

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ҳотам Тўраев

МАТЕМАТИК МАНТИҚ ВА ДИСКРЕТ МАТЕМАТИКА

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва
ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртларининг
талабалари учун ўқув қўлланма сифатида
тавсия этган*

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 2003

Китобда тўпламлар ҳақида асосий тушунчалар, муносабатлар, мулоҳазалар алгебраси, мулоҳазалар ҳисоби, предикатлар мантиқи, математик назариялар, алгоритмлар, математик мантиқнинг техникага татбиқи, математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси, графлар назариясининг элементлари, тўрлар ва тўрдаги оқимлар баён қилинади.

Мазкур ўқув қўлланмаси олий ўқув юртларининг **5460100—математика**, **5480100—амалий математика ва информатика**, **5140100—математика ва информатика**, **5521900—информатика ва информацион технологиялар** бакалаврлик йўналишлари ҳамда **5A460104**, **5A480101** ва **5A480107** магистратура мутахассисликлари бўйича таълим олаётган талабаларга мўлжалланган.

Китобдан магистрантлар, аспирантлар ҳамда радиотехника, электротехника ва амалий математика соҳаларида ишлаётган муҳандис-математиклар ва мутахассислар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Масъул муҳаррир: доцент **А.М.Мусаев**
Тақризчилар: ЎзМУ кафедраси мудири, ЎзР ФА
 академиги, профессор **Н.Ю.Сатимов**,
 ЎзМУ профессори **А.Пўлатов**,
 ЎзМУ доценти **Р.Фуломов**,
 СамДУ кафедраси мудири,
 профессор **А.С.Солеев**,
 СамДУ доценти **Ф.Э.Эргашев**

Т **1602020000—133** Катъий буюрт. — 2003
353(04)—2003

ISBN 5—645—04107—0

© «Ўқитувчи» нашриёти, Т., 2003.

СЎЗ БОШИ

Дискрет математика – математиканинг бир қисми бўлиб, милoddан аввалги IV асрда яратила бошланган. Дискрет математика математиканинг такомиллашган сонлар назарияси, алгебра, математик мантиқ қисмларидан ташқари, XX аср ўрталаридаги фан-техника тараққиёти туфайли жadal ривожланаётган функционал системалар назарияси, граф ва тўрлар назарияси, кодлаштириш назарияси, комбинатор анализ каби бўлимларни ҳам ўз ичига олади.

Дастлаб, фақат математик мантиқ, алгебра, математик анализ, математика асослари, эҳтимоллар назарияси, геометрия, топология, сонлар назарияси, моделлар назарияси каби математик фанларда татбиқ этиб келинган дискрет математика XX асрнинг 40- йилларидан бошлаб ҳисоблаш математикаси, кибернетика, ахборот назарияси, иқтисодиёт, психология, математик лингвистика, тиббиёт фанлари ва дискрет техникада ҳам кенг қўлланилмоқда. Дискрет математика электр схемаларни лойиҳалашда ва текширишда, автоматик ҳисоблаш машиналарини лойиҳалаш ва программалашда, дискрет автоматларни мантиқий лойиҳалашда, ЭҲМ элементлари ва қисмларини лойиҳалашда, ҳар хил техник системалар, қурилмалар ва автоматик машиналарни анализ ва синтез қилишда кенг миқёсда татбиқ этилади. Математик мантиқ фани электрон ҳисоблаш машиналарининг вужудга келишига ва уни мукамаллаштиришга катта ҳисса қўшди.

Дискрет математика математик кибернетиканинг пойдевори бўлиши билан бирга, ҳозирги замон математик таълимининг муҳим бўғини ҳам ҳисобланади.

Китобнинг асоси сифатида муаллиф томонидан 1973 йилдан бери Самарқанд давлат университети амалий математика ва информатика факультети талабаларига узлуксиз ўқиладиган маърузалар олинган. Унинг структураси ва мазмунига факультет базасида «Дискрет математика ва унинг татбиқлари» мавзусида ўтказилган Халқаро илмий анжуманлар, Москва давлат университетининг «Дискрет математика» кафедраси билан ўқув-услубий соҳалардаги ҳамкорлик ҳамда факультет талабаларига дискрет математика фанининг етуқ олимлари А. Дородницин, Ю. Журавлёв, М. Комилов, В. Кудрявцев, А. Зиков ва В. Қобулов томонидан ўқилган маърузаларнинг ҳам ижобий таъсири бор.

Китоб дискрет математиканинг ривожланиш тарихи (кириш) ва 9 бобдан иборат.

Қўлланманинг биринчи бобида **тўпламлар назариясининг элементлари**, муносабатлар, бинар муносабати, функциялар суперпозицияси, тартиблаш муносабати ва панжара ҳақида тушунчалар берилди.

Иккинчи боб **мулоҳазалар алгебрасига** бағишланган бўлиб, унда мулоҳазалар ва улар устида мантиқий амаллар, формулалар, тенг кучли, айнан чин, айнан ёлғон ва бажарилувчи формулалар, тенг кучли формулаларга доир теоремалар, формулаларнинг нормал шакллари, мукамал дизъюнктив ва конъюнктив нормал шакллар, мулоҳазалар алгебраси функциялари, Буль алгебраси, мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонун ва арифметик амаллар, Жегалкин кўпҳади, монотон функциялар, функционал ёпиқ синфлар ва Пост теоремаси каби масалалар кўриб чиқилади.

Китобнинг учинчи боби **мулоҳазалар ҳисобига** бағишланган бўлиб, унда мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси, исботланувчи формула таърифи, мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими), келтириб чиқариш қоидалари, келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари бўлган бир вақтда ўрнига қўйиш, мураккаб хулоса, силлогизм, контрпозиция, икки қарра инкорни тушириш қоидалари, формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқа-

риш қоидаси, келтириб чиқарилган формула (исботлаш) тушунчаси, дедукция ва умумлашган дедукция теоремалари, айрим мантиқ (асосларни ўрин алмаштириш, асосларни қўшиш, асосларни ажратиш) қонунларининг исботи, мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби ўртасидаги муносабатлар, мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари каби масалалар кўриб чиқилади.

Тўртинчи бобда **предикатлар мантиқи** баён этилган. Бу ерда предикат тушунчаси, предикатлар устида мантиқий амаллар, умумийлик ва мавжудлик кванторлари, предикатлар мантиқининг формуласи ва унинг қиймати, предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари, предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли, бажарилувчи ва умумқийматли формулалар, ечилиш муаммоси, хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлилигини топиш алгоритмлари, предикатлар мантиқининг математикага татбиқи, аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида маълумотлар келтирилади.

Китобнинг бешинчи боби **математик назарияларга** бағишланган бўлиб, аксиоматик назария тушунчаси, биринчи тартибли тил, терм ва формулалар, мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар, келтириб чиқариш қоидаси, алгебра, геометрия ва анализда мавжуд бўлган математик назариялар, назарияда исботлаш тушунчаси, тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги, дедукция теоремаси, назария тилининг интерпретацияси (талқини), берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари, назариянинг модели, интерпретациянинг изоморфизмлиги, назариянинг қатъийлиги, назариянинг зидсизлик, тўлиқлилик ва ечилиш муаммолари, предикатлар ҳисобининг зидсизлиги, натурал сонлар назарияси, Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси сингари масалалар ёритилган.

Китобнинг олтинчи бобида **алгоритмлар назариясининг элементлари** атрофлича баён этилган. Бу ерда алгоритм тушунчаси ва унинг характерли хусусиятлари, ечилувчи ва

саналувчи тўпламлар, Пост теоремаси, алгоритм тушунчасини аниқлаш, ҳисобланувчи функциялар, қисмий рекурсив ва умумрекурсив функциялар, А. Чёрч ва С. Клини тезислари, Тьюринг машиналари, Тьюринг машинасида алгоритмни жорий қилиш, натурал сонларни қўшиш алгоритми, Евклид алгоритми, алгоритмлар назариясининг асосий гипотезаси, Марковнинг нормал алгоритмлари, Марков бўйича қисман ҳисобланувчи ва ҳисобланувчи функциялар, қисмий рекурсив (умумрекурсив) функция билан Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи (ҳисобланувчи) функция ўртасидаги муносабат, нормаллаштириш принципи, алгоритмик ечилмовчи муаммолар, математик мантиқда келтириб чиқарувчанликни таниш муаммоси, ўз-ўзига татбиқ этувчанликни таниш муаммоси каби масалалар кўрилган.

Китобнинг еттинчи бобида **математик мантиқнинг техникага татбиқлари** келтирилган. Бу ерда реле-контактли схемалар, контактли схемалар ва уларнинг синтези, функционал элементлар ва улардан схемалар яшаш, кўп тактли схемалар, функционал элементлар системасининг тўлиқлиги, схемаларни минималлаштириш муаммоси, тескари боғланиши бўлмаган автоматлар, чекли автомат ҳақида умумий тушунчалар, Мили ва Мур автоматлари каби масалалар кўриб чиқилган. Мантиқ алгебраси функцияларини схемалар (автоматлар) орқали реализация этиш масаласига алоҳида аҳамият берилган.

Саккизинчи бобда **математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси** баён этилган. Бу ерда дизъюнктив нормал шакл (ДНШ)ни содаллаштириш, энг қисқа ДНШ, қисқартирилган ДНШ, тупикли ДНШ, Квайн ДНШ ва минимал ДНШларни яшаш алгоритмлари келтирилган. Аналитик ва геометрик тарздаги алгоритмларнинг эквивалентлиги кўрсатилган.

Тўққизинчи бобда **графлар назариясининг элементлари** ёритилган. Бу ерда оддий графлар, графларнинг изоморфлиги, маршрутлар, занжирлар, цикллар, боғлиқлилик,

дарахтлар, хроматик сон ва хроматик синф, тўрлар ва тўрдаги оқимлар, Форд—Фалкерсон теоремаси каби масалалар қараб чиқилган.

Назарий масалаларни баён этишда мисоллардан кенг фойдаланилган, деярли ҳар бир параграфнинг охирида мустақил ишлаш учун машқлар, савол ва топшириқлар берилган.

Китобда ёритилган масалалар **«Математик мантиқ ва дискрет математика»** ва **«Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси»** фанларидан ташқари давлат таълим стандартларида кўрсатилган «Машиналар арифметикаси ва автоматлар назарияси», «Информатика асослари ва ҳисоблаш техникаси», «ЭХМ ва дастурлаш», «Операцияларни текшириш» каби фанларни ўқитишда ҳам муҳим аҳамият касб этади.

Китобни тайёрлашда америкалик С. Клини ва А. Чёрч, австриялик К. Гёдел, англиялик А. Тьюринг ва Э. Мендельсон ҳамда россиялик А.А. Марков, А.И. Мальцев, П.С. Новиков, С.В. Яблонский, О.Б. Лупанов, В.Б. Кудрявцев, В.А. Горбатов, С.Г. Гиндикин, А.А. Зиков, Л. Лихтарников ва Т. Сукачёва, ўзбекистонлик Р. Искандаров, Т. Ёқубов каби математиклар томонидан яратилган монография, дарслик, ўқув қўлланма ва илмий мақолалар ва самарқандлик М.Исроиловнинг мулоҳазалар алгебрасига бағишланган қўлёзмасидан фойдаланилди.

Олий ўқув юртлари математика факультетлари талабалари учун ўзбек тилида ёзилган дастлабки китоблар марҳум устозимиз Р.И. Искандаровнинг «Математик логика элементлари» (1970) номли дарслиги ва Т.Ёқубовнинг «Математик логика элементлари» (1983) ўқув қўлланмасидир. Бу китоблар математик мантиқ фанини ўқитишда, табиийки, ижобий рол ўйнади.

Ўқувчиларга тавсия этилаётган ушбу китоб «Математик мантиқ ва дискрет математика» ҳамда «Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси» фанлари бўйича Республикамиз давлат таълим стандартларида кўрсатилган ўқув дастурларига тўлиқ жавоб беради.

Китоб университет ва педагогика институтларида **5460100 – математика, 5480100 – амалий математика ва информатика, 5140100 – математика ва информатика, 5521900 – информатика ва информацион технологиялар** бакалаврлик йўналишлари ҳамда **5A460104, 5A480101 ва 5A480107** магистратура мутахассисликлари бўйича таълим олаётган талабаларга мўлжалланган. Китоб камчиликлардан холи бўлмаганлиги тўғрисида, муаллиф китоб ҳақидаги танқидий фикр ва мулоҳазаларни миннатдорчилик билан қабул қилади ва олдиндан ўз ташаккурини изҳор этади.

Китобнинг қўлёзмаси билан муфассал танишиб, унинг сифатини яхшилаш йўлида фойдали кўрсатма ва маслаҳатлар берган тақризчилар ЎзР ФА академиги Н. Сатимов, профессорлар А. Солеев, А. Пўлатов, доцентлар Р. Фуломов ва Ғ. Эргашевга, муҳаррирлик ишини бажарган доцент А. Мусаевга, матнни компьютерга киритган ва макетини тузиб нашр этишга тайёрлаган Х. Якубова, Э. Ўрунбоев ва Ф. Муродовга ўз миннатдорчилигимни билдираман.

Муаллиф.

КИРИШ

Мантиқ — муҳокама юритишнинг қонун-қоидалари, усуллари ва формалари (шакллари) ҳақидаги фан бўлиб, унинг асосчиси қадимги юнон мутафаккири **Аристотель** (милод. авв. 384—322) ҳисобланади. У биринчи бўлиб дедукция назариясини, яъни мантиқий хулоса чиқариш назариясини яратиб, мантиқий хулоса чиқаришнинг формал характерга эга эканлигини кўрсатди. Аристотелнинг мантиқий таълимоти формал мантиқнинг (логиканинг) асосини ташкил қилади. Формал мантиқ фикрлашнинг формалари ва қонунларини текширади. Шундай қилиб, Аристотель мантиқий фикрлашнинг асосий қонунларини очди.

Аристотель асос солган мантиқ кўп асрлар давомида турли мутафаккирлар, файласуфлар ва бутун фалсафий мактаблар томонидан тўлдирилди, ўзгартирилди ва такомиллаштирилди. Шу жумладан, **Абу Наср Форобий**, **Абу Али ибн Сино**, **Абу Райҳон Беруний**, **Муҳаммад ал-Хоразмий**, **Умар Хайём**, **Алишер Навоий**, **Мирзо Бедил** каби Шарқнинг буюк мутафаккирлари ҳам ўзларининг катта ҳиссаларини қўшдилар.

Мантиқнинг янгиланишида француз олими **Р. Декарт**нинг (1596—1650) ишлари муҳим роль ўйнади. Р.Декарт аналитик усулда фикрлашнинг асосий принципларини яратди.

Немис философи ва математиги **Г. Лейбниц** (1646—1716) биринчи бўлиб мантиқий фикрлашга ҳисоб характерини бериш зарур, деган ғоя билан чиқди. Бунинг учун, унинг фикрича, ҳамма илмий тушунчалар ва мулоҳазаларни асосий мантиқий элементларга келтириб, уларни маълум символлар билан белгилаш керак.

Г. Лейбниц ғоялари фақат XIX асрдагина ўз ривожини топди. Инглиз олимлари **Ж. Буль** (1815—1864), **Ч. Пирс** (1839—1914), **Б. Рассел** (1872—1970), **А. Уайтхед** (1861—1947), **У. Жевонс** (1835—1882), немис олимлари **Г. Фрёге**

(1848–1925), Д. Гильберт (1862–1943), Э. Шрёдер (1853–1910), шотланд математиги О. де Морган (1806–1871), рус олимлари П.С. Порецкий (1846–1907), В.И. Гливенко (1897–1940), И.И. Жегалкин (1869–1947) ва бошқалар мантиқ соҳасидаги ишлари билан символик ёки математик мантиқни (логикани) яратдилар.

Математик мантиқ асосчиларидан бири бўлган **Ж. Буль** (машҳур «Сўна» романининг муаллифи Лилиан Войничнинг отасидир) мустақил равишда грек, лотин, немис, француз ва италян тилларини ҳамда математикани ўрганadi. 1847 йилда ёзилган «Мантиқнинг математик таҳлили», «Мантиқий ҳисоб» ва 1854 йилда ёзган «Фикрлаш қонунларини тадқиқ этиш» китобларида мантиқни алгебраик формага келтирди ва математик мантиқнинг аксиомалар системасини яратди. Булнинг мантиқий ҳисоби **Буль алгебраси** деб юритилади.

Ж. Буль мантиқ ва математика операциялари ўртасидаги ўхшашликка асосланиб, мантиқий хулосаларга алгебраик символикани қўлади. У мантиқ операцияларини формаллаштириш (расмийлаштириш) учун қуйидаги символларни (белгиларни) киритди:

– предметларни белгилаш учун (x, y, z, \dots) кичик лотин ҳарфларини;

– предметлар сифатини белгилаш учун (X, Y, Z, \dots) бош лотин ҳарфларини;

– бирор мулоҳазага акслантирилган ҳамма предметлар синфи 1 ни;

– кўрилиши лозим бўлган предметлар йўқлигининг белгиси 0 ни;

– мулоҳазаларни мантиқий қўшишнинг «+» белгисини;

– мулоҳазаларни мантиқий айиришнинг «-» белгисини;

– мулоҳазалар тенглигининг «=» белгисини.

Символик буль алгебрасида мантиқий кўпайтириш амали, худди алгебраик қийматларни кўпайтиришдагидек,

$$xy = yx$$

коммутативлик хоссасига

ва

$$x(yz) = (xy)z$$

ассоциативлик хоссасига эга. Мантиқий қўшиш амали ҳам коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эга:

$$\begin{aligned}x + y &= y + x, \\(x + y) + z &= x + (y + z).\end{aligned}$$

Буль алгебрасида йиғинди қўпайтмага нисбатан дистрибутивлик қонунига бўйсунди:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Ж. Буль алгебраик символикалар ёрдами билан ҳамма мантиқий операцияларни икки қийматли (1 ва 0) алгебра қонунларига бўйсунадиган формал (расмий) операцияларга келтиришни ўйлади. Буль функциялари ва унинг аргументлари фақат икки қиймат — «чин» ва «ёлгон» қийматлар қабул қилади.

Мантиқ алгебраси қоидалари орқали оддий мулоҳазалардан мураккаб мулоҳазаларни ҳосил қилиш мумкин.

Масалан:

$xу$ — бир вақтда x ва y хоссаларга эга бўлган предметлар класс;

$x(1 - y)$ — бу x хоссага эга ва y хоссага эга бўлмаган предметлар класс;

$(1 - x)y$ — бу y хоссага эга ва x хоссага эга бўлмаган предметлар класс;

$(1 - x)(1 - y)$ — бу x ва y хоссаларга эга бўлмаган предметлар класс.

Ҳозирги математик мантиқ фанини яратишда фундаментал роль ўйнаган Буль символик логикаси мукаммаллаштиришга муҳтож эди. Масалан, Жевонс фикрича, мантиқий айириш операцияси айрим ноқулайликларга олиб келади.

О. де Морган Буль ғояларини ривожлантириб, мантиқ ҳисобини эҳтимоллар назарияси теоремаларини асослашга татбиқ этди ва символик ҳисобни яратиш устида ишлади.

Ч. Пирс математикани анализ қилишда мантиқий муносабатларни қурол сифатида ишлатишни асослаб берди, у Г. Фрёге ишларидан хабарсиз ҳолда, мантиққа квантор тушунчасини киритди.

Г. Фрёге математика принципларини мантиқ принципларидан келтириб чиқариш устида ишлаб, мантиқ ҳисобини яратди.

Буль ва О. де Морган асарларида математик мантиқ ўзига хос алгебра — мантиқ алгебраси кўринишида шаклланди.

Кейинчалик, Буль методлари У. Жевонс, Э. Шрёдер ва П.С. Порецкий асарларида ўз ривожини топди.

Буль алгебрасини У. Жевонс ва Э. Шрёдер мукамаллаштирди. У. Жевонс «Соф мантиқ» (1864), «Ўхшашларни алмаштириш» (1869) ва «Фан асоси» (1874) китобларида мантиқ соҳасида алмаштириш принципига асосланган ўзининг назариясини тавсия этди. 1877 йили Э.Шрёдер «Der operation-skreis des Logikkalkuls» китобида алгебраик мантиқ асосларини ёритди.

Математик мантиқ фанининг ривожланишида Порецкийнинг ҳам катта хизмати бор. У Буль, Жевонс ва Шрёдер ютуқларини умумлаштириб, «Мантиқий тенгламаларни ечиш усуллари ва математик мантиқнинг тескари усули ҳақида» (1884) китобида мантиқ алгебраси аппарати ривожини анча илгари сурди. Америкалик олим **А. Блейк** П.С.Порецкий методини Э.Шрёдер методидан устун қўяди.

П.С. Порецкий системасида қуйидаги белгилар қабул қилинган:

1) бир-бирига боғлиқ бўлмаган ва бир-бири билан ҳеч қандай муносабатда бўлмаган предметлар классини кичик лотин ҳарфлари — a, b, c, \dots билан белгилаш;

2) синфларни инкор этиш учун кичик лотин ҳарфларидан кейин «эмас» сўзини қўшиш, яъни a эмас, b эмас ва ҳоказо каби белгилаш;

3) a, b, c, \dots предметлар синфи хусусиятига эга бўлмаган предметлар синфини a_1, b_1, c_1, \dots билан белгилаймиз;

4) икки ёки кўпроқ синфлар биргаликда бир нечта бир-бирига боғлиқ бўлмаган хоссаларга эга бўлишини ab , bc ва ҳоказо кўпайтмалар билан белгилаш. Бу операция коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эга:

$$ab = ba, (ab)c = a(bc);$$

5) мантиқий қўшиш амалини «+» белгиси билан белгилаш. Бу операция ҳам коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эга:

$$x + y = y + x, x + (y + z) = (x + y)z;$$

6) ҳеч қандай мазмунга эга бўлмаган сифат формасини 0 (мантиқий 0) билан белгилаш;

7) мумкин бўлган синфларни ўз ичига олган сифат формасини 1 (мантиқий 1) билан белгилаш; 0 ва 1 ушбу хоссаларга эга:

$$a + 0 = a; a \cdot 1 = a;$$

8) a синфнинг инкорини a_1 синф билан белгилаш;

9) қўшиш, кўпайтириш ва инкор амалларидан ташқари эквивалентлик амалини киритади ва уни «=» символ билан белгилайди. Бу амал учта қоидага бўйсунди: 1) агар $a = b$ тенглигига бир хил синфларни қўшсак, y ҳолда тенглик бузилмайди, яъни $a + c = b + c$ бўлади; 2) агар $a = b$ бўлса, y ҳолда $ad = bd$ бўлади; 3) агар $a = b$ бўлса, y ҳолда $a_1 = b_1$ бўлади, бу ерда $a_1 = a$ эмас, $b_1 = b$ эмас.

XIX асрнинг охирида математик назариялар шундай ривожландики, энди мантиқ масалалари математиканинг ўзида ҳам муҳим аҳамиятга эга бўлиб, мавжуд мантиқий қуроллар математика талабларига жавоб беролмай қолди. Айрим математик муаммоларни ечишдаги қийинчиликлар уларнинг мантиқий табиатига боғлиқлиги аниқланди. Шунинг учун ҳам математик мантиқ тор алгебраик доирадан чиқиб, жадал ривожлана бошлади. Бу йўналишда биринчи бўлиб Г. Фрөгге ва италян математиги **Ж. Пеано** (1858–1932) тадқиқотлар олиб бордилар, улар математик мантиқни арифметика ва тўпламлар назариясини асослаш учун қўлладилар.

1903 йили Б. Расселнинг Лондонда нашр этилган «Математика принциплари» китобида мулоҳазалар ва синфлар ҳисоб назарияси ишлаб чиқилди. Б. Расселнинг А. Уайтхед билан ҳамкорликда ёзган 3 томлик «Математика принциплари» китоблари математик мантиқ фанининг ривожланишида катта роль ўйнади. Бу китобларда мулоҳаза, синф ва предикатлар ҳисоби деярли тўлиқ аксиомалаштирилди ва формалаштирилди. Улар ҳозирги вақтда ўрганилаётган математик мантиқ кўринишини яратдилар.

Д. Гильберт ва немис олими **В. Аккерман**нинг 1928 йилда чоп этилган «Назарий мантиқнинг асосий хусусиятлари» китоблари математик мантиқнинг янада ривожланишида муҳим аҳамият касб этди. Бу китобнинг муаллифлари мантиқий амалларда формалаштириш методини татбиқ этиб, катта ютуққа эришдилар.

Буль, Шрёдер ва Порецкийнинг мантиқ алгебраларига таяниб, И.И. Жегалкин логик қўшиш ва логик кўпайтириш амалларини қуйидагича аниқлади:

$$1) 0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 0;$$

$$2) 0 \cdot 0 = 0; 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1.$$

Логик қўшиш ва кўпайтириш амалларидан $a + a = 0$ ва $a \cdot a = a$ келиб чиқади.

Мантиқий операцияларнинг символик кўринишлари Жегалкин системасида қуйидагича бўлади:

$$\bar{p} = p + 1; p = \bar{\bar{p}}; p \vee q = p + q + pq;$$

$$p \rightarrow q = 1 + p + pq; p \equiv q = 1 + p + q.$$

У символик мантиққа умумийлик ва мавжудлик квантори деган тушунчалар киритди ва предикатлар алгебрасини яратди.

XX асрнинг 50- йилларида кўп қийматли мантиқ соҳасида илмий изланишлар олиб борилди. Кўп қийматли мантиқда мулоҳазалар чекли (3 ва ундан кўп) ва чексиз чинлик қийматлари олади. Математик мантиқ бу бўлимининг асосчила-

ридан бири поляк олими **Я. Лукасевич** (1878–1954) ҳисобланади. У дастлаб уч қийматли (1920), 1954- йилда тўрт қийматли ва ниҳоят чексиз қийматли мантиқни яратди.

Кўп қийматли мантиқ проблемалари (муаммолари) билан **Е. Пост, С. Яськовский, Д. Вебб, А. Гейтинг, А.Н. Колмогоров, Д.А. Бочвар, В.И. Шестаков, Г. Рейхенбах, С.К. Клини, П. Детуш-Феврие** ва бошқа олимлар шуғулланганлар.

Конструктив математиканинг ривожланиши конструктив мантиқ масалаларини ечиш усулларини ишлаб чиқиш вазифасини қўйди. Бу соҳада **А.А. Марков, Н.А. Шанин** ва шогирдларининг хизматлари каттадир.

Дискрет математиканинг катта бўлимларидан бири алгоритмлар назарияси ҳисобланади. Алгоритм сўзи IX асрда яшаган замонасининг буюк математиги ватандошимиз **Муҳаммад ал-Хоразмий** исмининг лотинча Algorithmi формасидан келиб чиққан.

Алгоритмлар назарияси алгоритмларнинг умумий хусусиятларини ўргатувчи дискрет математиканинг бир бўлимидир.

XX асрнинг 20- йилларида биринчи бўлиб интуиционистлар вакиллари **Л. Брауэр** ва немис олими **Г. Вейлер** (1934) алгоритм тушунчасини ўрганишга киришганлар. Алгоритмлар назариясининг асосчиларидан бири бўлган америкалик олим **А. Чёрч** 1936 йилда ҳисобланувчи функция тушунчасига 1- аниқликни киритди ва қуйидаги тезисни илгари сурди: **натурал аргументларнинг барча қийматларида ҳамма жойда аниқланган ҳисобланувчи функциялар билан умумий рекурсив функциялар эквивалентдир (бир хилдир).** У ҳисобланувчи функция бўлмаган функцияни кўрсатди.

Алгоритмлар назариясининг кейинги ривожланишида америкалик олимлар **К. Гёдел, С.К. Клини** (1957), **Э.Л. Пост** (1943–1947), **Х. Роджерс** (1972), инглиз олими **А. Тьюринг** (1936–1937), рус олимлари **А.А. Марков** (1947–1954, 1958, 1967), **А.Н. Колмогоров** (1953, 1958, 1965), **Ю.Л. Ершов** (1969–1973), **А.И. Мальцев** (1965,) **Д.А. Трахтенброт** (1967,

1970–1974), П.С. Новиков (1952), Ю.В. Матиясевич (1970–1972) нинг хизматлари бениҳоят каттадир.

Масалан, С. Клини алгоритм ёрдамида ҳисобланувчи қисмий функциялар қисмий рекурсив функциялардир, деган ғояни илгари сурди.

А. Тьюринг ва Э. Пост (1936) идеаллаштирилган ҳисоблаш машиналари атамасида биринчи бўлиб, бир-биридан беҳабар ҳолда, алгоритм тушунчасига аниқлик киритдилар. Пост ва Тьюринг алгоритмик жараёнлар маълум бир тузилишга эга бўлган «машина» бажарадиган жараёнлар эканлигини кўрсатдилар. Улар ўша пайтдаги математикада маълум бўлган барча алгоритмик жараёнларни бажара оладиган «машина» лар синфини ҳосил қилиб, уларга аниқ математик атамалар ёрдамида таъриф бердилар. Пост ва Тьюринг ушбу машиналар ёрдамида ҳисобланувчи барча функциялар синфи барча қисмий рекурсив функциялар синфи билан бир хил эканлигини кўрсатдилар. Натижада, Чёрч тезисининг яна битта фундаментал тасдиғи ҳосил бўлди.

С. Клини ва Э. Пост биргаликда рекурсивлик назариясини яратдилар ва рекурсив функциялар назариясини тараққий эттирдилар. Улар қисман рекурсив функциялар тушунчасини киритдилар.

Дастлаб фақат математик мантиқ, алгебра, математик анализ, математика асослари, эҳтимоллар назарияси, геометрия, топология, сонлар назарияси, моделлар назарияси каби математика фанларида татбиқ этиб келинган алгоритмлар назарияси XX асрнинг 40- йилларидан бошлаб ҳисоблаш математикаси, кибернетика, ахборот назарияси, иқтисодиёт, психология, математик лингвистика, тиббиёт фанлари ва дискрет техникада кенг қўлланилмоқда.

Сўнги даврларда математик мантиқни техникага жуда самарали татбиқ этиш имкониятлари борлиги маълум бўлди.

Математик мантиқни дискрет техникага татбиқи натижасида унинг техник мантиқ бўлими вужудга келди. Бу соҳада Е. Пост, В.И.Шестаков, К.Шеннон (1916 й.т.), А. Накашима,

М. Ханзава, С. Клини, О.Б. Лупанов (1932 й.т.), С.В. Яблонский (1924 й.т.), В.Б. Кудрявцев, Ю.И. Журавлёв, В.И. Левенштейн, В.В. Глаголев, Ф.Я. Ветухновский, Ю.Л. Васильев ва бошқа олимлар ўз илмий изланишлари билан унинг тараққий этишига улкан ҳисса қўшганлар.

Математик мантиқни техникага қўллашни биринчи бўлиб рус физиги П. Эрнфест (1910) ва гидротехника қурилишлари бўйича етук мутахассис Н.М. Герсеванов амалга оширганлар.

К. Шеннон ҳисоблаш машиналарини яратишнинг асосий методи сифатида мантиқ алгебрасини билган, у информация ва информацияни узатишнинг математик назарияларини яратди, электрон тармоқлардаги «1» ва «0» бинар муносабатлар билан математик мантиқдаги иккилик (1 ва 0) қийматларининг мос келишини ва қандай қилиб «мантиқ машинасини» яратишни кўрсатди ва ҳоказо.

Контактли ва реле-контактли схемаларга мантиқ алгебрасини татбиқ этишнинг исботини биринчи бўлиб В.И. Шестаков ва К. Шеннон берди. А. Накашима ва М. Ханзава математик мантиқни дискрет техника масалаларини ечишда қўллаш методларини яратдилар. С. Клини дискрет қурилма моделини (чекли автомат модели) яратгани туфайли, математик мантиқни хотирали дискрет қурилмаларни лойиҳалашда ишлатиш имкони юзага келди.

Москва давлат университети дискрет математика мактабининг асосчиларидан бири О.Б. Лупановнинг асосий ишлари математик кибернетика ва математик мантиққа бағишланган. У мураккаб бошқарувчи системаларнинг асимптотик қонуниятларини, контакт схемалар ва функционал элементлардан ясалган схемаларни (умуман, асосий бошқарувчи системаларни), энг яхши асимптотик синтез методларини ва локал кодлаш принципини ишлаб чиқди.

С.В. Яблонский оптимал схемаларни синтез қилиш ва ҳисоблаш қурилмаларини ясаш методини яратди.

Мантиқ алгебраси электр схемаларни лойиҳалашда ва текширишда, автоматик ҳисоблаш машиналарини лойиҳалаш ва программалашда, дискрет автоматларни мантиқий лойиҳалашда, ЭҲМ элементлари ва қисмларини лойиҳалашда, ҳар хил техник системалар, қурилмалар ва автоматик машиналарни анализ ва синтез қилишда кенг миқёсда татбиқ этилади. Математик мантиқ фани электрон ҳисоблаш машиналарининг вужудга келишига ва уни мукамаллаштиришга катта ҳисса қўшди.

Демак, математик мантиқ, бир томондан, формал мантиқ муаммоларига математик методларни қўллаш натижасида ривожланган бўлса, иккинчи томондан, математикани асослашга хизмат қилувчи фан сифатида ривожланди. Ҳозирги замон математик мантиқи автоматика, машина математикаси, бир тилдан иккинчи тилга автоматик тарзда таржима қилиш, математик лингвистика, ахборот назарияси ва умуман кибернетика билан боғлиқдир.

Шундай қилиб, математик мантиқ ва дискрет математика 150 йилдан бери ривожланиб келмоқда. У математика асослари, алгебра, геометрия, математик анализ, функционал анализ, топология, эҳтимоллар назарияси каби фанларда татбиқ этилишидан ташқари кибернетика, иқтисодиёт, математик лингвистика, психология, ЭҲМ ва дастурлаш, операцияларни текшириш, схемотехника, радиотехника, автоматика, ўйинлар назарияси, ахборотлар назарияси сингари фанларда ҳам кенг қўлланилади.

1- §. Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари

- Тўпам. Тўпам элементлари. Тенг кучли тўпамлар. Қисм тўпам. Хос ва хосмас қисм тўпамлар. Бўш тўпам.*

Тўпамлар назариясига математик фан сифатида немис математиги Г. Кантор (1845–1918) томонидан асос солинган.

Математикада доимо турли тўпамлар билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, тўғри бурчакли учбурчаклар тўплами, натурал сонлар тўплами, тўғри чизиқда ётувчи нуқталар тўплами ва ҳоказо. Умуман, тўпам тушунчаси айрим-айрим нарсалар, буюмлар, объектларни биргаликда, яъни бир бутун деб қараш натижасида вужудга келади.

1- таъриф. Тўпамни ташкил этувчи нарсалар, буюмлар, объектлар бу тўпамнинг элементлари деб аталади. Тўпамлар, одатда, латин ёки грек алфавитининг бош ҳарфлари билан белгиланади.

A тўпам a, b, c, d, \dots элементлардан тузилганлиги

$$A = \{a, b, c, d, \dots\}$$

кўринишда ёзилади. Тўпамни ташкил этувчи элементлар сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда чекли тўпамга, иккинчи ҳолда эса чексиз тўпамга эга бўламиз. Масалан: $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$; $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – чекли тўпамлар; $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$, $D = \{2, 3, 5, 7, \dots, p, \dots\}$ – чексиз тўпамлар.

a нарса *A* тўпамнинг элементи эканлиги $a \in A$ ёки $A \ni a$ кўринишда белгиланади. Бирор *b* нарса *A* тўпамнинг элементи эмаслиги $b \notin A$ ёки $A \not\ni b$ кўринишда ёзилади. Масалан: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ да $2, 4, 6, 8, 10 \in A$, бироқ $12, 14 \notin A$.

A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг a элементи B тўпламнинг b элементига тенг, яъни $a = b$, деб олсак, бундан битта элемент иккала тўпламда ҳам мавжудлиги келиб чиқади. Масалан, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ва $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ тўпламлардаги 2, 4, 6, 8 элементлар уларнинг иккаласида ҳам мавжуддир.

2-таъриф. A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламда мавжуд ва, аксинча, B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламда ҳам мавжуд бўлса, A ва B тўпламларни **тенг (тенг кучли)** деб аталади ва $A = B$ ёки $B = A$ белги билан ифодаланади.

Демак, тенг A ва B тўплам аслида бир тўпламдир.

3-таъриф. Агар B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламда ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда B тўплам A тўпламнинг **қисм тўплами** деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$B \subseteq A \text{ ёки } A \supseteq B. \quad (1)$$

Масалан: 1) бутун сонлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламининг қисм тўпламини ташкил этади;

2) вилоятлар республика вилоятлари тўпламининг қисм тўпламини ташкил этади;

3) тоқ сонлар тўплами бутун сонлар тўпламининг қисм тўпламидир ва ҳоказо.

4-таъриф. B тўпламнинг ҳамма элементлари A тўпламда мавжуд бўлиб, шу билан бирга A тўпламда B тўпламга кирмаган элементлар ҳам бор бўлса, у ҳолда B тўплам A тўпламнинг **хос қисм тўплами** деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$B \subset A \text{ ёки } A \supset B. \quad (2)$$

Демак, $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда

$$A = B. \quad (3)$$

(3) тенглик A нинг ўзи ўзининг қисм тўплами бўлишини кўрсатади ва бу ҳолатни ифодалаш учун «ўзининг хосмас қисми» деган иборадан фойдаланамиз.

Масалан, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ тўплам учун $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{d, e, f\}$ тўпламларнинг ҳар қайсиси хос қисмдир.

Одатда, тўпламлар назариясида битта ҳам элементи бўлмаган тўпламлар билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, $x^2 + 4 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари бўш тўпламни ташкил қилади, чунки $x_{1,2} = \pm 2i$, яъни тенгламанинг ҳақиқий илдизлари мавжуд эмас.

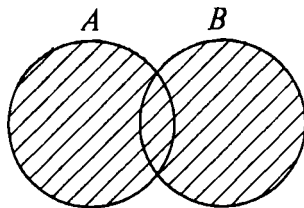
5-таъриф. Битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўш тўплам деб аталади ва \emptyset симболи билан белгиланади. \emptyset бўш тўплам ҳар қандай A тўпламнинг қисм тўплами бўлади ва у ҳам A тўпламнинг хосмас қисми дейилади.

2- §. Тўпламлар устида амаллар

Тўпламларнинг бирлашмаси. Тўпламларнинг кесишмаси. Тўпламларнинг айирмаси. Тўлдирувчи. Универсал тўплам.

A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф. Берилган A ва B тўпламларнинг **йиғиндиси** ёки **бирлашмаси** деб, шу тўпламларнинг такрорланмасдан олинadиган ҳамма элементларидан тузилган ва $C = A \cup B$ каби белгиладиган тўпламга айтилади (I.1- шакл).



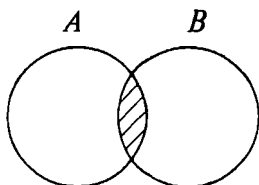
I.1- шакл.

Агар $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг $A \cup B$ йиғиндиси қуйидагича ёзилади:

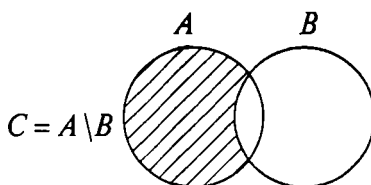
$$\bigcup_{\alpha=1}^n A_{\alpha} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n. \quad (1)$$

Масалан, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, b\}$, $C = \{e, f, k\}$ бўлса, у ҳолда $A \cup B \cup C = \{a, b, c, e, f, k\}$.

2-таъриф. Берилган A ва B тўпламларнинг ҳамма умумий элементларидан тузилган C тўплам A ва B тўпламларнинг **кўпайтмаси** (кесишмаси ёки умумий қисми) дейилади ва $C = A \cap B$ кўринишида белгиланади (I.2- шакл).



I.2- шакл.



I.3- шакл.

Агар $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ тўпламлар берилган бўлса, у ҳолда уларнинг $C = A \cap B$ кўпайтмаси қуйидагича ёзилади:

$$\bigcap_{\alpha=1}^n A_{\alpha} = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n. \quad (2)$$

Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ бўлса, у ҳолда $C = \{2, 4\}$.

Битта ҳам умумий элементга эга бўлмаган тўпламларнинг кесишмаси \emptyset бўш тўпламга тенг бўлади. Масалан, тоқ сонлар тўплами билан жуфт сонлар тўплагининг кесишмаси бўш тўпламдир.

3- таъриф. A ва B тўпламларнинг **айирмаси** деб, A нинг B да мавжуд бўлмаган ҳамма элементларидан тузиладиган ва $C = A - B$ ёки $C = A \setminus B$ кўринишида ёзиладиган C тўпламга айтилади (I.3- шакл).

Масалан, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ва $B = \{3, 4, 5, 6\}$ бўлса, у ҳолда $C = \{1, 2\}$.

4- таъриф. A тўпламдаги унинг B қисм тўплагига қирмай қолган ҳамма элементларидан тузилган қисм тўплам B нинг A тўплагача **тўлдирувчиси** деб айтилади ва \bar{B} (ёки B') кўринишида белгиланади.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ натурал сонлар тўплами ва $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ жуфт сонлар тўплами бўлса, у ҳолда $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ бўлади, яъни $B \cup \bar{B} = A$.

\bar{B} тўплам B ни A гача тўлдиради. Ушбу тенгликларни келтириб чиқариш мумкин:

$$\bar{B} \cup B = \emptyset, \quad B \cap \bar{B} = A, \quad B - \bar{B} = B, \quad \bar{B} - B = \bar{B}.$$

5- таъриф. *Бирор тўпламнинг хос қисми деб қаралмаган ҳар бир тўпламни универсал тўплам деб атаб, уни U ҳарфи билан белгилаймиз.*

Таърифга биноан, U нинг ҳамма қисмлари орасида иккита хосмас қисми бор: биттаси U нинг ўзи, иккинчиси \emptyset бўш тўплам, қолганлари хос қисмлардан иборат.

3- §. Асосий тенгликлар (тенг кучлиликлар)

Асосий тенг кучлиликлар. Коммутативлик, ассоциативлик, дистрибутивлик қонулари.

U универсал тўпламнинг қисмлари орасидаги муносабатларни ифодаловчи асосий тенгликлар қуйидагилардан иборат.

$$1. \overline{\overline{A}} = A.$$

Тўпламлар назариясида тенгликларни исботлашнинг умумий методи тенгликнинг бир томонидаги тўпламга тегишли ҳар бир элемент иккинчи томонидаги тўпламда ҳам мавжуд ва, аксинча, эканлигини кўрсатишдан иборатдир.

Исбот. $\overline{\overline{A}}$ тўплам \overline{A} нинг тўлдирувчиси. Шунинг учун \overline{A} нинг ҳар бир элементи $x \in \overline{A}$, демак, $x \in A$. Аксинча, A нинг ҳар бир элементи $x \in A$ бўлгани учун $x \in \overline{\overline{A}}$. Демак, $\overline{\overline{A}} = A$.

2. $A \cap B = B \cap A$ — кўпайтмага нисбатан коммутативлик қонуни.

Исбот. $A \cap B$ нинг ҳар бир элементи A ва B да мавжуд, чунки $A \cap B$ тўплам A ва B нинг умумий элементларидан тузилган. Демак, $A \cap B$ нинг элементлари $B \cap A$ да ҳам мавжуд. Худди шу каби, $B \cap A$ нинг ҳар бир элементи B ва A да мавжуд, чунки $B \cap A$ тўплам B ва A нинг умумий элементларидан тузилган. Шунинг учун $B \cap A$ тўпламнинг ҳар бир элементи $A \cap B$ тўпламнинг ҳам элементи бўлади. Демак, $A \cap B = B \cap A$.

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – кўпайтмага нисбатан ассоциативлик қонуни.

Исбот. $x \in (A \cap B) \cap C$ бўлсин. Демак, $x \in (A \cap B)$ ва $x \in C$. Бу ердан $x \in A$, $x \in B$ ва $x \in C$ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун $x \in A$ ва $x \in B \cap C$ дир. Бу ердан ўз навбатида $x \in A \cap (B \cap C)$ эканлиги келиб чиқади. Исботнинг иккинчи қисмини ўқувчига ҳавола этамиз.

4. $A \cup B = B \cup A$ – йиғиндига нисбатан коммутативлик қонуни.

5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – йиғиндига нисбатан ассоциативлик қонуни.

4 ва 5- тенгликларнинг исботлари худди 2 ва 3- тенгликларни исботлашга ўхшаш амалга оширилади.

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – кўпайтмага нисбатан дистрибутивлик қонуни.

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – йиғиндига нисбатан дистрибутивлик қонуни.

6- тенгликнинг исботи: $x \in A \cap (B \cup C)$ бўлсин, у ҳолда $x \in A$ ва $x \in B \cup C$ бўлади. Бу ердан $x \in A$ ва $x \in B$ ёки $x \in A$ ва $x \in C$ келиб чиқади. Демак, $x \in A \cap B$ ёки $x \in (A \cap C)$. Шунинг учун $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Энди $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ бўлсин, у ҳолда $x \in (A \cap B)$ ёки $x \in (A \cap C)$ бўлади. Бу ердан $x \in A$ ва $x \in B$ ёки $x \in A$ ва $x \in C$ келиб чиқади. Демак, $x \in A \cap (B \cup C)$.

$$8. \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad 9. \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \quad 10. A \cap A = A.$$

$$11. A \cap U = A. \quad 12. \overline{A \cup A} = \overline{A}. \quad 13. A \cup \emptyset = A.$$

4- §. Тўпламлар алгебраси

Айниятлар. Теоремалар. Де Морган қонуни. Жупт-жупт эквивалент.

Тўпламлар алгебрасида \cup , \cap , $-$, \subseteq белгилари орасидаги ўзаро муносабатлар кўриб чиқилади. Тўпламлар алгебрасида,

умуман, оддий алгебрадагидек айниятлар — тенгликлар кўрилади. Бу айниятлар универсал тўпламнинг ва унинг хос қисм тўпламларининг қандай бўлишидан қатъи назар ўз кучини сақлайди.

1- теорема. *U универсал тўпламнинг исталган A, B, C қисм тўпламлари орасидаги муносабатларни ифодаловчи қуйидаги тенгликлар айниятдир:*

- | | |
|--|---|
| 1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$ | 1'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$ |
| 2. $A \cup B = B \cup A.$ | 2'. $A \cap B = B \cap A.$ |
| 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$ | 3'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$ |
| 4. $A \cup \emptyset = A.$ | 4'. $A \cap U = A.$ |
| 5. $A \cup \bar{A} = U.$ | 5'. $A \cap \bar{A} = \emptyset.$ |

Агар $A \subseteq B$ ва $B \subseteq A$ бўлса, у ҳолда $A = B$. Ана шу хоссадан фойдаланиб юқорида келтирилган айниятлар исбот қилинади, яъни тенгликнинг чап томонидаги ҳар бир элемент унинг ўнг томонида ҳам мавжуд ва аксинча эканлигини кўрсатиш керак. Биз юқоридаги айниятларнинг айримларини исбот этган эдик.

1 ва 1'- айниятлар мос равишда *йиғинди* ва *кўпайтма амаллари учун ассоциативлик қонунлари* дейилади. 2 ва 2'- айниятлар *коммутативлик қонуни* ва 3, 3'- айниятлари эса шу амаллар учун *дистрибутивлик қонуни* дейилади.

Ассоциативлик қонунига асосан A, B, C қисм тўпламлардан маълум тартибда йиғинди амали билан ҳосил қилинган икки тўплам тенгдир. Бу тўпламни $A \cup B \cup C$ шаклда белгилаймиз.

Ассоциативлик қонунига кўра қавс белгиси қаерда туриши ҳеч қандай роль ўйнамайди. Математик индукция методига асосан

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n,$$

бу ерда 1', 2', ..., n' белгилашлар 1, 2, ..., n сонларининг исталган тартибда олинганидан ҳосил қилинган сонларни билдиради.

Шу тариқа қуйидаги тенгликларни ҳам келтириб чиқариш мумкин:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n,$$

$$A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap (A \cup B_2) \cap \dots \cap (A \cup B_n),$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

Кўрсатилган 1–5 ва 1'–5' тенгликлардан қуйидаги ҳулосани ҳосил қиламиз: 1-теоремадаги айниятлар жуфт-жуфт тарзда шундай жойлаштирилганки, бири иккинчисидан \cup ва \cap ҳамда \emptyset ва U белгиларни бир вақтда ўзаро жойларини алмаштириш натижасида келиб чиқади.

2-теорема. *U универсал тўпламнинг исталган A ва B қисм тўпламлари учун қуйидагилар ўринлидир:*

6. *Агар ҳамма A лар
учун $A \cup B = A$ бўлса,
у ҳолда $B = \emptyset$.*

6'. *Агар исталган A учун
 $A \cap B = A$ бўлса, у ҳолда
 $B = U$.*

7 ва 7'. *Агар $A \cup B = U$ ва $A \cap B = \emptyset$ бўлса, у ҳолда $B = \bar{A}$.*

8 ва 8'. $\bar{\bar{A}} = A$.

9. $\overline{\emptyset} = U$.

9'. $\bar{U} = \emptyset$.

10. $A \cup A = A$.

10'. $A \cap A = A$.

11. $A \cup U = U$.

11'. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

12. $A \cup (A \cap B) = A$.

12'. $A \cap (A \cup B) = A$.

13. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

13'. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2-теореманинг айрим тенгликлари адабиётда махсус номга эгадир. Масалан, 10 ва 10'-тенгликлар *идемпотентлик қонуни*, 12 ва 12'-тенгликлар *ютиш қонуни*, 13 ва 13'-тенгликлар *де Морган қонуни* деб аталади.

Тўпламлар алгебрасида бирор тенгликдан шу тенгликка кирган \cup ни \cap га, \cap ни \cup га, \emptyset ни U га, U ни \emptyset га бирданига алмаштириш натижасида ҳосил қилинган иккинчи тенглик биринчи тенгликка ва, аксинча, биринчи тенглик иккинчи тенгликка нисбатан *икки тарафлама тенглик* деб айтилади.

3- теорема. *Исталган A ва B тўпламлар учун қуйидаги мулоҳазалар жуфт-жуфт эквивалентдир:*

$$(I) A \subseteq B; \quad (II) A \cap B = A; \quad (III) A \cup B = B. \quad (1)$$

R_1, R_2, \dots, R_n мулоҳазалар жуфт-жуфт эквивалентдир деган тасдиқ қуйидагини билдиради: исталган i ва j учун R_i мулоҳаза R_j мулоҳазага эквивалентдир. Бу мулоҳаза ўз навбатида фақатгина R_1 мулоҳаза R_2 мулоҳазанинг, R_2 мулоҳаза R_3 мулоҳазанинг, ..., R_{n-1} мулоҳаза R_n мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаргандагина тўғридир.

Исбот. (I) мулоҳаза (II) мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаради. Ҳақиқатан, $A \subseteq B$ бўлсин. Исталган A ва B учун $A \cap B = A$ эканлигини кўрсатиш керак.

а) $\overline{A \cap B}$ бўлса, у ҳолда $x \in A$ ва $x \in B$ дир. Демак, $A \cap B \subseteq A$.

б) $x \in A$ бўлсин. У ҳолда (II) га асосан $x \in B$ ҳамдир. Шунинг учун $A \subseteq A \cap B$, яъни (I) мулоҳаза (II) мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаради.

Энди $A \cap B = A$ бўлсин, у ҳолда $A \cup B = B$ эканлигини исбот қиламиз:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B) = (A \cup B) \cap B = B.$$

Демак, $A \cup B = B$.

(III) мулоҳаза (I) мулоҳазанинг тўғрилигини келтириб чиқаради. Ҳақиқатан ҳам, $A \cup B = B$ ва $A \subseteq A \cup B$ бўлишидан $A \subseteq B$. Бу билан исбот якунланади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. а) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup B = \overline{A} \cup B;$

б) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X) = C$
эканлиги исбот этилсин.

2. Ушбу тўпламларнинг ҳар иккитаси ва ҳар учтасининг кесишмалари ва бирлашмаларини топинг:
 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{a, f, g, k, c\}$.
3. $A = \{1, 2, \dots, n\}$ тўплам учун $B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\}$ қисм тўпламдир. \bar{B} ни топинг.
4. $(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \bar{A}) = A \cap B$ тенгликни исботланг.
5. 7–13-асосий тенг кучлиликларни исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари нимадан иборат?
2. Тўпламлар устида қандай амаллар бажарилади?
3. Асосий тенг кучлиликларни ёзинг.
4. Қандай тўпламлар тўпламлар алгебраси деб айтилади?
5. Мулоҳазаларнинг жуфт-жуфт эквивалентлигининг шартлари.

5- §. Муносабатлар. Бинар муносабат

- Муносабат. Тартибланган жуфтлик. Унар ва бинар муносабатлар. n -ар муносабат. Аниқланиш соҳаси. Қийматлар соҳаси.*

Дискрет математикада фундаментал тушунчалардан бири бўлган **муносабат** тушунчаси предметлар (нарсалар) ва тушунчалар орасидаги алоқани ифодалайди. Қуйидаги тўлиқсиз гаплар муносабатларга мисол бўла олади:

... кичик ... дан; ... тенг ... га; ... бўлинади ... га ва ҳоказо.

Бундан кейин муносабат тушунчаси тўпламлар назарияси нуқтаи назаридан туриб ўрганилади.

Муносабат тушунчасини аниқлаш учун **тартибланган жуфтлик** тушунчасига аниқлик киритайлик. Маълум тартибда жойлашган икки предметдан тузилган элемент *тартибланган жуфтлик* дейилади. Математикада тартибланган жуфтлик қуйидаги хусусиятларга эга бўлади, деб фараз қилинади:

1) ҳар қандай (исталган) x ва y предметлар учун $\langle x, y \rangle$ каби белгиланадиган маълум объект мавжуд бўлиб, y x ва y нинг тартибланган жуфтлиги деб ўқилади. Ҳар бир x ва y предметларга ягона тартибланган $\langle x, y \rangle$ жуфтлик мос келади;

2) иккита $\langle x, y \rangle$ ва $\langle u, v \rangle$ тартибланган жуфтлик берилган бўлсин. Агар $x = u$ ва $y = v$ бўлса, y ҳолда $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ бўлади.

Тартибланган жуфтлик $\langle x, y \rangle$ қуйидаги тўпламдир:

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

яъни шундай икки элементли тўпламдирки, унинг битта элементи $\{x, y\}$ тартибсиз жуфтликдан иборат, иккинчиси эса $\{x\}$, шу тартибсиз жуфтликнинг қайси ҳади биринчи ҳисобланиши кераклигини кўрсатади.

Тартибланган жуфтлик $\langle x, y \rangle$ нинг x предмети унинг *биринчи координатаси*, y предмети эса *иккинчи координатаси* деб аталади.

Тартибланган жуфтликлар атамаси асосида тартибланган n -ликларни аниқлаш мумкин. x, y ва z предметларнинг *тартибланган учлиги* $\langle x, y, z \rangle$ қуйидаги тартибланган жуфтликлар шаклида аниқланади: $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$. Худди шу каби x_1, x_2, \dots ва x_n предметларнинг *тартибланган n -лиги* $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, таърифга асосан, $\langle \langle x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$ тарзда аниқланади.

Элементлари тартибланган жуфтликлардан иборат бўлган тўплам *тартибланган жуфтликлар тўплами* деб аталади.

Бинар муносабатни тартибланган жуфтликлар тўплами сифатида аниқлаймиз. Агар ρ бирор муносабатни ифодаласа, y ҳолда $\langle x, y \rangle \in \rho$ ва x ру ифодаларни ўзаро алмашувчи ифодалар деб ҳисоблаймиз. x ру ифодани «предмет x предмет y га нисбатан ρ муносабатда» деб ўқилади.

Қуйидаги $x = y$, $x < y$, $x \equiv y$ белгилар x ру ифодадан келиб чиққан.

n - ар муносабати тартибланган n - ликлар тўплами сифатида аниқланади. 3-ар муносабатни кўпинча адабиётда *тернар муносабат* деб ҳам юритилади.

Мисоллар. 1. $\{< 2, 4 >, < 5, 6 >, < 7, 6 >, < 8, 8 >\}$ тартибланган жуфтликлар тўплами бинар муносабатга мисол бўла олади.

2. Агар ρ айният муносабатини билдирса, u ҳолда $< x, y > \in \rho$ дегани $x \equiv y$ ни билдиради.

3. Агар ρ оналик муносабатини билдирса, u ҳолда $< \text{Хуршида, Ирода} > \in \rho$ симболи Хуршида Ироданинг онаси эканлигини билдиради.

4. Тернар муносабатига бутун сонлар тўпламидаги қўшиш амали мисол бўла олади. $5 = 2 + 3$ ёзувини $< 5, 2, 3 > \in +$ шаклида ҳам ёзиш мумкин.

Бундан кейин бинар муносабат атамаси ўрнига қисқалик учун муносабат атамасини ишлатамиз.

$\{x/x \in A\}$ симболини қўйидагича тушуниш керак: $\{\text{Шундай } x \text{ лар тўпламики, } x \in A\}$.

$\{x/\text{айрим } u \text{ учун } < x, u > \in \rho\}$ тўплами ρ муносабатнинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва D_ρ симболи билан белгиланади. $\{u/\text{айрим } x \text{ учун } < x, u > \in \rho\}$ тўплами ρ муносабатнинг *қийматлар соҳаси* дейилади ва R_ρ симболи билан белгиланади. Бошқача қилиб айтганда, ρ муносабатнинг *аниқланиш соҳаси* деб, шу ρ муносабатнинг биринчи координаталаридан тузилган тўплагга айтилади, иккинчи координаталаридан тузилган тўплаг эса *қийматлар соҳаси* дейилади.

Мисол. $\{< 2, 4 >, < 3, 3 >, < 6, 7 >\}$ ρ муносабат берилган бўлсин. u ҳолда $D_\rho = \{2, 3, 6\}$, $R_\rho = \{4, 3, 7\}$.

Бирор C тўплаг $< x, u >$ тартибланган жуфтликлар тўплами бўлсин. Агар x бирор X тўплагнинг элементи ва u бошқа Y тўплагнинг элементи бўлса, u ҳолда C тўплаг X ва Y тўплагларнинг *тўғри (декарт) кўпайтмасидан тузилган тўплаг* дейилади ва қўйидагича белгиланади:

$$C = X \times Y = \{< x, u >/x \in X \text{ ва } u \in Y\}.$$

Ҳар бир ρ муносабат айрим олинган $X \times Y$ тўғри кўпайт-
манинг қисм тўплами бўлади ва $X \supseteq D_\rho$, $Y \supseteq R_\rho$. Агар $\rho \subseteq X \times Y$
бўлса, у ҳолда ρ шу X дан Y га бўлган муносабат деб аталади.
Агар $\rho \subseteq X \times Y$ ва $Z \supseteq X \cup Y$ бўлса, у ҳолда ρ дан Z га бўлган
муносабат деб аталади. Z дан Z га бўлган муносабатни
 Z ичидаги муносабат деб аталади.

X бирор тўпلام бўлсин. У ҳолда X ичидаги $X \times X$ муноса-
бат X ичидаги универсал муносабат деб аталади.

$\{<x, x>/x \in X\}$ муносабат X ичидаги айният муносабати
деб аталади ва i_x ёки i символи билан белгиланади. Ҳар қандай
 X тўпلامнинг x ва y элементлари учун $x i_x y$ ифода $x = y$
билан тенг кучлидир.

A тўпلام ва ρ муносабат берилган бўлсин. У ҳолда
 $\rho[A] = \{y/A \text{ нинг айрим } x \text{ лари учун } x \rho y\}$. Бу тўпلام A тўпلام
элементларининг ρ - образлари тўплами деб айтилади.

Мисол. $y = 2x + 1$ тўғри чизиқни $\{<x, y> \in R \times R / y = 2x + 1\}$
ва $y < x$ муносабатини $\{<x, y> \in R \times R / y < x\}$ шаклларда ёзиш
мумкин.

6- §. Эквивалентлик муносабати

*Рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатлар.
Эквивалентлик синфи.*

1- таъриф. Агар X тўпلامнинг исталган x элементи
учун $x \rho x$ бўлса, у ҳолда ρ муносабати X тўпلامдаги **рефлексив муносабат** деб аталади; агар $x \rho y$ дан $y \rho x$ келиб чиқса,
у ҳолда ρ **симметрик муносабат** деб аталади; агар $x \rho y$ ва
 $y \rho z$ дан $x \rho z$ келиб чиқса, у ҳолда ρ **транзитив муносабат**
деб аталади.

Шу кўрсатилган учала хоссага эга бўлган муносабатлар
математикада кўп учрагани учун уларга махсус ном қўйилган.

2- таъриф. Агар бирор тўпلامдаги муносабат рефлексив,
симметрик ва транзитив хоссаларга эга бўлса, у ҳолда бундай
муносабат шу тўпلامдаги **эквивалентлик муносабати** дейилади.

Агар ρ муносабати X тўпламдаги эквивалентлик муносабати бўлса, у ҳолда $D_\rho = X$.

Мисоллар. Қуйидаги ҳар бир муносабат маълум тўпламдаги эквивалентлик муносабатига мисол бўла олади:

1. Исталган тўпламдаги тенглик муносабати.
2. Евклид текислигининг ҳамма учбурчаклар тўпламидаги ўхшашлик муносабати.
3. Бутун сонлар тўпламидаги n модуль бўйича таққослама муносабати.
4. Мамлакатда яшовчи одамлар тўпламидаги «бир уйда яшовчилар» муносабати.

Эквивалентлик муносабати ушбу асосий хусусиятга эга: у тўпламни кесишмайдиган қисм тўпламларга бўлади. Кейинги мисол, масалан, «бир уйда яшовчилар» муносабати мамлакатни бир-бири билан кесишмайдиган «бир уйда яшовчилар» қисм тўпламларига бўлади. Бу айтилганларни қуйидагича умумлаштириш мумкин.

ρ бирор X тўпламдаги эквивалентлик муносабати бўлсин. Агар X тўпламнинг A қисм тўпламининг шундай x элементи топилиб, $A = \{y/x\rho y\}$ бўлса, у ҳолда A қисм тўплам *эквивалентлик синфи* ёки *эквивалентлик ρ - синфи* деб аталади.

Шундай қилиб, X тўпламнинг шундай элементи мавжуд бўлсаки, $A = \rho[\{x\}]$ тенглик бажарилса, у вақтда A тўплам эквивалентлик синфи бўлади.

Агарда ρ муносабат тўғрисида ҳеч қандай англашилмовчилик туғилмайдиган бўлса, у вақтда X тўплам $[x]$ шаклида белгиланади, яъни $\rho[\{x\}] = [x]$ ва x юзага келтирган *эквивалентлик синфи* деб аталади.

Эквивалентлик синфи қуйидаги икки хоссага эга:

1) $x \in [x]$ — бир синфнинг ҳамма элементлари ўзаро эквивалентдир;

2) агар $x \rho y$ бўлса, у ҳолда $[x] = [y]$.

1- х о с с а эквивалентлик муносабатининг рефлексивлик хусусиятидан келиб чиқади.

2- хоссанинг исботи. x ру бўлсин, яъни x элемент у элементга эквивалент бўлсин, у ҳолда $[y] \subseteq [x]$. Ҳақиқатан ҳам, $z \in [y]$ (y рз ни билдиради) дан ва x рз бўлганлиги учун ρ муносабатнинг транзитивлик хусусиятига асосан x рз келиб чиқади, яъни $z \in [x]$. Эквивалентлик муносабатининг симметриклик хоссасидан фойдаланиб, $[x] \subseteq [y]$ ни исбот этиш мумкин. Демак, $[x] = [y]$.

7- §. Функция тушунчаси. Функциялар суперпозицияси

☑ *Функция. Тартибланган жуфтлик. Функциялар тенглиги. Бир қийматли функция. Суперпозиция. Функцияларнинг функцияси. Тескари функция.*

Функция тушунчасини олдинги параграфларда ўрганилган атамалар орқали аниқлаймиз. Функциянинг графиги тартибланган жуфтликлар тўпламидан иборат. Функция билан унинг графиги ўртасида ҳеч қандай фарқ йўқ. Функция шундай муносабатки, унинг икки хил элементининг биринчи координаталари ҳеч қачон тенг бўлмайди.

Шундай қилиб, f муносабат қуйидаги талабларни қа-ноатлантиргандагина функция бўла олади:

1) f нинг элементлари фақат тартибланган жуфтликлардан иборат;

2) агар $\langle x, y \rangle$ ва $\langle x, z \rangle$ элементлар f нинг элементлари бўлса, у ҳолда $y = z$.

Мисоллар. 1. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ функциядир. $D_f = \{1, 2, 3\}$, $R_f = \{2, 4\}$.

2. $\{\langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle\}$ муносабати функция бўла олмайди, чунки $\langle 3, 4 \rangle$ ва $\langle 3, 5 \rangle$ элементларининг биринчи координаталари тенг.

3. $\{\langle x, x^2 + x + 1 \rangle / x \in R\}$ функциядир, чунки агар $x = u$ бўлса, у ҳолда $x^2 + x + 1 = u^2 + u + 1$.

4. $\{\langle x^2, x \rangle / x \in R\}$ функция бўла олмайди, чунки унинг $\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, -1 \rangle$ элементлари мавжуд.

Агар f – функция ва $\langle x, y \rangle \in f$, яъни xfy бўлса, у ҳолда x функциянинг *аргументи*, y эса f функциянинг x даги *қиймати* ёки x элементининг *образи* дейилади.

у ни белгилаш учун xf , $f(x)$, fx ёки x^f символлари ишлатилади. $f(x)$ символни $f(x) = f[\{x\}]$ деб, яъни x элементининг f - образлари тўплами деб қараш мумкин.

Икки f ва g функция бир хил элементлардан тузилган бўлса, бундай функциялар тенг бўлади ($f = g$), яъни бошқача қилиб айтганда, $D_f = D_g$ ва $f(x) = g(x)$ бўлсагина, $f = g$ бўлади. Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун унинг аниқланиш соҳаси ва шу соҳанинг ҳар бир элементи учун унинг қиймати берилиши керак.

$\{ \langle x, x^2 + x + 1 \rangle / x \in R \}$ дан $f(x) = x^2 + x + 1$ келиб чиқади.

Агар f функциянинг аниқланиш соҳаси $R_f \subseteq Y$ бўлса, у ҳолда функциянинг ўзгариш соҳаси Y тўплам ичида бўлади деб айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$f: X \rightarrow Y \text{ ёки } X \xrightarrow{f} Y.$$

Юқорида кўрсатилган ҳамма f тўплами ($X \times Y$) тўпланинг қисм тўплами бўлади ва уни Y^X деб белгилаймиз.

Агар $X = \emptyset$ бўлса, у ҳолда Y^X фақатгина бир элементдан иборат бўлади ва у $X \times Y$ тўпланинг бўш қисм тўпланидир.

Агар $Y = \emptyset$ ва $X \neq \emptyset$ бўлса, у ҳолда $Y^X = \emptyset$.

Агар $x_1 \neq x_2$ дан $f(x_1) \neq f(x_2)$ келиб чиқса, у ҳолда f *бир қийматли функция* дейилади.

Иккита f ва g функция берилган бўлсин. f ва g функцияларнинг *суперпозицияси* деб, $g \circ f = \{ \langle x, z \rangle$ шундай у мавжудки, xfu ва ugz $\}$ тўпламга айтилади ва $g \circ f$ симболи билан белгиланади. Бу тўплам ҳам функция бўлади.

Шундай қилиб, функцияларнинг суперпозицияси қуйидагича бўлади:

$$g \circ f = z = g(f(x)).$$

Функцияларнинг суперпозицияси функцияларнинг функцияси деб ҳам айтилади.

$y = \sin x$ ва $z = \ln y$ бўлсин, y ҳолда $z = \ln \sin x$ функция $\sin x$ ва $\ln y$ функцияларнинг суперпозициясидир.

Суперпозиция амали ассоциативлик қонунига бўйсунди, яъни

$$g \circ (f \circ h) = g \circ f \circ h.$$

Агар $f: x \rightarrow y$ ва $g: y \rightarrow z$ бўлса, y ҳолда $g \circ f: x \rightarrow z$ ва $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ бўлади.

Агар f бир қийматли функция бўлса, y ҳолда f дан координаталарининг ўрнини алмаштириш натижасида ҳосил бўладиган функция f функцияга *тескари бўлган функция* деб аталади ва f^{-1} симболи билан белгиланади. Фақат бир қийматли функциялар учун бажариладиган бу амал *қайтариш амали* дейилади. f^{-1} нинг аниқланиш соҳаси $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$.

8- §. Тартиблаш муносабати

- Тартиблаш муносабати. Антисимметрик муносабат. Қисман тартиблаш муносабати. Иррефлексив муносабат. Чизиқли тартиблаш муносабати. Қисман тартибланган тўплам.*

1- таъриф. Агар бирор X тўпландаги x ва y элементлар учун урх муносабат ўрнига x ру муносабат ўринли бўлишини кўрсатувчи муносабат **тартиблаш муносабати** деб аталади.

Тартиблаш муносабати ёрдамида элементларни қайси тартибда қўйиш масаласини ҳал этиш мумкин. Ҳақиқийсонлар тўплами учун $<$, \leq , $>$, \geq муносабатлари тартиблаш муносабатларига мисол бўла олади. Тўпламлар системаси учун худди шундай вазифани \subset , \subseteq муносабатлар ўйнайди.

2- таъриф. Агар X тўпламнинг исталган x ва y элементлари учун бир вақтда x ру ва урх бажарилишидан $x = y$ келиб чиқса, бундай ρ муносабат **антисимметрик муносабат** деб аталади.

3-таъриф. *Х тўплам ичида рефлексивлик, антисимметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга бўлган ρ муносабат X тўпламдаги қисман тартиблаш муносабати деб аталади. Ҳар қандай рефлексив ва транзитив муносабат тартиблаш муносабати деб аталади.*

Қисман тартиблаш муносабати \leq симболи билан белгиланади. Агар \leq муносабати X тўпламни қисман тартибласа, у ҳолда X тўпламнинг исталган x ва y элементлари учун $x \leq y$ муносабати бажарилиши ҳам мумкин, бажарилмаслиги ҳам мумкин.

Худди шу каби, агар $x \leq y$ ва $x \neq y$ бўлса, у ҳолда $x < y$ деб ёзилади ва x элемент у дан кичик деб аталади.

4-таъриф. *Х тўпламнинг ҳар қандай x элементи учун ρx муносабат бажарилмаса, у ҳолда ρ шу X тўпламдаги иррефлексив муносабат деб аталади.*

Агар \leq муносабати X тўпламдаги қисман тартиблаш муносабати бўлса, у ҳолда $<$ муносабати X тўпламдаги иррефлексив ва транзитив муносабат бўлади.

5-таъриф. *ρ муносабат қисман тартиблаш муносабати бўлсин. ρ муносабатнинг аниқланиш соҳасига қарашли ҳар қандай икки хил x ва y элементлари учун $\rho x y$ ёки $\rho y x$ ўринли бўлса, бундай муносабат чизиқли (оддий) тартиблаш муносабати деб аталади.*

Ҳақиқий сонларни қийматига қараб тартиблаш чизиқли тартиблаш муносабатига мисол бўла олади.

6-таъриф. *Агар бирор X тўпламда қисман тартиблаш муносабати берилган бўлса, бундай тўплам қисман тартибланган тўплам деб аталади ва $y < x, \leq >$ тартибланган жуфтликдан иборат бўлади.*

Агар X тўпламда оддий тартиблаш муносабати берилган бўлса, у ҳолда X оддий тартибланган тўплам деб аталади ва у ҳам $< x, \leq >$ тартибланган жуфтликдан иборат бўлади, бу ерда \leq муносабат X тўпламни оддий (чизиқли) тартиблайди.

Масалан, агар f тўпламлар системаси бўлса, у ҳолда $\langle f, \subseteq \rangle$ қисман тартибланган тўплам бўлади.

$f: x \rightarrow x^1$ функция учун $x \leq y$ дан $f(x) \leq^1 f(y)$ келиб чиқса, у ҳолда бу функция X тўпламнинг \leq тартиблаш муносабатига ва X^1 тўпламнинг \leq^1 тартиблаш муносабатига нисбатан тартибини сақлайдиган функция бўлади. X ва X^1 тўпламлар ўртасидаги ўзаро бир қийматли боғланиш $\langle x, \leq \rangle$ ва $\langle x^1, \leq^1 \rangle$ га қисман тартибланган тўпламлар ўртасидаги *изоморфизм* деб айтилади. Агар шундай боғланиш мавжуд бўлса, у вақтда кўрсатилган қисман тартибланган тўпламлар *изоморфдир*.

X тўпламнинг ҳамма x лари учун $y \leq x$ бўлса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи X тўпламнинг қисман тартиблаш муносабати \leq га нисбатан *энг кичик элементи* деб айтилади. Агар шундай элемент мавжуд бўлса, у ягонадир.

X тўпламнинг ҳеч бир x элементи учун $x < y$ муносабати бажарилмаса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи шу тўпламнинг қисман тартиблаш \leq муносабатига нисбатан *минимал (энг кичик) элементи* деб айтилади. Берилган тўпламда минимал элемент бир нечта бўлиши мумкин.

Агар ҳар қандай $x \in y$ учун $x \leq y$ бўлса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи шу тўпламнинг \leq муносабатига нисбатан *энг катта элементи* деб айтилади. Агар шундай элемент мавжуд бўлса, у ҳам ягонадир.

X тўпламнинг ҳеч бир x элементи учун $x > y$ муносабати бажарилмаса, у ҳолда X тўпламнинг y элементи шу тўпламнинг \leq муносабатига нисбатан *максимал элементи* деб айтилади.

Агар X тўпламнинг ҳар бир бўш эмас қисм тўплами энг кичик элементга эга бўлса, у ҳолда $\langle x, \leq \rangle$ қисман тартибланган тўплам *тўлиқ тартибланган тўплам* деб аталади. Масалан, $\{0, 1, 2, \dots\}$.

$\langle x, \leq \rangle$ қисман тартибланган ва $A \subseteq X$ бўлсин. У ҳолда исталган $a \in A$ учун $a \leq x$ бажарилса, X тўпламнинг x элементи A тўпламнинг *юқори чегараси* деб аталади. Худди шу каби,

агар исталган $a \in A$ учун $x \leq a$ бажарилса, x элементи A тўпламнинг қуйи чегараси деб аталади.

Агар M тартибланган тўплам бўлса, у ҳолда унинг M^1 қисм тўплами ҳам тартибланган бўлади. Агар бу тартибланган тўплам чизиқли бўлса, у ҳолда M^1 қисм тўплам M тўпламнинг занжири дейилади.

$l = |M^1| - 1$ ифода занжирнинг узунлиги деб аталади, бу ерда $|M^1|$ — чизиқли тартибланган M^1 қисм тўпламнинг қуввати. l узунликдаги ҳар бир занжир $1, 2, \dots, l + 1$ бутун сонли занжирга изоморфдир.

M тўпламнинг энг катта элементини m_i билан ва энг кичик элементини m_0 билан белгилаймиз.

