3 = -1$ ни топамиз. Бу илдизлар учта хусусий ечимни беради: $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$ (қўш илдиз!); $y_3 = x^{-1}$ ва шундай қилиб, умумий ечим ушбу кўринишда бўлади:

$$y = C_1 x + C_2 \ln x + C_3/x.$$

Эйлернинг бир жинсли бўлмаган тенгламасини ўзгармасларни вариациялаш ёрдамида интеграллаш мумкин. Ўнг қисмнинг баъзи турлари учун аниқмас коэффициентлар усулини ҳам қўлланиш мумкин, шу билан бирга буни ўзгармас коэффициентли тенгламага ўтгандан сўнг ҳам, ўтмасдан ҳам бажариш мумкин.

18-§. ФИЗИКАВИЙ МИСОЛЛАР. ГАРМОНИК ТЕБРАНИШЛАР. РЕЗОНАНС

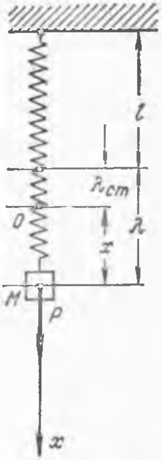
Механикавий тебранишлар

1-мисол. (Гармоник тебранишлар.) Оғирлиги P бўлган юк тинч турган ҳолатидаги узунлиги l бўлган вертикал пружинага осилган. Юк бир оз пастга тортилиб, кейин қўйиб юборилади. Пружина массасини ва ҳаво қаршилигини ҳособга олмай, юкнинг харакат қонунини топинг.

Ечилиши. Ox ўқни юк осилган нуқта орқали пастга вертикал йўналтирамиз. Координаталар боши O ни юк мувозанатда бўлган ҳолатда, яъни юкнинг оғирлиги пружинанинг реакция кучи билан мувозанатлашган нуқтада оламиз (40- расм).

λ — пружинанинг айни моментдаги узайиши, $\lambda_{ст}$ эса статик узайиш, яъни чўзилмаган пружина охиридан мувозанат ҳолатигача бўлган масофа. У ҳолда $\lambda = \lambda_{ст} + x$ ёки $\lambda - \lambda_{ст} = x$.

Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини Ньютоннинг иккинчи қонуни $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ дан топамиз, бу ерда $m = P/g$ — юк массаси, $\mathbf{a}$ — ҳаракат тезланиши, $\mathbf{F}$ — юкка қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси. Мазкур ҳолда тенг таъсир этувчи куч пружинанинг таранглик кучи ва оғирлик кучи йиғиндисидан иборат.



40- расм.

Гук қонунига кўра пружинанинг таранглик кучи унинг узайишига пропорционал, яъни $-c\lambda$ га тенг, бу ерда c — ўзгармас пропорционаллик коэффициенти, у пружинанинг *бикрлиги* дейилади.

Шунинг учун ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\lambda + P.$$

Мувозанат ҳолатида пружинанинг таранглик кучи оғирлик билан мувозанатлашгани учун $P = c\lambda_{ст}$ бўлади. Дифференциал тенгламага P нинг ифодасини қўйиб ва $\lambda - \lambda_{ст}$ ни x билан белгилаб, тенгламани $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$ кўринишга ёки c/m ни k^2 орқали белгилаб,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad (1)$$

кўринишга келтирамиз.

Бу тенглама юкнинг *эркин тебранишлари* деб аталадиган тебранишни ифодалайди. У *гармоник осцилляторнинг тенгламаси* дейилади. Бу коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама. Унинг характеристик тенгламаси $r^2 + k^2 = 0$

мавҳум $r = \pm ik$ илдизларга эга, бунга тегишли умумий ечим:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Ечимнинг физикавий маъносини аниқлаш учун янги ихтиёрий ўзгармаслар киритиб, уни бошқа шаклга келтириш қулайроқ. $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ га кўпайтириб ва бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos kt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_1^2}} \sin kt\right).$$

Агар

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A, \quad C_1/\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sin\alpha, \ C_2/\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \\ = \cos\alpha$$

десак, ечим

$$x = A \sin(kt + \alpha) \tag{2}$$

кўринишга келади.

Шундай қилиб, юк мувозанат ҳолати атрофида гармоник тебранади.

A катталик тебранишнинг *амплитудаси*, $kt + \alpha$ аргумент эса тебраниш *фазаси* дейилади. Фазанинг $t = 0$ даги қиймати, яъни α катталик тебранишнинг *бошланғич фазаси* дейилади. $k = \sqrt{c/m}$ катталик тебраниш *частотасидир*. Тебранишнинг $I = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{m/c}$ *даври* ва k частота фақат пружинанинг бикрлиги ва система массасига боғлиқ. $c = P/\lambda_{ст} = mg/\lambda_{ст}$ бўлгани сабабли, давр учун

$$T = 2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$$

формулани ҳам ҳосил қилиш мумкин.

Юкнинг ҳаракат тезлигини ечимни t бўйича дифференциаллаш орқали топамиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = Ak \cos(kt + \alpha).$$

Амплитуда ва бошланғич фазани аниқлаш учун бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Айтайлик, бошланғич $t = 0$ моментда юкнинг ҳолати $x = x_0$ ва тезлиги $v = v_0$ бўлсин. У ҳолда

$x_0 = A\sin\alpha$, $v_0 = Ak\cos\alpha$, бу ердан

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{kx_0}{v_0}.$$

Амплитуда ва бошланғич фаза формулаларидан кўринишича, улар хусусий тебранишлар частотаси ва давридан фарқли ўлароқ системанинг бошланғич ҳолатига боғлиқ. Бошланғич тезлик бўлмаганда ($v_0 = 0$) амплитуда $A = x_0$, бошланғич фаза эса $\alpha = \pi/2$ ва шундай қилиб,

$$x = x_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ёки} \quad x = x_0 \cos kt.$$

Агар сонли маълумотлар берилган бўлса, масалан, $P = 2\text{Н}$, $l = 40$ см, $\lambda_{\text{ст}} = 4$ см, шу билан бирга юк $x = 2$ см га тортилиб, бошланғич тезликсиз ($v_0 = 0$) қўйиб юборилган бўлса, у ҳолда ҳаракат қонуни (2) формулага кўра

$$x = \text{A}\sin(kt + \alpha)$$

кўринишда аниқланади, бу ердаги $k = \sqrt{cg/P}$ частота $P = c\lambda_{\text{ст}}$ муносабатдан аниқланади, бу ердан $c = 1/2$, демак, $k = \sqrt{g/2}$, $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/k^2} = 2$ ва $\alpha = \operatorname{arctg}(kx/v_0) = \pi/2$. Шундай қилиб,

$$x = 2\cos\frac{t}{2}\sqrt{g}.$$

Юкнинг тебраниш даври $T = 2\pi/k = 4\pi/\sqrt{g} \approx 0{,}4$ сек. Энг катта чўзилиш $\lambda_{\max} = \lambda_{\text{ст}} + A = 6$ см пружинанинг энг катта таранглик кучи $F_{\max} = c\lambda_{\max} = 3\text{Н}$.

2-мисол. (Сўнувчи тебранишлар.) Юкнинг олдинги масаладаги шартларда ҳаракат қонунини топинг, бу ерда ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган ҳаво қаршилигини ҳисобга олинг.

Ечилиши. Бу ерда юкка таъсир этадиган кучлар қаторига ҳавонинг қаршилик кучи $\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}$ (манфий ишора $\mathbf{R}$ куч $\mathbf{v}$ тезликка тескари йўналганлигини билдиради) қўшилади. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасининг Ox ўққа проекцияси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}$$

ёки $c/m = k^2$, $\mu/m = 2n$ десак,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \qquad (3)$$

Бу тенглама ҳам коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли тенгламадир. Унинг $r^2+2nr+k^2=0$ характеристик тенгламаси

$$r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2} \qquad (4)$$

илдизларга эга.

Ҳаракат характери бу илдизлар билан тўла аниқланади. Уч ҳол рўй бериши мумкин. Дастлаб $n^2-k^2<0$ бўлган ҳолни қараймиз. Бу тенгсизлик муҳитнинг қаршилиги унча катта бўлмаганда ўринли бўлади. Агар $k^2-n^2=k_1^2$ десак, (4) илдизлар $r_{1,2}=-n\pm ik_1$ кўринишига эга бўлиб, умумий ечим ушбу кўринишда ёзилади:

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)$$

ёки (2) га ўхшаш ўзгартириб ёзсак,

$$x=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha). \qquad (5)$$

Агар бошланғич шартлар $t=0$ да $x_0=x_0$, $v=v_0$ берилган бўлса, A ва α ни аниқлаш мумкин. Бунинг учун

$$v=\frac{dx}{dt}=Ak_1e^{-nt}\cos(k_1t+\alpha)-Ane^{-nt}\sin(k_1t+\alpha)$$

ни топамиз ва $t=0$ ни x ва v нинг ифодасига қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$x_0=A\sin\alpha,$$
$$v_0=Ak_1\cos\alpha-An\sin\alpha.$$

Иккинчи тенгламанинг иккала томонини биринчи тенгламанинг мос томонларига бўлиб, $v_0/x_0=k_1\operatorname{ctg}\alpha-n$ ни ҳосил қиламиз:

бу ердан

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{v_0+nx_0}{k_1x_0} \quad \text{ёки} \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1x_0}{v_0+nx_0}, \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{k_1x_0}{v_0+nx_0}.$$

Маълумки,

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{k_1x_0/(v_0+nx_0)}{\sqrt{1+k_1^2x_0^2/(v_0+nx_0)^2}}=\frac{k_1x_0}{\sqrt{k_1^2x_0^2+(v_0+nx_0)^2}}.$$

Шунинг учун

$$A=\frac{x_0}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{k_1^2x_0^2+(v_0+nx_0)^2}}{k_1}.$$

(5) ечим сўнувчи тебранишга эга эканлигимизни кўрсатади. Ҳақиқатан ҳам, тебраниш амплитудаси Ae^{-nt} вақтга боғлиқ ва монотон камаювчи функциядир, шу билан бирга $t \to \infty$ да $Ae^{-nt} \to 0$.

Сўнувчи тебранишлар даври ушбу формула бўйича аниқланади:

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Юк координаталар бошидан максимал четланиш олган (мувозанатлик ҳолати) вақт моментлари айирмаси ярим давр $T/2$ га тенг бўлган арифметик прогрессия ташкил этади. Сўнувчи тебранишларнинг амплитудалари махражи $e^{-n\pi/k_1}$ ёки $e^{-nT/2}$ га тенг бўлган камаювчи геометрик прогрессия ташкил этади. Бу миқдор сўниш *декременти* дейилади ва одатда D ҳарфи билан белгиланади. Декрементнинг натурал логарифми $\ln D = -nT/2$ *сўнишнинг логарифмик декременти* дейилади.

Бу ҳолда тебранишлар частотаси $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ олдинги ҳолдагига нисбатан кичик $(k_1 < k)$ бироқ, у ердагига ўхшаш, юкнинг бошланғич ҳолатига боғлиқ эмас.

Агар сонли маълумотлар берилган бўлса: тебраниш даври $T = 2$ сек, тебранишнинг сўниш декременти $D = 1/2$ шунингдек, бошланғич шартлар $x_0 = 0$ ва $v_0 = 1$ м/сек бўлса, у ҳолда юкнинг ҳаракат қонуни (5) формулага кўра ушбу кўринишда топилади:

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

бу ерда k_1 ва n қуйидаги муносабатлардан топилади:

$$T = 2\pi/k_1 = 2, \text{ бу ердан } k_1 = \pi;$$

$$D = e^{-nT/2} = e^{-n} = 1/2, \text{ бу ердан } n = \ln 2.$$

$t = 0$ да $x_0 = 0$ ва $v_0 = 1$ *м/сек* бошланғич шартлар A ва α ни аниқлашга имкон беради. Қуйидагига эгамиз:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{k_1 x_0}{v_0 + n x_0} = 0, \qquad A = \frac{v_0}{k_1} = \frac{1}{\pi},$$

ва ниҳоят:

$$x = \frac{\sin \pi t}{\pi 2^t}.$$

Агар муҳитнинг қаршилиги катта ва $n^2 - k^2 > 0$ бўлса, $n^2 - k^2 = h^2$ деб, (4) илдизларни $r_{1,2} = -n \pm h = -(n \mp h)$

кўринишда ҳосил қиламиз. $h < n$ бўлгани учун иккала илдиз ҳам манфий. Бу ҳолда тенгламанинг умумий ечими

$$x = C_1 e^{-(n+h)t} + C_2 e^{-(n-h)t} \tag{6}$$

кўринишда бўлади. Бу ердан ҳаракат нодаврий ва тебраниш характерига эга эмаслиги кўринади. $n^2 - k^2 = 0$ бўлган ҳолда ҳам ҳаракат шунга ўхшаш характерга эга бўлади, бунда умумий ечим

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t) \tag{7}$$

кўринишга эга бўлади.

Кейинги икки ҳолда $t \to \infty$ да $x \to 0$ эканлигини кўриш осон.

Агар $x(0) = x_0$ ва $x'(0) = v_0$ бошланғич шартлар берилган бўлса, $n^2 - k^2 > 0$ бўлган ҳолда $x_0 = C_1 + C_2$ ва $v_0 = -(n+h)C_1 - (n-h)C_2$ га эгамиз. Бу системани C_1 ва C_2 га нисбатан ечиб,

$$C_1 = \frac{x_0(h-n) - v_0}{2h}, \quad C_2 = \frac{x_0(h+n) + v_0}{2h}$$

ни топамиз, демак,

$$x = e^{-nt}\left[\frac{x_0(h-n) - v_0}{2h} e^{-ht} + \frac{x_0(h+n) + v_0}{2h} e^{ht}\right] =$$

$$= e^{-nt}\left[\frac{x_0 n + v_0}{h} \frac{e^{ht} - e^{-ht}}{2} + x_0 \frac{e^{ht} + e^{-ht}}{2}\right] =$$

$$= e^{-nt}\left(x_0 \operatorname{ch} ht + \frac{x_0 n + v_0}{h} \operatorname{sh} ht\right).$$

$n^2 - k^2 = 0$ бўлган ҳолда $C_1 = x_0$, $C_2 = x_0 n + v_0$ га эгамиз, ва бинобарин,

$$x = e^{-nt}[x_0 + (x_0 n + v_0)t].$$

3- мисол. (Муҳитнинг қаршилиги ҳисобга олинмайдиган мажбурий тебранишлар.) P оғирликдаги юк нагрузка бўлмагандаги узунлиги l бўлган вертикал пружинага осилган. Юкка қўзғатувчи $Q \sin pt$ даврий куч таъсир этади, бу ерда Q ва p — ўзгармаслар. Пружинанинг массасини ва муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмай, юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

Ечилиши. 1- мисолдагига ўхшаш ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q \sin pt.$$

Юқоридагига ўхшаш, $k^2 = c/m$ деб, бундан ташқари, $q = Q/m$ деб тенгламани

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = q \sin pt \tag{8}$$

кўринишда қайта ёзиб оламиз. Бу коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли тенглама, шу билан бирга (8) га мос келувчи бир жинсли тенглама (1) дан иборат. Шунинг учун $X = A\sin(kt + \alpha)$; $\bar{x}$ ни топиш қолди. Агар $p \neq k$ деб фараз қилсак, 196- бетда келтирилган жадвалга кўра (3- *a* ҳол), $\bar{x}$ хусусий ечимни $\bar{x} = M\cos pt + N\sin pt$ кўринишда излаш керак, бу ерда M ва N — топилиши керак бўлган коэффициентлар. Шундай қилиб,

$$\begin{array}{c|l} k^2 & \bar{x} = M\cos pt + N\sin pt, \\ 0 & \bar{x}' = -Mp\sin pt + Np\cos pt, \\ 1 & \bar{x}'' = -Mp^2\cos pt - Np^2\sin pt. \end{array}$$

Ҳисоблашларни бажариб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-Mp^2 + Mk^2 = 0, \qquad -Np^2 + Nk^2 = q,$$

бу ердан $M = 0$ ва $N = q/(k^2 - p^2)$. Шундай ҳосил қилинган

$$\bar{x} = \frac{q}{k^2 - p^2}\sin pt \tag{9}$$

хусусий ечим $Q\sin pt$ қўзғатувчи куч вужудга келтирадиган мажбурий тебранишлар деб аталувчи тебранишларни аниқлайди. Мажбурий тебранишлар қўзғатувчи куч эга бўлган даврга эга бўлиб, $k > p$ да у билан фаза бўйича ҳам бир хилда бўлади (яъни бир хил бошланғич фазага эга), ёки $k < p$ бўлса, яъни $N < 0$ бўлса, π га фарқ қилади.

Ҳаракат қонуни қуйидаги умумий ечим билан ифодаланади:

$$x = \frac{q}{k^2 - p^2}\sin pt + A\sin(kt + \alpha). \tag{10}$$

У ташқи қўзғатувчи куч билан аниқланадиган хусусий мажбурий тебранишлар (9) ва бутунлай ички сабаблар: пружинанинг бикрлиги ва юк массасига боғлиқ бўлган хусусий тебранишлар (2) нинг йиғиндисидан иборат.

Агар бошланғич шартлар: $x(0) = x_0$ ва $x'(0) = v_0$ берилган бўлса, у ҳолда ихтиёрий A ва α ўзгармасларни аниқлаш мумкин. Бунинг учун (10) функцияни дифференциаллаймиз:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qp}{k^2 - p^2} \cos pt + Ak \cos (kt + \alpha)$$

ва x ҳамда $\frac{dx}{dt}$ нинг ифодасига аргументнинг $t = 0$ қийматини қўямиз; натижада A ва α га нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = A \sin \alpha,$$

$$v_0 = \frac{qp}{k^2 - p^2} + Ak \cos \alpha.$$

Уни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$x_0 = A \sin \alpha,$$

$$\frac{1}{k}\left(v_0 - \frac{qp}{k^2 - p^2} \right) = A \cos \alpha;$$

бу тенгламаларнинг иккала қисмини квадратга оширамиз ва қўшамиз. У ҳолда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2}\left(v_0 - \frac{qp}{k^2 - p^2} \right)^2}.$$

α ни топиш учун биринчи тенгламанинг иккала қисмини иккинчи тенгламанинг мос қисмларига бўламиз; натижада

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0 - qp/(k^2 - p^2)}, \text{ бу ердан } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0 - qp/(k^2 - p^2)},$$

бунда $\sin \alpha = \frac{x_0}{A}$, $\cos \alpha = \frac{1}{kA}\left(v_0 - \frac{qp}{k^2 - p^2} \right)$.

Шундай қилиб, берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган изланаётган хусусий ечим

$$x = \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt + A \sin kt \cos \alpha + A \cos kt \sin \alpha$$

ёки

$$x = \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt + \frac{1}{k}\left(v_0 - \frac{qp}{k^2 - p^2} \right) \sin kt + x_0 \cos kt$$

функциядан иборат.

Хусусий мажбурий тебранишларни характерловчи (9) хусусий ечим $p \neq k$ деган шартда, яъни ташқи кучнинг частотаси хусусий тебранишлар частотаси билан бир хилда эмас деган шартда ҳосил қилинган эди. Агар $p = k$ бўлса, иш мутлақо бошқача бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бундай ҳолда (8) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = q \sin kt. \tag{11}$$

Хусусий ечимни $\overline{x} = t\,(M \cos kt + N \sin kt)$ шаклда (3-*б* ҳол) излаш керак, бу ерда M ва N — аниқланиши керак бўлган коэффициентлар. Шундай қилиб,

$$\begin{array}{c|l} k^2 & \overline{x} = Mt \cos kt + Nt \sin kt, \\ 0 & \overline{x'} = -Mkt \sin kt + Nkt \cos kt + M \cos kt + N \sin kt, \\ 1 & \overline{x''} = -Mk^2t \cos kt - Nk^2 \sin kt - 2Mk \sin kt + 2Nk \cos kt, \end{array}$$

бу ердан $-2Mk = q$, $2Nk = 0$ ни топамиз, ва бинобарин, хусусий ечим ушбу кўринишда бўлади:

$$\overline{x} = -\frac{q}{2k} t \cos kt. \tag{12}$$

Бу ҳолда умумий ечим:

$$x = -\frac{q}{2k} t \cos kt + A \sin (kt + \alpha).$$

$\frac{dx}{dt}$ ни топамиз ва x ҳамда $\frac{dx}{dt}$ нинг ифодасига $t = 0$ қийматни қўямиз:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{q}{2k} \cos kt + \frac{q}{2} t \sin kt + Ak \cos (kt + \alpha);$$

$$x_0 = A \sin \alpha;$$

$$v_0 = -\frac{q}{2k} + Ak \cos \alpha \quad \text{ёки} \quad \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right) = A \cos \alpha.$$

Кейинги икки тенгликдан:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0 + q/2k},$$

бу ердан

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{x_0 k}{v_0 + q/2k}; \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{kA}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right).$$

Умумий ечимни қуйидагича қайта ёзиб оламиз:

$$x = -\frac{q}{2k} t \cos kt + A \sin kt \cos \alpha + A \cos kt \sin \alpha,$$

у ҳолда бошланғич шартларни қаноатлантирувчи изланаётган хусусий ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = -\frac{q}{2k} t \cos kt + \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right) \sin kt + x_0 \cos kt.$$

(12) тенглик мажбурий тебранишлар амплитудаси $gt/(2k)$ бу ҳолда, ҳатто q унча катта бўлмаганда ҳам, чексиз катта бўлиб қолиши мумкин. Бошқача айтганда, қўзғатувчи кучлар кичик бўлганда етарлича катта амплитудаларни ҳосил қилиш мумкин. Бу ҳодиса *резонанс* дейилади. Шундай қилиб, қўзғатувчи кучнинг частотаси хусусий тебранишлар частотаси билан бир хил бўлиб қолганда резонанс рўй беради.

Шундай бўлса-да, аслида бу частоталарнинг аниқ бир хилда бўлиши зарурий эмас. Мажбурий тебраниш учун чиқарилган (9) ифода частоталар бир-бирига яқин бўлганда $q/(k^2 - p^2)$ амплитуда тайин k ва p частоталарда чегараланган бўлишига қарамай жуда катта бўлиши мумкин.

Амплитудаси катта бўлган тебранишларни вужудга келтириш имкониятидан кўпинча турли кучайтиргичларда, масалан, радиотехникада фойдаланилади. Бошқа томондан, кўпчилик ҳолларда катта амплитудаларнинг пайдо бўлиши зарарлидир, чунки конструкцияларнинг (айтайлик, кўприклар ёки томларнинг) бузилишига олиб келиши мумкин.

4- мисол. (Муҳитнинг қаршилиги ҳисобга олинадиган мажбурий тебранишлар.) Олдинги масала шартидаги юкнинг ҳаракат қонунини муҳитнинг ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган қаршилигини ҳисобга олган ҳолда топинг.

Ечилиши. Юқоридагига ўхшаш

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + Q \sin pt$$

ёки

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = q \sin pt. \qquad (13)$$

(13) га мос бир жинсли тенглама илдизлари (4) характеристик тенгламани илдизлари бўлган (3) тенгламадан иборат бўлади. Муҳитнинг қаршилиги унча катта эмас, яъни $n^2 - k^2 < 0$ деб фараз қиламиз Бунда бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (5) кўринишда бўлади:

$$X = Ae^{-nt} \sin (k_1 t + \alpha),$$

бу ерда $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Бу ечим сўнувчи бўлган эркин тебранишларни аниқлайди .Мажбурий тебранишларни топиш учун хусусий ечимни $\bar{x} = M\cos pt + N\sin pt$ кўринишда излаймиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\begin{array}{r|l} k^2 & \bar{x} = M\cos pt + N\sin pt, \\ 2n & \bar{x}' = -Mp\sin pt + Np\cos pt, \\ 1 & \bar{x}'' = -Mp^2\cos pt - Np^2\sin pt. \end{array}$$

Коэффициентларни таққослаб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} M(k^2 - p^2) + 2npN &= 0, \\ -2npM + (k^2 - p^2)N &= q. \end{aligned}\right\}$$

Маълумки,

$$\begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 2np \\ -2pn & k^2 - p^2 \end{vmatrix} = (k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2np \\ q & k^2 - p^2 \end{vmatrix} = -2npq, \quad \begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 0 \\ -2np & q \end{vmatrix} = q(k^2 - p^2).$$

Демак,

$$M = -\frac{2npq}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \quad N = \frac{q(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}.$$

Хусусий ечим қуйидагича ёзилади:

$$\bar{x} = \frac{q}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}\left[-2np\cos pt + (k^2 - p^2)\sin pt\right].$$

Бу ифодани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\bar{x} = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\left[-\frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\cos pt + \right.$$

$$\left. + \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin pt\right].$$

Қуйидаги белгиларни киритамиз:

$$\frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = B,$$

$$\frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \sin\delta, \quad \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \cos\delta. \qquad (14)$$

Энди x ни

$$\bar{x} = B\sin(pt - \delta) \qquad (15)$$

кўринишда ёзамиз.

Ушбу

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{2np}{k^2 - p^2} \tag{16}$$

ифода *фаза силжиши* деган ном билан юритилади. Умумий ечим, олдинги масаладагига ўхшаш [(5) формулага қаранг], эркин тебранишлар ва (15) мажбурий тебранишлар йиғиндисидан иборат бўлади:

$$x = Ae^{-kt} \sin(k_1 t + \alpha) + B \sin(pt - \delta). \tag{17}$$

Биринчи қўшилувчи, юқорида айтганимиздек, сўнувчи тебранишларни аниқлаб, катта k ларда тезда сезилмайдиган бўлиб қолади. (15) мажбурий тебранишларга келадиган бўлсак, уларнинг (14) амплитудалари вақтга боғлиқ эмас ва $q = Q/m$ бўлгани учун даврий қўзғатувчи кучнинг амплитудаси Q га пропорционал. У q дан

$$A(p) = \frac{1}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \tag{18}$$

кўпайтувчи билан фарқ қилади, бу кўпайтувчи мажбурий тебраниш амплитудасининг қўзғатувчи куч частотасига боғланишини характерлайди.

Бу амплитуданинг максимумини аниқлаймиз. Бунинг учун (18) функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$A'(p) = \frac{(k^2 - p^2)\,2p - 4n^2p}{[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2]^{3/2}}.$$

$A'(p) = 0$ деб, $(k^2 - p^2) - 2n^2 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз ($p=0$ мумкин бўлмаган ҳол сифатида ташлаб юборилади), унинг илдизи ташқи кучларнинг частотасини беради: $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, бунда, экстремумнинг етарли шартларини текшириш кўрсатишича, мажбурий тебранишлар амплитудаси максимал бўлади. Амплитуданинг максимал қиймати ушбуга тенг:

$$B = \frac{q}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{19}$$

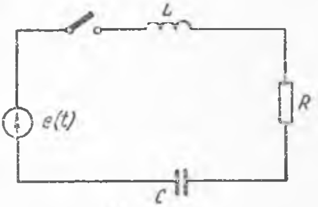
(19) формула n қанчалик кичик бўлса, тебранишлар амплитудаси шунчалик катта бўлишини кўрсатади. Кичик n ларда p частота хусусий тебранишлар частотаси k га яқин бўлади.

(15) ечим

$$(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2 \neq 0$$

бўлганда ҳар доим мавжуддир. $(k^2-p^2)^2+4n^2p^2=0$ бўлган ҳолда $p=k$ ва $n=0$, натижада (13) тенглама (11) тенгламага айланади. Бу ерда яна резонанс ҳодисаси рўй беради, унда, юқорида кўрсатганимиздек, мажбурий тебранишлар (12) кўринишга эга бўлади.

Электр занжиридаги тебранишлар



41- расм.

1-мисол. Электр юритувчи кучи $e(t)$ га тенг бўлган манбага кетма-кет уланган L индуктивлик ғалтаги, R омик қаршилик ва C сиғимдан иборат контур уланган. Агар бошланғич моментда контурдаги ток ва конденсатор заряди нолга тенг бўлса, занжирдаги i токни t вақтнинг функцияси каби топинг (41- расм).

Ечилиши. Кирхгоф қонунига кўра занжирдаги электр юритувчи куч индуктивликдаги, қаршиликдаги ва сиғимдаги кучланишлар пасайиши йиғиндисига тенг:

$$e(t)=u_L+u_R+u_C,$$

улар i ток билан қуйидаги муносабатлар* орқали боғланган:

$$u_L=L\frac{di}{dt},\quad u_R=Ri,\quad u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Шундай қилиб қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$e(t)=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Бу интегро-дифференциал тенгламадир, яъни тенгламаларнинг энг мураккаб турларидан бирига мансубдир, бироқ мазкур ҳолда дифференциаллаш орқали ундан оддий диф-

---

* Охирги тенглик ток ва конденсатор заряди орасидаги муносабатдан топилади: $i=\frac{dq}{dt}$, бу ердан $q=\int_0^t i(\tau)d\tau+q_0$. Сўнгра $u_C=q/C$ бўлгани учун $u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau+q_0/C$. Берилган масалада шартга кўра $q_0=0$.

ференциал тенглама ўтиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, t бўйича дифференциаллаб, коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}. \qquad (20)$$

Икки ҳолни қараймиз.

1- ҳол. $e(t)=E=\mathrm{const}$. Бу ҳолда $\frac{de}{dt}=0$ ва (20) тенглама бир жинсли

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0 \qquad (21)$$

тенгламага айланади. Бу тенглама эркин механикавий тебранишлар (муҳит қаршилиги ҳисобга олингандаги) тенгламасига ўхшашдир. Унинг $r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{LC}=0$ характеристик тенгламаси

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}$$

илдизларга эга бўлади. Агар $R^2C-4L\geqslant 0$ бўлса, характеристик тенгламанинг иккала илдизи ҳақиқий ва умумий ечим нодаврий функция бўлади. Бунга мос равишда ток ҳам нодаврий бўлади. $R^2C-4L=0$ бўлгандаги каби, занжирда ҳеч қандай электр тебранишлари вужудга келмайди. Агар $R^2C-4L<0$ бўлса,

$$i=e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1t+C_2\sin\omega_1t),$$

(бу ерда $\delta=R/2L$, $\omega_1^2=1/(LC)-R^2/(4L^2)$ деб олинган) умумий ечим электр тебранишларини ифодалайди.

$L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=E$ эканлигини кўриш осон, бу ердан $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=$ $=\frac{E}{L}$ ва шундай қилиб, бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади:

$$i|_{t=0}=0,\quad \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{E}{L}.$$

i ни t бўйича дифференциаллаб, топамиз:

$$\frac{di}{dt}=e^{-\delta t}[-\delta(C_1\cos\omega_1t+C_2\sin\omega_1t)+$$

$$+\omega_1(-C_1\sin\omega_1 t+C_2\cos\omega_1 t)].$$

$t=0$ ни i ва $\frac{di}{dt}$ нинг ифодаларига қўйиб,

$$0=C_1,$$
$$\frac{E}{L}=-\delta C_1+\omega_1 C_2$$

ни топамиз, бу ердан $C_1=0$ ва $C_2=E/(L\omega_1)$, натижада ечим ушбу кўринишда бўлади:

$$i=\frac{E}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t.$$

2- ҳол. $e(t)=E\sin\omega t$. Бу ҳолда $\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t$. Қуйидаги чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама ҳосил бўлади:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=E\omega\cos\omega t. \tag{22}$$

Бу бир жинсли бўлмаган тенгламага мос бир жинсли тенглама юқорида кўрилган тенгламадан (1- ҳол) иборат бўлади, шунинг учун бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топиш қолади. Уни

$$\bar{i}=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

шаклда излаш керак. Аниқмас коэффициентларни топиш учун қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{array}{c|l} \frac{1}{C} & \bar{i}=A\cos\omega t+B\sin\omega t, \\ R & \bar{i}'=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t, \\ L & \bar{i}''=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t \end{array}$$

ва A,B га нисбатан алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)A+\omega RB=E\omega,$$
$$-\omega RA+\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)B=0.$$

Бу системани ечиб,

$$A=\frac{E\omega(1/C-L\omega^2)}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2R^2},\quad B=\frac{E\omega^2R}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2R^2}$$

ни топамиз, Коэффициентларнинг бу қийматларида хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\overline{i}=\frac{E\omega}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2R^2}\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+\omega R\sin\omega t\right].$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисидан иборат, яъни

$$i=I+\overline{i}=e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+$$
$$+\frac{E}{[1/(C\omega)-L\omega]^2+R^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t+R\sin\omega t\right].$$

Белгилашлар киритамиз: $L\omega-\frac{1}{C\omega}=X$; $\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}=$ $=\sqrt{X^2+R^2}=Z$; у ҳолда

$$i=e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)-\frac{E}{Z^2}(X\cos\omega t-R\sin\omega t).$$

C_1 ва C_2 ларни бошланғич шартлардан топамиз: $i\big|_{t=0}=0$, $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=0$, (кейинги шарт

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau=E\sin\omega t$$

тенгламадан $t=0$ да ҳосил бўлади).