M тартибланган тўплам m_i элементининг баландлиги $d(m_i)$ деб $m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_i$ (M тўпламнинг) занжирлар узунлигининг максимумига (l_{\max}) айтилади. M тартибланган тўплам узунлиги $d(M)$ деб M тўпламдаги занжирлар узунлигининг максимумига айтилади, яъни тартибланган M тўпламнинг узунлиги $d(M)$ унинг элементлари баландлиги $d(m_i)$ нинг максимумига тенг бўлади:

$$d(M) = \max d(m_i), \quad m_i \in M.$$

9- §. Панжара ҳақида тушунчалар

Панжара. Сигнатура. Дистрибутивлик критерийси. Дедекиндр (модуляр) панжара. Дедекиндрлик критерийси. Изоморф. Изоморфизм.

Қисман тартибланган тўплам тушунчасидан фойдаланиб, панжара тушунчасини аниқлаймиз.

Таъриф. *Тартибланган тўплам $\langle M, \leq \rangle$ нинг исталган иккита m_i, m_j элементи орасида $m_i \cap m_j$ (энг катта қуйи ёқ) ва $m_i \cup m_j$ (энг кичик юқори ёқ) муносабатлар мавжуд бўлса, бундай тўплам **панжара** деб аталади.*

Равшанки, M панжарага икки тарафлама бўлган \overline{M} тартибланган тўплам ҳам панжара бўлади. \overline{M} панжарада кесишма

амалини бирлашмага ва бирлашма амалини кесишма амалига ўзгартириш керак. Тартибланган тўпламнинг ҳамма қисм тўпламлари энг катта қуйи ва энг кичик юқори чегарага эга бўлса, у ҳолда бундай тўплам *тўлиқ панжара* деб аталади.

Панжарани сигнатуралари қуйидаги хусусиятларга эга бўлган $A = \langle M, \cup, \cap \rangle$ алгебра сифатида ҳам аниқлаш мумкин:

- 1) $m \cup m = m, m \cap m = m$ – идемпотентлик;
- 2) $m_i \cup m_j = m_j \cup m_i, m_i \cap m_j = m_j \cap m_i$ – коммутативлик;
- 3) $(m_i \cap m_j) \cap m_k = m_i \cap (m_j \cap m_k),$
 $(m_i \cup m_j) \cup m_k = m_i \cup (m_j \cup m_k)$ – ассоциативлик;
- 4) $m_i \cup (m_i \cap m_j) = m_j, m_i \cap (m_i \cup m_j) = m_i$ – ютиш.

Панжарага берилган иккала таъриф ҳам эквивалентдир.

Бундан кейин 0 ва 1 ни панжаранинг мос равишда структурали ноли ва бири деб биламиз.

Агар A^1 тўплам ҳар бир $m_i, m_j \in A$ жуфт элементлар билан биргаликда уларнинг йиғиндиси $m_i \cup m_j$ ва қўпайтмаси $m_i \cap m_j$ ни ҳам ўз ичига олса, у ҳолда A^1 тўплам A панжаранинг *қисм панжараси* деб аталади. Энг катта m_β элемент ва энг кичик m_α элементдан иборат A^1 қисм панжара I *интервал* деб аталади:

$$I = [m_\alpha, m_\beta] = \{m_i \in A^1 / m_\alpha \leq m_i \leq m_\beta\}.$$

Агар

$$m_\alpha \cap m_\beta = 0, \quad m_\alpha \cup m_\beta = 1$$

бўлса, у ҳолда нол ва бир структурали A панжарада иккита m_α ва m_β элемент қўшимча (тўлдирувчи) элементлар бўлади. m га қўшимча бўлган \bar{m} элемент A панжарадаги m элементнинг *тўлдирувчиси* деб ҳам аталади.

A панжарада умумий тўлдирувчига эга бўлган икки элемент A да *боғланган элементлар* деб аталади.

Панжаралар синфининг энг муҳими дистрибутив панжаралардир. Қуйидаги айниятларни (ҳамма $m_i, m_j, m_k \in A$ лар учун) қаноатлантирувчи A панжара *дистрибутив панжара* деб аталади:

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_j \cap m_k,$$

$$m_k \cap (m_i \cup m_j) = m_k \cap m_i \cup m_k \cap m_j.$$

Панжаранинг дистрибутивлик критерийси. А панжара ҳар бир I интервалида исталган иккита боғланган элементи тенг бўлганда ва фақат шундагина дистрибутив панжара бўлади.

Дедекинд (модуляр) панжара деган тушунча киритамиз. А панжарада ҳамма $m_i, m_j, m_k \in A$ ва $m_j \leq m_k$ лар учун

$$(m_i \cup m_j) \cap m_k = m_i \cap m_k \cup m_j$$

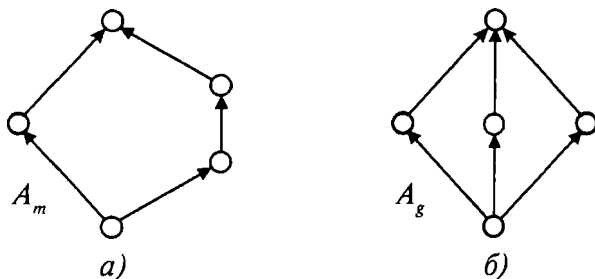
муносабат бажарилганда ва фақат шундагина A дедекинд панжара бўлади.

Панжаранинг дедекиндлик критерийси. А панжара дедекинд панжара бўлиши учун A_m панжарага изоморф бўлган қисм панжара мавжуд бўлмаслиги етарли ва зарур (I.4- шакл).

A_m панжара битта ноль баландликдаги элемент, иккита бир баландликдаги элемент, битта икки баландликдаги ва битта уч баландликдаги элементни ўз ичига олади.

Панжаранинг модулярлик критерийсидан фойдаланиб, **дистрибутивлик критерийсини** қулай ҳисоблаш шаклини мисол учун келтирамиз:

А панжара A_m га изоморф бўлган қисм панжарани ўз ичига олмаса (яъни дедекинд бўлса) ва A_g қисм панжарага изоморф бўлган қисм панжарани ўз ичига олмаса ва фақат шундагина дистрибутив бўлади (I.4- б шакл).



I.4- шакл.

A панжара битта ноль баландликдаги элементдан, бир баландликдаги учта элементдан ва икки баландликдаги битта элементдан иборат икки узунликдаги учта занжирдан тузилган.

0 ва 1 структурали A панжаранинг ҳар бир \bar{m} элементининг тўлдирувчиси мавжуд бўлсин. У ҳолда бу панжарада $f_1(m) = \bar{m}$ унар операция берилган деса бўлади. Агар юқорида акс эттирилган хусусиятларга эга бўлган A панжарада

$$\overline{\bar{m}} = m, \quad (\text{a})$$

$$\overline{m_i \cup m_j} = \bar{m}_i \cap \bar{m}_j, \quad (\text{б})$$

$$m \cap \bar{m} = 0 \quad (\text{в})$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда A панжара *тўлдирувчи* (*тўлдирувчиси бор*) *панжара* деб аталади.

(а) ва (б) га асосан \cup операцияни \cap операция билан ва \cap операцияни \cup операция билан ифодаланиши мумкин. Демак, тўлдирувчи панжараниң сигнатураси \cup бўлган алгебра сифатида аниқлаш мумкин. (а) ва (б) муносабатлардан қуйидагилар келиб чиқади ($1 = \bar{0}$ десак):

$$\begin{aligned} 0 \cap m &= 0, & 0 \cup m &= m, \\ 1 \cap m &= m, & 1 \cup m &= 1, \\ & & m \cup \bar{m} &= 1. \end{aligned}$$

Демак, 1- панжаранинг энг катта элементи, яъни структураси 1 бўлади.

Тўлдирувчи дистрибутив панжара Буль алгебраси бўлади.

Теорема. *Буль алгебраси Кантор алгебрасига изоморфдир. Буль ва Кантор алгебралари орасида қуйидаги изоморфизм мавжуд:*

$$a \cup b, M_a \cup M_b, a \cap b, M_a \cap M_b, \bar{a}, \overline{M_a},$$

бу ерда ифодаларнинг чап тарафида — назарий-панжаравий ва ўнг тарафида — назарий тўплам операциялари.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $y = 2x + 1$ тўғри чизиқни $\{<x, y> \in R \times R / y = 2x + 1\}$ ва $y < x$ муносабатини $\{<x, y> \in R \times R / y < x\}$ шаклларда ёзиш мумкинлигини тушунтиринг.
2. $\{<2, 4>, <5, 6>, <7, 6>, <8, 8>\}$ тартибланган жуфтликлар тўплами бинар муносабати бўла оладими?
3. $\{<1, 2>, <2, 2>, <3, 4>\}$ функциянинг аниқланиш ва қийматлар соҳаларини топинг.
4. $\{<3, 4>, <3, 5>, <4, 6>\}$ муносабат функция бўла оладими?
5. $\{<x, x^2 + x + 1> / x \in R\}$ функция бўлишини исботланг.
6. $\{<x, x> / x \in R\}$ функция бўла олмаслигини исботланг.
7. Буль алгебрасининг Кантор алгебрасига изоморф эканлигини исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Муносабатлар тушунчаси нимани ифодалайди? Бинар муносабат деб нимага айтамыз?
2. Эквивалентлик муносабати. Қандай муносабатлар рефлексив, симметрик ва транзитив муносабатлар деб аталади?
3. Функция тушунчаси. Функциялар суперпозицияси деб нимани тушунасыз?
4. Тартиблаш муносабатини тушунтиринг.
5. Панжара ҳақида тушунчалар. Панжаранинг дистрибутивлик ва декеиндлик критерийлари нималардан иборат?

1- §. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида амаллар

- Мулоҳаза. Абсолют чин (ёлғон) мулоҳаза. Қийматлар сатри. Инкор, конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция ва импликация мантиқий амаллари. Шеффер амали.*

Математик мантиқнинг ушбу мулоҳазалар алгебраси деб аталган бўлимида асосий текшириш объектлари бўлиб гаплар хизмат қилади. Математик мантиқ ҳар бир гапнинг маъносига қараб, унинг чин, ҳаққоний, тўғри ёки ёлғон, нотўғри бўлиши билангина қизиқади.

Масалан: 1) «Тошкент – Ўзбекистоннинг пойтахти», «Ой ер атрофида айланади» деган гаплар чиндир.

2) «Ер ойдан кичик», « $3 > 5$ » деган гапларнинг ҳар бири ёлғондир.

Шуни ҳам айтиш керакки, кўпгина гапларнинг чин ёки ёлғонлигини дарҳол аниқлаш қийин. Масалан, «Бугунги тун кечагидан қоронғироқ», деган гап қайси вақтда ва қайси жойда айтилишига қараб чин ҳам, ёлғон ҳам бўлиши мумкин.

1) Олдимга кел. 2) Уйда бўлдингми? 3) Янги йил билан. 4) Агар олдин билсам эдим. Бу гаплар чин ёки ёлғон қиймат қабул қилмайди.

Шундай қилиб, математик мантиқ: «Ҳар бир гап чин ёки ёлғон бўлиш хоссасига эга» деб қабул қилади.

1-таъриф. *Фақат чин ёки ёлғон қиймат қабул қила оладиган дарак гап мулоҳаза деб аталади.*

Демак, ҳар бир мулоҳаза маълум ҳолатда чин ёки ёлғон қийматга эга. Бундан кейин, чин қийматни қисқача «ч» ҳарфи ва ёлғон қийматни «ё» ҳарфи билан белгилаймиз.

Мулоҳазаларни белгилаш учун, асосан, лотин алфавитининг кичик ҳарфлари ишлатилади:

$$a, b, c, \dots, u, v, \dots, x, y, z.$$

Маълум мулоҳазалар борки, улар ҳамма мумкин бўлган ҳолатларда (вазиятларда) чин (ёлгон) қийматни қабул қилади. Бундай мулоҳазалар *абсолют чин (ёлгон)* мулоҳазалар деб аталади.

Мулоҳазалар алгебрасида, одатда, конкрет мулоҳазалар билангина эмас, балки ҳар қандай исталган мулоҳазалар билан ҳам шуғулланилади. Бу эса ўзгарувчи мулоҳаза тушунчасига олиб келади. Агар ўзгарувчи мулоҳазани x деб белгиласак, у ҳолда x конкрет мулоҳазаларнинг исталганини ифодалайди. Шунинг учун x икки: «ч» ва «ё» қийматли ўзгарувчини ифодалайди.

n та x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчи мулоҳаза берилган бўлсин. Буларнинг ҳар қайсиси чин ва ёлгон қийматларни қабул қилади. Шунинг учун қуйидаги қийматлар сатрини тузиш мумкин:

$$\begin{array}{l} \text{ё, ё, } \dots, \text{ё,} \\ \text{ч, ё, } \dots, \text{ё,} \\ \text{ё, ч, } \dots, \text{ё,} \\ \dots\dots\dots \\ \text{ч, ч, } \dots, \text{ч.} \end{array}$$

Демак, ўзгарувчилар сони n та бўлса, у ҳолда

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \text{ та қийматлар сатрига эга бўламиз.}$$

$$x_1, x_2 : 2^2 = 4 \text{ та қийматлар сатри.}$$

$$x_1, x_2, x_3 : 2^3 = 8 \text{ та қийматлар сатри.}$$

Математик мантиқда «эмас», «ёки», «ва», «агар ... бўлса, у ҳолда», «шунда ва фақат шундагина ..., қачон ...» сўзлари (боғловчилар) мулоҳазалар орасидаги *мантиқий амаллар* дейилади. Бу амаллар ёрдамида элементар мулоҳазалардан мураккаб мулоҳаза тузилади. Мулоҳазалар устидаги бу амаллар математик мантиқнинг элементар қисми бўлган мулоҳазалар мантиқи ёки мулоҳазалар алгебраси деб аталувчи қис-

мида ўрганилади. Ҳар иккала атама («мулоҳазалар мантиқи» ва «мулоҳазалар алгебраси») синоним сифатида ишлатилади, чунки улар мантиқнинг маълум қисмини икки нуқтаи назардан ифодалайди: бу ҳам мантиқ (ўз предметига кўра), ҳам алгебра (ўз методига кўра).

Мантиқий амаллар асосан 5 та бўлиб, уларнинг таърифлари қуйидагичадир.

1. Инкор амали. Исталган x ўзгарувчи мулоҳаза билан бирга \bar{x} кўринишида белгиланган иккинчи ўзгарувчи мулоҳаза ҳам берилган бўлсин.

2- таъриф. x мулоҳазанинг **инкори** деб аталган \bar{x} мулоҳаза шу билан характерланадики, x мулоҳаза «ч» қийматни қабул қилганда, \bar{x} мулоҳаза «ё» қийматни қабул қилади ва аксинча.

Демак, мулоҳазалар мантиқининг энг содда амали бу инкор амали бўлиб, оддий тилдаги сифатдош «эмас» га тўғри келади. Бу амал «-» символи билан белгиланади. Агар x бирор мулоҳаза, масалан, «бугун ҳаво совуқ» бўлса, у ҳолда \bar{x} янги мураккаб «бугун ҳаво совуқ эмас» мулоҳазасидан иборатдир. \bar{x} мулоҳаза « x эмас» деб ўқилади. Шунинг учун, агар x чин мулоҳаза бўлса, у ҳолда \bar{x} ёлғон мулоҳаза бўлади ва, аксинча, x ёлғон бўлса \bar{x} чиндир.

Инкор амалининг таъсирини қуйидаги чинлик жадвали кўринишида тасвирлаймиз:

x	\bar{x}
ч	ё
ё	ч

Худди шу жадвални инкор амалининг таърифи сифатида қабул қиламиз ва бошқа мантиқий амаллар учун ҳам шунга ўхшаш жадваллардан фойдаланамиз. Улар **чинлик жадвали** дейилади. Бу жадваллардан фойдаланиш қулай бўлиб, улар математик мантиқнинг кўп бўлимларида ишлатилади.

2. Конъюнкция (мантикий кўпайтма) амали. x ва y ўзгарувчи мулоҳазалар устида бажариладиган конъюнкция (лотинча *conjunctio* – боғлайман сўзидан) амалини \wedge кўринишда ва бу амал натижасида ҳосил бўлган янги мураккаб мулоҳазани $x \wedge y$ кўринишда белгилаймиз.

3-таъриф. «*Ва*» боғловчисига мос келувчи мантикий амал **конъюнкция** амали деб аталади. x ва y мулоҳазаларнинг конъюнкцияси $x \wedge y$ мулоҳазалар чин бўлгандагина чин қийматни қабул қилиб, қолган ҳолларда эса ёлғон қийматни қабул қилади.

$x \wedge y$ кўринишдаги мулоҳаза « x ва y » деб ўқилади. Кўриниб турибдики, бу таъриф «*ва*» боғловчисининг маъносига тўлиқ тўғри келади. Ҳақиқатан ҳам, «5 сони тоқ ва туб» мулоҳазаси чин, чунки уни ташкил этувчи ҳар иккала мулоҳаза: «5 сони тоқ» ва «5 сони туб» ҳам чин. «10 сони 5 га бўлинади ва $7 > 9$ » мулоҳазаси ёлғон, чунки мураккаб мулоҳазани ташкил этувчиларидан бири, чунончи « $7 > 9$ » ёлғондир. Конъюнкция таърифини қуйидаги чинлик жадвали кўринишида ёзиш мумкин:

x	y	$x \wedge y$
ч	ч	ч
ч	ё	ё
ё	ч	ё
ё	ё	ё

3. Дизъюнкция (мантикий йиғинди) амали. Мулоҳазалар мантиқида ишлатиладиган учинчи амал «ёки» боғловчисига тўғри келади. Шуни таъкидлаш керакки, «ёки» боғловчиси ўзбек тилида икки хил маънода ишлатилади. Биринчи ҳолда рад этувчи «ёки», иккинчи ҳолда рад этмайдиган «ёки» маъносига ишлатилади. Бунинг фарқи қуйидагилардан иборат. Агар x ва y мулоҳазаларнинг иккаласи ҳам ёлғон бўлса, y ҳолда « x ёки y » мулоҳазаси шубҳасиз ёлғон бўлади.

Агар x чин ва y ёлгон (ёки x ёлгон ва y чин) бўлса, y ҳолда « x ёки y » ни чин деб қараш керак, бу эса ўзбек тилидаги «ёки» сўзининг маъносига тўғри келади. Аммо ҳар иккала x ва y мулоҳазалар чин бўлганда « x ёки y » мулоҳаза чин бўлади. Бу вақтда « x ёки y » мулоҳазага қандай қараш керак?

Масалан, «Бугун якшанба ёки мен кинога бораман» мулоҳазани олайлик. Агар бугун якшанба ва мен кинога борсам, y ҳолда бу мулоҳаза чин ёки ёлгонми? Ўзбек тилида «ёки» боғловчиси бир маънода, баъзан эса бошқа маънода ишлатилади. Агар юқоридаги мулоҳазани чин деб қарасак, y ҳолда «ёки» ни рад этмайдиган маънода, иккинчи ҳолда «ёки» ни рад этувчи маънода ишлатилияпти деймиз.

4- таъриф. *Рад этмайдиган маънода ишлатиладиган «ёки» мантиқий амали дизъюнкция (лотинча disjunctio – фарқ қиламан сўздан) дейилади. Иккита x ва y мулоҳазанинг дизъюнкцияси « $x \vee y$ » каби ёзилади ва « x ёки y » деб ўқилади.*

Икки x ва y мулоҳазанинг дизъюнкцияси $x \vee y$ мураккаб мулоҳаза бўлиб, y фақат x ва y ёлгон бўлгандагина ёлгон қиймат қабул қилиб, қолган ҳолларда чин қийматни қабул қилади.

Дизъюнкция амалини қуйидаги чинлик жадвали орқали ҳам ифодалаш мумкин:

x	y	$x \vee y$
ч	ч	ч
ч	ё	ч
ё	ч	ч
ё	ё	ё

4. Импликация амали. Қуйидаги мураккаб мулоҳазаларни кўрайлик:

1) «Агар $2 \cdot 5 = 10$ бўлса, y ҳолда $6 \cdot 7 = 42$ бўлади»; 2) «Агар 30 сони 5 га бўлинса, y ҳолда 5 жуфтдир»; 3) «Агар $3 = 5$ бўлса, y ҳолда $15 = 17$ »; 4) «Агар $4 \cdot 3 = 13$ бўлса, y ҳолда

$9 + 3 = 12$ ». Бу мулоҳазаларнинг ҳаммаси ҳам 2 та элементар мулоҳазадан «агар ... бўлса, у ҳолда ...» боғловчиси ёрдамида тузилган. Бу боғловчи мулоҳазалар мантиқининг импликация (лотинча *implicatio* — зич боғлайман сўзидан) амалига тўғри келади. Импликация амалини \rightarrow кўринишида белгилаймиз.

5- таъриф. *Икки x ва y мулоҳазанинг импликацияси деб шундай мулоҳазага айтиладики, у фақат x чин ва y ёлғон бўлгандагина ёлғон бўлиб, қолган ҳамма ҳолларда чиндир.*

« $x \rightarrow y$ » мулоҳазаси «агар x бўлса, у ҳолда y » деб ўқилади. Импликация таърифини қуйидаги чинлик жадвали кўринишида ёзиш мумкин:

x	y	$x \rightarrow y$
ч	ч	ч
ч	ё	ё
ё	ч	ч
ё	ё	ч

Чинлик жадвалидан кўринадики, юқоридаги мулоҳазаларнинг иккинчиси ёлғон бўлиб, қолганлари чиндир. « $x \rightarrow y$ » импликацияда x мулоҳаза асос (*шарт, гипотеза, далил*), у мулоҳаза эса бу асоснинг *оқибати* деб аталади. Импликация чинлик жадвалининг охириг иккита сатри шуни кўрсатадики, ёлғон асосдан чин хулоса ҳам, ёлғон хулоса ҳам келиб чиқар экан, бошқача қилиб айтганда «ёлғондан ҳар бир нарсани кутиш мумкин».

Импликация мулоҳазалар мантиқининг муҳим амалларидан бири ҳисобланади. Сўзлашув тилида «агар x бўлса, у ҳолда y » нинг ҳар хил синонимлари бор: « x бўлса, y бўлади», «агар x бўлса, y вақтда y бўлади», « x дан y ҳосил бўлади», « x дан y келиб чиқади», « y , агар x бўлса», « x у учун етарли шарт» ва ҳоказо.

5. Эквивалентлик (тенг кучлилик) амали. Кўпчилик мураккаб мулоҳазалар элементар мулоҳазалардан «зарур ва кифоя», «фақат ва фақат», «шунда ва фақат шундагина, қачонки», «... бажарилиши етарли ва зарурдир» каби боғловчилари ёрдамида тузилади. Мулоҳазалар мантиқининг бундай боғловчиларга мос келадиган амали *эквивалентлик* дейилади ва « \leftrightarrow » каби белгиланади. $x \leftrightarrow y$ мураккаб мулоҳаза « x эквивалент y » деб ўқилади.

6- таъриф. *Мураккаб мулоҳаза $x \leftrightarrow y$ чин бўлади, агар x ва y лар чин ёки x ва y лар ёлгон бўлса, бошқа ҳолларда y ёлгондир. Бошқача қилиб айтганда, x ва y мулоҳазалар фақат ва фақат бир хил қиймат қабул қилгандагина $x \leftrightarrow y$ чин бўлади.*

Бу таърифни қуйидаги чинлик жадвали билан ифодалаш мумкин:

x	y	$x \leftrightarrow y$
ч	ч	ч
ч	ё	ё
ё	ч	ё
ё	ё	ч

$x \leftrightarrow y$ эквивалентликка « x бўлса (бажарилса), y бўлади (бажарилади) ва y бўлса, x бўлади» ёки « x дан y келиб чиқади ва y дан x келиб чиқади» деган мулоҳаза мос келади, яъни $x \leftrightarrow y$ эквивалентликка математикада зарурий ва етарли шарт ҳақида айтилган теоремалар мос келади. Демак,

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \quad (1)$$

бўлади. (1) га биноан, $x \leftrightarrow y$ эквивалентликни икки томонли импликация деб аташ мумкин.

6. Шеффер амали (штрихи). Ниҳоят, яна бир мантиқий амални келтирамиз. У *Шеффер амали* ёки *Шеффер штрихи* дейилади ва у « $|$ » каби белгиланади. « $x|y$ » мураккаб мулоҳаза « x Шеффер штрихи y » деб ўқилади. Бу амал қуйидагича таърифланади.

7-таъриф. *Фақат x ва y мулоҳазалар чин бўлгандагина, $x|y$ мулоҳаза ёлғондир.*

Бу таърифни қуйидаги чинлик жадвали ёрдамида ифодаласа ҳам бўлади:

x	y	$x y$
ё	ё	ч
ё	ч	ч
ч	ё	ч
ч	ч	ё

Асосий чинлик жадваллари. Юқорида келтирилган чинлик жадваллари, мос равишда, инкор қилиш, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентлик ва Шеффер амалларининг асосий чинлик жадваллари деб айтилади:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x y$
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ё
ч	ё	ё	ч	ё	ё	ч
ё	ч	ё	ч	ч	ё	ч
ё	ё	ё	ё	ч	ч	ч

x	\bar{x}
ч	ё
ё	ч



Машқлар

- Куйидаги гапларнинг қайси бирлари мулоҳаза бўлади:
 - Тошкент – Ўзбекистон Республикасининг пойтахти;
 - $\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - 30$;

- 3) Ой – Марс планетасининг йўлдоши;
 4) $a > 0$.
2. Қуйидаги мулоҳазаларнинг чин ёки ёлғон эканлигини аниқланг:
 1) $2 \in \{x | 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, x \in R\}$; 2) $\{1\} \in N$.
3. Қуйидаги импликацияларнинг қайси бири чин бўлади:
 1) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, u ҳолда $2 < 3$;
 2) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, u ҳолда $2 > 3$.

2- §. Формулалар. Тенг кучли формулалар

Формула. Чинлик жадвали. Тенг кучли формулалар. Эквивалентлик билан тенг кучлилиқ орасидаги фарқ. Айният.

Олдинги параграфда асосан мантиқий амалларни кўриб чиқдик. Энди бу амаллар орасида боғланишлар мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун тенг кучли мулоҳазалар тушунчасини киритамиз. n та

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (2)$$

мулоҳаза берилган бўлсин.

1- таъриф. (2) мулоҳазаларни инкор, дизъюнкция, конъюнкция, импликация ва эквиваленция мантиқий амаллари воситаси билан маълум тартибда бирлаштириб ҳосил қилинган мураккаб мулоҳаза **формула** деб аталади.

Масалан: $[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \rightarrow x_4$; $[x_1 \wedge (x_2 \rightarrow x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$; $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$; $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$ мураккаб мулоҳазалар формулалар бўлади. Қавслар мулоҳазалар устида мантиқий амалларнинг қай тартибда бажарилишини кўрсатади.

Энди формула тушунчасига математик таъриф берайлик. Бу тушунча қуйидагича аниқланади.

2- таъриф. 1) ҳар қандай x_1, x_2, \dots, x_n мулоҳазаларнинг исталган бири формуладир;

2) агар A ва B нинг ҳар бири формула бўлса, u ҳолда $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ ва \bar{A} ҳам формулалардир;

3) 1 ва 2- бандларда кўрсатилган ифодалардан ташқари бошқа ҳеч қандай ифода формула бўла олмайди.

x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчилар элементар формулалар деб аталади.

Кейинчалик формулани лозим бўлгандагина $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция шаклида белгилашдан фойдаланамиз.

Ҳар қандай формула учун чинлик жадвали тузиш мумкин. Бунинг учун асосий чинлик жадвалларидан кетма-кет фойдаланиш керак. Масалан, $(x \wedge y) \rightarrow (\bar{x} \vee y)$ формуланинг чинлик жадвали қуйидагича бўлади:

x	y	\bar{x}	$x \wedge y$	$\bar{x} \vee y$	$\overline{\bar{x} \vee y}$	$(x \wedge y) \rightarrow \overline{\bar{x} \vee y}$
ч	ч	ё	ч	ч	ё	ё
ч	ё	ё	ё	ё	ч	ч
ё	ч	ч	ё	ч	ё	ч
ё	ё	ч	ё	ч	ё	ч

Шундай қилиб, ҳар қандай формулага {ч, ё} тўпламнинг бир элементи мос қилиб қўйилади.

3- таъриф. *A* ва *B* формулалар берилган бўлсин. (1) элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир қийматлари сатри учун *A* ва *B* формулаларнинг мос қийматлари бир хил бўлса, *A* ва *B* формулалар **тенг кучли формулалар** деб аталади ва бу $A = B$ тарзда белгиланади. (1) қаторнинг камида битта қийматлар сатри учун *A* ва *B* формулаларнинг мос қийматлари бир хил бўлмаса, у ҳолда *A* ва *B* формулалар тенг кучлимас формулалар деб аталади ва $A \neq B$ кўринишда белгиланади.

A ва *B* формулаларнинг тенг кучли бўлиш-бўлмаслиги улар учун тузилган чинлик жадваллари ёрдамида аниқланади.

Мисоллар. 1. $\bar{x} \vee y = A$ ва $B = x \rightarrow y$ формулалар берилган бўлсин.

x	y	\bar{x}	$\bar{x} \vee y$	$x \rightarrow y$
ч	ч	ё	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ё
ё	ч	ч	ч	ч
ё	ё	ч	ч	ч

Жадвалдан кўриниб турибдики, тўртала қийматлар сатри учун A ва B формулаларнинг мос қийматлари бир хил. Демак, таърифга асосан $A = B$.

2. $x \vee x = x$ тенглик исбот этилсин. $A = x \vee x$, $B = x$.

x	$x \vee x$
ч	ч
ё	ё

Демак, жадвалга асосан $A = B$.

3. $A = (x \vee \bar{x}) \wedge y$, $B = y$.

x	y	\bar{x}	$x \vee \bar{x}$	$(x \vee \bar{x}) \wedge y$
ч	ч	ё	ч	ч
ч	ё	ё	ч	ё
ё	ч	ч	ч	ч
ё	ё	ч	ч	ё

Демак, $(x \vee \bar{x}) \wedge y = y$.

Худди шу каби қуйидаги тенг кучлиликларни исботлаш мумкин.

$$4. x \vee \bar{x} = y \vee \bar{y}.$$

$$5. x \vee (x \wedge y) = x.$$

$$6. (x \vee \bar{x}) \rightarrow y = (x \wedge \bar{x}) \vee y.$$

$$7. x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Эквивалентлик билан тенг кучлилик орасидаги фарқни тушуниш учун уларни алгебраик тенглама ва айният билан

солиштирамиз. Тенглама (масалан, $2x + y = 10$) ҳарфларнинг айрим қийматлари (масалан, $x = 4$, $y = 2$) учун бажарилиб, бошқа қийматлар (масалан, $x = 1$, $y = 2$) учун бажарилмайди. Шунга ўхшаш, *эквивалентлик* $A \leftrightarrow B$ деб, шундай (масалан, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$) мулоҳазага айтиладики, унга x_1 , x_2 , ..., x_n ҳарфларининг ўрнига бир хил конкрет мулоҳазалар қўйилганда у чин қиймат қабул қилиб, бошқа конкрет қийматлар қўйилганда ёлғон қийматни қабул қилади. *Айният* деб, шундай тенгликка (масалан, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$) айтиладики, у ўзида қатнашадиган барча ҳарфлар учун бажарилади. Шунга ўхшаш, $A \equiv B$ мулоҳазада қатнашадиган барча x_1 , x_2 , ..., x_n ҳарфларининг ўрнига ихтиёрий конкрет мулоҳазалар қўйилганда у чин қиймат қабул қилса, бундай мулоҳаза *тенг кучлилиқ* дейилади.

Алгебрада айний ифодаларни бир-бири билан алмаштириш мумкин бўлганидек, мантиқ алгебрасида тенг кучли мулоҳазаларни (формулаларни) ҳам бир-бири билан алмаштириш мумкин. Бу эса мураккаб формулаларни (мулоҳазаларни) соддалаштириш имконини беради.

Биз тенглама ва айният билан эквивалентлик ва тенг кучлилиқ орасидаги ўхшашликни келтирдик. Энди эса улар орасидаги фарқни кўрсатамиз. Маълумки, алгебрада ҳеч қандай алмаштириш ёрдамида тенгликни амаллар (қўшиш, айириш, даражага кўтариш, бўлиш ва ҳоказо) билан алмаштириб бўлмайди. Мантиқ алгебрасида эса эквивалентликни импликация (\rightarrow) ёки конъюнкция (\wedge), дизъюнкция (\vee) ва инкор (\neg) амаллари орқали ифодалаш мумкинлигини биз юқорида кўрсатган эдик (1- § даги (1) формулага қаранг). (1) формуланинг тўғрилигини чинлик жадвали орқали кўрсатамиз:

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$x \leftrightarrow y$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
ч	ч	ч	ч	ч	ч
ё	ч	ч	ё	ё	ё
ч	ё	ё	ч	ё	ё
ё	ё	ч	ч	ч	ч

Жадвалдан кўринадики, охирги икки устуннинг чинлик қиймати устма-уст тушади. Шу билан (1) формула исботланди.

Оддий алгебрада тенглик белгиси « \equiv » қуйидаги аксиомаларни қаноатлантиради: 1) ихтиёрий a сон учун $a = a$ (рефлексивлик); 2) агар $a = b$ бўлса, у ҳолда $b = a$ (симметриклик); 3) агар $a = b$, $b = c$ бўлса, у ҳолда $a = c$ (транзитивлик) бўлади.

Шунга ўхшаш, мулоҳазалар алгебрасида, эквивалентлик таърифидан осонлик билан кўриш мумкинки, у рефлексив, симметрик ва транзитив, яъни:

1) ихтиёрий x мулоҳаза учун $x \equiv x$;

2) ихтиёрий икки x ва y мулоҳазалар учун, агар $x \equiv y$ бўлса, у ҳолда $y \equiv x$;

3) ихтиёрий x , y , z учта мулоҳазалар учун $x \equiv y$ ва $y \equiv z$ бўлса, у ҳолда $x \equiv z$.



Машқлар

1. Қуйидаги формулаларнинг чинлик жадвалларини тузинг:

$$1) (\bar{x} \vee z) \wedge (y \rightarrow (u \rightarrow x)); \quad 2) x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (\dots \rightarrow x_n) \dots);$$

$$3) x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \rightarrow y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n.$$

2. Тенг кучлиликларни исботланг:

$$1) x \leftrightarrow y \equiv \bar{x} \leftrightarrow \bar{y};$$

$$2) xy \vee \bar{x} y \vee x \bar{y} \equiv x \rightarrow y;$$

$$3) x \rightarrow \bar{y} \equiv y \rightarrow \bar{x};$$

$$4) x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \wedge y \rightarrow z;$$

$$5) x \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$$

3. Формулаларни соддалаштиринг:

$$1) (x \rightarrow x) \rightarrow x;$$

$$2) x \rightarrow (x \rightarrow y);$$

$$3) \bar{x} \cdot \bar{y} \vee (x \rightarrow y) \cdot x;$$

$$4) (x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y).$$

3- §. Айнан чин, айнан ёлгон ва бажарилувчи формулалар



Айнан чин. Айнан ёлгон. Тавтология. Бажарилувчи формула. Мантиқ қонунлари. Ечилиш муаммоси.

1-таъриф. Элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларида фақат чин қийматни қабул қилувчи формула айнан чин (доимо чин) формула ёки **тавтология** деб аталади ва J билан белгиланади.

А формуланинг тавтология эканлиги ёки эмаслиги қийматлар жадвалини тузиш орқали аниқланади.

Мисоллар.

1. $J = x \wedge (x \rightarrow y) \rightarrow y$ формула тавтологиядир. Ҳақиқатан:

x	y	$x \rightarrow y$	$x \wedge (x \rightarrow y)$	$x \wedge (x \rightarrow y) \rightarrow y$
ч	ч	ч	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ч
ё	ч	ч	ё	ч
ё	ё	ч	ё	ч

2. $J = (\bar{x} \vee y) \rightarrow (x \rightarrow y)$ формула ҳам тавтологиядир:

x	y	\bar{x}	$\bar{x} \vee y$	$x \rightarrow y$	$(\bar{x} \vee y) \rightarrow (x \rightarrow y)$
ч	ч	ё	ч	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ё	ч
ё	ч	ч	ч	ч	ч
ё	ё	ч	ч	ч	ч

2-таъриф. Элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларида фақат ёлгон қийматни қабул қилувчи формулалар айнан ёлгон (доимо ёлгон) ёки **бажарилмайдиган** формулалар дейилади ва \bar{J} билан белгиланади.

Масалан, $\bar{J} = (\bar{x} \vee y) \wedge (x \rightarrow y)$ айнан ёлгон формуладир:

x	y	\bar{x}	$\bar{x} \vee y$	$x \rightarrow y$	$\overline{x \rightarrow y}$	$(\bar{x} \vee y) \wedge \overline{(x \rightarrow y)}$
ч	ч	ё	ч	ч	ё	ё
ч	ё	ё	ё	ё	ч	ё
ё	ч	ч	ч	ч	ё	ё
ё	ё	ч	ч	ч	ё	ё

Маълумки, айнан чин формуланинг инкори айнан ёлгон формула бўлади ва аксинча. Айнан чин ва айнан ёлгон формулалар унга кирадиган ўзгарувчиларга боғлиқ бўлмай. Ҳақат битта қиймат қабул қилади.

3- таъриф. *Агар $(A \leftrightarrow B)$ тавтология бўлса, у ҳолда A ва B лантиқий эквивалент деб аталади. Агар $(A \rightarrow B)$ тавтология бўлса, у ҳолда B формула A нинг лантиқий хулосаси деб аталади.*

Энди Э.Мендельсоннинг [39] китобида баён этилган тавтологияларга оид айрим теоремаларни келтирамиз.

1- теорема. *Агар A ва $A \rightarrow B$ айнан чин формулалар (тавтологиялар) бўлса, у ҳолда B формула ҳам тавтология бўлади.*

Исбот. A ва $A \rightarrow B$ тавтологиялар бўлсин. A ва B формулаларнинг таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг бирор қийматлар сатрида B формула ёлгон қиймат қабул қилсин. A формула тавтология бўлганлиги учун ўзгарувчиларнинг ўша қийматлар сатрида A чин қиймат қабул қилади. У ҳолда $(A \rightarrow B)$ формула ёлгон қиймат қабул қилади. Бу натижа $(A \rightarrow B)$ нинг тавтология деган фаразимизга қарама-қаршидир. Демак, B тавтологиядир.

2- теорема. *Агар x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган A формула тавтология ва B формула A формуладан x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчилар ўрнига мос равишда A_1, A_2, \dots, A_n формулаларни қўйиш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда B формула тавтология бўлади, яъни тавтологияда ўрнига қўйиш яна тавтологияни келтириб чиқаради.*

Исбот. A тавтология бўлсин ва B формула таркибига кирувчи ўзгарувчи мулоҳазаларнинг ихтиёрий қийматлар сатри берилган бўлсин. У ҳолда A_1, A_2, \dots, A_n формулалар y_1, y_2, \dots, y_n (ҳар бир x_i ч ёки ё қиймат қабул қилади) қийматлар қабул қилади. Агар x_1, x_2, \dots, x_n га мос равишда y_1, y_2, \dots, y_n қийматларни берсак, у ҳолда A нинг натижавий қиймати B нинг чинлик қиймати га мос келади. A тавтология бўлганлиги учун B формула таркибига кирган ўзгарувчиларнинг берилган ихтиёрий қийматлар сатрида ч қиймат қабул қилади. Шундай қилиб, B доимо ч қиймат қабул қилади ва у тавтология бўлади.

3-теорема. Агар A_1 формула таркибига бир ёки кўп марта кирган A формула ўрнига B формулани қўйиш натижасида B_1 формула ҳосил қилинса, у ҳолда $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1))$ тавтология бўлади. Демак, A ва B лар мантиқий эквивалент бўлса, у ҳолда A_1 ва B_1 ҳам мантиқий эквивалент бўлади.

Исбот. Агар A ва B формулалар ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатрида қарама-қарши чинлик қийматларига эга бўлса, у ҳолда $(A \leftrightarrow B)$ нинг чинлик қиймати ё бўлади ва натижада $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1))$ формула ч қиймат қабул қилади. Агар A ва B лар ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатрида бир хил чинлик қиймати қабул қилса, у ҳолда A_1 ва B_1 формулалар ҳам бир хил чинлик қиймати қабул қилади, чунки теореманинг шартига асосан B_1 формула A_1 формуладан A нинг ўрнига B ни қўйиш натижасида ҳосил қилинган. Демак, бу ҳолда $(A \leftrightarrow B)$ ҳам, $(A_1 \leftrightarrow B_1)$ ҳам ч қиймат қабул қилади. Шунинг учун $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1))$ формула ҳам ч қиймат қабул қилади. Демак, $((A \leftrightarrow B) \rightarrow (A_1 \leftrightarrow B_1))$ формула тавтология бўлади.

4-таъриф. *Элементар мулоҳазаларнинг камида битта қийматлар сатрида чин қиймат қабул қилувчи ва айнан чин бўлмаган формула бажарилувчи формула деб аталади.*

Масалан, $(\overline{x \wedge \overline{y}}) \leftrightarrow (\overline{x} \wedge y)$; $[(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)] \rightarrow \overline{z}$; $x \vee y$; $x \rightarrow y \leftrightarrow z$ формулалар бажарилувчи формулалар ҳисобланади.

Айнан чин формулалар катта аҳамиятга эга бўлиб, улар мантиқ қонунларини ифодалайди. Шу муносабат билан қуйидаги масала туғилади: шундай методни топиш керакки, у чекли миқдордаги амаллар ёрдамида мантиқ алгебрасининг ихтиёрий муайян формуласини айнан чин ёки айнан чин эмаслигини аниқласин. Бундай метод *ечилувчи метод*, ёки *алгоритм*, ёки *ечилувчи процедура* дейилади. Қўйилган масаланинг ўзи эса «*ечилиш муаммоси*» дейилади. Бу муаммо фақат мулоҳазалар алгебраси учунгина эмас, балки бошқа мантиқий системалар учун ҳам қўйилади. У мулоҳазалар алгебраси учун ижобий ҳал этилади. Бу ерда ечилувчи процедура сифатида чинлик жадвалини олишимиз мумкин, чунки бундай жадвал ҳар бир муайян формула учун қўйилган саволга жавоб беради. Агар берилган формулага мос келадиган жадвалнинг охирги устунда фақат «чин» бўлса, у ҳолда бу формула айнан «чин», агар охирги устунда ҳеч бўлмаганда битта «ёлгон» бўлса, у ҳолда формула айнан чин эмас бўлади. Табиийки, амалда бу усулни ҳар доим ҳам қўллаб бўлавермайди (чунки формулада n та ўзгарувчи қатнашса, бундай жадвал 2^n та сатрга эга бўлади). Лекин ҳар доим чекли миқдордаги амаллар бажариб, принцип жиҳатдан қўйилган саволга жавоб бериш мумкин. Кейинги параграфларда бошқа бир ечилувчи процедурани келтирамиз, у берилган формулани нормал шаклга келтиришга асосланган. Нормал шакллар математик мантиқнинг бошқа масалаларида ҳам ишлатилади.



Машқлар

1. Қуйидагиларнинг қайси бирлари айнан чин ва айнан ёлгон формула эканлигини аниқланг:

$$1) \overline{(x \vee y \rightarrow x \wedge y)};$$

$$2) (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x});$$

$$3) \overline{p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)};$$

$$4) \bar{p} \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2);$$

$$5) ((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p);$$

$$6) ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r).$$

2. Айнан чин ёки айнан ёлгон формула эканлигини исботланг:

$$1) (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{x};$$

$$2) x \wedge (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow \bar{y});$$

- 3) $x \vee \bar{x} \rightarrow y \wedge \bar{y}$;
- 4) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$;
- 5) $(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y))$;
- 6) $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow ((x \vee y) \rightarrow z))$;
- 7) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow z)$;
- 8) $(x \wedge y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$.

4- §. Асосий тенг кучлиликлар

Асосий тенг кучлиликлар. \vee , \wedge , $-$ амаллар қатнашган мулоҳазалар. Коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик қонунлари. Идемпоентлик ва ютиш қонунлари.

Бу параграфда кенг қўлланиладиган тенг кучлиликлар қаралади. Аввало, оддий алгебрада маълум бўлган айниятларга ўхшашларини келтирамиз. Маълумки, қўшиш ва кўпайтириш амали қуйидаги қонуниятларга бўйсунди:

- 1) $x + y = y + x$ (қўшишнинг коммутативлик қонуни);
- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (қўшишнинг ассоциативлик қонуни);
- 3) $xy = yx$ (кўпайтиришнинг коммутативлик қонуни);
- 4) $(xy)z = x(yz)$ (кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни);
- 5) $x(y + z) = xy + xz$ (кўпайтиришнинг йиғиндига нисбатан дистрибутивлик қонуни).

Мантиқ алгебрасида шу айниятларга ўхшаш қуйидаги тенг кучлиликлар ўринлидир:

$$x \wedge y = y \wedge x, \quad (3)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \quad (4)$$

$$x \vee y = y \vee x, \quad (5)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \quad (6)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad (7)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \quad (8)$$

Бу тенг кучлиликларни текшириш учун чинлик жадвалдан фойдаланса бўлади. Бу ерда биз (8) ни текширадиган жадвални келтириш билан кифояланамиз:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y)$	$x \vee (y \wedge z) \equiv$ $\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
ё	ё	ё	ё	ё	ё	ё	ё	ч
ё	ё	ч	ё	ё	ч	ё	ё	ч
ё	ч	ё	ё	ч	ё	ё	ё	ч
ё	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ё	ё	ё	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ё	ч	ё	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ч	ё	ё	ч	ч	ч	ч	ч
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч

Дизъюнкция (\vee) амали коммутативлик ва ассоциативлик хоссаларига эгадир. (7)–(8) тенг кучлиликлар эса \wedge ва \vee амалларининг бир-бирига нисбатан дистрибутивлик хоссасига эга эканлигини кўрсатади. Шунинг ҳам таъкидлаш керакки, оддий алгебрада (8) тенг кучлиликка ўхшаш айният йўқ (чунки $x + yz = (x + y)(x + z)$ айният эмас). Юқоридаги ўхшашлик асосида $x \vee y$ ни *мантикий йиғинди*, $x \wedge y$ ни эса *мантикий кўпайтма* деб олишимиз мумкин. Бу ўхшашликни кучайтириш учун, алгебраик кўпайтмада нуқта (\cdot) ёзилмаганидек (масалан, $x \cdot y = xy$), мантикий кўпайтириш белгиси (\wedge) ни ёзмаймиз, яъни $x \wedge y$ нинг ўрнига xy ни ёзамиз. Бундан кейин мантикий ифодаларни содалаштириш, уларда қавсларни камайтириш мақсадида қуйидагича шартлашамиз:

1) бирор мантикий ифода инкор ишораси остида бўлса, уни қавсسىз ёзамиз, яъни $(x \vee y) \wedge z$ нинг ўрнига $x \vee y \wedge z$ ни ёки $x \vee yz$ ни ёзамиз;

2) конъюнкция белгиси дизъюнкция, импликация ва эквивалентлик белгиларига нисбатан мустақамроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз, яъни $(xy) \vee z$ ўрнига $x \vee yz$, $x \rightarrow (yz)$ ўрнига $x \rightarrow yz$, $(xy) \leftrightarrow (zy)$ ўрнига $xy \leftrightarrow zy$ ёзамиз;

3) дизъюнкция белгиси импликация ва эквивалентлик белгиларига нисбатан мустақкамроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз, яъни $(x \vee y) \rightarrow z$ ўрнига $x \vee y \rightarrow z$ ва $(x \vee y) \leftrightarrow z$ ўрнига $x \vee y \leftrightarrow z$ ёзамиз;

4) импликация белгиси эквивалентлик белгисига нисбатан мустақкамроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз, яъни $(x \rightarrow y) \leftrightarrow z$ ўрнига $x \rightarrow y \leftrightarrow z$ ёзамиз. Бу келишувлар мантиқий ифодаларни ёзишни соддалаштиради, масалан,

$$(((x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \wedge z)) \leftrightarrow (((\overline{x \wedge \bar{y}}) \vee (\bar{x} \wedge y)) \vee (x \rightarrow z)))$$

ўрнига

$$(x \leftrightarrow y) \rightarrow \bar{x}z \leftrightarrow x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee (x \rightarrow z)$$

ни ёзамиз.

Юқоридаги 1- §, (1) тенг кучлилик ёрдамида \leftrightarrow белгисини \rightarrow ва \wedge белгилари орқали ифодалашимиз мумкин. Энди $x \rightarrow y$ импликацияни кўрайлик. Фақатгина x чин ва y ёлғон бўлгандагина $\bar{x} \vee y$ мулоҳаза ёлғон, бундан эса фақатгина x чин (яъни \bar{x} ёлғон) ва y ёлғон бўлгандагина $\bar{x} \vee y$ мулоҳаза ёлғон бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, яна бир тенг кучлиликка эга бўламиз:

$$x \rightarrow y \equiv \bar{x} \vee y. \quad (9)$$

Демак, \rightarrow , \leftrightarrow , \vee , \wedge , – белгиларни ўз ичига олган ихтиёрий мураккаб мулоҳазани унга тенг кучли бўлган шундай мулоҳаза билан алмаштириш мумкинки, натижада фақат \vee , \wedge , – белгилар қатнашган мулоҳазаларга эга бўламиз. Бундай алмаштириш мантиқ алгебрасининг электротехникадаги татбиқи учун катта аҳамиятга эга, чунки у ерда ишлатиладиган ифодаларда фақат учта \vee , \wedge , – белги қатнашади. Энди \vee белгини \wedge ва – белгилар орқали ифодалаймиз. Буни икки карра инкорни ўчириш қонуни деб аталувчи $\bar{\bar{x}} = x$ тенг кучлиликдан ва де Морган қонунлари деб аталувчи ҳамда чинлик жадвали ёрдамида осонгина текшириладиган

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \wedge \bar{y}, \quad (10)$$

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \quad (11)$$

тенг кучлиликлар ёрдамида бажариш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам,

$$x \vee y \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \quad (12)$$

ва шунга ўхшаш

$$x \wedge y \equiv \overline{\overline{x \wedge y}} \quad (13)$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, мантиқ алгебрасининг ихтиёрий ифодасини унга тенг кучли бўлган шундай ифода билан алмаштириш мумкинки, охириги ифодада фақат \wedge ва $-$ ёки \vee ва $-$ белгилар қатнашади. Шунга ўхшаш, барча мантиқий амалларни \rightarrow ва $-$ амаллари билан алмаштириш мумкин.

Шуни ҳам айтиш керакки, барча амалларни фақатгина Шеффер штрихи билан алмаштириш ҳам мумкин:

$$\bar{x} \equiv x|x, \quad x \wedge y \equiv (x|y)|(x|y), \quad x \wedge y \equiv x|y, \quad x \vee y \equiv \bar{x}|\bar{y},$$

$$x \rightarrow y \equiv x|\bar{y}.$$

Бу тенг кучлиликларни, Шеффер амали таърифидан фойдаланиб, чинлик жадвали ёрдамида осонгина кўрсатиш мумкин.

Энди мисол сифатида $(x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y})$ ифодани шундай алмаштирамизки, натижада фақат \wedge , \vee ва $-$ белгилари қатнашсин. Бунинг учун аввало (9), (2) ва (3) тенг кучлиликлардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} (x \rightarrow y)(y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) &\equiv (x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \cdot (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \equiv \\ &\equiv (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) \rightarrow (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{x}) \equiv (\overline{x \vee \bar{y}})(\overline{y \vee \bar{x}}) \vee (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{y} \vee x). \end{aligned}$$

Коммутативлик ва дистрибутивлик қонунларидан фойдаланиб, бу ифодани қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$(x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x} \cdot y \vee \bar{y} \cdot x \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot y \vee x \bar{y} \vee \bar{x} y).$$

Энди шундай савол туғилади: агар ҳамма мантиқий амалларни иккита ($-$, \wedge) ёки ҳатто битта $\bar{x} = x$ га келтиришнинг ҳожати борми? Сабаб шундаки, фақат иккита ёки битта белги

орқали алмаштирганда мантиқий ифодалар жуда чўзилиб кетади ва уни кўздан кечириш қийинлашади.

Иккинчи томондан, мантиқий хулосаларнинг қонуниятларини баён этаётганда, юқорида киритилган \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow амаллари катта аҳамиятга эга. Бу хусусан \rightarrow амалига хосдир. Яна бир нечта муҳим тенг кучлиликларни келтирамыз:

$$x \cdot \bar{x} \equiv \text{ч} \quad (\text{қарама-қаршилиқ қонуни}), \quad (14)$$

$$x \vee \bar{x} \equiv \text{ё} \quad (\text{учинчиси истисно қонуни}), \quad (15)$$

$$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x \quad (\text{идемпотентлик қонуни}), \quad (16)$$

$$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee (x \cdot y) \equiv x \quad (\text{ютиш қонунлари}) \quad (17)$$

$$x \vee \text{ё} \equiv x, \quad x \vee \text{ч} \equiv \text{ч}, \quad x \cdot \text{ч} \equiv x, \quad x \cdot \text{ё} \equiv \text{ё}. \quad (18)$$

Бу тенг кучлиликлар ихтиёрий мантиқий ифодаларни керакти кўринишга келтиришга имкон беради.



Машқлар

1. Тенг кучлилиқни исботланг: $\overline{x \rightarrow y} \equiv x \wedge \bar{y}$.
2. Формулани соддалаштиринг: $A \equiv (\overline{x \vee y \rightarrow \bar{x} \vee y}) \wedge y$.
3. Берилган формуланинг айнан чинлигини исботланг:

$$A \equiv x \rightarrow (y \rightarrow x).$$

5- §. Тенг кучли формулаларга доир теоремалар

Теоремалар. Зарурий ва етарли шартлар.

1-теорема. A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун \bar{A} ва \bar{B} формулалар тенг кучли бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. $A = B$ бўлсин. $У$ вақтда ҳамма ҳолатларда формулалар бир хил қийматга эга бўлади. $У$ ҳолда \bar{A} ва \bar{B} формулалар ҳам чинлик жадвалининг ҳар бир сатрида бир хил қийматларга эга бўлади. Демак, $\bar{A} = \bar{B}$.

Худди шунга ўхшаш, $\bar{A} = \bar{B}$ дан $A = B$ келиб чиқади.

2-теорема. A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун $A \leftrightarrow B$ формула айнан чин (тавтология) бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. 1. $A = B$ бўлсин. Бу ҳолда, эквивалентлик таърифига асосан, $A \leftrightarrow B$ нинг ҳамма сатрларидаги қийматлари «ч» дан иборат, демак, $A \leftrightarrow B$ тавтологияни ифодалайди.

2. $A \leftrightarrow B$ тавтология бўлсин. У ҳолда $A \leftrightarrow B$ ҳар бир сатрда «ч» қийматга эга бўлади. Бундан эса A ва B нинг ҳар бир сатрдаги қийматлари бир хил, яъни $A = B$ келиб чиқади.

Мисоллар. 1. $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ — айнан чин.

2. $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$ — айнан чин.

3-теорема. $A \leftrightarrow B$ айнан чин бўлиши учун $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ айнан чин бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. а) $A \leftrightarrow B$ формула айнан чин бўлсин. У вақтда 2-теоремага асосан $\bar{A} = \bar{B}$. Демак, 2-теоремага асосан $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ формуланинг айнан чинлиги келиб чиқади.

б) $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$ айнан чин бўлсин. Бундан $\bar{A} = \bar{B}$ келиб чиқади ва ўз навбатида $A = B$. Демак, $A \leftrightarrow B$ формула айнан чин бўлади.

4-теорема. P формуланинг исталган A қисми ўрнига шу A билан тенг кучли B формулани қўйишдан ҳосил бўлган янги Q формула P билан тенг кучлидир.

Мисол. $P = \overline{x \vee y} \rightarrow z$ берилган бўлсин. $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ бўлгани учун $P = Q = \bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow z = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \vee z = x \vee y \vee z$.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги мулоҳазаларнинг чин ёки ёлгон эканлигини аниқланг:

1) $2 \in \{x | 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0, x \in R\}$; 2) $\{1\} \in N$.

2. Қуйидаги импликацияларнинг қайси бири чин бўлади:

1) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, u ҳолда $2 < 3$;

2) агар $2 \cdot 2 = 4$ бўлса, u ҳолда $2 > 3$.

3. Қуйидаги тенг кучлиликларни исботланг:

$$1) x \vee \bar{x} = y \vee \bar{y};$$

$$2) x \vee (x \wedge y) = x;$$

$$3) (x \vee \bar{x}) \rightarrow y = (x \wedge \bar{x}) \vee y; \quad 4) x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

4. Қуйидаги формулаларнинг чинлик жадваллари тузилсин:

$$1) \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2;$$

$$2) (x \vee y) \rightarrow (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \rightarrow \bar{y});$$

$$3) (x_1 \wedge x_2) \vee x_3;$$

$$4) x \wedge \bar{y} \rightarrow (y \vee \bar{x} \rightarrow \bar{z});$$

$$5) (x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \rightarrow (x_1 \vee x_2 \wedge \bar{x}_3).$$

5. Тенг кучлиликларни исбот қилинг:

$$1) (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x;$$

$$2) x \vee (\bar{x} \wedge y) \equiv x \vee y;$$

$$3) (x \vee y) \wedge (z \vee t) \equiv xz \vee yz \vee xt \vee yt;$$

$$4) xy \vee zt \equiv (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t);$$

$$5) x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \rightarrow y \equiv x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (x_n \rightarrow y) \dots)).$$

6. Қуйидаги формулаларни соддалаштиринг:

$$1) (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x);$$

$$2) (x \vee \bar{y} \rightarrow (z \rightarrow y \vee \bar{y} \vee x)) \wedge (x \vee x \rightarrow (x \rightarrow x)) \rightarrow y;$$

$$3) (x \wedge x \wedge \bar{x} \rightarrow y \wedge \bar{y} \rightarrow z) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge \bar{z});$$

$$4) (x \wedge (y \vee z \rightarrow y \vee z)) \vee (y \wedge x \wedge \bar{y}) \vee x \vee (y \wedge x \wedge \bar{x}).$$

7. Қуйидагиларнинг қайси бирлари айнан чин ва айнан ёлғон формула эканлигини аниқланг:

$$1) (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z));$$

$$2) (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \vee p) \rightarrow (p_2 \vee p));$$

$$3) (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3));$$

$$4) (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \wedge p) \rightarrow (p_2 \wedge p)).$$

8. Айнан чин ёки айнан ёлғон формула эканлигини исботланг:

$$1) x \wedge y \rightarrow x;$$

$$2) x \rightarrow (x \vee y);$$

$$3) (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x});$$

$$4) (\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \rightarrow (x \rightarrow y).$$

9. F – айнан ёлғон формула бўлсин. $x \wedge \bar{y} \rightarrow F \equiv x \rightarrow y$ эканлигини исбот қилинг.

10. Ҳамма асосий мантиқий амалларни:
- 1) дизъюнкция, конъюнкция ва инкор;
 - 2) конъюнкция ва инкор;
 - 3) дизъюнкция ва инкор;
 - 4) импликация ва инкор амаллари орқали ифодаланг.
11. Айнан чин ёки айнан ёлгон формула эканлигини исботланг:
- 1) $(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n \rightarrow \bar{y}) \wedge y$;
 - 2) $x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow \dots \rightarrow (x_{n-1} \rightarrow (x_n \rightarrow y \vee \bar{y}))) \dots$;
 - 3) $\left(\overline{\overline{x \wedge \bar{x} \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow y_{n-1} \rightarrow y_n}} \right) \rightarrow (z \wedge \bar{z})$.



Муस्ताқил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида қандай мантиқий амаллар бажарилади?
2. Формулалар. Тенг кучли формулаларни келтиринг.
3. Айнан чин, айнан ёлгон ва бажарилувчи формулаларнинг таърифларини келтиринг.
4. Асосий тенг кучлиликларни исботланг.
5. Тенг кучли формулаларга доир теоремаларни исботланг.

6- §. Формулаларнинг нормал шакллари

- Элементар конъюнкция (дизъюнкция). КНШ. ДНШ. Теоремалар. Формуланing доимо чин бўлишининг етарли ва зарурий шарти.*

Тенг кучли алмаштиришлар бажариб, мулоҳазалар алгебрасининг формулаларини ҳар хил кўринишларда ёзиш мумкин. Масалан, $\bar{A} \rightarrow BC$ формулани $A \vee BC$ ёки $(A \vee B)(A \vee C)$ кўринишларда ёза оламиз.

Мантиқ алгебрасининг контакт ва реле-контактли схемалар, дискрет техникадаги татбиқларида ва математик мантиқнинг бошқа масалаларида формулаларнинг нормал шакллари катта аҳамиятга эга. Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{агар } \sigma = \text{ч бўлса,} \\ \bar{x}, & \text{агар } \sigma = \text{ё бўлса.} \end{cases}$$

$\sigma = \text{ч}$ эканлиги аниқ.

1-таъриф. Ушбу

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \quad (1)$$

кўринишдаги формула **элементар конъюнкция** деб аталади, бу ерда $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ихтиёрий қийматлар сатри ва x_i ўзгарувчилар орасида бир хиллари бўлиши мумкин.

2-таъриф. Ушбу

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \quad (1)$$

кўринишдаги формула **элементар дизъюнкция** деб аталади, бу ерда ҳам $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ ихтиёрий қийматлар сатри ва x_i ўзгарувчилар орасида бир хиллари бўлиши мумкин.

3-таъриф. Элементар дизъюнкцияларнинг конъюнкцияси формуланинг **конъюнктив нормал шакли (КНШ)** ва элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси формуланинг **дизъюнктив нормал шакли (ДНШ)** деб аталади.

КНШ га $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$ формула ва ДНШ га $x \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z$ формула мисол бўла олади.

1-теорема. Элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир P формуласига тенг кучли конъюнктив нормал шаклдаги Q формула мавжуд.

Бу теоремани исботлашда ушбу тенг кучлиликлардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{A \wedge B} &= \bar{A} \vee \bar{B}; & 2) \quad \overline{A \vee B} &= \bar{A} \wedge \bar{B}; \\ 3) \quad A \rightarrow B &= \bar{A} \vee B; & 4) \quad \overline{A \rightarrow B} &= A \wedge \bar{B}; \\ 5) \quad A \leftrightarrow B &= (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}); & 6) \quad \overline{A \leftrightarrow B} &= (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B). \end{aligned} \quad (3)$$

Исбот. P формула нормал конъюнктив шаклда бўлмаса, қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) P даги элементар мулоҳазалар \wedge ва \vee амаллари билангина бирлаштирилган бўлса ҳам, лекин \wedge сўнгги амални ифодаламайди. Бу ҳолда $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ дистрибутивлик қонунидан фойдаланиб, сўнгги амали \wedge дан иборат тенг кучли формулага келтирамиз;

б) P формула $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ мантиқий амаллар воситасида тузилган бирор формулани ифодаласин. У ҳолда P га (3) тенг кучлиликларни татбиқ этиб, P билан тенг кучли ва \neg, \vee, \wedge билан ифодаланган P^1 формулани ҳосил қиламиз. Агар P^1 КНШ кўринишида бўлмаса, унга $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ дистрибутивлик қонунини татбиқ этиб, чекли қадамлардан кейин P билан тенг кучли Q конъюнктив нормал шаклдаги формулага келамиз.

Изоҳ. P формулани конъюнктив нормал шаклга келтириш жараёнида

$$A \wedge A = A, \quad A \vee A = A, \quad A \wedge J = A, \quad A \wedge J = J,$$

$$A \wedge \bar{J} = \bar{J}, \quad A \vee \bar{J} = A, \quad A \vee \bar{A} = J \quad (4)$$

тенг кучлиликлардан фойдаланиб, уни соддалаштириш мумкин.

Мисоллар. 1. $P = [(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee [x \wedge (\bar{x} \vee y)]$.

$$\begin{aligned} P &= \{[(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee x\} \wedge \{[(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] \vee (\bar{x} \vee y)\} = \\ &= [(x \vee y) \vee x] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee x] \wedge [(x \vee y) \vee (\bar{x} \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee y)] = \\ &= (x \vee y) \wedge [J \vee \bar{y}] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar{x} \vee J) = (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J = x \vee y; \\ P &= x \vee y. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, P формуланинг КНШ биттагина дизъюнктив $(x \vee y)$ ҳаддан иборат экан.

2. $P = \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y$.

$$\begin{aligned} P &= \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y = \overline{\overline{x \vee y}} \leftrightarrow (x \wedge y) = \\ &= [\overline{\overline{x \vee y}} \vee (x \wedge y)] \wedge [(\overline{x \vee y}) \vee (x \wedge y)] = \\ &= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \vee \bar{y})] = \\ &= [(x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)] \wedge [(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y})] = \end{aligned}$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y});$$

$$P = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

P формула тавтология эканлигини чинлик жадвалига мурожаат қилмай туриб ҳам аниқлаш мумкинми деган саволга қуйидаги чинлик аломати деб аталган теорема ижобий жавоб беради.

2-теорема. P формула доимо чин бўлиши учун унинг КНШ даги ҳар бир элементар дизъюнктив ҳадида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга бу мулоҳазанинг инкори ҳам мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

Исбот: а) P формуланинг

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \quad (5)$$

КНШ даги ҳар бир A_i ҳадида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга бу мулоҳазанинг инкори ҳам мавжуд бўлсин, яъни $A_i = x \vee \bar{x} \vee y \vee \dots \vee u$ шаклида бўлсин, у ҳолда $x \vee \bar{x} = J$ ва $J \vee A = J$ ларга асосан $A_i = J \vee (y \vee \dots \vee u \vee V) = J$ бўлади. Демак, $P = J \wedge J \wedge \dots \wedge J = J$ бўлади, яъни айнан чин формула бўлади.

б) Энди P тавтология бўлсин ва A_i унинг КНШ даги шундай элементар дизъюнктив ҳади бўлсинки, унда бирорта элементар мулоҳаза билан бирга унинг инкори қатнашмаган бўлсин. Масалан, $A_i = x \vee \bar{y} \vee \dots \vee u$ шаклида бўлсин. Энди, элементар мулоҳазаларнинг шундай қийматлар сатрини олайликки, бу сатрда x нинг қиймати ё, y нинг қиймати ч, z нинг қиймати ё, ..., u нинг қиймати ё бўлсин. У вақтда

$$A_i = x \vee \bar{y} \vee \dots \vee u = \text{ё} \vee \text{ч} \vee \dots \vee \text{ё} = \text{ё} \vee \dots \vee \text{ё} = \text{ё}.$$

Демак, $P = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ нинг қиймати ҳам ёлгон бўлади. Аммо, теореманинг шартига асосан P нинг қиймати айнан чиндир. Натижада қарама-қаршиликка келдик. Демак, элементар дизъюнкцияларнинг ҳар бир ҳадида бирорта мулоҳаза ўзи ва ўзининг инкори билан қатнашиши шарт.

Мисол. 1. $P = x \wedge \bar{x} \rightarrow y \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge \bar{x} \vee y \wedge \bar{y}} = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$.

$P = \bar{x} \vee x \vee \bar{y} \vee y$ — айнан чиндир.

2. $\overline{x \wedge \bar{x} \wedge (y \wedge \bar{y} \rightarrow z)} = (\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y) \vee z = P(\bar{x} \vee x) \wedge (\bar{y} \vee y \vee z)$ — айнан чин формуладир.

7- §. Дизъюнктив нормал шакл

☑ ДНШ. Формуланing доимо ёлгон бўлишинing етарли ва зарурий шарти. Мисоллар.

Эслатиб ўтамизки, элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси формуланing *дизъюнктив нормал шакли (ДНШ)* деб аталади.

1-теорема. *Элементар мулоҳазаларнинг исталган P формуласини ДНШга келтириш мумкин.*

Исбот. Бунинг учун \bar{P} формулани КНШга келтирамиз:

$$\bar{P} = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m,$$

сўнгра \bar{P} нинг инкорини топганимизда формула ДНШ кўринишига келади:

$$\overline{\bar{P}} = P = \overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m} = \bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \dots \vee \bar{A}_m.$$

Энди ёлгонлик аломати деб аталган теоремани исботлаймиз.

2-теорема. *P формула айнан ёлгон бўлиши учун, унинг дизъюнктив нормал шаклидаги ҳар бир элементар конъюнкция ифодасида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга бу мулоҳазанинг инкори ҳам мавжуд бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. а) P — айнан ёлгон бўлса, у ҳолда \bar{P} — айнан чин бўлади. Демак, \bar{P} нинг КНШ даги ҳар бир элементар дизъюнкция ифодасида камида битта элементар мулоҳаза билан бирга унинг инкори ҳам мавжуд бўлади. Шунинг учун $\bar{P} = P$ нинг ДНШ даги ҳар бир конъюнктив ҳадида камида битта элементар мулоҳаза ва унинг инкори мавжуд бўлади;

б) энди ҳар бир элементар конъюнкция ифодасида камида битта элементар мулоҳаза ва унинг инкори мавжуд бўлсин, яъни $A_i = x_i \wedge \bar{x}_i \wedge y_i \wedge \dots \wedge z_i$ бўлсин, у ҳолда $A_i = 0$ ва $P = 0 \vee 0 \vee \dots \vee 0 = 0$.

Демак, P айнан ёлгон формуладир.

$$\begin{aligned} \text{Мисол. } P &= \overline{(\bar{x} \wedge x)} \rightarrow \overline{y \wedge u} = (\bar{x} \wedge x) \vee \overline{y \wedge u} = \\ &= (\bar{x} \vee x) \vee \bar{y} \vee \bar{u} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y}); \end{aligned}$$

$$\bar{P} = (x \vee \bar{x}) \vee (y \vee \bar{y}) - \text{айнан чин};$$

$$P = (\bar{x} \wedge x) \wedge (\bar{y} \wedge u) - \text{айнан ёлгон.}$$

3-теорема. *Элементар мулоҳазаларнинг ҳар бир P формуласи учун ечилиш муаммоси ечиладигандир.*

Исбот. 1) P ни КНШ га келтиргандан кейин, айнан чин бўлиш-бўлмаслиги дарҳол аниқланади;

2) P айнан чин бўлмаса, уни ДНШ га келтириб, айнан ёлгон бўлиш-бўлмаслигини аниқлаймиз;

3) P доимо чин ва доимо ёлгон бўлиш шартларини қаноатлантирмаса, у ҳолда бу формула бажарилувчи бўлади.

Демак, элементар мулоҳазалар формуласининг айнан чин, айнан ёлгон ёки бажарилувчи формула бўлишини чекли қадамлар жараёнида аниқлаш мумкин. Шунинг учун ечиш муаммоси доимо ижобий ҳал бўлади.

8- §. Мукамал конъюнктив ва дизъюнктив нормал шакллар

МКНШ. МДНШ. Тўлиқ ва тўғри элементар конъюнкциялар (дизъюнкциялар). Формулани МКНШ (МДНШ)га келтириш алгоритми.

Мантиқ алгебрасининг битта формуласи учун бир нечта ДНШ (КНШ) мавжуд бўлиши мумкин. Масалан, $(x \vee y)(x \vee z)$ формулани қуйидаги $x \vee yz$, $x \vee x y \vee x z$ ДНШ ларга келтириш мумкин. Булар дистрибутивлик ва идемпотентлик қонунларини қўллаш натижасида ҳосил қилинган.

Формулаларни бир қийматли равишда нормал шаклда тасвирлаш учун мукаммал дизъюнктив нормал шакл ва мукаммал конъюнктив нормал шакл (МДНШ ва МКНШ) деб аталувчи кўринишлари ишлатилади.

n та x_1, x_2, \dots, x_n элементар мулоҳазанинг

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \quad (1)$$

элементар дизъюнкциялари ва

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n} \quad (2)$$

элементар конъюнкциялари берилган бўлсин.

1-таъриф. (1) элементар дизъюнкция ((2) элементар конъюнкция) ифодасида ҳар бир элементар мулоҳаза x_i бир марта қатнашган бўлса, у **тўғри элементар дизъюнкция (тўғри элементар конъюнкция)** деб аталади.

Масалан, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ ва $\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_6$ элементар дизъюнкциялар ва $x_1 x_2 x_3$ ва $x_1 \bar{x}_3 x_6$ элементар конъюнкциялар мос равишда тўғри элементар дизъюнкциялар ва элементар конъюнкциялар бўлади.

2-таъриф. (1) элементар дизъюнкция ((2) элементар конъюнкция)нинг ифодасида x_1, x_2, \dots, x_n мулоҳазаларнинг ҳар биттаси бир мартагина қатнашган бўлса, у x_1, x_2, \dots, x_n мулоҳазаларга нисбатан **тўлиқ элементар дизъюнкция (тўлиқ элементар конъюнкция)** деб аталади.

Масалан, $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ ва $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$ элементар дизъюнкциялар ва $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, x_1 x_2 \bar{x}_3$ элементар конъюнкциялар x_1, x_2, x_3 мулоҳазаларга нисбатан тўлиқ элементар дизъюнкциялар ва тўлиқ элементар конъюнкциялар бўлади.

3-таъриф. Агар ДНШ (КНШ) ифодасида бир хил элементар конъюнкциялар (элементар дизъюнкциялар) бўлмаса ва ҳамма элементар конъюнкциялар (элементар дизъюнкциялар) тўғри ва тўлиқ бўлса, у **мукаммал дизъюнктив нормал шакл (мукаммал конъюнктив нормал шакл) МДНШ (МКНШ)** деб аталади.

Масалан, $xуz \vee xу\bar{z} \vee \bar{x}уz \vee \bar{x}\bar{z}$ ДНШ x, y, z мулоҳазаларга нисбатан МДНШ бўлади. $(x \vee y)(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$ КНШ мулоҳазаларга нисбатан МКНШ бўлади.

Асосий мантиқий амалларнинг МДНШ ва МКНШ кўринишлари қуйидагича бўлади:

а) МДНШ: $\bar{x} = \bar{x}$; $xу = xу$; $x \vee y = xу \vee \bar{x}у \vee x\bar{y}$;
 $x \rightarrow y = xу \vee \bar{x}у \vee \bar{x}\bar{y}$; $x \rightarrow y = xу \vee \bar{x}\bar{y}$;

б) МКНШ: $\bar{x} = \bar{x}$; $xу = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(x \vee y)$; $x \vee y = x \vee y$;
 $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$; $x \rightarrow y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$.

1-теорема. n та элементар мулоҳазанинг айнан чин формуласидан фарқли ҳар бир A формулани мукамал конъюнктив нормал шаклга (МКНШ) келтириш мумкин.

Исбот. Қуйидаги исбот тавтологиядан фарқ қилувчи ҳар қандай A формулани МКНШ га келтириш алгоритми бўлади.

1. Аввало A формулани конъюнктив нормал шаклга келтирамиз. Бунинг учун A формулани конъюнкция, дизъюнкция ва инкор мантиқий амаллари орқали ифодалаймиз (инкор амали фақатгина ўзгарувчилар устида бўлиши керак). Сўнгра дистрибутивлик қонунларидан фойдаланиб, A формулани КНШ га келтирамиз ва ҳамма лозим бўлган содда-лаштиришларни бажарамиз.

2. Агар КНШ ифодасида бир нечта бир хил элементар дизъюнкциялар мавжуд бўлса, у ҳолда $x \wedge x = x$ тенг кучлиликл формуласидан фойдаланиб, улардан биттасини A ифодасида қолдирамиз.

3. Қуйидаги икки усул орқали ҳамма элементар дизъюнкцияларни тўғри элементар дизъюнкцияларга айлантирамиз:

а) агар бирор элементар дизъюнкция ифодасида бирорта ўзгарувчи ўзининг инкори билан қатнашган бўлса, у ҳолда $x \vee \bar{x} = \text{ч}$, $\text{ч} \vee x = \text{ч}$, $x \wedge x = x$ тенг кучлиликл формулаларга асосан биз бу элементар конъюнкцияни КНШ ифодасидан олиб ташлаймиз;

б) агар бирор ўзгарувчи элементар дизъюнкция ифодасида бир неча марта қатнашган бўлса (ёки ҳамма ҳолда инкор ишораси остида эмас, ёки ҳамма ҳолда инкор ишораси остида), у ҳолда $x \vee x$ формуласига асосан биз улардан фақатгина биттасини КНШ ифодасида қолдираемиз.

Натижада, ҳамма элементар дизъюнкциялар тўғри элементар дизъюнкцияларга айланади.

4. Агар баъзи элементар дизъюнкциялар тўлиқ элементар дизъюнкциялар бўлмаса, яъни дизъюнктив ҳадларда элементар мулоҳазаларнинг баъзилари (ёки уларнинг инкорлари) мавжуд бўлмаса, у ҳолда бундай элементар дизъюнкцияларни тўлиқ элементар дизъюнкциялар ҳолатига келтириш керак.

Масалан, ушбу

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n$$

элементар дизъюнкция ифодасида x_i ёки \bar{x}_i йўқ деб фараз қилайлик. У ҳолда уни $x_i \wedge \bar{x}_i = 0$ ва $D \vee 0 = D$ формулалардан фойдаланиб қуйидаги икки тўлиқ элементар дизъюнкция конъюнкциясига келтира оламиз:

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee \bar{x}_{i+1} \vee \dots \vee x_n) \vee (x_i \wedge \bar{x}_i) = \\ & = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee x_i \vee \bar{x}_{i+1} \vee \dots \vee x_n) \wedge \\ & \quad \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee x_{i-1} \vee \bar{x}_i \vee x_{i+1} \vee \dots \vee x_n). \end{aligned}$$

Агарда элементар дизъюнкция ифодасида бир неча y_1, y_2, \dots, y_n ўзгарувчилар қатнашмаётган бўлса, у ҳолда унинг ифодасига $(y_i \wedge \bar{y}_i)$ ($i = \overline{1, m}$) конъюнкцияларни мантиқий қўшиб, дистрибутивлик қонунини қўллаймиз. Натижада, битта тўлиқ эмас элементар дизъюнкция ўрнига $2m$ та тўлиқ элементар дизъюнкцияга эга бўламиз.

5. Тўртинчи қадам бажарилиши натижасида КНШ ифодасида бир хил элементар дизъюнкциялар пайдо бўлади. Шунинг учун яна 2- қадамни ишлатамиз.

Демак, 1–5- қадамлар натижасида КНШ ифодасида бир хил элементар дизъюнкциялар мавжуд бўлмайди ва ҳамма элементар дизъюнкциялар тўғри ва тўлиқ бўлади. Таърифга асосан, бундай КНШ мукамал конъюнктив нормал шакл бўлади.

Мисоллар. 1. $A = (\bar{x} \rightarrow x) \wedge (y \rightarrow \bar{y}) \vee (z \leftrightarrow u)$ формула қуйидаги МКНШ га эга бўлади:

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u}).$$

$$2. A = (x \vee z) \wedge (x \rightarrow y) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y).$$

$$A = [\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y}) \vee (z \wedge \bar{z})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}] \wedge$$

$$\wedge (\bar{x} \vee y \vee (z \wedge \bar{z})) = [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})] \wedge [(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})].$$

$$A = (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

$$3. A = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee t).$$

$$A = [z \vee y \vee (z \wedge \bar{z}) \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee y \vee z \vee (t \wedge \bar{t})] \wedge \wedge [(x \wedge \bar{x}) \vee (y \wedge \bar{y}) \vee z \vee t] = [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t)] \wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t)] \wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t)].$$

n та мулоҳазали мукамал конъюнктив нормал шакл

$$\wedge (x_1^1 \vee x_2^1 \vee \dots \vee x_n^1)$$

ифодасида \wedge ўрнига \vee ни ва аксинча, \vee ўрнига \wedge ни қўйганимизда биз n та мулоҳазали

$$\vee (x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \dots \wedge x_n^1)$$

мукамал дизъюнктив нормал шаклга эга бўламиз.

Мукамал дизъюнктив нормал шаклнинг ҳар бир $x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \dots \wedge x_n^1$ ҳади **конъюнктив конституент** деб аталади.

2- теорема. n та элементар мулоҳазаларнинг айнан ёлгон формуласидан фарқли ҳар бир A формуласини мукамал дизъюнктив нормал шаклга келтириш мумкин.

Исбот. Берилган формулани A билан белгилаб, аввало \bar{A} ни мукамал конъюнктив нормал шаклга келтирамиз:

$$\bar{A} = \wedge(x_1^1 \vee x_2^1 \vee \dots \vee x_n^1).$$

Бундан $\bar{\bar{A}} = A$ нинг МДНШ ни топамиз:

$$A = \wedge(\overline{x_1^1 \vee x_2^1 \vee \dots \vee x_n^1}) = \vee(\bar{x}_1^1 \wedge \bar{x}_2^1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n^1).$$

Мисол. $A = [(\bar{x} \rightarrow x) \wedge (y \rightarrow \bar{y})] \vee (z \leftrightarrow u)$.

$$A = (x \vee \bar{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \bar{u}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{y} \vee z \vee \bar{u}) \wedge \\ \wedge (x \vee \bar{z} \vee u) \vee (y \wedge \bar{y}) = (x \vee \bar{z} \vee u \vee y) \wedge (x \vee \bar{z} \vee u \vee \bar{y}).$$

9- §. Формулаларнинг асосий хоссалари

Чинлик жадвали бўйича формулани тиклаш. Формулаи ўзгарувчилар бўйича қаторга ёйиш. Чинлик жадвали бўйича формулани МКНШ (МДНШ) кўринишида ёзиш.

Маълумки, берилган формула учун чинлик жадвали тузиш мумкин. Формуланинг чинлик жадвалини тузишни биламиз. Энди тескари масала билан шуғулланайлик, яъни берилган чинлик жадвали бўйича формулани топишни мақсад қилиб қўяйлик. Масалан, x ва y элементар мулоҳазаларнинг қуйидаги чинлик жадвалларига эга бўлган A , B , C , D формулаларини топайлик (1- жадвал):

1- жадвал

x	y	A	B	C	D	$A \vee B$	$A \vee C$	$A \vee D$	$B \vee D$	$A \vee B \vee C$	$A \vee B \vee C \vee D$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Бундан кейин бирор мулоҳазанинг «чин» қийматини «1» ва «ёлғон» қийматини «0» деб белгилаймиз. Маълумки,

$$A = x \wedge y; B = x \wedge \bar{y}; C = \bar{x} \wedge y; D = \bar{x} \wedge \bar{y}. \quad (1)$$

(1) формулаларнинг ҳар қайсиси учун жадвалнинг, мос равишда, 1, 2, 3, 4- сатрида «1» қиймат ва қолган сатрларида «0» қиймат туради. (1) формулалар икки мулоҳазали конъюнктив конституентлардан иборат.

Энди шундай формулаларни топайликки, улар учун жадвалнинг икки сатрида «1» қиймат ва икки сатрида «0» қиймат турган бўлсин. Бу талабга қўйидаги формулалар жавоб беради:

$$A \vee B = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}); A \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y);$$

$$A \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}); B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \text{ ва ҳ.к.}$$

Шундай қилиб, ушбу қоида ўринли: 2 ва 4- сатрларда «1», 1 ва 3- сатрларда «0» қийматга эга бўлган формулани ҳосил қилиш учун, биттасининг «1» қиймати худди 2- сатрда ва иккинчисининг «1» қиймати худди 4- сатрда турган икки конъюнктив конституент дизъюнкциясини олаемиз:

$$B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Худди шу каби, 1-жадвалдаги учта конъюнктив конституент дизъюнкцияси учта сатрда «1» қийматга ва битта сатрда «0» қийматга эга бўлган формулани тасвирлайди. Масалан,

$$A \vee B \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}).$$

Шундай қилиб, тўртала A, B, C, D конъюнктив конституент дизъюнкцияси тўртала сатрда ҳам «1» қийматга эга, яъни айнан чин:

$$E = A \vee B \vee C \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Бу формула икки мулоҳазали тўлиқ мукамал дизъюнктив нормал шаклдан иборат. Демак, E нинг инкори

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})} = \\ &= \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\bar{x} \wedge y} \wedge \overline{x \wedge \bar{y}} \wedge \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \end{aligned}$$

ёки

$$\bar{E} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee y)$$

айнан ёлгон формулани ифодалайди. Бу эса икки мулоҳазали тўлиқ мукамал конъюнктив нормал шаклдир.

Шундай қилиб, икки x ва y элементар мулоҳаза учун чинлик жадвалларига қараб мос формулаларни тиклаш масаласи ҳал қилинди.

Энди берилган чинлик жадваллари бўйича учта x , y , z элементар мулоҳазанинг формулаларини топиш масаласига ўтамиз. Бу уч мулоҳаза учун $2^3 = 8$ та қийматлар сатрлари тузилади (2- жадвал).

2- жадвал

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

2- жадвалнинг сатрларидан биридагина «1» қийматга, қолганларида «0» қийматга эга бўлиш талабига жавоб берувчи формулалар ушбу уч мулоҳазали ҳамма $2^3 = 8$ та конъюнктив конституентлардан иборатдир:

- 1) $x \wedge y \wedge z = A_1$; 4) $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} = A_4$; 7) $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z = A_7$;
 2) $x \wedge y \wedge \bar{z} = A_2$; 5) $\bar{x} \wedge y \wedge z = A_5$; 8) $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} = A_8$. (2)
 3) $x \wedge \bar{y} \wedge z = A_3$; 6) $\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} = A_6$;

Бу (2) конъюнктив конституентлардан ҳар иккитасининг дизъюнкциясини олиб, қийматлари икки сатрда «1», қолганларида «0» бўлган формулаларни; ҳар учтасининг дизъюнкциясини олиб, қийматлари уч сатрда «1», қолган сатрларда «0» бўлган формулаларни ҳосил қиламиз ва ҳ.к.

Масалан:

$$B_1 = A_1 \vee A_2; \quad B_2 = A_1 \vee A_3; \quad B_3 = A_1 \vee A_4; \quad B_4 = A_1 \vee A_5;$$

$$B_5 = A_1 \vee A_6; \quad B_6 = A_1 \vee A_7; \quad B_7 = A_1 \vee A_8;$$

$$C_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 = B_1 \vee A_3; \quad C_2 = B_1 \vee A_4; \quad \dots ;$$

$$D_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 = C_1 \vee A_4; \quad \dots ;$$

$$E = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5 \vee A_6 \vee A_7 \vee A_8 - \text{МДНШ}; \quad (3)$$

$$\bar{E} = \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_3 \wedge \bar{A}_4 \wedge \bar{A}_5 \wedge \bar{A}_6 \wedge \bar{A}_7 \wedge \bar{A}_8 - \text{МКНШ}. \quad (4)$$

Бунда саккизтасининг дизъюнкцияси (3) айнан чин формулани ва унинг инкори (4) айнан ёлғон формулани ифодалайди.

n та x_1, x_2, \dots, x_n элементар мулоҳаза учун ҳам масала худди шу усул билан ечилади.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан келиб чиқадики, ҳар бир айнан ёлғон бўлмаган n аргументли A формулани қуйидаги мукамал дизъюнктив нормал шаклда ёзиш мумкин:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{A(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}, \quad (5)$$

яъни қийматлар сатрида чин қийматга эга бўлган элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси шаклида ёзилади. (5) формулани қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)} A(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \cdot x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}. \quad (6)$$

Бу ерда $x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$ элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси ҳамма 2^n қийматлар сатри бўйича олинади.

Худди шу каби айнан чиндан фарқ қилувчи исталган A формулани қуйидаги мукамал конъюнктив нормал шаклда келтириш мумкин:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{A(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n)=0} x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \quad (7)$$

ёки

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} A(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) \vee x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}, \quad (8)$$

яъни $x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$ элементар дизъюнкцияларнинг конъюнкцияси ҳамма 2^n қийматлар сатри бўйича олинади.

Шундай қилиб, (7) ва (8) формулалар орқали исталган функциянинг чинлик жадвалидан фойдаланиб уни МДНШ ва МКНШ кўринишида ёзиш мумкин.

Мисол. 1. Берилган чинлик жадвалига асосан A_1, \dots, A_n формулаларни МДНШ кўринишида ёзиш талаб этилсин:

3-жадвал

x	y	z	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1

$$A_1(x, y, z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z;$$

$$A_2(x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z;$$

$$A_3(x, y, z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z};$$

$$A_4(x, y, z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z};$$

$$A_5(x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z.$$



Машқлар

1. Учинчи жадвалда берилган A_1, \dots, A_5 формулаларнинг МКНШ кўринишини топинг.
2. Бир, икки ва уч аргументли ҳар қандай айнан ёлғон бўлган функцияларнинг МКНШ кўринишини топинг.

10- §. Тенг кучлимас формулалар сони

n ўзгарувчили формулалар сони. Элементар конъюнкциялар сони.

n та элементар

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

мулоҳазаларнинг нечта ўзаро тенг кучлимас, яъни ҳар хил формулалари мавжуд деган масалани қўямиз.

Икки x ва y элементар мулоҳаза учун нечта тенг кучлимас формулалар борлигини кўрайлик. x ва y нинг $2^2 = 4$ қийматлар сатри учун: 4 та A, B, C, D формулалардан ҳар қайсисининг қийматларидан биттаси «1» ва учтаси «0» дан иборат устунни мавжуд. Бундай устунлар сони 4 та, яъни $C_4^1 = 4$.

Ундан кейин, олтига $A \vee B, A \vee C, \dots, C \vee D$ формулалардан ҳар қайсисининг қийматлари иккита «1» ва иккита «0» дан иборат устунни ҳосил қилади. Бундай устунлар сони $C_4^2 = 6$ га тенг. Яна тўртта

$$A \vee B \vee C, A \vee C \vee D, A \vee B \vee D, B \vee C \vee D$$

формулалардан ҳар қайсисининг қийматлари учта «1» ва битта «0» дан ташкил этилган устунни беради. Бундай устунлар $C_4^3 = 4$ тадир. Ниҳоят, E формуланинг қийматлари фақат «1» дан тузилган $C_4^4 = 1$ та устунни ташкил этади.

Шундай қилиб, 1-жадвалда

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 2^{2^2}$$

устун мавжуд бўлади. Бундан эса худди шунча формула борлиги келиб чиқади. Устунларнинг ҳеч қайси иккитаси бир хил бўлмаганлигидан, ҳеч қайси иккита формула ҳам ўзаро тенг кучли эмасдир.

Демак, икки x ва y мулоҳазанинг шу 16 та формуласидан ташқари, уларни ифодалайдиган бошқа тенг кучли формула йўқ. Бундан, x ва y нинг исталган $A(x, y)$ формуласи жадвалда келтирилган формулаларнинг бири билан тенг кучли деган хулосага келамиз. Масалан, $(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{y}$ формулани олсак, ушбу чинлик жадвалидан

x	\bar{y}	y	$x \leftrightarrow y$	$(x \leftrightarrow \bar{y} \wedge y)$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

$(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ эканлиги маълум бўлади.

Юқорида ҳосил қилинган формулалардан 15 таси МДНШ ва 1 таси МКНШ кўринишига эга.

Худди шундай фикр юритиш йўли билан x, y, z элементар мулоҳазаларнинг тенг кучлимас формулалар сони

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + \dots + C_8^8 = 2^8 = 2^{2^3}$$

га тенглиги келиб чиқади. Тўртта x, y, z, f мулоҳазаларнинг ҳар хил формулалари сони 2^{2^4} га ва, умуман, n та мулоҳазанинг ҳар хил тенг кучлимас формулалари сони

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + \dots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n},$$

яъни $N = 2^{2^n}$ га тенг.

Шундай қилиб, n та аргументли тенг кучлимас формулалардан $2^{2^n} - 1$ таси МДНШ ва биттаси МКНШ кўринишига эга.



Муаммоли масала ва топшириқлар

- Куйидаги формулаларни КНШ кўринишига келтиринг:
 - $x \wedge (x \rightarrow y)$;
 - $(\overline{xy} \rightarrow \overline{x}) \wedge (xy \rightarrow \overline{y})$;
 - $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)$;
 - $(x \vee \overline{z}) \rightarrow y \wedge z$;
 - $(x \vee \overline{y} \rightarrow x \wedge z) \rightarrow (x \rightarrow \overline{x}) \vee y \wedge \overline{z}$;
 - $(ab \rightarrow bc) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow b))$;
 - $(\overline{a} \rightarrow c) \rightarrow ((\overline{b} \rightarrow \overline{a})$;
 - $(\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (bc \rightarrow ac)$.
- 1- масалада келтирилган формулаларни ДНШ кўринишига келтиринг.
- Куйидаги формулаларни ДНШ кўринишига келтиринг ва айнан ёлгон ёки айнан ёлгон эмаслигини аниқланг:
 - $\overline{xy} \leftrightarrow \overline{x} \vee xy$;
 - $(x \leftrightarrow y) \wedge (x\overline{y} \vee \overline{x}y)$;
 - $xy \rightarrow (x \rightarrow \overline{y})$;
 - $x \vee y \rightarrow (x \leftrightarrow y)$;
 - $x \vee y \rightarrow z$;
 - $(x \rightarrow z)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y)$.
- 1 ва 3- масалаларда келтирилган формулаларни МКНШ ва МДНШ кўринишига келтиринг.
- $f(x, y, z)$ функция ўзгарувчиларнинг фақат биттаси чин қиймат олганда ва фақат шунда чин қиймат олади. $f(x, y, z)$ функциянинг чинлик жадвалини тузинг ва уни формула орқали ифодаланг.
- Чинлик жадвалидан $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z), f_4(x, y, z), f_5(x, y, z), f_6(x, y, z)$ функцияларни ифодаловчи формулаларни топинг ва уларни соддалаштиринг:

x	y	z	$f_1(x, y, z)$	$f_2(x, y, z)$	$f_3(x, y, z)$	$f_4(x, y, z)$	$f_5(x, y, z)$	$f_6(x, y, z)$
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

7. Қуйидаги мукамал нормал шаклдаги формулаларнинг чинлик жадвалини тузинг ва уларни соддалаштиринг:
- 1) $xу \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$; 2) $(x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;
 3) $xуz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z$; 4) $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.
8. Бир, икки ва уч аргументли ҳар қандай айнан чин бўлган функцияларнинг МДНШ кўринишини топинг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Формулаларнинг нормал шакллари деб нимага айтамыз?
2. Формуларнинг дизъюнктив ва конъюнктив нормал шаклларини ифодаланг.
3. Формуларни мукамал конъюнктив ва дизъюнктив нормал шакллarga келтириш алгоритминини ёзинг.
4. Формулаларнинг асосий хоссаларини келтиринг.
5. Тенг кучлимас формулалар сони нимага тенг?

11- §. Формуларнинг чинлик тўплами

- Чинлик тўплами. Мантиқий амалларнинг чинлик тўпламлари.*

Маълумки, n та элементар x_1, x_2, \dots, x_n мулоҳазаларнинг қийматлари 2^n та қийматлар сатрини ташкил этади. Бу мулоҳазаларнинг ҳар бир A формуласи баъзи қийматлар сатрларида «1» қийматни ва баъзиларида «0» қийматни қабул қилади.

Таъриф. *A формула «1» қиймат қабул қилувчи элементар мулоҳазаларнинг ҳамма қийматлар сатрларидан тузилган тўпلام A формуларнинг чинлик тўплами дейилади.*

Ўтган параграфларда кўрганимиздек, элементар мулоҳазаларнинг (A) формулаларидан $C_{2^n}^1 = 2^n$ таси битта қийматлар сатрида «1» қийматни қабул қилади. Демак, бундай ҳар бир формула бир элементли чинлик тўпламига эга.

Худди шунингдек, (A) формулаларнинг $C_{2^n}^2$ тасининг ҳар бири икки элементли чинлик тўпламига, $C_{2^n}^3$ тасининг

ҳар бири уч элементли чинлик тўпламига, ..., $C_{2^n}^{2^n}$ формула эса 2^n та элементли чинлик тўпламига эгадир. \bar{E} айнан ёлгон формуланинг чинлик тўплами эса \emptyset бўш тўпландан иборат.

x_1, \dots, x_n мулоҳазаларнинг айнан чин формуласига тегишли чинлик тўпламини U универсал тўпландан олсак, шу мулоҳазаларнинг ҳамма формулаларга тегишли чинлик тўпландари U нинг қисм тўпландарини ташкил этади ва бу универсал тўпландан

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + \dots + C_{2^n}^{2^n-1} + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n} \text{ та}$$

қисм тўпландарга эга бўлади.

Шундай қилиб, n та элементар мулоҳазанинг ҳамма A формулалари билан уларнинг чинлик тўпландари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади.

Ҳамма ўзаро тенг кучли формулаларга битта чинлик тўпланди мос келади.

Мисоллар. 1. Уч элементар x, y, z мулоҳазанинг $A = x \wedge \bar{y} \wedge z$ формуласи фақат битта $(1, 0, 1)$ қийматлар сатрида «1» қийматни қабул қилади. Шу сабабли, бу формуланинг чинлик тўпланди ушбу бир элементли $P = \{1, 0, 1\}$ тўпландир.

2. $A = (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$ формула уч элементли $Q = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ чинлик тўпламига эгадир.

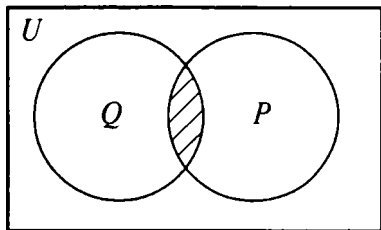
3. Ушбу $A = \overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ формула айнан чиндир. Шунинг учун унинг чинлик тўпланди универсал $U = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ тўпландан иборат.

A формула P тўпландан чин бўлса, у ҳолда P нинг тўлдирувчиси бўлган \bar{P} тўпландан ёлгон бўлади. Лекин A нинг \bar{A} инкори \bar{P} да чин ва P да ёлгон бўлади. Худди шу каби, айнан чин J формула U да чин, лекин $\bar{U} = \emptyset$ да ёлгон. Айнан ёлгон \bar{J} формула эса, аксинча, \emptyset да чин ва $\emptyset = \bar{U}$ да ёлгондир.

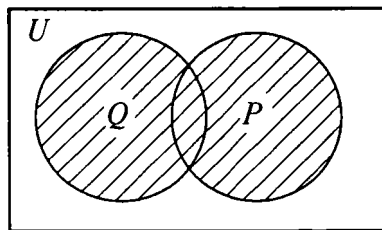
n та элементар мулоҳаза формуллари билан чинлик тўпламлари орасидаги бундай боғланиш мулоҳазалар мантиқидаги масалани тўпламлар назариясидаги масалага ва, аксинча, тўпламлар назариясидаги масалани мулоҳазалар мантиқидаги масалага кўчириш имкониятини беради. Ҳақиқатан ҳам:

1. A формула P тўпланда чин ва B формула Q тўпланда чин бўлса, $A \wedge B$ формула қандай тўпланда чин бўлади?

Маълумки (конъюнкция таърифига асосан), бу формула A ва B нинг иккаласи ҳам чин бўлган тўпланда чиндир. Демак, $P \cap Q$ кесишмада чиндир. Масалан, $A = x \wedge \bar{y} \wedge z$ ва $B = (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)$ формулаларнинг ($A \wedge B$) конъюнкцияси $P \cap Q = \{(1, 0, 1)\}$ тўпланда чиндир. Шундай қилиб, мулоҳазалар мантиқидаги \wedge амалига тўпламлар назариясидаги \cap амали мос келади (II.1- шакл).



II.1- шакл.

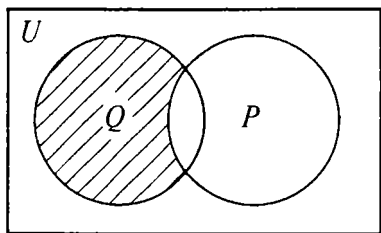


II.2- шакл.

2. $A \vee B$ формула қандай тўпланда чин бўлади?

Дизъюнкция таърифига асосан $A \vee B$ формула A ва B формулаларнинг камида биттаси чин бўлган тўпланда чиндир. Демак, $P \cup Q$ тўпланда $A \vee B$ формула чиндир. Шундай қилиб, мулоҳазалар мантиқидаги \vee амалига тўпламлар назариясидаги \cup амалининг мос келишини кўрамыз (II.2- шакл). Юқорида келтирилган A ва B формулалар учун

$$P \cup Q = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$



II.3- шакл.

3. $A \rightarrow B$ импликациянинг чинлик тўпламини топайлик.

Импликация таърифига асосан $A \rightarrow B$ формула фақат A чин бўлиб, B ёлғон бўлган тўпланда ёлғондир. Демак, $P - Q = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ айирмада $A \rightarrow B$ формула ёлғондир. Шундай қилиб, $A \rightarrow B$ формула U нинг штрихланган бўлагиде ёлғон бўлиб, қолган бўлагиде чиндир

(II.3- шакл). U нинг қолган бўлаги эса $\bar{P} \cup Q$ га тенг. Демак, $A \rightarrow B$ формула $\bar{P} \cup Q$ тўпланда чиндир.

Иккинчи томондан, \bar{A} формула \bar{P} да ва B формула Q да чин бўлгани учун, $\bar{A} \vee B$ формула $\bar{P} \cup Q$ да чиндир. Демак, бизга маълум бўлган $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$ тенг кучликни бошқа йўл билан исботладик.

4. (1) мулоҳазаларнинг исталган A ва B формулаларини олиб, $A \vee \bar{A} \vee B = J$ тенг кучликни исботлайлик. \bar{A} формула \bar{P} да чин, A формула P да ва B формула Q да чин бўлсин. Шундай қилиб, $\bar{A} \vee A \vee B$ формула $\bar{P} \cup P \cup Q = U \cup Q = U$ тўпланда чин. Шу сабабли, $\bar{A} \vee A \vee B$ айнан чин формула бўлиб, $\bar{A} \vee A \vee B = J$ дир.

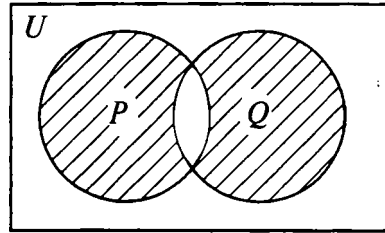
5. Қандай шартда $A \rightarrow B = J$ тенг кучлик бажарилади?

Маълумки, $A \rightarrow B$ формула U нинг $P - Q$ дан бошқа бўлагиде, демак, $\overline{P - Q}$ да чин. $A \rightarrow B = J$ шарт бўйича $\overline{P - Q} = U$ бўлиши керак. Бундан $\overline{P - Q} = \bar{U}$ ёки $P - Q = \emptyset$ келиб чиқади. Бу эса $P \subseteq Q$ эканини билдиради.

6. $A \rightarrow B$ формуланинг чинлик тўпламини аниқлайлик.

Бу формула A чин ва B ёлғон, шунингдек, B чин ва A ёлғон бўлган тўпланда, яъни $(P - Q) \cup (Q - P)$ дагина ёлғон бўлиб, U нинг қолган бўлагиде, яъни $\overline{(P - Q) \cup (Q - P)}$ да чиндир.

Шундай қилиб, $A \leftrightarrow B$ нинг чинлик тўплами U нинг штрихланган бўлагидан бошқа қисми билан тасвирланади (II.4- шакл):



II.4- шакл.

Бошқа қисмига мос келувчи тўпламни топамиз. $P - Q = P \cap \bar{Q}$ ва $Q - P = Q \cap \bar{P} = \bar{P} \cap Q$. Бундан $\overline{P - Q} = \bar{P} \cup Q$ ва $\overline{Q - P} = P \cup \bar{Q}$ келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$(P - Q) \cup (Q - P) = \overline{\bar{P} \cup Q} \cap \overline{P \cup \bar{Q}} = (\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}).$$

Демак, $A \leftrightarrow B$ формула $(\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q})$ тўпلامда чиндир.

Иккинчи томондан, $(\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q})$ тўпلام $(\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$ формуланинг чинлик тўплами бўлгани учун, ушбу маълум тенг кучлилика эга бўламиз:

$$A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}).$$

Қуйидаги $\bar{A} \vee B = A \rightarrow B$, $\bar{B} \vee A = B \rightarrow A$ формулаларга асосан

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

7. Формулалар билан тўпلامлар орасидаги боғланишга таяниб, қуйидаги теоремани исботлайлик.

Теорема. A ва B формулалар тенг кучли бўлиши учун $A \leftrightarrow B$ формула тавтология бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. а) $A = B$ бўлсин. Демак, $P = Q$. $A \leftrightarrow B$ нинг чинлик тўплами

$$(\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}) = (\bar{P} \cup P) \cap (P \cup \bar{P}) = U \cap U = U.$$

Бундан $A \leftrightarrow B = J$ келиб чиқади, яъни $A \leftrightarrow B$ тавтологиядир;

б) $(\bar{P} \cup Q) \cap (P \cup \bar{Q}) = J$ бўлсин, у ҳолда $A \leftrightarrow B = J$ бўлади. Демак, $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = J$. Бундан, конъюнкция таърифига асосан $A \rightarrow B = J$ ва $B \rightarrow A = J$. Бу ердан, 5- бандга биноан $P \subseteq Q$ ва $Q \subseteq P$. Демак, $Q = P$ келиб чиқади. Бу ўз навбатида $A = B$ бўлишини кўрсатади.

Шундай қилиб, мулоҳазалар алгебрасидаги \wedge , \vee , $-$ мантиқий амалларига мос равишда тўпламлар алгебрасидаги \cap , \cup , $-$ (кўпайтма, бирлашма, тўлдирувчи) амаллари мос келади. Мулоҳазалар алгебрасидаги «1», «0» константаларга тўпламлар алгебрасидаги U ва \emptyset (универсал ва бўш) тўпламлар мос келади. Демак, мулоҳазалар алгебрасидаги бирор ифодада \wedge ни \cap га, \vee ни \cup га, инкорни ($-$) тўлдирувчига, «1» ни универсал U тўпламга, «0» ни бўш \emptyset тўпламга алмаштирилса, тўпламлар алгебрасидаги ифода ҳосил бўлади ва аксинча.

12- §. Мулоҳазалар алгебраси функциялари. Функциялар тенг кучлилиги. Функциялар суперпозицияси

Функция. *Функциялар тенг кучлилиги. 0 ва 1 сақловчи функциялар. n аргументли функциялар сони. Бир рангли суперпозиция.*

Маълумки, мантиқий амаллар мулоҳазалар алгебраси нуқтаи назаридан чинлик жадваллари билан тўлиқ тавсифланади. Агарда функциянинг жадвал шаклида берилишини эсга олсак, у ҳолда мулоҳазалар алгебрасида ҳам функция тушунчаси мавжудлигини биламиз.

1-таъриф. *Мулоҳазалар алгебрасининг x_1, \dots, x_n аргументли $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияси деб, 0 ва 1 қийматлар қабул қилувчи функцияга айтилади ва унинг x_1, \dots, x_n аргументлари ҳам 0 ва 1 қийматлар қабул қилади. $f(x_1, \dots, x_n)$ функция узининг чинлик жадвали билан берилади:*

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
1	0	0	...	0	0	$f(1, 0, \dots, 0, 0)$
...
1	1	1	...	1	0	$f(1, 1, \dots, 1, 0)$
1	1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

Бу жадвалнинг ҳар бир сатрида аввал ўзгарувчиларнинг $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ қийматлари ва шу қийматлар сатрида f функциянинг $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ қиймати берилади. Олдинги параграфларда исбот қилган эдикки, n та ўзгарувчи учун қийматлар сатрларининг сони 2^n ва функцияларнинг сони 2^{2^n} га тенг бўлади.

Мулоҳазалар алгебрасида асосий элементар функциялар куйидагилардан иборат:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \bar{x}, f_3(x, y) = xy, f_4(x, y) = x \vee y, f_5(x, y) = x \rightarrow y, \\ f_6(x, y) = x \leftrightarrow y, f_7(x_1, \dots, x_n) = 1, f_8(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Агар $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция 0 сақловчи функция деб аталади. Агар $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ бўлса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция 1 сақловчи функция деб аталади.

n та аргументли 0 сақловчи функцияларнинг сони 2^{2^n-1} га ва 1 сақловчи функцияларнинг сони ҳам 2^{2^n-1} га тенг бўлади (исбот қилишни ўқувчига ҳавола этамиз).

Мулоҳазалар алгебрасидаги n та аргументли 0 сақловчи функциялар тўпламини P_0 ва 1 сақловчи функциялар тўпламини P_1 билан белгилаймиз.

2- таъриф. f ва g мулоҳазалар алгебрасининг функциялари ва x_1, \dots, x_n лар ҳеч бўлмаганда улардан биттасининг аргументлари бўлсин. Агар x_1, \dots, x_n аргументларнинг ҳамма қийматлар сатрлари учун f ва g функцияларнинг мос қийматлари бир хил бўлса, у ҳолда f ва g функциялар тенг кучли функциялар деб аталади ва $f = g$ шаклида ёзилади.

3- таъриф. Агарда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда x_i аргумент $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг сохта аргументи деб аталади.

Агарда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

бўлса, у ҳолда x_i аргумент $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг сохта эмас (муҳим) аргументи деб аталади.

Мисол. $f(x, y) = x \vee (xy)$ функция учун y аргументи сохта аргумент бўлади, чунки $f(1, 0) = f(0, 1)$.

Функциянинг аргументлари қаторига исталганча сохта аргументларни ёзиш мумкин ва у қатордан ҳамма сохта аргументларни олиб ташлаш мумкин.

Энди мулоҳазалар алгебраси функцияларининг суперпозицияси тушунчасини кўрайлик.

4-таъриф. $\Phi = \{\varphi_1(x_{11}, \dots, x_{1k_1}), \dots, \varphi_m(x_{m1}, \dots, x_{mk_m})\}$ мулоҳазалар алгебраси функцияларининг чекли системаси бўлсин. Қуйидаги икки усулнинг биттаси билан ҳосил қилинадиган ψ функция Φ системадаги $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ функцияларнинг **элементар суперпозицияси ёки бир рангли суперпозицияси** деб аталади:

а) бирор $\varphi_j \in \Phi$ функциянинг x_{ji} аргументини қайта номлаш усули, яъни

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j(i-1)}, y, x_{j(i+1)}, \dots, x_{jk_j}),$$

бу ерда y ўзгарувчи, x_{jk} ўзгарувчиларнинг бирортаси билан мос тушиши мумкин;

б) бирор $\varphi_j \in \Phi$ функциянинг бирор x_{ji} аргументи ўрнига иккинчи бир $\varphi_e(x_{e1}, \dots, x_{ek}) \in \Phi$ функцияни қўйиш усули, яъни

$$\varphi_j(x_{j1}, \dots, x_{j(i-1)}, \varphi_e(x_{e1}, \dots, x_{ek}), x_{j(i+1)}, \dots, x_{jk_j}).$$

Агар Φ система функцияларнинг k рангли суперпозициялари синфи $\Phi^{(k)}$ берилган бўлса, у ҳолда $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^{(k)})^{(1)}$ бўлади.

1-и з о ҳ. 4-таърифнинг а) қисмига асосан бир хил чинлик жадвалига эга бўлиб, лекин ўзгарувчиларнинг белгиланиши билан фарқ қиладиган функциялар бир-бирининг суперпозицияси бўлади.

2-и з о ҳ. 4-таърифнинг а) қисмига асосан бирор x_{ji} ўзгарувчини x_{jk} ($i \neq k$) билан қайта номласак, натижада кам ўзгарувчили функцияга эга бўламиз. Бу ҳолда x_{ji} ва x_{jk} ўзгарувчилар айнан тенглаштирилди деб айтамыз. Масалан, $x \vee y$ ва $x \wedge \bar{y}$ функциялардаги y ни x билан қайта номласак, у вақтда $x \vee x = x$ ва $x \wedge \bar{x} = 0$ функцияларни ҳосил қиламыз.

3-изоҳ. 4-таърифнинг а) қисмига асосан агар $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ бўлса, у ҳолда $\Phi^{(r)} \subset (\Phi)^{(r+1)}$ ва умуман $r \leq s$ бўлганда $\Phi^{(r)} \subseteq (\Phi)^{(s)}$.

5-таъриф. \bar{x} , xy , $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \leftrightarrow y$ асосий элементар функцияларнинг суперпозицияси **формула** деб аталади.

13- §. Буль алгебраси

✓ Буль алгебрасининг таърифи. Мисоллар.

Таъриф. Конъюнкция $(x \wedge y)$, дизъюнкция $(x \vee y)$, инкор (\bar{x}) амаллари ва $0, 1 \in M$ элементлари аниқланган M тўпلامда шу мантиқий амаллар ва $0, 1$ элементлар учун қуйидаги аксиомалар

$$\overline{\overline{x}} = x; \quad (1)$$

$$xy = yx; \quad (2)$$

$$(xy)z = x(yz); \quad (3)$$

$$x \vee y = y \vee x; \quad (4)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \quad (5)$$

$$x(y \vee z) = xy \vee xz; \quad (6)$$

$$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z); \quad (7)$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}; \quad (8)$$

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \quad (9)$$

$$x \vee x = x; \quad (10)$$

$$xx = x; \quad (11)$$

$$1x = x; \quad (12)$$

$$0 \vee x = x \quad (13)$$

бажарилса, бундай M тўпلام **Буль алгебраси** деб аталади.

Буль алгебрасига қуйидаги тўпламлар мисол бўла олади:

1. M – бирор тўплам (масалан, тўғри чизиқда ётган нуқталар тўплами ёки натурал сонлар тўплами) ва μ_M – шу M нинг ҳамма қисм тўпламларидан иборат тўплам бўлсин. $x \cup y$ орқали x ва y тўпламларнинг $x \cap y$ кесишмасини, $x \cap y$ орқали x ва y тўпламларининг $x \cup y$ бирлашмасини, \bar{x} орқали x тўпламнинг M тўпламгача \bar{x} тўлдирувчисини, 0 орқали \emptyset бўш тўпламни ва 1 орқали M тўпламни белгилаб оламиз. У ҳолда μ_M тўплам Буль алгебраси бўлади, чунки юқорида кўрсатилган 13 та аксиома бажарилади.

2. Мулоҳазалар тўплами учун \wedge , \vee ва \neg амаллари ҳамда 0 ва 1 элементлари аниқланганлиги учун бу тўпламни Буль алгебраси деб тахмин қилишимиз турган гап. Лекин бунинг учун қуйидаги аниқликни киритиш керак. A ва B мулоҳазалар айнан тенг бўлиши учун $A \leftrightarrow B$ эквивалентлик абсолют чин бўлиши керак. Ана шундай тушунча киритилган мулоҳазалар тўплами Буль алгебраси бўлади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формулаларнинг чинлик тўпламларини топинг:

$$A = xy \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y; \quad B = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y});$$

$$C = xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}; \quad D = (x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z});$$

$$E = \bar{x}\bar{y} \leftrightarrow \bar{x} \vee xy; \quad F = (x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y);$$

$$G = xy \rightarrow (x \leftrightarrow \bar{y}); \quad J = x \vee y \rightarrow (x \leftrightarrow y);$$

$$L = x \vee y \rightarrow z; \quad M = (x \rightarrow z)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y).$$

2. 1- масалада келтирилган формулалардан тузилган $A \vee B$, $A \vee C$, $A \vee D$, $A \vee F$, $A \wedge B$, $A \wedge C$, $A \wedge D$, $A \wedge F$, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow F$, $C \rightarrow D$, $C \rightarrow F$, $C \leftrightarrow D$, $C \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow F$, $F \leftrightarrow E$, $A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow F \rightarrow C$, $(A \leftrightarrow F) \rightarrow C$, $(A \leftrightarrow F) \rightarrow D$, $A \leftrightarrow F \leftrightarrow E$, $E \rightarrow B$, $E \rightarrow C$, $E \leftrightarrow D$, $E \leftrightarrow F$, $G \rightarrow B$, $G \rightarrow C$, $G \leftrightarrow D$, $G \leftrightarrow F$, $J \rightarrow B$, $J \rightarrow C$, $J \leftrightarrow D$, $J \leftrightarrow F$, $L \rightarrow B$, $L \rightarrow C$, $L \leftrightarrow D$, $L \leftrightarrow F$, $M \rightarrow B$, $M \rightarrow C$, $M \leftrightarrow D$,

$M \leftrightarrow F, E \rightarrow F \rightarrow L, M \rightarrow J \rightarrow G, (L \leftrightarrow E) \rightarrow M, (A \leftrightarrow G) \rightarrow F, A \leftrightarrow M \leftrightarrow J$ мураккаб формулаларнинг чинлик тўпламини топинг.

- $f_1 = \overline{xy \vee \bar{z}}$ ва $f_2 = x(xy \vee \overline{yz \vee (y \vee \bar{t}z)})$ функцияларга тенг кучли бўлган функцияларни топинг.
- Ёлгон қиймат сақловчи ($f(0, 0, \dots, 0) = 0$) n та аргументли ҳар хил функцияларнинг сони нечта?
- Чин қиймат сақловчи ($f(1, 1, \dots, 1) = 1$) n та аргументли ҳар хил функцияларнинг сони нечта?
- Қуйидаги $f_1(x, y, z, t) = (x \vee y)(z \vee t)$ ва $f_2(x, y, z, t) = xz \vee yz \vee xt \vee yt$ ҳамда $f_3(x, y, z, t) = xy \vee zt$ ва $f_4(x, y, z, t) = (x \vee z)(y \vee z)(x \vee t)(y \vee t)$ функцияларнинг тенг кучлилигини исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

- Мантиқий амалларнинг чинлик тўпламлари.
- Формуланинг чинлик тўплами деб нимага айтамыз?
- Мулоҳазалар алгебраси функциялари. Қачон функциялар тенг кучли деб айтилади? Функциялар суперпозицияси нимадан иборат?
- Буль алгебраси таърифни келтиринг.

14- §. Мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонун

✓ *Икки тарафлама функция. Ўз-ўзига икки тарафлама функция. Икки тарафлама қонун. Мисоллар. Теорема. Лемма.*

Энди икки тарафлама (қўшма) функция тушунчасини киритамиз. $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияга икки тарафлама бўлган функцияни топиш учун f функциянинг чинлик жадвалида ҳамма ўзгарувчиларни уларнинг инкорига алмаштириш керак, яъни ҳамма жойда 1 ни 0 га ва 0 ни 1 га алмаштириш керак.

1-таъриф. Қуйидагича аниқланган

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг **икки тарафлама функцияси** деб аталади.

2-таъриф. Агар

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ га ўз-ўзига икки тарафлама функция деб аталади.

Таърифга асосан, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ икки тарафлама функция $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ва $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ қийматлар сатрларида қарама-қарши қийматлар қабул қилади.

Мисоллар. 1. Мулоҳазалар алгебрасининг асосий элементар функцияларига икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.

1) $f_1(x) = x$ га икки тарафлама функция $f_1^*(x) = x$ бўлади.

2) $f_2(x) = \bar{x}$ га икки тарафлама функция $f_2^*(x) = \bar{x}$ бўлади.

3) $f_3(x, y) = xy$ га икки тарафлама функция $f_3^* = x \vee y$ бўлади.

4) $f_4(x, y) = x \vee y$ га икки тарафлама функция $f_4^* = xy$ бўлади.

5) $f_5(x, y) = x \rightarrow y$ га икки тарафлама функция $f_5^* = \overline{y \rightarrow x}$ бўлади.

6) $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ га икки тарафлама функция $f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$ бўлади.

7) $f_7 = 1$ га $f_7^* = 0$ ва $f_8 = 0$ га $f_8^* = 1$ икки тарафлама функция бўлади.

Келтирилган мисолнинг ечимидан кўришиб турибдики, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар, таърифга асосан, ўз-ўзига икки тарафлама функциялар бўлади.

2. $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ функциянинг ўз-ўзига икки тарафлама функция эканлигини исбот қилинг.

Исбот.

$$\begin{aligned} f^*(x, y, z) &= \overline{\overline{xy \vee yz \vee xz}} = \overline{\bar{x}\bar{y} \wedge \bar{y}\bar{z} \wedge \bar{x}\bar{z}} = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) = \\ &= [(x \vee y)y \vee (x \vee y)z](x \vee z) = [y \vee yz \vee xz](x \vee z) = (y \vee xz)(x \vee z) = \\ &= xy \vee yz \vee x(x \vee z)z = xy \vee yz \vee xz. \end{aligned}$$

Демак, $f(x, y, z) = f^*(x, y, z)$ эканлиги учун f ўз-ўзига икки тарафлама функциядир.

Теорема. *Агар*

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1\rho_1}), \dots, f_m(x_{m1}, \dots, x_{m\rho_m}))$$

бўлса, у ҳолда

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1\rho_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{m\rho_m}))$$

бўлади.

$$\text{Исбот. } \Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{\Phi}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) =$$

$$= \bar{f}(f_1(\bar{x}_{11}, \dots, \bar{x}_{1\rho_1}), \dots, f_m(\bar{x}_{m1}, \dots, \bar{x}_{m\rho_m})) =$$

$$= \bar{f}(\bar{f}_1(\bar{x}_{11}, \dots, \bar{x}_{1\rho_1}), \dots, \bar{f}_m(\bar{x}_{m1}, \dots, \bar{x}_{m\rho_m})) =$$

$$= \bar{f}(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1\rho_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{m\rho_m})) =$$

$$= f^*(f_1^*(x_{11}, \dots, x_{1\rho_1}), \dots, f_m^*(x_{m1}, \dots, x_{m\rho_m})).$$

Теореманинг исботидан икки тарафлама қонун келиб чиқади.

Икки тарафлама қонун. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ функцияларнинг суперпозициясига икки тарафлама бўлган функция мос равишда $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*$ икки тарафлама функциялар суперпозициясига тенг кучлидир, яъни агар $A = C[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]$ формула $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияни реализация этса, у ҳолда $C = [\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*]$ формула $f^*(x_1, \dots, x_n)$ функцияни реализация этади.

Бу формула A формулага икки тарафлама бўлган формула деб айтилади ва уни A^* деб белгилаймиз. Демак,

$$A^* = C[\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*].$$

Ушбу қонундан ўз-ўзига икки тарафлама бўлган функцияларнинг суперпозицияси яна ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлишига келиб чиқади, яъни агар $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлса, $7 - \chi$. Тўраев

у ҳолда $\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*)$ функция ҳам ўз-ўзига икки тарафлама бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\Phi^* = \varphi^*(\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*) = \varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = \Phi.$$

Агар функция формула орқали ифодаланган ва бу формула ўз навбатида \wedge , \vee , $-$ мантиқ амаллари орқали ифодаланган бўлса, у ҳолда бу функцияга (формулага) икки тарафлама бўлган функцияни (формулани) топиш учун \vee ни \wedge га, \wedge ни \vee га, 1 ни 0 га ва 0 ни 1 га алмаштириш кифоя. Бу принципни тенг кучли формулаларга ишлатганда, яна тенг кучли формулалар ҳосил қиламиз, яъни $A(x_1, \dots, x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$ бўлса, у ҳолда $A^*(x_1, \dots, x_n) = B^*(x_1, \dots, x_n)$.

Ушбу принцип орқали мантиқ алгебрасининг бир формуласидан иккинчи формуласига, бир теоремасидан иккинчи теоремасига, бир таърифидан иккинчи таърифига келамиз.

Масалан, юқорида келтирилган (2), (3), (6), (8), (10), (12) тенг кучли формулаларга ушбу принципни ишлатсак, (4), (5), (7), (9), (11), (13) тенг кучли формулалар келиб чиқади.

Мантиқ алгебрасида элементлари n та аргументли ўз-ўзига икки тарафлама функциялардан иборат бўлган тўп-ламни S билан белгилаймиз, унинг элементларининг сони 2^{2^n-1} га тенгдир.

Энди ўз-ўзига икки тарафлама бўлмаган функциялар ҳақидаги леммани кўриб чиқайлик.

Л е м м а . Агар $\varphi(x_1, \dots, x_n) \notin S$ бўлса, у ҳолда ундан аргументларининг ўрнига x ва \bar{x} функцияларни қўйиш усули билан бир аргументли ўз-ўзига икки тарафлама бўлмаган функция, яъни константани ҳосил қилиш мумкин.

И с б о т . $\varphi(x_1, \dots, x_n) \notin S$ бўлганлиги учун, шундай $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ қийматлар сатри топиладики, $\varphi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ бўлади.

$\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, n$) функцияни киритамиз ва $\varphi_i(x) = \varphi(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ деб белгилаб оламиз. У вақтда

қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) = \varphi(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) = \varphi(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = \\ &= \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = \varphi(\varphi_1(1), \dots, \varphi_n(1)) = \varphi(1).\end{aligned}$$

Лемма исбот бўлди.

15- §. Мантиқ алгебрасидаги арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади

✓ *Арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади. Мантиқий амалларни арифметик амаллар орқали ифодалаш. Чизиқли функция. Теорема.*

$\{0, 1\}$ Буль алгебрасидаги x у конъюнкция амали оддий арифметикадаги 0 ва 1 сонлари устидаги кўпайтма амалига мос келади. Аммо 0 ва 1 сонларини қўшиш натижаси $\{0, 1\}$ тўпلام доирасидан четга чиқади. Шунинг учун И.И.Жегалкин 2 модулига асосан қўшиш амалини киритади (И.И.Жегалкин ўтган асрнинг 30-йиллар бошида Москва давлат университетида биринчи бўлиб математик мантиқ бўйича илмий семинар ташкил этган). x ва y мулоҳазаларни 2 модули бўйича қўшишни $x + y$ сифатида белгилаймиз ва y қуйидаги чинлик жадвали билан берилади:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Чинлик жадвалидан кўриниб турибдики, $x + y = \overline{x \leftrightarrow y}$. Мантиқ алгебрасидаги кўпайтма ва 2 модули бўйича қўшиш мантиқ амаллари учун коммутативлик, ассоциативлик ва дистрибутивлик арифметик қонунлари ўз кучини сақлайди.

Буль алгебрасидаги асосий мантиқий амалларни кири-тилган арифметик амаллар орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$1) \bar{x} = x + 1; \quad 2) x \wedge y = xy; \quad 3) x \vee y = xy + x + y;$$

$$4) x \rightarrow y = xy + x + 1; \quad 5) x \leftrightarrow y = x + y + 1.$$

2 модули бўйича қўшиш амалининг таърифига асосан $x + x = 0$ ва $xx = x$ ($x^n = x$).

Мантиқ алгебрасидаги исталган функцияни ягона арифметик кўпхад шаклига келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, биз олдинги параграфларда исталган функцияни конъюнкция ва инкор мантиқий амаллари орқали ифодалаш мумкинлигини кўрган эдик. Юқорида конъюнкция, дизъюнкция ва инкор мантиқий амалларини арифметик амаллар орқали ифодаладик. Демак, исталган функцияни арифметик кўпхад шаклига келтириш мумкин.

1-таъриф. $\sum x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} + a$ кўринишидаги кўпхад *Жегалкин кўпхади* деб аталади, бу ерда ҳамма x_{i_j} ўзгарувчилар биринчи даражада қатнашади, (i_1, \dots, i_k) қийматлар сатрида ҳамма i_j лар ҳар хил бўлади, $a \in E_2 = \{0, 1\}$.

2-таъриф. $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} + a$ кўринишидаги функция *чизиқли функция* деб аталади, бу ерда $a \in E_2 = \{0, 1\}$.

Чизиқли функциянинг ифодасилан кўриниб туриблики, n та аргументли чизиқли функциялар сони 2^{n+1} га тенг ва бир аргументли функциялар доимо чизиқли функция бўлади.

Жегалкин кўпхади кўринишидаги ҳар бир функциянинг аргументлари сохта эмас аргументлар бўлади. Ҳақиқатан ҳам, x_1 шундай аргумент бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \varphi(x_2, \dots, x_n) + \psi(x_2, \dots, x_n).$$

Бу ерда φ функция айнан 0 га тенг эмас, акс ҳолда x_1 аргумент f функциянинг (кўпхаднинг) аргументлари сафига қўшилмасди.

Энди x_2, \dots, x_n аргументларнинг шундай қийматларини оламизки, $\varphi = 1$ бўлсин. У ҳолда f функциянинг қиймати x_1 аргументнинг қийматига боғлиқ бўлади. Демак, x_1 сохта аргумент эмас.

Мантиқ алгебрасидаги ҳамма n аргументли чизиқли функциялар тўпламини L ҳарфи билан белгилаймиз. Унинг элементларининг сони 2^{n-1} га тенг бўлади.

Теорема. *Агар $f(x_1, \dots, x_n) \in L$ бўлса, у ҳолда ундан аргументлари ўрнига 0 ва 1 константаларни ҳамда x ва \bar{x} функцияларни, айрим ҳолда f устига « \rightarrow » инкор амалини қўйиши усули билан $x_1 x_2$ функцияни ҳосил қилиш мумкин.*

16- §. Мантиқ алгебрасидаги монотон функциялар

☑ **Монотон функция.** *Қийматлар сатрининг олдин келиши. Таъриф. Монотон функциялар суперпозицияси. КНШ (ДНШ) кўринишидаги функциянинг монотон функция бўлиш шарти.*

$0 < 1$ муносабати орқали $\{0, 1\}$ тўпламни тартиблаштирамиз.

1- таъриф. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ва $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ қийматлар сатри бўлсин. Агар $\alpha_i \leq \beta_i$ (ҳеч бўлмаганда битта i рақам учун тенгсизлик ишораси бажарлса) ёки α ва β қийматлар сатрлари устма-уст тушса, у ҳолда α қийматлар сатри β қийматлар сатридан олдин келади деб айтамыз ва $\alpha < \beta$ шаклида ёзамиз.

2- таъриф. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ва $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ихтиёрий қийматлар сатрлари бўлсин. $\alpha < \beta$ дан $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \dots, \beta_n)$ бажарилиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x_1, \dots, x_n)$ функция **монотон функция** деб аталади.

3- таъриф. $\alpha < \beta$ дан $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > f(\beta_1, \dots, \beta_n)$ муносабат келиб чиқса, у ҳолда $f(x_1, \dots, x_n)$ **номонотон функция** деб аталади.

Асосий элементар мантиқий функциялардан 0, 1, x , xu , $x \vee u$ функциялар монотон функциялар бўлиб, \bar{x} , $x \rightarrow u$, $x \leftrightarrow u$, $x + u$ функциялар номонотон функциялардир.

1-теорема. *Монотон функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функция яна монотон функция бўлади.*

Исбот. Φ монотон функциялар системаси бўлсин ва шу системадаги функциялар суперпозициясидан ҳосил қилинган функция монотон эканлигини исбот қилиш керак бўлсин. 0 рангли суперпозиция учун бу тасдиқнинг тўғрилиги аниқ, чунки Φ системадаги ҳамма функциялар монотон функциялардир. k рангли суперпозиция учун теоремадаги тасдиқ тўғри бўлсин. Унинг $(k + 1)$ рангли суперпозиция учун ҳам тўғрилигини исботлаймиз.

$\varphi(x_1, \dots, x_n), \psi(y_1, \dots, y_l) \in \Phi^{(k)}$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k); \\ & F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l) = \\ & = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \psi(y_1, \dots, y_l), x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

функцияларнинг монотон эканлигини исботлаш лозим. Бу ерда y ва y_i лар x_j ўзгарувчиларнинг бирортаси билан мос келиши мумкин. φ функциянинг монотонлигидан $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$ нинг монотон функция эканлиги келиб чиқади. F функциянинг монотонлигини исботлаймиз. Бунинг учун F функциянинг иккита γ ва γ' таққосланадиган қийматлар сатрини кўриб чиқамиз:

$$\begin{aligned} \gamma' &= (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{i-1}, \dots, \alpha'_{i+1}, \dots, \alpha'_n, \beta'_1, \dots, \beta'_l); \\ \gamma'' &= (\alpha''_1, \dots, \alpha''_{i-1}, \dots, \alpha''_{i+1}, \dots, \alpha''_n, \beta''_1, \dots, \beta''_l). \end{aligned}$$

$\gamma' < \gamma''$ бўлсин. У ҳолда $F(\gamma') \leq F(\gamma'')$ эканлигини кўрсатишимиз керак. Қуйидагилар маълум:

$$\begin{aligned} F(\gamma') &= \varphi(\delta'), \text{ бу ерда } j = i \text{ бўлганда } \delta'_j = \alpha'_j, \delta'_i = \psi(\beta'_i); \\ F(\gamma'') &= \varphi(\delta''), \text{ бу ерда } j = i \text{ бўлганда } \delta''_j = \alpha''_j, \delta''_i = \psi(\beta''_i). \end{aligned}$$

ψ монотон функция ва $\gamma' < \gamma''$ дан $\beta' < \beta''$ келиб чиққанлигидан $\delta' < \delta''$ бўлади. Яъни $\varphi(\delta') = F(\gamma') \leq \varphi(\delta'') = F(\gamma'')$, чунки φ монотон функциядир.

$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \dots, y, x_{i+1}, \dots, x_k)F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l) \in$
эканлигидан $(k+1)$ рангли суперпозиция учун теорема исбот бўлди. Демак, монотон функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функция яна монотон функциядир.

Конъюнкция ва дизъюнкция монотон функциялар бўлганлиги учун, теоремага асосан, уларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган функция ҳам монотон бўлади.

2-теорема. Агар $f(x_1, \dots, x_n) \in M$ бўлса, y ҳолда ундан аргументлари ўрнига $0, 1$ ва x функцияни қўйиш усули билан \bar{x} функцияни ҳосил қилиш мумкин.



Муаммоли масала ва топшириқлар

- Мулоҳазалар алгебрасининг асосий элементар функцияларига икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.
- Ҳамма икки аргументли ўз-ўзига икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.
- n та аргументли ўз-ўзига икки тарафлама бўлган функцияларнинг сонини топинг.
- $f = (\bar{x} \vee y\bar{z})(xy \vee x\bar{z})$ ва $\varphi = (x \vee \bar{y})z\bar{t} \vee \bar{x}t$ функцияларга икки тарафлама бўлган функцияларни топинг.
- а) $x \rightarrow y \leftrightarrow z$; б) $x \vee y \vee z \vee t$; в) $x \leftrightarrow y \leftrightarrow z$ формулаларни Жегалкин кўпҳади кўринишига келтиринг.
- Функциянинг Жегалкин кўпҳади кўринишидаги ифодаси ягона эканлигини исботланг.
- Чизиқли функцияларнинг қайси бири ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлади?
- $xy \vee xz \vee yz = xy + xz + yz$ эканлигини исботланг.
- Қуйидаги формулаларни Жегалкин кўпҳади кўринишига келтиринг:

$$x \vee y \vee z; \quad xy \vee yz \vee xz; \quad xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

- Жегалкин кўпҳади кўринишидаги функциянинг ҳамма аргументлари сохта аргументлар эмаслигини исботланг.

11. Чизикли функцияларнинг қайси бири монотон функциялар бўлади?
12. Ноль (бир) сақловчи монотон функциялар айнан бирга (нолга) тенг эканлигини исботланг.
13. Икки аргументли ҳамма монотон функцияларни топинг.
14. Қуйида келтирилган функцияларнинг қайси бири монотон функция эканлигини аниқланг:
 а) $xу \vee xz \vee x\bar{z}$; б) $x \rightarrow (x \rightarrow y)$; в) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$;
 г) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}$; д) $xу \vee x \vee \bar{x}z$; е) $xу \vee yz \vee xz$.
15. Айнан константадан (0 ёки 1) фарқ қилувчи функция монотон бўлиши учун уни конъюнкция ва дизъюнкция суперпозицияси орқали ифодалаш етарли ва зарурлигини исботланг.
16. Монотон функцияга икки тарафлама бўлган функция монотон эканлигини исбот қилинг.
17. Фақат ва фақат ёки константалар, ёки ўзгарувчилар устида инкор амали бўлмаган КНШ ва ДНШ кўринишида ифодаланган функциялар монотон бўлишлигини кўрсатинг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Икки тарафлама функция ва ўз-ўзига икки тарафлама функция таърифларини келтиринг.
2. Мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонунни ёзинг.
3. Мантиқ алгебрасидаги арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади.
4. Мантиқ алгебрасидаги монотон функциялар.

17- §. Функционал ёпиқ синфлар ва Пост теоремаси

- Тўлиқ функциялар системаси. Икки тарафлама функциялар системасининг тўлиқ бўлиш шарти. Ёпиқ синфлар. Хусусий функционал ёпиқ синф. Максимал функционал ёпиқ синф. Пост теоремаси. Натижа. Тўплам ёпиғи. Пост жадвали.*

Мантиқ алгебрасининг $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ функциялар системаси берилган бўлсин.

1- таъриф. Агар мантиқ алгебрасининг исталган функциясини $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ системадаги функциялар суперпозицияси орқали ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда Φ **тўлиқ функциялар системаси** деб аталади.

Исталган функцияни МКНШ ёки МДНШ кўринишида ифодалаш мумкинлигидан $\{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системасининг тўлиқлиги келиб чиқади. $\{xy, x + y, 1\}$ функциялар системаси ҳам тўлиқ бўлади, чунки исталган функцияни Жегалкин кўпжади кўринишига келтириш мумкин.

Қуйидаги функциялар системасининг тўлиқлигини исботлаймиз:

- а) xy, \bar{x} ; б) $x \vee y, \bar{x}$; в) $xy, x + y, 1$;
 г) $x \vee y$; д) $\bar{x}\bar{y}$; и) $x + y, x \vee y, 1$;
 ж) $x + y + z, xy, 0, 1$; з) $x \rightarrow y, \bar{x}$; е) $x \rightarrow y, 0$.

Исбот. а) $x \vee y = \overline{\overline{xy}}$, яъни дизъюнкция амалини конъюнкция ва инкор амаллари орқали ифодалаш мумкин. Демак, $\{xy, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлади;

б) $xy = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ эканлиги маълум. Демак, исталган мантикий функцияни дизъюнкция ва инкор амаллари орқали ифодаласа бўлади. Шунинг учун $\{x \vee y, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқдир;

в) мантиқ алгебрасининг ихтиёрий функциясини ягона Жегалкин кўпжади кўринишига келтириш мумкинлигидан $\{xy, x + y, 1\}$ функциялар системасининг тўлиқлиги келиб чиқади;

г) ва д) мантиқ алгебрасидаги исталган функцияни $\psi(x, y) = xy$ ва $\varphi(x, y) = x \vee y$ Шеффер функциялари орқали ифодалаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\bar{x} = \varphi(x, x)$,

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y))$$

ва

$$xy = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\varphi(x, x), \varphi(y, y))$$

асосий мантикий амалларни Шеффер функцияси орқали ифодалаш мумкин. Демак, $\{\bar{x}y\}$ ва $\{x \vee y\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлади.

и) $x \vee y = xy + x + y$ бўлганлиги учун $x \vee y + (x + y) = xy$ бўлади. $\{xy, x + y, 1\}$ тўлиқ система эканлиги в) бандда исбот қилинган эди, демак, $\{x + y, x \vee y, 1\}$ система тўлиқдир.

Худди шундай бошқа функциялар системасининг тўлиқлигини исбот қилиш мумкин.

I-теорема. *Агар $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлса, у ҳолда унга икки тарафлама бўлган $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*\}$ функциялар системаси ҳам тўлиқ бўлади.*

Исбот. Φ^* системанинг тўлиқлигини исботлаш учун исталган $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияни Φ^* системасидаги функциялар суперпозицияси орқали ифодалаш мумкинлигини кўрсатишимиз керак. Бунинг учун аввал f^* функцияни $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ системадаги функциялар орқали ифодалаймиз (Φ система тўлиқ бўлганлиги учун бу процедурани бажариш мумкин). Кейин икки тарафлама қонунга асосан икки тарафлама функциялар суперпозицияси орқали f функцияни ҳосил қиламиз.

Мисол. Қуйидаги функциялар системасининг тўлиқ эмаслигини исботлайлик:

- а) $\bar{x}, 1$; б) $xy, x \vee y$; в) $x + y, \bar{x}$;
г) $xy \vee yz \vee xz, \bar{x}$; д) $xy \vee yz \vee xz, 0, 1$.

а) $\bar{x} = x + 1$ га тенг. Демак, $\{\bar{x}, 1\}$ системадаги функциялар бир аргументли функциялар бўлади. Бизга маълумки, бир аргументли функцияларнинг суперпозицияси натижа-сида ҳосил қилинган функция яна бир аргументли функция бўлади. Натижада, бу системадаги функциялар орқали кўп аргументли функцияларни ифодалаб бўлмайди. Шунинг учун $\{\bar{x}, 1\}$ тўлиқ система эмас.

б) $\{xy, x \vee y\}$ системадаги функцияларнинг иккаласи ҳам монотондир. Монотон функцияларнинг суперпозицияси орқали ҳосил қилинган функция яна монотон бўлишини исбот қилган эдик. Демак, бу иккала функциянинг суперпо-

зицияси орқали монотон бўлмаган функцияларни ифодалаш мумкин эмас ва натижада, $\{xy, x \vee y\}$ система тўлиқмас система бўлади.

в) $\{x + y, \bar{x}\}$ системадаги функциялар чизиқли функциялардир. Шунинг учун бу функциялар орқали чизиқлимас функцияларни ифодалаб бўлмайди. Демак, $\{x + y, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ эмас.

г) $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$ системадаги функциялар ўз-ўзига икки тарафлама функциялардир. Бу функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган ҳар қандай функция ҳам ўз-ўзига икки тарафлама функция бўлади. Демак, $\{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$ функциялар системаси тўлиқ эмас.

д) $\{xy \vee yz \vee xz, 0, 1\}$ системадаги функцияларнинг ҳаммаси монотон функциялар бўлади. Монотон эмас функциялар бу системадаги функциялар орқали ифодаланмайди. Демак, $\{xy \vee yz \vee xz, 0, 1\}$ система тўлиқ эмас.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган масала ечимининг анализидан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

Берилган Φ функциялар системасининг тўлиқ эмаслигини исботлаш учун системадаги функцияларнинг шундай умумий хусусиятини топиш керакки, бу хусусият функциялар суперпозицияси натижасида сақлансин.

Ҳақиқатан ҳам, у вақтда бундай хусусиятга эга бўлмаган функцияни Φ системадаги функциялар суперпозицияси орқали ҳосил қилиб бўлмайди.

Функцияларнинг бу маълум хусусиятларини текшириш учун одатда функционал ёпиқ синфлар тушунчасидан фойдаланилади.

2-таъриф. *Агар A системадаги функциялар суперпозициясидан ҳосил бўлган функция яна шу системанинг элементи бўлса, у ҳолда бундай система **суперпозицияга нисбатан ёпиқ система** деб аталади.*

3-таъриф. *Мантиқ алгебрасининг суперпозицияга нисбатан ёпиқ бўлган ҳар қандай функциялар системаси **функционал ёпиқ синф** деб аталади.*

Равшанки, маълум бир хил хусусиятга эга бўлган функциялар системаси функционал ёпиқ синфни ташкил этади ва, аксинча, маълум функционал ёпиқ синфга кирувчи функциялар бир хил хусусиятга эга бўлган функциялардир. Қуйидаги функциялар системаси функционал ёпиқ синфларга мисол бўла олади:

- а) бир аргументли функциялар;
- б) мантиқ алгебрасининг ҳамма функциялари;
- в) L – чизиқли функциялар;
- г) S – ўз-ўзига икки тарафлама функциялар;
- д) M – монотон функциялар;
- е) P_0 – ноль қийматни сақловчи функциялар;
- ж) P_1 – бир қийматни сақловчи функциялар.

4- таъриф. *Бўш синфдан ва мантиқ алгебрасининг ҳамма функциялари тўпламидан фарқ қилувчи функционал ёпиқ синф хусусий функционал ёпиқ синф деб аталади.*

Шундай қилиб, функциялар системасининг тўлиқ бўлишлиги учун бу системада ҳар қандай хусусий функционал ёпиқ синфга кирмайдиган функция топилиши етарли ва зарурдир.

5- таъриф. *Ўз-ўзидан ва мантиқ алгебрасининг ҳамма функциялари синфи (P_2) дан фарқ қилувчи функционал ёпиқ синфларга кирмайдиган хусусий функционал ёпиқ синф **максимал функционал ёпиқ синф** деб аталади.*

Мантиқ алгебрасида ҳаммаси бўлиб бешта максимал функционал ёпиқ синф мавжуд:

P_0 – ноль сақловчи функциялар синфи, P_1 – бир сақловчи функциялар синфи, M – монотон функциялар синфи, S – ўз-ўзига икки тарафлама функциялар синфи, L – чизиқли функциялар синфи.

Пост теоремаси. $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлишлиги учун бу системада P_0 , P_1 , M , S , L максимал функционал ёпиқ синфларнинг ҳар бирига кирмайдиган камида битта функция мавжуд бўлиши етарли ва зарур

(яъни $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ система P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг ҳам қисм тўплами бўлмаганда ва фақат шундагина тўлиқ система бўлади).

И с б о т. $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ тўлиқ система бўлсин, яъни $[\Phi] = P_2$. Фараз қиламизки, Φ максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортаси. У вақтда F нинг ёпиқлигини ҳисобга олиб, $P_2[\Phi] \subseteq [F] = F$ ни ёзиш мумкин, яъни $F = P_2$. Аммо бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, $\Phi \subseteq F$ муносабат бажарилмайди.

Теореманинг етарлилиги исботини ўқувчиларга ҳавола этамиз.

Н а т и ж а . *Мантиқ алгебрасидаги ҳар қандай функционал ёпиқ синф P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг қисм тўплами бўлади.*

Амалда бирорта $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ системанинг тўлиқ ёки тўлиқ эмаслигини аниқлаш учун Пост жадвалидан фойдаланилади. Пост жадвали куйидаги кўринишда бўлади:

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...
φ_{n-1}					
φ_n					

Жадвалнинг хоналарига ўша сатрдаги функция функционал ёпиқ синфларнинг элементи бўлса «+» ишора, бўлмаса «-» ишораси қўйилади.

$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ система тўлиқ функциялар системаси бўлиши учун, теоремага асосан, жадвалнинг ҳар бир устунида камида битта «-» ишораси бўлиши етарли ва зарур.

$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ функциялар системаси тўлиқ бўлмаслиги учун P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфлар-

нинг бирортасининг қисм тўплами бўлиши, яъни Пост жадвалининг бирор устуни тўлиқ «+» ишораларидан иборат бўлиши керак.

Функциялар системасининг тўлиқлиги тушунчаси билан синфнинг (тўпламнинг) *ёпиғи* тушунчаси ўзаро боғланган.

6- таъриф. *А билан P_2 (мантиқ алгебрасининг n та аргументли ҳамма функцияларини ўз ичига олган) тўпламнинг бирор қисм тўпламини белгилаймиз. А тўплам функцияларнинг суперпозициясидан ҳосил қилинган ҳамма буль функциялари тўплами (А тўплам функциялари орқали ифодаланган ҳамма буль функциялари тўплами) А тўпламнинг *ёпиғи* деб аталади ва $[A]$ каби белгиланади.*

Мисоллар. 1. $A = P_2$ бўлсин, у ҳолда $[A] = P_2$.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ бўлсин, у ҳолда A тўпламнинг ёпиғи ҳамма L – чизиқли функциялар тўпламидан иборат бўлади.

Тўплам ёпиғи қуйидаги хоссаларга эга:

$$1) [A] \supseteq A;$$

$$2) [[A]] = [A];$$

3) агар $A_1 \subseteq A_2$ бўлса, у ҳолда $[A_1] \subseteq [A_2]$ бўлади;

$$4) [A_1 \cup A_2] \supseteq [A_1] \cup [A_2].$$

7- таъриф. *Агар $[A] = A$ бўлса, у ҳолда А тўплам (синф) функционал ёпиқ синф* деб аталади.

Мисоллар. 1. $A = P_2$ синф ёпиқ синф бўлади.

2. $A = \{1, x_1 + x_2\}$ синфи ёпиқ синф бўлмайди.

3. L синф ёпиқ синф бўлади.

Осонгина кўриш мумкинки, ҳар қандай $[A]$ синф ёпиқ синф бўлади. Бу ҳол кўпгина функционал ёпиқ синфларни топишга ёрдам беради.

Тўплам ёпиғи ва ёпиқ синф тилида функциялар системасининг тўлиқлиги ҳақидаги таъриф (аввалги таърифга эквивалент бўлган таъриф) ни бериш мумкин.

8- таъриф. *Агар $[A] = P_2$ бўлса, у ҳолда А функциялар системаси тўлиқ* деб аталади.

М и с о л . Қуйидаги функциялар системаларининг тўлиқ эмаслигини Пост жадвали орқали исбот қилайлик:

- а) $\Phi_1 = \{0, xy, x + y + z\}$; б) $\Phi_2 = \{1, xy, x + y + z\}$;
 в) $\Phi_3 = \{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}\}$; г) $\Phi_4 = \{0, 1, x + y\}$;
 д) $\Phi_5 = \{0, 1, xy\}$.

		P_0	P_1	S	L	M
а)	0	+	-	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x + y + z$	+	+	+	+	-
б)	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x + y + z$	+	+	+	+	-
в)	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	-	-	+	-	-
г)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	$x + y$	+	-	-	+	-
д)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+

Жадвалдан кўриниб турибдики, юқорида келтирилган ҳамма функциялар системаси тўлиқ эмас, чунки ҳар бир система учун жадвалда битта устун фақатгина «+» ишораларидан иборат. Шунини таъкидлашимиз керакки, ҳар бир система учун бу устунлар ҳар хил. Демак, Пост теоремаси шартидан P_0, P_1, M, S, L максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасини ҳам олиб ташлаш мумкин эмас. Бу хулосадан ўз навбатида P_0, P_1, S, L, M максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортаси иккинчисининг қисм тўплами бўла олмаслиги келиб чиқади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги функциялар системаси функционал ёпиқ синфлар бўлишини исбот қилинг:
 - а) бир аргументли функциялар;
 - б) ҳамма мантиқ алгебрасининг функциялари;
 - в) L – чизиқли функциялар;
 - г) S – ўз-ўзига икки тарафлама функциялар;
 - д) M – монотон функциялар;
 - е) P_0 – ноль қийматни сақловчи функциялар;
 - ж) P_1 – бир қийматни сақловчи функциялар.
2. Агар $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ва $F = (f_1, \dots, f_n)$ функционал ёпиқ синфлар бўлса, у ҳолда $\Phi \cap F$ ва $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*\}$ лар ҳам функционал ёпиқ синфлар бўлишини ва $\Phi \cup F$ нинг функционал ёпиқ синф бўлмаслигини исботланг.
3. Қуйидаги максимал функционал ёпиқ P_0, P_1, S, L, M синфларнинг бирортаси иккинчисининг қисм тўплами бўлмаслигини исботланг.
4. Ҳар қандай шахсий функционал ёпиқ синф P_0, P_1, S, L, M максимал функционал ёпиқ синфларнинг бирортасининг қисм тўплами эканлигини исботланг.
5. Ноль сақламовчи функция номонотон функция ёки ўз-ўзига икки тарафлама бўлмаган функция эканлигини исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Тўлиқ функциялар системаси.
2. Функционал ёпиқ синфлар ва хусусий функционал ёпиқ синфлар.
3. Максимал функционал ёпиқ синф ва Пост теоремаси.
4. Тўплам ёпиғи ва Пост жадвали.