Шу мақсадда ҳосилани ёзиб оламиз:

$$\frac{di}{dt}=-\delta e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+$$
$$+e^{-\delta t}(-C_1\omega_1\sin\omega_1 t+C_2\omega_1\cos\omega_1 t)+$$
$$+\frac{E}{Z^2}(X\omega\sin\omega t+R\omega\cos\omega t)$$

ва $t=0$ қийматни i ва $\frac{di}{dt}$ нинг ифодаларига қўямиз:

$$0=C_1-\frac{EX}{Z^2},\text{ бу ердан } C_1=\frac{EX}{Z^2};$$

$$0=-\delta C_1+\omega_1 C_2+\frac{ER\omega}{Z^2};$$

бу ердан

$$C_2=\frac{1}{\omega_1}\left(\delta C_1-\frac{ER\omega}{Z^2}\right)=-\frac{E}{Z^2\omega_1}(R\omega-X\delta).$$

Қавсда турган ифодани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$R\omega - X\delta = R\omega - \frac{R}{2L}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\omega - \frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} =$$

$$= \frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} = \delta\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) = \delta X',$$

бу ерда $L\omega + 1/(C\omega) = X'$ деб белгиланган.

Шундай қилиб,

$$i = \frac{E}{Z^2\omega} e^{-\delta t}(X\omega_1 \cos\omega_1 t - X'\delta \sin\omega_1 t) -$$

$$- \frac{E}{Z^2}(X\cos\omega t - R\sin\omega t).$$

Белгилаш киритамиз: $X\omega_1/\sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \sin\gamma_1$, $X'\delta/\sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \cos\gamma_1$ ёки

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = \frac{Z^2}{LC} \qquad (23)$$

бўлгани учун

$$X\sqrt{LC}\,\omega_1/Z = \sin\gamma_1, \quad X'\sqrt{LC}\,\delta/Z = \cos\gamma_1.$$

(23) муносабат қуйидагича ҳосил бўлади. Қуйидагига эгамиз:

$$L\omega = X + \frac{1}{C\omega}, \quad L\omega = X' - \frac{1}{C\omega},$$

бу ердан

$$X' = X + \frac{2}{C\omega} \quad \text{ва} \quad X'^2 = X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right).$$

Демак,

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = X^2\left(\frac{1}{LC} - \delta^2\right) + \left[X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2 =$$

$$= \frac{X^2}{LC} + \frac{4}{C\omega}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C\omega}\right)\delta^2 =$$

$$= \frac{X^2}{LC} + \frac{4LR^2}{C\cdot 4L^2} = \frac{1}{LC}(X^2 + R^2) = \frac{Z^2}{LC}.$$

Худди юқоридагига ўхшаш белгилаймиз: $X/\sqrt{X^2+R^2} = \sin\gamma$, $R/\sqrt{X^2+R^2} = \cos\gamma$ ёки $X/Z = \sin\gamma$, $R/Z = \cos\gamma$. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$i = -\frac{Ex^{-\delta t}}{Z\sqrt{LC}\,\omega_1}\sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \frac{E}{Z}\sin(\omega t - \gamma),$$

бу ерда $\operatorname{tg}\gamma_1 = (X\omega)/(X'\delta)$, $\operatorname{tg}\gamma = X/R$.

ни топамиз, Коэффициентларнинг бу қийматларида хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\bar{i} = \frac{E\omega}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2R^2}\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+\omega R\sin\omega t\right].$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисидан иборат, яъни

$$i = I + \bar{i} = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) +$$
$$+\frac{E}{[1/(C\omega)-L\omega]^2+R^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right].$$

Белгилашлар киритамиз: $L\omega - \frac{1}{C\omega} = X$; $\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2} =$ $= \sqrt{X^2+R^2} = Z$; у ҳолда

$$i = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) - \frac{E}{Z^2}(X\cos\omega t - R\sin\omega t).$$

C_1 ва C_2 ларни бошланғич шартлардан топамиз: $i\big|_{t=0} = 0$, $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = 0$, (кейинги шарт

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E\sin\omega t$$

тенгламадан $t = 0$ да ҳосил бўлади).

Шу мақсадда ҳосилани ёзиб оламиз:

$$\frac{di}{dt} = -\,\delta e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) +$$
$$+ e^{-\delta t}(-C_1\omega_1\sin\omega_1 t + C_2\omega_1\cos\omega_1 t) +$$
$$+\frac{E}{Z^2}(X\omega\sin\omega t + R\omega\cos\omega t)$$

ва $t = 0$ қийматни i ва $\frac{di}{dt}$ нинг ифодаларига қўямиз:

$$0 = C_1 - \frac{EX}{Z^2}, \text{ бу ердан } C_1 = \frac{EX}{Z^2};$$

$$0 = -\,\delta C_1 + \omega_1 C_2 + \frac{ER\omega}{Z^2};$$

бу ердан

$$C_2 = \frac{1}{\omega_1}\left(\delta C_1 - \frac{ER\omega}{Z^2}\right) = -\,\frac{E}{Z^2\omega_1}(R\omega - X\delta).$$

Қавсда турган ифодани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$R\omega - X\delta = R\omega - \frac{R}{2L}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\omega - \frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} =$$

$$= \frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} = \delta\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) = \delta X',$$

бу ерда $L\omega + 1/(C\omega) = X'$ деб белгиланган.

Шундай қилиб,

$$i = \frac{E}{Z^2\omega} e^{-\delta t}(X\omega_1 \cos\omega_1 t - X'\delta \sin\omega_1 t) -$$

$$- \frac{E}{Z^2}(X\cos\omega t - R\sin\omega t).$$

Белгилаш киритамиз: $X\omega_1/\sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \sin\gamma_1$, $X'\delta/\sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \cos\gamma_1$ ёки

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = \frac{Z^2}{LC} \qquad (23)$$

бўлгани учун

$$X\sqrt{LC}\,\omega_1/Z = \sin\gamma_1, \quad X'\sqrt{LC}\,\delta/Z = \cos\gamma_1.$$

(23) муносабат қуйидагича ҳосил бўлади. Қуйидагига эгамиз:

$$L\omega = X + \frac{1}{C\omega}, \quad L\omega = X' - \frac{1}{C\omega},$$

бу ердан

$$X' = X + \frac{2}{C\omega} \quad \text{ва} \quad X'^2 = X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right).$$

Демак,

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = X^2\left(\frac{1}{LC} - \delta^2\right) + \left[X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2 =$$

$$= \frac{X^2}{LC} + \frac{4}{C\omega}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C\omega}\right)\delta^2 =$$

$$= \frac{X^2}{LC} + \frac{4LR^2}{C\cdot 4L^2} = \frac{1}{LC}(X^2 + R^2) = \frac{Z^2}{LC}.$$

Худди юқоридагига ўхшаш белгилаймиз: $X/\sqrt{X^2 + R^2} = \sin\gamma$, $R/\sqrt{X^2 + R^2} = \cos\gamma$ ёки $X/Z = \sin\gamma$, $R/Z = \cos\gamma$. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$i = -\frac{Ex^{-\delta t}}{Z\sqrt{LC}\,\omega_1}\sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \frac{E}{Z}\sin(\omega t - \gamma),$$

бу ерда $\operatorname{tg}\gamma_1 = (X\omega)/(X'\delta)$, $\operatorname{tg}\gamma = X/R$.

$\omega = \omega_1$ бўлган ҳолда хусусий ечимни

$$\overline{i} = t\,(A\cos\omega\,t + B\sin\omega\,t)$$

кўринишда излаш кераклигини эслатиб ўтайлик.

t кўпайтувчининг борлиги тебраниш амплитудаси чексиз ўсишини кўрсатади; $\omega = \omega_1$ бўлган ҳол резонансни билдиради.

2- мисол. 1- мисолдаги занжирдан R қаршилик йўқлиги билан фарқ қилувчи ва $E\cos(\omega t + \psi)$ (бу ерда $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$) э. ю. к. бўлган LC - занжирни қарайлик.

Бу ҳолда дифференциал тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}\,i = -E\omega\sin(\omega t + \psi),$$

бошланғич шартлар: $i\Big|_{t=0} = 0,\ \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{E}{L}\cos\psi$ (кейинги шарт $L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E\cos(\omega t + \psi)$ тенгламадан $t = 0$ да ҳосил бўлади).

Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими:

$$I = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t, \qquad \text{бу ерда} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Хусусий ечимни топамиз:

$$\begin{array}{c|l} \frac{1}{C} & \overline{i} = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ 0 & \frac{d\overline{i}}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t, \\ L & \frac{d^2\overline{i}}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t, \end{array}$$

$$A\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\cos\omega t + B\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\sin\omega t =$$

$$= -E\omega\sin\psi\cos\omega t - E\omega\cos\psi\sin\omega t.$$

Демак,

$$AL\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = -E\omega\sin\psi, \quad \text{бу ердан} \quad A = -\frac{E\omega\sin\psi}{L(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

$$BL\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) = -E\omega\cos\psi, \quad \text{бу ердан} \quad B = -\frac{E\omega\cos\psi}{L(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

шунинг учун

$$\bar{i} = \frac{E\omega}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\,(\sin\psi\cos\omega t + \cos\psi\sin\omega t)$$

ёки

$$\bar{i} = \frac{E\omega}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\,\sin(\omega t + \psi).$$

Шундай қилиб, умумий ечим ушбу кўринишда ҳосил бўлади:

$$i = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{E\omega}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\,\sin(\omega t + \psi).$$

Бошланғич шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимни топиш учун

$$\frac{di}{dt} = -C_1\omega_0\sin\omega_0 t + C_2\omega_0\cos\omega_0 t + \frac{E\omega^2}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\cos(\omega t + \psi)$$

ҳосилани ёзиб оламиз ва i ҳамда $\frac{di}{dt}$ нинг ифодаларига уларнинг $t = 0$ даги қийматларини қўямиз:

$$0 = C_1 + \frac{E\omega\sin\psi}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)},\quad \text{бу ердан}\quad C_1 = -\frac{E\omega\sin\psi}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)};$$

$$\frac{E}{L}\cos\psi = C_2\omega_0 + \frac{E\omega^2\cos\psi}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)},\quad \text{бу ердан}\quad C_2 = -\frac{\omega_0 E\cos\psi}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

ва демак,

$$i = -\frac{E}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\,[\omega\sin\psi\cos\omega t + \omega_0\cos\psi\sin\omega t - \omega\sin(\omega t + \psi)]$$

ёки

$$i = \frac{E}{L\,(\omega^2 - \omega_0^2)}\,[\omega\sin(\omega t + \psi) - \omega\sin\psi\cos\omega t - \omega_0\cos\psi\sin\omega t].$$

Ихтиёрий ўзгармаслар бошланғич шартлардан олдинги ҳолдаги каби аниқланади.

Агар $\omega = 1/(LC) = \omega_0$ бўлса, хусусий ечимни

$$\bar{i} = t\,(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

кўринишда излаш керак, у ҳолда

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = t\,(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} = t\,(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t +$$

$$+ (-2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t).$$

$L\omega^2 - \frac{1}{C} = 0$ бўлгани учун тенгламага $\bar{i}$ ва $\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}$ нинг ифодасини қўйиб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз.

$$L(-2A\omega\sin\omega t + 2B\omega\cos\omega t) = E\omega\cos\omega t,$$

бу ердан $A = 0$, $B = E/(2L)$ эканлиги келиб чиқади ва шунинг учун

$$\bar{i} = \frac{E}{2L} t\sin\omega t.$$

Бу ҳолда ($R = 0$) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$i = I + \bar{i} = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{E}{2L} t\sin\omega t.$$

C_1 ва C_2 ларни $i|_{t=0} = 0$ ва $\frac{di}{dt}|_{t=0} = 0$ бошланғич шартлардан топамиз. Бунинг учун

$$\frac{di}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{E\omega t}{2L}\cos\omega t + \frac{E}{2L}\sin\omega t$$

ни ёзиб оламиз ва $t = 0$ қийматни i ҳамда $\frac{di}{dt}$ нинг ифодасига қўямиз, натижада $C_1 = C_2 = 0$ ни, яъни $i = \bar{i}$ ни ҳосил қиламиз. Ниҳоят қуйидагига эга бўламиз (резонанс ҳол):

$$i = \frac{E}{2L} t\sin\omega t, \text{ бу ерда } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

3- мисол. Э. ю. к. $E\sin(\omega t + \psi)$ га тенг бўлган LR-занжирни қараймиз.

Бу ҳолда биринчи тартибли

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\sin(\omega t + \psi)$$

тенглама ва $i|_{t=0} = 0$ бошланғич шарт ҳосил бўлади. Бу коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли тенглама бўлганлиги учун уни юқори тартибли чизиқли тенгламалар ечиладиган усуллар билан ечиш мумкин.

$Lr + R = 0$ характеристик тенгламадан $r = -R/L$ ни аниқлаймиз ва мос бир жинсли тенгламанинг ечими $I = C_1 e^{-Rt/L}$ ни ҳосил қиламиз. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{array}{r|l} R & i = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ L & \dfrac{di}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t. \end{array}$$

$$(RA + L\omega B)\cos\omega t + (-L\omega A + RB)\sin\omega t =$$
$$= E\sin\psi\cos\omega t + E\cos\psi\sin\omega t.$$

$$\begin{array}{r|c|l} RA + L\omega B = E\sin\psi & R & L\omega \\ -L\omega A + RB = E\cos\psi & -L\omega & R; \end{array}$$

$$(R^2+L^2\omega^2)A = E(R\sin\psi - L\omega\cos\psi),\quad A = \frac{E\,(R\sin\psi - L\omega\cos\psi)}{Z^2},$$

$$(R^2+L^2\omega^2)B = E(L\omega\sin\psi + R\cos\psi),\quad B = \frac{E\,(L\omega\sin\psi + R\cos\omega)}{Z^2},$$

бу ерда $Z^2 = R^2 + L^2\omega^2$;

$$\bar{i} = \frac{E}{Z^2}\left[(R\sin\psi - L\omega\cos\psi)\cos\omega t + (L\omega\sin\psi + R\cos\psi)\sin\omega t\right] =$$
$$= \frac{E}{Z^2}\left[L\omega(\sin\omega t\sin\psi - \cos\omega t\cos\psi) + R(\sin\omega t\cos\psi +\right.$$
$$\left. + \cos\omega t\sin\psi)\right] = \frac{E}{Z^2}\left[-L\omega\cos(\omega t + \psi) + R\sin(\omega t + \psi)\right];$$

Агар $R/Z = \cos\gamma$, $L\omega/Z = \sin\gamma$ десак,

$$\bar{i} = \frac{E}{Z}\sin(\omega t + \psi - \gamma).$$

Шундай қилиб,

$$i = C_1 e^{-Rt/L} + \frac{E}{Z}\sin(\omega t + \psi - \gamma).$$

C_1 ни аниқлаш учун $i|_{t=0} = 0$ бошланғич шартдан фойдаланамиз:

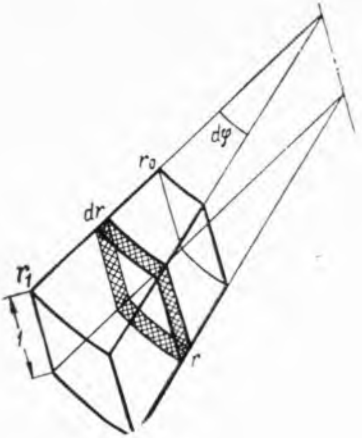
$$0 = C_1 + \frac{E}{Z}\sin(\psi - \gamma),\ \text{бу ердан}\ C_1 = \frac{E}{Z}\sin(\gamma - \psi).$$

Узил-кесил

$$i = \frac{E}{Z}\left[\sin(\gamma - \psi)\,e^{-Rt/L} + \sin(\omega t + \psi - \gamma)\right]$$

га эгамиз, бу ерда $\operatorname{tg}\gamma = L\omega / R$.

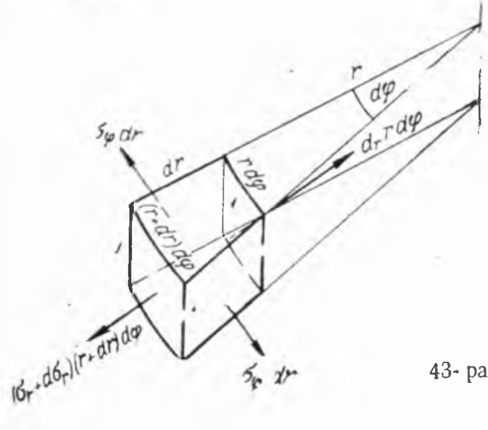
Юқоридаги ҳамма масалалар коэффициентлари ўзгармас бўлган дифференциал тенгламаларга олиб келди. Қуйидаги физикавий масала бизни бошқа турдаги тенгламага олиб келади.



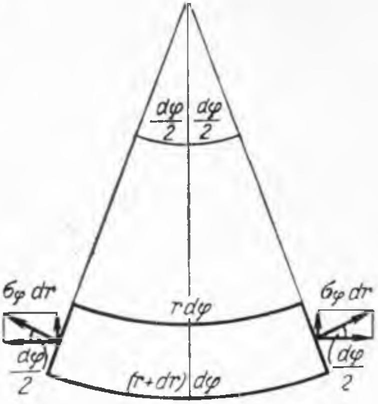
42- расм.

Мисол. (Қалин деворли трубадаги зўриқишлар.) Ички радиуси r_0 ва ташқи радиуси r_1 бўлган қалин деворли трубанинг ички ёки ташқи ўзгармас p нагрузка таъсирида зўриққан ва эгриланган ҳолатини текширамиз.

Трубани чексиз узун деб фараз қиламиз ва 42- расмда кўрсатилганидек қутб координаталарни киритамиз. Трубанинг сирти $rdrd\varphi$ ва баландлиги 1 бўлган элементига радиал ва уринма йўналишларида таъсир этадиган кучлар симметрикдир. Шунинг учун маркази труба ўқида бўлган концентрик айланалар бузилмайди. Радиал зўриқишни σ_r орқали, ҳалқа бўйича зўриқишни σ_φ орқали белгилаймиз. Ички сиртда радиал таъсир этувчи куч $\sigma_r r d\varphi$ га, ташқи сиртдагиси эса $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\,d\varphi$ га тенг. Радиал кесимлар сиртида ҳалқа бўйича таъсир этувчи кучлар $\sigma_\varphi d\varphi$ га тенг (43- расм). $\sigma_\varphi dr$ уринма куч радиал ташкил этувчи $\sigma_\varphi dr \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$ га ва унга нормал бўлган $\sigma_\varphi dr \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$ ком-



43- расм.



44- расм.

понентага ажралишини кўрамиз. (44- расм). $d\varphi$ нинг кичиклигини эътиборга олиб, уларнинг биринчисини $\sigma_\varphi dr\,\frac{d\varphi}{2}$ га, иккинчисини $\sigma_\varphi dr$ га тенг деб олиш мумкин. Қарама-қарши кесимларга қўйилган нормал компоненталар ўзаро мувозанатлашади. Агар учинчи тартибли чексиз кичик катталикларни эътиборга олмасак, радиал йўналишдаги мувозанатлик шарти

$$(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)\,d\varphi-\sigma_r\,rd\varphi-2\sigma_\varphi\frac{dr\,d\varphi}{2}=0$$

кўринишга эга бўлади.

Қавсларни очиб ва $d\varphi\neq0$ га қисқартириб, ҳосил қилинган тенгламани

$$\sigma_r dr+rd\sigma_r-\sigma_\varphi\,dr=0$$

ёки

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr}=\sigma_\varphi \tag{24}$$

кўринишга келтирамиз. σ_r ва σ_φ зўриқишларни мос ε_r ва ε_φ чўзилишлар орқали ифодалаш мумкин. Агар μ кўндаланг чўзилиш коэффициентини билдирса, у ҳолда Гук қонунидан:

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}(\sigma_r-\mu\sigma_\varphi).$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{E}(\sigma_\varphi-\mu\sigma_r),$$

бу ерда E—эластиклик модули. Бу тенгламаларни зўриқишларга нисбатан ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_\varphi+\varepsilon_r),\\ \sigma_\varphi&=\frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_r+\varepsilon_\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Радиал силжиш u учун

$$\varepsilon_r = \frac{d\varphi}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

шартлар бажарилади.

Демак,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Бу (26) ифодаларни зўриқишлар учун (24) тенгламага қўйиб ва умумий $E/(1-\mu^2)$ кўпайтувчига қисқартириб, ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{d}{dr}\left(\mu u + r\frac{du}{dr}\right) = \mu\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}.$$

ёки узил-кесил:

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} - u = 0.$$

Эйлер тенгламасини ҳосил қилдик. У ерда $r = e^t$ деб ва олдинги параграфдагига (202- бетга қаранг) ўхшаш

$$r\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt}, \quad r^2\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}$$

алмаштириш қилгач, умумий ечими

$$u = C_1e^t + C_2e^{-t} \quad \text{ёки} \quad u = C_1r + \frac{C_2}{r}$$

бўлган ўзгармас коэффициентли

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u = 0$$

тенгламага келамиз.

Силжишнинг топилган қийматидан энди σ_r ва σ_φ зўриқишларни топиш учун фойдаланиш мумкин, бунинг учун u ва $\frac{du}{dr}$ нинг ифодаларини (26) га қўямиз. У ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu C_1 + \frac{\mu C_2}{r^2} + C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right) = A - \frac{B}{r^2},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu C_1 - \frac{\mu C_2}{r^2} + C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right) = A + \frac{B}{r^3}.$$

бу ерда $A = EC_1/(1-\mu)$, $B = EC_2/(1+\mu)$ деб белгиланган.

Энди дастлабки қуйилган масалага қайтсак бўлади. Доимий p ички нагрузка таъсирида бўлган труба учун $r = r_0$ ички деворда $\sigma_r + p = 0$ шарт, нагрузкадан холи бўлган ташқи $r = r_1$ деворда $\sigma_r = 0$ шарт бажарилиши керак. Бу шартлар чегаравий бўлиб, ўзгармасларнинг $A = pr_0^2/(r_1^2 - r_0^2)$, $B = r_0^2 r_1^2/(r_1^2 - r_0^2)$ қийматларига олиб келади, натижада зўриқиш учун

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{pr_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) < 0, \\ \sigma_\varphi &= \frac{pr_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r_0^2}\right) > 0 \end{aligned}\right| \tag{28}$$

ни ҳосил қиламиз.

Хусусан, ички ва ташқи деворлардаги кучланишлар учун қуйидагиларни топамиз: радиал кучланиш кутганимиздек ушбуга тенг:

$$\sigma_r(r_0) = -p, \quad \sigma_r(r_1) = 0,$$

уринма кучланиш эса:

$$\sigma_\varphi(r_0) = p\,\frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} > p, \quad \sigma_\varphi(r_1) = p\,\frac{2r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}.$$

Радиал кўчиш

$$u = \frac{pr_0^2}{E(r_1^2 - r_0^2)}\left\{(1-\mu)\,r + (1+\mu)\,\frac{r_1^2}{r}\right\} \tag{29}$$

га, хусусән, ички деворда

$$u(r_0) = \frac{pr_0}{E}\left\{\mu + \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\right\}$$

га, ташқи деворда эса:

$$u(r_1) = \frac{2pr_0^2u}{E(r_1^2 - r_0^2)}$$

га тенг.

Зўриқишлар ва радиал силжишнинг (28) ва (29) ларга ўхшаш ифодаларини бошқа ҳолда трубанинг ташқи деворига бўлган босим ўзгармас бўлганда ҳам ҳосил қилиш осон. Бу ҳол учун $r = r_0$ да $\sigma_r = 0$ ва $r = r_1$ да $\sigma_r + p$ чегаравий шартларга эгамиз, бу ердан керакли формулалар осонгина топилади. Буни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

(28) ва (29) формулаларга ўхшаш формулаларни *юпқа деворли* труба учун ҳам ҳосил қилиш мумкин; бунинг учун уларда $r_1 - r_0 = h$ ва $r_1 + r_2 \approx 2r$ деб олиш етарли. Бу алмаштиришларни ҳам мустақил бажариш қийин эмас.

19-§. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР ТЎҒРИСИДА ЭНГ ОДДИЙ МАЪЛУМОТЛАР

10-§ да кўрсатилгандек, n- тартибли тенгламанинг хусусий ечимини ажратиш учун одатда *Коши масаласи* қаралади. У *бошланғич* шартларни беришдан иборат: бирорта $x = x_0$ нуқтада изланаётган функция ва унинг $(n-1)$-тартибгача (у ҳам киради) барча ҳосилаларининг қийматлари берилади.

Шу билан бирга бир қатор масалаларда бошқа турдаги шартларга дуч келинади, масалан, хусусий ечимни изланаётган функциянинг бир неча нуқтадаги маълум қийматлари бўйича топиш талаб қилинади. Бундай масалаларнинг айримлари билан 12-ва 18-§ ларда танишган эдик. Улар *чегаравий* масалалар дейилади.

Дастлаб ана шундай масалаларнинг айримлари билан мисоллар орқали танишамиз.

$y'' + 4y = x$ тенгламанинг $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = \frac{\pi}{2}$ шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

16-§ даги натижаларга кўра бу тенгламанинг умумий ечими

$$y = \frac{1}{4}x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

кўринишда бўлади. Бу ерга $x = 0$ ва $x = \frac{\pi}{4}$ қийматларни қўйиб, C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармасларни топиш учун иккита

$$C_1 = 1,$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

тенгламага эга бўламиз, бу ердан $C_1 = 1$, $C_2 = 3\pi/8$ келиб чиқади. Демак, изланаётган хусусий ечим

$$y = \frac{1}{4}x + \cos 2x + \frac{3}{8}\pi \sin 2x$$

бўлади.

Чегаравий масалаларнинг бундай элементар шаклда берилиши шарт эмас. Баъзи ҳолларда шартлар сифатида функция ва унинг биринчи ҳосиласининг икки (иккинчи тартибли тенглама учун) ёки бир нечта нуқтадаги чизиқли комбинациялари берилади.

$x^2y''-2xy'+2y=x^3$ тенгламанинг $y(0)+2y'(0)=1$, $y(1)-y'(1)=0$ шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимини топамиз.

Берилган дифференциал тенглама Эйлер тенгламаси бўлиб, у 17-§ да баён қилинган қоидалар бўйича ечилади. Уларни қўлланиб, мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y=C_1x+C_2x^2$ бўлишини топамиз. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг $y=x^3/2$ хусусий ечимини эса аниқмас коэффициентлар усули бўйича ҳам, ўзгармасларни вариациялаш усули бўйича ҳам топиш мумкин. Керакли ҳисоб-китобларни мустақил бажаришни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз.

Шундай қилиб, тенгламанинг умумий ечими:

$$y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}x^3.$$

Энди $y'=C_1+2C_2x+\frac{3}{2}x^2$ ҳосилани топиш ҳамда y ва y' ларнинг берилган нуқтадаги қийматларини чегаравий шартларга қўйиш қолди. Қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(C_1\cdot 0+C_2\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)+2\left(C_1+2C_2\cdot 0+\frac{3}{2}\cdot 0\right)=1,$$

$$\left(C_1\cdot 1+C_2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\right)-\left(C_1+2C_2\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot 1\right)=0]$$

бу ердан дарҳол $C_1=1/2$ ва $C_2=-1$ ни топамиз, бинобарин, берилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим

$$y=\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3$$

кўринишда бўлади.

Энди $y''-2y'+2y=2e^x$ тенгламанинг $y(0)+y(\pi/2)=e^{\pi/2}$, $y'(0)+y'(\pi/2)=1$ шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топамиз.

Бунда тенгламанинг умумий ечими:

$$y=e^x(1+C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Шунинг учун биринчи чегаравий шарт қуйидагини беради:

$$1+C_1+e^{\pi/2}(1+C_2)=e^{\pi/2}.$$

Умумий ечимни дифференциаллаб,

$$y'=e^x[1+(C_1+C_2)\cos x-(C_1-C_2)\sin x]$$

ни топамиз, бундан

$$1+C_1+C_2e^{\pi/2}[1-(C_1-C_2)]=1.$$

Ихтиёрий ўзгармасларни топиш учун охирида

$$C_1+e^{\pi/2}C_2=-1,$$

$$(1-e^{\pi/2})\,C_1+(1+e^{\pi/2})\,C_2=-\,e^{\pi/2}$$

системани ҳосил қиламиз, уни ечиб. қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$C_1=\frac{e^{\pi}-e^{\pi/2}-1}{1+e^{\pi}}\,;\qquad C_2=\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^{\pi}}\,.$$

Шундай қилиб, берилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим

$$y=e^{x}\left(1+\frac{e^{\pi}-e^{\pi/2}-1}{1+e^{\pi}}\cos x+\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^{\pi}}\sin x\right)$$

кўринишда бўлади.

Аслини олганда, чегаравий шартлар анча мураккаб қилиб ҳам берилиши мумкин. Бироқ иккинчи тартибли чизиқли тенгламалар учун одатда *икки нуқтали чизиқли чегаравий масала* қўйилади, у юқорида кўрилган икки шаклдан бирида бўлиши мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)&=\gamma_1,\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)&=\gamma_2\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ёки

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 y(\alpha)+\eta_1 y(b)&=\xi_1,\\ \xi_2 y'(a)+\eta_2 y'(b)&=\xi_2.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Юқорида кўрилган мисолларнинг биринчисидаги шартлар (1) нинг $\beta_1=\beta_2=0$ бўлгандаги хусусий ҳолидир.

Таҳлил қилиб чиқилган мисолларда энг содда ҳолга дуч келдик, яъни бунда тенгламанинг умумий ечими маълум бўлиб, берилган чегаравий масалаларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш учун ихтиёрий ўзгармасларнинг қийматларини топиш етарли эди, шу билан бирга бу ўзгармасларни топиш учун тузилган тенгламалар биргаликда ва аниқ эди. Анча мураккаб ҳоллар, масалан, параметрларнинг тенгламанинг нолдан фарқли бўлиб, лекин ноль чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўладиган қийматларини излашни талаб этадиган каби ҳоллар жиддий қийинчиликлар билан боғлиқ. Бундай масалалар математик физика тенгламаларини ечишда пайдо бўлади, бироқ бизнинг курсда улар қаралмайди.

Шуни ҳам назарда тутиш керакки, чегаравий масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик шартлари Коши масаласи ечимининг мавжудлик шартларидан катта фарқ қилади. Шундай ҳол рўй бериши мумкинки, ҳатто ечимнинг қийматини аргументларнинг иккита қиймати учун беришдан иборат бўлган энг содда чегаравий шартлар мумкин бўлмай қолиши мумкин. Шундай бўлишига қарамасдан, чегаравий масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик масалаларига тўхталиб ўтирмаймиз.

Энди чегаравий шартлари берилган дифференциал тенгламага олиб келадиган физикавий масалани кўрайлик.

Мисол. (Стерженда иссиқлик тарқалиши масаласи.) Иссиқлик ўтказувчанлиги λ (ккал/м$^2\cdot$соат$\cdot$град) бўлган металлдан ясалган узун ва ингичка стержень иссиқлик мувозанати ҳолатида турибди, яъни стержень нуқталарининг температураси вақтга қараб ўзгармайди. Стержень сиртидан температураси $\vartheta_0 = \mathrm{const}$ бўлган атроф-муҳитга иссиқлик сарф бўлиши иссиқлик узатиш коэффициенти α (ккал/м$^2\cdot$соат$\cdot$град.) ўзгармас бўлган температуралар фарқига пропорционал. Стерженнинг кўндаланг кесимининг барча нуқталаридаги ϑ температурани ўзгармас деб ҳисоблаб, унинг бирорта учдан (масалан, чап учдан) бошлаб ҳисобланган координатага боғланиши $\vartheta = \vartheta(x)$ ни топинг.