Мулоҳазалар ҳисоби аксиоматик мантиқий система бўлиб, мулоҳазалар алгебраси эса унинг интерпретациясидир (талқинидир).

Берилган аксиомалар системаси негизда (базасида) қурилган аксиоматик назария деб, шу аксиомалар системасига таяниб исботланувчи ҳамма теоремалар мажмуасига айтилади.

Аксиоматик назария формал ва формалмас назарияларга бўлинади.

Формалмас аксиоматик назария назарий-тўпламий мазмун билан тўлдирилган бўлиб, келтириб чиқариш тушунчаси аниқ берилмаган ва бу назария асосан фикр мазмунига суюнади.

Қаралаётган аксиоматик назария учун қуйидаги шартлар бажарилган бўлса, яъни:

- 1) назариянинг тили берилган;
- 2) формула тушунчаси аниқланган;
- 3) аксиомалар деб аталадиган формулалар тўплами берилган;
- 4) бу назарияда келтириб чиқариш қондаси аниқланган бўлса, формал аксиоматик назария аниқланган деб ҳисобланади.

Қуйида мулоҳазалар ҳисобининг символлари, формуласи, аксиомалар системаси, келтириб чиқариш қондалари, формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қондаси, дедукция ва умумлашган дедукция теоремалари, айрим мантиқ қонунларининг исботи, мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби ўртасидаги муносабатлар, мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари каби масалалар баён этилади.

1- §. Мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси

☑ *Мулоҳазалар ҳисоби. Мантиқий боғловчилар. Символлар. Формула. Қисмий формула.*

Ҳар қандай ҳисобнинг тавсифи бу ҳисобнинг символлари тавсифидан, формулалар ва келтириб чиқариш формуллари таърифидан иборат.

Мулоҳазалар ҳисобида уч категорияли символлардан иборат алфавит қабул қилинади:

Биринчи категория символлари: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$ Бу символларни *ўзгарувчилар* деб атаймиз.

Иккинчи категория символлари: $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$. Булар *мантиқий боғловчилардир*. Биринчиси — дизъюнкция ёки мантиқий қўшиш белгиси, иккинчиси — конъюнкция ёки мантиқий қўпайтма белгиси, учинчиси — импликация белгиси ва тўртинчиси — инкор белгиси деб аталади.

Учинчи категорияга қавс деб аталадиган $(,)$ символ киритилади.

Мулоҳазалар ҳисобида бошқа символлар йўқ.

Мулоҳазалар ҳисобининг *формуласи* деб мулоҳазалар ҳисоби алфавити символларининг маълум бир кетма-кетлигига айтилади.

Формулаларни белгилаш учун лотин алфавитининг бош ҳарфларидан фойдаланамиз. Бу ҳарфлар мулоҳазалар ҳисобининг символлари қаторига кирмайди. Улар фақатгина формулаларнинг шартли белгилари бўлиб хизмат қилади.

Энди формула тушунчаси таърифини берайлик. Бу тушунча қуйидагича аниқланади:

1) ҳар қандай x, y, z, \dots ўзгарувчиларнинг *исталган бири формуладир*;

2) агар A ва B нинг ҳар бири формула бўлса, u ҳолда $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ ва \bar{A} ҳам формуладир;

3) бошқа ҳеч қандай символлар *сатри формула бўла олмайди*.

Ўзгарувчиларни *элементар формулалар* деб атаймиз.

Мисол. Формула таърифнинг 1- бандига кўра x, y, z, \dots ўзгарувчилар формула бўлади. У вақтда таърифнинг 2- бандига мувофиқ $(x \wedge y), (x \vee y), (x \rightarrow y), \bar{x}$ лар ҳам формулалардир. Худди шу тариқада $(x \vee y), ((x \wedge y) \rightarrow z), ((x \wedge y) \rightarrow (y \rightarrow z))$ ҳам формулалар бўлади.

Қуйидагилар формула бўла олмаслигини тушунтиринг:

$$x\bar{y}, \wedge z, x \vee y, x \rightarrow y, (x \wedge y) \rightarrow \bar{x}.$$

Қисмий формула тушунчасини киритамиз:

1. Элементар формула учун фақат унинг ўзи қисмий формуладир.

2. Агар \bar{A} формула бўлса, у ҳолда шу формуланинг ўзи, A формула ва A формуланинг ҳамма қисмий формулалари унинг қисмий формулалари бўлади.

3. Агар формула $A * B$ кўринишда бўлса (бу ерда ва бундан кейин $*$ ўрнида $\vee, \wedge, \rightarrow$ символларининг исталганини тушунамиз), у ҳолда шу формуланинг ўзи, A ва B формулалар ҳамда A ва B формулаларнинг барча қисмий формулалари $A * B$ формуланинг қисмий формулалари бўлади. Масалан, $((x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \rightarrow y))$ формула учун:

$((x \vee \bar{y}) \rightarrow (\bar{z} \rightarrow y))$ – нолинчи чуқурликдаги қисмий формула;

$(x \vee \bar{y}), (\bar{z} \rightarrow y)$ – биринчи чуқурликдаги қисмий формулалар;

$x, \bar{y}, (\bar{z} \rightarrow y)$ – иккинчи чуқурликдаги қисмий формулалар;

y, \bar{z} – учинчи чуқурликдаги қисмий формулалар;

z – тўртинчи чуқурликдаги қисмий формула бўлади.

Формулаларни ёзишда айрим соддалаштиришларни қабул қиламиз. Худди мулоҳазалар алгебрасидаги каби формулалар ёзувидаги қавсларни тушириб қолдиришга кели-

шамиз. Бу келишувга биноан $((x \vee y) \wedge z)$, $\overline{(x \wedge y)}$, $((x \wedge y) \rightarrow (z \wedge t))$ формулаларни мос равишда $x \vee y \wedge z$, $x \wedge y$, $x \wedge y \rightarrow z \wedge t$ кўри-нишда ёзамиз.

2- §. Иботланувчи формула таърифи. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими).

Келтириб чиқариш қоидалари

☑ *Иботланувчи формула. Аксиома. Келтириб чиқариш қои-даси. Ўрнига қўйиш қоидаси. Хулоса қоидаси. Аксиомалар тизими. Иботлаш.*

Энди мулоҳазалар ҳисобида иботланувчи формулалар синфини ажратамиз. Иботланувчи формулалар формула-лар таърифига ўхшаш характерда таърифланади. Аввал даст-лабки иботланувчи формулалар (аксиомалар), ундан ке-йин эса келтириб чиқариш қоидаси аниқланади. Келтириб чиқариш қоидаси орқали бор иботланувчи формулалардан янги иботланувчи формулалар ҳосил қилинади.

Дастлабки иботланувчи формулалардан келтириб чи-қариш қоидасини қўллаш йўли билан янги иботланувчи формулаларни ҳосил қилиш шу формулаларни *аксиомалар-дан келтириб чиқариш* деб аталади.

2.1. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (ти-зими). Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар тизими II ак-сиомадан иборат бўлиб, булар тўрт гуруҳга бўлинади.

Биринчи гуруҳ аксиомалари:

$$I_1 \quad x \rightarrow (y \rightarrow x).$$

$$I_2 \quad (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)).$$

Иккинчи гуруҳ аксиомалари:

$$II_1 \quad x \wedge y \rightarrow x.$$

$$II_2 \quad x \wedge y \rightarrow y.$$

$$II_3 \quad (z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y)).$$

Учинчи гуруҳ аксиомалари:

$$III_1 \quad x \rightarrow x \vee y.$$

$$III_2 \quad y \rightarrow x \vee y.$$

$$III_3 \quad (x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)).$$

Тўртинчи гуруҳ аксиомалари:

$$IV_1 \quad (x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x}).$$

$$IV_2 \quad x \rightarrow \bar{\bar{x}}.$$

$$IV_3 \quad \bar{\bar{x}} \rightarrow x.$$

2.2. Келтириб чиқариш қондаси.

2.2.1. Ўрнига қўйиш қондаси. Агар A мулоҳазалар ҳисобининг искотланувчи формуласи, x ўзгарувчи, B мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи бўлса, y ҳолда A формула ифодасидаги ҳамма x лар ўрнига B формулани қўйиш натижасида ҳосил қилинган формула ҳам искотланувчи формула бўлади.

A формуладаги x ўзгарувчилар ўрнига B формулани қўйиш операцияси (жараёни)ни *ўрнига қўйиш қондаси* деб айтамыз ва уни қуйидаги символ билан белгилаймиз:

$$\int_x^B (A).$$

Зикр этилган қондага қуйидаги аниқликларни киритамиз:

а) агар A фақат x ўзгарувчидан иборат бўлса, y ҳолда

$$\int_x^B (A) \text{ ўрнига қўйиш } B \text{ формулани беради;}$$

б) агар A формула x дан фарқли y ўзгарувчидан иборат бўлса, y ҳолда $\int_x^B (A)$ ўрнига қўйиш A ни беради;

в) агар A ўрнига қўйиш аниқланган формула бўлса, y ҳолда \bar{A} формуладаги x ўрнига B формулани қўйиш нати-

жасида ўрнига қўйишнинг инкори келиб чиқади, яъни $\int_x^B(\bar{A})$ ўрнига қўйиш $\int_x^B A$ ни беради;

г) агар A_1 ва A_2 формулаларда ўрнига қўйиш аниқланган бўлса, у ҳолда $\int_x^B(A_1 * A_2)$ ўрнига қўйиш $\int_x^B(A_1) * \int_x^B(A_2)$ ни беради.

Агар A исботланувчи формула бўлса, уни $\vdash A$ шаклда ёзишга келишамиз. У ҳолда ўрнига қўйиш қондасини қуйидагича схематик равишда ифодалаш мумкин:

$$\frac{\vdash A}{\int_x^B(\vdash A)}$$

ва уни «агар A исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $\int_x^B(A)$ ҳам исботланувчи формула бўлади» деб ўқилади.

2.2.2. Хулоса қондаси. Агар A ва $A \rightarrow B$ мулоҳазалар ҳисобининг исботланувчи формулалари бўлса, у ҳолда B ҳам исботланувчи формула бўлади. Бу қоида қуйидагича схематик равишда ёзилади:

$$\frac{\vdash A; \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

2.2.3. Исботланувчи формуланинг таърифи.

а) Ҳар қандай аксиома исботланувчи формуладир;
 б) исботланувчи формуладаги x ўзгарувчи ўрнига ихтиёрий B формулани қўйиш натижасида ҳосил бўлган формула исботланувчи формула бўлади;

в) A ва $A \rightarrow B$ исботланувчи формулалардан хулоса қондасини қўллаш натижасида олинган B формула исботланувчи формуладир;

г) мулоҳазалар ҳисобининг бошқа ҳеч қандай формуласи исботланувчи деб саналмайди.

Таъриф. *Исботланувчи формулаларни ҳосил қилиш процесси (жараёни) исбот қилиш (исботлаш) деб аталади.*

1- м и с о л . $\vdash A \rightarrow A$ эканлиги (импликациянинг рефлексивлиги) исботлансин.

Импликациянинг рефлексивлигини исботлаш учун ушбу

$$\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) - I_2$$

аксиомадан фойдаланамиз. Бу ерда $\int_z^x (I_2)$ ўрнига қўйишни бажариш натижасида

$$\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow x)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow x)) \quad (1)$$

келиб чиқади. $\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) - I_2$ аксиома ва (1) формулага хулоса қоидасини қўллаб

$$\vdash (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow x) \quad (2)$$

формулани ҳосил қиламиз. (2) формулага ушбу

$$\int_y^{\bar{x}}$$

ўрнига қўйишни бажариш натижасида

$$\vdash (x \rightarrow \bar{x}) \rightarrow (x \rightarrow x) \quad (3)$$

исботланувчи формулага эга бўламиз. $x \rightarrow \bar{x} - IV_2$ аксиома ва (3) формулага нисбатан хулоса қоидасини қўллаш натижасида

$$\vdash x \rightarrow x \quad (4)$$

исботланувчи формулага келамиз. Ниҳоят, (4) формуладаги x ўзгарувчи ўрнига A формулани қўйсақ,

$$\vdash A \rightarrow A$$

исботланиши керак бўлган формула ҳосил бўлади.

2- мисол. $\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$ эканлигини исботланг.

$(z \rightarrow x) \rightarrow ((z \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow x \wedge y))$ – Π_3 аксиомага нисбатан кетма-кет икки марта ўрнига қўйиш усулини қўллаймиз: аввал x ни \bar{x} га ва кейин y ни \bar{y} га алмаштирамиз. Натижада қўйидаги исботланувчи формулага эга бўламиз:

$$\vdash (z \rightarrow \bar{x}) \rightarrow ((z \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (z \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y})). \quad (5)$$

(5) формулага нисбатан $\int_{x \vee y}^z$ ўрнига қўйишни бажариб, қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vdash ((\overline{x \vee y}) \rightarrow \bar{x}) \rightarrow ((\overline{x \vee y}) \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}). \quad (5.a)$$

Энди

$$\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x}, \quad (6)$$

$$\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{y} \quad (7)$$

формулаларнинг исботланувчи эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $(x \rightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ – IV_1 аксиомага нисбатан

$$\int_y^{x \vee y} (IV_1)$$

ўрнига қўйишни бажарамиз. Натижада

$$\vdash (x \rightarrow x \vee y) \rightarrow (\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x}) \quad (8)$$

формулага эга бўламиз. (8) формула ва $x \rightarrow x \vee y$ – Π_1 аксиомага нисбатан хулоса қоидасини ишлатиб, (6) нинг исботланувчи формула эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Худди шу каби (7) нинг ҳам исботланувчи формула эканлигини кўрсатиш мумкин.

(6) ва (5) формулаларга хулоса қоидасини қўлласак,

$$\vdash (\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{y}) \rightarrow (\overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}) \quad (9)$$

исботланувчи формула келиб чиқади.

(7) ва (9) формулаларга хулоса қондасини қўллаб,

$$\vdash \overline{x \vee y} \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$$

дастлабки формуланинг исботланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

3- §. Келтириб чиқариш қондасининг ҳосилалари

- ☑ *Ҳосилавий қондалар. Бир вақтда ўрнига қўйиш қондаси. Мураккаб хулоса қондаси. Силлогизм қондаси. Контрпозиция қондаси. Икки марталик инкорни тушириш қондаси.*

Хулоса ва ўрнига қўйиш қондалари сингари келтириб чиқариш қондасининг ҳосилалари ҳам янги исботланувчи формулалар ҳосил қилишга имкон яратади.

3.1. Бир вақтда ўрнига қўйиш қондаси.

Таъриф. Агар $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — исботланувчи формула ва B_1, B_2, \dots, B_n мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формулалари бўлса, у ҳолда A формуланинг x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчилари ўрнига бир вақтда мос равишда B_1, B_2, \dots, B_n формулаларни қўйиш натижасида C исботланувчи формулани ҳосил қилиш бир вақтда ўрнига қўйиш қондаси деб аталади.

z_1, z_2, \dots, z_n лар A, B_1, B_2, \dots, B_n формулалардаги бошқа ўзгарувчилардан фарқ қилувчи ўзгарувчилар ва $z_i \neq z_j$ ($i, j = \overline{1, n}$) бўлсин. У ҳолда A формулада n та кетма-кет ўрнига қўйишни бажарамиз: аввал x_1 ўрнига z_1 ни, кейин x_2 ўрнига z_2 ни ва ҳоказо x_n ўрнига z_n ни қўямиз. Натижада қуйидаги исботланувчи формулаларга эга бўламиз: $\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$ ўрнига қўйиш $\vdash A_1$ ни, $\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ ўрнига қўйиш $\vdash A_2$ ни, ..., $\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ ўрнига қўйиш $\vdash A_n$ ни беради.

Бундан кейин A_n формулага нисбатан яна n та кетма-кет ўрнига қўйишни бажарамиз: аввал z_1 ўрнига B_1 ни, кейин z_2 ўрнига B_2 ни ва ҳоказо z_n ўрнига B_n ни қўйиб чиқамиз.

Бунинг натижасида $\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ ўрнига қўйишдан $\vdash C_1$ ни,
 $\vdash \int_{z_2}^{B_2}(C_1)$ ўрнига қўйишдан $\vdash C_2$ ни, ..., $\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ ўрнига
 қўйишдан $\vdash C_n$ ни ҳосил қиламиз. Демак, C_n исботланувчи
 формула A формуладаги x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчилар ўрнига
 бир вақтда мос равишда B_1, B_2, \dots, B_n формулаларни қўйиш
 натижасида ҳосил бўлади.

Бир вақтда ўрнига қўйиш операция (қоида)сини қуйи-
 дагича ифодалаймиз:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{B_1, B_2, \dots, B_n}(A)} \quad (1)$$

3.2. Мураккаб хулоса қоидаси. Бу қоидада

$$\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L) \dots)))$$

қўринишдаги формулаларга нисбатан иккинчи ҳосилавий
 қоида ишлатилади ва уни қуйидаги тасдиқ орқали изоҳлаш
 мумкин.

1-теорема. *Агар A_1, A_2, \dots, A_n лар ва*

$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L) \dots))) \quad (2)$$

*исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда L ҳам исботланувчи
 формула бўлади.*

И с б о т. Теоремани хулоса қоидасини кетма-кет қўллаш
 орқали исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар A_1 ва
 (2) исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда хулоса қоида-
 сига асосан

$$A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L) \dots)) \quad (3)$$

ҳам исботланувчи формула бўлади. A_2 ва (3) исботланувчи формула бўлганлиги учун

$$A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L) \dots) \quad (4)$$

формула ҳам исботланувчи бўлади. Худди шундай муҳокама-ни давом эттириб, охири L нинг исботланувчи формула эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Мураккаб хулоса қоидасини схематик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, \dots, \vdash A_n, \vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots (A_n \rightarrow L) \dots)))}{\vdash L} \quad (5)$$

3.3. Силлогизм қоидаси.

2- теорема. Агар $A \rightarrow B$ ва $B \rightarrow C$ исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда $A \rightarrow C$ формула ҳам исботланувчи бўлади.

И с б о т. Теоремани схематик равишда қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow C}{\vdash A \rightarrow C} \quad (6)$$

$x \rightarrow (y \rightarrow x) - I_1$ ва $x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) - I_2$ аксиомаларга нисбатан қуйидаги

$$\int_{x,y,z}^{A,B,C} (I_2) \quad \text{ва} \quad \int_{x,y}^{B \rightarrow C, A} (I_1)$$

бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаларини қўллаш натижасида ушбу исботланувчи формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)), \quad (7)$$

$$\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)). \quad (8)$$

Теореманинг шартига асосан

$$\vdash A \rightarrow B, \quad (9)$$

$$\vdash B \rightarrow C \quad (10)$$

формулалар исботланувчидир. (10) ва (8) дан хулоса қоида-сига асосан

$$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (11)$$

формулани ҳосил қиламиз. У вақтда (11), (9) ва (7) дан мураккаб хулоса қоидасига асосан $\vdash A \rightarrow C$ эканлиги келиб чиқади.

Агар $A \rightarrow B$ ва $B \rightarrow C$ исботланувчи формулалар бўлса, у ҳолда $A \rightarrow C$ ҳам исботланувчи формула бўлишини *силлогизм қоидаси* деб атаймиз.

3.4. Контрпозиция қоидаси.

3-теорема. Агар $A \rightarrow B$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ ҳам исботланувчи формула, яъни

$$\frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \overline{B} \rightarrow \overline{A}} \quad (12)$$

бўлади.

Исбот. $(x \rightarrow y) \rightarrow (\overline{y} \rightarrow \overline{x}) - IV_1$ аксиомага нисбатан бир вақтда ўрнига қўйиш қоидаси

$$\int_{x,y}^{A,B} (IV_1)$$

ни қўллаб,

$$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \quad (13)$$

исботланувчи формулани ҳосил қиламиз. Теореманинг шартига асосан

$$\vdash A \rightarrow B \quad (14)$$

исботланувчи формуладир. Шунинг учун (14) ва (13) дан хулоса қоидасига асосан $\vdash (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$ исботланувчи формула эканлиги келиб чиқади.

Агар $A \rightarrow B$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ ҳам исботланувчи формула бўлишини *контрпозиция қоидаси* деб атаймиз.

3.5. Икки карралик инкорни тушириш қоидаси.

4-теорема. 1) Агар $A \rightarrow \bar{B}$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $A \rightarrow B$ ҳам исботланувчи бўлади;

2) агар $\bar{A} \rightarrow B$ исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $A \rightarrow B$ формула ҳам исботланувчи, яъни

$$\frac{\vdash A \rightarrow \bar{B}}{\vdash A \rightarrow B} \quad \text{ва} \quad \frac{\vdash \bar{A} \rightarrow B}{\vdash A \rightarrow B} \quad (15)$$

бўлади.

Исбот. $x \rightarrow \bar{x} - IV_2$ ва $\bar{x} \rightarrow x - IV_3$ аксиомаларга нисбатан ушбу

$$\int_x^A (IV_2) \quad \text{ва} \quad \int_x^B (IV_3)$$

ўрнига қўйиш қоидаларини қўллаб,

$$\vdash A \rightarrow \bar{A}, \quad (16)$$

$$\vdash \bar{B} \rightarrow B \quad (17)$$

исботланувчи формулаларни ҳосил қиламиз. Теореманинг 1- ва 2- шартларига асосан

$$\vdash A \rightarrow \bar{B}, \quad (18)$$

$$\vdash \bar{A} \rightarrow B \quad (19)$$

формулалар исботланувчидир.

Агар теореманинг 1- шarti бажарилса, у ҳолда (17) ва (18) формулалардан силлогизм қоидаcига асосан $\vdash A \rightarrow B$ келиб чиқади.

Агар 2- шarti бажарилса, у ҳолда (16) ва (19) формулалардан $\vdash A \rightarrow B$ ни келтириб чиқарамиз.

Агар $A \rightarrow \bar{B}$ ($\bar{A} \rightarrow B$) исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $A \rightarrow B$ ҳам исботланувчи формула бўлишини *икки марталик инкорни тушириш қоидаcи* деб атаймиз.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги ифодаларнинг қайси бири мулоҳазалар ҳисобининг формулалари бўлади:

- 1) $(\bar{p}_1 \wedge \bar{p}_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$;
- 2) $((p_1 \vee p_2) \vee (p_1 p_2)) \rightarrow \bar{p}_3$;
- 3) $(p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3)) \rightarrow p_3$;
- 4) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow \bar{p}_2) \rightarrow p_1)$;
- 5) $(p_1 \wedge (\rightarrow p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow \bar{p}_1))$;
- 6) $(p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3))$;
- 7) $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3))$;
- 8) $((p_1 \rightarrow \bar{p}_2) \rightarrow (\bar{\bar{p}}_1 \vee p_2)) \leftrightarrow (p_1 \vee p_2)$.

2. Қуйидаги формулаларнинг ҳамма қисм формулаларини ёзиб чиқинг:

$$A = x \rightarrow y \wedge (\bar{x} \vee y), \quad B = (x \leftrightarrow y) \vee (\bar{x}y),$$

$$C = (x \leftrightarrow y) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow t), \quad D = xy \vee xz \vee yz.$$

- 1) $x \rightarrow (y \rightarrow x)$;
- 2) $\overline{a \vee b} \rightarrow c$;
- 3) $\overline{a \wedge c \vee b}$;
- 4) $x \rightarrow y \wedge z$;
- 5) $x \vee y z \rightarrow x$;
- 6) $\overline{x \rightarrow y \vee x \wedge y}$;
- 7) $((x \rightarrow x) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (\bar{x} \vee z)$;
- 8) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow \bar{y}) \rightarrow \bar{y})$.

3. $L_1 = (A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$, $L_2 = A \vee B$, $L_3 = A \rightarrow B \vee C$ формулалар учун қуйидаги ўрнига қўйишларнинг натижаларини ёзинг:

- 1) $\int_{A, B}^{B, C} (L_1)$;
- 2) $\int_A^{A \rightarrow B} (L_2)$;
- 3) $\int_{A, C}^{B \rightarrow A \wedge B, B} (L_3)$;
- 4) $\int_{A, B}^{A \wedge B, A \vee B} (L_1)$;
- 5) $\int_{A, B}^{B, A} (L_2)$;
- 6) $\int_{A, B, C}^{A \wedge \bar{A}, C, \bar{A}} (L_3)$.

4. Ўрнига қўйиш қоидасини қўллаб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини исботланг:

$$1) (A \rightarrow B) \wedge B \rightarrow B;$$

$$2) A \wedge B \rightarrow A \wedge B \vee C;$$

$$3) (\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (\bar{A} \vee C \rightarrow B));$$

$$4) \overline{C \vee D} \rightarrow C \vee D;$$

$$5) (A \wedge B \rightarrow (C \rightarrow B \wedge C)) \rightarrow ((A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B \wedge C)).$$

5. Ўрнига қўйиш ва хулоса қоидаларини қўллаб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини аниқланг:

$$1) A \vee A \rightarrow A; \quad 2) A \rightarrow A \wedge A; \quad 3) A \wedge B \rightarrow B \wedge A;$$

$$4) A \vee B \rightarrow B \vee A; \quad 5) (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A); \quad 6) \overline{\overline{A}} \rightarrow \bar{A}.$$

6. Келтириб чиқаришнинг ҳосилавий қоидаларидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини исботланг:

$$1) \bar{A} \vee \bar{B} \rightarrow \overline{A \wedge B}; \quad 2) A \rightarrow R;$$

$$3) (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \vee B); \quad 4) F \rightarrow A;$$

$$5) (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A); \quad 6) A \wedge \bar{A} \rightarrow F;$$

$$7) (A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \rightarrow \bar{A}; \quad 8) \bar{A} \wedge \bar{B} \rightarrow \overline{A \vee B}.$$

7. Келтириб чиқаришнинг ҳосилавий қоидаларини исботланг:

$$1) \frac{\vdash \bar{A}}{\vdash A \wedge B}; \quad 2) \frac{\vdash A}{\vdash A \vee B}; \quad 3) \frac{\vdash \bar{A}}{\vdash A \rightarrow B}; \quad 4) \frac{\vdash B}{\vdash A \rightarrow B};$$

$$5) \frac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}; \quad 6) \frac{\vdash \bar{B}}{\vdash A \wedge B}; \quad 7) \frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash \bar{B}}{\vdash A}; \quad 8) \frac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A \wedge B};$$

$$9) \frac{\vdash \bar{A}, \vdash \bar{B}}{\vdash A \vee B}; \quad 10) \frac{\vdash A, \vdash \bar{B}}{\vdash A \rightarrow B}; \quad 11) \frac{\vdash A \rightarrow \bar{A}}{\vdash \bar{A}}; \quad 12) \frac{\vdash \bar{A} \rightarrow A}{\vdash A};$$

$$13) \frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash \bar{A} \rightarrow B}{\vdash B}; \quad 14) \frac{\vdash A \rightarrow B, \vdash A \rightarrow \bar{B}}{\vdash \bar{A}}.$$



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси. Мантиқий боғловчилар. Символлар. Қисмий формула.
2. Иботланувчи формула таърифи. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими). Келтириб чиқариш қоидалари.
3. Келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари.
4. Бир вақтда ўрнига қўйиш ва мураккаб хулоса қоидалари.
5. Силлогизм, контрпозиция ва икки марталик инкорни тушириш қоидалари.

4- §. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси

Келтириб чиқариш қоидаси. Келтириб чиқариладиган формулалар синфи. Иботланувчи формулалар синфи.

$H = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ чекли формулалар мажмуаси (тўплами) берилган бўлсин. Бу формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш тушунчасини берамиз.

Таъриф. 1) Ҳар қандай $A_i \notin H$ формулалар мажмуаси H дан келтириб чиқариладиган формуладир.

2) Ҳар қандай иботланувчи формула H дан келтириб чиқарилади.

3) C ва $C \rightarrow B$ лар H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган формулалар бўлса, u ҳолда B формула ҳам H дан келтириб чиқарилади.

Бирор B формула H формулалар мажмуасидан келтириб чиқариладиган бўлса, уни символик равишда $H \vdash B$ шаклда ёзамиз.

Агар H бўш тўпلام ёки элементлари фақат иботланувчи формулалардан иборат бўлса, u ҳолда H дан келтириб чиқариладиган формулалар синфи иботланувчи формулалар синфи билан мос келади. Агар формулалар мажмуаси H нинг ҳеч бўлмаганда битта элементи иботланмайдиган

формуладан иборат бўлса, у ҳолда H дан келтириб чиқариладиган формулалар синфи исботланувчи формулалар синфига нисбатан кенгроқ бўлади.

Мисол. $A \vee B$ формула $H = \{A, B\}$ формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилишини исботланг.

Исбот. $A \in H$ ва $B \in H$ бўлганлиги учун формулани келтириб чиқариш қондасига асосан

$$H \vdash A, \quad (1)$$

$$H \vdash B. \quad (2)$$

Π_3 ва I_1 аксиомаларга нисбатан $\int_{x,y,z}^{A,B,A}(\Pi_3)$ ва $\int_{x,y}^{B,A}(I_1)$ ўрнига қўйишларни бажарамиз. Натижада исботланувчи формулалар ҳосил бўлади. Улар формулани келтириб чиқариш қондасига асосан H дан келтирилиб чиқарилади, яъни

$$H \vdash (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B)), \quad (3)$$

$$H \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B) \quad (4)$$

каби бўлади. $A \rightarrow A$ исботланувчи формула эканлиги учун

$$H \vdash A \rightarrow A. \quad (5)$$

(5) ва (3) формулалардан хулоса қондасига асосан

$$H \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B) \quad (6)$$

ни ҳосил қиламиз. Худди шу каби (2) ва (4) формулалардан

$$H \vdash (A \rightarrow B) \quad (7)$$

муносабатга келамиз. (7) ва (6) формулалардан хулоса қондасига асосан

$$H \vdash A \rightarrow A \wedge B \quad (8)$$

келиб чиқади. У ҳолда (1) ва (8) формулалардан

$$H \vdash A \wedge B \quad (9)$$

ни ҳосил қиламиз, яъни $A \wedge B$ формула H формулалар мажмуасидан келиб чиқишини кўрсатдик.

H формулалар мажмуасидан бирорта ихтиёрий формулани келтириб чиқаришда мураккаб хулоса қоидасидан ҳам фойдаланса бўлади. Бу ҳолда (9) муносабатга (5), (7), (1) ва (3) мулоҳазалар орқали келиш мумкин.

5- §. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси. Дедукция теоремаси. Умумлашган дедукция теоремаси

☑ *Исботлаш тушунчаси. Келтириб чиқаришнинг хоссалари. Келтириб чиқаришнинг асосий қоидалари. Дедукция теоремаси. Дедукция умумлашган теоремаси. Конъюнкцияни киритиш қоидаси. Дизъюнкцияни киритиш қоидаси.*

5.1. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси.

Таъриф. Агар B_1, B_2, \dots, B_n чекли формулалар кетма-кетлигининг ҳар қандай ҳади қуйидаги уч шартнинг бирортасини қаноатлантирса, у ҳолда бу кетма-кетлик **H чекли формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган** деб аталади:

- 1) H формулалар мажмуасининг бирорта формуласи;
- 2) исботланувчи формула;
- 3) B_1, B_2, \dots, B_n кетма-кетликнинг исталган иккита олдинма-кейин келадиган элементларидан хулоса қоидасига асосан ҳосил қилинади.

Олдинги параграфдаги мисолда кўрсатилдики, $H = \{A, B\}$ дан қуйидаги формулалар чекли кетма-кетлиги келтирилиб чиқарилади:

$$A, B, (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B)), B \rightarrow (A \rightarrow B),$$

$$A, B, A \rightarrow A, (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \wedge B)), A \rightarrow B, A \rightarrow A \wedge B, A \wedge B.$$

Агар мураккаб хулоса қоидасидан фойдалансак, у ҳолда (исбот) келтириб чиқариш формулалари қуйидагича бўлади:

$$A, B, (A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A \wedge B)),$$

$$B \rightarrow (A \rightarrow B), A \rightarrow A, A \rightarrow B, A \wedge B.$$

Формулани келтириб чиқариш ва формулалар мажмуасидан келтириб чиқариш таърифларига асосан келтириб чиқаришнинг қўйидаги хоссалари ҳосил бўлади:

1) H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган чекли кетма-кетликнинг бошланғич қисми ҳам H дан келтириб чиқариладиган бўлади;

2) агар H дан келтириб чиқарилган кетма-кетликнинг иккита қўшни ҳаллари (элементлари) орасига H дан келтириб чиқарилган бирор бошқа кетма-кетлик қўйилса, у ҳолда ҳосил қилинган янги формулалар кетма-кетлиги ҳам H дан келтириб чиқарилиши мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, масалан, агар $B_1, B_2, \dots, B_i, B_{i+1}, \dots, B_k$ ва C_1, C_2, \dots, C_m лар H дан келтириб чиқарилса, у вақтда келтириб чиқариш таърифига асосан $B_1, B_2, \dots, B_i, C_1, C_2, \dots, C_m, B_{i+1}, \dots, B_k$ ҳам H дан келтириб чиқариладиган бўлади.

3) H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган формулалар кетма-кетлигининг ҳар қандай ҳади H дан келтириб чиқариладиган формуладир.

4) агар $H \subset W$ бўлса, у ҳолда H дан келтириб чиқарилган ҳар қандай формула W нинг ҳам формуласи бўлади.

5) B формула H дан келтириб чиқариладиган формула бўлиши учун H дан келтириб чиқарилган ихтиёрий формулалар кетма-кетлигида бу формуланинг мавжуд бўлиши етарли ва зарурдир.

5.2. Келтириб чиқариш қойдаси. H ва W мулоҳазалар ҳисобининг иккита формулалар мажмуаси бўлсин. H, W орқали бу мажмуаларнинг йиғиндисини (бирлашмасини) белгилаймиз, яъни

$$H, W = H \cup W.$$

Агар W мажмуа битта C формуладан иборат бўлганда ҳам $H \cup \{C\}$ бирлашмани H, C кўринишда ёзамиз.

Энди келтириб чиқаришнинг асосий қоидаларини кўриб ўтамиз.

$$I. \frac{H \vdash A}{H, W \vdash A}.$$

Бу қоида бевосита формулалар мажмуасидан келтириб чиқариш қоидасидан ҳосил бўлади.

$$II. \frac{H, C \vdash A, H \vdash C}{H \vdash A}.$$

Исбот. Қоиданинг шартига асосан H, C формулалар мажмуасидан A формула келтириб чиқарилади. Шунинг учун H, C дан охириги формуласи A бўлган келтириб чиқариш мавжуд:

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, A. \quad (1)$$

Худди шу каби H формулалар мажмуасидан C формулани келтириб чиқарилиши мумкинлигидан H дан кейинги формуласи C бўлган келтириб чиқариш мавжуд:

$$C_1, C_2, \dots, C_m, C. \quad (2)$$

(1) келтириб чиқаришда C формула иштирок этмаган ҳолда, у фақат H формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган кетма-кетликда бўлади. Демак, H дан A формула келтириб чиқарилади.

Агар (1) келтириб чиқаришда бирорта формула C бўлса (масалан формула B_i), у ҳолда B_{i-1} ва B_{i+1} формулалар орасига (2) ни қўямиз. Натижада қуйидаги фақат H дан келтириб чиқаришни оламыз:

$$B_1, B_2, \dots, B_{i-1}, C_1, C_2, \dots, C_m, B_{i+1}, \dots, B_{k-1}, A.$$

Шундай қилиб, H дан A формула келтириб чиқарилади.

$$III. \frac{H, C \vdash A, W \vdash C}{H, W \vdash A}.$$

Исбот. $H, C \vdash A$ бўлганлиги учун I қоидага асосан $H, W, C \vdash A$. Қоиданинг шартига биноан $W \vdash C$, у ҳолда I қоидага кўра $H, W \vdash C$. II қоидадан фойдаланиб $H, W \vdash A$ ни топамиз.

$$\text{IV. } \frac{H \vdash C \rightarrow A}{H, C \vdash A}.$$

Исбот. $C \rightarrow A$ формула H формулалар мажмуасидан келтириб чиқариладиганлиги сабабли H нинг шундай келтириб чиқариши мавжудки, унинг охирида $C \rightarrow A$ формула туради:

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, C \rightarrow A. \quad (3)$$

Энди H формулалар мажмуасига C формулани қўшиб, H, C формулалар мажмуасини ҳосил қиламиз. (3) келтириб чиқаришга C формулани қўшиб, ушбу келтириб чиқаришга эга бўламиз:

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, C \rightarrow A, C. \quad (4)$$

Ўз навбатида бу H, C формулалар мажмуасининг келтириб чиқариши бўлади.

(4) нинг охирига A формулани ёзиш мумкин, чунки у хулоса қоидасига асосан $C \rightarrow A$ ва C формулалардан ҳосил қилинади. Демак, охириги формуласи A бўлган H, C формулалар мажмуасининг

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, C \rightarrow A, C, A$$

келтириб чиқаришига эга бўламиз, бу ердан $H, C \vdash A$ эканлиги келиб чиқади.

$$\text{V. Дедукция теоремаси: } \frac{H, C \vdash A}{H \vdash C \rightarrow A}.$$

Аввал H, C формулалар мажмуасининг ҳар қандай B_1, B_2, \dots, B_k келтириб чиқариши учун $H \vdash C \rightarrow B_k$ нинг тўғрилигини математик индукция методидан фойдаланиб исбот қиламиз.

1. $k = 1$ ҳол учун масала тўғри. Ҳақиқатан ҳам, агар B_1 формула H, C нинг келтириб чиқариши бўлса, у вақтда у ҳол бўлиши мумкин:

- а) $B_1 \in H$;
- б) B_1 — исботланувчи формула,
- в) B_1 формула C нинг ўзидир.

а) ва б) ҳоллар учун H дан қуйидаги келтириб чиқариш-ни ёзиш мумкин: $B_1, B_1 \rightarrow (C \rightarrow B_1), C \rightarrow B_1$. Демак, $H \vdash C \rightarrow B_1$.

в) ҳол учун $H \vdash C \rightarrow C$ эканлигини исботлаш керак.

Аммо $C \rightarrow C$ исботланувчи формуладир. Шунинг учун уни ҳар қандай мажмуадан келтириб чиқариш мумкин.

2. Энди исталган i ($i < k$) чуқурликдаги ҳар қандай келтириб чиқариш учун масала тўғри бўлсин деб ҳисоблаб, унинг k чуқурликдаги келтириб чиқариш учун тўғрилигини исбот қиламиз.

B_1, B_2, \dots, B_k лар H, C мажмуанинг келтириб чиқариши бўлсин, бу ерда $k > 1$. Шунинг учун ҳам B_k формулага нисбатан тўрт ҳол юз бериши мумкин:

а) $B_k \in H$;

б) B_k — исботланувчи формула;

в) B_k формула C нинг ўзидир,

г) B_k формула хулоса қоидасига асосан келтириб чиқаришдаги иккита ундан олдин кетма-кет келадиган формулалардан ҳосил қилинади.

а), б), в) ҳолатлар учун исбот тўлиқ равишда $k = 1$ ҳолдаги исботга мос келади.

Шунинг учун г) ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда B_k формула B_i ва B_j формулалардан ҳосил қилиниб ($i < k, j > k$), B_j формула $B_i \rightarrow B_k$ кўринишни олади ва қуйидаги тасдиқлар тўғри бўлади:

$$H \vdash C \rightarrow B_i, \quad (5)$$

$$H \vdash C \rightarrow (B_i \rightarrow B_k). \quad (6)$$

I_2 аксиомада

$$\int_{x,y,z}^{C, B_i, B_k} (I_2)$$

ўрнига қўйишни бажариб, қуйидаги исботланувчи формулага эга бўламиз:

$$\vdash (C, (B_i \rightarrow B_k)) \rightarrow ((C \rightarrow B_i) \rightarrow (C \rightarrow B_k)). \quad (7)$$

(6), (5) ва (7) ифодалар H дан келтириб чиқариладиган формулалардир. Уларга мураккаб хулоса қоидасини қўллаб, $H \vdash C \rightarrow B_k$ ни ҳосил қиламиз.

Энди умумий, яъни $H, C \vdash A$ бўлган ҳолни кўрайлик. Бу ҳолда H, C нинг $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, A$ келтириб чиқариши мавжуд бўлади. Демак, юқорида исбот қилганимизга асосан $H \vdash C \rightarrow A$ тасдиқ тўғридир.

Дедукция теоремасидан муҳим аҳамиятга эга бўлган куйидаги натижа келиб чиқади.

Умумлашган дедукция теоремаси:

$$\frac{\{C_1, C_1, \dots, C_k\} \vdash A}{\vdash C_1 \rightarrow (C_2 (C_3 \rightarrow \dots (C_k \rightarrow A) \dots))}.$$

Исбот. $H_k = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ бўлсин. Теорема шартига асосан $H_k \vdash A$ ёки $H_{k-1}, C_k \vdash A$ нинг тўғрилиги, $H_{k-1} = H_{k-2}, C_{k-1}$ бўлганлиги учун эса

$$H_{k-2}, C_{k-1} \vdash C_k \rightarrow A$$

тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқади. Бу ифодага нисбатан яна дедукция теоремасини қўллаб,

$$H_{k-2} \vdash C_{k-1} \rightarrow (C_k \rightarrow A)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу процедурани k марта такрорлаб, ушбу тасдиққа келамиз:

$$H_0 = \emptyset \vdash C_1 \rightarrow (C_2 \rightarrow (C_3 \rightarrow \dots (C_k \rightarrow A) \dots)).$$

Аmmo бўш тўпламдан фақатгина исботланувчи формулалар келтириб чиқариш мумкин, яъни

$$\vdash C_1 \rightarrow (C_2 \rightarrow (C_3 \rightarrow \dots (C_k \rightarrow A) \dots)).$$

$k = 1$ бўлган хусусий ҳолда

$$\frac{C \vdash A}{\vdash C \rightarrow A}$$

га эга бўламиз.

VI. Конъюнкцияни киритиш қондаси:

$$\frac{H \vdash A, H \vdash B}{H \vdash A \wedge B}.$$

И с б о т. Берилганига кўра

$$H \vdash A, \quad (8)$$

$$H \vdash B. \quad (9)$$

{ A, B } формулалар мажмуасидан $A \wedge B$ формулани келтириб чиқариш мумкинлиги, яъни

$$\{A, B\} \vdash A \wedge B \quad (10)$$

эканлигини кўрсатган эдик. Келтириб чиқаришнинг I қондасига асосан

$$H, A, B \vdash A \wedge B, \quad (11)$$

$$H, A \vdash B. \quad (12)$$

Келтириб чиқаришнинг II қондасидан фойдаланиб, (11) ва (12) муносабатлардан

$$H, A \vdash A \wedge B \quad (13)$$

ҳамда (8) ва (13) дан

$$H \vdash A \wedge B$$

ларни ҳосил қиламиз.

VII. Дизъюнкцияни киритиш қондаси:

$$\frac{H, A \vdash C; H, B \vdash C}{H, A \vee B \vdash C}.$$

И с б о т. $H, A \vdash C; H, B \vdash C$ шартлардан дедукция теоремасига асосан

$$H \vdash A \rightarrow C, \quad (14)$$

$$H \vdash B \rightarrow C \quad (15)$$

формулалар келиб чиқади.

III аксиома H формулалар мажмуасидан исботланувчи формула сифатида келтириб чиқарилади, яъни

$$H \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)). \quad (16)$$

(14), (15) ва (16) формулаларга мураккаб хулоса қоида-
сини қўллаб

$$H \vdash A \vee B \rightarrow C \quad (17)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди келтириб чиқаришнинг IV қоидасини қўллаб

$$H, A \vee B \vdash C$$

формулага эга бўламиз.

6- §. Айрим мантиқ қонунларининг исботи

- ☑ *Мантиқ қонунлари. Шартларни ўрин алмаштириш қонуни. Шартларни қўшиш қонуни. Шартларни ажратиш қонуни.*

Дедукция теоремаси бир қатор мантиқ қонунларини исботлашга ёрдам беради.

I. Асосларни (шартларни) ўрин алмаштириш қонуни:

$$\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z)). \quad (1)$$

И с б о т. $H = \{x \rightarrow (y \rightarrow z), y, x\}$ формулалар мажмуасидан $x \rightarrow (y \rightarrow z)$, y , x , $y \rightarrow z$, z келтириб чиқариш келиб чиқади. Демак, H дан z формула келиб чиқади. У ҳолда умумлашган дедукция теоремасига асосан (1) формула исботланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

Асосларни ўрин алмаштириш қонунидан исботланувчи формулалар учун ушбу асосларни ўрин алмаштириш қоидаси

$$\frac{\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z))}{\vdash (y \rightarrow (x \rightarrow z))}$$

келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vdash x \rightarrow (y \rightarrow z) \quad (2)$$

бўлса, у ҳолда (1) ва (2) формулалардан хулоса қоидасига асосан

$$\vdash y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

формула ҳосил қилинади.

II. Асосларни қўшиш қонуни:

$$\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow z). \quad (3)$$

Исбот. $H = \{x \rightarrow (y \rightarrow z), x \wedge y\}$ формулалар мажмуасидан $x \rightarrow (y \rightarrow z)$, $x \wedge y$, $x \wedge y \rightarrow x$, $x \wedge y \rightarrow y$, x , y , $y \rightarrow z$, z келтириб чиқариш олинади. Бу эса H дан z формула келиб чиқади демакдир. Бу ўз навбатида умумлашган дедукция теоремасига асосан (3) формуланинг исботланувчи эканлигини кўрсатади.

Асосларни қўшиш қонунидан исботланувчи формулалар учун асосларни қўшиш қоидаси

$$\frac{\vdash (x \rightarrow (y \rightarrow z))}{\vdash x \wedge y \rightarrow z}$$

келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vdash x \rightarrow (y \rightarrow z) \quad (4)$$

бўлса, y ҳолда (3) ва (4) формулалардан хулоса қоидаларига асосан $\vdash x \wedge y \rightarrow z$ эканлигини ҳосил қиламиз.

III. Асосларни ажратиш қонуни:

$$\vdash (x \wedge y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)). \quad (5)$$

Исбот. $H = \{x, y, x \wedge y \rightarrow z\}$ формулалар мажмуасидан келиб чиқадиган x , y , $x \wedge y \rightarrow z$, $x \wedge y$, z келтириб чиқаришни қараймиз. Бунда H формулалар мажмуасидан z формуланинг келиб чиқиши кўриниб турибди. У ҳолда умумлашган дедукция теоремасига асосан (5) формула исботланувчи эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Асосларни ажратиш қонунидан исботланувчи формулалар учун асосларни ажратиш қоидаси

$$\frac{\vdash x \wedge y \rightarrow z}{\vdash x \rightarrow (y \rightarrow z)}$$

ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vdash x \wedge y \rightarrow z \quad (6)$$

бўлса, y ҳолда (5) ва (6) формулалардан хулоса қоидасига асосан $\vdash x \rightarrow (y \rightarrow z)$ эканлиги келиб чиқади.

IV. $\vdash x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow y)$.

Исбот. I_1 ва IV_1 аксиомаларда қуйидаги

$$\int_y^{\bar{y}}(I_1) \quad \text{ва} \quad \int_{x,y}^{\bar{y},x}(IV_1)$$

ўрнига қўйишларни бажариш натижасида

$$\vdash x \rightarrow (\bar{y} \rightarrow x), \quad (7)$$

$$\vdash (\bar{y} \rightarrow x) \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{\bar{y}}) \quad (8)$$

исботланувчи формулаларни ҳосил қиламиз. (7) ва (8) формулалардан силлогизм қоидасига асосан

$$\vdash x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{y})$$

формула келиб чиқади. Асосларни бирлаштириш қонунидан фойдаланиб,

$$\vdash x \wedge \bar{x} \rightarrow \bar{\bar{y}}$$

формулани ҳосил қиламиз. Икки карралик инкорни тушириш қоидасидан фойдаланиб,

$$\vdash x \wedge \bar{x} \rightarrow y$$

формулага эга бўламиз. Бу ердан асосларни ажратиш қонунини қўллаб, исботланиши керак бўлган (5) формулани келтириб чиқарамиз.

V. $\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow \overline{x \vee y}$.

Исбот. III_3 аксиомада z нинг ўрнига $\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}$ ни қўямиз:

$$\vdash (x \rightarrow \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \rightarrow ((y \rightarrow \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}) \rightarrow (x \vee y \rightarrow \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}})). \quad (9)$$

II_1 ва II_2 аксиомалардан

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow \bar{x}, \quad (10)$$

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow \bar{y} \quad (11)$$

формулалар келиб чиқади. (10) ва (11) формулаларга контрпозиция қоидасини қўллаб, ушбу формулаларни ҳосил қиламиз:

$$\vdash \bar{\bar{x}} \rightarrow \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}, \quad (12)$$

$$\vdash \bar{y} \rightarrow \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}. \quad (13)$$

Бу формулаларга икки каррали инкорни тушириш қоидасини қўллаб, қуйидаги формулаларни келтириб чиқарамиз:

$$\vdash x \rightarrow \overline{\overline{x \wedge y}}, \quad (14)$$

$$\vdash y \rightarrow \overline{\overline{x \wedge y}}. \quad (15)$$

Энди (9), (14) ва (15) формулаларга мураккаб хулоса қоидасини қўллаб,

$$\vdash x \vee y \rightarrow \overline{\overline{x \wedge y}} \quad (16)$$

формулага эга бўламиз.

Нихоят, (16) формулага аввал контрпозиция қоидасини ва сўнгра икки мартали инкорни тушириш қоидасини қўллаб, исботланиши лозим бўлган

$$\vdash \overline{\overline{x \wedge y}} \rightarrow \overline{\overline{x \vee y}}$$

формулани ҳосил қиламиз.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. H формулалар мажмуасидан кўрсатилган формулаларни келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатинг:

$$1) H = \{A\} \vdash B \rightarrow A; \quad 2) H = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C;$$

$$3) H = \{A \rightarrow C\} \vdash \overline{\overline{C}} \rightarrow \overline{\overline{A}}; \quad 4) H = \{A \rightarrow B, \overline{\overline{B}}\} \vdash A;$$

$$5) H = \{A, \overline{\overline{A}} \rightarrow B\} \vdash B; \quad 6) H = \{A \rightarrow B\} \vdash A \wedge C \rightarrow B \wedge C;$$

$$7) H = \{A \rightarrow B\} \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B);$$

$$8) H = \{A \rightarrow B\} \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C);$$

$$9) H = \{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C);$$

$$10) H = \{A \rightarrow B\} \vdash A \vee C \rightarrow B \vee C.$$

2. Умумлашган дедукция теоремасидан фойдаланиб, формулаларнинг исботланувчи эканлигини исботланг:

$$1) (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z));$$

$$2) (A \rightarrow B) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee C);$$

$$3) (A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)).$$

3. Мантиқ қонунларининг тўғрилигини кўрсатинг:
 1) $x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow y)$; 2) $x \vee \bar{x}$; 3) $\bar{x} \wedge \bar{y} \rightarrow \overline{x \vee y}$.
4. Шартларни ўрин алмаштириш, шартларни қўшиш ва шартларни ажратиш қоидаларидан фойдаланиб, берилганларнинг тўғрилигини исботланг:
 1) $\vdash x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y)$; 2) $\vdash (A \rightarrow B) \wedge \bar{B} \rightarrow \bar{A}$; 3) $\vdash \bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

- Келтириб чиқариладиган ва исботланувчи формулалар синфи.
- Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси. Келтириб чиқаришнинг хоссалари ва асосий қоидалари.
- Дедукция теоремаси ва умумлашган дедукция теоремаси.
- Конъюнкцияни ва дизъюнкцияни киритиш қоидалари.
- Мантиқ қонунлари. Шартларни ўрин алмаштириш, қўшиш ва ажратиш қонунлари.

7- §. Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби орасидаги муносабатлар

- Мулоҳазалар ҳисоби формуласининг қиймати. Мулоҳазалар ҳисобидаги формулалар билан мулоҳазалар алгебрасидаги формулалар орасидаги муносабатлар. Умумқийматли формула. Айнан чин формула. Келтириб чиқариш ҳақидаги теорема.*

Мулоҳазалар ҳисоби формулаларини худди мулоҳазалар алгебраси формулалари сифатида қараш мумкин. Бунинг учун мулоҳазалар ҳисоби ўзгарувчиларига мулоҳазалар алгебраси ўзгарувчилари сингари қараймиз, яъни ўзгарувчилар чин ёки ёлгон (1 ёки 0) қиймат олади деб ҳисоблаймиз.

\wedge , \vee , \rightarrow ва $-$ амалларини мулоҳазалар алгебрасидагидек аниқлаймиз.

Мулоҳазалар ҳисобининг ҳар бир формуласи, ўзгарувчилар унинг ифодасига қандай киришидан қатъи назар, 1 ёки 0 қиймат қабул қилади. Унинг қиймати мулоҳазалар алгебрасидаги қоидалар бўйича ҳисобланади.

Мулоҳазалар ҳисоби формуласининг қиймати тушунчасини аниқлайлик.

A – мулоҳазалар ҳисоби формуласи, x_1, x_2, \dots, x_n лар эса A формула ифодасига кирувчи ўзгарувчилар ($x_i \neq x_j$) бўлсин. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ лар орқали мос равишда x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчиларнинг қийматларини белгилаймиз, $\alpha_j \in E_2 = \{0, 1\}$. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ вектор 2^n та қийматлар сатрига эга.

Ўзгарувчиларнинг битта қийматлар сатри учун A формуланинг қиймати $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A)$ ни қуйидагича аниқлаймиз:

1. A формуланинг энг катта узунликдаги қисмий формуласи x_i бўлганда, $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x_i) = \alpha_i$ бўлади.

2. Агар $k + 1$ узунликдаги ҳамма қисмий формулалар аниқланган бўлса, у ҳолда $A_i \wedge A_j, A_i \vee A_j, A_i \rightarrow A_j, \bar{A}_i$ амалларнинг бажарилиши натижасида олинган k узунликдаги қисмий формулалар қуйидаги қийматларга эга бўлади:

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i \wedge A_j) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i) \wedge R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i \vee A_j) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i) \vee R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i \rightarrow A_j) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i) \rightarrow R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(\bar{A}_i) = \overline{R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A_i)}.$$

Масалан, $x_1 \vee \bar{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}$ формула x_1, x_2, x_3, x_4 ўзгарувчиларнинг $(0, 1, 1, 0)$ қийматлар сатрида $R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) = 1$ қийматга эга.

Ҳақиқатан ҳам, бу формула қуйидаги қисмий формулаларга эга:

$x_1 \vee \bar{x}_4, \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}$ – биринчи узунликдаги қисмий формулалар;

$x_1 \vee \bar{x}_4, x_2 \wedge \bar{x}_3$ – иккинчи узунликдаги қисмий формулалар;

x_4, x_2, \bar{x}_3 – учинчи узунликдаги қисмий формулалар;

x_3 – тўртинчи узунликдаги қисмий формула.

$$\begin{aligned}
\text{Бу ердан } R_{0110}(x_3) &= 1, \quad R_{0110}(\bar{x}_3) = \overline{R_{0110}(x_3)} = 0, \\
R_{0110}(x_2) &= 1, \quad R_{0110}(x_4) = 0, \\
R_{0110}(x_2 \wedge \bar{x}_3) &= R_{0110}(x_2) \wedge R_{0110}(\bar{x}_3) = 0, \\
R_{0110}(\bar{x}_4) &= \overline{R_{0110}(x_4)} = 1, \quad R_{0110}(x_1) = 0, \\
R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4) &= R_{0110}(x_1) \vee R_{0110}(\bar{x}_4) = 1, \\
R_{0110}(\overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) &= \overline{R_{0110}(x_2 \wedge \bar{x}_3)} = 1, \\
R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) &= \\
= R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) &= 1
\end{aligned}$$

эканлигини топамиз.

Энди мулоҳазалар ҳисоби билан мулоҳазалар алгебраси орасидаги муносабатларни аниқловчи теоремаларга тўхталиб ўтайлик.

1-теорема. Мулоҳазалар ҳисобидаги ҳар бир исботланувчи формула мулоҳазалар алгебрасида айнан чин (тавтология, умумқийматли) формула бўлади.

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун қуйидаги учта ҳолни кўриб чиқишга тўғри келади:

- 1) мулоҳазалар ҳисобидаги ҳар бир аксиома мулоҳазалар алгебрасидаги айнан чин формуладир;
- 2) айнан чин формулаларга ўрнига қўйиш қоидасини қўллаш натижасида ҳосил қилинган формулалар яна айнан чин формулалар бўлади;
- 3) айнан чин формулаларга хулоса қоидасини қўллаш натижасида ҳосил қилинган формулалар яна айнан чин формулалар бўлади.

1-ҳолнинг исботи. Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг айнан чинлигини исботлаш учун чинлик жадвалдан фойдаланамиз:

а) ифодасида битта ўзгарувчиси бор аксиомалар:

x	IV_2	IV_3
1	1	1
0	1	1

б) ифодасида иккита ўзгарувчиси бор аксиомалар:

x	y	I_1	II_1	II_2	III_1	III_2	IV_1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

в) ифодасида учта ўзгарувчиси бор аксиомалар:

x	y	z	I_2	II_3	III_3
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

2-ҳолнинг исботи. Аввал қуйидаги леммани исбот қиламиз.

Лемма. A ва B формулаларнинг ифодасига кирувчи ҳамма ўзгарувчилар x_1, x_2, \dots, x_n , x ва бу ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатри эса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, α бўлсин. Агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha}(B) = \beta$

бўлса, y ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \left(\int_x^B (A) \right) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \beta(A)$ бўлади.

И с б о т. Лемманинг исботини, формуланинг тузилишини ҳисобга олган ҳолда, индукция методи билан амалга оширамиз.

а) A формула x дан фарқ қилувчи x_i ўзгарувчи бўлсин. У ҳолда

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} (x_i) \alpha_i, \int_x^B (x_i) = x_i ;$$

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \left(\int_x^B (A) \right) = \alpha_i, \quad R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \beta(A) = \alpha_i,$$

яъни лемманинг тасдиғи тўғри бўлади.

б) A формула, x ўзгарувчи бўлсин. У ҳолда $\int_x^B (A)$ ўрнига қўйиш B ни беради ва

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \left(\int_x^B (A) \right) = \alpha_i, \quad R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} (B) = \beta$$

ни оламиз, яъни лемманинг тасдиғи яна тўғри бўлади.

в) $A = A_1 * A_2$ ҳамда A_1 ва A_2 формулалар учун лемманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда A формула учун лемма тасдиғининг тўғрилиги қуйидаги тенгликлардан келиб чиқади:

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \left(\int_x^B (A) \right) &= R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \left(\int_x^B (A_1 * A_2) \right) = \\ &= R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \left(\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2) \right) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \int_x^B (A_1) * R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \int_x^B (A_2) = \\ &= R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \beta(A_1) * R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \beta(A_2) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \beta(A_1 * A_2) = R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha} \beta(A). \end{aligned}$$

$A = \bar{A}_1$ бўлган ҳол учун ҳам лемманинг тасдиғи юқоридегидек исботланади. Энди 2- ҳолнинг исботига ўтамиз.

Лемма. A – берилган формула, x – ўзгарувчи, B – мулоҳазалар ҳисобининг исталган формуласи бўлсин. Агар A айнан чин формула бўлса, у ҳолда $\int_x^B (A)$ формула ҳам айнан чин формула бўлади.

Исбот. x_1, x_2, \dots, x_n лар A ва B формулалар ифодасига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин. Ўзгарувчиларнинг ҳамма 2^{n+1} та $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha)$ қийматлар сатрида $\int_x^B(A)$ формула чин қиймат қабул қилишини кўрсатиш лозим. $\int_x^B(A)$ формула айнан чин формула эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда шундай $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \alpha^0)$ қийматлар сатри топилиб,

$$R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0 \alpha^0} \left(\int_x^B(A) \right) = 0$$

бўлади. Бундан ўз навбатида лемма шартига асосан $R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0 \alpha^0} \beta(A) = 0$ эканлигини топамиз. Аммо бу A нинг айнан чин формула эканлигига зиддир. Демак, ҳамма қийматлар сатрида $\int_x^B(A)$ формула чин қиймат қабул қилади ва у айнан чиндир.

3-ҳолнинг исботи. Агар C ва $C \rightarrow A$ формулалар айнан чин бўлса, у ҳолда A ҳам айнан чин формула бўлади.

Исбот. x_1, x_2, \dots, x_n лар C ва A формулалар ифодасига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин. A – айнан чин бўлмаган формула деб фараз қиламиз. У ҳолда ўзгарувчиларнинг шундай $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0)$ қийматлар сатри мавжуд бўладики, $R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0}(A) = 0$ бўлади. Бу ердан $R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0}(C \rightarrow A) = R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0}(C) \rightarrow R_{\alpha_1^0 \alpha_2^0 \dots \alpha_n^0}(A) = 1 \rightarrow 0 = 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу натижа $C \rightarrow A$ формуланинг айнан чин эканлигига зиддир. Бу қарама-қаршилик A айнан чин формула эканлигини исботлайди.

2-теорема (келтириб чиқариш ҳақида). A – мулоҳазалар ҳисобининг бирор формуласи; x_1, x_2, \dots, x_n – шу A формула ифодасига кирувчи ўзгарувчилар ва $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – ўзгарувчиларнинг ихтиёрий қийматлар сатри бўлсин. N орқали чекли формулалар мажмуасини белгилаймиз. Агар

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, & \text{агар } \alpha_i = 1 \text{ бўлса,} \\ \bar{x}_i, & \text{агар } \alpha_i = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

у ҳолда $H = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}\}$ формулалар мажмуаси учун:

1) $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A) = 1$ бўлган ҳолда $H \vdash A$;

2) $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A) = 0$ бўлган ҳолда $H \vdash \bar{A}$ бўлади.

И с б о т. Теореманинг исботини формула тузилишига қараб индукция методи билан олиб борамиз.

1. A формула x_i ўзгарувчи бўлсин:

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 1$ бўлса, у ҳолда $x_i \vdash x_i$ ёки $x_i^{\alpha_i} \vdash x_i$, яъни $x_i^{\alpha_i} \vdash A$. Демак, $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(x_i) = \alpha_i = 0$ бўлса, у ҳолда $\bar{x}_i \vdash \bar{x}_i$ ёки $x_i^{\alpha_i} \vdash \bar{x}_i$, яъни $x_i^{\alpha_i} \vdash \bar{A}$. Демак, $H \vdash \bar{A}$.

2. Энди фараз қиламизки, B_1 ва B_2 формулалар учун теорема тўғри деб қаралган ҳолда A формула қуйидаги тўрт кўринишнинг бири бўлсин:

I. $B_1 \wedge B_2$; II. $B_1 \vee B_2$; III. $B_1 \rightarrow B_2$; IV. \bar{B}_1 .

Ҳар бир ҳолни алоҳида кўриб ўтамиз.

I. A формула $B_1 \wedge B_2$ кўринишга эга:

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1 \wedge B_2) = 1$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 1$ ва $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 1$ келиб чиқади. Бундан қилинган фаразимишга кўра $H \vdash B_1$ ва $H \vdash B_2$. Бу ердан ўз навбатида конъюнкцияни киритиш қоидасига асосан $H \vdash B_1 \wedge B_2$, яъни $H \vdash A$ ҳосил бўлади;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1 \wedge B_2) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$ ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 0$ бўлади. Масалан, $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$ дейлик, у ҳолда фаразимишга кўра

$$H \vdash \bar{B}_1. \quad (1)$$

II аксиомага кўра $H \vdash B_1 \wedge B_2 \rightarrow B_1$. Бу ердан контрпозиция қоидасига асосан

$$\vdash \overline{B_1} \rightarrow \overline{B_1 \wedge B_2} \quad (2)$$

келиб чиқади. (1) ва (2) формулалардан хулоса қоидасига биноан $H \vdash \overline{B_1 \wedge B_2}$ ни ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash \overline{A}$.

II. A формула $B_1 \vee B_2$ кўринишга эга бўлсин:

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 1$ бўлса, у ҳолда ҳеч бўлмаганда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 1$ ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 1$ бўлади. $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 1$ бўлсин, у ҳолда фаразимизга кўра

$$H \vdash B_1. \quad (3)$$

III₃ аксиомага асосан эса

$$\vdash B_1 \rightarrow B_1 \vee B_2 \quad (4)$$

келиб чиқади. (3) ва (4) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash B_1 \vee B_2$ ни ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1 \vee B_2) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$ ва $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 0$ бўлади. Бу ердан $H \vdash \overline{B_1}$ ва $H \vdash \overline{B_2}$ келиб чиқади. Уз навбатида конъюнкцияни киритиш қоидасига асосан

$$H \vdash \overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \quad (5)$$

га келинади. Исботланувчи формуладан фойдаланиб,

$$\vdash \overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \rightarrow \overline{B_1 \vee B_2} \quad (6)$$

ни оламиз. (5) ва (6) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash \overline{B_1 \vee B_2}$ ни ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash \overline{A}$.

III. A формула $B_1 \rightarrow B_2$ кўринишда бўлсин.

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1 \rightarrow B_2) = 1$ бўлса, ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$, ёки $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 1$ бўлади. Масалан, $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$ бўлса, у ҳолда

$$H \vdash \overline{B_1} \quad (7)$$

ни ҳосил қиламиз.

Исботланувчи формуладан фойдаланиб $\vdash B_1 \rightarrow (\bar{B}_1 \rightarrow B_2)$ формулани топамиз. Бу формуладан асосларнинг ўрин алмаштириш қоидасига асосан

$$\vdash \bar{B}_1 \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2) \quad (8)$$

формулани ҳосил қиламиз. (7) ва (8) формулалардан хулоса қоидасига биноан $H \vdash B_1 \rightarrow B_2$ формулани ёзамиз, яъни $H \rightarrow A$.

Агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 1$ бўлса, у ҳолда

$$H \vdash B_2. \quad (9)$$

I_1 аксиомадан фойдаланиб,

$$\vdash B_2 \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2) \quad (10)$$

формулани келтириб чиқарамиз. (9) ва (10) формулалардан хулоса қоидасига кўра $H \vdash B_1 \rightarrow B_2$ келиб чиқади, яъни $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1 \rightarrow B_2) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 1$ ва $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_2) = 0$ бўлади. Бу ердан

$$H \vdash B_1, \quad (11)$$

$$H \vdash \bar{B}_2 \quad (12)$$

эканлиги келиб чиқади. Исботланувчи формула таърифига асосан

$$\vdash (B_1 \rightarrow B_2) \rightarrow (B_1 \rightarrow B_2).$$

Бу формуладан асосларнинг ўрин алмаштириш қоидасига кўра

$$\vdash B_1 \rightarrow ((B_1 \rightarrow B_2) \rightarrow B_2) \quad (13)$$

формулани келтириб чиқарамиз. (11) ва (13) формулалардан хулоса қоидасига биноан

$$H \vdash ((B_1 \rightarrow B_2) \rightarrow B_2) \quad (14)$$

ни ҳосил қиламиз, ўз навбатида ундан контрпозиция қоида-сини қўллаб

$$H \vdash \overline{B_2} \rightarrow (\overline{B_1} \rightarrow B_2) \quad (15)$$

формулани келтириб чиқарамиз. (12) ва (15) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash (\overline{B_1} \rightarrow B_2)$ формулага эга бўламиз, яъни $H \vdash \overline{A}$.

IV. A формула $\overline{B_1}$ кўринишга эга бўлсин:

а) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(\overline{B_1}) = 1$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 0$ бўлади. Демак, $H \vdash \overline{B_1}$, яъни $H \vdash A$;

б) агар $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(\overline{B_1}) = 0$ бўлса, у ҳолда $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(B_1) = 1$ бўлади ва бундан

$$H \vdash B_1 \quad (16)$$

келиб чиқади. IV_2 аксиомадан фойдаланиб

$$H \vdash B_1 \rightarrow \overline{\overline{B_1}} \quad (17)$$

формулани ёзамиз. (16) ва (17) формулалардан хулоса қоидасига асосан $H \vdash \overline{\overline{B_1}}$ ни, яъни $H \vdash \overline{A_1}$ ни ҳосил қиламиз.

3-теорема. Мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир айнан чин формуласи мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи формула бўлади.

И с б о т. A формула теорема шартига асосан айнан чин формула бўлганлиги учун $R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}(A) = 1$. Бундан 2-теоремага асосан

$$H_n \vdash A \quad (18)$$

келиб чиқади, бу ерда $H_n = \{x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}\}$.

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ қийматлар сатрларининг сони 2^n тага тенг. Шунинг учун (18) формула ҳамма 2^n та қийматлар сатрида бажарилади.

Агар $H_{n-1} = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$ бўлса, у ҳолда, равшанки, $H_{n-1}, x_n \vdash A$ ва $H_{n-1}, \overline{x_n} \vdash A$ бўлади. Дизъюнкцияни кириштириш қоидасига асосан бу ҳолда $H_{n-1}, x_n \vee \overline{x_n} \vdash A$ бўлади. Аммо

$x_n \vee \bar{x}_n$ формула исботланувчи формула бўлганлиги учун уни H_{n-1} , $x_n \vee \bar{x}_n$ формулалар мажмуасидан олиб ташлаш мумкин. Демак, $H_{n-1} \vdash A$.

Худди шу каби $H_{n-2} = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\}$, ..., $H_2 = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}\}$, $H_1 = \{x_1^{\alpha_1}\}$ формулалар мажмуалари учун кетма-кет $H_{n-1} \vdash A$, $H_{n-3} \vdash A$, ..., $H_{n-2} \vdash A$, $H_1 \vdash A$ эканлигини исботлаш мумкин. Маълумки, $H_1 = \{x_1^{\alpha_1}\} \vdash A$ муносабат $\alpha_1 = 1$ ва $\alpha_1 = 0$ ҳоллар учун тўғридир, яъни $x_1 \vdash A$ ва $\bar{x}_1 \vdash A$. Бу ердан дизъюнкцияни киритиш қоидасига асосан $x_1 \vee \bar{x}_1 \vdash A$ га эга бўламиз. Аммо $x_1 \vee \bar{x}_1$ исботланувчи формула бўлганлиги учун уни ташлаб юбориш мумкин. Шундай қилиб, $\emptyset \vdash A$. Демак, A исботланувчи формула экан.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формула $A = x_1 \vee x_2 \rightarrow x_3$ ва ўзгарувчиларнинг: 1) (0, 0, 1); 2) (1, 0, 0) қийматлар сатри берилган. A формула ва унинг инкори \bar{A} ни мос формулалар мажмуасидан келтириб чиқаринг.
2. Қуйидаги формула $A = \bar{x}_1 \vee x_2 \rightarrow \bar{x}_3$ ва ўзгарувчиларнинг: 1) (1, 1, 1); 2) (1, 0, 1); 3) (0, 1, 0) қийматлар сатри берилган. A формула ва унинг инкори \bar{A} ни мос формулалар мажмуасидан келтириб чиқаринг.
3. Қуйидаги формула $A = (x \vee \bar{y}) \rightarrow \bar{x} \wedge \bar{z}$ ва ўзгарувчиларнинг: 1) (1, 0, 0); 2) (0, 1, 1); 3) (0, 1, 0) қийматлар сатри берилган. A формула ва унинг инкори \bar{A} ни мос формулалар мажмуасидан келтириб чиқаринг.
4. Умумлашган дедукция теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги формулаларнинг исботланувчи эканлигини ва улар мулоҳазалар алгебрасида айнан чин(тавтология) формулалар эканлигини исботланг:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z));$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (x \vee z \rightarrow y \vee z);$$

$$(x \rightarrow y) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)).$$

5. $x_1 \vee \bar{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}$ формула x_1, x_2, x_3, x_4 ўзгарувчиларнинг $(0, 1, 1, 0)$ қийматлар сатрида $R_{0110}(x_1 \vee \bar{x}_4 \rightarrow \overline{x_2 \wedge \bar{x}_3}) = 1$ қийматга эга эканлигини исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар ҳисоби формуласининг қиймати.
2. Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби орасидаги муносабатлар.
3. Умумқийматли ва айнан чин формулалар.
4. Келтириб чиқариш ҳақидаги теорема.
5. Мулоҳазалар ҳисобидаги формулалар билан мулоҳазалар алгебрасидаги формулалар орасидаги муносабатлар.

8- §. Мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари

- Ечилиш муаммоси. Зидсизлик муаммоси. Тўлиқлилик муаммоси. Эркинлик муаммоси. Аксиоматик назария. Тор маънода тўлиқ. Кенг маънода тўлиқ. Эркин аксиома. Эркин аксиомалар системаси. Тенг кучли формулалар.*

Ҳар қандай аксиоматик назарияни асослаш учун қуйидаги тўртта муаммони ҳал қилишга тўғри келади:

- 1) ечилиш;
- 2) зидсизлик;
- 3) тўлиқлилик;
- 4) эркинлик.

8.1. Мулоҳазалар ҳисобининг ечилиш муаммоси. Мулоҳазалар ҳисобидаги ихтиёрий формулани исботланувчи ёки исботланувчи эмаслигини аниқлаб берувчи алгоритмнинг мавжудлигини исботлаш муаммоси мулоҳазалар ҳисобининг *ечилиш муаммоси* деб аталади.

1- теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби учун ечилиш муаммоси ҳал қилинувчидир (ечилувчидир).*

Исбот. Олдинги параграфда айтилгандек, мулоҳазалар ҳисобининг исталган формуласини мулоҳазалар алгебрасининг формуласи сифатида қараш мумкин. Демак, бу формуланинг мантиқий қийматини ўзгарувчиларнинг исталган қийматлар сатрида аниқлаш мумкин.

A — мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи, x_1, x_2, \dots, x_n эса A формуланинг ифодасига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин.

$R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A)$ қийматини ҳамма 2^n та $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ қийматлар сатрида ҳисоблаб чиқамиз. Агар ҳамма қийматлар сатрида $R_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A) = 1$ бўлса, у ҳолда A формула айнан чин бўлади. Демак, 8- § даги 3- теоремага асосан A мулоҳазалар ҳисобининг исботланувчи формуласи бўлади.

Агар шундай $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0)$ қийматлар сатри топилиб, $R_{\alpha_1^0 \dots \alpha_n^0}(A) = 0$ бўлса, у ҳолда A айнан чин формула бўлмайди. У ҳолда 8- § даги 1- теоремага асосан A исботланувчи эмас формуладир.

Шундай қилиб, мулоҳазалар ҳисобининг исталган формуласини исботланувчи ёки исботланувчи эмаслигини кўрсатувчи юқорида баён этилган алгоритм мавжуд экан. Демак, мулоҳазалар ҳисоби алгоритмик ечилувчи назариядир.

8.2. Мулоҳазалар ҳисобининг зидсизлик муаммоси.

1- таъриф. *Агар мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий A ва \bar{A} формулалари бир пайтда исботланувчи формулалар бўлолмаса, у ҳолда бундай мулоҳазалар ҳисоби зиддиятсиз аксиоматик назария, акс ҳолда эса зиддиятга эга бўлган аксиоматик назария деб аталади.*

Демак, зиддиятсиз мулоҳазалар ҳисобида A ва унинг инкори бўлган \bar{A} биргаликда исботланувчи формулалар бўла олмайди.

Мулоҳазалар ҳисобида зидсизлик муаммоси қуйидагича қўйилади: берилган мулоҳазалар ҳисоби зиддиятлиликми ёки зиддиятсизликми?

2-теорема. *Агар мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи A ва \bar{A} формулалар мавжудлиги аниқланса, у ҳолда бу мулоҳазалар ҳисобида исталган B формула ҳам исботланувчи формула бўлади.*

Исбот. Бундан кейин ҳар қандай исботланувчи формулани R ва $\bar{R} = F$ билан белгилаймиз.

1. Аввал ҳар қандай B учун

$$\vdash B \rightarrow R \quad (1)$$

формуланинг исботланувчи эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, I_1 аксиомадан ўрнига қўйиш натижасида

$$\vdash R \rightarrow (B \rightarrow R) \quad (2)$$

ни ҳосил қиламиз. Аммо шартга кўра R исботланувчи формула, яъни

$$\vdash R. \quad (3)$$

У ҳолда (2) ва (3) формулалардан хулоса қоидасига асосан (1) формуланинг тўғрилиги келиб чиқади.

2. Энди ҳар қандай B учун

$$\vdash F \rightarrow B \quad (4)$$

формуланинг исботланувчи эканлигини тасдиқлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам, IV_1 аксиомадан ўрнига қўйиш натижасида

$$\vdash (\bar{B} \rightarrow R) \rightarrow (\bar{R} \rightarrow \bar{\bar{B}}) \quad (5)$$

формула келиб чиқади. Аммо исботлаганимизга асосан

$$\vdash (\bar{B} \rightarrow R). \quad (6)$$

Ўз навбатида (6) ва (5) дан хулоса қоидасига биноан

$$\vdash \bar{R} \rightarrow \bar{\bar{B}} \quad (7)$$

формулани ҳосил қиламиз. Икки карралик инкор амалини тушириш қоидасидан фойдаланиб ва \bar{R} ни F билан алмаштирилса,

$$\vdash F \rightarrow B$$

формулага эга бўламиз, яъни (4) исботланувчи формуладир.

3. Ҳар қандай A учун

$$\vdash A \wedge \bar{A} \rightarrow F \quad (8)$$

формула исботланувчи эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ҳам, I_1 ва IV_1 аксиомаларга асосан қуйидагилар исботланувчи формулалар бўлади:

$$\vdash A \rightarrow (R \rightarrow A), \quad (9)$$

$$\vdash (R \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow F). \quad (10)$$

(9) ва (10) дан силлогизм қоидасига биноан

$$\vdash A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow F)$$

формулани келтириб чиқарамиз. Бу формуладан асосларни бирлаштириш қоидасини қўллаш натижасида $\vdash A \wedge \bar{A} \rightarrow F$ формулага келамиз, яъни (8) га эга бўламиз.

(4) ва (8) дан силлогизм қоидасига асосан

$$\vdash A \wedge \bar{A} \rightarrow B \quad (11)$$

формулани ҳосил қиламиз. Аммо теореманинг шартига кўра $\vdash A$ ва $\vdash \bar{A}$, у ҳолда $\vdash A \wedge \bar{A}$. Демак, B исботланувчи формула бўлади.

3-теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби зиддиятликсиз назариядир.*

Исбот. Мулоҳазалар ҳисобида A ва \bar{A} бир вақтнинг ўзида исботланувчи бўладиган ҳеч қандай A формула мавжуд эмаслигини кўрсатамиз.

A мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий формуласи бўлсин. Агар A исботланувчи формула бўлса, у ҳолда 7- § даги 1-тео-

ремага асосан A айнан чин формуладир ва, демак \bar{A} айнан ёлгон формула бўлади. Шунинг учун ҳам \bar{A} исботланувчи формула бўлмайди.

Демак, A ва \bar{A} бир вақтда исботланувчи формулалар бўла олмайди. Шунинг учун ҳам мулоҳазалар ҳисоби зиддиятга эга эмас.

8.3. Мулоҳазалар ҳисобининг тўлиқлилик муаммоси.

2-таъриф. *Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системасига шу ҳисобнинг бирор ихтиёрий исботланмайдиган формуласини янги аксиома сифатида қўшишдан ҳосил бўладиган аксиомалар системаси зиддиятга эга бўлган мулоҳазалар ҳисобига олиб келса, бундай мулоҳазалар ҳисоби **тор маънодаги тўлиқ аксиоматик назария** деб аталади.*

3-таъриф. *Ҳар қандай айнан чин формуласи исботланувчи формула бўладиган мулоҳазалар ҳисоби **кенг маънодаги тўлиқ аксиоматик назария** деб аталади.*

Демак, мулоҳазалар ҳисобининг тўлиқлилик муаммоси иккита масалани ҳал қилиши керак:

1) янги аксиома сифатида бирор исботланмайдиган формуласини аксиомалар системасига қўшиш натижасида мулоҳазалар ҳисобини кенгайтириш мумкинми ёки йўқми?

2) мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай айнан чин формуласи мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи бўладими ёки йўқми?

Бу масалаларнинг ечими қуйидаги теоремаларнинг мазмунидан иборат.

4-теорема. *Мулоҳазалар ҳисоби **тор маънода тўлиқдир.***

Исбот. A мулоҳазалар ҳисобидаги ихтиёрий исботланмайдиган (исботланувчи эмас) формула, x_1, x_2, \dots, x_n эса A формула таркибига кирувчи ўзгарувчилар бўлсин. A исботланмайдиган формула эканлигидан у айнан чин формула эмас. Демак, x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчиларнинг шундай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ қийматлар сатри мавжудки,

$$R_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} (A(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \tag{12}$$

бўлади.

B_1, B_2, \dots, B_n лар x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчиларга боғлиқ ихтиёрий айнан чин формулалар бўлсин. $B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}$ мажмуани (наборни) қараймиз. Бу ерда

$$B_i^{\alpha_i} = \begin{cases} B_i, & \text{агар } \alpha_i = 1 \text{ бўлса,} \\ \bar{B}_i, & \text{агар } \alpha_i = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

А формулада $\int_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}} (A)$ ўрнига қўйишни бажариб, ушбу

формулага эга бўламиз:

$$A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}). \tag{13}$$

(12) формуланинг айнан ёлғон формула эканлигини кўрсатамиз. x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчиларнинг ихтиёрий $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ қийматлар сатрини оламиз. B_1, B_2, \dots, B_n формулалар айнан чин формулалар эканлигидан $R_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} (B_i) = 1$ бўлади. У ҳолда $R_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} (B_i^{\alpha_i}) = \alpha_i$ ўринли. Демак,

$$R_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n}) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Бу ердан $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n})}$ нинг айнан чин формула эканлиги келиб чиқади ва у 7- § даги 3- теоремага асосан исботланувчи формула бўлади.

Иккинчи томондан, агар мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалари қаторига $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ формулани янги аксиома сифатида қўшиб қўйсак, у ҳолда янги ҳосил бўлган мулоҳазалар ҳисобида бу формула аксиома бўлганлиги учун исботланувчи формула бўлади. Шу вақтнинг ўзида янги мулоҳазалар ҳисобида $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n})$ формула ҳам исботланувчи формула бўлади, чунки у исботланувчи формуладан ўрнига қўйиш қоидаси орқали ҳосил қилинган.

Шундай қилиб, янги мулоҳазалар ҳисобида иккита $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n})$ ва $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \dots, B_n^{\alpha_n})$ исботланувчи формулага эга бўламиз. Демак, янги мулоҳазалар ҳисоби зиддиятга эга бўлган аксиоматик назария экан. Бу ердан унинг тор маънода тўлиқлиги келиб чиқади.

5-теорема. Мулоҳазалар ҳисоби кенг маънода тўлиқдир.

Исбот. Биз 7- параграфда (3- теорема) мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир айнан чин формуласи мулоҳазалар ҳисобида исботланувчи формула эканлигини исбот қилган эдик. Демак, мулоҳазалар ҳисоби кенг маънода тўлиқдир.

8.4. Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг эркинлик муаммоси. Ҳар қандай аксиоматик ҳисобда аксиомаларнинг эркинлик масаласи, яъни бирорта аксиомани системанинг қолган аксиомаларидан келтириб чиқариш қоидаси орқали ҳосил этиш мумкинми ёки йўқми деган муаммо мавжуд бўлади. Агар бирор аксиома учун бу масала ижобий ҳал этилса, у ҳолда бу аксиома система аксиомалари рўйхатидан чиқариб ташланади ва мантиқий ҳисоб бу билан ўзгармайди, яъни исботланувчи формулалар синфи ўзгармасдан қолади.

4-таъриф. Агар A аксиомани мулоҳазалар ҳисобининг қолган аксиомаларидан келтириб чиқариш мумкин бўлмаса, у шу мулоҳазалар ҳисобининг бошқа аксиомаларидан эркин аксиома деб аталади.

5-таъриф. Агар мулоҳазалар ҳисоби аксиомалар системасининг ҳар бир аксиомаси эркин бўлса, у ҳолда мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси эркин деб аталади.

6-теорема. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси эркиндир.

Исбот. A мулоҳазалар ҳисобининг ихтиёрий аксиомаси бўлсин. Бу аксиоманинг эркинлигини исботлаш учун мулоҳазалар ҳисобига нисбатан қуйидаги усулни қўллаймиз: мулоҳазалар ҳисоби ўзгарувчиларини α ёки β қиймат қабул қилувчи ўзгарувчилар сифатида қараймиз. Бу ерда α чин ролини ва β ёлгон ролини ўйнайди.

\wedge , \vee , \rightarrow , $-$ амалларни шундай аниқлаймизки, қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

1) A аксиомадан ташқари системанинг ҳамма аксиомалари таркибидаги ўзгарувчиларнинг барча қийматларида фақат α қийматни қабул қилсин;

2) A аксиомадан бошқа, аксиомалар мажмуасидан келтириб чиқарилган ҳар қандай формула ҳам таркибидаги ўзгарувчиларнинг барча қийматларида фақат α қийматни қабул қилсин;

3) A аксиома таркибидаги ўзгарувчиларнинг айрим қийматларида β қийматни қабул қилсин.

Агар A аксиомага нисбатан юқорида келтирилган интерпретация (изоҳлаш) ўринли бўлса, у ҳолда A аксиома бошқа аксиомалардан эркин эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам, агар A аксиомани мулоҳазалар ҳисобининг бошқа аксиомаларидан келтириб чиқариш мумкин бўлганда эди, у шартларнинг иккинчисига асосан таркибидаги ўзгарувчиларнинг барча қийматларида фақат α қийматни қабул қилиб, бу эса 3- шартга зид бўлар эди. Демак, A аксиомани мулоҳазалар ҳисобининг бошқа аксиомаларидан келтириб чиқариш мумкин эмас ва у системадаги эркин аксиомадир.

Ўзгарувчиларининг ўрнига уларнинг айрим қийматлари қўйилганда ҳам формулалар маънога эга деб келишамиз. Масалан, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow A$, $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ ва бошқалар.

б- т а ʼ р и ф . *Таркибидаги ўзгарувчиларни α ва β билан алмаштирганда бир хил қиймат қабул қилувчи A ва B формулалар тенг кучли формулалар деб аталади ҳамда бу $A = B$ кўринишда ёзилади.*

Тенглик белгиси \wedge , \vee , \rightarrow мантиқий боғловчиларга нисбатан сустроқ боғлайди деб ҳисоблаймиз.

Энди Π_1 аксиоманинг эркинлигини исбот қилайлик. Бунинг учун конъюнкциядан ташқари қолган ҳамма мантиқий амалларни худди мантиқ алгебрасидагидек ва конъюнкция амалини $x \wedge y = y$ тенглик орқали аниқлаймиз:

x	x
α	β
β	α

x	y	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \wedge y$
α	α	α	α	α
α	β	α	β	β
β	α	α	α	α
β	β	β	α	β

Ушбу интерпретация учун юқорида келтирилган учта шартнинг бажарилишини кўрсатамиз.

Π_1 аксиомадан ташқари мулоҳазалар ҳисобининг қолган ҳамма аксиомалари ўзгарувчиларнинг барча қийматларида α қиймат қабул қилади (бу ҳолни чинлик жадвали орқали кўрсатиш мумкин).

Ҳақиқатан ҳам I, III ва IV гуруҳ аксиомаларида конъюнкция амали қатнашмайди. Қолган мантиқий амаллар худди мулоҳазалар алгебрасидагидек аниқланган.

Мулоҳазалар алгебрасида бу формулалар айнан чин формулалар бўлганлигидан, ушбу интерпретацияда ўзгарувчиларнинг барча қийматларида улар α қиймат қабул қилади.

Π_1 , Π_2 ва Π_3 аксиомаларни кўрайлик.

Π_2 ва Π_3 аксиомалар қабул қилинган интерпретацияда $y \rightarrow y$ формулага тенг бўлади ва $x = \beta$, $x = \alpha$ қийматларда β қиймат қабул қилади, яъни ҳеч қачон α қиймат қабул қилмайди.

Энди айнан α га тенг формулалардан келтириб чиқариш қоидасига асосан ҳосил қилинган формулалар ҳам α га тенглигини кўрсатиш қолди, яъни 2- шартнинг бажарилишини кўрсатиш керак.

Олдинги параграфларда айнан чин формулаларга ўрнига қўйиш ва хулоса қоидаларини қўллаш натижасида чиқарилган формулалар айнан чин формулалар бўлишини кўрсатган эдик. Демак, 2- шарт ҳам бажарилади. Шундай қилиб, мулоҳазалар ҳисобининг Π_1 аксиомаси эркин аксиома экан.

Худди шу схемадан фойдаланиб, мулоҳазалар ҳисобининг I, II, III ва IV гуруҳларидаги ҳар бир аксиоманинг эркинлигини кўрсатиш мумкин. Демак, мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси эркиндир.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Ҳар қандай аксиоматик назарияни асослаш учун нечта муаммоларни кўриб чиқишга тўғри келади?
2. $A(x)$ ва $B(x)$ ихтиёрий предикатлар бўлсин. Қуйидаги формулаларнинг қайси бири $A(x) \rightarrow \overline{B(x)}$ формулага тенг кучли формула бўлади:
 - 1) $A(x) \vee B(x)$; 2) $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$; 3) $\overline{A(x)} \rightarrow B(x)$;
 - 4) $\overline{B(x)} \rightarrow A(x)$; 5) $\overline{\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}}$; 6) $\overline{A(x) \wedge \overline{B(x)}}$;
 - 7) $B(x) \rightarrow \overline{A(x)}$.
3. Қуйидаги тасдиқлар(теоремалар)нинг нотўғрилигини исбот қилинг:
 - 1) агар функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда у шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади;
 - 2) агар сонли қаторнинг n - ҳади нолга тенг бўлса, у ҳолда бу қатор яқинлашувчи бўлади;
 - 3) агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри бурчакли бўлади;
 - 4) агар $[a, b]$ ёпиқ интервалда интегралланувчи бўлса, у ҳолда у шу интервалда узлуксиз бўлади.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мулоҳазалар ҳисобининг ечилиш муаммоси.
2. Мулоҳазалар ҳисобининг зидсизлик муаммоси.
3. Мулоҳазалар ҳисобининг тўлиқлилик муаммоси.
4. Мулоҳазалар ҳисоби аксиомаларининг эркинлик муаммоси.
5. Аксиоматик назария ҳақида тушунча.
6. Тор маънода тўлиқ. Кенг маънода тўлиқ.
7. Эркин аксиомалар системаси. Тенг кучли формулалар.

Куйидаги бобда предикатлар мантиқи баён этилган. Бу ерда предикат тушунчаси, предикатлар устида мантиқий амаллар, умумийлик ва мавжудлик кванторлари, предикатлар мантиқининг формуласи ва унинг қиймати, предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари, предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли, бажарилувчи ва умумқийматли формулалар, ечилиш муаммоси, хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлилигини топиш алгоритмлари, предикатлар мантиқининг математикага татбиқи, аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида маълумотлар келтирилади.

1- §. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида мантиқий амаллар

- Предикат. Предикатлар мантиқи. Бир жойли предикат. Кўп жойли предикат. Предикатнинг чинлик тўплами. Айнан чин предикат. Айнан ёлгон предикат. Предикатлар устида мантиқий амаллар.*

1.1. Предикат тушунчаси. Мантиқ алгебрасида мулоҳазалар фақат чин ёки ёлгон қиймат олиши нуқтаи назаридан қаралади. Мулоҳазаларнинг на структураси ва ҳатто на мазмуни қаралмайди. Аммо фанда ва амалиётда мулоҳазаларнинг структураси ва мазмунидан келиб чиқадиган хулосалардан (натижалардан) фойдаланилади. Масалан, «Ҳар қандай ромб параллелограммдир; $ABCD$ – ромб; демак, $ABCD$ – параллелограмм».

Асос (шарт) ва хулоса мулоҳазалар мантиқининг элементар мулоҳазалари бўлади ва уларни бу мантиқ нуқтаи назаридан бўлинмас, бир бутун деб ва уларнинг ички структурасини ҳисобга олмасдан қаралади. Шундай қилиб, мантиқ алгебраси мантиқнинг муҳим қисми бўлишига қара-

масдан, кўпгина фикрларни таҳлил қилишга қодир (етарли) эмас. Шунинг учун ҳам мулоҳазалар маантиқини кенгайтириш масаласи вужудга келди, яъни элементар мулоҳазаларнинг ички структурасини ҳам тадқиқ эта оладиган маантикий системани яратиш муаммоси пайдо бўлди. Бундай система мулоҳазалар маантиқини ўзининг бир қисми сифатида бутунлайинга ўз ичига оладиган предикатлар маантиқидир.

Предикатлар маантиқи анъанавий формал маантиқ сингари элементар мулоҳазани *субъект* ва *предикат* қисмларга бўлади.

Субъект – бу мулоҳазада бирор нарса ҳақида нимадир тасдиқлайди; *предикат* – бу субъектни тасдиқлаш. Масалан, «5 – туб сон» мулоҳазасида «5» – субъект, «туб сон» – предикат. Бу мулоҳазада «5» «туб сон бўлиш» хусусиятига эга эканлиги тасдиқланади.

Агар келтирилган мулоҳазада маълум 5 сонини натурал сонлар тўпламидаги x ўзгарувчи билан алмаштирсак, у ҳолда « x – туб сон» кўринишидаги мулоҳаза формасига (шаклига) эга бўламиз. x ўзгарувчининг бир хил қийматлари (масалан, $x = 13$, $x = 3$, $x = 19$) учун бу форма чин мулоҳазалар ва x ўзгарувчининг бошқа қийматлари (масалан, $x = 10$, $x = 20$) учун бу форма ёлгон мулоҳазалар беради.

Аниқки, бу форма бир x аргументли функцияни аниқлайди. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўплами N ва қийматлар соҳаси $\{1, 0\}$ тўплам бўлади.

1- таъриф. *M тўпланда аниқланган ва $\{1, 0\}$ тўпландан қиймат қабул қилувчи бир аргументли $P(x)$ функция бир жойли (бир ўринли) предикат деб аталади.*

M тўпламни $P(x)$ предикатнинг аниқланиш соҳаси деб айтамыз.

$P(x)$ предикат чин қиймат қабул қилувчи ҳамма $x \in M$ элементлар тўплами $P(x)$ предикатнинг чинлик тўплами деб аталади, яъни $P(x)$ предикатнинг чинлик тўплами $I_p = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ тўпландир.

Масалан, « x – туб сон» – $P(x)$ предикати N натурал сонлар тўпламида аниқланган ва унинг I_P чинлик тўплами ҳамма туб сонлар тўпамидан иборат. « $\sin x = 0$ » – $Q(x)$ предикати R ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган ва унинг I_Q чинлик тўплами $I_Q = \{k\pi, k \in Z\}$. «Параллелограмм диагоналлари x бир-бирига перпендикулярдир» – $\Phi(x)$ предикатнинг аниқланиш соҳаси ҳамма параллелограммлар тўплами ва чинлик тўплами ҳамма ромблар тўплами бўлади.

Бир жойли предикатларга юқорида келтирилган мисоллар предметларнинг хусусиятларини ифодалайди.

2-таъриф. *Агар M тўпланда аниқланган $P(x)$ предикат учун $I_P = M(I_P = \emptyset)$ бўлса, у айнан чин (айнан ёлғон) деб аталади.*

Энди кўп жойли предикат тушунчасини аниқлаймиз. Кўп жойли предикат предметлар орасидаги муносабатни аниқлайди.

«Кичик» муносабати икки предмет орасидаги бинар муносабатни ифодалайди. « $x < y$ » (бу ерда $x, y \in Z$) бинар муносабати икки аргументли $P(x, y)$ функцияни ифодалайди. Бу функция $Z \times Z$ тўпланда аниқланган ва қийматлар соҳаси $\{1, 0\}$ тўплам бўлади.

3-таъриф. *$M = M_1 \times M_2$ тўпланда аниқланган ва $\{1, 0\}$ тўпландан қиймат олувчи икки аргументли $P(x, y)$ функцияга **икки жойли предикат** деб аталади.*

Масалан, « $x = y$ » $Q(x, y)$ икки жойли предикат $R^2 = R \times R$ тўпланда аниқланган; « $x \perp y$ » – x тўғри чизиқ y тўғри чизиққа перпендикуляр – $F(x, y)$ икки жойли предикат бир текисликда ётувчи тўғри чизиқлар тўпламида аниқланган.

n - жойли предикат ҳам худди шундай аниқланади.

1-мисол. Қуйида берилган мулоҳазаларнинг қайси бири предикат бўлишини ва уларнинг чинлик тўпламини аниқланг. Бир жойли предикатларнинг аниқланиш соҳаси $M = R$ ва икки жойли предикатлар учун аниқланиш соҳаси $M = R \times R$ бўлсин:

- 1) $x + 5 = 1$; 2) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 3) $x + 2 < 3x - 4$;
 4) $(x + 2) - (3x - 4)$; 5) $x^2 + y^2 > 0$.

Е ч и м. 1) Бу берилган ифода бир жойли предикат $A(x)$ бўлади ва $I_A = \{-4\}$;

2) ифода билан берилган мулоҳаза бир жойли предикат $A(x)$ бўлади ва $I_A = \{1\}$;

3) ифода билан берилган мулоҳаза бир жойли предикат $A(x)$ бўлади ва $I_A = \{3, +\infty\}$;

4) ифода билан берилган мулоҳаза предикат бўлмайди;

5) берилган ифода икки жойли предикат $A(x, y)$ бўлади ва $I_A = R \times R \setminus \{0, 0\}$.

2- м и с о л. Куйидаги предикатларнинг қайси бири айнан чин бўлишини аниқланг:

1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

4) $(x + 1)^2 > x - 1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x + 1)^2$.

Е ч и м. Равшанки, 1, 3 ва 4- предикатлар айнан чин бўлади. 2- предикатда $x = 0$, $y = 0$ қийматларида тенгсизлик бузилади. 5- предикатда бўлса, x нинг ҳамма мусбат қийматларида тенгсизлик ишораси бузилади. Демак, 2 ва 5- предикатлар айнан чин предикатлар бўла олмайди.

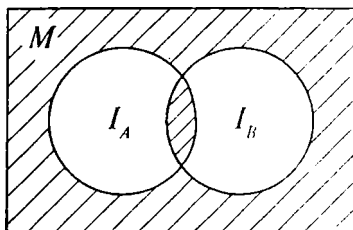
3- м и с о л. $M = M_1 \times M_2 \subset R \times R$ тўпламда $A(x, y)$ ва $B(x, y)$ предикатлар берилган бўлсин. $A(x, y) \leftrightarrow B(x, y)$ предикатнинг чинлик тўпламини топинг ва уни Эйлер доиралари орқали ифодаланг.

Е ч и м.

$A(x, y) \leftrightarrow B(x, y) = (A(x, y) \rightarrow B(x, y)) \wedge (B(x, y) \rightarrow A(x, y))$
 бўлганлиги учун

$$\begin{aligned} I_{A \leftrightarrow B} &= (I_{A \rightarrow B}) \cap (I_{B \rightarrow A}) = ((CI_A \cup I_B) \cap (CI_B \cup I_A)) = \\ &= (I_A \cap I_B) \cup (CI_A \cap CI_B). \end{aligned}$$

$I_A \leftrightarrow I_B$ чинлик тўплами IV.1- шаклда штрихланган соҳа сифатида кўрсатилган.



IV.1- шакл.

1.2. Предикатлар устида мантиқий амаллар. Предикатлар ҳам мулоҳазалар сингари фақатгина чин ва ёлгон (1, 0) қийматлар қабул қилганликлари туфайли улар устида мулоҳазалар мантиқидаги ҳамма мантиқий амалларни бажариш мумкин.

Бир жойли предикатлар мисолида мулоҳазалар мантиқидаги мантиқий амалларнинг предикатларга татбиқ этилишини кўрайлик.

M тўпلامда $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар аниқланган бўлсин.

4-таъриф. Берилган M тўпلامда аниқланган $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатларнинг конъюнкцияси деб, фақат ва фақат $x \in M$ қийматларда аниқланган ҳамда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар бир вақтда чин қиймат қабул қилгандагина чин қиймат қабул қилиб, қолган барча ҳолларда ёлгон қиймат қабул қилувчи янги предикатга айтилади ва у $P(x) \wedge Q(x)$ каби белгиланади.

$P(x) \wedge Q(x)$ предикатнинг чинлик соҳаси $I_P \cap I_Q$ тўпلامдан, яъни $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар чинлик соҳаларининг умумий қисмидан иборат бўлади.

Масалан, $P(x)$: « x – жуфт сон» ва $Q(x)$: « x – тоқ сон» предикатлар учун « x – жуфт сон ва x – тоқ сон»: $P(x) \wedge Q(x)$ предикатлар конъюнкцияси мос келади ва унинг чинлик соҳаси \emptyset бўш тўпلامдан иборат бўлади.

5-таъриф. Берилган M тўпلامда аниқланган $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатларнинг дизъюнкцияси деб, фақат ва фақатгина $x \in M$ қийматларда аниқланган ҳамда $P(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар

ёлгон қиймат қабул қилганда ёлгон қиймат қабул қилиб, қолган барча ҳолларда чин қиймат қабул қилувчи янги предикатга айтилади ва у $P(x) \vee Q(x)$ каби белгиланади.

$P(x) \vee Q(x)$ предикатнинг чинлик соҳаси $I_P \cup I_Q$ тўпламдан иборат бўлади.

6-таъриф. Агар ҳамма $x \in M$ қийматларда $P(x)$ предикат чин қиймат қабул қилганда ёлгон қиймат ва $x \in M$ нинг барча қийматларида $P(x)$ предикат ёлгон қиймат қабул қилганда чин қиймат қабул қилувчи предикат $P(x)$ **предикатнинг инкори** деб аталади ва у $\bar{P}(x)$ каби белгиланади.

Бу таърифдан $I_{\bar{P}} = M \setminus I_P = CI_P$ келиб чиқади.

7-таъриф. Фақат ва фақатгина $x \in M$ лар учун бир вақтда $P(x)$ чин қиймат ва $Q(x)$ ёлгон қиймат қабул қилганда ёлгон қиймат қабул қилиб, қолган ҳамма ҳолларда чин қиймат қабул қиладиган $P(x) \rightarrow Q(x)$ предикат $P(x)$ ва $Q(x)$ **предикатларнинг импликацияси** деб аталади.

Ҳар бир тайинланган $x \in M$ учун

$$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x)$$

тенг кучлилик тўғри бўлганлигидан $I_{P \rightarrow Q} = I_{\bar{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$ ўринлидир.

2- §. Умумийлик ва мавжудлик кванторлари

Умумийлик квантори. Мавжудлик квантори. Кванторли амаллар билан конъюнкция ва дизъюнкция амаллари орасидаги муносабат.

M тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Агар $a \in M$ ни $P(x)$ предикатнинг x аргументи ўрнига қўйсақ, у ҳолда бу предикат $P(a)$ мулоҳазага айланади.

Предикатлар мантиқида яна иккита амал мавжудки, улар бир жойли предикатни мулоҳазага айлантиради.

2.1. Умумийлик квантори. M тўпламда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Ҳар қандай $x \in M$ учун $P(x)$ чин

ва акс ҳолда ёлгон қиймат қабул қилувчи мулоҳаза ифодасини $\forall xP(x)$ формада ёзамиз. Бу мулоҳаза энди x га боғлиқ бўлмай қолади ва у қуйидагича ўқилади: «Ҳар қандай x учун $P(x)$ чин». \forall симболи *умумийлик квантори* деб айтилади. Айтилган фикрларни математик тилда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\forall xP(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар ҳамма } x \in M \text{ учун } P(x) = 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

$P(x)$ предикатда x ни *эркин (озод) ўзгарувчи* ва $\forall xP(x)$ мулоҳазада x ни *умумийлик квантори* \forall билан *боғланган ўзгарувчи* деб аталади.

2.2. Мавжудлик квантори. $P(x)$ предикат M тўпламда аниқланган бўлсин. Ҳеч бўлмаганда бирорта $x \in M$ учун $P(x)$ предикат чин ва акс ҳолда ёлгон қиймат қабул қилувчи мулоҳаза ифодасини $\exists xP(x)$ шаклда ёзамиз. Бу мулоҳаза x га боғлиқ эмас ва уни қуйидагича ўқиш мумкин: «Шундай x мавжудки, $P(x) = 1$ ». яъни

$$\exists xP(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар бирор } x \in M \text{ учун } P(x) = 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

\exists симболи *мавжудлик квантори* деб аталади. $\exists xP(x)$ мулоҳазада x ўзгарувчи \exists квантори билан боғланган бўлади.

Масалан, N натурал сонлар тўпламида $P(x)$ предикат берилган бўлсин: « x – туб сон». Кванторлардан фойдаланиб ушбу предикатдан қуйидаги мулоҳазаларни ҳосил қилиш мумкин: $\forall xP(x)$ – «Ҳамма натурал сонлар туб сонлар бўлади»; $\exists xP(x)$ – «Шундай натурал сон мавжудки, у туб сон бўлади». Равшанки, биринчи мулоҳаза ёлгон ва иккинчи мулоҳаза чин бўлади.

Маълумки, $\forall xP(x)$ мулоҳаза фақат $P(x)$ айнан чин предикат бўлгандагина чин қиймат қабул қилади. $\exists xP(x)$ мулоҳаза бўлса, $P(x)$ айнан ёлгон предикат бўлгандагина ёлгон қиймат қабул қилади.

Кванторли амаллар кўп жойли предикатларга ҳам қўлланади. Масалан, M тўпланда икки жойли $P(x, y)$ предикат берилган бўлсин. Агар $P(x, y)$ предикатга x ўзгарувчи бўйича кванторли амалларни қўлласак, y ҳолда икки жойли $P(x, y)$ предикатга бир жойли $\forall x P(x, y)$ (ёки бир жойли $\exists x P(x, y)$) предикатни мос қилиб қўяди.

Бир жойли $\forall x P(x, y)$ ($\exists x P(x, y)$) предикат фақат y ўзгарувчига боғлиқ ва x ўзгарувчига боғлиқ эмас бўлади. Уларга y бўйича кванторли амалларни қўллаганимизда қуйидаги мулоҳазаларга эга бўламиз:

$$\forall y \forall x P(x, y), \exists y \forall x P(x, y), \forall y \exists x P(x, y), \exists y \exists x P(x, y).$$

Масалан, тўғри чизиклар тўпламида аниқланган $P(x, y)$: « $x \perp y$ » предикатни кўрайлик. Агар $P(x, y)$ предикатга нисбатан кванторли амалларни татбиқ этсак, y ҳолда қуйидаги саккизта мулоҳазага эга бўламиз:

1. $\forall x \forall y P(x, y)$ — «Ҳар қандай x тўғри чизик ҳар қандай y тўғри чизикқа перпендикуляр».

2. $\exists y \forall x P(x, y)$ — «Шундай y тўғри чизик мавжудки, x ҳар қандай x тўғри чизикқа перпендикуляр».

3. $\forall y \exists x P(x, y)$ — «Ҳар қандай y тўғри чизик учун шундай x тўғри чизик мавжудки, x тўғри чизик y тўғри чизикқа перпендикуляр».

4. $\exists y \exists x P(x, y)$ — «Шундай y тўғри чизик ва шундай x тўғри чизик мавжудки, x тўғри чизик y тўғри чизикқа перпендикуляр».

5. $\forall y \forall x P(x, y)$ — «Ҳар қандай y тўғри чизик ҳар қандай x тўғри чизикқа перпендикуляр».

6. $\forall x \exists y P(x, y)$ — «Ҳар қандай x тўғри чизик учун шундай y тўғри чизик мавжудки, x тўғри чизик y тўғри чизикқа перпендикуляр».

7. $\exists x \exists y P(x, y)$ — «Шундай x тўғри чизик ва шундай y тўғри чизик мавжудки, x тўғри чизик y тўғри чизикқа перпендикуляр».

8. $\exists x \forall y P(x, y)$ — «Шундай x тўғри чизик мавжудки, y ҳар қандай y тўғри чизикқа перпендикуляр».

Бу мисоллардан кўриниб турибдики, умумий ҳолда кванторлар тартиби ўзгариши билан мулоҳазанинг мазмуни ва, демак, унинг мантиқий қиймати ҳам ўзгаради.

Чекли сондаги элементлари бўлган $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ тўпلامда аниқланган $P(x)$ предикат берилган бўлсин. Агар $P(x)$ предикат айнан чин бўлса, у ҳолда $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)$, мулоҳазалар ҳам чин бўлади. Шу ҳолда $\forall x P(x)$ мулоҳаза ва $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$ конъюнкция ҳам чин бўлади.

Агар ҳеч бўлмаганда бирорта $a_k \in M$ элемент учун $P(a_k)$ ёлғон бўлса, у ҳолда $\forall x P(x)$ мулоҳаза ва $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$ конъюнкция ҳам ёлғон бўлади. Демак,

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

тенг кучли ифода тўғри бўлади.

Юқоридагидек фикр юритиш йўли билан

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

тенг кучли ифоданинг мавжудлигини кўрсатиш мумкин. Бу ердан кванторли амалларни чексиз соҳаларда конъюнкция ва дизъюнкция амалларининг умумлашмаси сифатида қараш мумкинлиги келиб чиқади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. $M = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ тўпلامда иккита $A(x)$: « x туб сон» ва $B(x)$: « x — тоқ сон» предикати берилган. Бу предикатларнинг чинлик жадвалини тузинг.
2. $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ тўпلامда қуйидаги предикатлар берилган: $A(x)$: « x сон 5 га бўлинмайди»; $B(x)$: « x — жуфт сон»; $C(x)$: « x — туб сон»; $D(x)$: « x сон 3 га қаррали». Қуйидаги предикатларнинг чинлик тўпلامини топинг:
 - 1) $A(x) \wedge B(x)$; 2) $C(x) \wedge B(x)$; 3) $C(x) \wedge D(x)$;
 - 4) $B(x) \wedge D(x)$; 5) $\overline{B(x)} \wedge D(x)$; 6) $A(x) \wedge \overline{D(x)}$;
 - 7) $\overline{B(x)} \wedge \overline{D(x)}$; 8) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$; 9) $A(x) \vee B(x)$;
 - 10) $B(x) \vee C(x)$; 11) $C(x) \vee D(x)$; 12) $B(x) \vee D(x)$;

- 13) $\overline{B(x)} \vee D(x)$; 14) $B(x) \wedge \overline{D(x)}$; 15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;
 16) $C(x) \rightarrow A(x)$; 17) $D(x) \rightarrow \overline{C(x)}$; 18) $A(x) \rightarrow B(x)$;
 19) $(A(x) \wedge C(x)) \rightarrow \overline{D(x)}$; 20) $(A(x) \wedge D(x)) \rightarrow \overline{C(x)}$.

3. R тўпламда $P(x) : x^2 + x + 1 > 0$ ва $Q(x) : x^2 - 4x + 3 = 0$ предикатлар берилган. Қуйидаги мулоҳазаларнинг қайси бири чин ва қайси бири ёлғон эканлигини аниқланг:

- 1) $\forall x P(x)$; 2) $\exists x P(x)$; 3) $\forall x Q(x)$; 4) $\exists x Q(x)$.

4. Қуйидаги предикатларнинг қайси бири айнан чин қийматга эга бўлади:

- 1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
 4) $(x + 1)^2 > x - 1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x + 1)^2$.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида мантиқий амаллар.
2. Умумийлик ва мавжудлик кванторлари
3. Бир жойли ва кўп жойли предикатлар.
4. Предикатнинг чинлик тўплами.
5. Айнан чин ва айнан ёлғон предикатлар.

3- §. Предикатлар мантиқининг формуласи. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати. Предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари

Предикатлар мантиқининг символлари. Формуланинг таърифи. Формуланинг қиймати тушунчаси. Тенг кучли формулалар. Асосий тенг кучли формулалар. Тенг кучли формулаларнинг исботлари.

Предикатлар мантиқида қуйидаги символлардан фойдаланамиз:

1. p, q, r, \dots символлар — 1 (чин) ва 0 (ёлғон) қийматлар қабул қилувчи ўзгарувчи мулоҳазалар.

2. x, y, z, \dots — бирор M тўпландан қиймат олувчи предмет ўзгарувчилар; x_0, y_0, z_0, \dots — предмет константалар, яъни предмет ўзгарувчиларнинг қийматлари.

3. $P(\cdot), F(\cdot)$ — бир жойли ўзгарувчи предикатлар; $Q(\cdot, \cdot, \dots, \cdot), R(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ — n жойли ўзгарувчи предикатлар.

4. $P^0(\cdot), Q^0(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ — ўзгармас предикатлар символи.

5. $\wedge, \vee, \rightarrow, -$ — мантиқий амаллар символлари.

6. $\forall x, \exists x$ — кванторли амаллар символлари.

7. $(,)$ (қавс, вергул) — қўшимча символлар.

3.1. Предикатлар мантиқи формуласининг таърифи.

1. Ҳар қандай ўзгарувчи ёки ўзгармас мулоҳаза формула (элементар) бўлади.

2. Агар $F(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ n жойли ўзгарувчи предикат ёки ўзгармас предикат ва x_1, x_2, \dots, x_n предмет ўзгарувчилар ёки предмет константалар бўлса, у ҳолда $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ формула бўлади. Бундай формулани *элементар формула* деб атаймиз. Бу формулада предмет ўзгарувчилар эркин бўлади, яъни кванторлар билан боғланган бўлмайди.

3. Агар A ва B шундай формулаларки, бирорта предмет ўзгарувчи бирида эркин ва иккинчисида боғланган ўзгарувчи бўлмаса, у ҳолда $A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B$ ҳам формула бўлади. Бу формулаларда дастлабки формулаларда эркин бўлган ўзгарувчилар эркин ва боғланган бўлган ўзгарувчилар боғланган ўзгарувчилар бўлади.

4. Агар A формула бўлса, у ҳолда \bar{A} ҳам формула бўлади. A формуладан \bar{A} формулага ўтишда ўзгарувчиларнинг характери ўзгармайди.

5. Агар $A(x)$ формула бўлса ва унинг ифодасига x предмет ўзгарувчи эркин ҳолда кирса, у ҳолда $\forall x A(x)$ ва $\exists x A(x)$ мулоҳазалар формула бўлади ва x предмет ўзгарувчи уларга боғланган ҳолда киради.

6. 1–5- бандларда формулалар деб айтилган мулоҳазалардан фарқ қилувчи ҳар қандай мулоҳаза формула бўлмайди.

Масалан, агар $P(x)$ ва $Q(x, y)$ — бир жойли ва икки жойли предикатлар, q, r — ўзгарувчи мулоҳазалар бўлса, у ҳолда қуйидаги мулоҳазалар формулалар бўлади:

$$q, P(x), P(x) \wedge Q(x^0, y), \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y), \\ \overline{(Q(x, y) \vee q)} \rightarrow r.$$

$\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x)$ мулоҳаза формула бўла олмайди, чунки таърифнинг 3- банддаги шарти бузилган: x предмет ўзгарувчи $\forall x Q(x, y)$ формулага боғланган ҳолда кирган, $P(x)$ га эса эркин ҳолда кирган.

Предикатлар мантиқи формуласининг таърифидан кўри-ниб турибдики, мулоҳазалар алгебрасининг ҳар қандай формуласи предикатлар мантиқининг ҳам формуласи бўлади.

1- м и с о л. Қуйидаги ифодаларнинг қайси бири предикатлар мантиқининг формуласи бўлади? Ҳар бир формуладаги боғланган ва эркин ўзгарувчиларни аниқланг:

- 1) $\exists x \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$;
- 2) $(p \rightarrow q) \wedge (\bar{r} \vee \bar{p})$;
- 3) $P(x) \wedge \forall x Q(x)$;
- 4) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall x R(x, y))$;
- 5) $(P(x) \leftrightarrow Q(x) \vee \exists y (\forall y R(y)))$;
- 6) $\exists x \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))$.

Е ч и м. 1, 2, 4, 6- ифодалар формула бўлади, чунки улар предикатлар мантиқи формуласининг таърифи асосида ҳосил қилинган. 3 ва 5- ифодалар формула эмас. 3- ифодада \wedge амали $P(x)$ ва $\forall x Q(x)$ формулаларга нисбатан қўлланилган. $P(x)$ да x предмет ўзгарувчи эркин ва $\forall x Q(x)$ да бўлса, умумийлик квантори билан боғланган. Бу ҳолат формула таърифининг 3- бандига зиддир. Шунинг учун 3- ифода формула бўла олмайди. 5- ифодада бўлса, мавжудлик квантори $\exists y$ умумийлик квантори тарқалган $\forall y R(y)$ формулага (бу ерда y ўзгарувчи боғланган) тарқалган. Бу ҳам таърифга зиддир. 1- формулада y эркин ўзгарувчи, x ва z ўзгарувчилар бўлса, боғланган. 2- формулада предмет ўзгарувчилар мавжуд эмас. 4- формулада x боғланган ўзгарувчи, y эса эркин ўзгарувчидир.

3.2. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати тушунчаси. Энди предикатлар мантиқи формуласининг қиймати тушунчасини аниқлайлик. Предикатлар мантиқи формуласининг ифодасига кирувчи предикатларнинг аниқланиш соҳаси M тўплам берилгандагина бу формуланинг мантиқий қиймати ҳақида сўз юритиш мумкин. Предикатлар мантиқи формуласининг мантиқий қиймати уч хил ўзгарувчилар: 1) формулага кирувчи ўзгарувчи мулоҳазаларнинг; 2) M тўпламдаги эркин предмет ўзгарувчиларнинг; 3) предикат ўзгарувчиларнинг қийматларига боғлиқ бўлади.

Уч хил ўзгарувчилардан ҳар бирининг маълум қийматларида предикатлар мантиқининг формуласи чин ёки ёлғон қиймат қабул қилувчи мулоҳазага айланади. Мисол сифатида қуйидаги формулани кўрайлик:

$$\exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z)). \quad (1)$$

(1) формулада $P(x, y)$ икки жойли предикат $M \times M$ тўпламда аниқланган, бу ерда $M = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$. (1) формула ифодасига ўзгарувчи предикат $P(x, y)$ ва предмет ўзгарувчилар x, y, z кирган. Бу ерда y ва z – кванторлар билан боғланган ўзгарувчилар, x – эркин ўзгарувчи.

$P(x, y)$ предикатнинг маълум қиймати сифатида тайинланган $P^0(x, y) : \langle x < y \rangle$ предикатни оламыз, эркин ўзгарувчи x га $x^0 = 5 \in M$ қиймат берамыз. У ҳолда y нинг $x^0 = 5$ дан кичик қийматлари учун $P^0(x^0, y)$ предикат ёлғон қиймат қабул қилади, $P(x, y) \rightarrow P(y, z)$ импликация эса z нинг ҳамма $z \in M$ қийматлари учун чин бўлади, яъни $\exists y \forall z (P^0(x, y) \rightarrow P^0(y, z))$ мулоҳаза «чин» қийматга эга бўлади.

2- мисол. Натурал сонлар тўплами N да $P(x), Q(x)$ ва $R(x)$ предикатлар берилган бўлсин. $\forall x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x))$ формуланинг қиймати қуйидаги ҳолларда топилсин:

1) $P(x) : \langle x \text{ сон } 3 \text{ га бўлинади} \rangle$, $Q(x) : \langle x \text{ сон } 4 \text{ га бўлинади} \rangle$, $R(x) : \langle x \text{ сон } 2 \text{ га бўлинади} \rangle$;

2) $P(x) : \langle x \text{ сон } 3 \text{ га бўлинади} \rangle$, $Q(x) : \langle x \text{ сон } 4 \text{ га бўлинади} \rangle$, $R(x) : \langle x \text{ сон } 5 \text{ га бўлинади} \rangle$.

Е ч и м . Иккала ҳолда ҳам $P(x) \wedge Q(x)$ формула x сон 12 га бўлинади деган тасдиқни ифодалайди. Ўз навбатида, ҳамма x лар учун x сон 12 га бўлинса, y ҳолда x сон 2 га ҳам бўлинади. Демак, 1- ҳолда формуланинг қиймати чин бўлади.

x соннинг 12 га бўлинишидан айрим x лар учун x нинг 5 га бўлиниши, бундан эса 2- ҳолда формуланинг ёлғон эканлиги келиб чиқади.

3- м и с о л . $P(x, y)$ предикат $M = N \times N$ тўпلامда аниқланган ва $P^0(x, y)$: « x сони y сонидан кичик» бўлганда $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)$ формуланинг мантиқий қиймати топинг.

Е ч и м . $P(x, y)$ предикатнинг кўрсатилган қиймати учун $\forall x \exists y P(x, y)$: «ҳар қандай x натурал сон учун шундай y натурал сон топиладики, y x дан катта бўлади» деган чин мулоҳазани билдиради. Шу вақтнинг ўзида $\exists x \forall y P(x, y)$: «Шундай x натурал сон мавжудки, y ҳар қандай натурал сон y дан кичик бўлади» деган тасдиқни билдиради. Бу тасдиқ ёлғондир. Демак, берилган формуланинг мантиқий қиймати ёлғон бўлади.

3.3. Предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари.

Предикатлар мантиқида ҳам тенг кучли формулалар тушунчаси мавжуд.

1- т а ъ р и ф . *Предикатлар мантиқининг иккита A ва B формуласи ўз таркибига кирувчи M соҳага оид ҳамма ўзгарувчиларнинг қийматларида бир хил мантиқий қиймат қабул қилса, улар M соҳада тенг кучли формулалар деб аталади.*

2- т а ъ р и ф . *Агар ихтиёрий соҳада A ва B формулалар тенг кучли бўлса, y ҳолда улар тенг кучли формулалар деб аталади ва $A \equiv B$ кўринишда ёзилади.*

Агар мулоҳазалар алгебрасидаги ҳамма тенг кучли формулалар ифодасидаги ўзгарувчи мулоҳазалар ўрнига предикатлар мантиқидаги формулалар қўйилса, y ҳолда улар предикатлар мантиқининг тенг кучли формулаларига айланади. Аммо предикатлар мантиқи ҳам ўзига хос асосий тенг куч-

ли формулаларга эга. Бу тенг кучли формулаларнинг асосийларини кўриб ўтайлик. $A(x)$ ва $B(x)$ — ўзгарувчи предикатлар ва C — ўзгарувчи мулоҳаза бўлсин. У ҳолда предикатлар мантиқида қуйидаги асосий тенг кучли формулалар мавжуд:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$.
8. $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$.
9. $\forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$.
10. $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$.
12. $\exists x [C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.
13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y [A(x) \wedge B(y)]$.
14. $\exists x [C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists x B(x)$.
15. $\exists x [B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$
16. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$.
17. $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Бу тенг кучли формулаларнинг айримларини исбот қилайлик.

Биринчи тенг кучли формула қуйидаги оддий тасдиқни (далилни) билдиради: агар ҳамма x лар учун $A(x)$ чин бўлмаса, у ҳолда шундай x топиладики, $\overline{A(x)}$ чин бўлади.

2- тенг кучлилик: агар $A(x)$ чин бўладиган x мавжуд бўлмаса, у ҳолда ҳамма x лар учун $\overline{A(x)}$ чин бўлади деган мулоҳазани билдиради.

3 ва 4- тенг кучлиликлар 1 ва 2- тенг кучлиликларнинг иккала тарафидан мос равишда инкор олиб ва икки марта инкор қонунини фойдаланиш натижасида ҳосил бўлади.

5- тенг кучлилиқни исбот қилайлик. Агар $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар бир вақтда айнан чин бўлса, у ҳолда $A(x) \wedge B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлади ва, демак,

$$\forall x A(x), \forall x B(x), \forall x [A(x) \wedge B(x)]$$

мулоҳазалар ҳам чин қиймат қабул қилади.

Шундай қилиб, бу ҳолда 5- тенг кучлилиқнинг иккала тарафи ҳам «чин» қиймат қабул қилади.

Энди ҳеч бўлмаганда икки предикатдан бирортаси, масалан, $A(x)$ айнан чин бўлмасин. У ҳолда $A(x) \wedge B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлмайди ва, демак, $\forall x A(x)$, $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$, $\forall x [A(x) \wedge B(x)]$ мулоҳазалар ёлғон қиймат қабул қилади, яъни бу ҳолда ҳам 5- тенг кучлилиқнинг икки тарафи бир хил (ёлғон) қиймат қабул қилади. Демак, 5- тенг кучлилиқнинг тўғри эканлиги исботланди.

Энди 8- тенг кучлилиқнинг тўғри эканлигини исбот қилайлик. Ўзгарувчи мулоҳаза C «ёлғон» қиймат қабул қилсин. У ҳолда $C \rightarrow B(x)$ предикат айнан чин бўлади ва $C \rightarrow \forall x B(x)$, $\forall x [C \rightarrow B(x)]$ мулоҳазалар чин бўлади. Демак, бу ҳолда 8- тенг кучлилиқнинг иккала тарафи ҳам бир хил (чин) қиймат қабул қиладилар.

Энди ўзгарувчи мулоҳаза C «чин» қиймат қабул қилсин. Агар бу ҳолда ўзгарувчи предикат $B(x)$ айнан чин бўлса, у ҳолда $C \rightarrow B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлади ва, демак,

$$\forall x B(x), C \rightarrow \forall x B(x), \forall x [C \rightarrow B(x)]$$

мулоҳазалар ҳам чин қиймат қабул қилади, яъни бу ҳолда 8- тенг кучлилиқнинг иккала тарафи ҳам бир хил (чин) қиймат қабул қилади.

Агар $B(x)$ предикат айнан чин бўлмаса, у ҳолда $C \rightarrow B(x)$ предикат ҳам айнан чин бўлмайди ва, демак,

$$\forall x B(x), C \rightarrow \forall x B(x), \forall x [C \rightarrow B(x)]$$

мулоҳазалар ёлғон қиймат қабул қилади.

Шундай қилиб, бу ҳолда ҳам 8- тенг кучлиликлнинг иккала тарафи бир хил (ёлғон) қиймат қабул қилади. Демак, 8- тенг кучлиликл ўринлидир.

Шуни таъкидлаб ўтамызки, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ формула $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ формулага ва $\exists x[A(x) \wedge B(x)]$ формула $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ формулага тенг кучли эмас.

Аммо, қуйидаги тенг кучлиликлар ўринлидир:

$$\begin{aligned} \forall xA(x) \vee \forall xB(x) &\equiv \forall xA(x) \vee \forall yB(y) \equiv \\ &\equiv \forall x[A(x) \vee \forall yB(y)] \equiv \forall x\forall y[A(x) \vee B(y)], \\ \exists xA(x) \wedge \exists xB(x) &\equiv \exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \equiv \\ &\equiv \exists x[A(x) \wedge \exists yB(y)] \equiv \exists x\exists y[A(x) \wedge B(y)]. \end{aligned}$$

Бу тенг кучлиликлардан биринчисини исбот қилайлик. Бунинг учун $\forall x$ квантор \vee дизъюнкция амалига нисбатан дистрибутив эмаслигини мисолда кўрсатайлик.

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A(x) : \langle (x-1)(x-2) = 0 \rangle, \\ B(x) &: \langle (x-3)(x-4)(x-5) = 0 \rangle \end{aligned}$$

бўлсин. Аниқки, M соҳада $\forall xA(x)$ ва $\forall xB(x)$ мулоҳазалар ёлғон ва, демак, бу тенг кучлиликлнинг чап томонидаги $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ мулоҳаза ҳам ёлғондир. Агар $\forall x$ квантор \vee га нисбатан дистрибутив, яъни

$$\forall x[A(x) \vee B(x)] = \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

бўлганда эди, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ чин мулоҳаза бўлганлиги учун қарама-қаршилиқ ҳосил бўлар эди. Демак,

$$\forall x[A(x) \vee B(x)] \neq \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

бўлади.

Энди бу тенг кучлиликларнинг ўнг томони ҳар доим чап томонидаги мулоҳаза билан бир хил қиймат қабул қилишини кўрсатамыз. Агар $\forall xA(x) \equiv 1$ ёки $\forall xB(x) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда бу тенг кучлиликл тўғри эканлиги аниқ, чунки бу ҳолда тенг кучлиликлнинг иккала томони ҳам бир вақтда чин қиймат қабул қилади. Бу ҳолда фақат $\forall xB(x) \equiv \forall yB(y)$ эканлигини кўрсатиш кифоя. Аммо бу охириги тенг кучли-

лик табиийдир, чунки x предмет ўзгарувчи ҳам, y предмет ўзгарувчи ҳам M соҳанинг ҳар бир элементини қиймат сифатида қабул қилади.

Энди $\forall x A(x) \equiv 0$ ва $\forall x B(x) \equiv 0$ бўлсин. У ҳолда тенг кучлиликнинг чап тарафи 0 (ёлгон) қиймат қабул қилади. Ўнг томонида $\forall x$ кванторининг таъсир соҳаси $A(x) \vee B(y)$ формула бўлса-да, $B(y)$ предикатда x предмет ўзгарувчи қатнашмаганлиги сабабли, $\forall x$ нинг таъсири фақат $A(x)$ га тарқалади. Худди шу каби, $\forall y$ квантор фақат $B(y)$ га таъсир этади. Демак, $\forall x \forall y [A(x) \vee B(y)]$ формула ҳам ёлгон қийматга эга бўлади.

Келтирилган иккинчи тенг кучлиликни ҳам худди шу каби исбот қилиш мумкин ва буни ўқувчига ҳавола этамиз.

4- м и с о л . $\exists x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y \exists x (A(x) \wedge B(y))$ тенг кучлилик ўринли эканлигини кўрсатинг.

Е ч и м .

$$\begin{aligned} \exists x \forall y (A(x) \wedge B(y)) &\equiv \exists x (A(x) \wedge \forall y B(y)) \equiv \exists x A(x) \wedge \forall y B(y), \\ \forall y \exists x (A(x) \wedge B(y)) &\equiv \forall y (\exists x A(x) \wedge B(y)) = \exists x A(x) \wedge \forall y B(y). \end{aligned}$$

Демак, келтирилган тенг кучлилик ўринли экан.

4- §. Предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар

- ☑ *Формуланинг деярли нормал шакли. Формуланинг нормал шакли. Ҳар қандай формулани нормал шаклга келтириш. Бажарилувчи формулалар. Умумқийматли формулалар. Айнан чин формула. Айнан ёлгон формула. Мантиқ қонуни. Умумқийматли ва бажарилувчи формулалар ҳақидаги теоремалар.*

4.1. Предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли.

1- таъриф . *Агар предикатлар мантиқи формуласи ифодасида фақат инкор, конъюнкция, дизъюнкция (\neg , \wedge , \vee) амаллари ва кванторли амаллар (\forall , \exists) қатнашиб, инкор амали*

элементар формулаларга (предмет ўзгарувчилар ва ўзгарувчи предикатларга) тегишли бўлса, бундай формула **деярли нормал шаклда** дейилади.

Равшанки, предикатлар мантиқи ва мулоҳазалар алгебрасидаги асосий тенг кучлиликлардан фойдаланиб, предикатлар мантиқининг ҳар бир формуласини деярли нормал шаклга келтириш мумкин. Масалан,

$$(\exists xP(x) \rightarrow \forall yQ(y)) \rightarrow R(z)$$

формулани деярли нормал шаклга келтирайлик.

$$\begin{aligned} (\exists xP(x) \rightarrow \forall yQ(y)) \rightarrow R(z) &\equiv (\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)) \rightarrow R(z) \equiv \\ &\equiv \overline{(\exists xP(x) \vee \forall yQ(y))} \vee R(z) = \overline{\exists xP(x)} \wedge \overline{\forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv \\ &\equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z). \end{aligned}$$

Демак,

$$(\exists xP(x) \rightarrow \forall yQ(y)) \rightarrow R(z) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Предикатлар мантиқининг деярли нормал шаклдаги формулалари орасида нормал шаклдаги формулалари муҳим роль ўйнайди.

Бу формулаларда кванторли амаллар ёки бутунлай қатнашмайди, ёки улар мулоҳазалар алгебрасининг ҳамма амалларидан кейин бажарилади, яъни нормал шаклдаги формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$(\sigma x_1)(\sigma x_2) \dots (\sigma x_n) A(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad n \leq m,$$

бунда (σx_i) симболи ўрнида $\forall x_i$ ёки $\exists x_i$ кванторларнинг бири тушунилади ва A формула ифодасида кванторлар бўлмайди.

1-теорема. *Предикатлар мантиқининг ҳар қандай формуласини нормал шаклга келтириш мумкин.*

Исбот. Формула деярли нормал шаклга келтирилган деб ҳисоблаймиз ва уни нормал шаклга келтириш мумкинлигини кўрсатамиз.

Агар бу формула элементар формула бўлса, у ҳолда унинг ифодасида кванторлар бўлмайди ва, демак, у нормал шакл кўринишида бўлади.

Энди фараз қиламизки, теорема кўпи билан k амални қамраган формула учун тўғри бўлсин ва уни шу фараз асо-сида $k + 1$ амални қамраган формула учун исбот қиламиз.

А ифода $k + 1$ амални ўз ичига олган формула ва унинг кўриниши $\sigma x L(x)$ шаклда бўлсин, бу ерда σx кванторлар-нинг бирини ифодалайди. $L(x)$ формула k амални ўз ичига олганлиги туфайли уни нормал шаклга келтирилган деб ҳисоблаймиз. У ҳолда $\sigma x L(x)$ формула таърифга асосан нор-мал шаклда бўлади.

А формула \bar{L} кўринишда бўлсин, бунда L формула нор-мал шаклга келтирилган ва k амални ўз ичига олган деб ҳисобланади. У ҳолда

$$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)} \quad \text{ва} \quad \overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$$

тенг кучлиликлардан фойдаланиб, инкор амалини предикатлар устига туширамиз. Натижада A формулани нормал шаклга келтирган бўламиз.

Энди A формула $L_1 \vee L_2$ кўринишда бўлсин, бу ерда L_1 ва L_2 нормал шаклга келтирилган формулалар деб қаралади. L_2 формулада боғланган предмет ўзгарувчиларни шундай қай-та номлаймизки, L_1 ва L_2 формулалардаги ҳамма боғланган предмет ўзгарувчилар ҳар хил бўлсин. У ҳолда L_1 ва L_2 фор-мулаларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$L_1 \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2) \dots (\sigma x_m) \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad m \leq n,$$

$$L_2 \equiv (\sigma y_1)(\sigma y_2) \dots (\sigma y_p) \alpha_2(y_1, y_2, \dots, y_q), \quad p \leq q.$$

$C \vee \forall x B(x) = \forall x [C \vee B(x)]$ ва $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$ тенг кучли-ликлардан фойдаланиб, L_2 формулани $(\sigma x_1), (\sigma x_2), \dots, (\sigma x_m)$ квантор амаллари остига киритамиз, яъни A формулани ушбу кўринишга келтирамиз:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2) \dots (\sigma x_m) (\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n)) \vee \\ \vee (\sigma y_1)(\sigma y_2) \dots (\sigma y_p) \alpha_2(y_1, y_2, \dots, y_q)).$$

Сўнгра $\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ формулани

$$(\sigma y_1), (\sigma y_2), \dots, (\sigma y_p)$$

квантор амаллари остига киритамиз. Натижада A формуланинг нормал шаклини ҳосил қиламиз:

$$A \equiv (\sigma x_1)(\sigma x_2) \dots (\sigma x_m)(\sigma y_1)(\sigma y_2) \dots (\sigma y_p) \times \\ \times (\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \alpha_2(y_1, y_2, \dots, y_q)).$$

$L_1 \wedge L_2$ кўринишидаги A формулани нормал шаклга келтиришнинг исботи худди юқорида каби бўлади.

Агар формулани нормал шаклга келтириш жараёнида $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ ёки $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ кўринишдаги ифодаларни кўришга тўғри келса, у ҳолда

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x [A(x) \wedge B(x)]$$

ва

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x [A(x) \vee B(x)]$$

тенг кучлиликлардан фойдаланиш керак бўлади.

1- м и с о л . $A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \exists x \forall y \overline{Q(x, y)}$ формулани нормал шаклга келтириш талаб этилсин.

A формулада тенг кучли алмаштиришларни ўтказиб, уни нормал шаклга келтирамиз:

$$A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)} \equiv \forall x (\exists y P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \\ \equiv \forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv \forall x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge \overline{Q(x, z)}).$$

4.2. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар.

2- таъриф . Агар A формула ифодасига кирувчи ва M соҳага оид ўзгарувчиларнинг шундай қийматлари мавжуд бўлиб, бу қийматларда A формула чин қиймат қабул қилса, у ҳолда предикатлар мантиқининг A формуласи M соҳада **бажарилувчи формула** деб аталади.

3- таъриф . Агар шундай соҳа мавжуд бўлиб, унда A формула бажариладиган бўлса, у ҳолда A **бажарилувчи формула** деб аталади.

Демак, агар бирор формула бажарилувчи бўлса, бу ҳали унинг исталган соҳада бажарилувчанлигини билдирмайди.

4- таъриф. Агар A нинг ифодасига кировчи ва M соҳага оид ҳамма ўзгарувчиларнинг қийматларида A формула чин қиймат қабул қилса, у ҳолда A формула M соҳада **айнан чин формула** деб аталади.

5- таъриф. Агар A формула ҳар қандай соҳада айнан чин бўлса, у ҳолда A **умумқийматли формула** деб аталади.

6- таъриф. Агар A формула ифодасига кировчи ва M соҳага оид ҳамма ўзгарувчиларнинг қийматларида A формула ёлғон қиймат қабул қилса, у ҳолда A формула M соҳада **айнан ёлғон формула** деб аталади.

Келтирилган таърифлардан ушбу тасдиқлар келиб чиқади:

1. Агар A умумқийматли формула бўлса, у ҳолда у ҳар қандай соҳада ҳам бажарилувчи формула бўлади.

2. Агар A формула M соҳада айнан чин формула бўлса, у ҳолда у шу соҳада бажарилувчи формула бўлади.

3. Агар M соҳада A айнан ёлғон формула бўлса, у ҳолда у бу соҳада бажарилмайдиган формула бўлади.

4. Агар A бажарилмайдиган формула бўлса, у ҳолда у ҳар қандай соҳада ҳам айнан ёлғон формула бўлади.

Демак, предикатлар мантиқи формулаларини икки синфга ажратиш мумкин: *бажарилувчи* синфлар ва *бажарилмас* (бажарилмайдиган) синфлар формулалари.

7- таъриф. *Умумқийматли формула мантиқ қонуни* деб аталади.

Энди бир нечта мисоллар келтирайлик.

1- м и с о л. $\forall x \exists y P(x, y)$ формула бажарилувчидир. Ҳақиқатан ҳам, агар $P(x, y) : \langle x < y \rangle$ предикат $M = E \times E$ соҳада аниқланган ($E = \{0, 1, 2, \dots, n\}$) бўлса, у ҳолда $\forall x \exists y P(x, y)$ формула M соҳада айнан чин формула бўлади, демак, бу соҳада бажарилувчи формуладир. Аммо, агар $E_1 = \{0, 1, 2, \dots, k\}$ учун $\langle x < y \rangle$ предикат чекли $M_1 = E_1 \times E_1$ соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда $\forall x \exists y P(x, y)$ формула M_1 соҳада айнан ёлғон формула бўлади ва, демак, M_1 соҳада бажарилмасдир. Равшанки, $\forall x \exists y P(x, y)$ умумқийматли формула бўлмайди.

2- мисол. $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ формула бажарилувчидир.

Ҳақиқатан ҳам, агар $P(x)$: « x — жуфт сон» предикат $E = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ учун $M = E \times E$ соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда бу формула M соҳада айнан чин бўлади, демак, M соҳада бажарилувчи формуладир.

Аммо, агар $P(x)$: « x — жуфт сон» предикат $E_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ учун $M_1 = E_1 \times E_1$ соҳада аниқланган бўлса, у ҳолда $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ формула M_1 соҳада айнан ёлғон формула бўлади, демак, бу соҳада бажарилмас формуладир.

3- мисол. $\forall x [P(x) \vee \overline{P(x)}]$ формула исталган M соҳада айнан чин бўлади.

Демак, у умумқийматли формула, яъни мантиқий қонундир.

4- мисол. $\forall x [P(x) \wedge \overline{P(x)}]$ формула исталган соҳада айнан ёлғон ва шунинг учун ҳам у бажарилмас формула бўлади.

Энди предикатлар мантиқидаги формулаларнинг умумқийматлиги ва бажарилувчанлиги орасидаги муносабатни кўриб ўтайлик.

2-теорема. А умумқийматли формула бўлиши учун унинг инкори \overline{A} бажарилувчи формула бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. А умумқийматли формула бўлсин. У ҳолда, равшанки, \overline{A} исталган соҳада айнан ёлғон формула бўлади ва шунинг учун ҳам у бажарилмас формуладир.

Етарлилиги. \overline{A} исталган соҳада бажарилувчи формула бўлмасин. У ҳолда бажарилмас формуланинг таърифига асосан \overline{A} исталган соҳада айнан ёлғон формуладир. Демак, A исталган соҳада айнан чин формула бўлади ва у умумқийматлидир.

3-теорема. А бажарилувчи формула бўлиши учун \overline{A} нинг умумқийматли формула бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. А бажарилувчи формула бўлсин. У ҳолда шундай M соҳа ва A формула таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг шундай қийматлар мажмуи (сатри) мав-

жудки, A формула бу қийматлар сатрида чин қиймат қабул қилади. Аниққи, ўзгарувчиларнинг бу қийматлар сатрида \bar{A} формула ёлғон қиймат қабул қилади ва, демак, \bar{A} умумқийматли формула бўла олмайди.

Етарлилиги. \bar{A} умумқийматли формула бўлмасин. У ҳолда шундай M соҳа ва A формула таркибига кирувчи ўзгарувчиларнинг шундай қийматлар сатри мавжудки, \bar{A} формула бу қийматлар сатрида ёлғон қиймат қабул қилади. Бу қийматлар сатрида A формула чин қиймат қабул қилганлиги учун у бажарилувчи формула бўлади.

5- мисол. $A \equiv (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ формуланинг умумқийматлигини исботланг.

Ечим. A формула исталган M соҳада аниқланган деб ҳисоблаб, тенг кучли алмаштиришларни ўтказамиз:

$$\begin{aligned} A &\equiv \forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \\ &\rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \overline{\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)})} \vee \\ &\vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \exists x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\exists x Q(x)} \equiv \exists x(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}) \vee \\ &\vee \overline{\exists x Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \exists x(\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)} \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \\ &\equiv \exists x(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv (\exists x \overline{P(x)} \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \overline{\exists x Q(x)} \equiv \\ &\equiv 1 \vee \overline{\exists x Q(x)} \equiv 1, \end{aligned}$$

яъни A формула исталган соҳада ҳар қандай $P(x)$ ва $Q(x)$ бир жойли предикатлар учун айнан чин, демак, у умумқийматли формуладир.

6- мисол. $A \equiv \exists x[(F(x) \rightarrow \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \rightarrow F(x))]$ нинг айнан ёлғон формула эканлигини кўрсатинг.

Ечим. $(F(x) \rightarrow \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \rightarrow F(x)) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ га эгамиз. $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ айнан ёлғон формула эканлигидан, $A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ҳам айнан ёлғон формула бўлади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги ифодаларнинг қайси бири предикатлар мантиқининг формуласи бўлишини аниқланг. Ҳар бир формуладаги эркин ва боғланган ўзгарувчиларни кўрсатинг:
 - 1) $\exists x \exists y P(x, y)$; 2) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$; 3) $\forall x \exists y P(x, y)$;
 - 4) $p \rightarrow \forall x P(x, y)$; 5) $\exists x P(x, y) \wedge Q(y, x)$.
2. $P(x, y)$ предикат $M = N \times N$ тўпламда аниқланган ва $P(x, y) : \langle x < y \rangle$ бўлсин.
 - 1) Қуйида берилган предикатларнинг қайси бири айнан чин ва қайси бири айнан ёлғон эканлигини аниқланг:
 - а) $\exists x P(x, y)$; б) $\forall x P(x, y)$; в) $\exists y P(x, y)$; г) $\forall y P(x, y)$.
 - 2) Қуйидаги мулоҳазаларнинг қайси бири чин ва қайси бири ёлғон эканлигини аниқланг:
 - а) $\exists x \forall y P(x, y)$; б) $\forall x \exists y P(x, y)$; в) $\forall y \exists x P(x, y)$;
 - г) $\forall x \forall y P(x, y)$; д) $\forall y \forall x P(x, y)$; е) $\forall y \forall x P(x, y)$;
 - ж) $\exists x \exists y P(x, y)$; з) $\exists y \exists x P(x, y)$.
3. Қуйидаги тенг кучлиликларнинг тўғри эканлигини исбот қилинг:
 - 1) $\forall x A(x) \equiv \overline{\overline{\exists x A(x)}}$;
 - 2) $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$;
 - 3) $C \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x (C \wedge A(x))$;
 - 4) $C \vee \forall x A(x) \equiv \forall x (C \vee A(x))$;
 - 5) $\exists x (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;
 - 6) $\exists x (C \vee A(x)) \equiv C \vee \exists x A(x)$;
 - 7) $\exists x (C \wedge A(x)) \equiv C \wedge \exists x A(x)$;
 - 8) $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$;
 - 9) $\forall x (A(x) \rightarrow C) \equiv \exists x A(x) \rightarrow C$;
 - 10) $\exists x (C \rightarrow A(x)) \equiv C \rightarrow \exists x A(x)$;
 - 11) $\exists x (A(x) \rightarrow C) \equiv \forall x A(x) \rightarrow C$.

4. $A(x)$ ва $B(x)$ ихтиёрий предикатлар бўлсин. $A(x) \rightarrow \overline{B(x)}$ формулага қуйида берилган формулаларнинг қайси бири тенг кучли бўлади?

1) $A(x) \vee B(x)$; 2) $\overline{A(x) \vee B(x)}$; 3) $\overline{A(x)} \rightarrow B(x)$;

4) $\overline{B(x)} \rightarrow A(x)$; 5) $\overline{A(x) \wedge B(x)}$; 6) $A(x) \wedge \overline{B(x)}$;

7) $B(x) \rightarrow \overline{A(x)}$.

5. Қуйида келтирилган формулаларнинг қайси бири умумқийматли:

1) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \rightarrow (\exists xP_1(x) \wedge \exists xP_2(x))$;

2) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \leftrightarrow (\exists xP_1(x) \wedge \exists xP_2(x))$;

3) $(\forall xP_1(x) \vee \forall xP_2(x)) \rightarrow \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$;

4) $(\forall xP_1(x) \vee \forall xP_2(x)) \leftrightarrow \forall x(P_1(x) \vee P_2(x))$;

5) $\forall x(q \rightarrow P_1(x)) \leftrightarrow (q \rightarrow \forall xP_1(x))$;

6) $\forall x(P(x_1) \rightarrow P_2(x)) \leftrightarrow (\forall xP_1(x) \rightarrow \forall xP_2(x))$;

7) $\exists x(P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \rightarrow (\exists xP_1(x) \rightarrow \exists xP_2(x))$;

8) $\forall x(P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \leftrightarrow (\exists xP(x_1) \rightarrow \forall xP_2(x))$;

9) $\forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) \rightarrow (\forall xA_1(x) \rightarrow \forall xA_2(x))$;

10) $\forall x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) \rightarrow (\exists xA_1(x) \rightarrow \exists xA_2(x))$;

11) $\exists x(A_1(x) \rightarrow A_2(x)) \leftrightarrow (\forall xA_1(x) \rightarrow \forall xA_2(x))$;

12) $\exists xQ(x) \rightarrow \forall xQ(x)$;

13) $\forall xQ(x) \rightarrow \exists xQ(x)$;

14) $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$;

15) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \leftrightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$;

16) $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$;

17) $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$?



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Предикатлар мантиқининг символлари ва формуласи.
2. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати. Тенг кучли формулалар. Асосий тенг кучли формулалар.

3. Формуланинг деярли нормал шакли. Формуланинг нормал шакли.
4. Ҳар қандай формулани нормал шаклга келтириш мумкинлиги.
5. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар. Айнан чин ва айнан ёлғон формулалар.
6. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар ҳақидаги теоремалар.

5- §. Ечилиш муаммоси. Хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлилигини топиш алгоритмлари

Ечилиш муаммоси. Чекли соҳаларда ечилиш муаммоси. Ёпиқ формула. Формуланинг умумий ёпилиши. Формуланинг мавжудлигини ёпиш. Таркибида бир турдаги квантор амали қатнашувчи нормал шаклдаги формулалар учун ечилиш муаммоси.

5.1. Ечилиш муаммоси. Предикатлар мантиқида ечилиш муаммоси мулоҳазалар алгебрасида қандай қўйилган бўлса, худди шундай қўйилади: предикатлар мантиқининг исталган формуласи ёки умумқийматли, ёки бажарилувчи, ёки айнан ёлғон (бажарилмас) формула эканлигини аниқлаб берувчи алгоритм мавжудми ёки йўқми? Бу масала **ечилиш муаммоси** деб аталади. Агар бундай алгоритм мавжуд бўлса эди, у (худди мулоҳазалар алгебрасидагидек) предикатлар мантиқидаги исталган формулани айнан чинлигини аниқлаб берувчи критерийга келтирилган бўлар эди.

Агар ушбу муаммо мулоҳазалар алгебраси учун осон ечилган бўлса, предикатлар мантиқи учун бу муаммони ечиш катта қийинчиликларга дуч келди. XX асрнинг 30- йилларида алгоритм тушунчасига аниқ таъриф берилгандан сўнг мазкур муаммо умумий ҳолда ижобий ҳал этилиши мумкин эмаслиги, яъни изланган алгоритм мавжуд эмаслиги маълум бўлиб қолди.

1936 йилда америкалик олим А.Чёрч предикатлар мантиқининг ечилиш муаммоси умумий ҳолда алгоритмик ечилмаслигини исботлади, яъни предикатлар мантиқининг ис-

талган формуласи қайси (умумқийматли, бажарилувчи ва бажарилмас) синфга киришини аниқлаб берадиган алгоритм мавжуд эмаслигини кўрсатди.

Ечилиш муаммоси предикатлар мантиқи учун ижобий ечилмаса-да, лекин предикатлар мантиқи формулаларининг баъзи синфлари учун бу муаммо ижобий ҳал этилишини кўрсатайлик.