Ечилиши. Айтайлик, стерженнинг узунлиги l м, кўндаланг кесимининг периметри P м ва бу кесимнинг юзи Q м^2 бўлсин. Стерженнинг чап учидан x масофада турган узунлиги dx бўлган элементини ажратамиз ва унинг температурасини ϑ га тенглаймиз. $\Delta\tau$ вақт ичида бу элементнинг чап чегараси орқали $-\lambda Q\frac{d\vartheta}{dx}\Big|_x\Delta\tau$ иссиқлик миқдори ўтади, ўнг чегараси орқали (у стерженнинг учидан $x+dx$ масофада) $-\lambda Q\frac{d\vartheta}{dx}\Big|_{x+\Delta x}\Delta\tau$ иссиқлик миқдори ўтади.

Шундай қилиб, ажратилган соҳа $\Delta\tau$ вақт ичида

$$-\lambda Q\frac{d\vartheta}{dx}\Big|_x\Delta\tau-\left(-\lambda Q\frac{d\vartheta}{dx}\Big|_{x+dx}\Delta\tau\right)=\lambda Q\left(\frac{d\vartheta}{dx}\Big|_{x+dx}-\frac{d\vartheta}{dx}\Big|_x\right)\Delta\tau\approx$$

$$\approx\lambda Q\frac{d^2\vartheta}{dx^2}\,dx\,\Delta\tau$$

иссиқлик миқдорига эга бўлиб қолади. Бу билан бир пайтда бу элементнинг сирт орқали атроф-муҳитга иссиқлик йўқотиши $\alpha Pdx(\vartheta-\vartheta_0)\Delta\tau$ га тенг бўлади.

Жараён стационар деб қилган фаразимизга кўра бу миқдор ушбуга тенг бўлади:

$$\lambda Q\frac{d^2\vartheta}{dx^2}\,dx\,\Delta\tau=\alpha P(\vartheta-\vartheta_0)\,dx\,\Delta\tau,$$

бу ердан

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - a^2(\vartheta - \vartheta_0) = 0. \qquad (3)$$

бу ерда $a^2 = \alpha P/(\lambda Q)$ деб белгиланган. Берилишига кўра $\vartheta_0 = \mathrm{const}$, шунинг учун $\vartheta - \vartheta_0 = u$ деб, тенгламани

$$\frac{d^2u}{dx^2} - a^2u = 0 \qquad (4)$$

кўринишга келтирамиз.

(4) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$u = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax};$$

бу ердан (3) тенглама учун умумий ечимни

$$\vartheta = \vartheta_0 + C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} \qquad (5)$$

кўринишда ҳосил қиламиз. Ихтиёрий ўзгармаслар берилган масалада, табиийки, чегаравий бўлган шартлардан топилади.

Айтайлик, масалан, стерженнинг ҳар иккала учида ϑ_1 ва $\vartheta_2 < \vartheta_1$ доимий температуралар сақлаб турилган бўлсин. У ҳолда чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$\vartheta(0) = \vartheta_1, \qquad \vartheta(l) = \vartheta_2.$$

Уларни (5) га қўйиб,

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = C_1 + C_2,$$
$$\vartheta_2 - \vartheta_0 = C_1e^{al} + C_2e^{-al}$$

ни топамиз. Бу системани C_1 ва C_2 ўзгармасларга нисбатан ечиб, қуйидагини топамиз:

$$C_1 = \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_0) - (\vartheta_1 - \vartheta_0)\,e^{-al}}{2\,\mathrm{sh}\,al}, \qquad C_2 = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)e^{al} - (\vartheta_2 - \vartheta_0)}{2\,\mathrm{sh}\,al}. \quad (6)$$

Берилган чегаравий шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечим (6) қийматларни (5) умумий ечимга қўйиш билан ҳосил қилинади. Содда ўзгартиришлардан сўнг ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_0)\,\mathrm{sh}\,ax - (\vartheta_1 - \vartheta_0)\,\mathrm{sh}\,a\,(l - x)}{\mathrm{sh}\,al}, \qquad (7)$$

бу ерда, юқорида белгилаганимиздек, $a = \sqrt{\alpha P/(\lambda Q)}$.

(7) ифодани таҳлил қилиш қизиқарли ва кутилмаган натижага олиб келади: стержень нуқталарининг температураси ўнг (совуқроқ) учдаги температурадан паст. а

катталик қанча катта бўлса, бу минимум шунчалик кескин бўлади. Нолга яқин a да ечим чизиқли ечимга яқин бўлиб, минимумга эга бўлмайди.

Сонли ҳисоблашларни бажарайлик. Стержень $l = 1$ м узунликка ва томони $b = 5,52$ см $= 0,0552$ м бўлган квадратдан иборат кўндаланг кесимга эга бўлсин. У ҳолда $P/Q = 4/b = 72,5$. Ундан ташқари $\lambda = 330$ (мис учун). $\alpha = 10$, $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = 200$, $\vartheta_2 = 100$.

Бу маълумотлар учун $a = \sqrt{\alpha P/(\lambda Q)} \approx \sqrt{725/330} = \approx 1,48$. Маълумки, $\operatorname{sh} al = \operatorname{sh} 1,48 = 2,083$; натижада (7) хусусий ечим ушбу кўринишда бўлади:

$$\vartheta = 47,9 \operatorname{sh}\ 1,48\,x + 95,8 \operatorname{sh}\ 1,48\,(1 - x).$$

(8) функциянинг қийматларини ҳисоблаб, қуйидаги жадвални тузамиз:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
ϑ	200,0	156,3	126,7	108,4	99,4	99,2	100,0

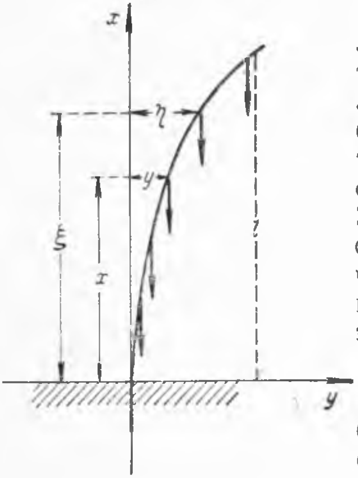
Бу жадвалдан кўринишича, минимум стерженнинг ўнг (совуқ) учи яқинида бўлар экан.

20- §. ЎЗГАРУВЧИ КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Бу бобда текширилган ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалардан ташқари, физикавий масалаларни ечишда кўпинча *ўзгарувчи коэффициентли* тенгламаларга дуч келамиз. Улар, умуман айтганда, чекли кўринишда интегралланмайди (16- § да кўриб чиқилган Эйлер тенгламалари бундан мустасно, улар ўзгармас коэффициентли тенгламаларга келтирилган эди). Уларнинг ечимлари янгича бўлиб, умуман айтганда, *ноэлементар функциялар* бўлади. Бундай функцияларнинг хоссаларини ўрганишнинг асосий манбаи — уларни аниқловчи дифференциал тенгламалар бўлиб ҳисобланади. Бундай *махсус функциялар* етарлича тўла ўрганилган ва уларни ҳисоблаш учун муфассал жадваллар тузилган.

Мазкур параграф ўзгарувчи коэффициентли иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларнинг ечимлари бўлган баъзи махсус функциялар ва, шунингдек, шундай тенгламаларнинг ўзи билан қисқача танишишга бағишланган. Кўпчилик ҳолларда бундай тенгламалар математик физиканинг хусусий ҳосилали тенгламалар билан тавсифланадиган масалаларини ечишда ҳосил бўлади, бироқ бевосита ўзи ҳам учраши мумкин.

Тез-тез учраб турадиган Бессель дифференциал тенгламасига олиб келадиган масалани қараб чиқайлик.



45- расм.

Мисол. (Балканинг бўйлама эгилиши.) Вертикал турган ва пастки учи маҳкамланган бўлиб, юқори учи эркин бўлган l узунликдаги призматик стерженнинг ўз оғирлиги остида эгилишини текширамиз. Эгилган балка ўқининг дифференциал тенгламасини 12- § да чиқарган эдик [(24) формулага қаранг]. У қуйидаги кўринишда эди:

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{M(z)}{EI},$$

бу ерда $M(z)$ — кўндаланг кесимнинг инерция моменти бўлиб, балка жойлашган шароитга боғлиқ.

Мазкур ҳол учун, 45- расмдан кўриниб турганидек, M катталик ушбу интеграл билан аниқланади:

$$M=\int_0^{l-z} q\,(\eta-u)d\,\xi,$$

бу ерда q — стержень узунлик бирлигининг оғирлиги. Интегрални балка эгилган ўқининг дифференциал тенгламасига қўйиб ва ҳосил бўлган тенгликнинг иккала томонини z бўйича дифференциаллаб, ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$EI\frac{d^3u}{dz^3}=-q\,(l-z)\frac{du}{dz}.$$

Бу ерда эркли ўзгарувчини

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{q}{EI}}\,(l-z)^{3/2}=x$$

деб алмаштириш қулай.

u нинг *x* бўйича ҳосилаларини штрихлар билан белгилаб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{du}{dz}=\frac{du}{dx}\frac{dx}{dz}=-u'\sqrt{\frac{q}{EI}}(l-z)^{1/2}=-u'x^{1/3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{q}{EI}},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\frac{du}{dx}\frac{d^2x}{dz^3}=\left(\frac{3}{2}\frac{q}{EI}\right)^{2/3}\left(u''x^{2/3}+\frac{1}{3}u'x^{-1/3}\right),$$

$$\frac{d^3u}{dz^3}=\frac{d^3u}{dx^3}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dx}{dz}\frac{d^2x}{dz^3}+\frac{du}{dx}\frac{d^3x}{dz^3}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{q}{EI}\left(-u'''x-u''+\frac{1}{9}u'x^{-1}\right).$$

Ҳосилаларнинг бу қийматларини дифференциал тенгламага қўйиб, қуйидаги учинчи тартибли тенгламага келамиз:

$$u'''+\frac{1}{x}u''+\left(1-\frac{1}{9x^2}\right)u'=0,$$

бу тенгламанинг тартибини $u'=y$ деб бир бирлик пасайтирамиз, натижада узил-кесил қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{9x^2}\right)y=0. \tag{1}$$

Бу тенглама *Бесселнинг m индексли тенгламасининг* хусусий ҳоли ҳисобланади, у қуйидаги кўринишга эга:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0. \tag{2}$$

(2) тенгламани қаноатлантирадиган функциялар Бесселнинг *m-индексли функциялари* ёки *Бесселнинг m-тартибли функциялари* дейилади. (1) тенглама $m=1/3$ даги Бессель тенгламаси эканлигини кўриш осон.

Бессель тенгламасининг умумий ечимини топиш учун унинг иккита хусусий ечимини топиш кифоя, улар юқорида айтилгандек, умуман олганда, элементар функциялар эмас.

Хусусий ечимларни даражали қаторлар кўринишида топишга ҳаракат қиламиз. $x=0$ (2) тенглама учун махсус нуқта бўлгани сабабли (тенгламанинг коэффициентлари бу нуқтада узилишга эга) изланаётган ечим оддий даражали қаторга ёйилмаслиги ҳам мумкин. Шунинг учун хусусий ечимларни

$$y=x^{\alpha}(C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots) \tag{3}$$

умумлашган даражали қатор (α — бирорта ҳақиқий сон) кўринишида излашга ҳаракат қиламиз. Равшанки, α бутун, манфий бўлмаганда (3) қатор оддий даражали қатор шаклида бўлади.

(3) қаторни ушбу кўринишда ёзиш қулай:

$$y = C_0x^{\alpha} + C_1x^{\alpha+1} + C_2x^{\alpha+2} + \ldots + C_nx^{\alpha+n} + \ldots .$$

Бу ердан қуйидагиларни топамиз:

$$y' = C_0\alpha x^{\alpha-1} + C_1(\alpha+1)x^{\alpha} + C_2(\alpha+2)x^{\alpha+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_n(\alpha+n)\,x^{\alpha+n-1} + \ldots ,$$
$$y'' = C_0\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2} + C_1(\alpha+1)\,\alpha x^{\alpha-1} + C_2(\alpha+2)\,(\alpha+1)x^{\alpha} + \ldots$$
$$\ldots + C_n\,(\alpha+n)\,(\alpha+n-1)\,x^{\alpha+n-2} + \ldots .$$

y, y', y'' ларнинг топилган ифодаларини (2) Бессель тенгламасига қўямиз, бунда дастлаб уни

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2) = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бунинг учун y нинг қаторини $x^2 - m^2$ га, y' никини x га ва y'' никини эса x^2 га кўпайтирамиз. Бу ифодаларни қўшиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$[\alpha(\alpha-1)\,C_0 + \alpha C_0 - m^2C_0]\,x^{\alpha} + [(\alpha+1)\,\alpha C_1 + (\alpha+1)C_1 -$$
$$- m^2C_1]\,x^{\alpha+1} + [(\alpha+2)\,(\alpha+1)\,C_2 + (\alpha+2)\,C_2 - m^2C_2 + C_0]x^{\alpha+2} +$$
$$+ \ldots + [(\alpha+n)\,(\alpha+n-1)\,C_n + (\alpha+n)\,C_n - m^2C_n + C_{n-2}]x^{\alpha+n} +$$
$$+ \ldots = 0.$$

Чап томонда ёзилган қатор нолга яқинлашиши керак, бу ердан унинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлишлиги келиб чиқади. $C_0 \neq 0$ деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда x^{α} олдидаги коэффициентларни нолга тенглаб ва C_0 га қисқартириб, ушбу *аниқловчи тенгламани* ҳосил қиламиз:

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - m^2 = 0$$

ёки $\alpha^2 - m^2 = 0$, бу ердан $\alpha = \pm m$.

Қолган коэффициентларни нолга тенглаб, ушбу системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{r}
(\alpha+1)\,\alpha C_1 + (\alpha+1)\,C_1 - m^2C_1 = 0,\\
(\alpha+2)\,(\alpha+1)\,C_2 + (\alpha+2)\,C_2 - m^2C_2 + C_0 = 0,\\
(\alpha+3)\,(\alpha+2)\,C_3 + (\alpha+3)\,C_3 - m^2C_3 + C_1 = 0,\\
(\alpha+4)\,(\alpha+3)\,C_4 + (\alpha+4)\,C_4 - m^2C_4 + C_2 = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(\alpha+\alpha)\,(\alpha+n-1)\,C_n + (\alpha+n)\,C_n - m^2C_n + C_{n-2} = 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}$$

Дастлаб $\alpha = m(> 0)$ деб, кетма-кет барча коэффициентларни топамиз:

$$C_1 = 0,$$
$$C_2 = -\frac{C_0}{(m+2)^2 - m^2} = -\frac{C_0}{2^2(m+1)},$$
$$C_3 = 0,$$
$$C_4 = -\frac{C_2}{(m+4)^2 - m^2} = \frac{C_0}{2^4(m+1)\,(m+2)\cdot 1\cdot 2},$$

. . . .

$$C_{2n-1} = 0,$$

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{C_0}{2^{2n} n!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+n)},$$

. . . .

Шундай қилиб, (2) Бессель тенгламасининг хусусий ечимларидан бирини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y_0 = C_0 x^m \left(1 - \frac{x^2}{2^2(m+1)} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!\,(m+1)(m+2)} - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{2^{2n} n!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} + \ldots \right). \quad (5)$$

Даламбер аломатидан фойдаланиб, (5) қатор бутун сон ўқида яқинлашишини текшириш осон. C_0 сон коэффициентни кераклича танлаб олинганда (5) қатор аниқлайдиган функцияни Бесселнинг m индексли (ёки m-тартибли) *биринчи тур функцияси* дейилади ва $J_m(x)$ билан белгиланади.

$J_m(x)$ учун узил-кесил ифода ҳосил қилишда яна бир махсус функция—Эйлернинг *гамма-функцияси* $\Gamma(x)$ билан танишишга тўғри келади. у дифференциал тенгламаларга боғлиқ бўлмаган ҳолда киритилади. Чунончи, у

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du \quad (6)$$

хосмас интеграл билан аниқланади, бу интеграл барча ҳақиқий $x > 0$ лар учун ёки ҳақиқий қисми мусбат бўлган барча комплекс x лар учун яқинлашувчи эканлигини текшириш осон.

(6) ни бўлаклаб, интеграллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du = \frac{u^x}{x} e^{-u} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{u^x}{x} e^{-u} du = \frac{1}{x} \int_0^\infty u^{(x+1)-1} e^{-u}\, du,$$

бу ердан $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ ёки

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (7)$$

келиб чиқади. Бу гамма-функция қаноатлантирадиган асосий функционал тенгламадир. Сўнгра

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$$

бўлгани учун (7) дан натурал n учун

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

эканлиги келиб чиқади [хусусан 0! деганда $\Gamma(1) = 1$ тушунилади].

(7) тенглик $\Gamma(x)$ нинг қийматини $x < 0$ учун ҳам аниқлашга имкон беради. Ҳақиқатан ҳам агар $x < 0$, бироқ $x + 1 > 0$ бўлса, бундай ёзиш мумкин:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x + 1). \tag{8}$$

Шунга ўхшаш, (7) ёки (8) ни бир неча марта татбиқ қилиб, исталган x учун ($x = 0$ дан, бинобарин, $x = -1, \ -2, \ldots$ лардан ташқари, бу нуқталарда $\Gamma(x)$ чексизликка айланади) Гамма-функциянинг қийматини ҳосил қилиш мумкин.

Яна Бессель функцияларига қайтамиз. $J_m(x)$ функция деб, (5) қаторга айтилади, у ерда $C_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)}$ деб олинган. (7) га кўра

$$(n + m)(n + m - 1) \ldots (m + 1)\Gamma(m + 1) = \Gamma(n + m + 1)$$

бўлгани учун (5) қаторни бу ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+m}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+m+1)}. \tag{9}$$

Бессель тенгламасининг иккинчи хусусий ечимини аниқлаш учун m сон тўғрисида баъзи маълумотлар керак бўлади. Агар m бутун сон бўлмаса, (4) система $\alpha = -m$ да (5) га ўхшаш янги қаторни беради. Мос функцияни ҳам Бесселнинг биринчи тур функцияси дейилади. У қуйидагига тенг:

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n-m}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-m+1)}. \tag{10}$$

$J_m(x)$ ва $J_{-m}(x)$ функциялар чизиқли эркли эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон. $J_m(0) = 0 \ (m > 0)$ эканлигини кўриш етарли: шу билан бир пайтда (10) га кўра $x = 0$ да $J_{-m}(x)$ чексизликка айланади. Бу ердан иккала функция бир-биридан ўзгармасга фарқ қилиши мумкин эмаслиги келиб чиқади. Шунинг учун бутун бўлмаган m индекс учун (2) Бессель тенгламасининг умумий ечимини

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 J_{-m}(x) \tag{11}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар.

Баъзан $J_{-m}(x)$ ўрнига (9) ва (10) функцияларнинг чизиқли комбинацияси бўлган бошқа хусусий ечим олинади:

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin mx}. \tag{12}$$

бу функция бутун бўлмаган m ларда маънога эга. $Y_m(x)$ функция *Бесселнинг иккинчи тур функцияси* ёки *Вебер функцияси* дейилади. У ҳолда (2) тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x). \tag{13}$$

Бутун m учун (9) қаторни гамма-функциядан фойдаланмасдан,

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+m}}{n!\,(n+m)!}$$

кўринишда ёзиш мумкин, хусусан

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n}}{(n!)^2}.$$

(10) қатор аниқлайдиган $I - m(x)$ функция учун аҳвол бутунлай бошқача. Аввало, бу қаторнинг биринчи m та ҳади маънога эга эмас, чунки уларнинг махражларида гамма-функциянинг қийматлари аргументнинг бутун манфий қийматлари ва ноль қийматлари учун ҳосил бўлади. Бу ҳадларни нолга тенг деб ҳисоблаш керак (айтиб ўтганимиздек, бундай нуқталарда гамма-функция чексизликка айланади).

Агар $I_{-m}(x)$ ни қолган қаторга тенг деб олсак, у ҳолда уни (9) қатор билан таққослаш бутун m лар учун

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

тенглик ўринли эканлигини кўрсатади. Шундай қилиб, бутун m ларда $J_m(x)$ ва $J_{-m}(x)$ функциялар чизиқли боғлиқ ва (11) тенглик бундай ҳолда Бессель тенгламасининг умумий ечимини бермайди.

(12) ифода бутун m ларда аниқмас бўлиб қолади (сурат ва махраж нолга айланади), шунинг учун Бесселнинг иккинчи тур функциясидан бевосита фойдаланиш ҳам мумкин эмас. Шундай бўлса-да, исталган бутун m да

$$\lim_{\mu \to m} \frac{J_\mu(x)\cos\mu\pi - J_{-\mu}(x)}{\sin\mu\pi}$$

мавжудлигини кўрсатиш мумкин (буни Лопиталь қоидаси бўйича кўрсатиш осон, бироқ бунга тўхталиб ўтирмаймиз), бу лимитни Бесселнинг *бутун индекс учун иккинчи тур функцияси* деб атаймиз. Ана шундай аниқланган $Y_m(x)$ функцияда (13) формула Бессель тенгламасининг бутун m учун ҳам умумий ечимини беради.

Бессель функциялари математика татбиқ қилинадиган деярли барча соҳаларда хилма-хил қўлланишга эга: татбиқий масалаларда учрайдиган жуда кўп сондаги тенгламалар Бессель тенгламасига келтирилади. Бундан ташқари, Бессель функциялари учун Бесселнинг турли индексли функцияларининг ўзларини ёки Бессель функциялари ҳосилаларини шу функцияларининг ўзи билан боғловчи турли муносабатлар жуда кўпдир.

Ана шундай муносабатлардан бир нечтасини (исботсиз) келтирамиз. Индекслари бирга фарқ қиладиган учта Бессель функциясининг битта нуқтадаги қийматларини боғловчи ушбу рекуррент муносабат катта аҳамиятга эга:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x). \qquad (14)$$

у $J_{m+1}(x)$ни маълум $J_m(x)$ ва $J_{m-1}(x)$ қийматлар орқали топишга имкон беради. Ҳосилани топишга имкон берадиган

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x) \tag{15}$$

формула ҳам худди шундай роль ўйнайди. Шу билан бирга ҳосилаларни топиш учун янада соддароқ ушбу формулалардан фойдаланиш ҳам мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^m J_m(x)] &= x^m J_{m-1}(x), \\ \frac{d}{dx}[x^{-m} J_m(x)] &= -x^{-m} J_{m+1}(x). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(14) ва (15) га ўхшаш формулалар Бесселнинг иккинчи тур функциялари учун ҳам ўринлидир. Чунончи

$$\left.\begin{aligned} Y_{m-1}(x) + Y_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x} Y_m(x), \\ Y_{m-1}(x) - Y_{m+1}(x) &= 2Y'_m(x). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Бессель функциялари ва тригонометрик функциялар ўртасида чуқур боғланиш бор, у бу функцияларнинг ўзгаришидаги умумийликда ҳам намоён бўлади. $J_0(x)$ ва $J_1(x)$ Бессель функцияларининг 46- ва 47-расмларда келтирилган графиклари билан танишиб чиқиб бунга ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Агар Бесселнинг биринчи тур функциясининг индекси бутун сон плюс ярим бўлса, у ҳолда бундай функция элементар функциялар орқали, чунончи тригонометрик функциялар орқали ифодаланади. $m = 1/2$ ва $m = -1/2$ учун қуйидаги муносабатлар мавжуд:

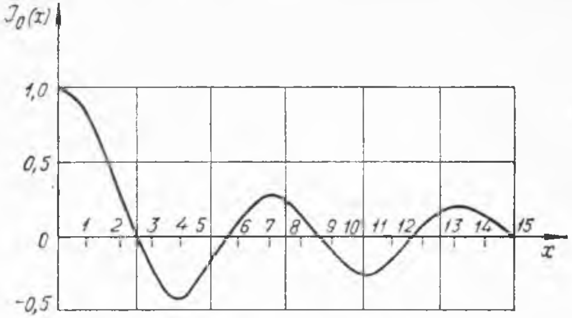
$$J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin x; \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos x. \tag{18}$$

Ўқувчи (9) ва (10) қаторлардан ҳамда $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ эканлигидан фойдаланиб, бу муносабатларни ўзи мустақил келтириб чиқариши мумкин. $\Gamma(n + 1/2)$ нинг қийматларини натурал n учун (7) формулани, бутун манфий n учун эса (8) формулани қўлланиб топиш мумкин.

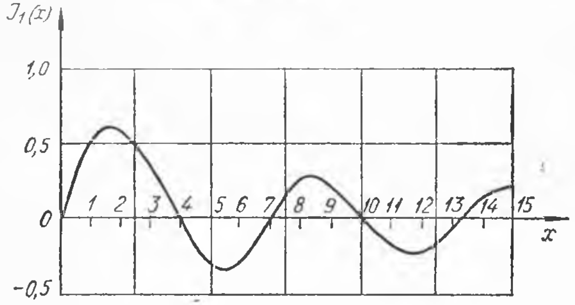
Бесселнинг биринчи ва иккинчи тур функциялари билан бир қаторда, шунингдек, Бесселнинг соф мавҳум аргументли $I_m(x)$ функциялари ҳам учраб туради, у қуйидаги муносабат билан аниқланади:

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix). \tag{19}$$

(19) дан кўринишича, I_m ва J_m функциялар орасидаги боғланиш гиперболик ва тригонометрик функциялар орасидаги боғланишга ўхшайди.



46- расм.



47- расм.

Улар учун юқорида келтирилган муносабатларга ўхшаш рекуррент муносабатлар, ўринли масалан,

$$I_{m-1}(x) - I_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} I_m(x),$$

$$\frac{d}{dx}[x^m I_m(x)] = x^m I_{m-1}(x)$$

ва ҳ. к. $I_m(x)$ функциялар

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2) y = 0$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради, шунинг учун бу тенглама *мавҳум аргумент учун Бессель тенгламаси* дейилади. У ҳам коэффициентлари ўзгарувчи иккинчи тартибли чизиқли тенгламадир.

$I_m(x)$ учун қатор (9) ни (19) га қўйиш орқали ҳосил бўлади:

$$I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+m}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+m+1)}. \qquad (20)$$

Коэффициентлари ўзгарувчи бўлган иккинчи тартибли тенгламаларнинг биз текширадиган навбатдаги тури *Лежандрнинг дифференциал тенгламасидир.* Ушбу тенглама шундай деб аталади:

$$(x^2 - 1)\,y'' + 2xy' - n\,(n+1)\,y = 0. \qquad (21)$$

Натурал n лар учун Лежандр тенгламасининг ечими оддий кўпҳадлардан иборат бўлади:

$$P_1(x) = x, \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

. . . .

Лежандр кўпҳадларининг умумий ифодаси *Родриг формуласи* билан берилади:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x_2 - 1)^n. \qquad (22)$$

Бу ердан жуфт тартибли Лежандр кўпҳадлари жуфт функциялар эканлиги, тоқ тартиблилари эса тоқ функциялар эканлиги осонгина келтириб чиқарилади. Шу ернинг ўзидан Ролль теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги муҳим хоссани ҳам чиқариш мумкин: $P_n(x)$ кўпҳаднинг барча n та илдизи ҳақиқий ва $(-1,\ 1)$ интервалда жойлашган.

Ҳақиқатан ҳам $u = (x^2 - 1)^n$ функция $x = \pm 1$ нуқталарда $n - 1$ тартибгача (у ҳам киради) ҳосилалари билан бирга нолга айланади. Ролль теоремасига биноан $(-1,\ 1)$ интервалнинг u' нолга айланадиган ξ_1 нуқтаси мавжуд. У ҳолда u' учун иккита $(-1,\ \xi_1)$ ва $(\xi_1,\ 1)$ интервал топамиз. u' уларнинг охирларида нолга айланади, бу Ролль теоремасига кўра u'' нинг иккита ички нолини беради.

Шундай давом эттириб, $u^{(n-1)}$ учун h та интервал топамиз, бу интервалларнинг охирларида у нолга тенг бўлади, бинобарин, $u^{(n)}(-1,1)$ ичида n та нолга эга бўлади. Бироқ, $u^{(n)}P_n(x)$ дан фақат ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилади. Демак, Лежандрнинг $P_n(x)$ кўпҳади $(-1,1)$ ичида $u^{(n)}$ эга бўлган ўша n та нолга эга бўлади.

Лежандр кўпҳадлари ҳам Бессель функциялари учун чиқарилган (14) муносабатга ўхшаш учҳадли рекуррент муносабатни қаноатлантиради:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \quad (23)$$

$P_0(x)=1$ деб ва P_0 ҳамда P_1 дан фойдаланиб, (23) ёрдамида исталган n учун Лежандр полиномларини кетма-кет ҳисоблаш мумкин. Бундай қилинганда $P_n(x)$ нинг қийматлари (22) Родриг формуласига қараганда осонроқ топилади.

Лежандр кўпҳадларининг муҳим хоссаси уларнинг *ортогоналлигидир,* у қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n). \qquad (24)$$

Лежандр кўпҳадлари системасининг ортогоналлиги Фурье тригонометрик қаторларига ўхшаш бу система бўйича Фурье қаторларини тузишга имкон беради.

Лежандр кўпҳадлари кўпҳадларнинг (24) таъриф бўйича "оддий маънода аниқланишида чекли интервалда ортогонал ягона системадир. Бироқ, бундан ташқари кўпинча *вазн билан ортогонал бўлган* кўпҳадларга дуч келамиз. $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)=0 \qquad (25)$$

муносабатни қаноатлантирса, улар $[\alpha,\ \beta]$ кесмада $w(x)$ вазн билан ортогонал дейилади.

$w(x)$ вазн билан ортогонал бўлган кўпҳадларнинг ҳар бир системаси коэффициентлари ўзгарувчи бўлган иккинчи тартибли бирорта дифференциал тенгламани ҳамда (14) ва (23) га ўхшаш учҳадли рекуррент муносабатни қаноатлантиради. Татбиқларда тез-тез учраб турадиган ана шундай системалардан баъзиларини келтирамиз.

Чебишев кўпҳадлари ушбу муносабат билан аниқланади:

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x). \qquad (26)$$

Улар $[-1,\ 1]$ кесмада $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ вазн билан ортогонал ва

$$T_{n+1}(x)-xT_n(x)+\frac{1}{4}T_{n-1}(x)=0 \qquad (27)$$

рекуррент муносабатни қаноатлантиради.

(27) ёрдамида, $T_0(x)=1$ ва $T_1(x)=x$ деб, $T_n(x)$ ифодаларни (26) формулага қараганда ҳосил қилиш осон. Чебишевнинг $T_n(x)$ кўпҳади қаноатлантирадиган дифференциал тенглама

$$(1-x^2)\,y''-xy'+n^2y=0 \qquad (28)$$

кўринишга эга.

Эрмит кўпҳадлари:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}, \qquad (29)$$

улар $w(x) = e^{-x^2/2}$ вазн билан $(-\infty, \infty)$ да ортогонал, яъни улар учун ушбу муносабат ўринли:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0 \qquad (n \neq m).$$

Эрмит кўпҳадлари учун рекуррент муносабати

$$H_{n+1}(x) - xH_m(x) + nH_{n-1}(x) = 0, \tag{30}$$

дифференциал тенгламаси эса

$$y'' - xy' + ny = 0. \tag{31}$$

Лагерр кўпҳадлари:

$$L_n(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n} e^{-x}). \tag{32}$$

$(0, \infty)$ да $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ ($\alpha > -1$, баъзан $\alpha = 0$ деб қабул қилинади) вазн билан ортогонал. Улар учун

$$L_{n+1}(x) - (x - \alpha - 2n - 1) L_n(x) + n(\alpha + n) L_{n-1}(x) = 0 \tag{33}$$

муносабат ва

$$xy'' + (\alpha + 1 - x) y' + ny = 0. \tag{34}$$

дифференциал тенглама ўринли.