5.2. Чекли соҳаларда ечилиш муаммоси. Ечилиш муаммоси чекли соҳаларда ечилувчидир, яъни ижобий ҳал бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда кванторли амалларни конъюнкция ва дизъюнкция амаллари билан алмаштириш мумкин. Натижада предикатлар мантиқи формуласи мулоҳазалар алгебраси формуласига келтирилади. Маълумки, мулоҳазалар алгебраси учун ечилиш муаммоси ечиладигандир.

Масалан, $\forall x \exists y [P(x, y) \vee \overline{P(x, x)}]$ формула $M = \{a, b\}$ икки элементли чекли соҳада аниқланган бўлсин. У ҳолда уни ушбу кўринишга келтириш мумкин:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y [P(x, y) \vee \overline{P(x, x)}] &\equiv \forall x [P(x, a) \vee \overline{P(x, x)} \vee P(x, b)] \equiv \\ &\equiv [P(a, a) \vee \overline{P(a, a)} \vee P(a, b)] \wedge [P(b, a) \vee \overline{P(b, b)} \vee P(b, b)]. \end{aligned}$$

Ҳосил этилган конъюнктив нормал шаклдаги формуланинг ҳар бир элементар дизъюнкцияси ифодасида битта мулоҳаза ўзининг инкори билан биргаликда қатнашмоқда. Демак, мулоҳазалар алгебрасининг бу формуласи доимо чин қиймат қабул қилади, яъни айнан чин бўлади.

5.3. Таркибида бир турдаги квантор амали қатнашувчи нормал шаклдаги формулалар учун ечилиш муаммоси.

1- таъриф. *Агар предикатлар мантиқи формуласи таркибида эркин предмет ўзгарувчилар бўлмаса, у ҳолда бундай формула ёпиқ формула деб аталади.*

2- таъриф. *Агар предикатлар мантиқи формуласи C таркибида x_1, x_2, \dots, x_n эркин ўзгарувчилар мавжуд бўлса, у ҳолда*

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

формула C формуланинг умумий ёпилиши ва

$$B = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n C(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

формула C формуланинг **мавжудлигини ёпиш** деб аталади.

1-теорема. Агар предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги ёпиқ формуласи таркибида (ифодасида) фақат n та мавжудлик квантори қатнашган ҳамда бир элементли исталган соҳада айнан чин бўлса, у ҳолда у умумқийматли формуладир.

Исбот. Предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги формуласи

$$B \equiv \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n C(q_1, q_2, \dots, P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots) \quad (1)$$

кўринишда бўлсин, бунда C формула ифодасида кванторлар қатнашмайди, q_i — мантиқий ўзгарувчи, P_i — бир жойли предикатлар, Q_i — икки жойли предикатлар. Бу формуланинг чинлик қиймати унинг таркибида қатнашаётган q_1, q_2, \dots мантиқий ўзгарувчилар ва $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ предикатларга боғлиқ.

Теореманинг шартига асосан бир a элементли исталган $M = \{a\}$ соҳада бу формула айнан чин, яъни

$$C(q_1, q_2, \dots, P_1(a), P_2(a), \dots, Q_1(a, a), Q_2(a, a), \dots) \quad (2)$$

формула айнан чин бўлади. Аниқки, (2) формула мулоҳазалар алгебрасининг формуласи бўлади.

(1) формула умумқийматли эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда шундай M_1 соҳа ва ўзгарувчиларнинг шундай қийматлар мажмуаси $q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots$ мавжудки, унда (1) формула ёлғон қиймат қабул қилади, яъни

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots) = 0. \quad (3)$$

(3) формуланинг инкорини оламиз:

$$\begin{aligned} & \overline{\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n (q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots)} \equiv \\ & \equiv \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots)} = 1. \end{aligned}$$

Бу ердан

$$C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots) \quad (4)$$

формуланинг M_1 соҳага оид предмет ўзгарувчиларнинг қандай олинишидан қатъи назар айнан чинлиги келиб чиқади. M_1 соҳадан ихтиёрий x_0 элементни олиб, уни (4) формуладаги предмет ўзгарувчилар ўрнига қўйиб чиқамиз. У ҳолда

$$C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), \dots, Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), \dots) = 1.$$

Демак,

$$C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0(x_0), P_2^0(x_0), \dots, Q_1^0(x_0, x_0), Q_2^0(x_0, x_0), \dots) = 0.$$

Бу натижа (2) формуланинг айнан чин эканлигига зиддир ва (1) формула умумқийматли эмас деган фаразимизнинг нотўғрилигини кўрсатади. Шундай қилиб, (1) формула умумқийматлидир.

2-теорема. Агар предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги ёпиқ формуласи ифодасида n та умумийлик квантори қатнашса ва бу формула кўпи билан n та элементли ҳар қандай тўпламда (соҳада) айнан чин бўлса, у ҳолда у умумқийматли бўлади.

Исбот. Предикатлар мантиқининг нормал шаклдаги формуласи қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$A \equiv \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C(q_1, q_2, \dots, P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots), \quad (5)$$

бунда q_1, q_2, \dots — мантиқий ўзгарувчилар, P_1, P_2, \dots — бир жойли предикатлар, Q_1, Q_2, \dots — икки жойли предикатлар. (1) формула умумқийматли эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда n тадан ортиқ элементга эга бўлган M_1 соҳа мавжудки, бунда (1) формула айнан чин бўлмайди. Бошқача қилиб айтганда, ўзгарувчиларнинг шундай

$$q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots$$

қийматлар мажмуаси мавжудки,

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots) \equiv 0. \quad (6)$$

Бу ердан

$$\begin{aligned} & \overline{\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots)} \equiv \\ & \equiv \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \overline{C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots)} \equiv 1. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, предмет ўзгарувчиларнинг шундай $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in M_1$ қийматлари мавжудки,

$$\overline{C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots)} \equiv 1$$

ва

$$C(q_1^0, q_2^0, \dots, P_1^0, P_2^0, \dots, Q_1^0, Q_2^0, \dots) \equiv 0$$

бўлади.

Демак, M_1 соҳадан кўпи билан n та элементи бўлган шундай M соҳани ажратиш мумкинки, у ерда бу формула айнан чин бўлмайди. Бу натижа теореманинг шартига зиддир ва у (1) формула умумқийматли эмас деган нотўғри фаразимиздан келиб чиқди. Демак, (1) формула умумқийматли формуладир.

Таркибида фақат бир жойли (битта предмет ўзгарувчига боғлиқ бўлган) предикатлар қатнашган формулалар учун ечилиш муаммоси ижобий ҳал этилиши қуйидаги теоремадан кўринади.

3-теорема. *Предикатлар мантиқининг таркибига n та бир жойли предикат кирган A формуласи бирор M тўпلامда бажарилувчи бўлса, у ҳолда бу формула элементлари сони 2^n дан катта бўлмаган M_1 тўпلامда ҳам бажарилувчи бўлади.*

Ушбу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Предикатлар мантиқининг таркибига фақат n та бир жойли предикат кирган A формуласи элементлари сони 2^n дан кўп бўлмаган ихтиёрий тўпلامда айнан чин бўлса, у ҳолда бу формула ихтиёрий тўпلامда ҳам айнан чин бўлади.

Қуйидаги теорема ҳам предикатлар мантиқининг катта синфини ташкил қилувчи формулалари учун ечилиш муаммосини ҳал қилади.

4- теорема. Агар предикатлар мантиқининг A формуласи бирор чексиз соҳада бажарилувчи бўлса, у ҳолда у чекли соҳада ҳам бажарилувчи бўлади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қуйидаги формуланинг умумқийматли эканлигини исботланг:

$$A \equiv (P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}.$$

2. Агар M тўпلامда аниқланган $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар чин қийматли бўлса, у ҳолда уларнинг чинлик тўпلامлари қандай шартларни қаноатлантириши керак:

- 1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \exists x(\overline{A(x)} \wedge B(x))$;
- 2) $\overline{\exists x(A(x) \wedge B(x))} \wedge (\forall(A(x) \rightarrow B(x)))$;
- 3) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\forall x(A(x) \rightarrow B(x)))$?

3. $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ тўпلامда қуйидаги предикатлар берилган:

$A(x)$: « x 5 га бўлинмайди»;

$B(x)$: « x жуфт сон»;

$C(x)$: « x туб сон»;

$D(x)$: « x 3 га қаррали».

Қуйидаги предикатларнинг чинлик тўпلامини топинг:

- 1) $A(x) \wedge B(x)$;
- 2) $C(x) \wedge B(x)$;
- 3) $C(x) \wedge D(x)$;
- 4) $B(x) \wedge D(x)$;
- 5) $\overline{B}(x) \wedge D(x)$;
- 6) $A(x) \wedge \overline{D}(x)$;
- 7) $\overline{B}(x) \wedge \overline{D}(x)$;
- 8) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;
- 9) $A(x) \vee B(x)$;
- 10) $B(x) \vee C(x)$;
- 11) $C(x) \vee D(x)$;
- 12) $B(x) \vee D(x)$;
- 13) $\overline{B}(x) \vee D(x)$;
- 14) $B(x) \vee \overline{D}(x)$;
- 15) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;
- 16) $C(x) \rightarrow A(x)$;
- 17) $D(x) \rightarrow \overline{C}(x)$;
- 18) $A(x) \rightarrow B(x)$;
- 19) $(A(x) \wedge C(x)) \rightarrow \overline{D}(x)$;
- 20) $(A(x) \wedge D(x)) \rightarrow \overline{C}(x)$.



Муस्ताқил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Предикатлар мантиқида ечилиш муаммоси.
2. Чекли соҳаларда ечилиш муаммоси.
3. Ёпиқ формула. Формуланинг умумий ёпилиши. Формуланинг мавжудлигини ёпиш.
4. Таркибида бир турдаги квантор амали қатнашувчи нормал шаклдаги формулалар учун ечилиш муаммоси.

6-§. Предикатлар мантиқининг математикага татбиқи

- Математик таъриф ва теоремаларни предикатлар мантиқи тили воситаси билан ифодалаш. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифини ифодалаш. Функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифини ифодалаш. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифини ифодалаш. Ўсувчи функциянинг таърифини ифодалаш. Чегараланган функциянинг таърифини ифодалаш. Қарама-қарши тасдиқларни тузиш. Тўғри, тескари ва қарама-қарши теоремаларни ифодалаш. Етарли ва зарурий шартларни ифодалаш.*

6.1. Математик мулоҳазаларни предикатлар мантиқи формуласи кўринишида ёзиш. Қуйида асосий математик тushунчалар — таъриф ва теоремаларни предикатлар мантиқи тили воситаси билан қандай ифодалаш мумкинлигини кўриб ўтамиз.

Ҳар қандай математик фан шу фанда қаралаётган объектлар ҳақидаги мулоҳазалар билан иш кўради. Мантиқ ва тўпламлар назариясининг символлари ҳамда берилган фаннинг махсус символлари ёрдамида шундай мулоҳазалар предикатлар мантиқининг формуласи кўринишида ифодаланиши мумкин. Предикатлар мантиқининг тили математик тushунчалар ўртасидаги муносабатни ифодалашга, таъриф, теорема ва исботларни ёзишга имконият яратади. Бу ёзишларни мисолларда кўрайлик.

1. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифи. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \in N (n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Бу ерда уч жойли предикат $A(\varepsilon, n, n_0)$: $(n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$ дан фойдаланилган.

2. Функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифи. Бу таърифни ушбу шаклда ёзиш мумкин:

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Бу ерда $B(\varepsilon, \delta, x)$: $(0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$ уч жойли предикатдан фойдаланилган.

3. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифи. E тўпلامда аниқланган $f(x)$ функция учун $x_0 \in E$ да

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

бўлса, $f(x)$ функция $x_0 \in E$ нуқтада **узлуксиз** деб аталади.

Бу ерда ҳам уч жойли $P(\varepsilon, \delta, x)$ предикатдан фойдаланилди.

4. Ўсувчи функциянинг таърифи. E тўпلامда аниқланган $f(x)$ функция учун

$$\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E_2 (x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

бўлса, бу функция шу тўпلامда **ўсувчи** деб аталади.

Бу ерда $Q(x_1, x_2)$: $(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ икки жойли предикатдан фойдаланилган.

5. Чегараланган функциянинг таърифи. Аниқланиш соҳаси E бўлган $f(x)$ функция учун

$$\exists M \in R_+ \forall x \in E (|f(x)| \leq M)$$

бўлса, u ҳолда бу функция шу соҳада **чегараланган** деб аталади.

Бу ерда ҳам $F(x, M)$: $(|f(x)| \leq M)$ икки жойли предикатдан фойдаланилган.

Маълумки, математикада кўп теоремалар шартли мулоҳазалар шаклида ёзилади, яъни «Агар x бўлса, y ҳолда y бўлади» тарзида ифодаланади. Масалан, «Агар нуқта бурчак биссектрисасида ётган бўлса, y ҳолда y бурчак томонларидан тенг узоқлашган (масофада) бўлади». Бу теореманинг шарти «Нуқта бурчак биссектрисасида ётган» ва хулосаси «Нуқта бурчак томонларидан тенг узоқлашган» жумлаларидан иборат. Кўриниб турибдики, теореманинг шарти ҳам, хулосаси ҳам $R^2 = R \times R$ тўпلامда аниқланган предикатни ифодалайди. Бу предикатларни $x \in R^2$ учун мос равишда $A(x)$ ва $B(x)$ билан белгилаб, теоремани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\forall x \in R^2 (A(x) \rightarrow B(x)).$$

Шу сабабли, теореманинг тузилиши (структураси) ҳақида гапирганда, унда учта қисмни ажратиш керак: 1) теорема шарти: R^2 тўпلامда аниқланган $P(x)$ предикат; 2) теорема хулосаси: R^2 тўпلامда аниқланган $Q(x)$ предикат; 3) тушунтириш қисми: бу ерда теоремада гап юритилаётган объектлар тўпلامي ифодалаш керак.

6.2. Қарама-қарши тасдиқларни тузиш. Бирор A математик тасдиқ берилган бўлсин. Унга қарама-қарши бўлган тасдиқ \bar{A} бўлади. Предикатлар мантиқи тенг кучли алмаштиришлар воситаси билан A формулага яхши шакл (кўриниш) бера олади. Масалан, чегараланган функциянинг таърифи

$$\exists M \in R_+ \forall x \in E (|f(x)| \leq M)$$

формула орқали берилишини кўрган эдик. Бу формуланинг инкорини олиб ва тенг кучли алмаштиришларни ўтказиб, чегараланмаган функциянинг таърифини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \overline{\exists M \in R_+ \forall x \in E (|f(x)| \leq M)} &\equiv \forall M \in R_+ \overline{\forall x \in E (|f(x)| \leq M)} \equiv \\ &\equiv \forall M \in R_+ \exists x \in E (\overline{|f(x)| \leq M}) \equiv \forall M \in R_+ \exists x \in E (|f(x)| > M). \end{aligned}$$

Ҳосил бўлган $\forall M \in R_+ \exists x \in E (|f(x)| > M)$ формула чегараланмаган функциянинг таърифини ифодалайди.

Келтирилган мисолдан кўриниб турибдики, ҳамма кванторлари олдинда турган предикатлар мантиқи формуласи орқали ифодаланган тасдиққа қарама-қарши тасдиқни ясаш учун ҳамма кванторларни қарама-қаршисига (яъни \forall ни \exists га ва \exists ни \forall га) алмаштириш ва кванторлар остида турган предикатнинг инкорини олиш кифоя.

Масалан, $b \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ тасдиқни қуйидаги формула ифодалайди:

$$\begin{aligned} & \overline{\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)} \equiv \\ & \equiv \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - b| \geq \epsilon) \equiv \\ & \equiv \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in E(0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - b| \geq \epsilon). \end{aligned}$$

Энди берилган теореманинг тўғрилигини рад этадиган тасдиқни ясашни мисолда кўрайлик. $\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))$ теорема берилган бўлсин. Бу теоремани рад этадиган тасдиқ қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} & \overline{\forall x \in E(P(x) \rightarrow Q(x))} \equiv \exists x \in E(\overline{P(x) \rightarrow Q(x)}) \equiv \\ & \equiv \exists x \in E(P(x) \wedge \overline{Q(x)}). \end{aligned}$$

Охирги формула фақат $P(x) \equiv 1$ ва $Q(x) \equiv 0$ бўлгандагина чин қийматга эгадир.

Демак, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ теореманинг нотўғрилигини исботлаш учун шундай $x \in E$ элементни кўрсатиш керакки, бу элемент учун $P(x)$ — чин ва $Q(x)$ — ёлгон қиймат қабул қилсин, яъни контрмисол келтириш керак.

6.3. Тўғри, тесқари ва қарама-қарши теоремалар. Қуйидаги тўртта теоремани кўриб чиқайлик:

$$\forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x)), \quad (1)$$

$$\forall x \in E(B(x) \rightarrow A(x)), \quad (2)$$

$$\forall x \in E(\overline{A(x)} \rightarrow \overline{B(x)}), \quad (3)$$

$$\forall x \in E(\overline{B(x)} \rightarrow \overline{A(x)}). \quad (4)$$

1-таъриф. *Бирининг шarti иккинчисининг хулосаси ва иккинчисининг шarti биринчисининг хулосаси бўлган жуфт теоремалар ўзаро тескари теоремалар деб аталади.*

Масалан, (1) ва (2) теоремалар ҳамда (3) ва (4) теоремалар ўзаро тескари теоремалар бўлади. Бу жуфт теоремаларнинг бирини тўғри теорема десак, у ҳолда иккинчисини тескари теорема дейиш керак.

2-таъриф. *Бирининг шarti ва хулосаси иккинчисининг шarti ва хулосаси учун мос равишда инкорлари бўлган жуфт теоремалар ўзаро қарама-қарши теоремалар деб аталади.*

(1) ва (3) теоремалар ҳамда (2) ва (4) теоремалар ўзаро қарама-қарши теоремалар бўлади.

Масалан, (1): «Агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчак тўғри бурчакли бўлади» теоремага (2): «Агар тўртбурчак тўғри бурчакли бўлса, у ҳолда унинг диагоналлари тенг бўлади» деган теорема тескари теорема бўлади. (1) теоремага қарама-қарши теорема (3): «Агар тўртбурчакнинг диагоналлари тенг бўлмаса, у ҳолда у тўғри бурчакли бўлмайди» ва (2) теоремага қарама-қарши теорема (4): «Агар тўртбурчак тўғри бурчакли бўлмаса, у ҳолда унинг диагоналлари тенг бўлмайди» бўлади.

Кўрилган мисолда (1) ва (4) теоремалар бир вақтда чин бўлади. (1) теоремага тенг ёнли трапеция контрмисол бўлади.

Равшанки, тўғри ва тескари теоремалар, умуман айтганда, тенг кучли бўлмайди, яъни бири чин, иккинчиси ёлгон бўлиши мумкин. Аммо, (1) ва (4) теоремалар ҳамда (2) ва (3) теоремаларнинг тенг кучли формулалар эканлигини осонгина исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} \forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x)) &\equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \vee B(x)) \equiv \\ &\equiv \forall x \in E(\overline{\overline{B(x)} \vee \overline{A(x)}}) \equiv \forall x \in E(\overline{B(x)} \rightarrow \overline{A(x)}). \end{aligned}$$

Худди шундай каби (2) ва (3) формулаларнинг тенг кучлилигини исботлаш мумкин:

$$\forall x \in E(B(x) \rightarrow A(x)) \equiv \forall x \in E(\overline{A(x)} \rightarrow \overline{B(x)}).$$

Бу тенг кучлиликлардан қуйидаги хулосага келамиз: агар (1) теорема исбот қилинган бўлса, у ҳолда (4) теорема ҳам исбот қилинган бўлади ва агар (2) теорема исбот қилинган бўлса, у ҳолда (3) теорема ҳам исботланган ҳисобланади.

6.4. Етарли ва зарурий шартлар. Қуйидаги теоремани кўрайлик:

$$\forall x \in E (A(x) \rightarrow B(x)). \quad (5)$$

$A(x) \rightarrow B(x)$ предикатнинг чинлик тўплами $CI_A \cup I_B$ тўп-ламдан иборат бўлади. Демак, бу предикатнинг ёлғонлик тўплами $C(CI_A \cup I_B) = (I_A \cap CI_B)$ тўп-ламдан иборат. Охириги $I_A \cap CI_B$ тўп-лам фақат $I_A \subset I_B$ бўлгандагина бўш тўп-лам бўлади.

Шундай қилиб, $A(x) \rightarrow B(x)$ предикат $x \in E$ нинг ҳамма қийматларида $A(x)$ предикатнинг чинлик тўплами $B(x)$ предикат чинлик тўп-ламининг қисм тўплами, яъни $I_A \subset I_B$ бўлганда ва фақат шундагина чин бўлади. Бу ҳолда $B(x)$ предикат $A(x)$ предикатдан мантиқий келиб чиқади деб ай-тилади. $B(x)$ предикат $A(x)$ предикат учун зарурий шарт ва $A(x)$ эса $B(x)$ учун етарли шарт деб айтамыз. Масалан, ушбу «Агар x натурал сон бўлса, у ҳолда u бутун сон бўлади» теоремасида $B(x)$: « x – бутун сон» предикати $A(x)$: « x – натурал сон» предикатидан мантиқий келиб чиқади ва « x – натурал сон» предикати « x – бутун сон» предикати учун етарли шарт бўлади.

Шундай ҳоллар мавжудки, буларда

$$\forall x \in E (A(x) \rightarrow B(x)) \quad (6)$$

ва

$$\forall x \in E (B(x) \rightarrow A(x)) \quad (7)$$

ўзаро тескари теоремалар чин бўлади. Бу ҳол фақат $I_A = I_B$, яъни $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар тенг кучли предикатлар бўлгандагина мумкин.

Қаралаётган ҳолда (1) теоремага асосан $A(x)$ предикат $B(x)$ предикат учун етарли шарт ва (2) теоремадан $A(x)$ пре-

дикат $B(x)$ предикат учун зарурий шарт эканлиги келиб чиқади. Демак, агар (1) ва (2) теоремалар чин бўлса, у ҳолда $A(x)$ шарт $B(x)$ учун ҳам етарли, ҳам зарурий шарт бўлади. Худди шу каби бу ҳолатда $B(x)$ шарт $A(x)$ учун етарли ва зарурий шарт бўлади.

Биз айрим вақтларда «зарур ва етарли» мантиқий боғловчи ўрнига «шунда ва фақат шунда» мантиқий боғловчини ишлатамиз.

Бу ерда (1) ва (2) мулоҳазалар чин бўлганлиги учун қуйидаги мулоҳаза ҳам чин бўлади:

$$\begin{aligned} \forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \forall x \in E(B(x) \rightarrow A(x)) = \\ = \forall x \in E(A(x) \leftrightarrow B(x)). \end{aligned}$$

1- мисол. Ушбу теорема: «Агар x сон 6 га бўлинса, у ҳолда x сон 3 га бўлинади» чиндир. Бу ерда $A(x)$ предикат: « x сон 6 га бўлинади» ва $B(x)$ предикат: « x сон 3 га бўлинади». $B(x)$ предикат $A(x)$ предикатдан мантиқий келиб чиқади, яъни $A(x) \rightarrow B(x)$. $A(x)$ предикат (x сон 6 га бўлинади) $B(x)$ предикат (x сон 3 га бўлинади) учун етарли шартдир. $B(x)$ предикат $A(x)$ предикат учун зарурий шартдир. Шу вақтнинг ўзида тескари теорема: «Агар x сон 3 га бўлинса, у ҳолда x сон 6 га бўлинади» нотўғридир (ёлғондир). Шунинг учун ҳам $B(x)$: « x сон 3 га бўлинади» предикати $A(x)$: « x сон 6 га бўлинади» предикат учун етарли шарт ва $A(x)$: « x сон 6 га бўлинади» предикати $B(x)$: « x сон 3 га бўлинади» предикатига зарурий шарт бўла олмайди.

6.5. Тескарисини (аксини) фараз қилиш усули билан исботлаш. Тескарисини фараз қилиш усули билан исботлашни қуйидаги схема орқали олиб борилади:

$$\forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x)), \quad (8)$$

теорема нотўғри, яъни шундай x ўзгарувчи мавжудки, $A(x)$ шарт — чин ва $B(x)$ хулоса — ёлғон деб фараз қилинади. Агар бу фараздан мантиқий фикрлаш натижасида қарама-қарши тасдиқ келиб чиқса, у ҳолда қилинган фараз нотўғри эканлиги ва теореманинг тўғрилиги ҳосил бўлади.

Бу схемадан фойдаланиб (1) теореманинг чинлигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан ҳам, (1) теореманинг нотўғрилиги (ёлғонлиги) (фараз бўйича) ушбу формуланинг чинлигини кўрсатади: $\overline{\forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x))}$.

(1) теоремани нотўғри деб қабул қилган фаразимиздан келиб чиқадиган қарама-қарши тасдиқ $D \wedge \bar{D}$ конъюнкциядан иборат бўлади, бунда D — бирор мулоҳаза. Шундай қилиб, тескарисини фараз қилиш усули билан исботлаш схемаси қуйидаги формуланинг чинлигини исботлашга келтирилади: $\overline{\forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x))} \rightarrow D \wedge \bar{D}$.

Бу охириги формула (8) формулага тенг кучлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} & \overline{\forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x))} \rightarrow D \wedge \bar{D} \equiv \\ & \equiv \overline{\overline{\forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x))} \vee D \wedge \bar{D}} \equiv \forall x \in E(A(x) \rightarrow B(x)). \end{aligned}$$

7- §. Аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида

✓ *Аксиоматик предикатлар ҳисоби. Предикатлар ҳисобининг аксиомалар системаси. Умумийлик кванторини киритиш қондаси. Мавжудлик кванторини киритиш қондаси. Ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари.*

Аксиоматик предикатлар назариясини ҳам худди аксиоматик мулоҳазалар назарияси каби яратиш мумкин. Бу ерда қуйидагиларни кўрсатиш зарур:

1. Предикатлар ҳисоби формуласининг таърифи предикатлар мантиқи формуласининг таърифи билан бир хил.

2. Предикатлар ҳисоби аксиомалар системасини танлашни (худди мулоҳазалар ҳисобидагидек) ҳар хил амалга ошириш мумкин. Шундай аксиомалар системасидан биттаси қуйидаги: мулоҳазалар ҳисобининг ўн бир аксиомаси (4 та гуруҳ аксиомалар) ва иккита қўшимча аксиома

$$\forall x(F(x) \rightarrow F(x)), \quad F(t) \rightarrow \exists xF(x),$$

аксиомалардан иборат система бўлиши мумкин, бу ерда t ўзгарувчи x ўзгарувчини ўз ичига олмайди.

3. Мулоҳазалар ҳисобидаги келтириб чиқариш қоидаси-га яна иккита қоида қўшилади:

а) умумийлик кванторини киритиш қоидаси:

$$\frac{F \rightarrow G(x)}{F \rightarrow \forall x G(x)};$$

б) мавжудлик кванторини киритиш қоидаси:

$$\frac{G(x) \rightarrow F}{\exists x G(x) \rightarrow F},$$

агар F x га боғлиқ бўлмаса.

4. Хулоса ва исботланувчи формула тушунчалари худди мулоҳазалар ҳисобидаги каби аниқланади.

5. Худди ҳамма аксиоматик назариялардагидек ушбу муаммолар кўрилади:

а) ечилиш; б) зидсизлик; в) тўлиқлик; г) эркинлик.



Муаммоли масала ва топшириқлар

- Предикатлар мантиқи тилида қуйидаги таърифларни ёзинг:
 - чизиқли тартибланган тўплам (тартибланган тўплам чизиқли деб айтилади, агар шу тўпламнинг ҳар қандай x ва y элементлари учун ёки $x = y$, ёки $x < y$, ёки $x > y$ бўлса);
 - жуфт функция ($f(x)$ жуфт функция деб айтилади, агар унинг аниқланиш соҳаси координата бошига нисбатан симметрик ва аниқланиш соҳасининг ҳар бир x элементи учун $f(x) = f(-x)$ бўлса).
- Қуйида берилган жумлалардаги нуқталар ўрнига «зарур, аммо етарли эмас», ёки «етарли, аммо зарур эмас», ёки «зарур эмас ва етарли эмас» ва қаерда мумкин бўлса, «зарур ва етарли» сўзларини шундай қўйингки, ҳосил бўлган мулоҳазалар чин бўлсин:
 - тўртбурчак тўғри бурчакли бўлиши учун унинг диагоналларининг узунлиги тенг бўлиши ...;

- 2) $x^2 - 5x + 6 = 0$ бўлиши учун $x = 3$ бўлиши ...;
 - 3) $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун чегараланган бўлиши ...;
 - 4) $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун $f(x)$ $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши ...;
 - 5) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сонли қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ бўлиши
3. Ушбу кванторли мулоҳазаларнинг инкорларини топинг:
- 1) $\forall x \exists y F(x, y)$;
 - 2) $\forall x \exists y \forall z A(x, y, z)$;
 - 3) $\forall x [F(x) \vee \overline{\forall y B(x, y)}]$;
 - 4) $\exists x \exists y \forall z [A(x, y) \wedge B(y, z)]$;
 - 5) $\exists x A(x, z) \wedge \exists x \forall y B(x, y) \rightarrow \forall x \forall y \overline{C(x, y, z)}$;
 - 6) $\exists x (A(x) \wedge B(x) \wedge C(x))$;
 - 7) $\forall x (A(x) \rightarrow \forall y B(y))$;
 - 8) $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \exists x (D(x) \wedge \overline{R(x)})$;
 - 9) $\exists x (R(x) \leftrightarrow P(x))$;
 - 10) $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Математик таъриф ва теоремаларни предикатлар мантиқи тили воситаси билан ифодалаш.
2. Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифини ифодалаш.
3. Функциянинг нуқтадаги лимитининг таърифини ифодалаш.
4. Функциянинг нуқтадаги узлуксизлиги таърифини ифодалаш.
5. Ўсувчи функциянинг ва чегараланган функциянинг таърифларини ифодалаш.
6. Қарама-қарши тасдиқларни тузиш.
7. Тўғри, тескари ва қарама-қарши теоремалар.
8. Етарли ва зарурий шартлар.
9. Тескарисини (аксини) фараз қилиш усули билан исботлаш.
10. Аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида.

Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисобида формуланинг тавтология бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлашнинг самарали усулларида бири чинлик жадвалидир. Аммо предикатлар мантиқида бу ҳолат батамом ўзгаради. Предикатлар мантиқида ҳар бир формуланинг умумқийматли ёки умумқийматли эмаслигини ечадиган самарали усул мавжуд эмас. Шунинг учун ҳам предикат ва у билан боғлиқ квантор тушунчаларидан фойдаланадиган математик назарияларда аксиоматик усуллардан фойдаланиш зарур бўлиб қолади.

Берилган аксиомалар системаси негизида (базасида) қурилган **аксиоматик назария** деб, шу аксиомалар системасига таяниб исботланувчи ҳамма теоремалар мажмуасига айтилади. Аксиоматик назария *формал* ва *формалмас* назарияларга бўлинади.

Формалмас аксиоматик назария назарий-тўпламий мазмун билан тўлдирилган бўлиб, келтириб чиқариш тушунчаси аниқ берилмаган ва бу назария асосан фикр мазмунига суянади.

Қаралаётган аксиоматик назария учун қуйидаги шартлар бажарилган бўлса, яъни:

- 1) назариянинг тили берилган;
- 2) формула тушунчаси аниқланган;
- 3) аксиомалар деб аталадиган формулалар тўплами берилган;
- 4) назарияда келтириб чиқариш қондаси аниқланган бўлса, формал аксиоматик назария аниқланган деб ҳисобланади.

Математик назариялар орасида биринчи тартибли назария алоҳида ўрин тутади. Бу назария юқори тартибли математик назариялардан қуйидаги хусусиятлари билан фарқ қилади:

– предикатлар ва функциялар бўйича квантор амаллари (операциялари) бажарилмайди;

– аргументлари бошқа предикатлар ва функцияларни қабул қилувчи предикатлар мавжуд эмас.

Биринчи тартибли математик назария бошқа бир қатор маълум математик назарияларни ифодалаш учун етарлидир.

Қуйида биринчи тартибли математик назариянинг тили, терм ва формулалари тушунчаси, мантиқий ва хос (махсус) аксиомалари, келтириб чиқариш қоидаси, назарияда исботлаш тушунчаси, тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги, дедукция теоремаси, назария тилининг интерпретацияси (талқини), берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари, назариянинг модели, интерпретациянинг изоморфизмлиги, назариянинг қатъийлиги, назариянинг зидсизлик, тўлиқлилик ва ечилиш муаммолари, предикатлар ҳисобининг зидсизлиги, натурал сонлар назарияси, Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси сингари масалалар ёритилган.

1- §. Биринчи тартибли тил. Терм ва формулалар

☑ *Терм. Формула. Сўз. Бўш сўз. Назариянинг тили. Биринчи тартибли тил. Тилнинг сигнатураси. Функционал ҳарфлар. Предикат ҳарфлар. Биринчи тартибли назариянинг символлари. Предмет ўзгарувчилар. Предмет константалар. Кванторнинг таъсир этувчи соҳаси.*

1- таъриф. *Ҳар қандай символларнинг бўш бўлмаган чекли тўплами **алфавит** деб, алфавитнинг символлари эса **ҳарфлар** деб аталади.*

2- таъриф. *Қаралаётган A алфавит ҳарфларининг чекли кетма-кетлиги A **алфавитдаги сўз** деб аталади. Ҳарфларнинг бўш кетма-кетлиги **бўш сўз** деб аталади ва \wedge билан белгиланади.*

3-таъриф. Агар A алфавитидаги $a_1 a_2 \dots a_n$ ва $b_1 b_2 \dots b_k$ сўзлар учун $n = k$ ва $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_k$ бўлса, бу сўзлар тенг деб аталади ва $a_1 a_2 \dots a_n = b_1 b_2 \dots b_k$ кўринишда ёзилади. Бу ерда n сон **сўзнинг узунлиги** деб аталади.

4-таъриф. Агар $A(T)$ бирор назариянинг алфавити бўлса, $A(T)$ даги $E(T)$ сўзлар тўплами **T назариянинг ифодалар тўплами** деб аталади.

5-таъриф. $\langle A(T), A(T) \rangle$ жуфтлик **T назариянинг тили** деб аталади.

Биринчи тартибли тиллар биринчи тартибли назарияларда қўлланилади.

Биринчи тартибли назариянинг символлари қуйидагилардан иборат:

$\wedge, \vee, \rightarrow, -$ — мантиқий амаллар;

\forall, \exists — квантор амаллари;

$(,)$ — қўшимча символлар;

A_j^n ($n, j \geq 1$) — n - жойли предикат ҳарфларнинг санокли тўплами. Бу ерда юқори индекс жойнинг сонини ва қуйи индекс предикат ҳарфининг рақамини билдиради;

f_j^n ($n, j \geq 1$) — чекли (бўш бўлиши ҳам мумкин) ёки санокли функционал ҳарфларнинг тўплами. Бу ерда юқори индекс функция таркибига кирувчи ўзгарувчилар сони ва қуйи индекс функционал ҳарфнинг рақамини билдиради;

a_i ($i \geq 1$) — чекли (бўш) ёки санокли предмет константалар тўплами.

Мантиқий амаллар занжири ҳам функционал ҳарфлар сифатида қаралиши мумкин.

6-таъриф. **Предикат ҳарфлар тўплами функционал ҳарфлар ва константалар тўплamlари билан биргаликда берилган назария тилининг сигнатураси** деб аталади.

Шундай қилиб, биринчи тартибли T назарияда айрим ёки ҳамма функционал ҳарфлар ва предмет константалар ва айрим (аммо ҳаммаси эмас) предикат ҳарфлар мавжуд бўлмаслиги мумкин.

Биринчи тартибли ҳар хил назариялар бир-биридан алфавитдаги ҳарфлар таркиби билан фарқ қилиши мумкин.

T назарияни тўлиқ тавсифлаш учун *терм* ва *формула* тушунчаларини аниқлашимиз керак. Терм ва формула — бу $E(T)$ сўзлар тўпламининг икки синфидир.

7-таъриф. 1) *Предмет ўзгарувчилар ва предмет константалар термдир;*

2) *агар r_1, r_2, \dots, r_n лар терм, A эса n -жойли амалнинг симболи бўлса, u ҳолда $A_i^n(r_1, r_2, \dots, r_n)$ термдир;*

3) *T назарияда 1 ва 2-бандларда аниқланганлардан ташқари ҳеч қандай терм мавжуд эмас.*

Табиий интерпретацияга (талқинга) асосан терм — бу айрим олинган предметнинг исмидир. Ўзгарувчилар ва предмет константалардан ташқари амалларнинг символлари воқитасида ўзгарувчилар ва предмет константалардан ҳосил қилинган занжирлар ҳам терм бўлади, чунки интерпретацияга кўра терм бирор функциянинг қиймати сифатида аниқланыпти.

8-таъриф. 1) *Агар A — n -жойли муносабат симболи (предикат ёки функция) ва r_1, r_2, \dots, r_n термлар бўлса, u ҳолда $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$ формула, хусусан, агар A — предикат ҳарфи A_i^n бўлса, u ҳолда*

$$A_i^n(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

элементар формула деб аталади;

2) *агар A ва B формулалар бўлса, u ҳолда $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, \bar{A}$ ҳам формуладир;*

3) *агар A формула ва u ҳарфи A формулага эркин кирувчи ёки A таркибига кирмаган предмет ўзгарувчиси бўлса, u ҳолда $\forall uA, \exists uA$ ифодалар формула бўлади. Бу ҳолда A **кванторнинг таъсир этувчи соҳаси** дейилади;*

4) *1–3-бандларда аниқланганлардан ташқари бошқа ҳеч қандай формула мавжуд эмас.*

2- §. Мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар. Келтириб чиқариш қондаси

☑ *Мантиқий аксиомалар. Махсус аксиомалар. Келтириб чиқариш қондаси. Хулоса қондаси. Умумлаштириш қондаси.*

Биринчи тартибли назария аксиомалари икки синфга: мантиқий ва хос аксиомаларга бўлинади.

Мантиқий аксиомалар: A , B ва C лар T назариянинг қандай формулалари бўлишидан қатъи назар қуйидаги формулалар T нинг мантиқий аксиомалари бўлади:

$$1) A \rightarrow (B \rightarrow A);$$

$$2) (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$3) (\bar{B} \rightarrow \bar{A}) \rightarrow ((\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow B);$$

4) $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t)$. Бу ерда $A(x_i)$ – берилган T назариянинг формуласи ва t – шу $A(x_i)$ формулада эркин бўлган T назариянинг терми. Таъкидлаш керакки, t терм x_i билан ҳам мос келиши мумкин, у ҳолда биз $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_i)$ аксиомага эга бўламиз;

5) агар x_i предмет ўзгарувчи A формулада эркин бўлма-са, у ҳолда

$$\forall x_i (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x_i B).$$

Изоҳ. Олдинги бобда XI аксиомали классик мулоҳазалар ҳисобини кўриб ўтган эдик. Аммо кам аксиомали мулоҳазалар ҳисобини ҳам яратиш мумкин (масалан, 1–3- мантиқий аксиомалар асосида).

Хос аксиомалар. Хос аксиомаларни умумий ҳолда тавсифлаш мумкин эмас, чунки улар бир назариядан иккинчи назарияга ўтишда ўзгаради, яъни ҳар бир назариянинг ўзигагина хос аксиомалари бўлади.

Биринчи тартибли назария хос аксиомаларга эга эмас. Бу назария соф мантиқий назариядир. Адабиётларда бу назария биринчи тартибли предикатлар ҳисоби деб айтилади.

Кўп аксиоматик назарияларда тенглик тушунчасидан фойдаланилади. Уни икки жойли предикат $\langle\langle x = y \rangle\rangle$ сифатида киритилади. Шу сабабли аксиомалар қаторига иккита хос аксиома киритилади:

$$1) \forall x(x = x);$$

2) агар x, y, z ҳар хил предмет ўзгарувчилар ва $F(z)$ формула бўлса, у ҳолда $\forall x \forall y (x = y \rightarrow F(x) = F(y))$.

Келтириб чиқариш қондаси. Худди мулоҳазалар ҳисобидагидек, H формулалар мажмуасидан келтириб чиқариш тушунчасидан фойдаланамиз. H га кирувчи мулоҳазаларни (формулаларни) *шартлар* деб айтаемиз. Агар H дан келтириб чиқарилган ифоданинг охирида A мулоҳаза (формула) турган бўлса, у ҳолда A мулоҳаза H дан *келтириб чиқарилган* деб айтаемиз ва $H \vdash A$ кўринишда ёзамиз. Хусусан, $H = \emptyset$ бўлса, у ҳолда $\vdash A$ кўринишда ёзилади.

Биринчи тартибли назариянинг келтириб чиқариш қондаси таркибига ушбу иккита қоида кирилади:

1. Хулоса қондаси (ёки modus ponens):

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}.$$

2. Умумийлик квантори билан боғлаш қондаси (ёки умумлаштириш қондаси):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}.$$



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Қандай шартлар бажарилганда аксиоматик назария формал аксиоматик назария бўлади?
2. Биринчи тартибли назария юқори тартибли математик назариялардан қандай хусусиятлари билан фарқ қилади?
3. Мантиқий амаллар занжири ҳам функционал ҳарфлар сифатида қаралиши мумкинлигини исботланг.
4. Агар $\vdash A_1 \wedge \dots \wedge A_m \rightarrow B$ бўлса, у ҳолда $A_1, \dots, A_m \vdash B$ бўлишини исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Аксиоматик назария тушунчаси. Формал ва формалмас аксиоматик назариялар.
2. Биринчи тартибли тил. Терм ва формулалар. Функционал ва предикат ҳарфлар. Биринчи тартибли назариянинг символлари.
3. Предмет ўзгарувчилар ва константалар. Кванторнинг таъсир этувчи соҳаси.
4. Мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар. Келтириб чиқариш қондаси. Хулоса қондаси. Умумийлик квантори билан боғлаш қондаси.

3- §. Алгебра, геометрия ва анализда мавжуд бўлган математик назариялар

- Қисман тартиблаш назарияси. Гуруҳлар назарияси. Кесмалар тенглиги назарияси. Натурал сонларнинг аксиоматик назарияси.

Энди алгебра, анализ ва геометрияда мавжуд бўлган математик назариялардан мисоллар келтирайлик.

3.1. Қисман тартиблаш назарияси. T назария битта A_1^2 предикат ҳарфга эга бўлсин. Бу назария функционал ҳарф ва предмет константаларга эга бўлмасин. $A_1^2(x_1, x_2)$ ва $A_1^2(x_1, x_2)$ формулалар ўрнига одатда $x_1 < x_2$ ва $x_1 \neq x_2$ муносабатларни ёзадилар.

T назария яна иккита махсус аксиомаларга эга бўлсин:

- а) $\forall x_1(x_1 < x_1)$ — иррефлексивлик;
- б) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \rightarrow (x_1 < x_3))$ — транзитивлик.

Бу назариянинг ҳар қандай модели қисман тартибланган структура деб аталади.

3.2. Гуруҳлар назарияси. T назария битта A_1^2 предикат ҳарфга, битта f_1^2 функционал ҳарфга ва битта a_1 предмет константага эга бўлсин. Алгебрада қабул қилинган белгилашлардан фойдаланиб,

$A_1^2(t, s)$ ўрнига $t = s$,

$f_1^2(t, s)$ ўрнига $t + s$,

a_1 ўрнига 0

ни ёзамиз. Бу ерда қуйидаги формулалар T назариянинг махсус аксиомалари бўлади:

а) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3)$ — ассоциативлик;

б) $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$ — нолнинг хусусияти;

в) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$ — қарама-қарши элементнинг мавжудлиги;

г) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ — тенгликнинг рефлексивлиги;

д) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 = x_2) \rightarrow (x_2 = x_1))$ — тенгликнинг симметриклиги;

е) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 = x_2) \rightarrow ((x_2 = x_3) \rightarrow (x_1 = x_3)))$ — тенгликнинг транзитивлиги;

ж) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_2 = x_3) \rightarrow ((x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \wedge$

$\wedge (x_2 + x_1 = x_3 + x_1))$ — тенгликни ўрнига қўйиш.

Бу назариянинг ҳар қандай модели *гуруҳ* деб аталди. Агар гуруҳда $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$ чин формула бўлса, у ҳолда бу гуруҳ *абел гуруҳи* ёки *коммутатив гуруҳ* деб аталади.

Гуруҳга қуйидагилар мисол бўла олади:

1) M тўпламнинг ўзини ўзига барча ўзаро бир қийматли акслантиришлари тўплами шу акслантиришларнинг суперпозицияси амали билан биргаликда қаралганда;

2) ҳамма бутун сонлар тўплами Z бутун сонларни қўшиш амали билан биргаликда қаралганда;

3) текисликнинг ҳамма V_2 векторлар тўплами векторларни учбурчак ёки параллелограмм қоидаси бўйича қўшиш амали билан биргаликда қаралганда.

Қисман тартиблаш ва гуруҳ назариялари самарали (эффektли) аксиомалаштирилган назариялардир, чунки бу назарияларда исталган формулани мантиқий аксиома бўлиши ёки бўлмаслигини самарали текшириш имконияти мавжуд.

3.3. Геометрия (кесмалар тенглиги назарияси). Бу назарияда S – ҳамма кесмалар тўплами бўлсин. Тенглик муносабатини $\langle\langle x = y \rangle\rangle$ шаклда ёзамиз, яъни $\langle\langle x = y \rangle\rangle$ ифодани $\langle\langle x$ кесма y кесмага тенг $\rangle\rangle$ деб ўқиймиз. Назариянинг маҳсуус аксиомалари:

- 1) $\forall x \in S (x = x)$;
- 2) $\forall x \forall y \forall z ((x = z) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = y)$.

4- §. Назарияда исботлаш тушунчаси. Тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги

Исботлаш тушунчаси. Теорема. Исботланувчи мулоҳаза. Тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги.

Алоҳида фикрнинг чинлигини (тўғрилигини) асослаш усулини *исботлаш* деб айтаемиз.

1-таъриф. *Кўрилатган назария мулоҳазаларининг s_1, s_2, \dots, s_k чекли кетма-кетлиги учун бу мулоҳазаларнинг ҳар бири ёки аксиома, ёки шу кетма-кетликнинг бирорта мулоҳазасидан, ёки кетма-кетликда ўзидан олдин турган бирорта мулоҳазадан мантиқнинг келтириб чиқариш қондаси орқали ҳосил этилган бўлса, бу кетма-кетлик **исбот (исботлаш)** дейилади.*

2-таъриф. *Исботлашнинг охириги бўлган мулоҳаза **теорема** ёки **исботланувчи мулоҳаза** деб аталади.*

Аниқки, ҳар қандай аксиома теорема бўлади. Бу теореманинг исботи бир қадамдан иборат бўлади.

Теорема. Агар биринчи тартибли T назариянинг A формуласи тавтологиянинг хусусий ҳоли бўлса, у ҳолда A формула T назариянинг теоремаси бўлади ва уни (1), (2) ва (3) мантиқий аксиомалар ва хулоса қондасини қўллаш йўли билан келтириб чиқариш мумкин.

Исбот. x_1, x_2, \dots, x_n лар B формула таркибига кирувчи ўзгарувчилар мажмуи ва A формула B тавтологиядан ўрнига қўйиш қондаси орқали ҳосил қилинган бўлсин. Маълумки,

бу ҳолда B формулани $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ мажмуадан келтириб чиқариш мумкин. Бунинг учун қуйидаги қоида бўйича ўрнига қўйиш амалини бажарамиз:

1) агар бирор x_i ўзгарувчи B формула таркибида бўлса, у ҳолда ҳар бир келтириб чиқариш формуласи таркибидаги x_i ўрнига T назариянинг A формуласини ҳосил қилиш учун B даги ўша x_i ўзгарувчи ўрнини оладиган формула қўйилади;

2) агар бирор x_i ўзгарувчи B таркибида бўлмаса, у ҳолда келтириб чиқариш формулалари таркибидаги шу ўзгарувчининг ҳар бир жойига T назариянинг ихтиёрий битта формуласи қўйилади.

Шундай қилиб келтириб чиқарилган формулалар кетма-кетлиги назариядаги A формуланинг T назарияда келтирилиб чиқарилиши бўлади.

Теореманинг исботида фақатгина (1), (2), (3) аксиомалар ва хулоса қоидасидан фойдаланилди.

5- §. Дедукция теоремаси

Дедукция теоремаси. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш. Дедукция теоремасининг исботи.

Мулоҳазалар ҳисобида

$$\frac{H, C \vdash A}{H \vdash C \rightarrow A}$$

дедукция теоремаси ўринли эди. Ихтиёрий биринчи тартибли T назарияда бу теорема айрим ўзгартиришларсиз ўринли бўлмай қолади. Масалан, ҳар қандай биринчи тартибли назарияда $A \vdash \forall x A$ ўринлидир, аммо ҳар доим ҳам $A \rightarrow \forall x A$ формула исботланувчи бўлавермайди. Ҳақиқатан ҳам, ҳеч бўлмаганда $M = \{a, b, \dots\}$ нинг икки элементини қамраган соҳа берилган ҳолни қараб бунга ишониш мумкин.

T — предикатлар ҳисоби ва A формула $A_1^1(x)$ кўринишда бўлсин. $A_1^1(x)$ формула фақатгина a элемент эгаллаган хусусиятга эга деб интерпретация берамиз. У ҳолда $A_1^1(x)$ фор-

мула A элементи бўлган M тўпلامда бажарилувчи бўлади, ammo шу вақтнинг ўзида $\forall x A(x)$ формула M тўпلامда бажарилувчи формула эмас.

Мулоҳазалар ҳисобидаги дедукция теоремасининг шартларини бироз кучсизлантирганимиздагина у биринчи тартибли назарияда ўринли бўлади. Бунинг учун аввал биринчи тартибли назарияда формулалар мажмуасидан формулаларни келтириб чиқариш қоидасини аниқлаб олайлик. Шу мақсадда биринчи навбатда бир ёрдамчи тасдиқни исбот қиламиз.

H, A формулалар мажмуаси ва бу мажмуадан келтириб чиқарилган B_1, B_2, \dots, B_n формулалар кетма-кетлигини кўрайлик. Бу келтириб чиқаришда B_k формула A формула билан қўйидаги икки ҳолда боғлиқ бўлади деб айтаемиз:

1) B_k формула A формуланинг ўзидир ва у келтирилиб чиқарилган формулалар таркибига H, A формулалар мажмуасида мавжуд бўлган формула сифатида киритилган;

2) B_k формула B_1, B_2, \dots, B_n келтирилиб чиқарилган формулалардаги ўздан олдин турган формулалардан хулоса қоидаси ва кванторни боғлаш йўли билан ҳосил қилинган. Ўздан олдин турган формулаларнинг ҳеч бўлмаганда бирортаси A формулага боғлиқ. Масалан, $\{\forall x A \rightarrow C, A\}$ формулалар мажмуасидан

$$A, \forall x A, \forall x A \rightarrow C, C, \forall x C$$

формулаларни келтириб чиқариш мумкин. Бу формулаларнинг ҳар бири A формулага боғлиқ.

Л е м м а . H, A формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B$ формулалар кетма-кетлигидаги B формула A формулага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $H \vdash B$.

И с б о т . Лемманинг исботини математик индукция методи билан ўтказамиз.

1. $n = 1$ ҳол учун лемма тўғридир. Ҳақиқатан ҳам, агар H, A формулалар мажмуасидан B формула келтирилиб чиқарилган бўлса ва у A формулага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

ёки $B \in H$, ёки B формула исботланувчи формула бўлади. Иккала ҳолда ҳам $H \vdash B$.

2. Энди лемманинг хулосаси $k < n$ узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун тўғри деб фараз қиламиз ва унинг n узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун тўғрилигини исбот этамиз. Агар $B \in H$ ёки исботланувчи формула бўлса, у ҳолда $H \vdash B$.

Агарда B формула ўзидан олдин турган битта ёки иккита формулалардан келтириб чиқарилган бўлса, у ҳолда B формула A га боғлиқ бўлмайди, чунки индуктив фаразимизга асосан келтириб чиқариш формулалари таркибидаги A дан олдин турган ҳамма формулалар A га боғлиқ эмас. Демак, $H \vdash B$.

Дедукция теоремаси. $H, A \vdash B$ ва H, A формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган B формула мавжуд бўлсин. A формулага боғлиқ бўлиб келтириб чиқарилган формулаларга квантор билан боғлаш қондасини қандай қўллашимиздан қатъи назар A формулага кирувчи эркин ўзгарувчиларнинг бирортаси квантор билан боғланмасин. У ҳолда $H, A \rightarrow B$.

Исбот. $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n = B$ лар H, A формулалар мажмуасидан келтириб чиқарилган теореманинг шартларини қаноатлантирувчи формулалар бўлсин. Исботни математик индукция методи билан олиб борамиз.

1. $n = 1$ ҳол учун теорема тўғридир. Ҳақиқатан ҳам, агар B формула H, A мажмуанинг келтириб чиқариш формуласи бўлса, у ҳолда:

- а) ёки $B \in H$;
- б) ёки B — исботланувчи формула;
- в) ёки B формула A нинг ўзидир.

а) ва б) ҳолларда $H \vdash B$ ва $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ формула исботланувчи формула бўлганлиги учун хулоса қондасига асосан $H \vdash A \rightarrow B$ натижага эга бўламиз.

в) ҳолда $A \rightarrow B$ формула $A \rightarrow A$ формулага айланади, яъни исботланувчи формула бўлади. Шунинг учун $H \vdash A \rightarrow B$ бўлади, яъни $A \rightarrow B$ формулани H дан келтириб чиқариш мумкин.

2. Энди $k < n$ узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун теорема тўғри бўлсин ва уни $k = n$ узунликдаги келтириб чиқариш формулалари учун исбот этамиз. $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B$ лар H, A формулалар мажмуасининг келтириб чиқариш формулалари бўлса, фақатгина қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин:

а) $B \in H$;

б) B – исботланувчи формула;

в) B формула A формуланинг ўзидир;

г) B формула келтириб чиқариш формулалари таркибидаги ўзидан олдин келадиган B_i ва $B_j (i < j < n)$ формулалардан хулоса қоидасига асосан ҳосил қилинади;

д) B формула келтириб чиқариш формулалари таркибидаги $B_i (i < n)$ формуладан кванторни боғлаш қоидасига асосан олинади.

а), б), в) ҳоллар учун теорема исботи $n = 1$ ҳол учун берилган исбот билан бир хилдир.

Тўртинчи г) ҳолни кўрайлик. Бу ерда B формула икки-та B_i ва $B_j (i < j < n)$ формулалардан келтириб чиқарилганлиги учун B_j формула $B_i \rightarrow B$ кўринишга эга бўлади ва

$$\vdash A \rightarrow B_i, \quad (1)$$

$$H \vdash A \rightarrow (B_i \rightarrow B) \quad (2)$$

тасдиқлар тўғри бўлади.

Иккинчи $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ аксиомадан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$\vdash (A \rightarrow (B_i \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow B_i) \rightarrow (A \rightarrow B)). \quad (3)$$

Мураккаб хулоса қоидасидан фойдаланиб, (3), (2) ва (1) формулалардан $H \vdash A \rightarrow B$ формулани келтириб чиқарамиз.

Охирги бешинчи д) ҳолни кўрамиз. H, A формулалар мажмуасидан келтирилиб чиқарилган формулалар орасида $B_i (i < n)$ шундайки, B формула $\forall x_1 B_i$ бўлсин. Фаразимишга кўра $H \vdash A \rightarrow B_i$ ёки B_i формула A формулага боғлиқ эмас, ёки x_i ўзгарувчи A формуланинг эркин ўзгарувчиси бўлмайди.

Агар B_i формула A формулага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда леммага асосан $H \vdash B_i$. $H \vdash B_i$ формулага кванторни боғлаш қоидасини қўллаб, $H \vdash \forall x_1 B_i$ формулани ҳосил қиламиз, яъни $H \vdash B$. Шундан сўнг биринчи $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ аксиомадан фойдаланиб, $H \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ формулани келтириб чиқарамиз. Демак, $H \vdash A \rightarrow B$.

Агар x_1 ўзгарувчи A формуланинг эркин ўзгарувчиси бўлмаса, у ҳолда бешинчи $\forall x_1 (A \rightarrow B_i) \rightarrow (A \rightarrow \forall x_1 B_i)$ аксиомадан фойдаланамиз. $H \vdash A \rightarrow B_i$ бўлганлиги учун кванторни боғлаш қоидасидан фойдаланиб, $H \vdash \forall x_1 (A \rightarrow B)$ формулани ҳосил қиламиз. Бу формуладан хулоса қоидасига асосан $H \vdash A \rightarrow \forall x_1 B_i$ формулани келтириб чиқарамиз. Бундан ўз навбатида $H \vdash A \rightarrow B$ формула келиб чиқади.

Шундай қилиб, дедукция теоремаси бешала ҳол учун ҳам тўғридир.

Амалда бу теоремадан келиб чиқадиغان қуйидаги натижалардан фойдаланиш қулайроқдир:

1- натижа. Агар $H, A \vdash B$ ва A нинг эркин ўзгарувчисига кванторни боғлаш қоидасини ишлатмасдан келтириб чиқарилган формулалар мавжуд бўлса, у ҳолда $H \vdash A \rightarrow B$.

2- натижа. Агар A формула ёпиқ ва $H, A \vdash B$ бўлса, у ҳолда $H \vdash A \rightarrow B$.

6-§. Назария тилининг интерпретацияси. Берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари. Назариянинг модели

- Интерпретация. Формулага интерпретация бериш. Берилган интерпретацияда формуланинг чинлик қийматлари. Формуланинг бажарилувчанлиги тушунчаси. Назариянинг модели.*

6.1. Назария тилининг интерпретацияси.

Таъриф. Формула таркибига кирувчи ҳамма константалар, ўзгарувчилар, функционал ва предикат ҳарфларга аниқ

мазмун ва ҳамма эркин ўзгарувчиларга ўзгармас қиймат беришга формула ёки формулалар мажмуига **интерпретация бериш** деб аталади.

Масалан, $\exists x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, a_0), x_2)$ формулага икки хил интерпретация беришни кўрайлик. Биринчи интерпретацияда ҳамма ўзгарувчилар ҳақиқий қиймат олади, $a_0 = 1$, $f_1^2(x, y) = x + y$, $A_1^2(x, y) \equiv x < y$ ва эркин ўзгарувчи $x_2 = 2$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда қуйидаги чин арифметик мулоҳазага эга бўламиз: «Шундай x_1 мавжудки, $x_1 + 1 < 2$ » иккинчи интерпретацияда ҳамма ўзгарувчиларнинг M ўзгариш соҳаси иккита a_0 ва a_1 ҳарфларидан иборат, эркин ўзгарувчи $x_2 = a_1$, f_1^2 функция ва A_1^2 предикат қуйидаги жадваллар билан берилган деб ҳисоблаймиз:

x	y	f_1^2	x	y	$A_1^2(x, y)$
a_0	a_0	a_0	a_0	a_0	ё
a_0	a_1	a_0	a_0	a_1	ё
a_1	a_0	a_1	a_1	a_0	ч
a_1	a_1	a_0	a_1	a_1	ё

У ҳолда x_1 ўзгарувчига боғлиқ бўлган $A \equiv A_1^2(f_1^2(x_1, a_0), a_1)$ предикатнинг қиймати қуйидаги жадвал билан аниқланади:

x_1	$y = f_1^2(x_1, a_0)$	$A_1^2(y, a_1)$
a_0	a_0	ё
a_1	a_1	ё

A предикат ўзгарувчиларининг ҳамма қийматлар сатрида ёлғон қиймат қабул қилганлиги учун $\exists x_1 A(x_1)$ мулоҳаза ёлғон қиймат қабул қилади. Демак, исталган интерпретацияда формула мулоҳазага айланади. Бу мулоҳазанинг иккинчи

· , , ·
:

- 1) \
- 2) ;

, , , < (), ()>

·
2- :
< (), ()>
, \ f " < (), ()>

\ - (

· , -
-
-

· :
1) \

() -

2) ; \ -
\ -
· \ -

·
, \ 2(jc2 , < 2
· \ ,2(,, 2) <
(,)
·

$V_{x2} A_2(, , 2) \ll \dots 2$
 $jc, < 2 \gg$

1
 $3x, V_{x2} , 2(, , 2)$

6.2.

$G - \dots \setminus \setminus \dots \setminus$
 $S = (\dots 2, \dots, bn, \dots) G -$

$(\dots) S^*$
 $:$

- 1) / , \ $S^*(t) = b;$
- 2) t , , $S^*(t)$
- 3) g //
- t_2, \dots, tn , ,

$S^* - S -$
 $\setminus \setminus$

$S = (b v b_2, \dots, , \dots) -$
 $S^*(t)$

t \ .
 bi t -

$\setminus \setminus$
 $;$
 $, t / 2(3, f 2, (, ,))$ -

$\setminus \setminus$, $f 2 -$
 $, f 2 -$, , 5

...)
 2 (+ 5)

$$S = (b_1, b_2, \dots, b_n, S^*(t))$$

1) $A^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$

B^J , ;
 2) S -

3) -» S ;

4) $\setminus S$;

S -

G -

6 -

\setminus -

$$S = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$$

1- G -

2- G -

%

3-

1.1)

2)

Z

3)

V2

2.

3.

4.

5.

$\rightarrow \#) \rightarrow ((\# \rightarrow Q \rightarrow (A \rightarrow Q)$

([4], 58-).

6.

([4], 58-).

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

7- §.

1-

$l,$

$(\quad)^{12}$

1)

"

$(\quad) \setminus (\quad)^2$

b_1, b_2, \dots, b_n

$(A) \mathbf{g}(b), g(b_2), \dots, g(b_n)$

$\{ \quad \setminus, 2, \dots, bt \}$

2)

fj'

$(f)' (f')^2$

$b_1, b_2, \dots,$

$(l; (1, 2, \dots, bt) = i. ff) \mathbf{g}(bx), g(b_2), \dots, g\{b\}$

3)

$l, 12$

$) \quad] \quad , \quad] = g(\quad)$

$l,$

12

, /, 12 ,

• g /, 12 -

(1) %

- $S = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ -
 $g(S) = (g(b_1), g(b_2), \dots, g(b_n))$ -
 S

(2) 2 -

• (2) (1) • (1) -

\ 2- • % -
 , %

3- • — ,

(1) % ;

(2) %

, , -
 , , -
 ; , , = 3 -

• , , , -

myFpu

8- §.

[7

8.1.

1-

S

$S \rightarrow (S^* / 4)$



8.2.

(
,),

1-

S, S

S, S

S, S

()

2 -

/

;

,

,

,

\

$(\neg \neg (A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 2 -> | ,
 $H(\exists x A(x) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x))$ 3 -> | -

$(\neg \neg (A \rightarrow B) \rightarrow A)$ # () # (!) = () -> () .
 , ,

()
 , 1-5- -
 (3- §)

() . 1-3- -
 . $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$

$H(\forall x A(x) \rightarrow A(t))$ -> ,
 . $\forall x (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x))$

$\neg \neg (\forall x (A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B(x)))$ (-> -> (->)
 , . -^

, , (->) ,
 () .
 \forall -

() , () .

() , , -
 .
j-iapca , -

() () , -

myFpudup ().

10-§.

^

[7]

10.1.

1888

«

»

0,

(1

)

, v,

-,

V,

3

1-

,)

0 =

, = +)

v

x

y

z

) =

, ()'

+ v

0

2-

. 1)0

—

; 2)

, , z,

...

; 3—5)

s —

,

('),

() +

(5)

() •

(s)

; 6) 1—5-

, v,

V, 3

\rightarrow , , , $A \vee$; 2—5) ; 6—7) —
 $\forall x(I)$ (1) —
 ; 8) $I-7-$;

,. 2- « », « 5 » .
 « () + (5) » . « »
 « 5 » ,
 , 3- « » « » « » -

- 1) 0 — ;
- 2) \ , ;
- 3) 0 * ' — \ ;
- 4) ' = ' , = : ;
- 5) Q ,

(1) 0 ;
 (2) ! , Q Q -
 Q , \ ((Q)) .
 , . , , .

$f_j (j = 1, 3)$

$$\begin{aligned}
 A &= 2it, \quad s) \quad t - s, \\
 f &= lit) \quad t, \\
 f &= iit, \quad s) \quad t + s, \\
 f &= t (t, s) \quad t - s,
 \end{aligned}$$

T

1. $x = 2 \rightarrow (, = 3 \rightarrow 2 = 3)$.

2. $, = 2 \rightarrow / = 2$.

3. $0 * (*,)'$.

4. $/ = 2 \rightarrow , = 2$.

5. $X_j + 0 = ,$.

6. $, + 2 = (, + 2$.

7. $, 0 = 0$.

8. $, \cdot 2 = , \cdot 2 + ,$.

9. $/4(0) \rightarrow (V_x / l(x) \rightarrow (')) \rightarrow V_x / 4(x)$.

() —

1-8-

9-

5-

9-

3 4-

3 4-

1 2-

« »

0

ft

1

2-

5-8-

5-8-

+, •

9-

$\setminus : /4(0) (() \rightarrow (')) ,$
().

1-

t, s

• $t = r \rightarrow \forall (t = s \rightarrow r = s)$.

2'. $t = \rightarrow t' = ' .$

• $0 * t' .$

4'. $t' = ' \rightarrow t = .$

$$5'. \quad + \mathbf{0} = .$$

$$. \quad t \quad \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

$$2- \quad .$$

$$6'. \quad t + r' = (t + r)'$$

$$8'. \quad t = (t \quad r) + t .$$

t, s

:

a) $t = /;$

b) $= / \bullet \rightarrow = t \setminus$

c) $\int = - \rightarrow (= 5 \rightarrow t = s);$

d) $= t \rightarrow (s = t \rightarrow r = s);$

e) $(= r \rightarrow .t + s = r + s ;$

$\mathbf{0} \quad \int = \mathbf{0} + \int;$

g) $t' + r = (t + r)';$

h) $t + r = r + t ;$

i) $t - r \wedge s + t = s + r ;$

j) $(t + r) + s = t + (r + s) \setminus$

k) $t = r \rightarrow t - s = r - s';$

l) $\mathbf{0} \quad r = \mathbf{0};$

m) $t' \quad r = t \quad r + r ;$

n) $t \quad r = r \quad t ;$

o) $t = r \rightarrow s - t = s - r.$

10.2.

:

% , -

1. 7, /2 , -

2. . , -

3. ^ , , ,

4. () .

1. .

2. , - , .

3. .

4. ; . , .

5. .

6. .

7. .

8. .

« , » « , »

-

.

(,

) ?

,

;

()

.

.

(1895),

(1915)

(1918)

,

:

1.

.

2.

3.

).

4.

5. -

6.

()

.

.

$$2 + + = 0$$

, *b*

1 -

. , « » .
 .
 1. —
 - ,
 () ,
 2. ()
). ;
 3. .
 4. .
 5. ()
 .
 . 15 . 2
 : , , .
 , .
 ?

• :

- 1 3
- 2 4-/J
- 3 4-
- 4 4- 0

$$3 + (4 -) + (4 -) + (4 -) - 15 = (+ +)$$

15 , + + ,

2- §.

[7[

S S , \ -

1- . -

2- . -

1- . L -

M \ J L M f) L

. L .
 , 2- , , -
 , -
 . $M(JL \quad L \quad Mf)L$ -
 L -
 . -
 2- () .
 .) -
 , 2- , -
 . -
 , -
 , \ . -
 ; , 1- -
 ,
 ,
 . , -
 . , -
 .
 1- . —{1, 4, 9, ..., l , ...} -
 ?
 - . = { 2 } -
 , -
 - , -
 . , -

: -
 -
 . ,
 2- . -
 -
 . -
 . -
 . , :
 (, 0),_(0, 1),_(0, 2), (, 3),_(0, 4),
 4),
 (2, j ^ (2, J) ^ (2, J) ^ (2, J) ^ (2, 4),
 (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),
 , -
 , . -
 :
 (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2), (3, 0), (2, 1),
 (1, 2), (0, 3), (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4),
 3- . -
 . U -
 . U -
 , (2-) ,
 CU
 .
 MQ Mv Mv ... — \ -
 , , , ne N -
 .

U , (,) , -
 \ .
 - , U -
 , $ne U^ne$.
 , ,
 CU ,
 , CU ,
 . \ CU .
 , U .
 ,, -
 () , .

3- §.

[7] « » .
 .
 . X -
 .
 .
 .
 .
 .

« , » « »
 « , » « »
 .
 , , , , , -
 .

1- « »-
 . 1637

: « " + " = z" > 2
 , , z, » . , .

10-

: «

?»,

\

(

)

$$2 + 2 - 2xz = 0, \quad 10 \ 5 + 7 \ 2 + 5 = 0$$

$$, \quad 2 + 2 - 2xz = 0$$

$$10 \ 5 + 1 \ 2 + 5 = 0$$

$$() = 0 \ " + \{ \ " \sim' + \dots + \ " \sim, + \ " = 0$$

1)

2)

: $dr \ d2, \dots, \ dn \setminus$

()

: $Pn(d) \ (l = 1, \dots, n)$;

1935 , 1932—1935

«X-

: « -

myFdupadu.

1934

«

»

«X-

;-

1936

»

X-

X-

1936

, :

()

,

:

,

,

.

^ —
 ,: 1936—1937 .
 \ « ;
 » . , ,
 1937 . ,
 X- , ,
 , .
 1936 (,) .
 ; 1943 , 1920—1922
 ,
 , ,
 , . .
 « »
 . « »
 , ^
 , ,
 — .
 ;

1. = {1, 9, 25, 121, ...}

; ?

2.

«
 \ ,
 ?» 10 -
 , ?

3. . . .
 , \ ? ?

4. ?

5. . X- ; X- ;- ?

«

1. . . .

2. , , -

3. . . -

4. ^ .

5. . X- ^ .

6. . . .

7. . . .

8. . . .

4- §.

[7[

fti-

1-

) . -
-

·
) — , $I(x, y) = (x < y < z \sim$

·
2- · $g = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ·
) (

·
)

·
)

·
) (,) (,)
) ,

·
· 1936 ;
·

3- · (-
) :

1) (,) : $0(x) = 0$,
;

2) () : $f(x) = x + 1$,
;

3) $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$):
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

1. $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

4- $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

f_1, f_2, \dots, f_m

f_1, f_2, \dots, f_m

\forall

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)

(x_1, x_2, \dots, x_n)

\forall

(x_1, x_2, \dots, x_n)

f_1, f_2, \dots, f_m

,/1, f2

„ 2, ...,

//

l “ (*, 2, ...,)

l, (, , z), ,)

(„ 2, 3, 4) F, (x, , z) = ,(),

F2(x, , z) = /3(, , z), F3(x, , z) = 11 (x, , z), F4(x, y, z) =

= /3 (x, y, z)

2. ()

\\/(„ 2, ..., , +) (> 1)

/

:

l(0, 2, 3, ...,) = (2, 3, ...,),

≠ 1, 2, 3, ...,) = \\/(, f/y 2, 3, ..., x j, 2, ...,), (1)

- 1

,

+ 1

/

5-

(1)

l(„ 2, ...,)

()

, /

2, ...,

2, ...,

:

, 2, ...,) = (2, 3, ...,) = 0

l(1, 2, 3, ..., fl,) = v(0, b0, 2, 3, ..., ai) = b l,

l2(2, 3, ...,) = (1, b v 2, 3, ...,) = 2

,

,

/

$$f(y, z) = (y, z) = y + z \quad ; \quad f(1, 2) = 1 + 2 = 3$$

(2)

$$f(y, z) = (y, z) = y + z - 5, \quad f(1, 2) = 1 + 2 - 5 = -2$$

(2)

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= i/(0, 2, 2) = 2 + 1 = 3, \\ f(2, 2) &= \sqrt{j}/(1, 3, 2) = 3 + 1 = 4, \\ f(3, 2) &= (2, 4, 2) = 4 + 1 = 5, \\ f(4, 2) &= V(3, 5, 2) = 5 + 1 = 6, \\ f(5, 2) &= V(4, 6, 2) = 6 + 1 = 7. \end{aligned}$$

$$f(y, z) = (y, z) = y + z, \quad f(y+z, *) = f(0, y+z) + z, \quad ; \bullet = 0$$

$$f(z, y) = f(0, y) + z, \quad f(z, y) = y + z$$

(3)

$$f(y, z) = (y, z) = y + z, \quad f(0, 2) = 0 + 2 = 2, \quad f(1, 2) = 1 + 2 = 3$$

$$f(0, 2) = (0, 2) = 0 + 2 = 2, \quad f(1, 2) = (1, 2) = 1 + 2 = 3$$

$$f(1, 2) = (0, 0, 2) = 0 + 0 + 2 = 2, \quad f(2, 2) = (1, 2, 2) = 2 + 2 = 4.$$

$$f(y, z) = f(y+z, x) - f(y, x) + z - x.$$

$$f(z, x) = f(0, x) + z \quad f(z, x) = z$$

3. $I(x, y) = \dots$

$$I(x, y) = 0$$

$$I(x, y) = 0$$

$$I(x, y) = 0$$

$$(*) = \dots [I(x, y) = 0] = 0 \dots \quad (4)$$

(4) $I(x, y) = \dots$

$$(x, y, z, \dots) = \dots [f(x, y, z, \dots) = 0] \dots \quad (5)$$

$$I(x, y, z, \dots) = \dots (x, y, z, \dots)$$

$$(x, y, z, \dots)$$

$$1) I(x, y, z, \dots, 0) = \dots$$

$$I(x, y, z, \dots, 0) = 0$$

$$2) I(x, y, z, \dots, 1) = \dots$$

$$(x, y, z, \dots) = 1 \dots I(x, y, z, \dots, 1) = 0$$

$$I(\dots) = \dots$$

$$I(\dots, j=0) = 0$$

$$I(\dots) = 0$$

$$I(\dots, z) = \dots$$

3- $I(\dots) = \dots$

:

$$I(\dots) = y.z(y + \dots) = \dots$$

$$I(\dots) = 2, \dots = 7, \dots = 2, \dots$$

:

- $z = 0, \dots = 2 * 7,$
- $z = 1, \dots = 3 * 7,$
- $z = 2, \dots = 4 * 7,$
- $z = 3, \dots = 5 * 7,$
- $z = 4, \dots = 6 * 7,$
- $z = 5, \dots = 7 = 7.$

$$I(7, 2) = 5.$$

7- $I(\dots, 2, \dots) = \dots$

$$I(\dots, 2, \dots) = \dots$$

$\mathbf{0}(\cdot) = \mathbf{0}, \quad (\cdot) = \cdot + \mathbf{1}, \quad 2, \dots, \cdot) =$
 $(\mathbf{I} < \cdot < \cdot) \quad I(\cdot, \cdot, 2, \dots, \cdot) = (\cdot \quad N), \quad (\cdot, \cdot) =$
 $= \cdot \mathbf{V} + \cdot, f(x, \cdot) = \cdot - \cdot, f(x, \cdot) = \cdot \mathbf{1} (\cdot = \mathbf{1})$

8- $f(x \vee 2, \dots, \cdot)$

$(\cdot - \cdot)$

;

$I(\cdot, \cdot, 2, \dots, x_j) \quad (\cdot) \quad -$

li-

\

9- $I(\cdot, 2, \dots, \cdot)$

$I(\cdot, 2, \dots, \cdot)$

$(\cdot), \mathbf{0}(\cdot), I; (\cdot), \cdot, \cdot) = \cdot + \cdot,$

$I(\mathbf{V}, \cdot) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{V}, I(\mathbf{V}, \cdot) = \mathbf{X} + \cdot.$

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(z_1, \dots, z_k) \quad (1)$$

where $z_j = z_j(x_1, \dots, x_n)$ for $j = 1, \dots, k$ and $z_{k+1} = x_1, \dots, z_n = x_n$.

$$Z_j = X_j \quad (1 < j < k) \quad ;$$

$$Z_j = I_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$V(X_1, \dots, X_n) = (I^2(x_1, \dots, x_n), \dots, I^2(x_1, \dots, x_n)).$$

$$V(Z_1, \dots, Z_k) = (I^2(z_1, \dots, z_k), \dots, I^2(z_1, \dots, z_k)).$$

4- $(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2, z_3)$

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3$$

5- $(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2$$

6- $(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2, z_3)$

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3$$

1.

0() —

-

2.

*(2, ...,) =

,

-

3.

f.

2, ...,

,

-

\

.

2, ...,

-

\

\|

f(y, 2, 3, ...,)

,

,

2, ..., ,

.

, \

()

-

-

.

-

.

-

,

.

-

,

,

()

.

-

.

,

,

.

.

.

-

-

(, = .)

1.

1) + . . . 2) ; 3) 17;

4) - I " 1' > 0 ,
[, - 1 ;

^ - - \ - , > ,
[, < ;

- , > ,
< ;

7) $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$;

8) $i S w = \{ ' 0 * = 6 ? .$
[, * 0 ;

9) !;

10) $\min(x,) =$;

11) $\min(x, 2, \dots,)$;

12) (,) = ;

13) (2).

« , 137—138- »

2. $0() /'(, 2, \dots,)$

+ 1 2

, « » ; ,
 (,) ,

, « »

1. , - { 0, a v 2, ..., a j

1

()

2. , 0, q v 2, ..., q m , ,
 . q 0, q v q 2, ..., q m —

q {—

() , (,) , , q 0 —
 (,) .

3.

() . (-
)

>

(VI.1 -) .

fi0

2

3

\1

12

4. ().

(), -

(VI.2 -).

' ~ " 1 | | |

VI.2- .

« », « -
» .

; (,)

0 -

. -

() .

, , qx (VI.3-).

2 2 *4

VI.3- .

,

, -

. -

() -

. ,

:

1. $(0$ -

).

, $($)

2. $q0$ -

, . -

:

$$a^j \rightarrow avJI qs.$$

$a, av -$; $q0 qs -$

$($) $($ -

$q)$, -

1) $^$;

2) $($

3) (q) .

$^$, -

Δ	$2 q3$	$a_i \setminus q2$	2
	$0 q2$	$2 \setminus$	$a/n q2$
	$a0n q0$	$a \setminus n q^*$	$a2n q]$
*	$a]Hqj$	«	$a2n \Delta^*$

,

.

, \

-

;

.

.

,

(

)

.

.

,

1-

:

0 2 2 0-

\

2 ,

q, \

2 2

\

:

0 2 2 (30-

1

,

:

2 2 0 -

,

0

2 2 2 -

,

%

q^0 (-)
 $2 \ 2 \ 2 \ \backslash$
 2- . :
 0 , at $2 \ 2$.
 \backslash
 , -
 :
 , , $2 \ 2 \ 0$ — .
 0 , , $2 \ 2 \ 0$ — ,
 \backslash
 0 $2 \ 2 \ 0$ — ,
 2
 $\{ \{ \ 2$ — ,
 2
 0 , , $2 \ 2 \ 0$ — .
 ,
 , , ,
 .

6- §.

\wedge

+ 1

;

()

1-
+ 1

+ 1

, $f(n) = + 1$

6, 7, 8, 9

0, 1, 2, 3, 4, 5,

0

9

9

0

1

1

1

, $f(n) = + 1$

, $qt \quad qQ$

+ 1

:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 4, * 4 14 24 34 4 54 64 74 94 04

/1=183 —399

:

0 183 0 0 399 0
«1 <71

0 184 0 0 390 0
<70 1

<0 300 0
 I

0 400 0 •
 I

2 - !

^

, 2 3

)

:

0 I M I K

(

(1)

2 3

II111

(2)

;

^

;

:

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1) * 11 * 111 0
<i>Qi</i> | 2) 0 \ * \ \ \ 0
<i>Qi</i> | 3) *0 1*111*0
<i>Qi</i> |
| 4) 0 * 0
<i>Qi</i> | 5) *0 14 111 *0
<i>Qi</i> | 6) *0 1*111*0
<i>Qi</i> |
| 7) *0 * 0
<i>Qi</i> | 8) *0 1*11111*0
<i>Qi</i> | 9) *0 1*1111*0
<i>Qi</i> |
| 10) *, 1 *
<i>Qi</i> | 11) *0 1*11111*0
<i>Qi</i> | 12) *0 1*1111*0
<i>Qi</i> |
| 13) *0 1*111 0
<i>Qi</i> | 14) *0 1*11111*0
<i>Qi</i> | 15) *0 1*1111*0
<i>Qi</i> |
| 16) $\hat{\Delta}$ * I k
<i>Qi</i> | 17) *0 * 1111 *0
<i>Qi</i> | 18) *0 *1111*0
<i>Qi</i> |
| 19) \ll *1111 *0
<i>Qi</i> | 20) *0 *111111*0
<i>Qi</i> | 21) *0 *1111*0
<i>Qi</i> |
| 22) *0*1111 1*0
<i>Qi</i> | 23) *0 *111111*0
<i>Qi</i> | 24) *0 *11111*0
<i>Qi</i> |
| 25) *0*1111 1*0
<i>Qi</i> | 26) *0 *111111*0
<i>Qi</i> | 27) *0 *11111*0
<i>Qi</i> |
| 28) * *1 1*0
<i>Qi</i> | 29) *0 *111111*0
<i>Qi</i> | 30) a <i>Qi</i> *0*11111*, |

:

	fl0	*	1
<i>Qi</i>		a0HQ0	W Q i
<i>Qi</i>	< ? 3	* n q 2	n q 2
<i>Qi</i>	*0n Q\	*A i	\

1) «oil III!! Ilk.)

2) 0111 111111 0

Q

3) ff0l || a || || | k ,

4) a0| 1l a p 1111

\

,

.

,

6

^

4

2

,

.

-

-

-

.

:

0 a a a

|

7.

0 a a a a P P P P l k o

0 0 a a

|

<

0

|

0 0 0 0 |

|

|||||

4 2

^

0 II 3 0

11111 «

2

„ 3 0

II°0

1

0 3

2

qx

4

{

an q2

\$ q2

0

|" 2

a0 nq3

|*nq3*

4

0 0

|» 1

|* 4

4

7- §.

[7

?

?

jf

-
?

-
:

.

-
-

-
-

-

-
-

-
-

-

1. $() = +2, () - +4, () = 0$

1. $\text{Sgn} = [1, * = 0 ? , * 0 ,$

3. $\text{sgn} \frac{f1,}{[,]} = 0$,
 $*$,

4. $< () = 2$

$f1,$,
 $[,]$

$\{ 0, 1 \}$

6. $1, 2-$

1-

2-

	1		1
$\langle 1$	$\wedge \setminus *$,	$n q 4 \setminus * 2$
2	$\wedge \setminus *$	2	$\circ 6 \setminus *$
...	...		6 \ {
V .	$\wedge \setminus$	"	0 5
	$\wedge \setminus$	5	$\ll 0'1 ? 4$
$\wedge \setminus "$	0 $\ll 0$ +2	0	7
	\wedge	$\ll "$ 6	"
	\wedge 0		
	\wedge		

7. (3-)

?

	0	1		
1	%	?.	<i>an qt</i>	0,
		N < 73	2	^?2
	0" 4	1*		
4	" 0		4	4

.. « » (-
 , 1999 .)
 , 248—250-6., 275—281-6.

1- /
 /? f

1.
2.
3.
4.
5.
6. , , , \ .

8- §.

[71 -
 -
 ; -
 -

1- ,

. . . **1950** (-
) ,
 - * Q → Q
 . -> •
 Q
 . -> Q
 -» Q (-
)
 -» Q -> Q
 P -> (-) Q

->(•)(?,,
 2—*()Q2'

: W, () , Q = WTV ,
 Q
 :
 1. f, 2, ..., U: Pz>
 2. Pv 2, ..., 1 < m < m

R : R Q_m
 $\rightarrow () Q_m$

$U: I - R$ (1)

$P \rightarrow (-) Q_m$
 $U: I - R$ (2)

(1) \dot{U} R
 (2) U R

$U \mid h R$ R^1, R_0, \dots, R_k
 $= R^1, R = R_k, j = 0, 1, \dots, k-2$

$U: R \mid - R_j$ $U: R_k \mid h R_k$ $U: R_k \mid R_k$
 $U: P \mid = R$ $U: P \mid = R$

$U: b \cdot R$ $U: P \wedge R$ $a U: R \geq$
 $U(P) = R$

U $P_m \wedge () Q_m$

$R \{$ Q_m $\rightarrow () Q_m$

$P_m \wedge () Q_m$ $R \{$

$If: R \geq$

$P v_2, \dots,$
 R
 R_i

U
 $\{ , \}$
 $b \rightarrow$
 \rightarrow
 U
 b
 b

$b \rightarrow \bullet$
 $- ccbbc$
 Q

$Q = ccbc. U$
 U

$\{ 0, a v \dots, a j$

$0 \rightarrow$
 $\Lambda \rightarrow$
 \rightarrow

$V((af \rightarrow) (, \in))$

U

$(J: a \{a2a laJa0 b a\}a2a\}ai P 2 \setminus F$

$U: \dots, U\{a\{a2a^a3a j = \dots$

3-

1

$$6 = 1$$

$$+ \setminus = \setminus$$

$$, 1 = 111, 2 = 111$$

$\{ \rightarrow ' 1$

U

$$U(P) = IP$$

$$U(n) = n + 1. \setminus$$

$$(\quad = \quad),$$

9- §.

[7]

U

U

$$U(P) = (\quad),$$

$$U(P) - (\quad)$$

- D , D : , ;

1 -
 $U(P) - ()$, U ()

$U\{P\} - K(P)$ $U(P)$ ()
 , U -

{1, *} , — -
, < , " -

((£,, 2,...,)) = (}, 2, ...,) -

(,, 2, ...,) -

2- . -

3- .
() -

1-

. /

-
-
-

2-

.

(U U)

-

3-

.

U

-

;

,

'

,

U

-
-
-

;

, ,

,

\

-
-

[39] 242—244 246—249-

,

1-

\

()

,

-

.

\

(

-

)

(. . .)

:

-

. , .
 U .
 , 2 - , \ , U
 . , .
 .
 < .
 . , ()
 , .
 . X-
 .
 10- §.
 [7[.
 . ;
 . ;
 .

XX

XVI

> 5

10-
1900

70-

1936

10.1.

» , , « -
 , , *
 : |||<74 II-
 (1)
 ; :
 1) (1) -
 ;
 2) :
) , , ;
) ;
) .
 :

	101	1	1
	1001	1	2
	10001	1	3
	100001 4	2	
I	10000001 6		
	10...01 2(+ 2)		
↙	1000001 5	3	
:	100000001 7		
	10...01 2(+ 1)+ 1		

(1) 1, ,
2, 3 ; , -
:

1000011 00110000110001100000 00001100000011000001... (2)

1 0

.
() .
:

1. , , -
,

2. , ,
, ()
: ; -
,

. : -
,

,
:
? ,

2- . - () .

10.3. -

, -

10.1—10.2-

$\{ \dots \}$
 L
 $abcabac$
 $- Q \rightarrow Q$

R
 $(\dots) \rightarrow Q$
 Q
 $- Q$
 Q

$bcacab$
 $bcacab$
 $bcacaab$
 $abcab$

1

R
 S
 S
 R

10-
1936

1970

10-

1.

Q

) { \rightarrow *(?;

) = A U { }

% -> £ ,),

d) = A U {1}

{ \$ -> 1 (£ /! -> {!})

1-

2. /

:

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1, & x < 0 \\ f_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

2) $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ y^2, & x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ y, & x \geq 0 \end{cases}$

4) $f(x, y) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ y, & x \geq 0 \end{cases}$

5) $f(x, y, z) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ y, & x \geq 0 \end{cases}$

3. /

:

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ y, & x \geq 0 \end{cases}$$

2) $f(x, y) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ y, & x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ y, & x \geq 0 \end{cases}$

0, ;

1, (>0

0, ;

5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
8. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
9. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
10. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
11. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$
12. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$

) , (-
- , :
, -
, ,
, , -
, , -
; () -
.

1- §.

[7]

, 1 (-
» (VI 1.1-) « » « -
t

1 2 3 ... -\

λ
 $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$
 $(1 \ 0)$
 $l(*, \dots, x_j)$
 $x_t (1 < t < n)$
 a_1, \dots, a_n
 $0 \ 1$
 a_j
 $1.$

(VII.2 -).

<3 . , 2 3
 , 3
 , 2
 2. , .
 (VI1.3-).

1 2“ 3“ 4 ‘
 *5

VIL3- .
 , ,
 3. , .
 2 , ,
 (VI1.4-).

$f_v f_t \dots f''^2 \dots$

$f_x f_2 \dots, f''$

5

$f\{$

$f\{$
 f_t

VII.2-

2, 3, 4

2

$f_x f_x \rightarrow$

$f_x f_x \rightarrow$

3, 4) =

= $\sqrt{(\dots, 3, 4, \dots)}$

, / f_x

VI.1.3-

4, 5) = $2(\dots, 2, 5)$

, VI.1.4-

2, 2,

$\dots, 2, 2, 4, X_j, \dots, X_j, \dots, X_j) =$

$= \dots, 2, 4, X_j, 6, 7, 8) =$

$-(\dots \rightarrow \wedge 2) \dots \wedge 4^* \wedge 5^* \wedge \dots \wedge 2^* \wedge 3^* =$

$= \forall (\wedge 2 - *5 \rightarrow \dots) \dots$

/ f_x

, $\sqrt{2}$

/

| 3

$\rightarrow f_v f_v f_t$

(myFpu)

1- .)

) 50

. S Sn SO S

) 50 S{ 5,

S

. S

5

5,

S

5

))) ;

(

)

;

1.

2. \dots 5 \dots)

S_x 1-) -

) ,, 2,) SO 2, ...,)

y^v 2, ..., , ,, ..., ,

. 1-) S

,, ..., , $\|f(y^v \dots)$, ...,

, (,,) /

2- .

, $y^v \dots$)

(0 1)

(, y^v) ,

3- .

= { ,, 2, ..., } ,, 2, ...,

$F = \{f^v f^v \dots\}$,, 2, ...,

$f^v f^v \dots$ / . = { ,, 2, ..., ,}

, ,, 2, ...,

4-

$\langle (, 2, <$

$l(,,)$

$F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$

$= \{ ,, 2, \dots, \}$

1. $= \{ , x v y, \}$
 F_x

$,, 2, 3$

$, = \{ ,, 2, 3\}$

2. $F_2 = \{ , x v y \}$

F_2

$,, 2$

$2 = \{ 2 \}$

3. $F_3 = \{ , \}$

F_3

$,, 3$

$3 = \{ ,, 3 \}$

4. $F_a = \{ v , \}$

F_a

$2, 3$

$4 = \{ 2, 3 \}$

$, = \{ 2 \}$ $F = \{ , \}$
 $, 2$

-» , <-> , + , 0 1 x v y ,

1) $v = \sqrt{v^2} = \sqrt{v \cdot v} = v$

, VII.5 -

(x v y)

2) -»

$x - \rightarrow y = x v y = xy$

2

*!, = ->

-> =

J²

t² , t² X

, ,

X

>

2

2

2

X

|

VII.6-

VII.7-

VII.8-

5-

” 2

-

, 2

,

3

2

-

*_→

^

^

,

-

,

.

1)

2)

1-

\$

($t = 1, 2, 3, \dots$)

2-

3-

$$\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$$

(VII.9-).

VII.9-

$$\left(\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right) \setminus$$

4-

S

$$(j_1, j_2, \dots,)$$

v

$$S \quad / \quad f\{xv \dots, \}$$

$$,, \quad) \quad v$$

$$S \quad v$$

$$,, \dots,)$$

1-

$$\left(\begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right) \setminus$$

$$, \setminus ,$$

S 2- \. /(*,,) v
 -
 (VII. 10-) , <” 2 (VII. 11-), -
 ,
 3- \. (0 1) , -
 .
 .

z t s v

VII. 10- .

5- „ 2 ..., ^ .
 = { „ 2 }
 . = { „ 2 }
 , , , 2
 . :
) ;) ;) xvy;) **1**;) **0**;) + ;) -> ;) < *
 , 2
 -
 () .

(VII. 12- a-):
) = 2(,)) = 2(,)
 —1 <Pi J

$$) \quad x \vee y = 2(\quad , \quad)$$

$$) \quad 1 = \quad = 2(\quad , \quad)$$

$$\mathbf{v} = 2$$

$$\mathbf{v} = 2$$

$$) \quad \mathbf{0} = \mathbf{I}$$

$$) \quad - = \mathbf{vxy} = 2(2(*, \gg 2(*. >0)$$

$$) = 2(,)) = (->)() = v$$

$$X \quad - \quad L \quad - \quad - \quad L \quad 2$$

$$, \quad 2 \quad i^{\wedge} \quad J$$

$$42$$

$$v = 2 \quad '2 \quad 2$$

$$k t$$

$$| \quad 2 \quad . \quad 2$$

$$v = 3$$

VII.12-

$$. \quad 1. \quad = \{ \} \quad , \quad \wedge \quad ?$$

$$2. \quad , = \{0, 1\}$$

$$\{ ,, 2, \dots \} \quad \wedge \quad * = \{ ,, 2, \dots, * \} \quad \rightarrow \rightarrow \ll$$

$$(0 \quad 1 \quad : 1) \quad ; \quad -$$

$$/ (0, 0, \dots, 0) = 1 \quad / (1, 1, \dots, 1) = 0$$

$$/ \quad ; \quad -$$

$$Q \quad ; \quad -$$

2)
 (0, 1) (,) \ -
 0, 1 (,) \ -
 . { < 2, ..., } .
) ;
) Q ;
) R ; .

1. $F_2 = (x, y)$
 $F_2 = \{ 2 \}$
 (VII.13-).

VII.13- .

, $-ty$, $< >$, $+$, 0 1 .

2. $F_x = ()$, $= \{ , \}$ \ $F_2 = (x, y)$ $F_2 = \{ 2 \}$.

3. VI1.14-
 ?

)

)

)

)

4. VII. 15-

?

VII. 15-

5. $\{ \dots \}$, $x \vee y$
 (\dots)
 \wedge

6. $\{ \dots \}$, $x \rightarrow y \rightarrow z$, $(\forall) z$, $xz \rightarrow y$, $(\Leftrightarrow) \rightarrow z$, $(\Leftrightarrow) z$
 $(\rightarrow) \vee z$

- 1.
- 2.
- 3.

4. ?
 5. ^
 6. .
 7. ^
- \ , .

3- §.

0 . *TyFpu* .

- . ; .

;

^ , . -

; , ; . -

, . ,

.

1-

()

S (

) .

$i = (5) = |(5)$

,

,

), (

$$= \dots + 1 \dots$$

$$F(x_1, \dots, x_n; \dots)$$

$$(v \dots)$$

(VII. 1-) Xflp

$$t- |i \dots / \dots$$

$$F(y \dots)$$

$$F \dots$$

$$F\{ F2 \dots$$

- | ^
 - I <
 -
 - ¥
 , *-----*
 - V II. 16 -

VII. 16-

. < t
 < 1 ,
 (/+ 1) 0
 . , <
 - 1,0, 1,0, 1,0,...
 - «
 » ,
 - :
 1) ((/= 1, 2, ...,)
 ;
 2) .
 .
 .
 ,
 .

, , . , . VII.17- -
 (xvy)z xvy , / —
 .

) x y z)
 VII. 17- .

VII. 17-

1

(VII. \1-).

VII. \1-

. = 0

z = 1

.

(= 1

).

«

»

.

S —

.

0, „ ..., ^—

.

0—

. (

,

(+ + 1) , (&+ 1) -
 (-

£ . £ -
 xomupacu . v (-
 <° Q, v (

$$s(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\}$$

t > v

$$(l + v) = (s(t)), (0) = \circ$$

$$(t > v) = 0 \quad \begin{matrix} (l) \text{ £} \\ (s(t)) \end{matrix} \quad \circ(l)$$

v = 1; ° t = 0 S ; £ — S -

, v = 1

5- §.

$\mathbf{g} = \{g_0, g_1, g_2, \dots, g_{j-1}\}$,
 $j = 0, 1, 2, \dots$
 $\mathbf{x}(V) > 7, (0) \quad \mathbf{x}(0)$

$$y_j(t) = b_j(x_j(t), x_r(t), g(t-1)), \quad (j=1, \dots, m),$$

$$\mathbf{g}(0) = \mathbf{V}(\mathbf{U}) \Rightarrow \mathbf{x}(H), \quad \mathbf{g}(t-1). \quad (1)$$

(1)
j

$\mathbf{g}(0)$
 $\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{g}(1) \quad 1-$
 $\mathbf{g}(1) \quad (1) \quad (1)$
 $\mathbf{g}(1) \quad (2), \dots, \mathbf{g}(2) \quad ;(1) \quad \mathbf{g}(1)$
 $\mathbf{g}(2) \quad 2-$
 \dots
 (\quad)
 (\quad)

$1 \quad 1$
 $1 \quad 1$
 1
 $:$

$$y(t) = (\quad), \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}(t-1)).$$

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.

6- §. -

[7

$$\backslash$$

$$= 1$$

$$= 0$$

(VII.1%-

(VII.18-6

).

VII. 19-

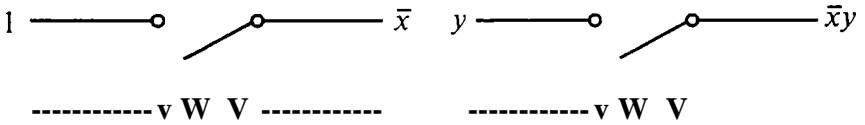
(= 0),

(- 1). = 1

, - 0

2
1

(VII.20-).



VII. 19-

VII.20-

(= 1),

(= 0).

(VII.21-).

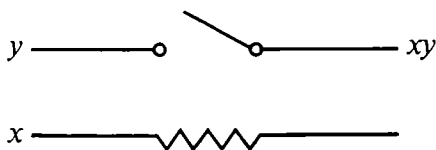
, x v y

VII. 18-

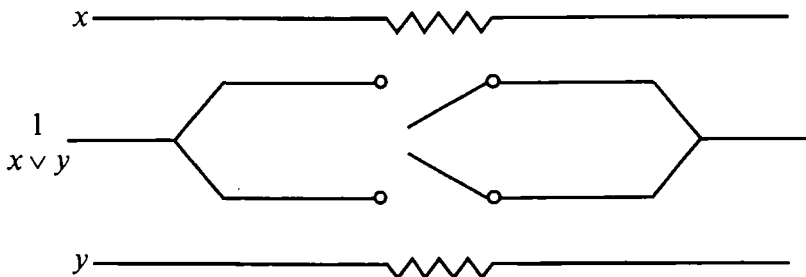
= 1 = 0

(= 0)

).



VII.21- шакл.

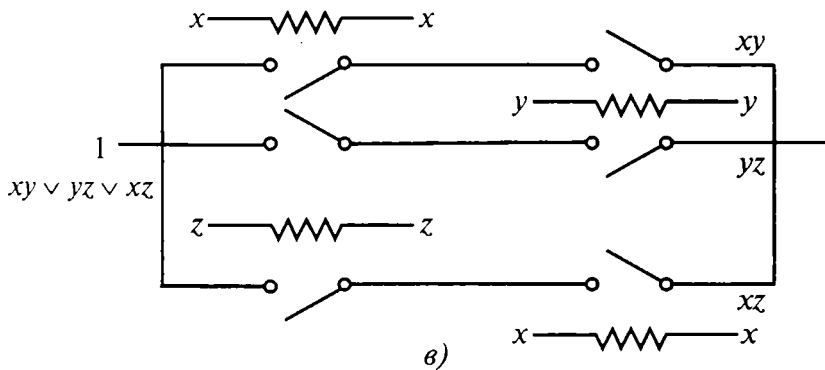
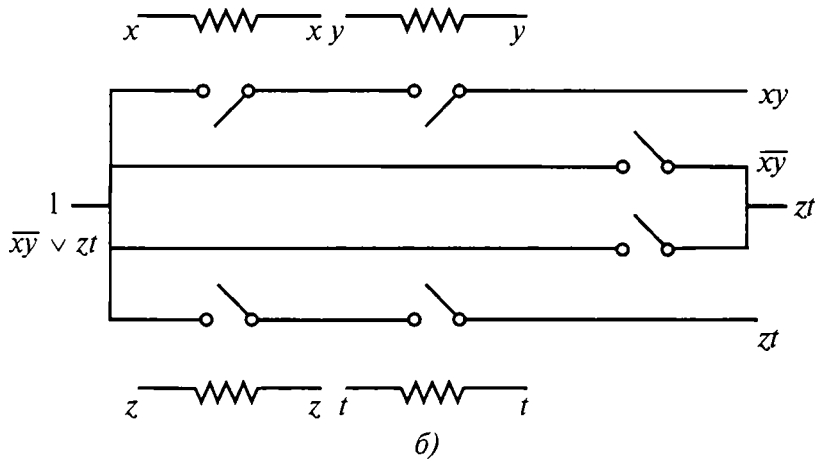
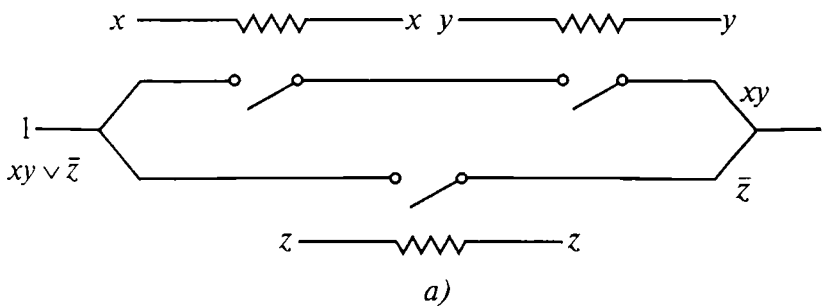


VII.22- шакл.

ликлар пайдо бўлади. Бу ҳолдан қутилиш учун фақат бир томонга ток ўтказадиган асбоблардан, шу жумладан, мусбат контактли реледан фойдаланиш мумкин. Масалан, мусбат контактли реледан фойдаланиб, $x \vee y$ ни реализация қиладиган схемани VII.22- шаклда тасвирлангандек ясаш мумкин.

Энди реле-контактли схеманинг ишлаш вақтини кўриб ўтайлик. Ток ўтказгичлар бўйича бирданига тарқалади ва реле ишлаши учун (контакт уланиши учун) бир такт вақт кетади деб ҳисоблаймиз. Демак, VII.20 ва VII.21- шаклларда x сигналга нисбатан y сигнал бир тактдан кейин берилиши керак.

Схема чиқишидаги сигнал (xy ёки \bar{xy}) y сигнал билан бир вақтда пайдо бўлади. Шунинг учун схемада берилган сигналларни ишлаб чиқиш учун сарф бўладиган вақтни доимо ҳисобга олиш керак, реализация бўладиган функцияни ўзгартирмасдан, айрим вақтларда, бу вақтни ўзгартириш керак. Бу процедурани, худди бир тактли функционал элементлардан ясалган кўп тактли схемаларда қилганимиздек,



VII.23- шакл.

ушлаб туриш элементлари ёрдами билан бажариш мумкин. Ушлаб туриш элементи вазифасини мусбат контактли реле бажаради (VII.21- шакл). Ушлаб туриш вақти I тактга тенг бўлади.

Таъриф. Агар реле-контактли схеманинг киришларига t моментда x_1, x_2, \dots, x_n сигналлар набори берилганда, унинг чиқишида $t + v$ моментда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сигнал пайдо бўлса, у ҳолда реле-контактли схема $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияни v ушлаб туриш вақти билан реализация қилади деб аталади.

Кетма-кет берилган сигналлар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлаб чиқилади.

Шундай қилиб, мантиқ алгебрасининг исталган функциясини айрим ушлаб туриш вақти билан реле-контактли схема орқали реализация қилиш мумкин. (Ушбу хулосани исбот қилишни ўқувчига ҳавола этамиз).

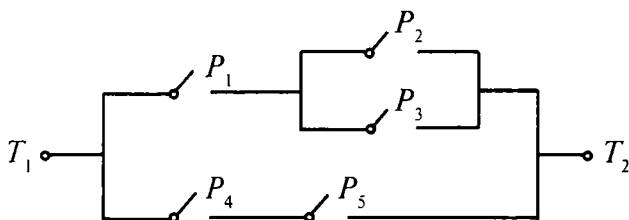
Мисол. а) $xу \vee \bar{z}$; б) $\bar{x}\bar{y} \vee zt$; в) $xу \vee ux \vee xz$ функциялар реле-контактли схема орқали реализация қилинсин.

Берилган функцияларни схема орқали реализация қилиш учун ўтказгичларни кетма-кет ва параллел улашлар натижасида элементар конъюнкцияларни ва уларнинг дизъюнкцияларини реализация қиламиз. Манфий контактли реледан фойдаланиб ўзгарувчиларнинг ва айрим элементар конъюнкцияларнинг инкорларини реализация қиламиз. Мусбат контактли реле орқали сигналларнинг бир вақтда етиб келишини таъминлаймиз. Натижада, VII.23- шаклда кўрсатилган схемаларга эга бўламиз.

7- §. Контактли схемалар ва уларнинг синтези

- Автоматнинг кириши. Автоматнинг чиқиши. Контактларни параллел ва кетма-кет улаш. Ўтказувчанлик функцияси. Муҳим занжир. П- схема.*

Ҳар бир автомат турлича контактли ёки контактсиз схемалардан фойдаланиш асосида тузилади. Биз контактли схемалар билан жиҳозланган автоматларнинг ишини умумий ҳолда кўриб ўтамиз.



VII.24- шакл.

Масалан, VII.24- шаклда кўрсатилганидек, симлардан, иккита T_1 ва T_2 қутбдан, бешта P_1, \dots, P_5 кнопка билан таъминланган контактлардан ясалган тузилма *контактли схема* деб аталади. T_1 қутб электр токи манбаини ифодалайди, T_2 қутб эса автоматнинг «чиқиши»да ишни бажарувчи қурилмани билдиради. Автоматнинг «чиқиши»да иш бажарилганлиги ҳақида хабар берувчи контрол лампа ўрнатиш мумкинлигидан, T_2 қутб мана шу лампани тасвирлайди деб айта оламиз.

Схемада кнопкалар тегишли равишда ёқилса ва, демак, схема бўйича ток юрадиган бўлиб контактлар тикланса, T_1 қутбдан T_2 қутбга борган ток контрол лампочкани ёндирди.

Энди ҳар бир мураккаб контактли схеманинг таркибий қисмларини ташкил этувчи энг содда контактли схемалар билан танишамиз.

VII.25- шаклдаги схема битта симдан, T_1 ва T_2 қутблардан ва P кнопкали битта контактдан ясалган.

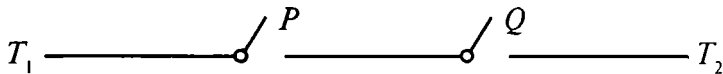
P кнопка ёқилганда, контакт тикланиб, ток схема бўйича T_1 дан T_2 га томон юради ва контрол лампа ёнади. P кнопка очик бўлганда контакт узилиб, ток бўлмайди ва лампа ёнмайди. P кнопкага x — « P кнопка ёпиқ» деган мулоҳазани мос келтирамиз. P кнопка ҳақиқатан ёпиқ бўлса, x мулоҳаза чин бўлади. Бу ҳолда контрол лампа ёнади. P кнопка очик бўлганда эса x мулоҳаза ёлгон бўлади ва бу ҳолда контрол лампа ёнмайди.

VII.25- шакл.

Шундай қилиб, x мулоҳазанинг чин-ёлғонлиги билан ток бор-йўқлиги (контрол лампанинг ёниш-ёнмаслиги) орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилади ва буни ушбу жадвал ифодалайди:

x	схемада ток
ч	бор
ё	йўқ

Энди кетма-кет уланган иккита P ва Q кнопкали (икки кетма-кет контактли) схемани олайлик (VII.26- шакл).



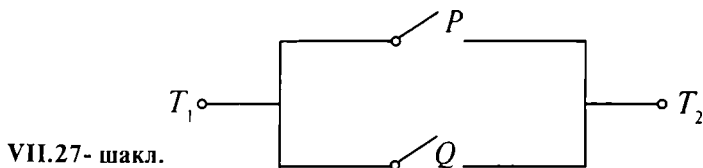
VII.26- шакл.

P ва Q кнопкаларга мос равишда x – « P кнопка ёпиқ» ва y – « Q кнопка ёпиқ» деган мулоҳазаларни мос келтирамиз. $У$ ҳолда

x	y	Схемада ток	$x \wedge y$
1	1	бор	1
1	0	йўқ	0
0	1	йўқ	0
0	0	йўқ	0

Демак, схемада ток бор-йўқлиги ($x \wedge y$) конъюнкциянинг чин-ёлғонлигига мос келади.

Параллел уланган икки P ва Q кнопкали схемага мурожаат қиламиз (VII.27- шакл).



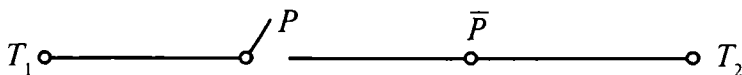
x	y	Схемада ток	$x \vee y$
1	1	бор	1
1	0	бор	0
0	1	бор	0
0	0	йўқ	0

Демак, параллел уланган икки P ва Q контактли схемада ток бор-йўқлиги ($x \vee y$) дизъюнкциянинг чин-ёлғонлиги билан аниқланади.

VII.26 ва VII.27- шаклларда берилган схемаларни умумлаштириб, n та P_1, \dots, P_n кнопкани кетма-кет ва, шунингдек, параллел улаш мумкин. Бунинг натижасида n та кетма-кет ва n та параллел контактли схемалар ясалган бўлади. Улар мос равишда $(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$ ва $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)$ функцияларни реализация қилади, бу ерда x_i мулоҳаза P_i кнопка ёпиқ эканлигини билдиради.

Шундай жуфт-жуфт кнопкалар билан таъминланган контактли схемаларни ҳам яшаш мумкинки, ҳар жуфт кнопканинг исталган бири ёпилганда (очилганда), иккинчиси очилади (ёпилади). Бир жуфт кнопка \bar{P} ва P каби белгиланади. P кнопкага x мулоҳаза мос келганда, \bar{P} га x нинг \bar{x} инкорини мос келтириш табиийдир, чунки $P - \bar{P}$ ёпиқ, демак, x чин бўлганда, \bar{P} — очиқ, демак, \bar{x} — ёлғон бўлади.

Бир жуфт кнопкали энг содда схемалардан биттаси қуйидагичадир (VII.28- шакл).

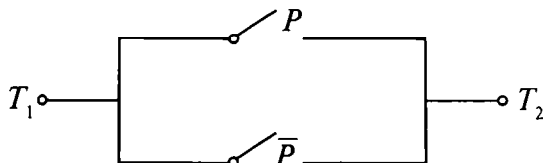


VII.28- шакл.

Кнопкаларнинг биттаси очилганда иккинчиси албатта ёпилгани учун бундай схемада ток ҳеч қачон бўлмайди. VII.28- шаклдаги схема жадвали қуйидагича бўлади:

x	\bar{x}	Схемада ток	$x \wedge \bar{x}$
1	0	йўқ	0
0	1	йўқ	0

Бир жуфт кнопкали схемаларнинг иккинчиси қуйидагича бўлади (VII.29- шакл):



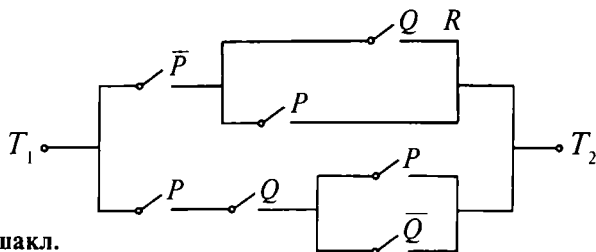
VII.29- шакл.

Бу схемада ток ҳар доим бор, чунки P ёпиқ бўлса (у ҳолда \bar{P} очик бўлади), ток юқори симдан P орқали ўтади. Схема жадвали қуйидагича бўлади:

x	\bar{x}	Схемада ток	$x \vee \bar{x}$
1	0	бор	1
0	1	бор	1

Шундай қилиб, ҳар бир содда контактли схема мулоҳазалар алгебрасининг маълум бир функциясини реализация қилади. Бу функция контактли схеманинг *ўтказувчанлик функцияси* деб аталади. Биз кўриб ўтган энг содда схемаларнинг ўтказувчанлик функциялари қуйидагича бўлади:

$$x, x \wedge y, x \vee y, x \wedge \bar{x}, x \vee \bar{x}. \quad (1)$$



VII.30- шакл.

Бу функцияларнинг чинлик жадваллари тегишли схема-ларда қачон ток бўлиши ва қачон бўлмаслигини кўрсатади.

Содда схемаларнинг турли комбинацияларидан ҳар хил мураккаб контактли схемаларни тузиш мумкин. Бундай схемаларнинг ҳар бирига (1) функцияларнинг суперпозиция-сидан ҳосил қилинган функциялар мос келади.

Масалан, VII.30- шаклдаги схеманинг ўтказувчанлик функциясини топайлик. Аввало, P , Q , R кнопкаларга мос равишда x , y , z мулоҳазаларни мос келтирамиз. У ҳолда \bar{P} , \bar{Q} , \bar{R} га \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} мулоҳазалар мос келади. Схеманинг юқори қисми $\bar{x} \wedge [(y \wedge \bar{z}) \vee x]$ формула билан, пастки қисми $z \wedge \bar{y} \wedge [x \vee \bar{y}]$ формула билан ифодаланади. Юқори ва паст-ки қисмлар параллел улангани учун бутун схеманинг ўтказувчанлик функцияси қуйидагича бўлади:

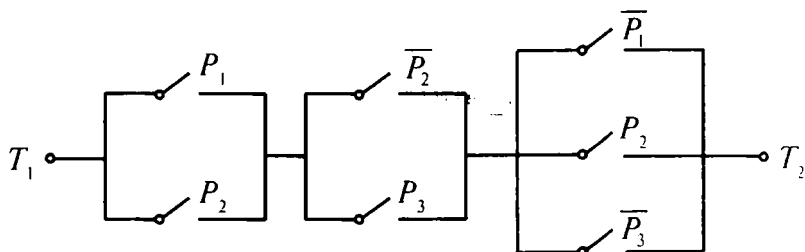
$$f(x, y, z) = \{\bar{x} \wedge [(y \wedge \bar{z}) \vee x]\} \vee [z \wedge \bar{y} \wedge (x \vee \bar{y})].$$

Аксинча, мулоҳазалар алгебрасининг ҳар бир функция-сига бирор контактли схема мос келади. Масалан,

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \quad (2)$$

функция ва x , y , z ўзгарувчиларга мос келадиган P_1 , P_2 , P_3 кнопкалар берилган бўлсин. У ҳолда (2) функцияга VII.31-шаклдаги контактли схема мос келади.

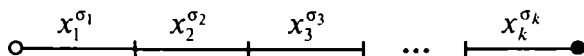
Бундан кейин, схемаларнинг кўриниши оддий бўлиши учун, контактни икки қутбга эга бўлган кесма орқали ифодалаймиз (кесмани *икки қутбли* деб атаймиз). Агар кесма уланувчи бўлса, уни x билан, ажратувчи бўлса, \bar{x} билан белгилаймиз. Бу ерда x — ғалтакда реализация қилинадиган



VII.31- шакл.

ўзгарувчи. Ҳар бир ғалтакка битта ўзгарувчи мос келади ва у билан исталганча сондаги контактлар уланиши мумкин. Кесмалар қутблари орқали бир-бирлари билан уланади. Ҳар бир схема кириш ва чиқишга эга бўлади. Схеманинг киришига ток берилганда, унинг чиқишида бир тактдан кейин ток пайдо бўлса, у ҳолда схемада *ўтказувчанлик бор* деб айтилади, акс ҳолда, *ўтказувчанлик йўқ* деб айтилади.

Кесмаларнинг VII.32- шаклдагидек кетма-кет уланишини *занжир* деб атаймиз.



VII.32- шакл.

Занжирда битта контакт бир неча марта қатнашиши мумкин. Биринчи контактнинг кириши схеманинг киришига ва охири контактнинг чиқиши схеманинг чиқишига тўғри келади. Ўзгарувчиларнинг бирор қийматлари мажмуида схеманинг (ДНШ кўринишидаги функцияни реализация қиладиган схеманинг) чиқишида ток бўлиши учун ҳеч бўлмаганда бирорта занжирнинг ҳамма контактлари уланган бўлиши етарли ва зарурдир. Агар схемага кирувчи ҳар бир Γ занжирга ўзгарувчиларнинг ёки улар инкорларининг U_Γ элементар конъюнкциясини мос қилиб қўйсак, у вақтда схемага кирувчи занжирларга мос келган Γ элементар конъюнкцияларнинг дизъюнкциясига схеманинг ўтказувчанлик функцияси мос келади.

Шуни таъкидлаш керакки, схеманинг ўтказувчанлик функциясини ҳосил қилиш учун айрим занжирларнинг дизъюнкциясини олиш kifоядир.

1-таъриф. *Ҳар бир қутбдан бир марта ўтган занжир муҳим (жиддий) занжир деб аталади (яъни схеманинг кириши ва чиқишига биттадан контакт ва занжирнинг қолган қутбларига иккитадан контакт тўғри келадиган занжир муҳим занжир деб аталади).*

Мисоллар. 1. Ҳар бир схемада чекли сондаги муҳим занжирлар мавжуд бўлишини исбот қилинг.

2. Муҳим занжирларга мос келувчи конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси схеманинг ўтказувчанлик функциясига тенг кучли эканлигини исбот қилинг.

2-мисолнинг натижасига асосан, схемага қараб унинг ўтказувчанлик функциясини ёзиш мумкин.

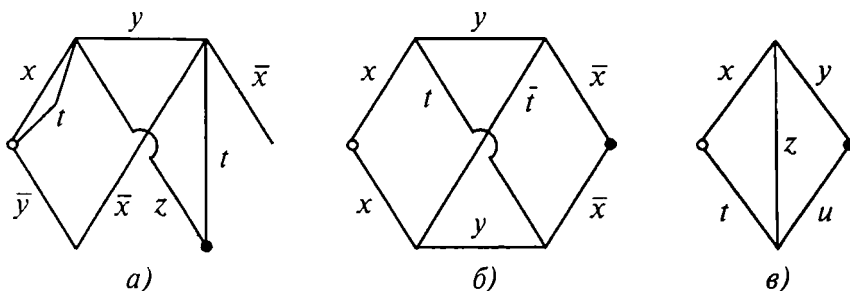
VII.33- шаклда берилган схемаларнинг ўтказувчанлик функцияларини топайлик. Бундан кейин рангсиз доирача билан схеманинг кириши ва қора рангли доирача билан схеманинг чиқиши белгиланади. Ушбу формулалар

$$a) xyt \vee tyt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz = yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t;$$

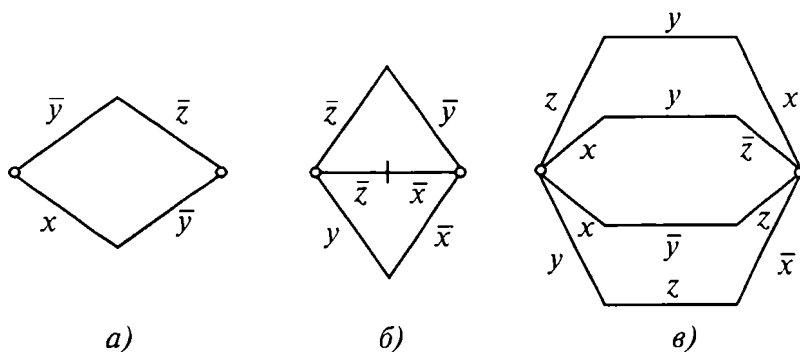
$$b) xy\bar{x} \vee x\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xty\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee x\bar{t}\bar{x} \vee x\bar{t}y\bar{t}\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} = 0;$$

$$v) xy \vee tu \vee xzu \vee tzy$$

VII.33- шаклнинг мос равишда а), б) ва в) бандларида кўрсатилган схемаларнинг ўтказувчанлик функциялари бўлади.



VII.33- шакл.



VII.34- шакл.

Энди тескари масалани кўрайлик, яъни берилган функцияга қараб уни реализация қиладиган схемани яшаш масаласини кўрамиз. Бунинг учун функцияни ДНШ кўринишига келтирамиз. ДНШ ифодасидаги ҳар бир $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots x_k^{\sigma_k}$ элементар конъюнкцияга мос равишда битта кетма-кет уланган контактларни мос кўямиз (VII.32- шаклга қаранг). Бундан кейин ҳамма киришларни ва чиқишларни мос равишда айнан туташтирамиз. Ҳосил қилинган схема ДНШ кўринишидаги функцияни реализация қилади.

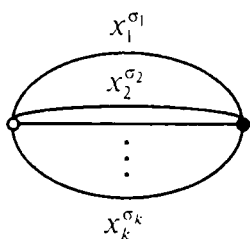
Берилган: а) $(y \vee z) \rightarrow x\bar{y}$; б) $z\bar{y} \leftrightarrow xy$ ва в) $(x + y + z)$ функцияларни контактли схемалар орқали реализация қилайлик. Бунинг учун функцияларни ДНШ кўринишига келтирамиз:

$$\text{а) } (y \vee z) \rightarrow x\bar{y} = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \quad (\text{VII.34-а шакл});$$

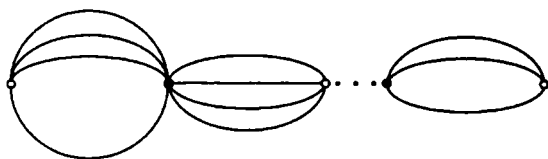
$$\begin{aligned} \text{б) } z\bar{y} \leftrightarrow xy &= (\bar{z}\bar{y} \vee yx)(z\bar{y} \vee \bar{y}x) = (\bar{z} \vee y \vee yx)(z\bar{y} \vee \bar{y} \vee x) = \\ &= (\bar{z} \vee y)(\bar{y} \vee \bar{x}) = \bar{z}\bar{y} \vee \bar{z}\bar{x} \vee y\bar{x} \quad (\text{VII.34-б шакл}); \end{aligned}$$

$$\text{в) } x + y + z = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \quad (\text{VII.34-в шакл}).$$

Биз юқорида ДНШ кўринишидаги функцияни контактли схема орқали реализация этишни кўрдик. Табиийки, КНШ кўринишидаги функцияни ҳам контактли схема орқали



VII.35- шакл.



VII.36- шакл.

қали реализация этиш мумкин. Бунинг учун, биринчи навбатда, ҳар бир элементар дизъюнкцияларни реализация қилдиган схемалар тузамиз (VII.35- шакл). Иккинчи навбатда, элементар дизъюнкцияларга мос келган схемаларнинг бит-тасининг чиқишини иккинчисининг киришига, иккинчисининг чиқишини учинчисининг киришига ва ҳоказо улаб чиқамиз (VII.36- шакл). Биринчисининг кириши контактли схеманинг кириши ва охиргисининг чиқиши схеманинг чиқиши бўлади. Ҳосил қилинган схема КНШ кўринишдаги функцияни реализация қилади.

Юқорида келтирилган алгоритмдан фойдаланиб, а) $(y \vee z) \rightarrow x\bar{y}$; б) $\bar{z}\bar{y} \leftrightarrow xy$ ва в) $(x + y + z)$ функцияларни контактли схемалар орқали реализация этиш талаб этилсин.

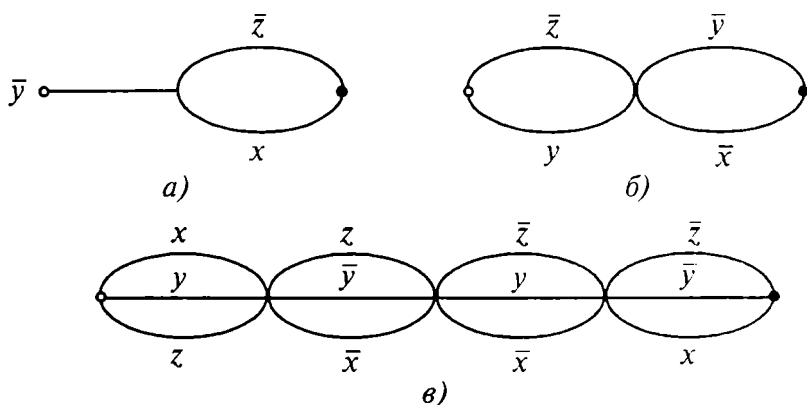
а) $f_1(x, y, z) = (y \vee z) \rightarrow x\bar{y}$ функцияни КНШ кўринишига келтирамиз ва уни соддалаштириш учун таниш бўлган ушбу

$$\begin{aligned} x \vee xy &= x, & x(x \vee y) &= x, \\ x \vee \bar{x}y &= x \vee y, & \bar{x} \vee xy &= \bar{x} \vee y, \\ x(\bar{x} \vee y) &= xy, & \bar{x}(x \vee y) &= \bar{x}y \end{aligned}$$

тенг кучли формулалардан фойдаланамиз:

$$f_1(x, y, z) = \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} = \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} = \bar{y}(\bar{z} \vee x) \quad (\text{VII.37-а шакл});$$

$$\begin{aligned} \text{б) } f_2(x, y, z) &= \bar{z}\bar{y} \leftrightarrow yx = (\bar{z}\bar{y} \vee yx)(\overline{\bar{z}\bar{y} \vee yx}) \\ &= (\bar{z} \vee y \vee yx)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\bar{y}) = (\bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \quad (\text{VII.37-б шакл}); \end{aligned}$$



VII.37- шакл.

в) $f_3 = x + y + z = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$
(VII.37-в шакл).

Параллел–кетма-кет улаш натижасида ҳосил этилган схемалар классини индуктив тарзда ифодалайлик.

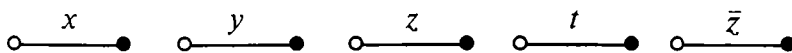
2-таъриф. Бир контактдан иборат схема **элементар схема** деб аталади. Элементар схемаларнинг айримларини чекли сон марта параллел ва кетма-кет улаш натижасида ҳосил бўлган контакт схема **параллел–кетма-кет схема ёки П-схема** деб аталади.

Равшанки, элементар схемалардан ҳар қандай усул билан ясалган П-схемага дизъюнкция, конъюнкция ва инкор амаллари билан ифодаланган ўтказувчанлик функцияси мос келади ва, аксинча, ҳар қандай шундай функция учун маълум П-схема ясаш мумкин.

Изоҳ. Ҳар қандай контактли схема П-схема бўла олмади.

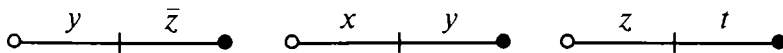
Мисол. Берилган $f_1(x, y, z, t) = (x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$ ва $f_2(x, y, z, t) = (\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$ функциялар учун П-схемалар ясаш талаб этилсин.

а) x, y, z, t, \bar{z} ни реализация қиладиган элементар схемаларни тузамиз (VII.38- шакл).



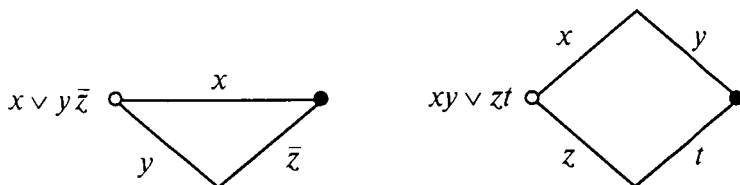
VII.38- шакл.

x ва y ўзгарувчиларга мос бўлган контактлар икки дондан бўлиши керак. Энди контактларни кетма-кет улаб, $y\bar{z}$, $xу$ ва zt элементар конъюнкцияларни реализация қиламиз (VII.39- шакл).



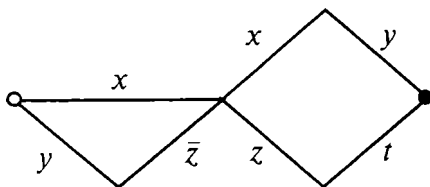
VII.39- шакл.

Учинчи қадамда, параллел улашдан фойдаланиб, $x \vee y\bar{z}$ ва $xу \vee zt$ функцияларни реализация қиламиз (VII.40- шакл).



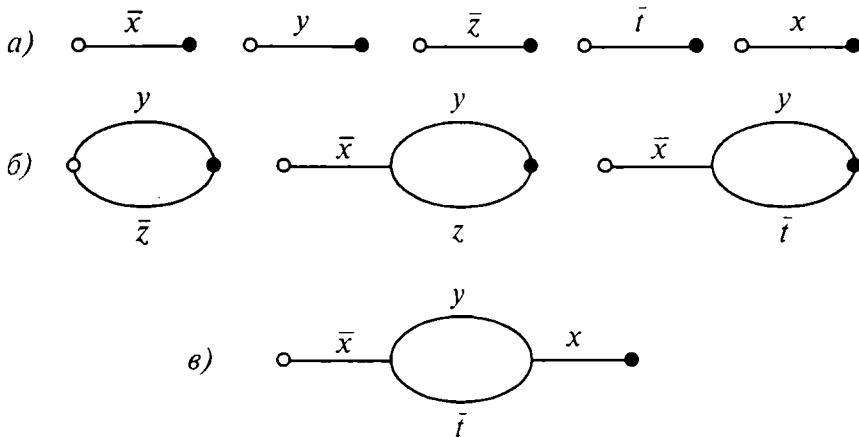
VII.40- шакл.

Ҳосил қилинган схемаларни кетма-кет улаб, берилган $f_1(x, y, z, t) = (x \vee y\bar{z})(xу \vee zt)$ функцияни реализация этадиган П-схемага эга бўламиз (VII.41- шакл).



VII.41- шакл.

б) $f_2(x, y, z, t) = (\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$ функцияни реализация қиладиган П-схема VII.42- шаклда кўрсатилган.



VII.42- шакл.

8- §. Контакт схемаларни минималлаштириш муаммоси

Минимал схема. Схемаларни минималлаштириш муаммоси. Минимал схема бўлишлик шарти. Шеннон функцияси. Контактлар сонини баҳолаш.

Маълумки, битта функциянинг ўзини ҳар хил контакт-ли схемалар орқали реализация қилиш мумкин, чунки функциянинг ДНШ (КНШ) кўриниши ягона эмас. Функцияни контактли схема орқали реализация этишда, табиийки, схемада мавжуд бўлган контактлар сони мумкин бўлгунча энг кам бўлишига ёки, ҳеч бўлмаганда, шу энг кам сондан салгина ортиқроқ бўлишига интиламиз. Битта ўтказувчанлик функциясига эга бўлган ҳамма схемалар ичида мумкин бўлгунча энг кам сонли контактга эга бўлган схемани *минимал схема* деб айтилади.

Мантиқ алгебраси функцияларини минимал схемалар орқали реализация этиш муаммосини ечиш жуда катта илмий-амалий аҳамиятга эга бўлган долзарб муаммодир. Афсуски, аниқ схемаларнинг минимал схема эканлигини исботлаш айрим ҳоллардагина мумкин.

Схемаларни минималлаштириш муаммоси мантиқ алгебраси функцияларини минималлаштириш муаммоси билан чамбарчас боғлангандир.

Айрим ҳолларда берилган схеманинг минимал схема эканлигини кўрсатадиган хусусиятларни топиш мумкин. Буни мисолларда кўрайлик.

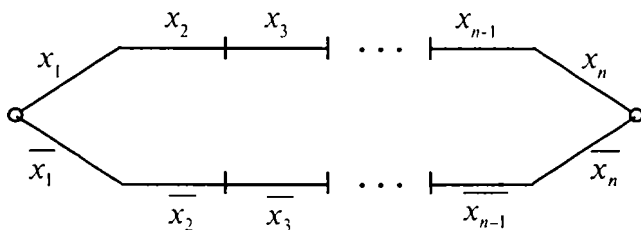
Агар бирорта ўзгарувчи функциянинг сохта эмас (муҳим) аргументи бўлса, у ҳолда ушбу функцияни реализация этадиган схемада камида ўша ўзгарувчига мос келадиган бир дона контакт мавжуд бўлиши керак. «Кўприкча» реализация этадиган ўтказувчанлик функцияси $f(x, y, z, u, t) = x y \vee t u \vee x z u \vee t z u$ бўлади. Бу функциянинг ҳамма x, y, z, t, u аргументлари муҳим аргументлардир (масалан, $t = z = u = 0, y = 1$ бўлганда, функциянинг қиймати x га боғлиқ бўлади; $x = u = 1$ бўлганда функциянинг қиймати z га боғлиқ бўлади ва ҳоказо). Схемада бу аргументларга мос келган контактлар бир мартадан қатнашган. Демак, «кўприкча» схемаси минимал схемадир.

Шундай қилиб, агар схемадаги контактлар ҳар хил ўзгарувчиларга мос келса ва бу ўзгарувчилар ўтказувчанлик функциясининг муҳим аргументлари бўлса, у ҳолда схема минимал схема бўлади.

Энди VII.43- шаклда ифодаланган схема минимал схема бўлишини кўрсатайлик.

Берилган бу ихтиёрий схемада x_1 ўзгарувчига мос бўлган контактлар фақат мусбат бўлсин. У ҳолда $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ўтказувчанлик функцияси учун

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(0, x_2, \dots, x_n)$$



VII.43- шакл.

муносабат ҳамма x_2, \dots, x_n учун бажарилади (агар схемада айрим контактлар уланган бўлса, у ҳолда схемада ўтказувчанлик йўқолмайди). Худди шу каби, агар x_1 га фақатгина манфий контактли контактлар мос келса, у ҳолда

$$f(1, x_2, \dots, x_n) \leq f(0, x_2, \dots, x_n)$$

муносабат ҳамма x_2, x_3, \dots, x_n учун бажарилади.

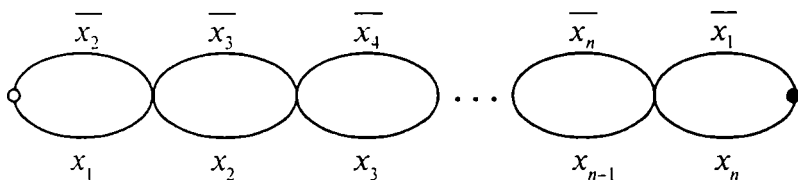
Шундай сигналлар мажмуи $(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ мавжуд бўлсинки, $f(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < f(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ бажарилсин. У ҳолда f функция x_1 аргументи бўйича ўсмайди ва f функцияни реализация қиладиган ҳар қандай схемада x_1 га мос бўлган манфий контакт бор деб айтамыз.

Худди шу каби, $(\beta_2, \dots, \beta_n)$ мажмуа учун

$$f(1, \beta_2, \dots, \beta_n) > f(0, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

бажарилса, у ҳолда f функция x_1 аргументи бўйича камаймайди ва f ни реализация қиладиган схемада x_1 га мос мусбат контакт бор деб айтамыз. Агарда f функция x_1 аргументи бўйича на камаювчи ва на ўсувчи функция бўлса, у ҳолда f функцияни реализация қилувчи схемада x_1 аргумент бўйича ҳам манфий, ҳам мусбат контактлар мавжуд бўлади.

VII.44- шаклдаги схеманинг ўтказувчанлик функциясининг $f = x_1 x_2 \dots x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ кўриниши бўлади. $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ да f функция x_1 аргументи бўйича ортувчи бўлмайди ва $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = 1$ да камаювчи бўлмайди. Кўрилаётган функция ҳамма аргументларига нисбатан симметрик бўлгани учун, қолган ҳамма аргументлари бўйича ҳам ўсувчи ва кама-



VII.44- шакл.

ювчи функция бўлмайди. Кўрилаётган схемада ҳар бир ўзгарувчига мусбат ва манфий контакт тўғри келгани учун бу схема минимал схема бўлади.

Демак, агар схемада ҳар бир ўзгарувчига биттадан мусбат ва манфий контакт мос келиб, функциянинг ҳамма аргументлари муҳим аргументлар бўлса ва бу ўзгарувчилар бўйича функция ўсувчи ҳам, камаювчи ҳам бўлмаса, у ҳолда схема **минимал схема** бўлади.

$f = x_1 x_2 \dots x_n \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_n}$ функцияни реализация қиладиган VII.44- шаклдаги схемадан фарқ қиладиган минимал схема тузиш талаб этилсин. Бунинг учун f функцияни

$$f = (x_1 \vee \overline{x_2})(x_2 \vee \overline{x_3})(x_3 \vee \overline{x_4}) \dots (x_{n-1} \vee \overline{x_n})(x_n \vee \overline{x_1})$$

кўринишдаги КНШга келтирамиз ва уни реализация қиладиган схема минимал бўлади (VII.44- шакл).

Демак, битта функцияни ҳар хил минимал схемалар орқали реализация қилиш мумкин экан, яъни минимал схема ягона эмас.

П-схемалар тўпламида (классида) ҳам минимал схемалар мавжуд бўлади. Минимал П-схема ҳамма схемалар классиди ҳам минимал схема бўла оладими ёки йўқми деган савол туғилади.

«Кўприкча» минимал схемаси орқали реализация қилинган $f = xy \vee tu \vee xzu \vee tzu$ функция учун 5 контактли П-схема мавжуд эмаслиги қўйилган саволга жавоб беради.

$f(x_1, \dots, x_n)$ мантиқ алгебрасининг функцияси бўлсин. $L(f)$ орқали уни реализация қиладиган минимал схемадаги

контактлар сонини ва $L_n(f)$ орқали П-схемадаги контактлар сонини белгилаймиз. У ҳолда

$$L(f) \leq L_n(f)$$

бўлади. $\max L(f) = L(n)$ ва $\max L_n(f) = L_n(n)$ лар Шеннон функциялари деб аталади. n аргументли $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияни схема орқали реализация қилиш учун зарур бўлган максимал ва минимал контактлар сонини топиш масаласи катта амалий аҳамиятга эга эканлиги ҳаммамизга маълум. Илмий изланишлар ҳозирги вақтда қуйидаги баҳони беради:

$$\frac{2^n}{n} < L(n) \leq 3 \cdot 2^{n-1} - 2.$$



Муаммоли масала ва топшириқлар

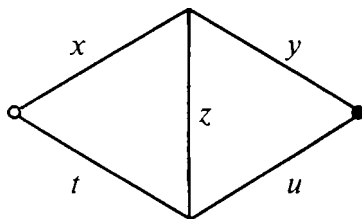
- Куйидаги функцияларни реализация қиладиган реле-контактли схемалар ясанг:
 - $x + y + z$;
 - $(x \rightarrow y) \leftrightarrow z$;
 - $(xy \vee \bar{z}) \rightarrow t$;
 - $x \rightarrow y \rightarrow z$;
 - $(x \vee y) \leftrightarrow z$;
 - $xz \rightarrow z$;
 - $(x \leftrightarrow y) \rightarrow z$;
 - $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$;
 - $(x \rightarrow y) \vee z$.
- Ҳар бир схемада чекли сондаги муҳим занжирлар мавжуд бўлишини исбот қилинг.
- Муҳим занжирларга мос келувчи конъюнкцияларнинг дизъюнкцияси схеманинг ўтказувчанлик функциясига тенг кучли эканлигини исбот қилинг. Мисолнинг натижасига асосан, схемага қараб унинг ўтказувчанлик функциясини ёзинг.
- Ҳар қандай контакт схема П-схема бўла олмаслигини исботланг.
- 1) Куйидаги функцияларни реализация қиладиган П-схемаларни топинг:

$$f_1(x, y, z) = x \rightarrow y \rightarrow z, f_2(x, y, z) = x \leftrightarrow y \leftrightarrow z,$$

$$f_3(x, y, z, t) = (xy \vee t) \leftrightarrow (\bar{x}y \rightarrow z),$$

$$f_4(x, y, z, t) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee t)(xt \vee \bar{y}z).$$

2) VII.45- шаклда кўрсатилган схема («кўприкча») П-схема бўла олмаслигини исботланг.



VII.45- шакл.

6. Агар қуйидагилар аниқ бўлса, у ҳолда тўрт талабадан қайси бири имтиҳон топширган:
- 1) агар биринчи талаба имтиҳон топширган бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам топширган;
 - 2) агар иккинчи талаба имтиҳон топширган бўлса, у ҳолда учинчиси топширган ёки биринчиси топширмаган;
 - 3) агар тўртинчи талаба имтиҳон топширмаган бўлса, у ҳолда биринчиси топширган ва учинчиси топширмаган;
 - 4) агар тўртинчи талаба имтиҳон топширган бўлса, у ҳолда биринчиси ҳам топширган.
7. Тўртта дўст – Сафаров (*С*), Бекмуродов (*Б*), Хўжаев (*Х*), Азизов (*А*) меҳнат таътилларини тўрт шаҳарда – Тошкент, Бухоро, Самарқанд ва Фарғонада ўтказишга келишдилар. Қуйидаги чеклашлар мавжуд бўлган ҳолда улардан ҳар бирининг қайси шаҳарга боришини аниқланг:
- 1) агар *С* Тошкентга бормаса, у ҳолда *Х* Бухорога бормамайди;
 - 2) Агар *Б* Тошкентга ҳам, Фарғонага ҳам бормаса, у ҳолда *С* Тошкентга боради;
 - 3) агар *Х* Фарғонага бормаса, у ҳолда *Б* Самарқандга боради;
 - 4) агар *А* Тошкентга бормаса, у ҳолда *Б* Тошкентга бормамайди;

- 5) агар A Бухорога бормаса, у ҳолда B Тошкентга бормади.
8. Терговчи бир вақтда уч гувоҳни — Донақул, Тошпўлат ва Қосимни сўроқ қилди. Уларнинг кўрсатмалари бири-бириникига қарама-қарши эди ва уларнинг ҳар бири кимнидир ёлғончиликда айбларди:
- 1) Донақул Тошпўлатни ёлғон кўрсатма беряпти деб айбларди;
 - 2) Тошпўлат Қосимни ёлғончи деб айбларди;
 - 3) Қосим терговчини Тошпўлатга ҳам, Донақулга ҳам ишонмасликка чақирарди.
- Аммо терговчи уларга бирорта ҳам савол бермасдан ким тўғри гапираётганини аниқлади. Гувоҳлардан қайси бири тўғри гапираётган эди?
9. «Уч талабадан қайси бири математик мантиқни ўқиган» деган саволга ушбу тўғри жавоб олинган: «Агар биринчиси ўқиган бўлса, у ҳолда учинчиси ҳам ўқиган, аммо, агар иккинчиси ўқиган бўлса, у ҳолда учинчиси ҳам ўқиган дегани нотўғри».
- Ким математик мантиқни ўқиган?



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Мусбат ва манфий контактли реле.
2. Реле-контактли схема орқали функцияни реализация қилиш.
3. Контактларни параллел ва кетма-кет улаш. Ўтказувчанлик функцияси.
4. Муҳим занжир ва П-схема ҳақида тушунчалар.
5. Контакт схемаларни минималлаштириш муаммоси. Минимал схема бўлишлик шарти.
6. Шеннон функцияси. Контактлар сонини баҳолаш.

Мазкур бобда дискрет математикани математик кибернетикага татбиқи, яъни минимал дизъюнктив нормал шаклдаги функцияларни яшаш ва уларни ечиш йўллари кўрсатилган. Бу ерда дизъюнктив нормал шакл (ДНШ)ни соддалаштириш, энг қисқа ДНШ, қисқартирилган ДНШ, тупикли ДНШ, Квайн ДНШ ва минимал ДНШ ни яшаш алгоритмлари келтирилган. Аналитик ва геометрик тарздаги алгоритмларнинг эквивалентлиги кўрсатилган.

1- §. Масаланинг қўйилиши

- ☑ *Элементар конъюнкциянинг ранги. Мулоҳазалар алгебраси функцияларини минималлаштириш муаммоси. Соддалик индекси ва унинг хусусиятлари. Минимал ДНШ. Энг қисқа ДНШ. Тривиал алгоритм. «Бирма-бир кўздан кечириш» алгоритми.*

1-таъриф. Ушбу

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r} \quad (\gamma \neq \mu \text{ да } i_\gamma \neq i_\mu) \quad (1)$$

ифода элементар конъюнкция деб аталади. r сон элементар конъюнкциянинг ранги дейилади. Константа 1 ни ранги 0 га тенг бўлган элементар конъюнкция деб биламиз.

2-таъриф. Ушбу

$$D = \bigvee_{i=1}^s K_i \quad (i=j \text{ да } K_i \neq K_j) \quad (2)$$

ифода дизъюнктив нормал шакл (ДНШ) деб аталади, бу ерда K_i – ранги i га тенг бўлган элементар конъюнкция.

Маълумки, D дизъюнктив нормал шакл мантиқ алгебрасининг маълум бир $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясини реализация қилади. Мантиқ алгебрасининг ҳар қандай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

($f \neq 0$) функциясини ДНШ кўринишига келтириш мумкинлигини, яъни

$$D = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

ни II бобда таъкидлаган эдик.

Бундай ДНШ сифатида f функциянинг мукамал дизъюнктив нормал шаклини (МДНШ) олиш мумкин, яъни

$$D = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}. \quad (4)$$

1- мисол. $f(x_1, x_2, x_3)$ функция қуйидаги чинлик жадвали билан берилган бўлсин.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1

У ҳолда бу функцияни қуйидаги МДНШ кўринишида ифодалаш мумкин:

$$D_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3. \quad (5)$$

Иккинчи тарафдан, шу функциянинг ўзини

$$D_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \quad (6)$$

ДНШ кўринишида ҳам ифодалаш мумкин (чинлик жадвали орқали аниқлашни ўқувчига ҳавола этамиз).

Ушбу мисол кўрсатяптики, мантиқ алгебрасининг битта функциясини бир нечта ДНШ кўринишида ифодалаш мумкин.

Агарда D_1 билан D_2 кўринишларини таққосласак, у ҳолда D_1 ифодасида 15 та ўзгарувчи символи ва 5 та элементар конъюнкция қатнашаётганлигини, D_2 ифодасида эса 3 та

ўзгарувчи симболи ва 2 та элементар конъюнкция қатнашаётганлигини кўрамыз. Демак, D_2 формула ўзгарувчилар симболи (элементар конъюнкциялар) сонига нисбатан D_1 га қараганда соддароқ формула ҳисобланади.

Агарда D_1 ва D_2 кўринишлардаги функцияни:

а) контактли схема орқали реализация қилсак, у ҳолда D_1 ни реализация қилиш учун 15 та контакт ва D_2 ни реализация қилиш учун 3 та контакт талаб этилади;

б) ноль тактли функционал элементлардан ясалган схема орқали реализация этсак, у ҳолда D_1 ни реализация қилиш учун 21 дона функционал элемент ва D_2 ни реализация қилиш учун 4 дона функционал элемент сарф бўлади;

в) бир тактли функционал элементлардан ясалган кўп тактли тўғри схема орқали реализация қилиш талаб этилса, у ҳолда D_1 ни реализация этиш учун 33 дона функционал элемент, шу жумладан, 12 дона ушлаб туриш элементи ва D_2 ни реализация қилиш учун 6 дона, шу жумладан, 2 дона ушлаб туриш элементи керак бўлади (бу мулоҳазаларнинг чинлигини исботлашни ўқувчига ҳавола этамиз).

Демак, D_1 ни реализация қиладиган схеманинг (қандай схема бўлишидан қатъи назар) таннархи D_2 ни реализация қиладиган схеманинг таннархидан анча қиммат (ортиқ) туради.

Шунинг учун ҳам мантиқ алгебраси функцияларини минималлаштириш муаммоси (халқ хўжалиги учун) катта амалий аҳамиятга эгадир. Бу масалани ҳал этиш учун ДНШ нинг «мураккаблигини» ифодаловчи $L(D)$ соддалик индексини киритамиз.

$L(D)$ функционал учун қуйидаги аксиомаларнинг бажарилишини талаб қиламиз.

I. Манфий эмаслиги ҳақидаги аксиома. Ҳар қандай ДНШ учун $L(D) \geq 0$.

II. Монотонлиги ҳақидаги аксиома (кўпайтмага нисбатан). Агар $D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1$ бўлса, у ҳолда

$$L(D) \geq L(D^1 \vee K^1). \quad (7)$$

III. Қавариқлиги ҳақидаги аксиома (қўшишга нисбатан).

Агар $D = D_1 \vee D_2$ ва $D_1 \wedge D_2 \equiv 0$ бўлса, у ҳолда

$$L(D) \geq L(D_1) + L(D_2). \quad (8)$$

IV. Инвариантлик ҳақидаги аксиома (изоморфизмга нисбатан). Агар R^1 ДНШ R ДНШ дан ўзгарувчиларни қайта номлаш (айнан тенглаштиришсиз) усули билан ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда

$$L(D^1) = L(D).$$

Дизъюнктив нормал шакллар учун мавжуд бўлган соддалик индексларини келтирайлик.

1. $L_B(D)$ — берилган D дизъюнктив нормал шаклдаги ўзгарувчилар ҳарфларининг сони. Масалан, бизнинг мисолимиздаги D_1 ва D_2 учун $L_B(D_1) = 15$ ва $L_B(D_2) = 3$, яъни бу индексга нисбатан D_2 ДНШ D_1 ДНШ га қараганда соддароқдир.

2. $L_K(D)$ — берилган D дизъюнктив нормал шаклдаги элементар конъюнкциялар сони. D_1 ва D_2 учун $L_K(D_1) = 5$ ва $L_K(D_2) = 2$, яъни D_2 бу индексга нисбатан ҳам D_1 га қараганда соддароқдир.

3. $L_0(D)$ — берилган D дизъюнктив нормал шаклдаги инкор (–) символининг сони. D_1 ва D_2 лар учун $L_0(D_1) = 6$ ва $L_0(D_2) = 2$, демак, D_2 бу индекс учун ҳам D_1 га нисбатан соддароқ экан.

$L_B(D)$, $L_K(D)$ ва $L_0(D)$ индекслар юқорида келтирилган аксиомаларни қаноатлантиради.

Маълумки, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ўзгарувчилар тўпламидан 3^n та элементар конъюнкция тузиш мумкин («бўш» конъюнкцияга 1 константа мос қилиб қўйилган). Бундан ўз навбатида $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ тўплам элементларидан 2^{3^n} та дизъюнктив нормал шакл тузиш мумкинлиги келиб чиқади.

3- таъриф. Агар $f(x_1, \dots, x_n)$ функцияни реализация қилувчи ДНШ $L(D)$ индексга нисбатан минимал бўлса, у ҳолда бундай ДНШ L га нисбатан минимал ДНШ, L_K индексга нисбатан минимал бўлган ДНШ эса энг қисқа дизъюнктив нормал шакл деб аталади.

Бундан кейин L_B индексга нисбатан минимал бўлган ДНШ ни *минимал дизъюнктив шакл* деб атаيمиз.

1- мисолни таҳлил қилайлик.