Санаб ўтилган кўпҳадлар системалари, шу жумладан, Лежандр кўпҳадлари ҳам, албатта, элементар функциялар бўлади. Уларнинг махсус функциялар билан бир қаторда туриши, уларнинг ўзгарувчи коэффициентли дифференциал тенгламаларни қаноатлантириши билан тушунтирилади. Бироқ, шуни ҳам эсдан чақармаслик керакки, (21), (28), (31), (34) тенгламаларнинг ечимлари элементар функциялар (кўпҳадлар) бўлиши учун уларга кирувчи n параметр натурал қийматлар қабул қилиши зарур.

Татбиқий масалаларда Гаусс томонидан киритилган ва ўрганилган *гипергеометрик тенглама* катта ўрин тутади, у учта α, β, γ параметрга эга:

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0. \tag{35}$$

Бу тенгламанинг ечимлари *гипергеометрик функциялар* дейилади.

(35) тенгламани ушбу гипергеометрик қатор қаноатлантиришини исботлаш қийин эмас:

$$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots . \tag{36}$$

Бу даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини аниқлашни ва бу қатор (35) тенгламани қаноатлантиришини ўқувчининг ўзи қаторлар назарияси усулларидан фойдаланиб, мустақил исбот қилиши мумкин.

Гипергеометрик тенгламанинг учта параметри орасидаги турли муносабатларнинг кўпдан-кўп ҳоллари турли хосмас тенглама ва функцияларга (кўпчилиги элементар бўлган) олиб келади. Масалан, $\alpha = -n$ (n — натурал) да ва $\beta = \gamma$ бўлганда (36) қатор $(1-x)^n$ функцияга $\alpha = \beta = 1$ ва $\gamma = 2$ бўлганда $\frac{\ln(1-z)}{z}$ га айланади ва ҳ. к.

Элементар бўлмаган хосмас гипергеометрик функциялардан иккинчи тартибли

$$y'' + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1/4-\mu^2}{x^2}\right)y = 0. \qquad (37)$$

дифференциал тенгламани қаноатлантирадиган *Уиттекер функцияси* $W_{\lambda,\mu}(x)$ ни кўрсатиш мумкин.

Электромагнит тўлқинлар тарқалиши масалаларида кўпинча *Матье тенгламаси* учраб туради, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y'' + (a + 16q\cos 2x)\,y = 0, \qquad (38)$$

бу ерда a ва q — ўзгармаслар. (38) тенгламанинг маълум тартибда танлаб олинган хусусий ечимлари *Матье функциялари* дейилади.

Биз бу ерда ечимлари татбиқий масалаларда катта роль ўйнайдиган ўзгарувчи коэффициентли иккинчи тартибли бир нечта чизиқли дифференциал тенгламани келтирдик. Табиийки, махсус функцияларнинг бирон-бир тўлиқ назарияси техника олий ўқув юртларининг математикадан умумий курсига, бинобарин, бизнинг китобга ҳам кириши мумкин эмас. Бизнинг мақсадимиз чизиқли дифференциал тенгламаларнинг махсус функциялар назариясидаги аҳамиятини намойиш қилишдангина иборат эди.

IV БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧА

21- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАЛАРИ

Баъзи жараёнлар ёки ҳодисаларни тавсифлаш учун кўпинча бир нечта функция талаб этилади. Бу функцияларни излаш система ташкил этадиган бир нечта дифференциал тенгламага олиб келиши мумкин.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасини юқори тартибли битта дифференциал тенгламадан ёрдамчи функциялар киритиш билан ҳосил қилиш ҳам мумкин.

Ҳақиқатан ҳам,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

тенглама юқори ҳосилага нисбатан ечилган n- тартибли дифференциал тенглама бўлсин. Қуйидагича белгилайлик:

$$\begin{aligned} &y = y_1, \\ &y' = y_1' = y_2, \\ &y'' = y_2'' = y_3, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n, \\ &y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Шундай қилиб, n- тартибли битта тенгламадан қуйидаги биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} &y_1' = y_2, \\ &y_2' = y_3, \\ &y_3' = y_4, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ &y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Ҳосил қилинган тенгламалар системаси

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

системанинг хусусий ҳолидан иборат.

Бундай система дифференциал тенгламаларнинг *нормал системаси* дейилади. Бунда тенгламалар сони номаълум функциялар сонига тенг деб фараз қилинади.

(3) системанинг *ечими* деб системанинг ҳамма тенгламасини қаноатлантирадиган n та y_1, $y_2, \dots, y_n$ функция тўпламига айтилади.

(3) системанинг *хусусий ечими* деб ушбу

$$x = x_0 \text{ да } y_1 = y_{10},\ y_2 = y_{20}, \dots, y_n = y_{n0} \qquad (4)$$

(бу ерда x_0, y_{10}, $y_{20}, \dots, y_{n0}$ — берилган сонлар) бошланғич шартларни ҳам қаноатлантирадиган ечимга айтилади.

y_{10}, $y_{20}, \dots, y_{n0}$ сонларни ихтиёрий C_1, $C_2, \dots, C_n$ ўзгармаслар билан алмаштириб, (3) системанинг n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ бўлган умумий ечимини ҳосил қиламиз.

Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун мавжудлик ва ягоналик теоремасини исботлаш мумкин. 10-§ да келтирилган n-тартибли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси бу теореманинг хусусий ҳолидир.

n-тартибли битта дифференциал тенглама тенгламаларнинг нормал системасига келтирилиши мумкинлиги юқорида кўрсатилган эди. Умуман айтганда, бунинг акси ҳам ўринли. *Биринчи тартибли n та дифференциал тенгламанинг нормал системаси n-тартибли битта дифференциал тенгламага эквивалентдир.*

Ҳақиқатан ҳам, (3) система тенгламаларидан бирини оламиз ва унинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз. Натижада

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

ёки $\frac{dy_i}{dx} = y_i'$ ҳосилаларни уларнинг $f_i(x,\ y_1,\ y_2, \dots, y_n)$, ифодалари билан алмаштирсак:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n,$$

яъни

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_n) \tag{5}$$

кўринишдаги тенгликни ҳосил қиламиз. (5) тенгликни (3) системани эътиборга олиб дифференциаллаш натижасида қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n$$

ёки

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_n). \tag{6}$$

Худди шундай давом эттириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4y_1}{dx^4} = F_4(x,\ x_1,\ y_2, \ldots, y_n), \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ҳосил бўлган тенгламаларни (3) системанинг биринчи тенгламаси билан қўшиб ёзамиз, натижада ушбу янги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n), \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(8) системанинг биринчи $n-1$ та тенгламасидан, умуман айтганда, $n-1$ та номаълум y_2, $y_3, \ldots, y_n$ функцияларни y_1 функция ва унинг $n-1$ гача (у ҳам киради) ҳосилалари орқали ифодалаш мумкин. Бу ифодаларни (8) тенгламаларнинг охиргисига қўйиб, номаълум y_1 функцияга нисбатан n-тартибли бўлган битта

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi\left(x,\ y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \tag{9}$$

дифференциал тенгламага келамиз.

Агар (9) тенгламанинг умумий ечимини

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (10)$$

кўринишда ёзсак, қолган функцияларни топиш мумкин, бунинг учун (8) системанинг дастлабки $n-1$ та тенгламасидан топилган $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ларнинг ифодаларига y_1 ва унинг ҳосилалари учун топилган (10) ифодани қўйиш керак. Шундай қилиб, ушбу функциялар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{array}\right| \qquad (11)$$

(11) функциялар системаси (3) дифференциал тенгламалар системасининг изланаётган ечими бўлишини кўрсатиш қийин эмас, бу билан даъво исбот бўлади.

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = y \end{array}\right\}$$

дифференциал тенгламалар системасини ечайлик. Системанинг иккинчи тенгламасини дифференциаллаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ ни унинг биринчи тенгламадаги ифодаси билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{y^2}{z}.$$

Ниҳоят, иккинчи тенгламага кўра y ни $\frac{dz}{dx}$ билан алмаштириб, бир номаълумли иккинчи тартибли тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z}.$$

Бу тенгламада эркли ўзгарувчи ошкор қатнашмайди, шунинг учун унинг тартибини пасайтириш мумкин. Бироқ уни $zz'' - (z')^2 = 0$ кўринишда ёзиб олиб ва тенгликнинг иккала қисмини z^2 га бўлиб, чап томон аниқ ҳосиладан иборатлигини кўрамиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{zz'' - (z')^2}{z^2}$$

ва тенгламамиз $(z'/z)' = 0$ кўринишга эга бўлади, бу ердан

$$\frac{z'}{z} = C_1 \qquad z' = C_1 z.$$

Топилган оралиқ интегралдан ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, z ни ҳосил қилиш осон, бу бизга z функциянинг x ва иккита ихтиёрий ўзгармас қатнашган ифодасини беради:

$$z = C_2 e^{C_1 x}.$$

$y = \frac{dz}{dx}$ бўлгани учун z нинг ифодасини дифференциаллаб

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, системанинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}, \quad z = C_2 e^{C_1 x}.$$

Функциялардан бирини топгандан сўнг қолганларини дифференциаллаш ва йўқотиш йўли билан топиш керак, бунга янги интеграллашсиз ҳар доим эришиш мумкин. Масалан, қаралган мисолда z функция топилгандан кейин y функцияни иккинчи тенгламадан фойдаланиб (биринчи тенгламадан фойдаланиш хато бўлур эди) топиш керак. Ҳақиқатан ҳам, биринчи тенгламадан y ни топиш учун яна бир марта интеграллаш керак, бу учта ихтиёрий ўзгармасга эга бўлган ифодага олиб келар эди. Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки y функция иккинчи тартибли тенгламани қаноатлантиради.

Системаларни ечишнинг бошқа усули *интегралланувчи комбинацияларни* танлашга асосланган. Бу усулни батафсил таҳлил қилиб чиқиш имкониятига эга бўлмаганимиздан, у билан мисоллар орқали танишамиз. Ушбу дифференциал тенгламалар системасини ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= z - x, \\ \frac{dz}{dt} &= x - y. \end{aligned}\right| \qquad (12)$$

t бўйича ҳосилаларни штрих $'$ билан белгилаб ва (12) нинг учта тенгламасини қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x' + y' + z' = 0,$$

ва

$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0,$$

бу ердан

$$x + y + z = C_1 \tag{13}$$

Шунга ўхшаш (12) нинг биринчи тенгламасини x га, иккинчисини y га ва учинчисини z га кўпайтириб қўшсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$xx' + yy' + zz' = 0,$$

яъни

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

бу ердан

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{14}$$

Изланаётган функциялар ва эркли ўзгарувчилар орасидаги чекли муносабатларни* ифодаловчи (13) ва (14) тенгликлар системанинг *биринчи интеграллари* дейилади. Агар яна битта биринчи интеграл олишга эришсак, яъни номаълум функциялар сони нечта бўлса, шунча эркли биринчи интеграллар ҳосил қилсак, у ҳолда системани интеграллаш масаласи ҳал бўлар эди. Биринчи интеграллардан изланаётган функцияларни t ва ихтиёрий ўзгармаслар орқали ифодалаш мумкин бўлар эди. Келтирилган мисолда яна битта интегралловчи комбинацияни бундай содда усулда топишга эриша олмаймиз. Бироқ бир нечта биринчи интегралнинг маълум бўлиши масаланинг ечилишини осонлаштиради: ҳар қайси биринчи интеграл тенглама тартибини бир бирликка пасайтиришга имкон беради.

Ҳақиқатан ҳам, учта дифференциал тенглама системаси битта учинчи тартибли дифференциал тенгламага келтирилиши керак. (12) нинг учинчи тенгламасини t бўйича дифференциаллаймиз:

$$z'' = x' - y'.$$

Биринчи иккита тенгламадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$z'' = x + y - 2z.$$

Энди (13) биринчи интегралдан $x + y = C_1 - z$ ни ҳосил қилиш мумкин, бу z учун учинчи эмас, балки иккинчи тартибли тенгламани беради:

$$z'' + 3z = C_1. \tag{15}$$

Яна бир (14) биринчи интегралдан фойдаланиш тартибни яна бир бирликка пасайтиришга имкон берар эди, лекин бундай қилиб ўтирмаймиз, (15) тенглама осон интегралланади, чунки у коэффициентлари

---

* Биз қараётган хусусий ҳолларда эркли ўзгарувчи ҳосил қилинган муносабатларга кирмайди.

ўзгармас бўлган чизиқли тенгламадир. Аниқмас коэффициентлар усулини (16- § га қаранг) қўлланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z = \frac{1}{3} C_1 + C_2 \cos t \sqrt{3} + C_3 \sin t \sqrt{3} \cdot \qquad (16)$$

Сўнгра

$$x + y = z'' + 2z,$$
$$x - y = z'$$

бўлгани сабабли x ва y номаълум функцияларни аниқлаш учун ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{2}{3} C_1 - C_2 \cos t \sqrt{3} - C_3 \sin t \sqrt{3}, \\ x - y &= \sqrt{3}\, C_3 \cos t \sqrt{3} - \sqrt{3}\, C_2 \sin t \sqrt{3}. \end{aligned}\right\}$$

Системанинг ечимлари:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} C_1 - \frac{C_2 - \sqrt{3} C_3}{2} \cos t \sqrt{3} - \frac{C_3 + \sqrt{3} C_2}{2} \sin t \sqrt{3}, \\ y &= \frac{1}{3} C_1 - \frac{C_2 + \sqrt{3}\, C_3}{2} \cos t \sqrt{3} - \frac{C_3 - \sqrt{3} C_2}{3} \sin t \sqrt{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

(16) ва (17) ифодалар (12) системанинг ечими бўлади.

Айрим ҳолларда интегралланувчи комбинацияни ўзгарувчиларни тегишлича алмаштириб топиш мумкин.

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= y \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

дифференциал тенгламалар системасини ечамиз.

Иккала тенгламани қўшиб,

$$y' + z' = y + z \qquad (19)$$

ни ҳосил қиламиз. $y + z = u$ ўрнига қўйиш (19) тенгламани $u' = u$ кўринишга келтиради, бу ердан

$$u = C_1 e^x \qquad (20)$$

ни топиш осон. Шундай қилиб,

$$y + z = C_1 e^x \qquad (21)$$

ёки дифференциаллашдан сўнг:

$$y' + z' = C_1 e^x . \qquad (22)$$

(22) тенгламада z' ни y билан алмаштириб, биринчи тартибли

$$y' + y = C_1 e^x$$

чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз, бу тенгламани ечсак (4- § га қ.):

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

(21) тенгламадан эса

$$z = \frac{1}{2} C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

келиб чиқади.

22- §. ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ СИСТЕМАЛАР

Агар $f_1, f_2, \ldots, f_n$ функциялар изланаётган функцияларга нисбатан *чизиқли* бўлса, дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси *чизиқли* система дейилади. Бу таърифдан чизиқли система ушбу кўринишда бўлиши келиб чиқади:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

бу ерда барча a_{ik} коэффициентлар ва $b_k (i, k = 1, 2, \ldots, n)$ «озод ҳадлар», умуман айтганда, x нинг ихтиёрий функцияларидир.

Агар вектор-матрица белгилашлардан фойдалансак, (1) чизиқли системани оддий ва қисқача ёзиш мумкин. Компонентлари $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ бўлган $Y(x)$ векторни киритамиз ва уни устун матрица шаклида, яъни n та сатрли ва битта устунли матрица шаклида ёзамиз:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Бундай векторнинг *ҳосиласи* элементлари дастлабки вектор элементларининг ҳосилаларидан иборат бўлган янги устун матрицадан иборат деб айтишимиз табиийдир:

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}.$$

У ҳолда компоненталари (1) системанинг озод ҳадларидан иборат векторни B орқали, система коэффициентлари матрицасини эса A орқали белгиласак:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

у ҳолда (1) системани векторлар қатнашган

$$\frac{dY}{dx} = AY + B$$

тенглик кўринишида ёзиш мумкин. Бу тенглик *дифференциал тенгламалар чизиқли системасининг вектор-матрица шаклидаги ёзуви* дейилади.

Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли системани текшириш билан чекланамиз, яъни (1) системада

$$a_{ik} = \text{const}\ (i,\ k = 1,2,\ldots, n);\ b_i = 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$$

деймиз. Шундай қилиб, система қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

(2) системани битта тенгламага келтириш натижаси ўзгармас коэффициентлари бир жинсли чизиқли тенглама бўлади. Шунинг учун (2) система ечимларини кўрсаткичли функциялар кўринишида излаш табиийдир.

Аниқлик учун учта номаълум функцияли ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли системани қараймиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= a_{31}\,y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Хусусий ечимни

$$y_1 = k_1e^{rx}, \quad y_2 = k_2e^{rx}, \quad y_3 = k_3e^{rx} \qquad (4)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда k_1, k_2, k_3, r ўзгармаслар бўлиб, уларни агар иложи бўлса, (4) функциялар (3) системани қаноатлантирадиган қилиб танлаш керак.

Изланаётган функциялар учун (4) ифодаларни (3) системага қўямиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} rk_1e^{rx} &= a_{11}k_1e^{rx} + a_{12}k_2e^{rx} + a_{13}k_3e^{rx}, \\ rk_2e^{rx} &= a_{21}k_1e^{rx} + a_{22}k_2e^{rx} + a_{23}k_3e^{rx}, \\ rk_3e^{rx} &= a_{31}k_1e^{rx} + a_{32}k_2e^{rx} + a_{33}k_3e^{rx} \end{aligned}$$

ёки e^{rx} га қисқартириб ва барча ҳадларни ўнг томонга ўтказсак,

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - r)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 &= 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r)k_2 + a_{23}k_3 &= 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r)k_3 &= 0. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

(5) системани учта k_1, k_2, k_3 номаълумли учта алгебраик тенгламадан иборат бир жинсли система деб қараш мумкин. (5) система нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир (бир жинсли тенглама тўғрисидаги теоремага кўра). Бу шарт қуйидагидан иборат:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - r & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - r \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

(6) тенглама (3) *системанинг характеристик тенгламаси* дейилади. У учинчи тартибли тенгламадир ва r сон (6) характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда ва фақат шундагина (4) кўринишдаги ечим мавжуд бўлади. Бу

ерда биз дуч келишимиз мумкин бўлган барча ҳолларнинг анализи ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-r. \end{pmatrix} \qquad (7)$$

характеристик матрицанинг хоссаларини муфассал ўрганишни талаб этади.

Энг содда ҳол билан чекланамиз. (6) тенгламанинг барча илдизлари ҳар хил ва (7) матрицада r нинг бу илдизларга тенг қийматларида нолдан фарқли, ҳеч бўлмаганда битта иккинчи тартибли детерминант мавжуд бўлсин. Бундай ҳолда (6) характеристик тенгламанинг ҳар бир r_1, r_2, r_3 илдизига (4) ечим мос келиб, унинг k_1, k_2, k_3 коэффициентлари тегишли (5) системадан пропорционаллик кўпайтувчиси аниқлигида топилади. Ихтиёрий ўзгармас коэффицентли барча хусусий ечимларнинг чизиқли комбинацияси умумий ечимни беради.

Характеристик тенглама комплекс илдизларга эга бўлган ҳолда $\alpha \pm \beta i$ комплекс илдизлар жуфтига мос келадиган ечимларни III бобдагига ўхшаш Эйлер формуласидан фойдаланиб тузиш мумкин. Бу $e^{\alpha x} \cos \beta x$ ва $e^{\alpha x} \sin \beta x$ кўринишдаги функцияларга эга бўлган ҳақиқий ечимлар жуфтини беради.

Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = y$$

дифференциал тенгламалар системасини ечамиз (254- бетдаги мисолга қаранг).

(6) характеристик кўпҳад

$$\begin{vmatrix} -r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0$$

кўринишга эга, яъни $r^2 - 1 = 0$, бу ердан $r_{1,2} = \pm 1$. $r = 1$ бўлганда k_1 ва k_2 коэффициентларни топиш учун хизмат қиладиган (5) система қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} -k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 - k_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Бу системадан $k_2^{(1)} = k_1^{(1)}$ ни ҳосил қиламиз. $r = -1$ учун

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 = 0, \\ k_1 + k_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

бу ердан $k_2^{(2)} = -k_1^{(2)}$. Шундай қилиб, ечимларнинг иккита системасини ҳосил қиламиз:

$$y^{(1)} = k_1^{(1)} e^x, \quad z^{(1)} = k_1^{(1)} e^x,$$
$$y^{(2)} = k_1^{(2)} e^{-x}, \quad z^{(2)} = -k_1^{(2)} e^{-x}.$$

$k_1^{(1)}$ ва $k_1^{(2)}$ коэффициентларга ихтиёрий сонли қийматлар бериш мумкин. $k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = 1$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y^{(1)} = e^x, \quad z^{(1)} = e^x,$$
$$y^{(2)} = e^{-x}, \quad z^{(2)} = -e^{-x},$$

демак, умумий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad z = C_1 e^x - C_2 e^{-x},$$

бу, C_1 ни $C_2/2$ га алмаштирсак, 21- § да ҳосил қилинган ечим билан бир хил бўлади.

Ушбу дифференциал тенгламалар системасини ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -7y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -2y_1 - 5y_2. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг характеристик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } r^2 + 12r + 37 = 0,$$

бу ердан $r_{1,2} = -6 \pm i$. Агар $r_1 = -6 + i$ бўлса, k_1, k_2 коэффициентларни топиш учун

$$\left.\begin{aligned} (-1-i)\,k_1 + k_2 &= 0, \\ -2k_1 + (1-i)\,k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу ердан $k_2 = (1+i)k_1$; $k_1 = 1$ деб иккита хусусий ечимни ҳосил қиламиз:

$$y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}, \quad y_2^{(1)} = (1+i)\,e^{(-6+i)x}.$$

$r = -6 - i$ бўлганда k_1 ва k_2 коэффициентлар ушбу алгебраик тенгламалар системасидан топилади:

$$\left.\begin{aligned} (-1+i)k_1 + k_2 &= 0, \\ -2k_1 + (1+i)\,k_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

демак, $k_2 = (1-i)k_1$, бу $k_1 = 1$ да

$$y_1^{(2)} = e^{(-6-i)x}, \quad y_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)x}$$

хусусий ечимларни беради.

Ҳосил қилинган хусусий ечимлар ўрнига уларнинг комбинацияларини олиш мумкин:

$$\tilde{y}_1^{(1)} = \frac{y_1^{(1)} + y_1^{(2)}}{2} = \frac{e^{(-6+i)x} + e^{(-6-i)x}}{2} = e^{-6x}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = e^{-6x}\cos x,$$

$$\tilde{y}_1^{(2)} = \frac{y_1^{(1)} - y_1^{(2)}}{2i} = \frac{e^{(-6+i)x} - e^{(-6-i)x}}{2i} = e^{-6x}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} =$$

$$= e^{-6x}\sin x,$$

$$\tilde{y}_2^{(1)} = \frac{y_2^{(1)} + y_2^{(2)}}{2} = \frac{(1+i)\,e^{(-6+i)x} + (1-i)\,e^{(-6-i)x}}{2} =$$

$$= e^{-6x}\frac{(1+i)\,e^{ix} + (1-i)\,e^{-ix}}{2} = e^{-6x}\left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \right.$$

$$\left. + i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}\right] = e^{-6x}(\cos x - \sin x),$$

$$\tilde{y}_2^{(2)} = \frac{y_2^{(1)} - y_2^{(2)}}{2i} = \frac{(1+i)\,e^{(-6+i)x} - (1-i)\,e^{(-6-i)x}}{2i} =$$

$$= e^{-6x}\frac{(1+i)\,e^{ix} - (1-i)e^{-ix}}{2i} =$$

$$= e^{-6x}\left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right] = e^{-6x}(\sin x + \cos x).$$

Булар ҳақиқий функциялардир. Шундай қилиб, системанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_1 = C_1 e^{-6x}\cos x + C_2\, e^{-6x}\sin x,$$
$$y_2 = C_1 e^{-6x}(\cos x - \sin x) + C_2 e^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

ёки

$$y_1 = e^{-6x}\,(C_1\cos x + C_2\sin x),$$
$$y_2 = e^{-6x}[(C_1 + C_2)\cos x - (C_1 - C_2)\sin x].$$

23- §. ФИЗИКАВИЙ ВА БОШҚА МИСОЛЛАР

1- мисол. (Модданинг парчаланиши.) *A* модда *P* ва *Q* моддаларга парчаланади. Уларнинг ҳар бирининг ҳосил бўлиш тезлиги *A* модданинг парчаланмаган миқдорига пропорционал. *P* ва *Q* моддаларнинг миқдорлари x ва y ни t вақтга боғлиқ равишда ўзгариш қонунларини топинг. Бунда парчаланиш процесси бошлангандан 1 соатдан кейин x ва y мос равишда $a/8$ ва $3a/8$ га тенглиги маълум, бу ерда a катталик *A* модданинг дастлабки миқдори.

Ечилиши. Вақтнинг t моментида A модданинг миқдори $a-x-y$ га тенг, бинобарин, ушбу биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системасига эгамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1(a-x-y), \\ \frac{dy}{dt} &= k_2(a-x-y). \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини биринчи тенгламанинг мос қисмларига бўламиз; у ҳолда $\frac{dy}{dx}=\frac{k_2}{k_1}$; бу ердан $y=k_2x/k_1+C$. Сўнгра $t=0$ да $x=y=0$ бўлгани учун $C=0$, ва шунинг учун $y=k_2x/k_1$.

Биринчи тенгламада y ни k_2x/k_1 билан алмаштириб,

$$\frac{dx}{dt}+(k_1+k_2)x=k_1a$$

ни топамиз. Биринчи тартибли бу чизиқли тенгламанинг умумий ечими

$$x=\frac{k_1a}{k_1+k_2}+C_1e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Бошланғич шартлардан ($t=0$ да $x=0$) фойдаланиб, $C_1=-k_1a/(k_1+k_2)$ ни топамиз, демак,

$$x=\frac{k_1a}{k_1+k_2}(1-e^{-(k_1+k_2)t}).$$

x нинг бу ифодасини $y=k_2x/k_1$ тенгликка қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y=\frac{k_2a}{k_1+k_2}(1-e^{-(k_1+k_2)t}).$$

Вақт бирлиги учун соатни қабул қиламиз. $t=1$ да $x=a/8$ ва $y=3a/8$ эканлигини билган ҳолда k_1 ва k_2 коэффициентларни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_1}{k_1+k_2}(1-e^{-(k_1+k_2)}) &= \frac{1}{8}, \\ \frac{k_2}{k_1+k_2}(1-e^{-(k_1+k_2)}) &= \frac{3}{8}. \end{aligned}\right|$$

Иккала тенгламанинг мос қисмларини қўшиб, $1-e^{-(k_1+k_2)}={}^1/_2$ ни топамиз, бу ердан $e^{-(k_1+k_2)}=2^{-1}$ ва $k_1+k_2=\ln 2$.

Иккинчи тенгламанинг иккала қисмини биринчи тенгламанинг мос қисмларига бўлиб, $k_2 = 3\,k_1$ ни топамиз. Шундай қилиб, $k_1 = \frac{1}{4}\ln 2$, $k_2 = \frac{3}{4}\ln 2$ ва изланаётган ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{4}\left(1-2^{-t}\right), \\ y &= \frac{3a}{4}\left(1-2^{-t}\right). \end{aligned}\right\}$$

2-мисол. (Бактерияларнинг кўпайиши.) Баъзи бир бактериялар ўзларининг бор бўлган миқдорларига пропорционал равишда кўпаяди, бироқ худди шу пайтнинг ўзида улар заҳар ишлаб чиқариб, бу заҳар уларни бактериялар миқдорига пропорционал равишда қириб туради. Заҳар ишлаб чиқариш тезлиги бор бўлган бактериялар миқдорига пропорционал. Бактериялар сони N дастлаб энг катта M қийматгача ўсишини, сўнгра нолгача камайишини кўрсатинг; вақтнинг t моментида у $N = \frac{M}{\mathrm{ch}^2\,(kt/2)}$ формула билан аниқланишини кўрсатинг, бу ерда t вақт $N = M$ бўлган моментдан бошлаб ҳисобланади.

Ечилиши. Заҳар миқдорини x орқали белгилаймиз. Масала шартига кўра ушбу дифференциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$\frac{dN}{dt} = kN - k_1 N x, \qquad \frac{dx}{dt} = k_2 N. \tag{3}$$

Бу ерда $\frac{dN}{dt}$ ва $\frac{dx}{dt}$ мос равишда бактерияларнинг кўпайиш ва заҳар ишлаб чиқариш тезликлари, k, k_1 ва k_2 эса пропорционаллик коэффициентлари.

(3) нинг биринчи тенгламасининг иккала қисмини иккинчи тенгламанинг мос қисмларига бўлиб, ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{k}{k_2} - \frac{k_1}{k_2}x,$$

бу ердан

$$N = \frac{k}{k_2}x - \frac{k_1}{2k_2}x^2 + C_1.$$

$N=0$ да $x=0$ бўлгани учун $C_1=0$ ва бактериялар сони билан заҳар миқдори орасидаги боғланиш

$$N = ax - bx^2 \tag{4}$$

формула орқали аниқланади, бу ерда

$$k/k_2 = a, \ \ k_1/(2k_2) = b \tag{5}$$

деб белгиланган.

$y=N(x)$ функциянинг графиги координаталар боши ва $A\left(\frac{a}{b};\ 0\right)$ нуқтадан ўтувчи, симметрия ўқи Oy ўққа параллел бўлган ва учи $O_1\left(\frac{a}{2b};\ \frac{a^2}{4b}\right)$ нуқтада бўлган параболадан иборат. Демак,

$$N_{\max} = M = \frac{a^2}{4b} = \frac{k^2}{2k_1k_2} \tag{6}$$

Энди бактериялар миқдорини t вақтга боғланишини топамиз. Бунинг учун (4) тенгликни

$$bx^2 - ax + N = 0$$

кўринишга келтирамиз ва уни x га нисбатан ечамиз:

$$x = \frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{N}{b}}\,.$$

x нинг N орқали бу ифодасини (3) тенгламаларнинг биринчисига қўямиз; у ҳолда

$$\frac{dN}{dt} = kN - \frac{k_1a}{2b}N \mp k_1N\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{N}{b}}. \tag{7}$$

(5) ва (6) муносабатларни кўздан кечириб, ўнг томондаги дастлабки иккита сон ўзаро қисқариб кетишини кўрамиз, кейинги сон эса $\mp kN\sqrt{1-N/M}$ га тенг. Шунинг учун (7) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{dN}{dt} = \mp kN\sqrt{1 - \frac{N}{M}}\,,$$

бу эса ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратсак, у қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{dN}{N\sqrt{1-N/M}} = \mp k\,dt. \tag{8}$$

$I = \int \frac{dN}{N\sqrt{1-N/M}}$ интегрални $\sqrt{1-N/M} = y$ ўрнига қўйиш билан ечамиз, бу ўрнига қўйишдан $N = M(1-y^2)$, $dN = -2Mydy$. Шунинг учун

$$I = -2\int \frac{dy}{1-y^2} = \ln\frac{1-y}{1+y} + C_2.$$

Шундай қилиб, (8) тенгламанинг умумий интеграли қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\ln\frac{1-y}{1+y} + C_2 = \mp kt.$$

Ихтиёрий C_2 ўзгармасни $t = 0$ да $N = M$ бошланғич шартдан топамиз: $y = 0$, демак, $C_2 = 0$, бинобарин, (8) тенгламанинг хусусий интеграли қуйидагича бўлади:

$$\frac{1-y}{1+y} = e^{\mp kt},$$

бу ердан

$$y = \frac{e^{\pm kt/2} - e^{\mp kt/2}}{e^{\pm kt/2} + e^{\mp kt/2}} \quad \text{ёки} \quad y = \pm \operatorname{th}\frac{kt}{2}.$$

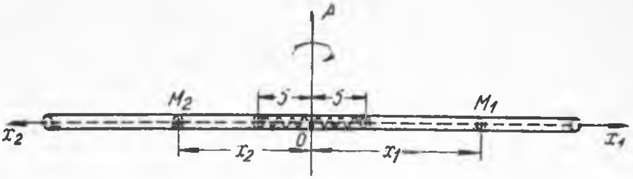
Аввалги N ва M катталикларга қайтиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{1-\frac{N}{M}} = \pm \operatorname{th}\frac{kt}{2}.$$

Бунинг иккала қисмини квадратга ошириб, N га нисбатан ечамиз:

$$N = M\left(1 - \operatorname{th}^2\frac{kt}{2}\right) \quad \text{ёки} \quad N = \frac{M}{\operatorname{ch}^2(kt/2)}.$$

3-мисол. (Шарчаларнинг найчадаги ҳаракати.) Горизонтал найча 2 рад/сек бурчак тезлик билан вертикал ўқ атрофида айланади. Найчада массалари $m_1 = 300$ г ва $m_2 = 200$ г бўлган иккита шарча жойлашган. Улар узунлиги $l = 10$ см бўлган эластик пружина орқали бир-бири билан боғланган бўлиб, пружина чўзилмаган ва шарчалар айланиш ўқидан бир хилда узоқлашган (48-расм). Шарчалар кўрсатилган ҳолатда бирор механизм ёрдамида ушлаб турилади. Бошланғич моментда механизм ишлашдан тўхтайди ва шарчалар ҳаракатга келади. Агар 24000 дина куч пружинани 1 см чўзиши мумкин бўлса, ҳар бир шарчанинг найчага нисбатан ҳаракат қонунини топинг.



48- расм.

Ечилиши. Оғирроқ шарчанинг координатасини (найчага нисбатан) x_1 орқали, енгилроқ шарчанинг координатасини x_2 орқали белгилаймиз, бунда саноқни айланиш ўқидан бошлаб ҳисоблаймиз ва ўнг томонга йўналишни мусбат деб ҳисоблаймиз (48- расм).

Агар масала шартига мувофиқ $F_1 = kx$ деб олсак (бу ерда F_1 пружинанинг ҳар қайси шарчага таъсир кучи, x — пружинанинг деформацияси), у ҳолда $k = 24000$ бўлади.

Ҳар қайси шарча нисбий ҳаракатининг дефференциал тенгламасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= m_1\omega^2 x_1 - k(x_1 - x_2 - 10), \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt} &= m_2\omega^2 x_2 + k(x_1 - x_2 - 10). \end{aligned}\right| \qquad (9)$$

Ҳосил қилинган дифференциал тенгламалар системаси нормал эмас, бироқ юқорида қаралган усуллар ёрдамида ечилиши мумкин. Биринчи тенгламанинг иккала қисмини иккинчи тенгламанинг мос қисмлари билан қўшсак:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = \omega^2 (m_1x_1 + m_2x_2).$$

$m_1x_1 + m_2x_2 = u$ деб белгилаб, $u'' - \omega^2 u = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг умумий ечими: $u = C_1\text{ch}\,\omega t + C_2\text{sh}\omega t$ ёки $3x_1 + 2x_2 = \overline{C}_1\,\text{ch}\,2 + \overline{C}_2\,\text{sh}\,2t$, бу ерда шартга кўра $\omega = 2$ деб олинган ва $C_1/100 = \overline{C}_1$ ҳамда $C_2/100 = \overline{C}_2$ деб белгилапган. Бошланғич шартлар $t = 0$ да $x_1 = 5$, $x_1' = 0$, $x_2 = -5$, $x_2' = 0$.

$3x_1' + 2x_2' = 2(\overline{C}_1\,\text{sh}\,2t + \overline{C}_2\,\text{ch}\,2t)$ ни ҳисоблаймиз ва бу ерга ҳамда $3x_1 + 2x_2$ ифодага уларнинг $t = 0$ даги қийматларини қўямиз, у ҳолда $\overline{C}_1 = 5$, $\overline{C}_2 = 0$ ва демак, $3x_1 + 2x_2 = 5(e^{2t} - e^{-2t})/2$ ёки $3x_1 + 2x_2 = 5\text{ch}\,2t$.

Бу ердан $x_2 = \frac{5}{2}\operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2}x_1$ ни топамиз ва уни қуйидагича ўзгартирилган системанинг биринчи тенгламасига қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= -76x_1 + 80x_2 + 800, \\ x_2'' &= 120x_1 - 116x_2 - 1200. \end{aligned}\right\}$$

Ўрнига қўйиш x_2 ўзгарувчини йўқотади ва фақат x_1 ҳамда x_1'' ларга эга бўлган тенгламага олиб келади:

$$x_1'' = -76x_1 + 80\left(\frac{5}{2}\operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2}x_1\right) + 800$$

ёки

$$x_1'' + 196x_1 = 200\operatorname{ch} 2t + 800.$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $X_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t$. Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими $\bar{x}$ ни $\bar{x}_1 = A\operatorname{ch} 2t + B$ кўринишида излаймиз.

Бу ҳолда $\bar{x}_1'' = 4A\operatorname{ch} 2t$ бўлгани учун $\bar{x}_1$ ва $\bar{x}_1''$ ни дифференциал тенгламага қўйиб, ушбу айниятни ҳосил қиламиз:

$$200A\operatorname{ch} 2t + 196B = 200\operatorname{ch} 2t + 800,$$

бу ердан $A = 1$, $B = 200/49$ ни топамиз; демак, $\bar{x}_1 = \operatorname{ch} 2t + 200/49$ ва x_1 умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$x_1 = C_1 \cos 14t + C_2 \sin 14t + \operatorname{ch} 2t + \frac{200}{49}.$$

C_1 ва C_2 ларни топиш қолди. Бошланғич шартлардан: $5 = C_1 + 1 + 200/49$, бу ердан $C_1 = -4/49$; $14C_2 = 0$, демак, $C_2 = 0$.

Массаси 300 г бўлган шарча учун унинг ҳаракат қонуни узил-кесил

$$x_1 = \operatorname{ch} 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49} \tag{10}$$

бўлади.

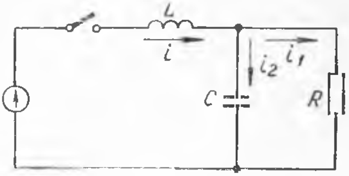
Массаси 200 г бўлган шарчанинг ҳаракат қонунини топиш учун (10) ни x_2 нинг x_1 орқали ифодасига қўямиз, натижада:

$$x_2 = \frac{5}{2}\operatorname{ch} 2t - \frac{3}{2}\left(\operatorname{ch} 2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}\right)$$

ёки

$$x_2 = \operatorname{ch} 2t + \frac{6}{49}\cos 14t - \frac{300}{49}. \tag{11}$$

4-мисол. (Занжирни электр юритувчи кучи ўзгармас бўлган манбага улаш.) L индуктивлик C сиғим ва R қаршилик 49-расмда тасвирланган схема бўйича уланган. Занжир ўзгармас э. ю. к. E га тенг бўлган манбага уланади, бунда уланишга қадар занжирда ток ва заряд бўлмайди. Ўзиндукция ғалтагидан ўтадиган i токни t вақтнинг функцияси каби топинг.



49-расм.

Ечилиши. Ўнг контурдаги токларни i_1 ва i_2 орқали белгилаб, Кирхгоф қонуни асосида масаланинг тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_1)\,d\tau = E, \\ Ri_1 - \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_1)\,d\tau = 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

бу ерда $i - i_1 = i_2$. Бу системадан i_1 ни йўқотамиз. Иккала тенгламанинг мос қисмларини қўшамиз:

$$L\frac{di}{dt} + Ri_1 = E. \tag{13}$$

(12) нинг биринчи тенгламасининг иккала қисмини t бўйича дифференциалласак,

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}i_1 = 0$$

ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$i_1 = CL\frac{d^2i}{dt^2} + i.$$

i_1 ни (13) тенгламага қўйсак,

$$L\frac{di}{dt} + CLR\frac{d^2i}{dt^2} + Ri = E$$

ёки i_1 ток иштирок этмаган

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{di}{dt}+\frac{1}{CL}i+\frac{E}{CLR} \qquad (14)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (14) тенгламани ечамиз. Унинг характеристик тенгламаси илдизлари $r_{1,2}=-\alpha\pm\beta$ га тенг, бу ерда қуйидагича белгиланган. $1/(2CR)=\alpha$, $\sqrt{\alpha^2-1/(CL)}=\beta$.

Дастлаб $\alpha^2>1/(CL)$ деб фараз қиламиз. У ҳолда мос бир жинсли тенгламанинг ечими қуйидагича бўлади:

$$z=e^{-\alpha t}(C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t).$$

Бир жинсли бўлмаган (14) тенгламанинг хусусий ечими $\bar{i}$ ни $\bar{i}=A$ кўринишда излаймиз. У ҳолда $\bar{i}'=\bar{i}''=0$ ва $A/(CL)=E/(CLR)$, бу ердан $A=E/R$.

Демак, $\bar{i}=E/R$, (14) тенгламанинг $\bar{i}+z$ га тенг бўлган умумий ечими i ушбу кўринишда бўлади:

$$i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}(C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t). \qquad (15)$$

C_1 ва C_2 ни бошланғич шартлардан топамиз. $t=0$ да $i=0$ бўлгани учун (15) дан: $\frac{E}{R}+C_1=0$, бу ердан $C_1=-\frac{E}{R}$ ва шунинг учун $i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}\left(C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{ch}\beta t\right)$.

$\frac{di}{dt}$ ни ҳисоблаймиз. Қуйидагига эгамиз:

$$\frac{di}{dt}=e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{ch}\beta t\right)+\beta\left(C_2\operatorname{ch}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{sh}\beta t\right)\right].$$

Бу ерда $t=0$ деб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\alpha E}{R}+\beta C_2.$$

Энди C_2 ни ҳам топсак бўлади. $t=0$ да фақат $i=0$ эмас, балки $i_1=0$ ҳам эканлигини назарда тутсак, (13) тенгламадан $\frac{L\alpha E}{R}+L\beta C_2=E$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан

$$C_2=\frac{E}{L\beta}\left(1-\frac{L\alpha}{R}\right)=\frac{E}{R\beta}\left(\frac{R}{L}-\alpha\right).$$

$\alpha^2 > 1/(CL)$ бўлган ҳол учун i хусусий ечим узил-кесил қуйидагича ёзилади:

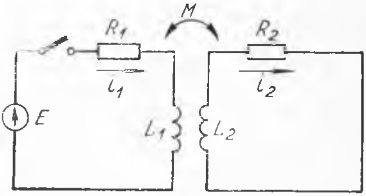
$$i = \frac{E}{R}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left[\operatorname{ch}\beta t + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{E}{L\beta}\right)\operatorname{sh}\beta t\right]\right\}.$$

Энди $\alpha^2 < 1/(CL)$ деб фараз қиламиз. У ҳолда β мавҳум сон бўлади ва $\beta = j\omega_1\sqrt{-1}$ деймиз, бу ерда ω_1 ҳақиқий сон $\sqrt{1/(CL) - \alpha^2}$ га тенг.

Бу ҳолда i хусусий ечимни қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$i = \frac{E}{R}\{1 - e^{-\alpha t}[\cos\omega_1 t + (\alpha/\omega_1 - R/L\omega_1)\sin\omega_1 t]\}.$$

5-мисол. (Индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжирни улаш.) Электр юритувчи кучи E ўзгармас бўлган манбага 50-расмда тасвирланган индуктив боғланган иккита контурдан иборат занжир уланади. Агар занжирга улаш ноль бошланғич шартларда амалга оширилса, шу билан бирга $L_1L_2 \neq M^2$ бўлса, ҳар иккала контурдаги i_1 ва i_2 токларни t вақтга боғлиқ равишда топинг.



50- расм

Ечилиши. Кирхгоф қонунига асосан масалага доир дифференциал тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M\frac{di_2}{dt} = E,\\ L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M\frac{di_1}{dt} = 0.\end{aligned}\right| \qquad (16)$$

Бу ерда M — контурларнинг ўзаро индуктивлик коэффициенти; қолган белгилашлар олдинги масаладагига ўхшаш.

(16) тенгламалар системасидан $\frac{di_2}{dt}$ ни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламанинг иккала томонини L_2 га, иккинчи тенгламаникини эса $-M$ га кўпайтирамиз ва уларни қўшамиз. У ҳолда

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{di_1}{dt} + L_2R_1i_1 - MR_2i_2 = L_2E,$$

бу тенгламанинг иккала қисмини L_1L_2 га бўлиб, $M^2/(L_1L_2) = k^2$, $R_1/L_2 = 2\alpha_1$, $R_2/L_2 = 2\alpha_2$ белгилашлар киритсак, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$(1-k^2)\frac{di_1}{dt} + 2\alpha_1 i_1 - \frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1} i_2 = \frac{2\alpha_1 E}{R_1}. \qquad (17)$$

Бу тенгламанинг иккала қисмини дифференциаллаймиз, $\frac{di_2}{dt}$ нинг ифодасини топиб, уни (16) тенгламаларнинг биринчисига қўямиз:

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{R_1(1-k^2)}{4M\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{R_1}{2M\alpha_2}\frac{di_1}{dt},$$

$$\frac{R(1-k^2)}{4\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{2\alpha_2} + \frac{R_1}{2\alpha_1}\right)\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = E.$$

Ҳосил қилинган тенгламанинг иккала қисмини $\frac{d^2i_1}{dt}$ нинг олдидаги коэффициентга бўламиз:

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{1-k^2}\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} i_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}$$

ёки $(\alpha_1+\alpha_2)/(1-k^2) = \sigma$ деб белгиласак:

$$\frac{d^2i_1}{dt} + 2\sigma\frac{di_1}{dt} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} i_1 = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)}. \qquad (18)$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари $r_{1,2} = -\sigma \pm \beta$ бу ерда $\beta = \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}}$ (β — ҳақиқий сон, чунки радикал остидаги ифода нолдан катта*). У ҳолда мос бир жинсли дифференциал тенгламанинг z умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$z = e^{-\alpha t}(C_1 \operatorname{ch}\beta t + C_2 \operatorname{sh}\beta t).$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламанинг $\bar{i}_1$ хусусий ечимини аниқмас коэффициентлар усули ёрдамида топамиз. $\bar{i}_1 = A$ бўлсин, бу ерда A — топилиши керак бўлган коэффициент.

---

* Ҳақиқатан ҳам,

$$\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2}{(1-k^2)^2} - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2} =$$

$$= \frac{\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 k^2}{(1-k^2)^2} = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 k^2}{(1-k^2)^2} > 0.$$

$\frac{d\overline{i_1}}{dt}=0$ ва $\frac{d^2\overline{i_1}}{dt^2}=0$ бўлганлиги учун (18) дифференциал тенгламадан A га нисбатан алгебраик тенглама келиб чиқади:

$$\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}A=\frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1(1-k^2)},$$

бу ердан $A=E/R_1$.

Шундай қилиб, $\overline{i_1}=E/R_1$, демак (18) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$i_1=\frac{E}{R_1}+e^{-\sigma t}(C_1\operatorname{ch}\beta t+C_2\operatorname{sh}\beta t). \qquad (19)$$

Ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун ушбу бошланғич шартлардан фойдаланамиз: $t_1=0$ да $i_1=0$ ва $i_2=0$.

Буларнинг биринчисини (19) ечимга қўйсак, дарҳол $C_1=-E/R_1$ га эга бўламиз. Шунинг учун (19) ечим қуйидагича ёзилади:

$$i_1=\frac{E}{R_1}+e^{-\sigma t}\left(C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{E}{R_1}\operatorname{ch}\beta t\right). \qquad (20)$$

Ҳосила оламиз:

$$\frac{di_1}{dt}=e^{-\sigma t}\left[-\sigma\left(C_2\operatorname{sh}\beta t-\frac{E}{R_1}\operatorname{ch}\beta t\right)+\right.$$
$$\left.+\beta\left(C_2\operatorname{ch}\beta t-\frac{E}{R}\operatorname{sh}\beta t\right)\right]$$

ва унинг қийматини $t=0$ да ҳисоблаймиз:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0}=\sigma\frac{E}{R_1}+C_2\beta.$$

Ҳосиланинг топилган қийматини ва бошланғич шартлардаги $i_1=i_2=0$ қийматларни (17) тенгламага қўйиб, C_2 ни топиш учун тенглама ҳосил қиламиз:

$$(1-k^2)\left(\frac{\sigma E}{R_1}+C_2\beta\right)=\frac{2\alpha_1 E}{R_1}.$$

$\sigma=(\alpha_1+\alpha_2)/(1-k^2)$ эканлигини назарда тутиб, кейинги тенгламани

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2)E}{R_1}+C_2\beta(1-k^2)=\frac{2\alpha_1 E}{R_1}$$

кўринишга келтирамиз, бу ердан

$$C_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E}{\beta (1 - k^2) R_1}.$$

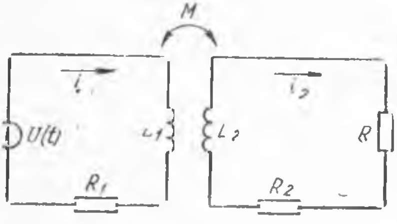
i_1 хусусий ечимни узил-кесил қуйидагича ёзилади:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} 1 + e^{-\sigma t} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta (1 - k^2)} \operatorname{sh} \beta t - \operatorname{ch} \beta t \right] \Bigg\}. \tag{21}$$

i_2 хусусий ечимни (17) муносабатдан топиш мумкин. Бунинг учун у ерда i_1 ва $\frac{di_1}{dt}$ ни юқорида i_1 ни t нинг функцияси сифатида топилган ифодасига [(21) формулага қаранг] ва бу функциянинг t бўйича ҳосиласига алмаштириш керак. Буни мустақил бажаришни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

6-мисол. (Нагрузка уланган ўзгарувчан ток занжиридаги трансформатор.) Нагрузка уланган ўзгарувчан ток занжирига уланган трансформаторнинг иккала контуридаги токларни топинг.

Ечилиши. Маълумки, трансформатор индуктивлик ва ички қаршиликка эга бўлган ва индуктив боғланган иккита контурдан иборат. Шунинг учун 50-расмдаги схемадан фақат иккинчи контурида R нагрузкаси (ташқи қаршилик) бўлиши билан фарқ қиладиган схемага эга бўламиз (51-расм). Бундан ташқари, ток манбаининг электр юритувчи кучи E ўзгармас деб эмас, балки $U(t) = u \cos(\omega t + \varphi_0)$ деб олинади, бу ерда u — амплитуда, ω — частота ва φ_0 — манба кучланишининг бошланғич фазаси.



51- расм.

Кирхгоф қонунларига биноан мазкур ҳолда масалага доир дифференциал тенгламалар системаси (16) га ўхшаш кўринишда бўлади:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} &= U(t), \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + (R_2 + R) i_2 + M \frac{di_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

бу ерда $U(t)$ — манбанинг электр юритувчи кучи. Соддалик учун бошланғич фаза φ_0 ни нолга тенг деб оламиз ва кучланишни $U(t) = u\cos\omega t$ кўринишда ёзамиз.

(22) ни номаълумлари $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$ бўлган иккита алгебраик тенгламадан иборат система деб қараб ва уларни одатдагича ечиб, коэффициентлари ўзгармас бўлган иккита чизиқли тенглама системасига келамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1L_2}{D}i_1 + \frac{M(R_2+R)}{D}i_2 + \frac{L_2U}{D}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{R_1M}{D}i_1 - \frac{L_1(R_2+R)}{D}i_2 - \frac{MU}{D}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

бу ерда $D = L_1L_2 - M^2$ — системанинг детерминанти.

(23) система бир жинсли эмас ва уни ечиш учун дастлаб мос бир жинсли

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1L_2}{D}i_1 + \frac{M\overline{R}}{D}i_2, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{R_1M}{D}i_1 - \frac{L_1\overline{R}}{D}i_2 \end{aligned}\right| \tag{24}$$

система ечиш керак, бу ерда $R_2 + R = \overline{R}$ деб белгиладик. Бу системага 22-§ даги усулларни қўлланамиз. Системанинг характеристик тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{vmatrix} -R_1L_2 - r & M\overline{R} \\ R_1M & -L_1\overline{R} - r \end{vmatrix} = 0,$$

чунки умумий махраж D ни ёзмаса ҳам бўлади. Бу ердан

$$r^2 + (R_1L_2 + \overline{R}L_1)r + R_1\overline{R}D = 0$$

ни ҳосил қиламиз, шунинг учун характеристик тенгламанинг илдизлари

$$r_{1,2} = -\frac{R_1L_2 + \overline{R}L_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1L_2 + \overline{R}L_1}{2}\right)^2 - R_1\overline{R}D} \tag{25}$$

бўлади.

(25) дан кўринишича, $D > 0$ бўлганда характеристик тенглама ё иккита манфий ҳақиқий илдизга, ёки ҳақиқий қисмлари манфий бўлган иккита комплекс илдизга эга бўлади. Бу ҳолда (24) бир жинсли системанинг i_1 туташув экстратокини аниқловчи умумий ечими t ўсиши билан

электроток тебраниш характерига [(25) комплекс илдизлар] ёки нодаврийлик характерига (ҳақиқий илдизлар) эга бўлишидан қатъи назар тез камаяди. Барқарор жараённи ўрганишда ечимнинг бу қисмини эътиборга олмаса ҳам бўлади, шунинг учун умумий ҳолда уни ёзмаймиз.

Қаралаётган схеманинг *идеал трансформатор* деб аталувчи хусусий ҳоли алоҳида қизиқиш уйғотади. Идеал трансформатор ўзининг ички R_1 ва R_2 қаршиликлари кичиклиги билан характерланади, бу қаршиликларни ташқи нагрузка R ва тақрибан нолга тенг бўлган D нинг қийматига нисбатан амалда нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин, бу ердан ушбу тақрибий тенглик келиб чиқади: $M \approx \approx \sqrt{L_1 L_2}$. Бундай фаразларда $\overline{R} = R$ деб ҳисоблаш мумкин ва (25) дан $r_1 \approx 0$, $r_2 \approx -RL_1$ келиб чиқади, демак, (24) бир жинсли системанинг умумий ечимини идеал трансформатор бўлган ҳол учун ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$I_1 = C_1^{(1)} + C_2^{(1)} e^{-RL_1 t}, \quad I_2 = C_1^{(2)} + C_2^{(2)} e^{-RL_1 t}.$$

Иккинчи қўшилувчилар t ўсиши билан тез камаяди; барқарор жараён биринчи қўшилувчилар ва бир жинсли бўлмаган (23) системанинг хусусий ечими билан биргаликда характерланади.

$U(t) = u \cos \omega t$ бўлгани учун бу хусусий ечимларни

$$\left.\begin{aligned} \overline{i}_1 &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ \overline{i}_2 &= P \cos \omega t + Q \sin \omega t \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

кўринишда излаймиз. (26) ни (23) га қўйиб топамиз:

$$D(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) = -R_1 L_2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) +$$

$$+ M\overline{R}(P \cos \omega t + Q \sin \omega t) + L_2 u \cos \omega t,$$

$$D(-P\omega \sin \omega t + Q\omega \cos \omega t) = R_1 M (A \cos \omega t + B \sin \omega t) -$$

$$-L_1 \overline{R}(P \cos \omega t + Q \sin \omega t) - Mu \cos \omega t.$$

Ёзилган тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларидаги $\cos \omega t$ ва $\sin \omega t$ олдидаги коэффициентларни ўзаро тенглаб, тўртта A, B, P, Q номаълумли тўртта чизиқли тенгламадан иборат ушбу системага келамиз:

$$\left.\begin{aligned} BD\omega &= -AR_1 L_2 + PM\overline{R} + L_2 u, \\ -AD\omega &= -BR_1 L_2 + QM\overline{R}, \\ QD\omega &= AR_1 M + PL_1 \overline{R} - Mu, \\ -PD\omega &= BR_1 M + QL_1 \overline{R}. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг ечими (26) хусусий ечимнинг ифодасини беради.

Бу умумий ҳолга тўхталиб ўтирмасдан, яна идеал трансформатор бўлган хусусий ҳолга қайтамиз. Унинг учун ($R_1 \approx \approx R_2 \approx 0, \overline{R} \approx R, D \approx 0, M \approx \sqrt{L_1L_2}$) ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

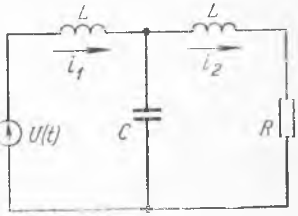
$$PR\sqrt{L_1L_2} + L_2u = 0,\ QR\sqrt{L_1L_2} = 0,$$

бу ердан

$$Q = 0 \text{ ва } P = -\sqrt{L_2/L_1}\, u/R.$$

P нинг топилган қиймати нагрузка занжиридаги ток амплитудасини аниқлайди. У ҳолда нагрузкадаги кучланиш пасайишининг амплитудаси $u_2 = \sqrt{L_2/L_1}u$ га (u — манба кучланишининг амплитудаси) тенг бўлишини қайд қиламиз. Шундай қилиб, $\sqrt{L_2/L_1}$ катталик нагрузка занжиридаги ва манба занжиридаги кучланишлар нисбатини ифодалайди. Уни *трансформация коэффициенти* дейилади. Бироқ электротехникада трансформация коэффициенти кўпинча бошқача кўринишда ёзилади. Цилиндрик чулғамли ғалтакнинг индуктивлиги чулғамлар сони квадратига пропорционал бўлгани учун трансформация коэффициенти трансформатор ўрамининг бирламчи ва иккиламчи чулғамлари сони нисбатига тенг бўлар экан.

7-мисол. (Паст частоталар фильтри.) 52-расмда электр схемаси келтирилган: ўзаро тенг 2 та L индуктивлик, C сиғим ва R нагрузка қаршилиги $U(t) = u\cos\omega t$ қонун бўйича ўзгарадиган кучланиш манбаига уланган. Нагрузкадаги кучланиш пасайиши тебранишларининг характерини аниқланг. Бунда барқарор жараён билан чекланинг.



52- расм.

Ечилиши. Чап ва ўнг контурлардаги токларни мос равишда i_1 ва i_2 орқали белгилаб, сиғим орқали ўтувчи ток $i_2 - i_1$ га тенг эканлигини топамиз. Кирхгоф қонунига кўра i_1 ва i_2 ларга нисбатан ушбу дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} L\frac{di_1}{dt}+L\frac{di_2}{dt}+Ri_2&=U(t),\\ L\frac{di_2}{dt}+Ri_2+\frac{1}{C}\int\limits_0^t(i_2-i_1)\,d\tau&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

(27) нинг иккинчи тенгламасини t бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$L\frac{d^2i_2}{dt^2}+R\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}(i_2-i_1)=0,$$

бу ердан

$$i_1=LC\frac{d^2i_2}{dt^2}+RC\frac{di_2}{dt}+i_2.$$

i_1 нинг ифодасини t бўйича яна дифференциаллаш ва (27) нинг биринчи тенгламасига қўйиш мумкин, у ҳолда тенглама

$$L^2C\frac{d^3i_2}{dt^3}+LRC\frac{d^2i_2}{dt^2}+2L\frac{di_2}{dt}+Ri_2=U(t) \qquad (28)$$

кўринишни олади.

(28) га мос келувчи бир жинсли тенглама барча коэффициентлари мусбат бўлган

$$L^2Cr^3+LRCr^2+2Lr+R=0$$

куб тенгламадан иборат бўлади.

Бундай тенглама мусбат ҳақиқий илдизга эга бўлмаслиги бу ердан кўринади, чунки $r>0$ да чап қисмдаги барча қўшилувчилар мусбат ва уларнинг йиғиндиси нолга тенг бўла олмайди. Бундан ташқари, бундай тенгламанинг мавҳум илдизларининг ҳақиқий қисмлари манфий бўлишини исбот қилиш мумкин.

Шундай қилиб, (28) га мос бир жинсли тенглама умумий ечимининг барча қўшилувчилари манфий кўрсаткичли экспонентларга эга ва шу сабабли t ўсиши билан тез камаяди. Бизни қизиқтирадиган баркарор жараён шунинг учун бир жинсли бўлмаган (28) тенгламанинг хусусий ечими билан тўла аниқланади, уни, $U=u\cos\omega t$ бўлгани учун

$$i_2=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

кўринишда излаймиз.

Бу ифодани дифференциаллаб ва i_2 ни ҳамда унинг ҳосиласини (28) га қўйиб, ушбу тенгламалар системасига келамиз:

$$\left.\begin{aligned} A(-2L\omega + L^2C\omega^3) + B(R - LRC\omega^2) &= 0,\\ A(R - LRC\omega^2) + B(2L\omega - L^2C\omega^3) &= u \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$-2L\varphi + L^2C\omega^3 = \alpha,\ \ R - LRC\omega^2 = \beta$$

белгилашлар киритсак:

$$\left.\begin{aligned} \alpha A + \beta B &= 0,\\ \beta A - \alpha B &= a. \end{aligned}\right\}$$

Бу системадан топамиз:

$$A = \beta u/(\alpha^2 + \beta^2), \qquad B = -\alpha u/(\alpha^2 + \beta^2).$$

$\overline{i_2}$ ечимнинг амплитудаси

$|v| = \sqrt{A^2 + B^2} = |u|/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ муносабат орқали ифодаланади, ёки α ва β ларнинг қийматини эътиборга олсак:

$$|v| = \frac{|u|}{\sqrt{L^2\omega^2(LC\omega^2 - 2)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}}. \tag{29}$$

Нагрузкадаги кучланиш пасайишини (29) дан тенгликнинг иккала қисмини R га кўпайтириб топиш мумкин, чунки $U_2 = Ri_2$.

Тебранишлар частотаси ω нинг нагрузкадаги кучланиш амплитудасининг кириш нагрузкаси амплитудасига нисбатига таъсирини қараб чиқамиз. ω частоталар кичик бўлганда ω^2 ва ундан юқори тартибли катталикларни эътиборга олмаса ҳам бўлади. У ҳолда (29) нинг махражида ω бўлмаган ҳадларгина қолади, демак, радикал остидаги ифода R^2 га тенг бўлади. Демак, $|v| \approx |u|/R$ ва талаб этилаётган нисбат $|v|\cdot R/|u| \approx 1$.

Бу паст частотали тебранишлар берилган схемадан амплитудани амалда (деярли) ўзгартирмасдан ўтишини билдиради. Аксинча, катта ω частоталар учун (29) да илдиз остидаги ифоданинг бош ҳади ω нинг юқори даражали ҳади бўлади. Шу сабабли бундай частоталар учун $|v| \approx |u|/(L^2C\omega^3)$, у ҳолда

$$\frac{|v|R}{|u|} \approx \frac{R}{L^2C\omega^3} \approx 0,$$

яъни юқори частотали тебранишлар берилган схемадан амалда ўтмайди, у паст частоталарни ўтказади ва юқори частоталарни деярли ўтказмайди. Худди ана шу сабабга кўра бундай схема *паст частотали фильтр* дейилади.

8-мисол. (Ҳарбий ҳаракатлар динамикаси.) Математика татбиқларининг кенг ривожланиши математик методлар, хусусан, дифференциал тенгламалар ёрдамида илгари фақат миқдорий мулоҳазалардан нарига ўтиб бўлмайдиган соҳаларга тегишли кўпгина масалаларни ҳал этишга имкон яратди. Шундай соҳалардан бири ҳарбий ишдир. Ҳарбий ҳаракатларнинг энг содда моделидан иборат масалалардан бирини қараб чиқайлик, бундай ҳаракатларда иккита группировка: қизиллар ва кўклар иштирок этади.

Қизилларнинг группировкаси ҳисобида N_1 та, кўкларникида эса N_2 та бир хилдаги ҳарбий бирликлар (танклар, самолётлар, кемалар, ракета установкалари ва ҳ. к.) бўлсин, шу билан бирга уларнинг характери турли группировкаларда турлича бўлиши мумкин; масалан, самолётларнинг танклар билан, ракета установкаларининг кемалар билан жангини қараш мумкин.

Вақтнинг t моментида қизилларнинг ҳарбий бирликлари ўртача сонини m_1 орқали, кўкларникини эса m_2 орқали белгилаймиз ва вақтнинг кичик Δt оралиғида уларнинг ўзгаришини ҳисоблаймиз. Δm_1 ўзгариш кўкларнинг ўққа тутиши туфайли шикастланган ҳарбий бирликларнинг сафдан чиқиши ҳисобига бўлади. Δt вақт ичида кўкларнинг m_2 та ҳарбий бирлигидан ҳар қайсиси $k_2\Delta t$ та муваффақиятли ўқ узади. Бу ерда $k_2 = \lambda_2 p_2$ ўртача ўқ отиш тезлиги (кўкларнинг ҳарбий бирликлари вақт бирлиги ичида ўқ узишлар сони), p_2 — айрим отишда нишонни мўлжалга олиш эҳтимоли.

Шунинг учун

$$\Delta m_1 = - k_2 m_2 \Delta t.$$

Тенгликнинг иккала қисмини Δt га бўлиб, $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтсак, ушбу дифференциал тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{dm_1}{dt} = - k_2 m_2.$$

Юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар юритиб, ушбу иккинчи тенгламани ҳам ҳосил қиламиз:

$$\frac{dm_2}{dt} = - k_1 m_1.$$

Шундай қилиб, бошланғич шартлари $m_1(0) = N_1$, $m_2(0) = N_2$ бўлган дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Бу тенгламалар *жанг динамикаси тенгламалари* ёки *Ланчестр тенгламалари* дейилади.

Системани ечиш учун биринчи тенгламанинг иккала қисмини t бўйича дифференциаллаймиз ва ўнг томондаги $\frac{dm_2}{dt}$ ни унинг иккинчи тенгламадаги ифодаси билан алмаштирамиз. У ҳолда

$$\frac{d^2m_1}{dt^2} = k_1k_2m_1.$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$m_1 = C_1e^{\sqrt{k_1k_2}t} + C_2e^{-\sqrt{k_1k_2}t}$$

кўринишга эга ёки гиперболик функциялардан фойдалансак,

$$m_1 = C_3 \operatorname{ch} \sqrt{k_1k_2}t + C_4 \operatorname{sh} \sqrt{k_1k_2}t$$

кўринишга эга. m_1 ни дифференциаллаб биринчи тенгламадан қуйидагини топамиз:

$$m_2 = -C_3\sqrt{k_1/k_2} \operatorname{sh} \sqrt{k_1k_2}t - C_4\sqrt{k_1/k_2} \operatorname{ch} \sqrt{k_1k_2}t.$$

Ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш учун бошланғич шартлардан фойдаланиб, ушбу қийматларни ҳосил қиламиз: $C_3 = N_1$, $C_4 = -\sqrt{k_2/k_1}N_2$, бу ердан Ланчестр тенгламалари системасининг ечими ушбу кўринишда ҳосил бўлади:

$$m_1 = N_1 \operatorname{ch} \sqrt{k_1k_2}t - N_2\sqrt{k_2/k_1} \operatorname{sh} \sqrt{k_1k_2}t,$$

$$m_2 = -N_1\sqrt{k_1/k_2} \operatorname{sh} \sqrt{k_1k_2}t + N_2 \operatorname{ch} \sqrt{k_1k_2}t.$$

Бу формулаларни абсолют сондан нисбий сонга, яъни сақланиб қолган бирликлар улушига ўтиб соддалаштириш мумкин. Бунинг учун $\mu_1 = m_1/N_1$, $\mu_2 = m_2/N_2$ деб белгилаймиз ва система тенгламаларининг иккала қисмини мос равишда N_1 ва N_2 га бўламиз; у ҳолда тенгламаларнинг янги системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -k_2\frac{N_2}{N_1}\mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -k_1\frac{N_1}{N_2}\mu_1. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани бошланғич шартлар: $t = 0$ бўлганда $\mu_1 = \mu_2 = 1$ да интеграллаш керак. Юқоридаги системани $u_1 = k_1N_1/N_2$, $u_2 = k_2N_2/N_1$ параметрлар киритиб, ихчамроқ кўринишга келтириш мумкин. У ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{dt} &= -u_2\mu_2, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -u_1\mu_1. \end{aligned}\right\}$$

u_1 ва u_2 параметрлар оддий физикавий маънога эга. $u_1 = k_1N_1/N_2$ ифоданинг сурати қизиллар ўзларининг дастлабки составида вақт бирлиги ичида мумкин бўлган ўқ узишлари сони, яъни кўкларнинг вақт бирлиги ичида қизиллар томонидан яксон қилиниши мумкин бўлган бирликларининг ўртача сони. Бу сонни N_2 га бўлиб, кўкларнинг қизиллар вақт бирлиги ичида яксон қилиш мумкин бўлган бирликларининг ўртача миқдорини ҳосил қиламиз. u_1 катталик *қизилларнинг кўкларга таъсир этиш интенсивлигининг характеристикаси* дейилади.

u_2 катталик ҳам шундай маънога эга бўлиб, бунда фақат томонларнинг ўрни алмашган бўлади, у кўкларнинг қизилларга таъсир этиш интенсивлигининг характеристикаси дейилади.

Энг кейинги тенгламалар системаси ушбу кўринишдаги ечимга эга бўлади:

$$\mu_1 = \operatorname{ch}\sqrt{u_1u_2}t - \sqrt{u_2/u_1}\operatorname{sh}\sqrt{u_1u_2}t,$$
$$\mu_2 = \operatorname{ch}\sqrt{u_1u_2}t - \sqrt{u_1/u_2}\operatorname{sh}\sqrt{u_1u_2}t$$

(у юқоридаги системани ўзгарувчиларни тегишлича алмаштириб ечишдан ҳосил бўлган). Бу формулаларни янада соддалаштириш мумкин, бунинг учун «келтирилган вақт» $\tilde{t} = \sqrt{u_1u_2}t$ ни киритиш ва $\sqrt{u_1/u_2} = \varkappa$ деб белгилаш керак. У ҳолда

$$\mu_1 = \operatorname{ch}\tilde{t} - \frac{1}{\varkappa}\operatorname{ch}\tilde{t}, \quad \mu_2 = \operatorname{ch}\tilde{t} - \varkappa\operatorname{sh}\tilde{t}.$$

Агар томонларнинг кучлари тенг, яъни $\varkappa = 1$ бўлса,

$$\mu_1 = \mu_2 = e^{-\tilde{t}}.$$

Бу формулалардан сақланиб қолган ҳарбий бирликларнинг ўртача миқдорлари μ_1 ва μ_2 фақат келтирилган вақт $\tilde{t}$

га эмас, балки $\varkappa$ параметрга ҳам боғлиқлиги келиб чиқади. $\varkappa$ параметр кучлар нисбатини белгилайди:

$$\varkappa = \sqrt{u_1/u_2} = (N_1/N_2)\sqrt{k_1/k_2}.$$

Бу параметр бир томоннинг иккинчи томон олдида устунлигини аниқлайди. $\varkappa > 1$ бўлганда қизиллар кўклардан кучли бўлади ва жанг бир қанча вақтдан сўнг қизилларнинг ғалабаси билан тугайди. $\varkappa < 1$ бўлганда эса аксинча бўлади. $\varkappa = 1$ бўлганда ҳеч бир томон устунликка эриша олмайди.

$\varkappa$ параметрнинг ифодасидан у кучларнинг муносабати N_1/N_2 га эффектив ўқ узиш муносабати k_1/k_2 га нисбатан кўпроқ боғлиқ эканлиги кўринади. Масалан, N_1 нинг икки марта ортиши $\varkappa$ параметрни икки марта орттиради, эффектив тез отиш k_1 нинг икки марта орттирилиши эса $\varkappa$ параметрни фақат $\sqrt{2} = 1{,}4$ марта орттиради.

Бундай турдаги конкрет масалани қараймиз.

Қизиллар ва кўкларнинг икки группа танклари ўртасида жанг кетяпти. Қизилларнинг 50 та танки бўлиб, уларнинг ўртача тез отиши минутига $\lambda_1 = 0{,}25$ ўқ узишдан ва нишонга тегказишнинг ўртача эҳтимоли $p_1 = 0{,}56$ дан иборат. Кўкларда 25 танк бўлиб, уларнинг ўртача тез отиши минутига $\lambda_2 = 0{,}5$, ўқ узишга, нишонга тегказишнинг ўртача эҳтимоли $p_2 = 0{,}5$ га тенг. Жангнинг боришини прогноз қилайлик, яъни жанг қайси томоннинг ғалабаси билан ва тахминан қанча вақтдан сўнг тугашини ҳамда ғолиб чиққан томоннинг йўқотишлари тақрибан қанча бўлишини кўрсатайлик.

Дастлаб қуйидаги коэффициентларни ҳисоблаймиз:

$$u_1 = \frac{\lambda_1 N_1}{N_2} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}56 \cdot 50}{25} = 0{,}28,$$

$$u_2 = \frac{\lambda_2 N_2}{N_1} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 25}{50} = 0{,}125.$$

$u_1 > u_2$ бўлгани учун қизиллар ғалаба қозонади. $\tilde{t} = \sqrt{0{,}28 \cdot 0{,}125}\, t = 0{,}187\, t$ «келтирилган вақт» га ўтамиз ва устунлик коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$\varkappa = \sqrt{0{,}28/0{,}125} \approx 1{,}5.$$

Жанг тугаши моментида $\mu_2 = 0$, демак,

$$\operatorname{ch}\tilde{t} - \varkappa \operatorname{sh}\tilde{t} = 0,$$

бу ердан $\operatorname{th}\tilde{t} = 1/\varkappa = 1/1,5 = 0,667$. Гиперболик тангенслар жадвалидан $\tilde{t} = 0,8$ ни топамиз, ҳақиқий вақтга (минутларда) ўтиб, $t = \tilde{t}/0,187 = 4,28$ (мин) ни топамиз.

Жанг тугаганда қизилларнинг сақланиб қолган танклари улушини аниқлаймиз:

$$\mu_1 = \operatorname{ch} 0,8 - 0,667 \cdot \operatorname{sh} 0,8 = 1,337 - 0,667 \cdot 0,881 =$$
$$= 1,337 - 0,585 = 0,752.$$

Шундай қилиб, танклар жанги тахминан 4,5 мин дан кейин қизилларнинг ғалабаси билан тугайди, бунда ғалаба қозонган томон дастлаб ўзида бор бўлган танкларнинг 25 % га яқинидан, яъни тахминан 12 та танкидан ажралади.

24-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ЕЧИМИНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАЛҚИНИ. ФАЗАЛАР ФАЗОСИ ҲАҚИДА ТУШУНЧА

1-§ даёқ кўрганимиздек, биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама содда геометрик талқинга эга эди: $y' = f(x, y)$ тенглама xOy текисликда *йўналишлар майдонини* аниқлайди. Тенгламанинг ечими интеграл эгри чизиқ бўлиб, у ўзининг ҳар бир нуқтасида майдон аниқлайдиган йўналишга уринади.

Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси ҳам худди шунга ўхшаш геометрик маънога эга. Соддалик учун иккита: $y(x)$ ва $z(x)$ номаълум функцияли иккита оддий дифференциал тенгламадан иборат ушбу системани қараш билан чекланамиз:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бу системанинг умумий ечими қуйидаги функциялар жуфтидан иборатдир:

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x, C_1, C_2), \\ z &= z(x, C_1, C_2). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(2) функцияларнинг ҳар бири уч ўлчовли $Oxyz$ текисликда цилиндрик сиртнинг тенгламасини ифодалайди, улар биргаликда эса бу фазода (1) системанинг интеграл эгри чи-

зинг бўлган эгри чизиқни ифодалайди. Ўз навбатида (1) система фазодаги бирорта соҳанинг ҳар бир (x, y, z) нуқтасида интеграл эгри чизиқ уринадиган йўналишни аниқлайдиган $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{dz}{dx}$ қийматларни аниқлайди.

Шундай қилиб, дифференциал тенгламаларнинг (1) нормал системаси фазода йўналишлар майдонини беради, бу системанинг умумий ечимини топиш геометрик жиҳатдан ўзининг ҳар бир нуқтасида майдон аниқлайдиган йўналишга уринадиган икки параметрли эгри чизиқлар оиласини топишни билдиради.

Юқорида айтилганларни номаълум функциялар сони катта бўлган ҳолда ҳам бемалол такрорлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, n та номаълум функцияли n та оддий дифференциал тенгламанинг

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n' = f_n\ \ (x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\}$$

системаси $(n+1)$ ўлчовли $Oxy_1 \ldots, y_n$ фазода йўналишлар майдонини аниқлайди. Унинг

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 = y_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n = y_n(x, C_1, \ldots, C_n) \end{array}\right\}$$

ечими n та $C_1, \ldots, C_n$ параметрли эгри чизиқлар оиласи бўлиб, уларнинг ҳар бири ўз нуқтасида майдон аниқлайдиган йўналишга уринади.

Кўпгина физикавий масалаларда, хусусан, механикага доир бир қатор масалаларда дифференциал тенгламалар системасида эркли ўзгарувчи ролини t вақт бажаради. Бундай масалалар учун фақат юқорида келтирилган геометрик талқин (унда t вақт фазовий координаталардан бирининг ролини ўйнар эди) қулай бўлмасдан, бошқача, яъни масалага кирадиган ўзгарувчиларнинг турлича табиатларини тўсиб қўймасдан, балки, аксинча, таъкидланадиган ва тўла аниқланадиган талқини қулайдир.

Бу янги геометрик талқин билан танишишни қуйидаги мисолларни қарашдан бошлаймиз.

1-мисол. 18-§ да қаралган гармоник осцилляторнинг тенгламаси

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad (5)$$

кўринишга эга, унинг умумий ечими:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

$t = 0$ берилган бошланғич шартлар $x|_{t=0} = x_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ кўринишда деб фараз қиламиз. У ҳолда ихтиёрий ўзгармаслар учун $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/k$ ни топамиз, натижада бошланғич шартларнинг берилган системасини қаноатлантирадиган хусусий ечим ушбу кўринишда ёзилади:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \qquad (6)$$

(6) функция гармоник тебранаётган моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракат қонунини ифодалайди.

(5) тенглама иккинчи тартибли, уни $v = \frac{dx}{dt}$ функция киритиб биринчи тартибли иккита дифференциал тенгламадан иборат нормал система кўринишига келтириш мумкин. У ҳолда бошланғич шартлари $x|_{t=0} = x_0$, $v|_{t=0} = v_0$ бўлган қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x' &= v, \\ v' &= -k^2x, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(бу ерда штрихлар t бўйича дифференциаллашни билдиради). Бошланғич шартлари берилган (7) системанинг ечими (6) функция ва унинг ҳосиласидан иборат бўлади.

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos kt + (v_0/k) \sin kt, \\ v &= -x_0 k \sin kt + v_0 \cos kt. \end{aligned} \qquad (8)$$

(8) тебранаётган моддий нуқтанинг ҳаракат қонунини ва тезлигининг ўзгариш қонунини ифодалайди.

Юқорида айтилганларга биноан (8) ечим геометрик нуқтаи назардан уч ўлчовли $Otxv$ фазода эгри чизиқ билан тасвирланади. t нинг қиймати эгри чизиқда шундай нуқтани аниқлайдики, унинг координаталари мувозанат ҳолатидан x масофа қийматига ва моддий нуқтанинг берилган t моментидаги тезлиги v нинг қийматига мос келади.

Агар (8) тенгламани уч ўлчовли $Otxv$ фазонинг t, x, v ўқларида эмас, балки t ни параметр деб ҳисоблаб, xOv текисликнинг x, v ўқларида қарасак, ҳаракатга бошқача геометрик маъно бериш мумкин. Бу ҳолда (8) система тенгламасини системадаги тенгламалардан t параметрни йўқотиб ҳосил қилиш мумкин бўлган эгри чизиқни аниқлайди. Шу мақсадда иккинчи тенгламанинг иккала қисмини k га бўламиз, сўнгра иккала тенгламани квадратга оширамиз ва қўшамиз, у ҳолда

$$x^2 + (v/k)^2 = x_0^2 + (v_0/k)^2$$

ёки $\rho_0^2 = x_0^2 + (v_0/k)^2$ белгилаш киритиб ва тенгликнинг иккала қисмини ρ_0 га бўлиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2/\rho_0^2 + v^2/(k\rho_0)^2 = 1. \qquad (9)$$

Бу ерда $\rho_0 = \pm\sqrt{x_0^2 + (v_0/k)^2} > 0$, чунки бошланғич $x_0 = v_0 = 0$ шартларда ечим айнан ноль бўлиб қолар эди, яъни юк қўзғалмасдан қолар эди. (9) тенглама xOv текисликда ярим ўқлари ρ_0 ва $k\rho_0$ бўлган каноник жойлашган эллипсни ифодалашини кўриш осон.

Биз муҳокамага киритган xOv текислик (7) нормал система учун *фазалар текислиги*, фазалар текислигидаги (9) эгри чизиқни эса системанинг *фазавий траекторияси* дейилади. Равшанки, бу траектория фақат (7) дифференциал тенгламалар системаси билангина эмас, балки яна мос бошланғич шартлар билан ҳам аниқланади. Бошланғич шартларнинг ҳар бир мумкин бўлган системасига берилган дифференциал тенгламалар системасининг ўз фазавий траекторияси мос келади.

Мазкур мисолда (6) тенглама билан тавсифланадиган нуқтанинг реал тўғри чизиқли ҳаракатига системанинг фазалар текислигидаги фазавий траектория, яъни (9) эллипс бўйича ҳаракат мос келади.

Фазалар текислигининг фазавий траекториялар билан тўлган қисми системанинг *фазавий портрети* дейилади. Бизнинг ҳолда фазавий портрет бутун текисликни тўлдиради, чунки бошланғич шартлар тегишлича танлаб олинганда фазалар текислигининг исталган нуқтаси орқали фазавий траектория — (9) эллипс ўтади.

Умуман, (1) дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун фазалар текислиги деб, yOz текислик олинади, фазавий траектория деб yOz текисликнинг y, z ўқларига нисбатан келтирилган (2) ечим ҳисобланади, бу ечимда x аргумент параметр ролини ўйнайди, интеграллаш ўзгармаслари C_1 ва C_2 эса бошланғич шартлардан аниқланади. x параметрни (2) системадан йўқотиш фазавий траекториянинг одатдаги тенгламасига олиб келади.

Нормал системанинг ечимини фазалар текислигида траектория ёрдамида тасвирлаш ўнг томони аргументга ёки юқорида механикага доир масалаларда тилга олинганидек, t вақтга боғлиқ бўлмаган системалар учун айниқса муҳимдир.

2-мисол. Ана шу нуқтаи назардан сўнувчи тебранишлар тенгламасини қараб чиқамиз. 18-§ дан маълумки, сўнувчи тебранишлар тенгламаси

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0 \qquad (10)$$

кўринишга эга, унинг характеристик тенгламасининг $r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$ илдизлари $n^2-k^2<0$ шартда, яъни $k^2-n^2=k_1^2$ бўлганда $r_{1,2}=-n\pm k_1i$ каби, тегишли умумий ечим эса

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t) \qquad (11)$$

каби ёзилиши мумкин. Бошланғич шартлар қуйидагича бўлсин: $x|_{t=0}=x_0$, $x'|_{t=0}=v_0$. У ҳолда (11) дан дарҳол $C_1=x_0$ келиб чиқади. C_2 ни топиш учун (11) ечимни дифференциаллаймиз:

$$x'=e^{-nt}[(-nC_1+k_1C_2)\cos k_1t+(C_1k_1-nC_2)\sin k_1t],$$

бу ердан $t=0$ да $v_0=-nC_1+k_1C_2$ ни топамиз, демак, $C_2=(v_0+nx_0)/k_1$ ва юкнинг реал тўғри чизиқли ҳаракатини тавсифловчи хусусий ечим

$$x=e^{-nt}(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t) \qquad (12)$$

кўринишни олади.

Янги $v=x'$ функцияни киритсак, (10) тенглама ушбу нормал системага келади:

$$\left.\begin{aligned}x'&=v,\\ v'&=-2nv-k^2x,\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

унинг ечими қуйидагича ёзилади.

$$x=e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t+\frac{v_0+nx_0}{k_1}\sin k_1t\right),$$

$$v = e^{-nt}\left(v_0 \cos k_1 t - \frac{nv_0 + (n^2 + k_1^2)\,x_0}{k_1} \sin k_1 t\right), \qquad (14)$$

бу ердаги биринчи тенглама (12) билан бир хил, иккинчи тенглама эса биринчисини дифференциаллашдан ҳосил бўлади.

Олдинги мисолдагига ўхшаш, (13) системанинг фазавий траекторияси xOv текисликнинг x, v ўқларига нисбатан ёзилган (14) тенгламалар системасидан иборат бўлади (бу ерда t параметр ролини ўйнайди). Бу ерда параметрни йўқотиш (8) системадагига қараганда анча мураккаб масаладир. Шунга қарамай, (14) система аниқлайдиган фазавий траекторияларнинг характерини уларнинг ошкор тенгламаларини ҳосил қилиб ўтирмасдан ҳам аниқлаш мумкин.

Фазавий траекторияларнинг кўринишини аниқлашни енгиллаштириш учун дастлаб $v + nx$ ифодани тузамиз, бунинг учун (14) нинг биринчи тенгламасини n га кўпайтириб, иккинчи тенгламаси билан қўшамиз:

$$v + nx = e^{-nt}\left((v_0 + nx_0)\cos k_1 t - x_0 k_1 \sin k_1 t\right),$$

бу тенгликни k_1 га бўлиб ва уни (14) нинг иккинчи тенгламаси ўрнига қўйиб, системани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^{-nt}\left(x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t\right), \\ \frac{v_0 + nx}{k_1} &= e^{-nt}\left(\frac{v_0 + nx_0}{k_1} \cos k_1 t - x_0 \sin k_1 t\right). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

(15) нинг иккала тенгламасини квадратга ошириб, уларни қўшамиз:

$$x^2 + \left(\frac{v + nx}{k_1}\right)^2 = e^{-2nt}\left[x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{k_1}\right)^2\right]$$

ёки $x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2/k_1 = \rho^2$, белгилаш киритсак,

$$x^2 + \left(\frac{v + nx}{k_1}\right)^2 = \rho^2 e^{-2nt} \qquad (16)$$

ни ҳосил қиламиз, шу билан бирга $\rho \neq 0$ эканлиги равшан чунки бошланғич шартлар ссф ноль шартлардан фарқли.

(16) тенгламадан фазавий траекториянинг тенгламасини ҳосил қилиш учун фойдаланиш мумкин. Бунинг учун (16) дан t нинг қийматини топиш ва бу қийматни (14) ёки (15) тенгламаларнинг бирига қўйиш кифоя. Бироқ, олдиндан

маълумки, ҳосил қилинадиган ифода ҳаддан ташқари узун бўлади, бинобарин, бошқача йўл тутганимиз маъқул.

(16) тенгламани

$$\frac{x^2}{(\rho e^{-nt})^2} + \frac{(v + nx)^2}{(k_1 \rho e^{-nt})^2} = 1$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенглама эллипс тенгламасини эслатади. Агар махражлар ўзгармас $\rho e^{-nt} = A$, $k_1 \rho e^{-nt} = B$ бўлганда эди, у ҳолда тенгламани

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{(v + nx)^2}{B^2} = 1$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлар эди, бу координата ўқларига нисбатан бурилган эллипсни ифодалайди, чунки иккинчи қўшилувчида v ўрнига $v + nx$ турибди. Бироқ, аслида юқоридаги ифодадан кўринишича A ва B махражлар вақтга боғлиқ, Шунинг учун фазалар текислигида $B/A = k_1$ бўлган бундай эллипсларни чизадиган бўлсак, фазавий траектория бўйича ҳаракатланаётган нуқта бир эллипсдан иккинчисига ўтгандай бўлади ва спираль (эллиптик-логарифмик спираль) бўйича марказ томон ҳаракатланади. Масаланинг физикавий маъносига кўра $n > 0$, шу сабабли $e^{-nt} \to 0$, эллипсларнинг ярим ўқлари камаяди ва фазавий траектория бўйича ҳаракат марказ томон спираль бўйлаб (мувозанат ҳолати) бўлади. Аксинча бўлганда, эллипснинг ярим ўқлари катталашади ва фазавий траектория бўйича ҳаракат марказдан бошқа томонга қараб бўлади.

Шу пайтга қадар икки номаълумли иккита тенглама системасини қараш билан чекланган эдик. Киритилган тушунчалар функциялар сони катта бўлган ҳол учун ҳам ўз кучини сақлайди, (3) кўринишдаги ўнг томони x аргументга боғлиқ бўлмаган системалар (механикада t вақтга боғлиқ бўлмаган; бундай системалар *автоном системалар* дейилади) учун ечимга геометрик маъно беришда параграф бошида айтилганидек $(n + 1)$ ўлчовли $Oxy_1, \ldots, y_n$ фазода фақат интеграл эгри чизикларни эмас, балки n ўлчовли бўлган $Oy_1, \ldots, y_n$ *фазалар фазосида фазавий траекторияларни* ҳам қуриш мумкин. Фазавий траекториялар тенгламаларини ҳосил қилиш учун (4) ечимни уларнинг параметрик берилиши деб қараш керак, бу ерда x аргумент (t вақт) параметр ролини ўйнайди.

Қараб чиқилган мисоллардан кўринишича, фазалар текислигидаги траекториялар бўйича ҳаракат характери реал ҳаракат характери билан чамбарчас боғланган. Шунинг учун фазавий портретни ясаш реал системаларнинг характерини ўрганишда кенг қўлланилади.

Чизиқли бўлмаган системалар учун, ва умуман, системанинг аниқ ечимини чекли кўринишда ҳосил қилиб бўлмаган ҳамма ҳолларда фазавий портретларни ўрганиш айниқса муҳимдир. Фазавий портретни анализ қилиш берилган система тавсифлайдиган ҳаракат характерини, унинг барқарорлигини (турғунлигини) ва бир қатор махсус масалаларни ҳар томонлама аниқлашга имкон беради. Бу масалалар биз ўрганаётган умумий курсга кирмайди, шунинг учун уларга тўхталиб ўтирмаймиз.

25-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИ СОНЛИ ЕЧИШ ТЎҒРИСИДА

Биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усуллари оддий дифференциал тенгламаларнинг нормал системалари бўлган ҳолга деярли худди шундайлигича татбиқ қилинади. Аргумент бўйича навбатдаги нуқтага ўтишда барча изланаётган функцияларнинг орттирмаларини бир хил формулалар бўйича ҳисоблаб чиқиш керак, холос. Бунинг қандай бажарилишини 8-§ да муфассал кўриб чиқилган Эйлер методи мисолида кўрсатамиз.

Бошланғич шартлари x_0, y_0, z_0 бўлган иккита оддий дифференциал тенгламадан иборат

$$\left.\begin{aligned} y' &= f_1(x,\ y,\ z), \\ z' &= f_2(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

система берилган бўлсин. Изланаётган $y(x)$ ва $z(x)$ функцияларнинг $x_1 = x_0 + h$ нуқтадаги қийматларини ҳосил қилиш учун уларнинг орттирмаларини

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_0'\cdot h = f_1(x_0,\ y_0,\ z_0,)\cdot h, \\ \Delta z_0 &= z_0'\cdot h = f_2(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot h \end{aligned} \qquad (2)$$

формулалар бўйича ҳисоблаймиз, шундан кейин қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0 = y_0 + f_1(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot h, \\ z_1 &= z_0 + \Delta z_0 = z_0 + f_2(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot h. \end{aligned} \qquad (3)$$

(3) қийматлар x_1, y_1, z_1 системани беради, булардан энди (2) формула бўйича янги нуқтага ўтишимиз мумкин. Орттирмаларни ҳисоблашнинг (2) формуладан бошқа фор-

мулаларга асосланган исталган бир иккинчи сонли усулини ҳам бизнинг ҳол учун худди шундай умумлаштириш мумкинлиги равшан. Прогноз ёки коррекция усулларининг бирортасидан фойдаланишда дастлаб изланаётган барча функцияларнинг қийматлари навбатдаги нуқтада прогноз қилинади, сўнгра коррекцияланган қийматлар ҳисобланади.

Юқори тартибли дифференциал тенгламаларни сонли ечиш учун уларни, 21-§ да қилинганидек, ёрдамчи функциялар киритиб, нормал системага келтирилади. Масалан, бошланғич шартлари x_0, y_0, y_0' бўлган иккинчи тартибли

$$y'' = f\ (x,\ y,\ y')$$

тенглама янги $z = y'$ функцияни киритиш билан бошланғич шартлари x_0, y_0, $z_0 = y_0'$ бўлган (1) кўринишдаги

$$\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= f\ (x,\ y,\ z) \end{aligned}\right\}$$

системага келтирилади.

$m = 1$индексли

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0$$

Бессель тенгламасининг (20-§) $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}242$, $y_0' = 0{,}454$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини [0,5; 1] оралиқ учун $h = 0{,}1$ қадам билан Эйлер усули ёрдамида топамиз.

Энг аввал берилган иккинчи тартибли тенгламани система бўлган ҳолга келтирамиз. Бунинг учун $y' = z$ дейиш ва берилган тенгламани $z' = y''$ га нисбатан ечиш кифоя, натижада ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= \frac{(1 - x^2)\ y - z}{x}. \end{aligned}\right\}$$

Ҳисоблашларнинг олиб борилиши равшан, шунинг учун улар жойлаштирилган жадвалнинг ўзини келтирамиз. Бу жадвалда бир нечта (6) — (8) устунлар келтирилган бўлиб, уларда z' ни топишдаги оралиқ ҳисоблашлар келтирилганини қайд қилиб ўтамиз. Охирги (10) устунда $J_1(x)$ функциянинг масаламизнинг аниқ ечими бўлган қийматлари келтирилган. Тақрибий ечимни аниқ ечим билан солиштиришда $x = 1$ да абсолют хато 0,012 га тенглигини, демак, нисбий хато тахминан 3% ни ташкил этишини кўрсатади.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
x	y	$\Delta y = y' . h$	$y' = z$	$\Delta z = z' . h$	«1»—(1)^2	(6)—(2)	(7)—(4)	$z' =$ (8):(1)	$J_1(x)$
0,5	0,242		0,454		0,750	0,181	—0,273	—0,546	0,242
0,6	0,287	0,045	0,399	—0,055	0,640	0,185	—0,214	—0,357	0,287
0,7	0,327	0,040	0,363	—0,036	0,510	0,167	—0,196	—0,280	0,329
0,8	0 363	0,036	0,335	—0,028	0,360	0,131	—0,204	—0,255	0,369
0,9	0,397	0,034	0,309	—0,026					0,406
1	0,428	0,031							0,440

Мисол. *Массаси* m бўлган моддий нуқтанинг бу нуқтани мувозанат ҳолатига қайтаришга уринаётган ва нуқтанинг бу ҳолатдан узоқлашишига пропорционал бўлган эластик куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракатини текширинг. (Бундан ташқари ҳаракат шундай муҳитда деб фараз қилингки, унинг қаршилиги тезликнинг кубига тенг.)

Ечилиши. Нуқтанинг мувозанат ҳолатидан узоқлашишини x орқали белгилаймиз, у ҳолда дифференциал тенглама ушбу кўринишда бўлади:

$$mx'' = -k_1 x - k_2 x'^3,$$

бу ерда k_1 ва k_2 — мусбат пропорционаллик коэффициентлари.

Сонли мисол кўрайлик:

$$x'' = -x - 0{,}1 x'^3.$$

Бу тенгламанинг $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x'_0 = 1$ бошланғич шартларини қаноатлантирувчи ечимларини [0; 0,20] оралиқ учун $h = 0{,}02$ қадам билан Эйлер усули ёрдамида излаймиз.

Ҳисоблашлар қуйидаги жадвалда келтирилган.

t	x	$\Delta x = x'h$	$x' = y$	$\Delta y = y'h$	«0,1».$(4)^3$	$y' = -(2) - (6)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0	1		1		0,10000	—1,10000
		0,02000		—0,02200		
0,02	1,02000		0,97800		$0,93544\cdot 10^{-1}$	—1,11354
		0,01956		—0,02227		
0,04	1,03956		0,95573		$0,87298\cdot 10^{-1}$	—1,12686
		0,01911		—0,02254		
0,06	1,05867		0,93319		$0,81266\cdot 10^{-1}$	—1,13994
		0,01866		—0,02280		
0,08	1,07733		0,91039		$0,75454\cdot 10^{-1}$	—1,15278
		0,01821		—0,02306		
0,10	1,09554		0,88733		$0,69864\cdot 10^{-1}$	—1,16540
		0,01775		—0,02331		
0,12	1,11329		0,86402		$0,64502\cdot 10^{-1}$	—1,17779
		0,01728		—0,02356		
0,14	1,13057		0,84046		$0,59368\cdot 10^{-1}$	—1,18994
		0,01681		—0,02380		
0,16	1,14738		0,81666		$0,54466\cdot 10^{-1}$	—1,20185
		0,01633		—0,02404		
0,18	1,16371		0,79262			
		0,01585				
0,20	1,17956					

V БОБ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ ОПЕРАЦИОН УСУЛЛАРИ

26-§. ОПЕРАЦИОН ҲИСОБДАН ЗАРУР МАЪЛУМОТЛАР

Дифференциал тенгламаларни ечишнинг олдинги бобларда қаралган усуллари (айниқса, гап хусусий ечим устида кетганда) баъзан мураккаб ва узундан-узоқ ҳисоблашларни талаб этади. Операцион ҳисоб усуллари хусусий ечимни, умумий ечимни ва ихтиёрий ўзгармасларни топиб ўтирмасдан осон ва бевосита топишга имкон беради. Бу усулларнинг асосий ғояси берилган дифференциал тенгламадан бирорта ёрдамчи алгебраик тенгламага ўтишдадир, бу ёрдамчи тенгламани тузишда бошланғич шартлар системаси ҳам ҳисобга олинади. Ёрдамчи алгебраик тенглама ечимидан тескари алмаштириш бажариш дастлабки берилган дифференциал тенгламанинг изланаётган хусусий ечимини топишга имкон беради.

Операцион ҳисоб усуллари коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли дифференциал тенгламаларни ечишда муваффақият билан қўлланади. Уларнинг татбиқ қилинишининг умумий принциплари билан содда мисол орқали таништирамиз.

Бошлангич шарти $x(0)=0$ бўлган биринчи тартибли

$$x'(t)+x(t)=1$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламанинг аргументнинг $t>0$ қийматлари учун хусусий ечимини топиш талаб қилинади.

Тенгламанинг иккала қисмини e^{-pt} функцияга кўпайтирамиз ва уларни t бўйича $t=0$ дан $t=+\infty$ гача интеграллаймиз. Ҳосил қилинган тенглик ушбу кўринишда бўлади:

$$\int_0^\infty e^{-pt}x'(t)\,dt+\int_0^\infty e^{-pt}\,x(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-pt}\,dt.$$

Ўнг томондаги интеграл осон ҳисобланади. Чунончи

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\,e^{-pt}\Bigg|_0^\infty.$$

Бу ердан интеграл яқинлашиши учун $p>0$ деб фараз қилиш кераклиги кўринади, акс ҳолда интеграл узоқлашади ва ифода маънога эга бўлмайди. Шунинг учун $p>0$ деган шартни қабул қиламиз. У ҳолда

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}.$$

Тенгликнинг чап томонида турган биринчи интегрални унга бўлаклаб интеграллаш қоидасини қўлланиб ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}x'(t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt}d\,[x(t)] = e^{-pt}x(t)\Bigg|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,x(t)dt.$$

Биринчи қўшилувчи $t=0$ да берилган бошланғич шартга кўра нолга айланади. $t=\infty$ бўлганда ҳам шундай даъво ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам, $p>0$ ва $t\to+\infty$ да e^{-pt} нолга интилади. Шунинг учун изланаётган $x(t)$ ечим чегараланган* деб фараз қилиш етарли. Натижада

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt}\,x(t) = 0.$$

Ниҳоят, узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,x'(t)\,dt = p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,x(t)dt.$$

Юқоридаги ҳисоблашлар интеграллашдан сўнг тенгликни қуйидагича ёзишимизга имкон беради:

$$(p+1)\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,x(t)\,dt = \frac{1}{p}.$$

---

* Аслида $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt}\,x(t)=0$ лимит муносабатнинг бажарилиши учун $x(t)$ нинг чегараланган бўлиш талаби анча тор маънодадир. Лимит муносабат $x(t)$ чексиз, бироқ жуда тез ўсмаганда ҳам ўринлидир. Кейинги тасдиқнинг аниқ маъносига тўхтаб ўтирмасдан лимит муносабатнинг бажарилишинигина талаб қилиб қўя қоламиз. Бу ерда у биз фойдаланаётган барча хосмас интегралларнинг ҳам яқинлашишини гарантиялашини қайд қилиб ўтамиз.

Бу ўша биз айтган ёрдамчи тенглама бўлиб, ундан қуйидаги муносабат осонгина келиб чиқади:

$$\int_0^\infty e^{-pt} x(t)\,dt = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Маълумки,

$$\frac{1}{p} = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt.$$

Қуйидагига ҳам ишонч ҳосил қилиш осон:

$$\frac{1}{p+1} = \int_0^\infty e^{-(p+1)t}\,dt,$$

демак,

$$\int_0^\infty e^{-pt} x(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}[1-e^{-t}]\,dt.$$

Энг охирги тенгликдан изланаётган ечим $x(t)=1-e^{-t}$ функция бўлади деб фараз қилишимиз табиийдир. Бу аслида ҳам шундай эканлигини ва топилган ечим берилган бошланғич шартларни қаноатлантиришини кўриш осон.

Келтирилган ҳисоблашларни ҳам унчалик қисқа деб бўлмайди, албатта, бироқ, бу ҳисоблашларнинг энг содда йўллар билан бажарилганлигидадир. Дифференциал ҳисобнинг формал аппарати лимитларни ҳисоблаб ўтирмасдан элементар функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблашга имкон бергани каби, операцион ҳисобнинг формал аппарати ҳам хосмас интегралларни ёзиб ва ҳисоблаб ўтирмасдан ҳисоблашларни бир неча марта қисқартиришга имкон беради.

Шундай қилиб, биз операцион ҳисобнинг формал аппарати билан танишиб чиқишимиз керак. Бу аппарат математика курсининг ҳозирги пайтда кўпчилик мутахассисликларнинг программаларига киритилаётган мустақил бўлимидир. Шунинг учун биз бу бўлимнинг мазмунини тўла баён қилиб ўтирмасдан, фақат керакли таърифлар, хоссалар ва теоремаларни келтириш билан чекланамиз. Таърифларнинг тушунтирилишини ҳам, теорема ва хоссаларнинг исботларини ҳам ўқувчи операцион ҳисобга бағишланган бир қатор қўлланмалардан топиши мумкин.

Операцион ҳисобнинг асосий тушунчаси *Лаплас алмаштириши* ҳисобланиб, $t \geqslant 0$ да аниқланган ҳақиқий ўзгарувчининг $f(t)$ функциясига

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

(бу ерда p — мусбат ҳақиқий сон ёки ҳақиқий қисми мусбат бўлган комплекс сон) тенглик билан аниқланадиган $F(p)$ функцияни мос қўяди. Бундай ҳолда $f(t)$ функция *оригинал*, $F(p)$ эса *тасвир* (баъзан *Лаплас бўйича тасвир* ёки *лаплас-трансформация*) дейилади.

$f(t)$ функциядан унинг тасвирига ўтиш қуйидаги

$$L\{f(t)\} = F(p) \text{ ёки } f(t) \doteqdot F(p)$$

символлар билан, тасвирдан оригиналга ўтиш эса

$L^{-1}\{F(p)\} = f(t)$ ёки $F(p) \doteqdot f(t)$ символлар билан белгиланади.

Тасвирнинг мавжудлигини ва фойдаланиладиган барча хосмас интегралларнинг яқинлашишини гарантиялаш учун $f(t)$ оригинал қуйидаги шартларни қаноатлантиради деб фараз қилиш етарлидир.

1°. *Исталган чекли интервалда $f(t)$ ва $f'(t)$ чекли сондан кўп бўлмаган биринчи тур узилиш нуқталарига (чекли сакрашларга)* эга.

2°. $t < 0$ учун $f(t) = 0$.

3°. $f(t)$ функция кўрсаткичли функциядан тез ўсмайди, яъни шундай ҳақиқий ўзгармас $M > 0$ ва $s > 0$ сонлар мавжудки, $|f(t)| \leqslant M e^{st}$ бўлади.

Иккинчи шартга нисбатан шуни айтиш мумкинки, функциянинг тасвири унинг фақат $t \geqslant 0$ учун қийматлари билангина аниқланади, бинобарин, унинг $t < 0$ даги қийматлари бизни қизиқтирмайди. Татбиқий масалаларда процесснинг боришини одатда бирорта моментдан бошлаб (биз уни ҳар доим ноль момент деб фараз қилишимиз мумкин) аниқлаш талаб қилинади. Учинчи шарт $\mathrm{Re}(p) > s$ тенгсизликни қаноатлантирувчи p нинг қийматлари учун барча зарур бўлган хосмас интегралларнинг яқинлашишини гарантиялайди.

Энди дифференциал тенгламаларни ечишда зарур бўлиб қолиши мумкин бўлган Лаплас алмаштиришлари учун асосий қоидалар мажмуини исботсиз келтирамиз.

Лаплас алмаштиришлари қоидалари

1. **Чизиқлилик хоссаси.** $\{f_i(t)\}$ ва $\{C_i\}$ лар n та функция ва n та сон системалари бўлсин. Агар $f_i(t) \doteqdot F_i(p)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ бўлса,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(t) \doteqdot \sum_{i=1}^{n} C_i F_i(p),$$

яъни оригиналларнинг чизиқли комбинациясига тасвирларнинг чизиқли комбинацияси мос квлади ва аксинча.

2. **Ўхшашлик теоремаси** (оригинал аргументи масштабининг ўзгариши). *Агар* $a > 0$ ва $f(t) \doteqdot F(p)$ *бўлса, у ҳолда* $f(at) \doteqdot \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

3. **Тасвирнинг силжиш теоремаси.** $f(t) \doteqdot F(p)$ бўлсин. *У ҳолда исталган* p_0 *учун* $e^{-p_0 t} f(t) \doteqdot F(p + p_0)$ *ўринли.*

4. **Оригиналнинг кечикиш теоремаси.** *Агар* $t_0 > 0$ *бўлса, у ҳолда* $f(t) \doteqdot F(p)$ *дан* $f(t - t_0) \doteqdot e^{-t_0 p} F(p)$ *келиб чиқади.*

5. **Оригиналнинг ўзиб кетиш теоремаси.** *Агар* $t_0 > 0$ *бўлса, у ҳолда* $f(t) \doteqdot F(p)$ *дан*

$$f(t + t_0) \doteqdot e^{t_0 p} \left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\, dt \right]$$

келиб чиқади.

4- ва 5- теоремаларнинг ифодаланишидаги фарқ шуни кўрсатадики, оригиналда аргументнинг силжиши натижасида тасвирда бўладиган ўзгариш фақат бу суриишнинг катталигига боғлиқ бўлмай, балки унинг йўналишига ҳам боғлиқ экан: бир ҳолда тасвир тегишли экспонентага оддийгина кўпайса, бошқа ҳолда оригиналнинг тегишли оралиқдаги қийматига боғлиқ бўлган қўшимча ҳад айирилади ҳам.

6. **Оригинални дифференциаллаш.** $f(t)$ *функция* $[0, \infty)$ *да узлуксиз дифференциалланувчи ва* $f'(t)$ *ҳосила тасвир мавжудлигининг* $1°—3°$ *хоссаларини қаноатлантирсин. У ҳолда:*

а) *агар* $f(t) \doteqdot F(p)$ *бўлса, у ҳолда* $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$; *хусусан, агар* $f(0) = 0$ *бўлса,*

$$f'(t) \doteqdot pF(p),$$

яъни функцияни дифференциаллашга тасвирни р га кўпайтириш (балки унинг нолдаги қийматини айириш) мос келади.

б) *агар* $f^{(n)}(t)$ *мавжуд бўлса ва* $1°—3°$ *хоссаларга бўйсунса, у ҳолда* $f(t) \doteqdot F(p)$ *дан* $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) -$

$-[p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)]$ *келиб чиқади, хусусан, агар* $f(t)$ *бошланғич ноль шартлар* $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0)$ *ни қаноатлантирса, у ҳолда*

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \; F(p).$$

7. **Оригинални интеграллаш.** $f(t)$ *функция* $[0, \infty)$ *да узлуксиз, тасвир мавжудлигининг* 1°*—*3° *шартларини қаноатлантирсин ва* $f(t) \doteqdot F(p)$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p} F(p),$$

яъни функцияни интеграллашга тасвирни р га бўлиш мос келади.

6- ва 7- қоидалар тасвирларга ўтишда ва баъзи қўшимча шартларга (бошланғич ноль шартлар) амал қилишда дифференциаллаш оператори билан маълум маънода оддий кўпайтувчи каби иш тутиш мумкинлигини кўрсатади.

8. **Тасвирни дифференциаллаш.** $f(t) \doteqdot F(p)$ *бўлсин. У ҳолда:*

а) $-tf(t) \doteqdot F'(p)$;

б) $(-1)^n t^n f(t) \doteqdot F^{(n)}(p)$.

9. **Тасвирни интеграллаш.** $f(t) \doteqdot F(p)$ ва $\frac{f(t)}{t}$ *каср тасвир мавжудлигининг* 1°*—*3° *шартларини қаноатлантирсин. У ҳолда*

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(q)\, dq.$$

6- ва 8- қоидалар, шунингдек, 7- ва 9- қоидаларнинг формулировкаларини солиштиришни ҳамда оригинал ва тасвирларни дифференциаллаш ва интеграллаш қоидалари орасидаги ўхшашлик ва фарқни аниқлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

10. **Ўрама ҳақида теорема** (тасвирларни кўпайтириш теоремаси). Бу теоремани баён қилишдан аввал ўраш амалини (ёки ўраманинг) таърифини келтиришга тўғри келади. У $*$ символи билан белгиланади.

Бирор $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ функциялар берилган бўлсин. Уларнинг бу кесмадаги *ўрамаси* деб

$$f(t) = \int_\alpha^\beta f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = f_1(t) * f_2(t)$$

тенглик билан аниқланадиган янги $f(t)$ функцияга айтилади. $[\alpha, \beta]$ кесма учун $[0, t]$ кесмани оламиз. Ўрама амали коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига (яъни ўрин алмаштириш ва группалаш қонунларига бўйсунади) ва қўшишга нисбатан дистрибутивлик (тақсимот қонуни) хоссасига эга эканлигини кўриш мумкин. Хусусан, коммутативлик хоссаси ўрама функциялардан қайси бири интегралга $t-\tau$ аргумент билан киришига боғлиқ эмаслигини билдиради.

Агар $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ *лар 1°—3° шартларни қаноатлантирса, улар ўрамасининг тасвири кўпайтувчилар тасвирларининг кўпайтмасидан иборат бўлади, яъни* $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ ва $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ *дан*

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p)\, F_2(p)$$

келиб чиқади.

11. **Дюамель теоремаси.** Бу теорема олдинги теореманинг умумлаштирилгани сифатида қаралиши мумкин, у иккита функция ўрамаси ҳосиласининг тасвири учун ифода беради.

Агар $f_1(t)$, $f_2(t)$ *функциялар* $[0, \infty]$ *да узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса ва* $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ *бўлса, у ҳолда*

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t) \right] \doteqdot pF_1(p)\, F_2(p).$$

Қараб чиқилган барча хоссаларни умумий жадвал кўринишида ёзиш қулай (1- жадвалга қаранг).

Юқорида кўрилган, бошланғич шарти $x(0) = 0$ бўлган

$$x'(t) + x(t) = 1$$

тенгламага яна қайтамиз. Агар $x(t)$ функциянинг тасвирини $X(p)$ орқали белгиласак,

$$x(t) \doteqdot X(p),$$

у ҳолда оригинални дифференциаллаш теоремасига кўра

$$x'(t) \doteqdot pX(p).$$

Бундан ташқари, илгари ҳисоблаганимизга кўра $1 \doteqdot 1/p$. Шунинг учун берилган тенгламанинг чап ва ўнг қисмларининг Лаплас алмаштириши чизиқлилик хоссасига кўра тенгламани ушбу кўринишига келтиради:

$$pX(p) + X(p) = 1/p,$$

1- жадвал

Лаплас алмаштиришлари қоидалари

$$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

№	Номи	Оригинал	Тасвир
1	Чизиқлилик хоссаси	$\sum\limits_{i=1}^{n} C_i f_i(t)$	$\sum\limits_{i=1}^{n} C_i F_i(p)$
2	Ўхшашлик теоремаси	$f(at) \quad (a>0)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
3	Тасвирни силжитиш теоремаси	$e^{-p_0t}f(t)$	$F(p+p_0)$
4	Оригиналнинг кечикиш теоремаси	$f(t-t_0) \; (t_0>0)$	$e^{-t_0p}F(p)$
5	Оригиналнинг ўзиб кетиш теоремаси	$f(t+t_0) \quad (t_0>0)$	$e^{t_0p}\left[F(p)-\int\limits_0^{t_0} e^{-pt}f(t)dt\right]$
6	Оригинални дифференциаллаш	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$pF(p)-f(0)$ $p^n F(p)-[p^{n-1}f(0)+$ $+p^{n-2}f'(0)+\ldots$ $\ldots+pf^{(n-2)}(0)+$ $+f^{(n-1)}(0)]$
7	Оригинални интеграллаш	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}F(p)$
8	Тасвирни дифференциаллаш	$-tf(t)$ $(-1)^n t^n f(t)$	$F'(p)$ $F^{(n)}(p)$
9	Тасвирни интеграллаш	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_d^\infty F(q)dq$
10	Ўрама теоремаси (тасвирларни кўпайтириш теоремаси)	$f_1(t)^* f_2(t)$	$F_1(p)F_2(p)$
11	Дюамель теоремаси	$\frac{d}{dt}[f_1(t)^* f_2(t)]$	$pF_1(p)F_2(p)$

бу ердан

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Энди тасвирлардан оригиналларга ўтиш керак.Энди маълум бўлган $1 \div 1/p$ тенгликка силжиш теоремасини қўлланиб, $e^{-t} \div 1/(p+1)$ ни топамиз. Шунинг учун

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \div 1 - e^{-t},$$

бу изланаётган $x(t) = 1 - e^{-t}$ ечимни беради.

Бу ерда учрайдиган барча функцияларни тасвир мавжудлигининг 2° шартига кўра $t<0$ бўлганда нолга тенг бўлишини қайд қилиб ўтайлик, демак, масалан, тенгламанинг ўнг томонида бир эмас, балки

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} t \geqslant 0 \text{ да } 1, \\ t < 0 \text{ да } 0 \end{cases}$$

шартлар билан аниқланган функция туриши керак. Бундай функция *бирлик функция* дейилади. Бироқ ёзувни қисқартириш мақсадида барча функцияларнинг одатдаги белгиланиши сақланиб қолади, бироқ, бунда айтайлик, e^{-t} функция дейилганда

$$e^{-t}\sigma_0(t) = \begin{cases} t \geqslant 0 \text{ да } e^{-t}\cdot \\ t < 0 \text{ да } 0 \end{cases}$$

бўлган $e^{-t}\sigma_0(t)$ функцияни тушуна берамиз.

Келтирилган мисолдан кўринадики, дифференциал тенгламаларни ечишда операцион ҳисоб усулларидан самарали фойдаланиш учун элементар функцияларнинг Лаплас бўйича тасвирларини билиш керакдир. Бу ўнг томоннинг тасвирини топиш учун ёрдамчи тенгламага ўтишда ҳам, берилган тенгламанинг ечимига қайтишда, яъни ёрдамчи тенгламани ечишдан ҳосил қилинган маълум тасвир бўйича оригинални топишда ҳам талаб этилади.

Элементар функцияларнинг тасвирлари тегишли хосмас интегралларни (баъзан мураккаб ва узундан-узоқ интегралларни) ҳисоблаш билан ҳосил қилинади. Бироқ барча ҳисоблашларни ҳар гал янгидан бажариш шарт эмас, ҳосилалар ёки аниқмас интеграллар жадвалига ўхшаш тасвирлар жадвалини тузиб олиш ва ундан ҳар гал фойдаланиш кифоя.

Қуйида келтирилган жадвалда (2- жадвалга қаранг) тез-тез учраб турадиган элементар функцияларнинг тасвирлари келтирилган. Уларнинг баъзиларини 1- жадвал қоидалари бўйича группалаб, бир қатор янги формулаларни ҳо-

2-жадвал

Баъзи элементар функцияларнинг тасвирлари

№	Оригинал	Тасвир
1	$\sigma_0(t)$	$\frac{1}{p}$
2	e^{-at}	$\frac{1}{p+\alpha}$
3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
5	$\text{sh}\ at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6	$\text{ch}\ at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7	t	$\frac{1}{p^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9	$e^{-at}\sin at$	$\frac{a}{(p+a)^2+a^2}$
10	$e^{-at}\cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$
11	$e^{-at}\ \text{sh}\ at$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2-a^2}$

Давоми

№	Оригинал	Тасвир
12	$e^{-at}\text{ch}\,at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-a^2}$
13	te^{-at}	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
14	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
15	$t\sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
16	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
17	$\frac{1}{n_1}e^{-nt}\sin n_1t,\quad n_1=\sqrt{n^2-k^2}$	$\frac{1}{p^2+2np+k^2}$
18	$\frac{1}{h}e^{-nt}\,\text{sh}\,ht,\quad h=\sqrt{n^2-k^2}$	$\frac{1}{p^2+2np+k^2}$
19	$\frac{1}{n_1^2}\left[1-e^{-nt}\left(\cos n_1t+\frac{n}{n_1}\sin n_1t\right)\right],$ $n_1=\sqrt{k^2-n^2}$	$\frac{1}{p(p^2+2np+k^2)}$
20	$\frac{1}{h^2}\left[1-e^{-nt}\left(\text{ch}\,ht+\frac{n}{h}\text{ch}\,ht\right)\right],$ $h=\sqrt{n^2-k^2}$	$\frac{1}{p(p^2+2np+k^2)}$
21	$e^{-nt}\left(\cos n_1t-\frac{n}{n_1}\sin n_1t\right),$ $n_1=\sqrt{k^2-n^2}$	$\frac{p}{p^2-2np+k^2}$
22	$e^{-nt}\left(\text{ch}\,ht-\frac{n}{h}\,\text{sh}\,ht\right),\ h=\sqrt{n^2-k^2}$	$\frac{p}{p^2+2np+k^2}$

Давоми

№	Оригинал	Тасвир
23	$e^{-nt}\left(-\frac{t\cos n_1t}{2n_1^2}+\frac{\sin n_1t}{2n_1\sqrt{n_1}}\right),$ $n_1=\sqrt{k_2-n_2}$	$\frac{1}{(p^2+2np+k^2)^2}$
24	$e^{-nt}\left(-\frac{t\,\mathrm{ch}\,ht}{2h^2}+\frac{\mathrm{sh}\,ht}{2h\sqrt{h}}\right),$ $h=\sqrt{n^2-k^2}$	$\frac{1}{(p^2+2np+k^2)^2}$
25	$e^{-nt}\left(\frac{nt\cos n_1t}{2n_1^2}+\frac{t\sin n_1t}{2n_1}-\frac{n\sin n_1t}{2n_1\sqrt{n_1}}\right),$ $n_1=\sqrt{k^2-n^2}$	$\frac{p}{(p^2+2np+k^2)^2}$
26	$e^{-nt}\left(\frac{nt\,\mathrm{ch}\,ht}{2h^2}+\frac{t\,\mathrm{sh}\,ht}{2h}-\frac{n\,\mathrm{sh}\,ht}{2h\sqrt{h}}\right),$ $h=\sqrt{n^2-k^2}$	$\frac{p}{(p^2+2np+k^2)^2}$
27	$\frac{1}{(k_0^2-k^2)^2+4n^2k_0^2}\left\{e^{-nt}\times\right.$ $\times\left[(k_0^2-k^2)\cos k_1t-\frac{n(k_0^2+k_1^2)}{k_1}\times\right.$ $\left.\times\sin k_1t\right]-(k_0^2-k^2)\cos k_0t+$ $\left.+2nk_0\sin k_0t\right\},\quad k_1=\sqrt{k^2-n^2}$	$\frac{p}{(p^2+2np+k^2)(p^2+k_2^0)}$

сил қилиш мумкин. Аслини олганда, жадвалдаги баъзи формулаларни ҳам ҳозиргина айтганимиздек, содда формулалардан ҳосил қилишимиз мумкин: масалан, ch at нинг тасвирини e^{at} ва e^{-at} нинг тасвирларидан Лаплас алмаштиришларининг чизиқли эканлигидан ва ch $at=(e^{at}+e^{-at})/2$ формуладан фойдаланиб, $e^{-at}\sin at$ нинг тасвирини эса $\sin at$ нинг тасвиридан фойдаланиб топиш мумкин. Келтирилаётган формулаларнинг исботларини ва тасвирларнинг муфассалроқ жадвалларини ўқувчи операцион ҳисоб бўйича қўлланмалардан топиши мумкин.

27-§. ОПЕРАЦИОН УСУЛЛАРНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ВА УЛАРНИНГ СИСТЕМАЛАРИНИ ЕЧИШГА ТАТБИҚ ЭТИШ

Лаплас алмаштиришини дифференциал тенгламаларни ечишга татбиқ қилишнинг умумий схемаси олдинги параграфда таҳлил қилиб чиқилган мисол орқали ўқувчига тушунарли бўлса керак. Унга яна бир бор, энди умумийроқ шаклда тўхталамиз.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t), \quad (1)$$

бу тенгламанинг

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш талаб этилади. Бунда $f(t)$ функция каби изланаётган ечим ҳам Лаплас бўйича тасвирнинг мавжудлик шартларига бўйсунади деб фараз қилинади. (1) тенгламанинг иккала қисмига Лаплас алмаштиришини татбиқ қиламиз.

$x(t)$ ва $f(t)$ нинг тасвирларини мос равишда $X(p)$ ва $F(p)$ орқали белгилаймиз:

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad f(t) \doteqdot F(p).$$

Оригиналии дифференциаллаш қоидасини қўлланиб қуйидагини топамиз:

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0,$$
$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - [px_0 + x_0'],$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x^{(n-1)}(t) \doteqdot p^{n-1}X(p) - [p^{n-2}x_0 + \ldots + x^{(n-2)}],$$
$$x^{(n)}(t) \doteqdot p^nX(p) - [p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + \ldots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}].$$

Лаплас алмаштиришининг чизиқлилигига биноан чап томоннинг тасвирини топиш учун ҳосил қилинган ифодаларни тегишли a_i коэффициентларга кўпайтириш ва қўшиш кифоя, ўнг томоннинг тасвири эса $F(p)$ га тенг. Шундай қилиб, қуйидагига эгамиз:

$$\varphi(p)X(p) - \psi(p) = F(p), \qquad (3)$$

бу ерда

$$\varphi(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$$

ифода чизиқли тенглама учун характеристик кўпҳад (15-§ га қаранг) $\psi(p)$ эса

$$\psi(p) = [p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + p x_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}] +$$
$$+ a_1 [p^{n-2} x_0 + \ldots + x_0^{(n-2)}] + \ldots + a_{n-2}[p x_0 + x_0'] + a_{n-1} x_0.$$

Ноль бошланғич шартларда $\psi(p) = 0$ бўлиб, (3) тенгламанинг чап томони $\varphi(p) X(p)$ кўринишини олишини қайд қилиб ўтамиз, бунга (1) тенгламада дифференциаллаш операторини p кўпайтувчи билан алмаштириб, $X(p)$ ни қавс ташқарисига чиқариш орқали келиш мумкин. (3) тенглама бошланғич шартлар системаси (2) бўлган (1) тенглама учун ёрдамчи тенгламадир. Уни яна *тасвирловчи* (ёки *оператор*) тенглама деб ҳам аталади, (3) тенгламани $X(p)$ га нисбатан ечиб,

$$X(p) = \frac{F(p) + \psi(p)}{\varphi(p)} \qquad (4)$$

кўринишга эга бўлган *тасвирловчи* ёки *оператор ечимни* ҳосил қиламиз.

Оригиналга ўтиш изланаётган $x(t)$ хусусий ечимни топишга имкон беради. Бунда (4) оператор ечимнинг ўнг томони одатда рационал каср бўлиб чиқади ва тасвирлар жадвалидан фойдаланишни енгиллатиш учун ўнг томонни элементар касрларга ёйиш керак.

Дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топишга доир бир нечта мисол кўрамиз.

Бошланғич шартлари $x(0) = 3$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 1$ бўлган

$$x'''(t) - x'(t) = 0$$

тенгламани ечайлик.

Оператор тенглама тузамиз;

$$[p^3 X(p) - (3p^2 + 2p + 1)] - [pX(p) - 3] = 0$$

ёки

$$(p^3 - p) X(p) = 3p^2 + 2p - 2.$$

Бу тенгламани $X(p)$ га нисбатан ечиб, ушбу оператор ечимни топамиз:

$$X(p) = \frac{3p^2 + 2p - 2}{p^3 - p}.$$

Ўнг томонни энг содда касрларга ёямиз:

$$\frac{3p^2 + 2p - 2}{p(p-1)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1}.$$

A, B ва C коэффициентларни топиш учун ўнг томонни умумий махражга келтирамиз ва айниятнинг иккала томонидаги суратларни таққослаймиз:

$$3p^2 + 2p - 2 \equiv A(p^2 - 1) + Bp(p + 1) + Cp(p - 1).$$

Бу айниятда $p = 0$ деб, $A = 2$ ни ҳосил қиламиз. $p = 1$ да $2B = 3$, бу ердан $B = 3/2$, $p = -1$ да эса $2C = -1$ ни топамиз, бу ердан $C = -1/2$.

Демак,

$$X(p) = \frac{2}{p} + \frac{3}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1}.$$

Жадвал ёрдамида оригиналларга ўтиб, жавобни ҳосил қиламиз:

$$x(t) = 2 + \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Энди ушбу тенгламани ечайлик:

$$x''' - 2x'' + x' = 4;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 2.$$

Бу ерда оператор тенглама:

$$[p^3X(p) - (p^2 + 2p + 2)] - 2[p^2X(p) - (p + 2)] + [pX(p) - 1] = \frac{4}{p}.$$

ёки

$$(p^3 - 2p^2 + p)X(p) = p^2 - 5 + \frac{4}{p}.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{p^2 - 5 + 4/p}{p^3 - 2p^2 + p} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p^2 - 2p + 1)} = \frac{p^3 - 5p + 4}{p^2(p - 1)^2}.$$

Ўнг томондаги касрни $p - 1$ га қисқартириш мумкин, шунинг учун

$$X(p) = \frac{p^2 + p - 4}{p^2(p - 1)}.$$

Бу касрни элементар касрларга ёйиб қуйидагига эга бўламиз:

$$X(p) = \frac{3}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p-1}.$$

Оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$x(t) = 3 + 4t - 2e^t.$$

Қуйидаги тенгламани ечайлик:

$$x'' - 3x' + 2x = e^t;\ x(0) = x'(0) = 0.$$

Оператор тенглама:

$$p^2X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{1}{p-1}$$

ёки

$$(p^2 - 3p + 2)\,X(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-3p+2)} = \frac{1}{(p-1)^2\,(p-2)}.$$

Рационал касрларга ёйсак:

$$X(p) = -\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-2},$$

бу ердан оригиналларга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$x(t) = -e^t - te^t + e^{2t} \quad \text{ёки} \quad x(t) = e^{2t} - e^t\,(1+t).$$

Ниҳоят,

$$x'' + 4x = \sin t;\ x(0) = x'(0) = 0$$

тенгламани ечамиз.

Оператор тенглама:

$$p^2X(p) + 4X(p) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{1}{(p^2+1)\,(p^2+4)}.$$

Касрни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{1}{(p^2+1)\,(p^2+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{(4+p^2)-(p^2+1)}{(p^2+1)\,(p^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+4}\right).$$

Демак, оператор ечим қуйидаги кўринишни олади:

$$X(p) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+4}\right),$$

бу ердан оригиналларга ўтиб, ушбу ечимни ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

Операцион усуллар дифференциал тенгламанинг фақат **хусусий** ечимларинигина топишга имкон беради деб ўйлаш керак эмас. Улардан **умумий** ечимни излашда ҳам муваффақият билан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун берилган деб фараз қилинган бошланғич қийматларни ихтиёрий ўзгармаслар учун қабул қилиш керак, у ҳолда улар ҳосил қилинадиган ечимнинг ифодасига киради. Буни мисол ёрдамида кўрсатайлик.

Ушбу

$$x'' + k^2x = a\sin kx$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

Умумий ечимни топиш учун $x(0) = C_1$, $x'(0) = C_2$ деб олиш керак. Оператор тенгламани ҳосил қиламиз:

$$[p^2X(p) - (C_1p + C_2)] + k^2X(p) = \frac{ak}{p^2 + k^2}$$

ёки

$$(p^2 + k^2)X(p) = \frac{ak}{p^2 + k^2} + C_1p + C_2.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{ak}{(p^2 + k^2)^2} + C_1\frac{p}{p^2 + k^2} + C_2\frac{1}{p^2 + k^2}.$$

Биринчи касрни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{ak}{(p^2 + k^2)^2} = \frac{ak}{2k^2}\,\frac{(k^2 - p^2) + (p^2 + k^2)}{(p^2 + k^2)^2} = \frac{a}{2k}\left[\frac{k^2 - p^2}{(p^2 + k^2)^2} + \frac{1}{p^2 + k^2}\right].$$

Шундай қилиб,

$$X(p) = \frac{a}{2k}\left[\frac{k^2 - p^2}{(p^2 + k^2)^2} + \frac{1}{p^2 + k^2}\right] + C_1\frac{p}{p^2 + k^2} + C_2\frac{1}{p^2 + k^2}.$$

Оригиналларга ўтиб, изланаётган умумий ечимни ҳосил қиламиз:

$$x(t) = \frac{a}{2k}\left(-t\sin kt + \frac{1}{k}\sin kt\right) + C_1\cos kt + \frac{C_2}{k}\sin kt.$$

C_1 ва C_2 функция ва унинг ҳосиласининг бошланғич қийматлари бўлгани учун исталган бошланғич шартлар: $x(0) = x_0 = C_1$ ва $x'(0) = x_0' = C_2$ бериб, топилган умумий ечимдан мос хусусий ечимларни дарҳол топишимиз мумкин. Бунда алгебраик тенгламалар системасини C_1 ва C_2 га нисбатан ечиб ўтиришга ҳожат қолмайди.

Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламаларни ечишнинг операцион усулларини бундай тенгламалар системаларига ҳам татбиқ қилиш мумкин. Фарқ шундаки, битта оператор тенглама ўрнига изланаётган функцияларнинг тасвирларига нисбатан чизиқли алгебраик оператор тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бунда берилган дифференциал тенгламалар системасини олдиндан ўзгартириб олишга зарурат қолмайди, масалан, уларни нормал шаклга келтириш керак эмас: ҳар қандай системани у дастлаб қандай берилган бўлса, шу аҳволда операцион усул ёрдамида ечиш мумкин.

Биринчи тартибли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{array}{l} x_1'(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k(t)=f_1(t), \\ x_2'(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}x_k(t)=f_2(t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n'(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}x_k(t)=f_n(t). \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Ушбу

$$x_k(0)=x_{k_0} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (6)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш талаб қилинади, шу билан бирга $L\{f_k(t)\}=F_k(p)$, $L\{x_k(t)\}=X_k(p)$.

У ҳолда оператор тенгламалар системасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} pX_1(p)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}X_k(p)=F_1(p)+x_{10}, \\ pX_2(p)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}X_k(p)=F_2(p)+x_{20}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ pX_n(p)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}X_k(p)=F_n(p)+x_{n0}. \end{array}\right\}$$

Бу алгебраик чизиқли тенгламалар системасини $X_k(p)$ тасвирларга нисбатан ечиш керак, сўнгра топилган тасвирлардан $x_k(t)$ оригиналларга ўтиш керак. Ана шулар биргаликда (5) дифференциал тенгламалар системасининг (6) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини беради, Ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар системасининг хусусий ечимларини операцион ҳисоб усуллари ёрдамида топишга доир бир нечта мисол кўрамиз.

Ушбу дифференциал тенгламалар системасини ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) - 2x(t) + y(t) = 0, \\ y'(t) - x(t) - 2y(t) = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

Оператор система:

$$\left.\begin{aligned} [pX(p) - 1] - 2X(p) + Y(p) = 0, \\ [pY(p) - 1] - X(p) - 2Y(p) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{ёки} \quad \left.\begin{aligned} (p-2)X(p) + Y(p) = 1, \\ -X(p) + (p-2)\,Y(p) = 1. \end{aligned}\right\}$$

Бу системанинг ечимини Крамер қоидаси бўйича топамиз, бунинг учун қуйидаги детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & 1 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^2 + 1 = p^2 - 4p + 5,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = p - 2 - 1 = p - 3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p - 2 + 1 = p - 1.$$

Демак,

$$X(p) = \frac{p-3}{p^2 - 4p + 5}, \qquad Y(p) = \frac{p-1}{p^2 - 4p + 5},$$

бу ерда оригиналларга ўтиб, изланаётган ечимни ҳосил қиламиз:

$$x(t) = e^{2t}(\cos t + 2\sin t) - 3e^{2t}\sin t = e^{2t}(\cos t - \sin t),$$

$$y(t) = e^{2t}(\cos t + 2\sin t) - e^{2t}\sin t = e^{2t}(\cos t + 3\sin t).$$

Энди

$$\left.\begin{aligned} x'(t) - 4x(t) + 3y(t) = \sin t, \\ y'(t) - 2x(t) + y(t) = -2\cos t, \end{aligned}\right\}$$

$$x(0) = y(0) = 1$$

системани ечайлик.

Оператор система:

$$\left.\begin{aligned} pX(p) - 4X(p) + 3Y(p) = \frac{1}{p^2+1}, \\ pY(p) - 2X(p) + Y(p) = -\frac{2p}{p^2+1} \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned}(p-4)\,X(p)+3Y(p)&=\frac{1}{p^2+1},\\ -2X(p)+(p+1)\,Y(p)&=-\frac{2p}{p^2+1}.\end{aligned}\right\}$$

Детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-4 & 3\\ -2 & p+1\end{vmatrix}=(p-4)(p+1)+6=(p-1)(p-2),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}\frac{1}{p^2+1} & 3\\ -\frac{2p}{p^2+1} & p+1\end{vmatrix}=\frac{7p+1}{p^2+1},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}p-4 & \frac{1}{p^2+1}\\ -2 & -\frac{2p}{p^2+1}\end{vmatrix}=-\frac{2(p^2-4p-1)}{p^2+1}.$$

Демак, оператор ечим:

$$X(p)=\frac{7p+1}{(p^2+1)(p-1)(p-2)},\quad Y(p)=-\frac{2(p^2-4p-1)}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}.$$

Топилган касрларни энг содда касрларга ёйиб ва оригиналларга ўтиб изланаётган хусусий ечимни ҳосил қиламиз:

$$x(t)=3e^{2t}-4e^{t}+\cos t-2\sin t,$$

$$y(t)=2e^{2t}-4e^{t}+2\cos t-2\sin t.$$

Дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топишга доир яна битта мисол кўрамиз:

$$\left.\begin{aligned}x''(t)+y'(t)+2x&=0,\\ y''(t)-3x'(t)-2y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Бундай деймиз:

$$x(0)=C_1,\ x'(0)=C_2,\ y(0)=C_3,\ y'(0)=C_4.$$

Оператор тенгламалар системасини тузамиз:

$$\left.\begin{aligned}&[p^2X(p)-(C_1p+C_2)]+[pY(p)-C_3]+2X(p)=0,\\ &[p^2Y(p)-(C_3p+C_4)]-3[pX(p)-C_1]-2Y(p)=0,\end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned}&(p^2+2)\,X(p)+pY(p)=C_1p+C_2+C_3,\\ &-3pX(p)+(p^2-2)\,Y(p)=C_3p-3C_1+C_4.\end{aligned}\right\}$$

Детерминантларни ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2+2 & p \\ -3p & p^2-2 \end{vmatrix} = (p^2-1)(p^2+4).$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} C_1p+C_2+C_3 & p \\ C_3p-3C_1+C_4 & p^2-2 \end{vmatrix} = C_1(p^3+p)+C_2(p^2-2)-2C_3-C_4p,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p^2+2 & C_1p+C_2+C_3 \\ -3p & C_3p-3C_1+C_4 \end{vmatrix} = -6C_1+3C_2p+C_3(p^3+5p)+C_4(p^2+2).$$

Демак, оператор ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$X(p) = \frac{C_1(p^3+p)+C_2(p^2-2)-2C_3-C_4p}{(p^2-1)(p^2+4)},$$

$$Y(p) = \frac{-6C_1+3C_2p+C_3(p^3+5p)+C_4(p^2+2)}{(p^2-1)(p^2+4)}.$$

Тасвирлардан оригиналларга ўтиш учун элементар касрларга ёйиш ўрнига оригинални дифференциаллаш теоремасига асосланган усулни қўлланамиз.

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2-1}-\frac{1}{p^2+4}\right) \doteq \frac{1}{5}\left(\operatorname{sh} t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

бўлгани учун [$f(0)$ кўринишидаги қўшимча қўшилувчилар бўлмайди, чунки ҳар гал $f(0)=0$] қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{p}{(p^2-1)(p^2+4)} \doteq \frac{1}{5}(\operatorname{ch} t-\cos 2t),$$

$$\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+4)} \doteq \frac{1}{5}(\operatorname{sh} t+2\sin 2t),$$

$$\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2+4)} \doteq \frac{1}{5}(\operatorname{ch} t+4\cos 2t).$$

Бу формулаларни қўлланиб, оператор ечимдан изланаётган умумий ечимни ушбу кўринишда ҳосил қилиш мумкин:

$$x(t) = \frac{2C_1-C_4}{5}\operatorname{ch} t-\frac{C_2+2C_3}{5}\operatorname{sh} t+\frac{3C_1+C_4}{5}\cos 2t+\frac{3C_2+C_3}{5}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3(C_2+2C_3)}{5}\operatorname{ch} t-\frac{3}{5}(2C_1-C_4)\operatorname{sh} t-\frac{3C_2+C_3}{5}\cos 2t+$$

$$+\frac{3C_1+C_4}{5}\sin 2t.$$

28-§. ФИЗИКАВИЙ ВА БОШҚА МАСАЛАЛАР

Механикавий тебранишлар

Илгари 18-§ да кўрилган баъзи масалаларни операцион усуллар ёрдамида ечамиз.

1-мисол. (Гармоник тебранишлар.) Дифференциал тенглама ва бошланғич шартлар қуйидагича:

$$x''(t) + k^2x(t) = 0;\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0.$$

Оператор тенглама:

$$[p^2X(p) - (x_0p + v_0)] + k^2X(p) = 0.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{x_0p + v_0}{p^2 + k^2} = x_0\frac{p}{p^2 + k^2} + v_0\frac{1}{p^2 + k^2}.$$

Изланаётган хусусий ечим:

$$x(t) = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt \quad \text{ёки} \quad x(t) = A\sin(kt + \alpha),$$

бу ерда $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/k^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(x_0k/v_0)$.

Хусусан $v_0 = 0$ да $x(t) = x_0\cos kt$ ёки $x(t) = x_0\sin(kt + \pi/2)$.

2-мисол. (Сўнувчи тебранишлар.) Тенгламаси ва бошланғич шартлар системаси қуйидагича:

$$x''(t) + 2nx'(t) + k^2x(t) = 0;\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0.$$

Оператор тенглама:

$$[p^2X(p) - (x_0p + v_0)] + 2n[pX(p) - x_0] + k^2X(p) = 0.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{x_0p + v_0 + 2nx_0}{p^2 + 2np + k^2} = x_0\frac{p}{p^2 + 2np + k^2} + (v_0 + 2nx_0)\frac{1}{p^2 + 2np + k^2}.$$

$k^2 - n^2 > 0$ да изланаётган хусусий ечим ($k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ деб фараз қиламиз):

$$x(t) = x_0e^{-nt}\left(\cos k_1t - \frac{n}{k_1}\sin k_1t\right) + \frac{v_0 + 2nx_0}{k_1}e^{-nt}\sin k_1t = e^{-nt}\left(x_0\cos k_1t + \frac{v_0 + nx_0}{k_1}\sin k_1t\right).$$

Бу ечимни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x(t) = Ae^{-nt}\sin(k_1t + \alpha),$$

бу ерда $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{k_1}\right)^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_0k_1}{v_0 + nx_0}$.

Агар $k^2 - n^2 < 0$ бўлса, у ҳолда $h = \sqrt{n^2 - k^2}$ деб белгилаб, ечимни қуйидаги кўринишда ҳосил қиламиз:

$$x(t) = e^{-nt}\left(x_0\operatorname{ch}ht + \frac{v_0 + nx_0}{h}\operatorname{sh}ht\right).$$

Агар $k^2 - n^2 = 0$ бўлса, у ҳолда оператор ечим ушбу кўринишни олади:

$$X(p) = x_0 \frac{p}{(p+n)^2} + (v_0 + 2nx_0)\frac{1}{(p+n)^2} =$$

$$= x_0 \frac{p+n-n}{(p+n)^2} + \frac{v_0 + 2nx_0}{(p+n)^2} = \frac{x_0}{p+n} + \frac{v_0 + nx_0}{(p+n)^2},$$

бу ердан оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз;

$$x(t) = x_0 e^{-nt} + (v_0 + nx_0)\, te^{-nt} = e^{-nt}\,[x_0 + (v_0 + nx_0)\, t].$$

3-мисол. Муҳитнинг қаршилиги ҳисобга олинмагандаги мажбурий тебранишлар.) Тенглама ва бошланғич шартлар системаси қуйидаги кўринишда:

$$x''(t) + k^2 x(t) = q \sin \omega t; \ x(0) = x_0, \ \ x'(0) = v_0.$$

Оператор тенглама:

$$[p^2 X(p) - (px_0 + v_0)] + k^2 X(p) = \frac{q\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Оператор ечим:

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)(p^2 + \omega^2)} + \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2},$$

бу ердан оригиналларга ўтиб, қуйидаги икки ҳолга келамиз:

1-ҳол. $\omega^2 \neq k^2$. У ҳолда

$$x(t) = \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t - \frac{1}{k}\sin kt\right) + x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt =$$

$$= \frac{q}{k^2 - \omega^2}\sin \omega t + x_0 \cos kt + \left(\frac{v_0}{k} - \frac{q\omega}{k(k^2 + \omega^2)}\right)\sin kt =$$

$$= \frac{q}{k^2 - \omega^2}\sin \omega t + x_0 \cos kt + \frac{1}{k}\left(v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2}\right)\sin kt.$$

Бу ечимни ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$x(t) = \frac{q}{k^2 - \omega^2}\sin \omega t + A \sin(kt + \alpha),$$

бу ерда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2}\left(v_0 - \frac{q\omega}{k^2 - \omega^2}\right)^2}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_0 k}{v_0 - q\omega/(k^2 - \omega^2)}.$$

2-ҳол. $\omega^2 = k^2$. Бу ҳолда оператор ечим ушбу кўринишда бўлади:

$$X(p) = \frac{q\omega}{(p^2 + k^2)^2} + \frac{x_0 p + v_0}{p^2 + k^2}$$

ва бинобарин (216- бетдаги 3-мисолга қаранг),

$$x(t) = -\frac{q}{2k}t\cos kt + x_0\cos kt + \frac{1}{k}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right)\sin kt.$$

Бу хусусий ечимга бошқача кўриниш бериш мумкин:

$$x(t) = -\frac{q}{2k}t\cos kt + A\sin(kt + \alpha),$$

бу ерда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{k^2}\left(v_0 + \frac{q}{2k}\right)^2},\quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_0k}{v_0 + q/(2k)} = \operatorname{arctg}\frac{2x_0k^2}{q + 2kv_0}.$$

Электр тебранишлари

1-мисол. 18-§ да кўриб чиқилган, э. ю. к. ўзгармас бўлган ҳолда RLC-занжирдаги токни топиш масаласини операцион усул билан ечамиз.

Ток учун дифференциал тенглама механик тебранишларнинг муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олингандаги тенгламасига ўхшайди:

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = 0,$$

бошланғич шартлар эса қуйидагича: $i(0) = 0$, $i'(0) = E/L$. Оператор тенглама:

$$\left[p^2J(p) - \frac{E}{L}\right] + \frac{R}{L}pJ(p) + \frac{1}{LC}J(p) = 0.$$

Оператор ечим:

$$J(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

$R/L = 2\delta$ деб белгилаймиз ва қуйидаги ҳолларни қараб чиқамиз.

1-ҳол. $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \omega_1^2 > 0$. Тасвирдан оригиналга ўтиб $i(t)$ ток учун сўнувчи электр тебранишларни ифодаловчи ушбу $i(t) = \frac{E}{\omega_1 L}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t$ функцияни ҳосил қиламиз.

2-ҳол. $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = \beta^2 > 0$. У ҳолда $i(t) = \frac{E}{\beta L}e^{-\delta t}\operatorname{sh}\beta t$. i ток нодаврий ва занжирда ҳеч қандай тебранишлар бўлмайди.

3-ҳол. $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$. Бу ҳолда оператор ечим:

$$J(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p + \delta)^2},$$

демак,

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\delta t},$$

яъни бу ҳолда ҳам $i(t)$ ток нодаврий бўлиб, электр тебранишлар бўлмайди.

2-мисол. э. ю. к. синусоидал бўлган ўша RLC-занжирни қараймиз (219-бетга қаранг). Дифференциал тенглама ушбу кўринишга эга бўлади:

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{E}{L} \omega \cos \omega t,$$

бошланғич шартлар $i(0) = i'(0) = 0$, $\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L} = \omega_1^2 > 0$ бўлган ҳол. Оператор тенглама:

$$p^2 J(p) + \frac{R}{L} p J(p) + \frac{1}{LC} J(p) = \frac{E\omega}{L} \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Оператор ечим:

$$J(p) = \frac{E\omega}{L} \frac{p}{\left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\right)(p^2 + \omega^2)}.$$

Тасвирдан оригиналга ўтамиз ва $(R/2L) = \delta$, $1/(LC) = \omega_0^2$ (ва демак $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2$) белгилашлар киритиб қуйидагини топамиз:

$$i(t) = \frac{E\omega}{L} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\delta^2 \omega^2} \left\{ e^{-\delta t} \left[(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega_1 t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\delta}{\omega_1} (\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_1 t \right] - (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + 2\delta\omega \sin \omega t \right\}.$$

Яна қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega^2 - \frac{1}{LC} = \frac{\omega}{L}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\omega}{L} X, \text{ бу ерда}$$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2 = \frac{\omega^2}{L^2} X^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{L^2}(X^2 + R^2) = \frac{\omega^2}{L^2} Z^2,$$

бу ерда $Z^2 = X^2 + R^2$,

$$\omega^2 + \omega_0^2 = \omega^2 + \frac{1}{LC} = \frac{\omega}{L}\left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{\omega}{L} X', \text{ бу ерда}$$

$$X' = \omega L + \frac{1}{\omega C}.$$

У ҳолда

$$i(t) = \frac{EL}{\omega Z^2}\left\{e^{-\delta t}\left[\frac{\omega}{L} X\cos\omega_1 t - \frac{\delta}{\omega_1}\frac{\omega}{L} X'\sin\omega_1 t\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{L} X\cos\omega t + 2\delta\omega\sin\omega t\right\} =$$

$$= \frac{E}{Z^2}\left\{\frac{e^{-\delta t}}{\omega_1}\left[\omega_1 X\cos\omega_1 t - \delta X'\sin\omega_1 t\right] - \right.$$

$$\left. - X\cos\omega t + R\sin\omega t\right\}.$$

$$\frac{R}{Z} = \cos\gamma, \quad \frac{X}{Z} = \sin\gamma.$$

Энди

$$\frac{\omega_1 X}{\sqrt{\omega_2^1 X^2 + \delta^2 X'^2}} = \sin\gamma_1, \quad \frac{\delta X'}{\sqrt{\omega_2^1 X^2 + \delta^2 X'^2}} = \cos\gamma_1 \text{ деймиз;}$$

у ҳолда

$$i(t) = -\frac{E\sqrt{\omega_2^1 X^2 + \delta^2 X'^2}}{\omega_1 Z^2} e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \frac{E}{Z}\sin(\omega t - \gamma).$$

Қуйидагини исботлаймиз:

$$\frac{\sqrt{\omega_2^1 X^2 + \delta^2 X'^2}}{Z} = \omega_0.$$

Бунинг учун илдиз остидаги ифодани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\omega_1^2 X^2 + \delta^2 X'^2 = (\omega_0^2 - \delta^2) X^2 + \delta^2 X'^2 = \omega_0^2 X^2 + \delta^2 (X'^2 -$$

$$- X^2) = \omega_0^2 X^2 + \delta^2 (X' + X)(X' - X) = \omega_0^2 X^2 +$$

$$+ \frac{R^2}{4L_2}\cdot 2\omega L\cdot\frac{2}{\omega C} = \omega_0^2 X^2 + \frac{1}{LC} R^2 = \omega_0^2 (X^2 + R^2) = \omega^2 Z^2,$$

чунки $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$. Демак,

$$\frac{\sqrt{\omega_1^2 X^2 + \delta^2 X'^2}}{Z} = \frac{\omega_0 Z}{Z} = \omega_0,$$

шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

Энди узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$i(t) = -\frac{E\omega_0}{\omega_1 Z} e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \frac{E}{Z}\sin(\omega t - \gamma).$$

24- § даги дифференциал тенгламалар системасига олиб келувчи иккита масалани операцион усул билан ечамиз.

3-мисол. (267-бетдаги 4-мисолга қаранг.) Дифференциал тенгламалар системаси:

$$\left.\begin{aligned} &Li'(t)+\frac{1}{C}\int_0^t [i(\tau)-i_1(\tau)]\,d\tau=E,\\ &Ri_1(t)-\frac{1}{C}\int_0^t [i(\tau)-i_1(\tau)]\,d\tau=0, \end{aligned}\right\}$$

шу билан бирга $i(t)-i_1(t)=i_2(t)$. Бошланғич шартлар: $i(0)=i_1(0)=0$. Оператор тенгламалар системаси:

$$\left.\begin{aligned} &LpJ(p)+\frac{1}{Cp}[J(p)-J_1(p)]=\frac{E}{p},\\ &RJ_1(p)-\frac{1}{Cp}[J(p)-J_1(p)]=0 \end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} &\left(Lp+\frac{1}{Cp}\right)J(p)-\frac{1}{Cp}J_1(p)=\frac{E}{p},\\ &\frac{1}{Cp}J(p)-\left(R+\frac{1}{Cp}\right)J_1(p)=0. \end{aligned}\right\}$$

Бу алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун $J(p)$ ни иккинчи тенгламадан $J_1(p)$ орқали ифодалаймиз, натижада

$$J(p)=Cp\left(R+\frac{1}{Cp}\right)J_1(p)=(CRp+1)J_1(p).$$

$J(p)$ нинг бу ифодасини биринчи тенгламага қўямиз:

$$\left(Lp+\frac{1}{Cp}\right)(CRp+1)J_1(p)-\frac{1}{Cp}J_1(p)=\frac{E}{p}$$

ёки

$$(LCRp^2+Lp+R)J_1(p)=\frac{E}{p},$$

бу ердан

$$J_1(p)=\frac{E}{LCR}\,\frac{1}{p\left(p^2+\frac{1}{CR}p+\frac{1}{LC}\right)}.$$

1-ҳол. $\frac{1}{LC}-\frac{1}{4C^2R^2}=\omega_1^2>0$ деб фараз қиламиз, у ҳолда оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$i_1(t)=\frac{E}{CR}\,\frac{1}{1/CL}\left[1-e^{-t/(2RC)}\left(\cos\omega_1 t+\frac{1}{2CR\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right]=$$

$$=\frac{EL}{R}\left[1-e^{-t/(2RC)}\left(\cos\omega_1 t+\frac{1}{2CR\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right].$$

Юқорида топилганига кўра, $i(t)$ учун оператор тенглама

$$J(p)=\frac{E}{LCR}\left[CR\frac{1}{p^2+p/(CR)+1\,(LC)}+\frac{1}{p\,[p^2+p/(CR)\,p+1\,(LC)}\right]$$

бўлади.

Бу ердан оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$i(t)=\frac{E}{LCR}\left\{CR\frac{1}{\omega_1}e^{-t/(2RC)}\sin\omega_1 t+LC\left[1-e^{-t/(2RC)}\left(\cos\omega_1 t+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2CR\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right]\right\}=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-t/(2RC)}\left[\cos\omega_1 t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\omega_1}\left(\frac{1}{2RC}-\frac{R}{L}\right)\sin\omega_1 t\right]\right\}.$$

$i_2(t)$ токни $i(t)-i_1(t)$ айирма сифатида топиш мумкин.

2- ҳол. $\frac{1}{4C^2R^2}-\frac{1}{LC}=\beta^2>0$ бўлсин; у ҳолда оригиналларга ўтиб, қуйидагини топамиз:

$$i_1(t)=\frac{EL}{R}\left[1-e^{-t/(2RC)}\left(\operatorname{ch}\beta t+\frac{1}{2CR\beta}\operatorname{sh}\beta t\right)\right].$$

$i(t)$ учун оператор тенглама юқоридаги ҳолга ўхшаш, шунинг учун

$$i(t)=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-t/(2RC)}\left[\operatorname{ch}\beta t+\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2RC}-\frac{R}{L}\right)\operatorname{sh}\beta t\right]\right\}.$$

4-мисол. (269-бетдаги 5-мисолга қаранг.) Дифференциал тенгламалар системаси:

$$\left.\begin{aligned}L_1i_1'(t)+R_1i_1(t)+Mi_2'(t)&=E.\\L_2i_2'(t)+R_2i_2(t)+Mi_1'(t)&=0.\end{aligned}\right\}$$

Бошланғич шартлар: $i_1(0)=i_2(0)=0$.
Оператор тенгламалар системаси:

$$\left.\begin{aligned}L_1pJ_1(p)+R_1J_1(p)+MpJ_2(p)&=\frac{E}{p},\\L_2pJ_2(p)+R_2J_2(p)+MpJ_1(p)&=0\end{aligned}\right\}$$

ёки

$$\left.\begin{array}{l}(L_1p + R_1)\,J_1(p) + MpJ_2(p) = \dfrac{E}{p},\\ MpJ_1(p) + (L_2p + R_2)\,J_2(p) = 0.\end{array}\right\}$$

Алгебраик тенгламаларнинг бу системасини ечиш учун иккинчи тенгламадан $J_2(p)$ ни $J_1(p)$ орқали ифодалаб оламиз:

$$J_2(p) = -\frac{Mp}{L_2p + R_2}\,J_1(p).$$

Буни биринчи тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(L_1p + R_1 - \frac{M^2p^2}{L_2p + R_2}\right)J_1(p) = \frac{E}{p},$$

бу ердан ушбу оператор ечимга келамиз:

$$J_1(p) = \frac{EL_2}{L_1L_2 - M^2}\,\frac{p + R_2/L_2}{p\left(p^2 + \dfrac{L_1R_2 + L_2R_1}{L_1L_2 - M^2}\,p + \dfrac{R_1R_2}{L_1L_2 - M^2}\right)} =$$

$$= \frac{E}{L_1\left(1 - \dfrac{M^2}{L_1L_2}\right)p}\,\frac{p + R_2/L_2}{\left(p^2 + \dfrac{R_2/L_2 + R_1/L_1}{1 - M^2/(L_1L_2)}\,p + \dfrac{(R_1R_2)/(L_1L_2)}{1 - M^2/(L_1L_2)}\right)}.$$

Қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$M^2/(l_1L_2) = k^2,\ R_1L_1 = 2\alpha_1,\ R_2/L_2 = 2\alpha_2,$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2)/(1 - k_2) = \sigma;$$

у ҳолда

$$J_1(p) = \frac{E}{L_1\,(1-k^2)}\left[\frac{1}{p^2 + 2\sigma p + 4\alpha_1\alpha_2/(1 - k^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{R_2}{L_2}\,\frac{1}{p\,(p^2 + 2\sigma p + 4\alpha_1\alpha_2/(1 - k^2))}\right].$$

Сўнгра, $\sigma^2 - 4\alpha_1\alpha_2/(1 - k^2) = \beta^2 > 0$ бўлгани учун (270-бетга қаранг) тасвирлардан оригиналларга ўтиб қуйидагини топамиз:

$$i_1(t) = \frac{E}{L_1\,(1 - k^2)}\left\{\frac{1}{\beta}\,e^{-\sigma t}\,\mathrm{sh}\,\beta t + \frac{R^2}{L^2}\,\frac{1 - k^2}{4\alpha_1\alpha_2}\left[1 - e^{-\sigma t}\left(\mathrm{ch}\,\beta t + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\sigma}{\beta}\,\mathrm{sh}\,\beta t\right)\right]\right\} = \frac{E}{R_1}\left\{1 + e^{-\sigma t}\left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta\,(1 - k^2)}\,\mathrm{sh}\,\beta t - \mathrm{ch}\,\beta t\right]\right\}.$$

$i_2(t)$ ни топиш учун дастлаб оператор тенгламалар системасидан $J_2(p)$ оператор ечимни топиш, сўнгра тасвирлардан оригиналларга ўтиш керак.

МУНДАРИЖА

Русча иккинчи нашрига сўз боши 3
Русча биринчи нашрига сўз бошидан 3
Кириш 5

I боб

Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

1- §. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар. Умумий маълумотлар 13
2- §. Ўзгарувчиларни ажратиш 16
3- §. x ва y га нисбатан бир жинсли тенгламалар ва уларга келтириладиган тенгламалар 52
4- §. Биринчи тартибли чизиқли тенгламалар ва уларга келтириладиган тенгламалар 59
5- §. Тўлиқ дифференциаллардаги тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи. 74
6- §. Дифференциал тенгламалар тузиш ҳақида 82
7- §. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ҳақида қўшимча маълумотлар 89
8- §. Дифференциал тенгламаларни ечишнинг тақрибий усуллари. 93
9- §. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли тенгламалар. Изогонал траекториялар ҳақида масала 105

II боб

Дифференциал тенгламаларнинг тартибини пасайтириш

10- §. Юқори тартибли тенгламалар. Умумий маълумотлар . . 128
11- §. Тартибини пасайтиришга имкон берадиган тенгламаларнинг турлари 131
12- §. Физикавий мисоллар. Механиканинг ва материаллар қаршилигининг баъзи масалалари 136

III боб

Юқори тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар

13- §. Чизиқли бир жинсли тенгламалар. Чизиқли дефференциал оператор 165
14- §. Функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги. Вронский детерминанти ва унинг қўлланилиши 170
15- §. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламалар. 177
16- §. Чизиқли бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалар. 186
17- §. Эйлер тенгламаси 201
18- §. Физикавий мисоллар. Гармоник тебранишлар. Резонанс. 204
19- §. Чегаравий масалалар тўғрисида энг оддий маълумотлар. 230
20- §. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли тенгламалар 235

IV боб

Дифференциал тенгламалар системалари ҳақида тушунча

21- §. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системалари . . 248
22- §. Ўзгармас коэффициентли чизиқли системалар 255
23- §. Физикавий ва бошқа мисоллар 260
24- §. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг геометрик талқини. Фазолар фазаси ҳақида тушунча 282
25- §. Дифференциал тенгламалар системаларини сонли ечиш ҳақида 289

V боб

Дифференциал тенгламаларни ечишнинг операцион усуллари

26- §. Операцион ҳисобдан зарур маълумотлар 293
27- §. Операцион усулларни дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини ечишга татбиқ этиш 305
28- §. Физикавий ва бошқа масалалар 313

1- §.
2- §.
3- §.
4- §.
5- §.
6- §.
7- §.
8- §.
9- §.
Диф
10- §. К
11- §. Т
12- §.

ИБ № 656

На узбекском языке

ГУТЕР Рафаил Самойлович, ЯНПОЛЬСКИЙ Авраам Рувимович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов высших
технических учебных заведений

Перевод со второго переработанного и дополненного
издания изд-ва «Высшая школа», М., 1976

Издательство «Ўқитувчи»
Ташкент — 1978

Таржимон	*Х. Алимов*
Редактор	*Ў. Ҳусанов*
Техредактор	*Т. Грешникова*
Бадиий редактор	*Е. Соин*
Корректор	*Қ. Содиқов*

Теришга берилди 27.02.1978 й. Босишга рухсат этилди 22.09.1978 й. Форма
$84 \times 108^1/_{32}$. Тип. қоғози № 1. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди
Шартли б. л. 17,01. Нашр. л. 15,38. Тиражи 15000. Зак. № 2117. Баҳоси 70 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 225-77.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат коми
теги Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг полиграфи
комбинати. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. 1978 й.

Ташполиграфкомбинат Ташкентского полиграфического производственного объеди
нения «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полигра
фии и книжной торговли. Ташкент, ул. Навои, 30.