1. $D_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ минимал ДНШ бўлади, чунки ушбу ДНШ орқали ифодаланган $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг x_1, x_2, x_3 аргументлари муҳим (сохта эмас) аргументлардир. Шунинг учун уни учтадан кам ҳарф билан ифодалаш мумкин эмас.

2. $D_2 \doteq \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ энг қисқа ДНШ бўлади, чунки ушбу ДНШ билан ифодаланган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция ҳар қандай элементар конъюнкциядан фарқ қўлади.

3. $D_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ L_0 индексга нисбатан минимал ДНШ бўлади, чунки ушбу ДНШ билан ифодаланган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция x_2 ва x_3 ўзгарувчилари бўйича ўсувчи функция эмас ва, демак, уни иккита инкордан кам инкор қатнашган ДНШ кўринишида ифодалаш мумкин.

Бизнинг бу бобдаги асосий вазифамиз, математик мантиқнинг ихтиёрий $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияси учун L индексга нисбатан минимал дизъюнктив нормал шаклни қандай усуллар ёрдами билан топишдан иборат бўлади. Бу муаммо *математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси* деб аталади. Бу масала ечимининг *тривиал алгоритми* мавжудлигини кўрсатамиз.

1. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ўзгарувчилар тўпламида ҳамма 2^{2^n} та $D_1, D_2, \dots, D_{2^{2^n}}$ дизъюнктив нормал шаклларни маълум тартибда тузамиз.

2. Кейин бу ДНШ лардан $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ ларни ажратиб оламиз.

3. Ажратиб олинган ДНШ лар соддалик индексларининг (L_B, L_K, L_0) миқдорларини ҳисоблаб чиқамиз.

4. Ҳисоблаб чиқилган индекслар миқдорларини бир-бирига таққослаш йўли билан L га нисбатан минимал бўлган ДНШ ни топамиз.

Келтирилган алгоритмни амалий реализация қилиш учун жуда ҳам кўп меҳнат талаб этилади, чунки камида 2^{3^n} та кичик амални (операцияни) бажаришга тўғри келади. Масалан, $n = 3$ бўлганда, $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни реализация қиладиган L индексга нисбатан минимал дизъюнктив нормал шаклларни топиш учун камида $2^{3^3} = 134\,217\,728$ та амални бажаришга тўғри келади. Шунинг учун $n \geq 3$ дан бошлаб бу алгоритмдан фойдаланиш мантиққа тўғри келмайди, ундан фақатгина $n = 1$ ва $n = 2$ ҳоллар учун фойдаланиш мумкин.

Демак, «бирма-бир кўздан кечириш» алгоритми минимал дизъюнктив нормал шаклни топиш масаласида амалий ёрдам бермайдиган алгоритмдир. Шунинг учун мантиқ алгебраси функциясини минималлаштиришнинг бошқа усуллари излашга тўғри келади.

2- §. Дизъюнктив нормал шаклни содалаштириш ва тупикли ДНШ

ДНШ ни содалаштиришнинг икки хил йўли. Элементар конъюнкцияни четлаштириш жараёни. Кўпайтувчини четлаштириш жараёни. Тупикли ДНШ. Минимал ДНШга келтириш ҳақидаги теоремалар. Мисоллар.

Дихтиёрий ДНШ ва

$$D = D^1 \vee K, \quad D = D^1 \vee x_i^{\sigma_i} K^1 \quad (1)$$

бўлсин, бу ерда D^1 — бирор ДНШ, K — берилган D нинг бирор элементар конъюнкцияси, $x_i^{\sigma_i}$ — шу K нинг бирорта кўпайтувчиси, K^1 эса K нинг қолган кўпайтувчилари, $K = x_i^{\sigma_i} K^1$. ДНШ ни содалаштиришнинг икки хил йўлини (типини) кўриб ўтайлик.

I. Элементар конъюнкцияни четлаштириш жараёни (операцияси). D ДНШ дан D^1 ДНШ га ўтиш учун K элементар конъюнкцияни четлаштириш керак. Бундай ўзгартириш $D = D^1$ бўлганда ва фақат шундагина мумкин.

II. Кўпайтувчини четлаштириш операцияси (жараёни). D ДНШ дан $D^1 \vee K^1$ ДНШ га ўтиш операцияси. Буни бажариш учун K элементар конъюнкция ифодасидан $x_i^{\sigma_i}$ кўпайтувчини четлаштириш керак. Бу алмаштириш $D = D^1 \vee K^1$ бўлганда аниқланган.

1-таъриф. *I ва II алмаштиришлар йўллари билан соддалаштириш мумкин бўлмаган D дизъюнктив нормал шакл (I ва II алмаштиришларга нисбатан) тупикли ДНШ (ТДНШ) деб аталади.*

1-мисол. $D = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1$ ДНШ I ва II алмаштиришларга нисбатан тупикли ДНШ бўлади.

(1) ва монотонлик аксиомасига асосан $L(D^1) \leq L(D)$ ва $L(D^1 \vee K^1) \leq L(D)$ бўлади. Шунинг учун ТДНШ лар орасида ҳар доим минимал дизъюнктив нормал шакллар мавжуд бўлади.

Энди ДНШ ни юқорида келтирилган иккита алмаштириш асосида соддалаштириш алгоритмини келтирамиз.

1. $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни ифодаловчи бирор ДНШ ни дастлабки ДНШ сифатида оламиз. Масалан, шундай ДНШ сифатида унинг мукамал дизъюнктив нормал шаклини оламиз (чунки чинлик жадвали асосида уни формула орқали осонгина ёзиш мумкин).

2. Дастлабки дизъюнктив нормал шаклда қўшилувчиларни ва ҳар бир қўшилувчидаги кўпайтувчиларни тартибга соламиз. Бу тартибланиш билан ДНШ кўриниши берилади.

3. Чапдан ўнгга қараб ДНШ кўриниши кўрилиб ўтилади. Навбатдаги K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) элементар конъюнкцияга нисбатан K_i элементар конъюнкцияни четлаштириш операцияси қўлланилади, агар бу мумкин бўлмаса, у ҳолда чапдан ўнгга қараб $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$ элементар конъюнкцияларнинг $x_{i_v}^{\sigma_v}$ ($v = 1, 2, \dots, r$) кўпайтувчи ҳадлари кўриб чиқилади ва уларга нисбатан мумкин бўлгунга қадар $x_{i_v}^{\sigma_v}$ кўпайтувчини четлаштириш операцияси қўлланилади. Шундан сўнг кейинги элементар конъюнкцияга ўтилади.

Охирги элементар конъюнкцияни ишлаб чиққандан кейин, ҳосил бўлган ДНШ ни яна қайтадан чапдан ўнгга қараб кўриб чиқилади ва элементар конъюнкцияни четлаштириш операцияси синаб кўрилади.

Натижада изланган дизъюнктив нормал шаклга эга бўламиз.

1-теорема. *Соддалаштириш алгоритмини қўллаш натижасида ҳосил қилинган дизъюнктив нормал шакл (I ва II алмаштиришларга нисбатан) минимал ДНШ бўлади.*

2- мисол. Қуйидаги чинлик жадвалида берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни кўриб чиқайлик.

1-жадвал

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3)$ функция учун дастлабки ДНШ сифатида МДНШни оламин ва икки тартиблани ўтказамиз:

$$D^I = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3,$$

$$D^{II} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_3 x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

D^I тартибга солинган ДНШ учун алгоритмининг ишлаганини кўрамиз.

1. $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ конъюнкцияни четлаштириш мумкин эмас, аммо \bar{x}_1 кўпайтувчини четлаштириш мумкин, чунки

$$\bar{x}_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Натижада $\bar{x}_2 \bar{x}_3$ конъюнкцияга эга бўламиз, ундан бирорта ҳам кўпайтувчини четлаштириш мумкин эмас.

2. $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ конъюнкцияни ҳам четлаштириш мумкин эмас. Бу конъюнкциядан \bar{x}_1 кўпайтувчини четлаштириш мумкин эмаслигини осонгина кўриш мумкин, лекин \bar{x}_2 кўпайтувчига нисбатан уни четлаштириш операциясини қўллаш мумкин. \bar{x}_1x_3 конъюнкцияни ҳосил қиламиз. Кўпайтувчини четлаштириш операциясини ишлатиб, содалаштириш мумкин эмас.

3. $\bar{x}_1x_2x_3$ конъюнкцияни четлаштириш мумкин, чунки

$$\bar{x}_1x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3.$$

4. $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ конъюнкцияни ҳам четлаштириш мумкин, чунки

$$\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

5. $x_1x_2\bar{x}_3$ конъюнкцияни четлаштириш мумкин эмас, бироқ x_2 кўпайтувчини ташлаб юбориш мумкин. Натижада $x_1\bar{x}_3$ конъюнкцияга эга бўламиз. Бу конъюнкцияга нисбатан кўпайтувчини четлаштириш операциясини ишлатиб, уни содалаштириш мумкин эмас.

6. $x_1x_2x_3$ конъюнкцияни ҳам четлаштириш мумкин эмас, аммо ундан x_1 кўпайтувчини четлаштириш мумкин. Натижада, x_2x_3 конъюнкцияни ҳосил қиламиз ва уни бошқа содалаштириш мумкин эмас.

Шундай қилиб, $\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$ ДНШ ни ҳосил қиламиз. Бу ДНШ га нисбатан конъюнкцияни четлаштириш операциясини ишлатиш натижа бермайди.

Демак, содалаштириш алгоритмини ишлатиш натижа-сида

$$D = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \quad (2)$$

дизъюнктив нормал шаклни ҳосил қиламиз. Келтирилган ҳисоблар 2- жадвалда акс эттирилган.

2 - жадвал

Қадам т.р.	ДНШ ва кўрилатган тартиб	Текшири- лаётган конъюнкция	Операция тури
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$ $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	\bar{x}_1 ни четлаш- тириш
2	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$ $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	\bar{x}_2 ни четлаш- тириш
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee$ $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$ ни чет- лаштириш
4	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee$ $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ни чет- лаштириш
5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	x_2 ни чет- лаштириш
6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	x_1 ни чет- лаштириш
7	$x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3$		
	Иккинчи кўриш ҳеч нарсга бермайди	Алгоритм тамом бўлди	

Агарда соддалаштириш алгоритмини D^{II} га нисбатан иш-
латсак, у ҳолда

$$D_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \quad (3)$$

дизъюнктив нормал шаклга эга бўламиз.

3- жадвалда D^{II} га нисбатан ишлатилган соддалаштириш алгоритми ишининг асосий босқичлари келтирилган.

Ушбу мисолдан кўриниб турибдики, соддалаштириш алгоритми татбиқининг натижаси дастлабки ДНШ ни қандай тартиблаганга боғлиқ бўлар экан.

Масалан, $L_B(D_1) = 8$, $L_B(D_2) = 6$, $L_K(D_1) = 4$, $L_K(D_2) = 3$, $L_0(D_1) = 4$, $L_0(D_2) = 3$ ва бу ердан $L_B(D_1) \neq L_B(D_2)$, $L_K(D_1) \neq L_K(D_2)$, $L_0(D_1) \neq L_0(D_2)$ муносабатлар келиб чиқади.

3- жадвал

Қадам т.р.	ДНШ ва кўрилатган тартиб	Текшири-лаётган конъюнкция	Операция тури
1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	\bar{x}_1 ни чет-лаштириш
2	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_3\bar{x}_1\bar{x}_2$	x_3 ни чет-лаштириш
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_2\bar{x}_1x_3$	x_2 ни чет-лаштириш
4	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1x_2x_3$	x_1 ни чет-лаштириш
5	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee$ $\vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_3x_1x_2$	\bar{x}_3 ни чет-лаштириш
6	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ ни чет-лаштириш
7	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_2x_3 \vee x_1x_2$	$\bar{x}_2\bar{x}_3$	қўлланилмайди
8	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee$ $\vee x_2x_3 \vee x_1x_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$ ни чет-лаштириш

1	2	3	4
9	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$	\bar{x}_1x_3	қўлланил-майди
10	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$	x_2x_3	x_2x_3 ни четлаштириш
11	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$	x_1x_2	қўлланил-майди
12	$\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2$	Алгоритм гамом бўлди	

Исталган $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция учун бирор тартиблаш оқибатида содалаштириш алгоритмини татбиқ этиб, минимал ДНШни ҳосил этиш мумкинми ёки йўқми деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

2-теорема. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ математик логик алгебрасининг ихтиёрый функцияси ($f \neq 0$) ва $D = \bigvee_{i=1}^n K_i$ унинг ихтиёрый тупикли ДНШ (I ва II алмаштиришларга нисбатан) бўлсин. У ҳолда мукамал дизъюнктив нормал шакли шундай тартиблаши мавжуд бўладики, ундан содалаштириш алгоритми ёрдами билан D тупикли ДНШ ни ҳосил қилиш мумкин.

Н а т и ж а . Тупикли ДНШлар орасида албатта L индексга нисбатан минимал ДНШлар (ҳаммаси бўлиши шарт эмас) мавжуд бўлганлиги учун, содалаштириш алгоритми, МДНШ ни маълум равишда тартиблаш натижасида минимал ДНШ ни ҳам топишга имкон яратади.

Шундай қилиб, минимал ДНШ ни топиш учун МДНШ ни тартиблаш ва унга нисбатан содалаштириш алгоритмини ишлатиш керак.

Теореманинг исботидан ([56], 213-бетга қ.) шу нарса келиб чиқадики, содалаштириш алгоритми ёрдами билан тупикли ДНШ ларни мукамал ДНШ дан ясаш учун фақат конъюнкциялар ифодасида кўпайтувчилар жойлашишини вариацияламоқ етарли.

Ҳозирги вақтда конъюнкцияларни ДНШ ифодасидан четлаштириш ва кўпайтувчиларни конъюнкциялар ифодасидан четлаштириш мумкинлигини текшириш сони (МДНШ ни тартибланинг ҳамма тури бўйича)

$$2^{\left(n \log_2 n + 1\right) 2^n} \cdot (n + 2) \cdot 2^n$$

дан ортиқ эмаслиги исботланган. Бу сон 2^{3^n} сонидан анча камдир, яъни содалаштириш алгоритми «бирма-бир кўздан кечириш» алгоритмидан яхшироқ эканлиги маълум бўлади.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Куйидаги функцияларни мукамал конъюнктив нормал шаклга келтириб, L_B , L_K , L_0 содалик индексларининг миқдорини топинг:

$$f_1 = ((x \vee y) \vee z) \rightarrow ((x \vee y)(x \vee z));$$

$$f_2 = x \leftrightarrow z;$$

$$f_3 = (x \rightarrow y) \rightarrow z;$$

$$f_4 = x \rightarrow (y \rightarrow z).$$

2. Куйидаги функцияларни содалаштириш алгоритмидан фойдаланиб, минимал дизъюнктив нормал шаклга келтиринг:

$$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4;$$

$$f_2 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_3 x_4;$$

$$f_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4.$$

3. Дизъюнктив нормал шаклда берилган куйидаги функцияларнинг тупикли дизъюнктив нормал шаклини топинг:

$$1) (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

$$2) (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

$$3) (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$$

4. 3- бандда берилган функцияларнинг минимал дизъюнктив нормал шаклини топинг.

5. Математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммосининг амалий аҳамиятини тушунтириб беринг. Бу масала ечимининг тривиал алгоритмининг ноқулайлиги нимадан иборат?



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Математик мантиқ функцияларини минималлаштириш муаммоси нимадан иборат?
2. Соддалик индекси ва унинг хусусиятлари.
3. Минимал ва энг қисқа ДНШ.
4. Тривиал алгоритм тушунчаси. «Бирма-бир кўздан кечириш» алгоритми.
5. ДНШни соддалаштиришнинг икки хил йўли. Элементар конъюнкцияни ва кўпайтувчини четлаштириш жараёнларини тушунтириб беринг.
6. Тупикли ДНШ. Минимал ДНШга келтириш муаммолари.

3- §. Минималлаштириш масаласининг геометрик тарзда қўйилиши

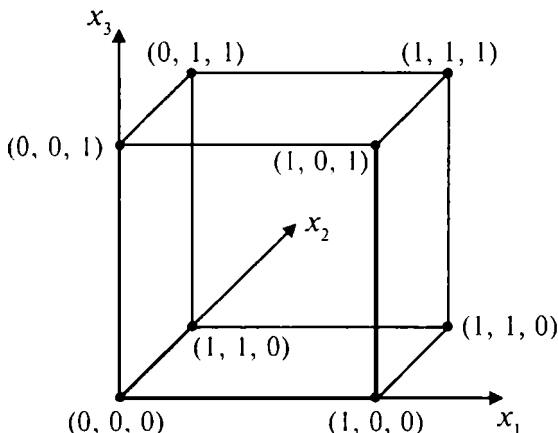
- Бирлик кубнинг ҳамма чўққилари тўплами. Уч ўлчовли ёқ. N_f тўплами ҳақида. Интервал. Тўплам қобиғи. Тўплам қобиғи билан функция орасидаги муносабат.*

Ҳамма $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ мажмуа тўпламини E^n билан белгилаймиз. E^n тўплами бирлик кубнинг ҳамма чўққилари (учлари) тўплами сифатида қараш мумкин. Шу сабабли E^n тўплам n ўлчовли куб, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ эса куб чўққилари деб аталади.

1-таъриф. $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_r}$ шундай 0 ва 1 сонларидан иборат тайинланган сонлар системаси бўлиб, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ учун

$$\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1}, \alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} = \sigma_{i_r}$$

бажарилганда E^n кубнинг чўққиларидан тузилган тўплам $(n-r)$ ўлчовли ёқ деб аталади.



VIII.1- шакл.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мантиқ алгебрасининг функцияси бўлсин. E^n кубнинг $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$ бўладиган ҳамма чўққиларидан иборат тўпلامни N_f билан белгилаймиз, яъни $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$ бажарилганда ва фақат шунда $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in N_f$ бўлади. Масалан, 1- жадвалда берилган функцияга

$$N_f = \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 0\}, \{1, 1, 0\}, \{1, 1, 1\}$$

тўплам мос келади.

Аниқки, $N_f \subseteq E^n$. Агар N_f тўплам берилган бўлса, у ҳолда унга мос бўлган f нинг аналитик кўринишини ёзиш мумкин (VIII.1- шакл).

1- мисол. а) $N_{f_1} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\};$

б) $N_{f_2} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ тўпламларга мос келадиган функцияларнинг аналитик кўриниши қуйидагича бўлади:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3;$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Демак, N_f берилган бўлса, у ҳолда унга мос бўлган f ни, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ берилганда эса N_f ни топиш мумкин.

Дастлабки функция сифатида r рангли $K(x_1, \dots, x_n)$ элементар конъюнкцияни олайлик, яъни

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_r}.$$

2-таъриф. K конъюнкцияга мос N_k тўпلام r рангли интервал деб аталади.

Ўз-ўзидан равшанки, r рангли N интервал $(n - r)$ ўлчовли ёқни ифодалайди.

2- мисол. $K_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$, $K_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $K_3(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1$ конъюнкцияларга $N_{k_1} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$, $N_{k_2} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $N_{k_3} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ интерваллар мос келади. Бу интерваллар мос равишда 2, 2 ва 1 рангли ҳамда ва 1-ўлчовли ёқ (қирра), 1-ўлчовли ёқ (қирра) ва 2-ўлчовли ёқдир.

Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бўлса, у ҳолда:

$$1) N_g \subseteq N_f, N_h \subseteq N_f; \quad 2) N_f = N_g \cup N_h$$

бўлади.

Умуман, агар $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = D$ ва $D = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s$ бўлса, у ҳолда юқоридаги хоссаларга асосан

$$N_{k_i} \subseteq N_f \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad \text{ва} \quad N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup \dots \cup N_{k_s},$$

яъни f функцияга N_f тўпلامнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_s}$ интерваллардан иборат қобиқ мос келади ва ҳар бир $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_s}$ интерваллардан иборат N_f тўпلامнинг қобиғига D дизъюнктив нормал шаклда ифодаланган f функция мос келади.

Демак, мантиқ алгебрасининг ҳар бир $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясига битта N_f тўпلامнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_n}$ интерваллардан ($N_{k_j} = N_f$) иборат қобиғи ва, аксинча, ҳар бир N_f тўпلامнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_n}$ интерваллардан иборат қобиғига битта ягона $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция мос келади, яъни N_f нинг қобиғи билан $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд.

3- мисол. 1- жадвал билан берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг дизъюнктив нормал шакллари қуйидагича эди:

$$D_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 ,$$

$$D_2 = x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 .$$

Бу ДНШларга $N_f = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ тўпламнинг иккита қопламаси мос келади:

$$N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} ,$$

$$N_f = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} ,$$

бу ерда

$$N_{k_1} = \{(0, 0, 0)\} , \quad N_{k_2} = \{(1, 0, 0)\} , \quad N_{k_3} = \{(1, 0, 1)\} ,$$

$$N_{k_4} = \{(1, 1, 0)\} , \quad N_{k_5} = \{(1, 1, 1)\} ,$$

$$N_{k_1^0} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\} ,$$

$$N_{k_2^0} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} .$$

Биринчи қоплама бешта нуқтадан, иккинчиси эса қирра ва икки ўлчовли ёқдан иборат.

N_{k_i} интервалнинг ранги r_i бўлсин (у K_i конъюнкциянинг рангига тенг). У ҳолда

$$r = \sum_{i=1}^s r_i \quad (4)$$

қопламанинг ранги деб аталади.

Мантиқ алгебраси функцияси $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ни минималлаштириш (минимизациялаш) муаммосига эквивалент бўлган қопламалар ҳақидаги геометрик масала қуйидагича қўйилади; берилган $N_f = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup \dots \cup N_{k_s}$ тўпламнинг $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_s}$ ($N_{k_j} \subseteq N_f, j = 1, 2, \dots, s$) интерваллардан иборат шундай қобиғини топиш керакки, унинг r ранги энг кичик бўлсин, яъни бизни қизиқтирувчи

$$\min r = \min \sum_{i=1}^s r_i \quad (5)$$

топиш масаласига келади.

Демак, мантиқ алгебраси функциясини минималлаштириш масаласини икки формада кўриш мумкин: биринчиси – аналитик формада, иккинчиси – геометрик формада. Шунинг учун адабиётларда икки тил ишлатилади: аналитик ва геометрик. Айрим ҳолларда икки тилнинг комбинациясидан фойдаланилади. Масалан, конъюнкцияни интервал ва ДНШ ни қоплама деб айтилади.

4- §. Жоиз (рухсат этилган) конъюнкциялар

Жоиз конъюнкциялар. Тривиал алгоритмни соддалаштириш.

Маълумки, x_1, x_2, \dots, x_n ўзгарувчилардан 3^n та элементар конъюнкция ва 2^{3^n} та дизъюнктив нормал шакл тузиш мумкин. Масалан, $n = 3$ га тенг бўлса, яъни x_1, x_2, x_3 ўзгарувчилардан

$$\begin{aligned} &1, x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1\bar{x}_2, \\ &x_1\bar{x}_3, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_3, \\ &\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1x_2x_3, x_1\bar{x}_2x_3, x_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \\ &\bar{x}_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3, x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (1)$$

элементар конъюнкциялар тузиш мумкин. Аммо бу элементар конъюнкцияларнинг ҳаммаси ҳам берилган ихтиёрий $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни реализация қиладиган дизъюнктив нормал шаклларнинг ифодасида иштирок этавермайди. Шунинг учун 3^n та конъюнкцияларнинг қайси бири $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг ДНШ да иштирок этади деган масалани ечишга тўғри келади. Бунинг учун, биринчи навбатда, $E_n \setminus N_f$ тўпламнинг элементларида 1 қиймат қабул қиладиган конъюнкцияларни топиш керак бўлади. Масалан,

$$f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz, \quad (2)$$

бўлсин, u ҳолда

$$N_{f_1} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \quad (3)$$

бўлади. Демак, ушбу 1-жадвалга эга бўламиз.

1- жадвал

$E_n \setminus N_f$	1 қиймат қабул қиладиган конъюнкциялар
(0, 0, 0)	$1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}\bar{z}, \bar{y}\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
(0, 0, 1)	$1, \bar{x}, \bar{y}, z, \bar{x}\bar{y}, \bar{x}z, \bar{y}z, \bar{x}\bar{y}z$

Иккинчи навбатда, (1) конъюнкциялар орасидан 1- жадвалдаги конъюнкцияларни четлаштирамиз, чунки $f(x, y, z)$ функцияга N_f ((3) га қаранг) тўплам мос келганлиги учун 1- жадвалдаги конъюнкциялар (2) функцияни реализация қиладиган дизъюнктив нормал шакллар ифодасида умуман қатнашмайди. Бу операция натижасида биз $f_1(x, y, z)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ лар ифодасида қатнашиши мумкин бўлган (қатнашишга рухсат этилган, қатнашишга жоиз) конъюнкцияларга эга бўламиз:

$$x, y, xy, xz, x\bar{y}, x\bar{z}, yz, \bar{x}y, y\bar{z}, x\bar{y}z, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}yz, \bar{x}\bar{y}z, \bar{x}\bar{y}\bar{z}. \quad (4)$$

Шундай қилиб, $3^3 = 27$ конъюнкциядан 15 тасининг берилган $f_1(x, y, z)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ лар ифодасида қатнашиши жоиз экан.

1- таъриф. *Ихтиёрий $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция ва унга мос бўлган N_f тўплам берилган бўлсин. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияни реализация қиладиган ДНШ лар ифодасида қатнашиши мумкин бўлган конъюнкциялар, яъни $E_n \setminus N_f$ тўпламнинг нуқталарида 1 қийматга эга бўлган конъюнкциялардан ташқари қолган ҳамма конъюнкциялар **жоиз конъюнкциялар** деб аталади.*

Масалан, (4) даги ҳамма конъюнкциялар жоиз конъюнкциялар бўлади.

1- мисол. Берилган

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \quad (2a)$$

ва унга мос

$$N_{f_2} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\} \quad (3a)$$

тўплам берилган бўлсин.

Жоиз конъюнкцияларни топиш учун ушбу 2- жадвални тузамиз.

2- жадвал

$E_n \setminus N_f$	1 қиймат қабул қиладиган конъюнкциялар
(1, 0, 0)	$1, x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_1\bar{x}_2, x_1\bar{x}_3, \bar{x}_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
(0, 1, 1)	$1, \bar{x}_1, x_2, x_3, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1x_3, x_2x_3, \bar{x}_1x_2x_3$

У ҳолда (1) даги конъюнкциялардан 2- жадвалдаги конъюнкцияларни четлаштириш натижасида қуйидаги жоиз конъюнкцияларга эга бўламиз:

$$x_1, x_2, x_1x_3, x_2\bar{x}_3, \bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, x_1x_2x_3, \\ x_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3. \quad (5)$$

Ўзгарувчилар сони n та бўлганда, 3^n та конъюнкция ва улардан 2^{3^n} та $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияни реализация қилиши мумкин бўлган ДНШ тузиш мумкинлигини айтган эдик. Демак, берилган ихтиёрий $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияни реализация қиладиган тупикли (минимал) ДНШларни 2^{3^n} та ДНШлар орасидан изламасдан, балки 2^λ ДНШлар ичидан излаш керак деган натижага келдик, бу ерда λ — жоиз конъюнкциялар сони.

5- §. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шакл

Максимал интервал. Оддий импликант. Қисқартирилган ДНШ. Мисоллар.

1- таъриф. Агар N_f тўпламнинг қисм тўплами бўлган N_k интервал учун:

$$1) N_k \subseteq N_k^1 \subseteq N_f;$$

2) N_k^1 интервалнинг ранги N_k интервалнинг рангидан кичик шартини қаноатлантирувчи N_k^1 интервал мавжуд бўлма-са, у ҳолда N_k (N_f га нисбатан) **максимал интервал** деб аталади.

1- мисол. $K_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2$, $K_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2$, $K_3(x_1, x_2, x_3) = x_2$ бўлсин. У ҳолда N_{k_2} , N_{k_3} максимал интерваллар бўлиб, N_{k_1} интервал эса N_f нинг максимал интервалли бўлмайди, чунки $N_{k_1} \subset N_{k_3}$ ва N_{k_3} нинг ранги N_{k_1} нинг рангидан кичик.

2- мисол. 4- §, (4) даги жоиз конъюнкцияларга мос келган 15 та интервалдан фақат N_{x_1} ва N_{x_2} интерваллар ҳамда 4- §, (5) даги 12 та интервалдан фақат $N_{x_1 x_2}$, $N_{x_1 x_3}$, $N_{x_2 \bar{x}_1}$, $N_{\bar{x}_2 x_3}$, $N_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$, $N_{\bar{x}_1 \bar{x}_3}$ интервалларгина мос равишда N_{f_1} ва N_{f_2} тўпламларга нисбатан максимал интерваллар бўладилар.

2- таъриф. N_f тўламнинг N_k максимал интервалига мос келган K конъюнкция f функциянинг **оддий импликанти** деб аталади.

Агар K^1 конъюнкциянинг ҳамма кўпайтувчилари K конъюнкцияда ҳам мавжуд бўлса, у ҳолда $N_k \subseteq N_k^1$ деб ёзиш мумкин. У ҳолда, маълум маънода, f функциянинг K оддий импликанти ифодасидан бирорта ҳам кўпайтувчини четлаштириш мумкин эмас, чунки кўпайтувчини четлаштириш натижасида $N_k^1 \not\subset N_f$ муносабатда бўлган K^1 конъюнкцияга эга бўламиз.

Ҳар қандай N_k интервални ($N_k \subseteq N_f$) максимал интервалгача кенгайтириш мумкин.

N_f тўламнинг ҳамма максимал интерваллари

$$N_{k_1^0}, N_{k_2^0}, \dots, N_{k_m^0}, \quad (1)$$

лардан иборат бўлсин. У ҳолда

$$N_f = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \cup \dots \cup N_{k_m^0}, \quad (2)$$

бўлади, чунки $N_{k_i^0} \subseteq N_f$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ва N_f нинг ҳар бир нуқтаси (1) даги максимал интервалларнинг бирортасининг элементи бўлади. (2) тенглик қуйидаги муносабатга эквивалентдир:

$$f = K_1^0 \vee K_2^0 \vee \dots \vee K_m^0. \quad (3)$$

3- таъриф. f функциянинг ҳамма оддий импликантларининг дизъюнкцияси (3) қисқартирилган ДНШ деб аталади.

Демак,

$$D_s(f) = K_1^0 \vee K_2^0 \vee \dots \vee K_m^0 \quad (4)$$

f функциянинг қисқартирилган ДНШ бўлади. $D_s(f)$ қисқартирилган ДНШ f функция орқали бир қиймати аниқланади ва f функцияни реализация қилади.

3- мисол. 4- §, (2) да берилган $f_1(x_1, x_2, x_3)$ учун максимал интерваллардан иборат

$$N_{f_1} = N_{k_1^0} \cup N_{k_2^0} \quad (5)$$

қобикқа ва 4-§, (2a) да берилган $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функция учун

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \quad (6)$$

қобикқа эга бўламиз. Бу ерда

$$K_1^0 = x_1, \quad K_2^0 = x_2, \quad K_1 = x_1x_2, \quad K_2 = x_1x_3, \quad K_3 = x_2\bar{x}_3,$$

$$K_4 = \bar{x}_2x_3, \quad K_5 = \bar{x}_1\bar{x}_2, \quad K_6 = \bar{x}_1\bar{x}_3.$$

Бу қобикларга қуйидаги қисқартирилган ДНШлар мос келади:

$$D_c(f_1) = x_1 \vee x_2,$$

$$D_c(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3. \quad (7)$$

6- §. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклини яшаш алгоритми

✓ Функцияни қисқартирилган ДНШга келтириш алгоритми. Мисоллар.

Ихтиёрий $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклини яшаш учун қуйидаги операцияларни бажарамиз:

1) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциянинг исталган конъюнктив нормал шаклини оламиз, масалан, мукамал КНШ;

2) кейин қавсларни очиб чиқамиз, яъни

$$\wedge \vee \rightarrow \vee \wedge$$

турдаги алмаштиришни ўтказамиз;

3) бундан кейин ҳосил қилинган ифодадан 0 га тенг ҳадларни четлаштирамиз ва

$$K_1 K_2 \vee K_2 = K_1, \quad K_1 \vee K_1 = K_1,$$

формулардан фойдаланиб уни соддалаштирамиз. Натижада, қисқартирилган ДНШ га келамиз.

1- мисол. $N_{f_2} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$ тўплагга мос $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг МКНШ ни

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}), \quad (1)$$

формуладан фойдаланиб ёзамиз:

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Алгоритмнинг 2 ва 3- қадамларини ишлатамиз:

$$\begin{aligned} (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) &= x_1 \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \\ &\vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_3 \bar{x}_3 = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3. \end{aligned}$$

Қисқартирилган ДНШ қуйидаги кўринишда бўлади:

$$D_c(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3. \quad (2)$$

2- мисол.

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$
 функция берилган бўлсин. Бу функцияга

$N_{f_1} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$
 тўплам мос келади. Функциянинг МКНШ кўриниши

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Алгоритмнинг 2 ва 3- қадамларини бажарамиз:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_2 \vee \\ &\vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \\ &\vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \\ &\vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Демак, функциянинг қисқартирилган ДНШ қуйидагича бўлади:

$$D_c(f_1) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2. \quad (3)$$



Муаммоли масала ва топшириқлар

- $N_{f_1} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\},$
 $N_{f_2} = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$
 тўпламларга мос f_1 ва f_2 функцияларнинг аналитик кўри-
 нишини ёзинг.
- $N_{k_1} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1)\}, N_{k_2} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\},$
 $N_{k_3} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ интервалларга мос конъюнкция-
 ларнинг аналитик кўринишини ёзинг.
- Ҳар бир $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_s}$ интерваллардан иборат N_f
 тўпламнинг қобиғига D дизъюнктив нормал шаклда ифо-
 даланган f функция мос келишини исботланг.

4. Куйида берилган функцияларнинг жоиз конъюнкцияларини топинг:

$$f_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4;$$

$$f_2 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_3 x_4;$$

$$f_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4;$$

$$f_4 = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

$$f_5 = (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3);$$

$$f_6 = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$$

5. 4- бандда келтирилган функцияларни қисқартирилган ДНШ га келтиринг.

6. Қисқартирилган ДНШ ни яшаш алгоритми асосида қуйидаги функцияларни қисқартирилган ДНШ кўринишга келтиринг:

$$f_1 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_2;$$

$$f_2 = \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3;$$

$$f_3 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3.$$



Муस्ताқил ишлаш учун савол ва топшириқлар

- Интервал. Тўплам қобиғи. Тўплам қобиғи билан функция орасидаги муносабат.
- Жоиз (рухсат этилган) конъюнкциялар. Тривиал алгоритмни соддалаштириш.
- Максимал интервал ва оддий импликант ҳақида тушунчалар.
- Қисқартирилган дизъюнктив нормал шакл.
- Функцияни қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклга келтириш алгоритми.

7- §. Тупикли дизъюнктив нормал шаклларни геометрик асосда яшаш усуллари

- Тупикли ДНШга келтириш алгоритми. Айрим максимал интервалларни четлаштириш. Келтирилмайдиган қопламалар (қобиқлар). Қисқартирилган, тупикли ва минимал ДНШлар орасидаги муносабатлар.

4- §, (2a) формула билан берилган $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функция учун $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_6}$ максимал интерваллардан N_{f_2} иборат қоплама

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_4} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6} \quad (1)$$

эканлигини юқорида кўрсатган эдик. Бу ерда

$$N_{f_2} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$$

$$N_{k_1} = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \quad N_{k_2} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\},$$

$$N_{k_3} = \{(0, 1, 0), (1, 1, 0)\}, \quad N_{k_4} = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\},$$

$$N_{k_5} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}, \quad N_{k_6} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0)\}. \quad (2)$$

Олдимишга бундай саволга жавоб топиш масаласини кўямиз: N_{f_2} тўпламнинг N_{k_1}, \dots, N_{k_6} максимал интерваллардан иборат бўлган қопламадан айрим максимал интервалларни четлаштирганимизда, қолган қисми яна N_{f_2} нинг қобиғи бўладими ёки йўқм?

(1) ва (2) муносабатлардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$N_{f_2} = N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6},$$

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_4} \cup N_{k_6},$$

$$N_{f_2} = N_{k_1} \cup N_{k_2} \cup N_{k_5} \cup N_{k_6},$$

$$N_{f_2} = N_{k_5} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3},$$

$$N_{f_2} = N_{k_4} \cup N_{k_2} \cup N_{k_3} \cup N_{k_6}. \quad (3)$$

N_{f_2} тўпламнинг (3) да кўрсатилган қопламаларидан бошқа қопламалари мавжуд эмас. Бу қобиқлар (1) келтирилган қобиқдан айрим максимал интервалларни четлаштириш натижасида ҳосил қилинган. Шундай қилиб, қўйилган саволнинг биринчи қисмига ижобий жавоб бердик.

(3) да келтирилган N_{f_2} тўпламнинг исталган қопламадан ихтиёрий бирорта максимал интервални четлаштирганимизда, қолган максимал интерваллар N_{f_2} тўпламнинг

қопламаси бўла олмайди. Бундай қопламалар N_{f_2} тўпламнинг келтирилмайдиган қопламалари деб аталади. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} 1) & N_{k_2}, N_{k_3}, N_{k_5}, N_{k_6}; & 2) & N_{k_1}, N_{k_4}, N_{k_6}; \\ 3) & N_{k_1}, N_{k_2}, N_{k_5}, N_{k_6}; & 4) & N_{k_2}, N_{k_3}, N_{k_5}; \\ 5) & N_{k_2}, N_{k_3}, N_{k_4}, N_{k_6} \end{aligned} \quad (4)$$

қобиклар N_{f_2} тўпламнинг келтирилмайдиган қопламалари бўлади.

1-таъриф. Агар $N_{k_1}, N_{k_2}, \dots, N_{k_m}$ максимал интерваллардан иборат қобик унинг таркибидан исталган максимал интервални ($N_{k_j}, j = 1, 2, \dots, m$) четлаштирганимизда, қолган қисми N_f нинг қобиғи бўла олмаса, у ҳолда бу қобик N_{f_2} тўпламнинг келтирилмайдиган қоплами деб аталади.

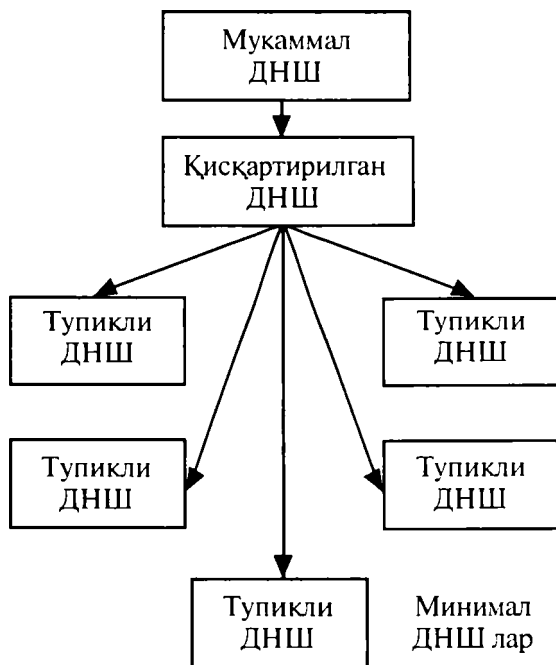
2-таъриф. N_f тўпламнинг келтирилмайдиган қобиғига мос бўлган ДНШ тупикли дизъюнктив нормал шакл деб аталади (геометрик маънода).

1-мисол. N_{f_2} тўпламнинг (4) да ифодаланган келтирилмайдиган қобикларига мос қуйидаги ДНШ лар

$$\begin{aligned} D_1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3, \\ D_2 &= \bar{x}_2 x_2 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3, \\ D_3 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3, \\ D_4 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3, \\ D_5 &= \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \end{aligned} \quad (5)$$

f_2 функциянинг тупикли дизъюнктив нормал шакллари бўлади.

Теорема. I ва II алмаштиришларга нисбатан тупикли ДНШ тушунчаси билан геометрик маънодаги тупикли ДНШ тушунчаси эквивалентдир.



VIII.2- шакл.

Биз таърифлаган қисқартирилган, тупикли ва минимал ДНШлар қуйидаги муносабатда бўлади.

Тупикли ДНШ қисқартирилган ДНШдан айрим конъюнкцияларни четлаштириш йўли билан ҳосил қилинади.

L_B га нисбатан минимал ДНШ тупикли бўлади.

Тупикли ДНШ лар орасида L_B га нисбатан минимал ДНШ лар мавжуд бўлади.

Масалан,

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$$

функциянинг (4- §, (2a) га қ.) $D_c(f_2)$ қисқартирилган ДНШ ни топдик (6- §, (2) га қ.):

$$D_c(f_2) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3.$$

Ундан кейин (5) да ифодаланган тупикли ДНШларни ҳосил қилдик. У ердан кўриниб турибдики,

$$L_B(D_1) = L_B(D_2) = 6 \quad \text{ва} \quad L_B(D_3) = L_B(D_4) = L_B(D_5) = 8.$$

Демак,

$$D_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \quad \text{ва} \quad D_2 = \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3.$$

тупикли ДНШлар $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг минимал дизъюнктив нормал шакллари бўлади. Равшанки, бу ДНШлар ўз навбатида $f_2(x_1, x_2, x_3)$ нинг энг қисқа ДНШлари ҳам бўлади.

МДНШ асосида минимал ДНШ ясаш жараёнининг схемаси VIII.2- шаклда ифодаланган.

8- §. Тупикли дизъюнктив нормал шакллارни ясаш алгоритми

Ҳамма тупикли ДНШларни топишнинг геометрик ғояларга асосланган алгоритми. Мисоллар.

Ҳамма тупикли ДНШларни топишнинг геометрик ғояларга асосланган алгоритмини келтирамыз. N_f тўпламнинг ҳамма максимал интерваллар системаси

$$N_{k_1}^0, N_{k_2}^0, \dots, N_{k_m}^0$$

бўлсин. $N_f = \{P_1, P_2, \dots, P_\lambda\}$ ва $P_0 \notin N_f$ ихтиёрий нуқта бўлсин. f функция айнан 1 га тенг бўлмаган функция бўлсин. 1- жадвални тузамиз, бу ерда

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{агар } P_j \notin N_{k_i}^0 \text{ бўлса, } (i = 1, \dots, m), \\ 1, & \text{агар } P_j \in N_{k_i}^0 \text{ бўлса, } (j = 0, 1, \dots, \lambda). \end{cases}$$

Жадвалнинг биринчи устуни 0 лардан иборат бўлади, чунки $P_0 \notin N_f$. Ҳар бир қолган устунларида ҳеч бўлмаганда битта 1 мавжуд бўлади. Демак, биринчи устун қолган ҳамма устунлардан фарқ қилади.

1- жадвал

	P_0	P_1	...	P_j	...	P
$N_{k_1^0}$	σ_{10}	σ_{11}	...	σ_{1j}	...	$\sigma_{1\lambda}$

$N_{k_i^0}$	σ_{i0}	σ_{i1}	...	σ_{ij}	...	$\sigma_{i\lambda}$

$N_{k_m^0}$	σ_{m0}	σ_{m1}	...	σ_{mj}	...	$\sigma_{m\lambda}$

Ҳар бир j ($0 \leq j \leq \lambda$) учун ҳамма сатрлар рақамлари (номерлари) тўплами E_j ни топамиз, бу ерда P_j устунда 1 мавжуд бўлади.

$$E_j = \{e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{j\mu(j)}\}$$

бўлсин.

$$\bigwedge_{j=1}^{\lambda} (e_{j1} \vee \dots \vee e_{j\mu(j)})$$

ифодани тузамиз ва

$$\bigwedge \vee \rightarrow \vee \bigwedge$$

турдаги алмаштиришни ўтказамиз. Бу алмаштириш вақтида e симболини буль қийматли деб биламиз. Ҳосил қилинган ифодани

$$\begin{aligned} AB \vee A &= A, \\ A \vee A &= A \end{aligned}$$

тенг кучли формулалардан фойдаланиб содалаштирамиз. Бунинг натижасида $\vee \bigwedge$ ифоданинг қисми бўлган $\vee \bigwedge^1$ ифодани ҳосил қиламиз. Равшанки, $\vee \bigwedge^1$ ифодадаги ҳар бир қўшилувчи ҳад келтирилмайдиган қобикни ифодалайди.

1- мисол. Қуйидаги чинлик жадвалида берилган $f_2(x_1, x_2, x_3)$ функцияни кўрайлик:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

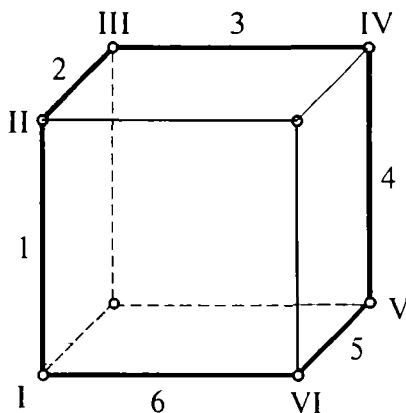
Бу функция учун $N_f = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ тўплам 6 та учдан (чўққидан) иборат. Уларни I, II, ..., VI сонлари билан белгилаймиз. Максимал интерваллари қирралардан иборат, уларни 1, 2, ..., 6 сонлари билан номерлаймиз (VIII.3- шакл). 2- жадвални тузамиз.

2- жадвал

	0	I	II	III	IV	V	VI
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	0	0	1

Бу ердан, $E_I = \{1, 6\}$, $E_{II} = \{1, 2\}$, $E_{III} = \{2, 3\}$, $E_{IV} = \{3, 4\}$, $E_V = \{4, 5\}$, $E_{VI} = \{5, 6\}$. У ҳолда

$$\begin{aligned}
 \vee \wedge &= (1 \vee 6)(1 \vee 2)(2 \vee 3)(3 \vee 4)(4 \vee 5)(5 \vee 6) = \\
 &= (1 \vee 2 \cdot 6)(3 \vee 2 \cdot 4)(5 \vee 4 \cdot 6) = \\
 &= (1 \cdot 3 \vee 2 \cdot 3 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \vee 2 \cdot 4 \cdot 6)(5 \vee 4 \cdot 6) = \\
 &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \vee 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \vee 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \vee 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \vee \\
 &\quad \vee 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \vee 2 \cdot 4 \cdot 6 = \\
 &= 3 \cdot 5 \vee 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \vee 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \vee 1 \vee 3 \cdot 4 \cdot 6 \vee 2 \cdot 4 \cdot 6.
 \end{aligned}$$



VIII.3- шакл.

Натижада 5 та келтирилмайдиган қобикқа ва уларга мос 5 та тупикли ДНШга эга бўламиз:

$$D_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3, \quad D_2 = \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$

$$D_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3, \quad D_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3,$$

$$D_5 = \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Булардан D_1 ва D_5 минимал ДНШ бўлади.

Бу алгоритм кўп аргументли функциялар учун кўп меҳнат талаб қилади ва амалда деярли ишлатилмайди.

9-§. Айрим ягона тарзда ҳосил қилинадиган дизъюнктив нормал шакллар

- Тупикли ДНШларни ясашни соддалаштириш. Икки ҳолат. Ягона тарзда тупикли ДНШни ҳосил қилиш алгоритми. Асосий қисми. Ядро. Квайн дизъюнктив нормал шакли. Теорема. ΣT турдаги ДНШ. $D_{\Sigma T}$. Даста. Регуляр нуқта. Регуляр максимал интервал. Ю.Журавлёв теоремаси. Теорема. Функцияни минималлаштириш жараёнининг схемаси.*

Мукамал дизъюнктив нормал шаклдан минимал дизъюнктив нормал шаклни ҳосил қилиш жараёнининг схемасини VIII.2- шаклда келтирган эдик.

Аввал қисқартирилган ДНШ олинади. Кейин ягона тарздаги жараён бутоқланишга ўтади, яъни ҳамма тупикли ДНШ ларни ясаш жараёнига ўтилади. Охири тупикли ДНШ лардан минимал ДНШ лар ажратиб олинади. Бу жараённинг энг оғир қисми тупикли ДНШларни ясаш қисмидир (бутоқланиш қисми). Уни икки ҳолатда соддалаштириш мумкин.

1. Тупикли ДНШ лар ясаш жараёнида қатнашмайдиган қисқартирилган ДНШ нинг айрим ҳадларини олдиндан четлаштириш керак. Натижада қисқартирилган ДНШнинг қолган ҳадларини бирма-бир кўриш камаяди.

2. Қисқартирилган ДНШ нинг айрим ҳадларини шундай четлаштириш керакки, қолган қисмидан ҳеч бўлмаганда битта минимал ДНШ ясаш мумкин бўлсин. Ушбу қадам ягона тарзда амалга ошиши мақсадга мувофиқ келади.

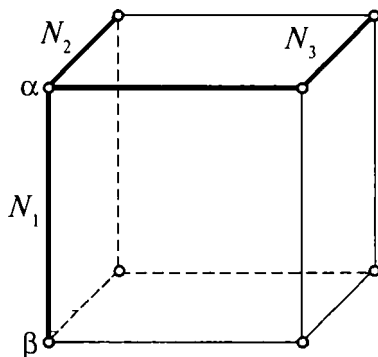
Ушбу параграфда шундай ягона тарзда тупикли ДНШни ҳосил қилишнинг иккита алгоритмини келтирамиз.

N_k интервал N_f тўпламнинг максимал интервали бўлсин.

1-таъриф. Агар N_f тўпламнинг шундай α нуқтаси мавжуд бўлсаки, $\alpha \in N_k$ ва α нуқта N_f нинг бошқа максимал интервалларининг элементи бўлмаса, у ҳолда N_k максимал интервал N_f нинг **асосий қисми** деб аталади.

1-мисол. Қуйидаги жадвалда берилган $f_1(x_1, x_2, x_3)$ функцияни кўрайлик. VIII.4-шаклда N_f тўплам ва унинг N_1, N_2, N_3 максимал интерваллари (қирралари) акс эттирилган:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



VIII.4- шакл.

Бу ерда $N_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $N_2 = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ ва $N_3 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ нуқта фақат N_1 интервал билан ва $(1, 1, 1)$ нуқта фақат N_3 интервал билан қопланганлиги кўриниб турибди. Демак, N_1 ва N_3 максимал интерваллар N_f тўпламнинг асосий қисмлари бўлади.

2-таъриф. N_f тўпламнинг ҳамма асосий қисмларидан (ёқларидан) тузилган тўплам **ядро** деб аталади.

Келтирилган мисолда $\{N_1, N_3\}$, ядро бўлиши равшандир. Ядро ҳар бир келтирилмайдиган қобиққа киради. Бу ердан ядро билан қопланадиган ёқ (қирра) ҳеч бир келтирилмайдиган қобиққа кирмаслиги келиб чиқади.

3-таъриф. **Ядро билан қопланган максимал ёқларга (қирраларга) мос ҳамма оддий импликантларни мукамал ДНШдан (қисқартирилган ДНШдан) четлаштириш натижасида ҳосил қилинадиган ДНШ Квайн дизъюнктив нормал шакли** деб аталади ва $D_{кв}$ деб белгиланади.

Америка олими Квайн исбот қилган (1959) куйидаги теоремани келтираемиз.

1-теорема. **Ҳар бир айнан 0 га тенг бўлмаган $f(x_1, \dots, x_n)$ функциянинг ягона Квайн дизъюнктив нормал шакли мавжуд бўлади.**

2- мисол. 1- жадвалда берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг қисқартирилган ДНШ куйидагича бўлади:

$$D_c = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2.$$

$\{N_1, N_3\}$ ядро N_2 ёқни (қиррани) қоплайди. N_2 га $\bar{x}_2 x_3$ оддий импликант мос келади. Таърифга асосан, бу оддий импликантни қисқартирилган ДНШ ифодасидан четлаштирсак, Квайн ДНШ келиб чиқади:

$$D_{\text{кв}} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3.$$

Демак, қисқартирилган ДНШ дан айрим оддий импликантларни четлаштириш йўли билан ягона тарзда аниқланган Квайн ДНШга ўтиш мумкин. Квайн ДНШ ўша функцияни реализация қилади ва бу функциянинг ҳамма тупикли ДНШларини ўз ичига олган бўлади.

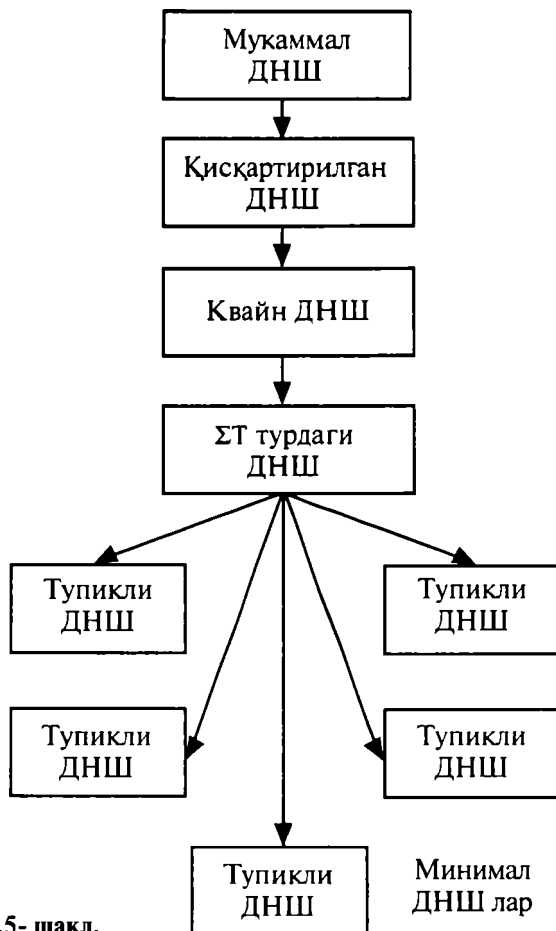
4- таъриф. *Ҳеч бўлмаганда бирорта келтирилмайдиган қобиққа кирувчи шундай максимал ёқлар мажмуаси билан қопланган N_f тўпламга мос дизъюнктив нормал шакл ΣT турдаги ДНШ деб аталади ва у $D_{\Sigma T}$ орқали белгиланади.*

$f(x_1, \dots, x_n)$ функциянинг ҳамма тупикли ДНШларининг дизъюнкцияси (мантиқий йиғиндиси) ва уни соддалаштириш натижасида $D_{\Sigma T}$ дизъюнктив нормал шакл ҳосил бўлади.

Таърифга асосан, ҳар бир $f(x_1, \dots, x_n)$ функция учун ягона $D_{\Sigma T}$ ДНШ мавжуд ва у $f(x_1, \dots, x_n)$ ни реализация қилади. $D_{\Sigma T}$ ДНШ қисқартирилган ДНШдан айрим ҳадларини четлаштириш йўли билан ҳосил қилинади.

5- таъриф. $\alpha \in N_f$ бўлсин. У ҳолда α нуқтани ўз ичига олган ҳамма N_f га нисбатан максимал ёқларнинг (қирраларнинг) Π_α мажмуаси α нуқтадан ўтувчи **даста** (туташ) деб аталади.

6- таъриф. $\alpha \in N_f$ ва $\alpha \in N_K^0$ бўлсин. N_K^0 шу N_f тўпламнинг максимал ёғи (қирраси). Агар $\beta \in N_f \setminus N_K^0$ ва $\Pi_\beta \in \Pi_\alpha$ бўлса, у ҳолда α нуқта (N_K^0 ва N_f га нисбатан) **регуляр нуқта** деб аталади.



VIII.5- шакл.

3- мисол. 1- жадвалда берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция учун (VIII.4- шаклга қ.) α нуқта сифатида $(0, 0, 1)$ ни ва N_2 максимал ёқни оламиз. Равшанки, $\alpha \in N_2 = \{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. α регуляр нуқта (N_2 ва N_f га нисбатан) эканлигини кўрсатамиз. $\beta = (0, 0, 0)$ бўлсин. У ҳолда ($N_1 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$)

$$\Pi_\alpha = \{N_1, N_2\}, \Pi_\beta = \{N_1\} \text{ ва } \Pi_\beta \subseteq \Pi_\alpha.$$

Демак, α нуқта регуляр нуқта бўлади.

7-таъриф. Агар N_K^0 максимал интервалнинг ҳар бир нуқтаси (N_K^0 ва N_f га нисбатан) регуляр нуқта бўлса, у ҳолда N_f учун N_K^0 **регуляр максимал интервал** деб аталади.

Ю.И. Журавлёв теоремаси. $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг K^0 оддий импликанти $D_{\Sigma T}$ турдаги ДНШнинг ифодасида бўлмаслиги учун унга мос N_K^0 интервал регуляр максимал интервал бўлиши етарли ва зарурдир.

5- мисол. 1- жадвалда берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функция учун битта N_2 регуляр интервал мавжуд. Уни четлаштирсак, у ҳолда $N_1 \cup N_3$ га эга бўламиз. Бу ердан $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3$ келиб чиқади ва у $D_{\Sigma T}$ турдаги ДНШ бўлади. Бу ДНШ функциянинг ягона тупикли ДНШ ҳам бўлади.

3- теорема. $f(x_1, x_2, x_3)$ функциянинг ΣT турдаги ДНШ шу функциянинг Квайн ДНШ дан айрим оддий импликентларни четлаштириш йўли билан ҳосил қилиниши мумкин.

Шундай қилиб, $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияни минималлаштириш жараёнини VIII.5- шаклда акс эттирилган схема орқали ифодалаш мумкин.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Куйидаги жадвал билан берилган $f(x_1, x_2, x_3)$ функцияларнинг мукамал, қисқартирилган, Квайн, ΣT турдаги, тупикли ва минимал дизъюнктив нормал шакллариини юзинг.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0

2. Берилган ДНШларнинг мукамал, қисқартирилган, тупикли ва минимал дизъюнктив нормал шакллари топинг:
 а) $D = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$; б) $D = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_3x_4$.
3. Берилган КНШ ларнинг мукамал, қисқартирилган, тупикли ва минимал дизъюнктив нормал шакллари топинг:
 а) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
 б) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.
4. Қуйидаги функцияларнинг ҳамма тупикли ДНШ ларини топинг:
 а) $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$; б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110011000010101)$;
 в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0110101110101011)$.
5. Қуйидаги дизъюнктив нормал шакллар тупикли, энг қисқа ва минимал ДНШ бўладими ёки йўқми эканлигини кўрсатинг:
 а) $x_1x_2 \vee \bar{x}_2$; б) $\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
 в) $x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_2x_3$.
6. а) $f_1(x, y, z) = x + y + z$; б) $f_2(x, y, z) = (x \rightarrow y) \leftrightarrow z$;
 в) $f_3(x, y, z, t) = (xy \vee \bar{z}) \rightarrow t$; г) $f_4(x, y, z) = x \rightarrow y \rightarrow z$;
 д) $f_5(x, y, z) = (x \vee y) \leftrightarrow z$; е) $f_6(x, y, z) = xz \rightarrow y$;
 ж) $f_7(x, y, z) = (x \leftrightarrow y) \rightarrow z$; з) $f_8(x, y, z) = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$;
 и) $f_9(x, y, z) = (x \rightarrow y) \vee z$

функцияларга мос N_{f_i} ($i = \overline{1, 9}$) тўпламларни топинг ва уларни тупикли ДНШ кўринишига келтиринг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Тупикли дизъюнктив нормал шаклга келтириш алгоритми.
2. Келтирилмайдиган қопламалар ҳақида тушунча.
3. Қисқартирилган, тупикли ва минимал ДНШ лар орасидаги муносабатлар.
4. Ҳамма тупикли ДНШларни топишнинг геометрик ғояларга асосланган алгоритми.
5. Тупикли ДНШларни ясашни соддалаштириш. Ягона тарзда тупикли ДНШни ҳосил қилиш алгоритми.
6. Квайн дизъюнктив нормал шакли. Ю.Журавлёв теоремаси.
7. Функцияни минималлаштириш жараёнининг схемаси.

Бу бобда графлар назариясининг элементлари ёритилган. Бу ерда оддий графлар, графларнинг изоморфлиги, маршрутлар, занжирлар, циклар, боғлиқлилик, дарахтлар, мультиграфлар, Эйлер графлари, хроматик сон ва хроматик синф, тўрлар ва тўрдаги оқимлар, Форд—Фалкерсон теоремаси каби масалалар қараб чиқилган.

1- §. Оддий графлар. Таъриф ва мисоллар¹

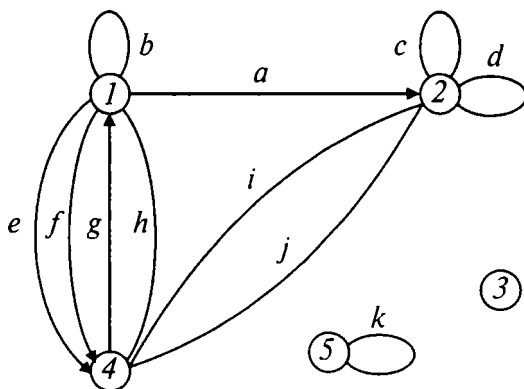
✓ *Граф. Қирралар. Учлар. Йўналтирилган, йўналтирилмаган қирралар. Инцидент. Оддий графлар. Графнинг тўлдирувчиси. Қисм граф. Суграф.*

Графлар назарияси ҳозирги замон математикасининг асосий қисмларидан биридир. Кейинги пайтларда турли хил АБТ ва дискрет характерга эга бўлган ҳисоблаш қурилмаларини лойиҳалашда (ясашда) графларнинг роли янада ошди.

Графнинг ўзи нима? Таъриф беришдан аввал уни қуйидаги мисолда тушунтирамиз.

IX.1- шакл учлари 1, 2, 3, 4, 5 рақамлари билан белгиланган доирачалардан, қирралари (йўналишга эга ёки йўналишсиз) эса бу доирачаларнинг баъзи бирларини туташтирувчи $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ чизиклардан иборат. a қирра йўналтирилган бўлиб, 1 ва 2 учларни туташтиради (лекин 2 ва 1 учларни туташтирмайди); *ёйлар* деб аталувчи бу қирраларга e, f, g лар ҳам мисол бўла олади. h қирра йўналтирилмаган бўлиб, u 1 ва 4 ҳамда 4 ва 1 учларни туташтиради; *звенолар* деб аталувчи бундай қирраларга i ва j лар ҳам кира-

¹ Ушбу боб доцент Ф.Э.Эргашевнинг маърузалар матнидан фойдаланиб ёзилди.



IX.1- шакл.

ди. Ниҳоят, b , c , d , k қирралар *сиртмоқлар* деб аталади ва баъзи учни унинг ўзи билан туташтиради (бу қирралар ҳам йўналишга эга эмас).

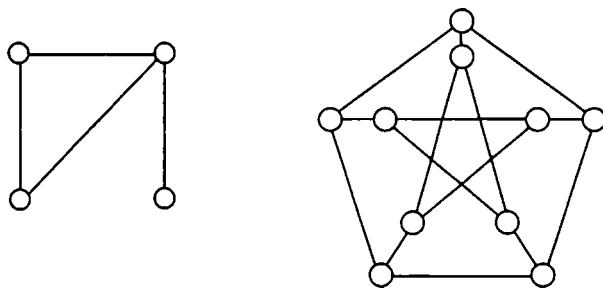
Одатда a , b , e , f , g , h қирраларни 1 учга *инцидент* деб атайдилар, ўз навбатида бу уч шу қирраларнинг ҳар бирига инцидентдир. Шу билан бирга e , f ёлар 1 учдан 4 га қараб йўналтирилган, g эса, аксинча, 4 дан 1 га қарата йўналтирилган. 3 ва 5 учлар *яккаланган* дейилади (улар кўпи билан сиртмоқларга инцидент бўлиши мумкин).

Бу мисолдаги граф чеклидир: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ учлар ва $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ қирралар тўпламининг иккала-си ҳам чекли.

Келгусида *оддий графлар* муҳим ўрин тутади. Бу синфнинг графлари қуйидаги хоссаларга эга: у чекли, барча қирралари ориентирланмаган, сиртмоқлари ва каррали қирралари йўқ (исталган иккита уч биттадан кўп звено билан туташтирилмайди).

Бундай графларга қуйидагилар мисол бўла олади (IX.2- шакл).

Петерсен номи билан аталувчи ўнг томондаги граф қирраларининг доирачалар билан белгиланмаган кесишган жойлари унинг учлари эмасдир.



IX.2- шакл.

1-таъриф. Бўш бўлмаган X учлар тўплами ва $U \subseteq X^{[2]}$ қирралар тўпламидан тузилган тартибланган $G = (X, U)$ жуфтлик **оддий граф** дейилади.

Агар $x, y \in X$ учлар учун $xy \in U$ бўлса, учлар **қўшни**, агар $xy \notin U$ бўлса, бу учлар **қўшнимас** дейилади.

Таърифдан бевосита кўринадикки, агар учлар сони $|X| = n(G)$ бўлса, у ҳолда қирралар сони $m(G)$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринлидир:

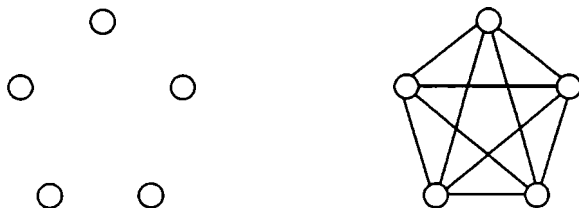
$$0 \leq m(G) \leq \binom{n(G)}{2}.$$

Оддий графларнинг қуйидаги иккита ҳолини алоҳида айтиб ўтамыз:

E_n — n учли бўш граф: $U(E_n) = \emptyset$;

F_n — n учли тўлиқ граф: $U(F_n) = X^{[2]}$.

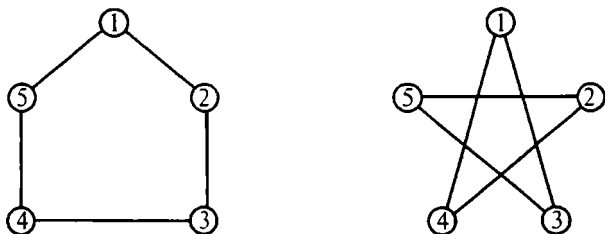
IX.3- шаклда E_5 ва F_5 графлар келтирилган.



IX.3- шакл.

2-таъриф. Учлари $G=(X, U)$ графнинг учларидан, қирралари эса $U \subseteq X^{12} \setminus U$ тўпладан иборат бўлган граф $\bar{G}=(X, \bar{U})$ берилган графнинг **тўлдирувчиси** дейилади.

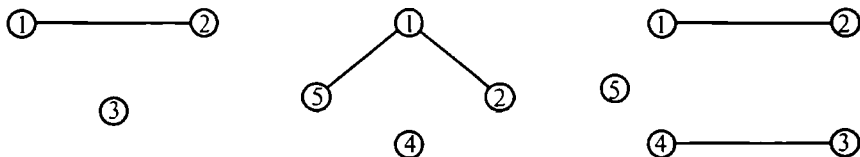
Равшанки, $\bar{\bar{G}}=G$. IX.3- шаклдаги E_5 ва F_5 бир-бирини тўлдирувчи графлардир. Уларга яна мисол келтирамиз (IX.4- шакл).



IX.4- шакл.

3-таъриф. Агар $G=(X, U)$ ва $G'=(X', U')$ графлар учун $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$ бўлса, у ҳолда G' граф G нинг **бўлаги** дейилади.

Масалан, IX.5- шаклдаги графлар IX.4- шаклдаги биринчи графнинг бўлакларидир.



IX.5- шакл.

4-таъриф. Агар $G=(X, U)$ графнинг бўлаги $G'=(X', U')$ учун $U' = \{xu/x, u \in X'\}$ бўлса, у ҳолда у **қисм граф** дейилади.

Бошқача қилиб айтганда, қисм графни ҳосил қилиш учун $X \setminus X'$ учлар тўплами билан уларнинг камида биттасига инцидент бўлган қирралар олиб ташланади.

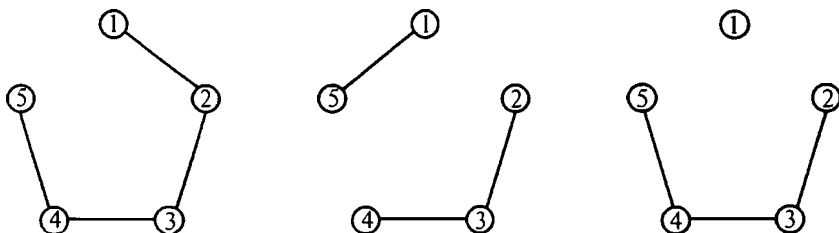
Масалан, IX.4- шаклда келтирилган графнинг қисм графларидан баъзилари IX.6- шаклдаги графлардан иборат.



IX.6- шакл.

5- таъриф. Агар $G = (X, U)$ графнинг бўлаги $G' = (X', U')$ учун $X' = X$ бўлса, у ҳолда у **суграф** дейилади, яъни суграфларни ҳосил қилиш учун фақат қирраларни олиб ташлаш кифоя.

Яна IX.4- шаклдаги мисолга мурожаат қиламиз. Қуйидаги графлар унинг суграфларидир (IX.7- шакл).



IX.7- шакл.

2- §. Графларнинг изоморфлиги

Графлар изоморфизми. Изоморф графлар. Қўшнилик муносабати.

$G = (X, U)$ ва $G' = (X', U')$ графлар берилган бўлсин. Қайси ҳолда уларнинг иккаласи битта графни ифодалайди деган саволга жавоб беришга уринамиз. Бу масала графларнинг изоморфизми тушунчаси билан чамбарчас боғлиқдир.

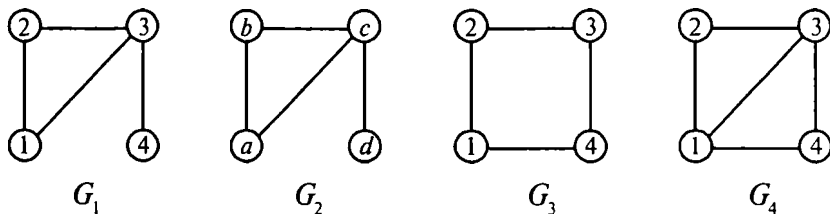
Таъриф. Агар G ва G' графлар учлари тўпламлари X ва X' орасида ўзаро бир қийматли ва учларнинг қўшнилик муносабатини сақлайдиган мосликни (\Leftrightarrow) ўрнатиш мумкин бўлса, яъни $\forall x, y \in X$ ва уларга мос $x', y' \in X'$ ($x \Leftrightarrow x', y \Leftrightarrow y'$) учун $xu \in U \Leftrightarrow x'u' \in U'$ бўлса, у ҳолда бу графлар **изоморф** дейилади.

Қуйидаги графлар берилган бўлсин (IX.8- шакл):

$$G_i = (X_i, U_i), \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

бу ерда

$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, 2, 3, 4\}, & U_1 &= \{12, 13, 23, 34\}; \\ X_2 &= \{a, b, c, d\}, & U_2 &= \{ab, ac, bc, cd\}; \\ X_3 &= \{1, 2, 3, 4\}, & U_3 &= \{12, 23, 34, 14\}; \\ X_4 &= \{1, 2, 3, 4\}, & U_4 &= \{13, 23, 14, 24\}; \end{aligned}$$



IX.8- шакл.

Умуман олганда, бу графларнинг тўрталаси ҳар хилдир. $G_1 \neq G_2$, чунки $X_1 \neq X_2$; $G_3 \neq G_4$, чунки $U_3 \neq U_4$. Лекин кўришиб турибдики, G_1 ва G_2 бир хил тузилишга (структурага) эга, шу жумладан, G_3 ва G_4 ҳам бир хил тузилишга эга. Агар изоморфликни \approx билан ва изоморф эмасликни \neq билан белгиласак: $G_1 \approx G_2$, $G_3 \approx G_4$, $G_1 \neq G_3$, $G_1 \neq G_4$, $G_2 \neq G_3$, $G_2 \neq G_4$ эканлигини қўрамиз.

Масалан, $G_1 \approx G_2$ ни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$1 \Leftrightarrow a, 2 \Leftrightarrow b, 3 \Leftrightarrow c, 4 \Leftrightarrow d;$$

у ҳолда

$$\begin{array}{ll} 12 \in U_1 \text{ ва } ab \in U_2, & 13 \in U_1 \text{ ва } ac \in U_2, \\ 14 \notin U_1 \text{ ва } ad \notin U_2, & 23 \in U_1 \text{ ва } bc \in U_2, \\ 24 \notin U_1 \text{ ва } bd \notin U_2, & 34 \in U_1 \text{ ва } cd \in U_2, \end{array}$$

яъни $xу \in U_1 \Leftrightarrow x'у' \in U_2$ шарт бажарилади.

Ўқувчига

$$1 \Leftrightarrow b, 2 \Leftrightarrow a, 3 \Leftrightarrow c, 4 \Leftrightarrow d$$

мослик ҳам G_1 ва G_2 графларнинг изоморфизми эканлигини текширишни тавсия қиламиз. Шу билан бирга учларнинг қолган $4! - 2 = 22$ та мосликлари изоморфизм эмаслигини айтиб ўтамиз.

G_3 ва G_4 графларнинг изоморфизмини масалан, қуйидагича ўрнатиш мумкин:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & - G_3 \text{ графда} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\ 1 & 3 & 2 & 4 & - G_4 \text{ графда} \end{array}$$

(бу графларнинг бошқа изоморфизмларини аниқланг).

$G_1 \neq G_3$ эканлигини осонгина аниқлаш мумкин. Масалан, G_1 графнинг 4 учи фақат битта уч билан қўшни, G_3 да эса бундай уч умуман йўқ.

3- §. Мультиграфлар

Параллел қирралар. Сиртмоқ. Инцидентлик матрицаси. Мультиграф.

Энди умумий ҳолда чекли, ориентирлаштирилмаган графларни киритамиз.

Таъриф. Граф деб $G = (X, U, \psi)$ тартибланган учликка айтилади, бу ерда $X \neq \emptyset$ — учлар тўплами, U — қирралар тўплами (иккаласи ҳам чекли) ва $\psi: U \Rightarrow X^2$ акслантириш ҳар бир $u \in U$ қирра учун унинг $x, u \in X$ учларига тартибланмаган $\psi(u) = xy$

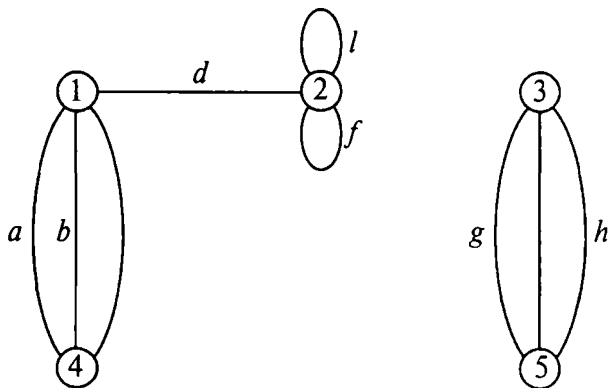
жуфтликни мос қўяди. Агар $\psi(u) = x$ бўлса, u ҳолда u қирра x учдаги сиртмоқ, $\psi(u) = x$, $u \wedge x \neq u$ бўлса, u **звено** дейилади. Агар x ва u учларнинг иккаласи камида битта умумий инцидент қиррага эга бўлса, улар **қўшни** дейилади. Хусусий ҳолда, агар x учда камида битта сиртмоқ бўлса, u ўз-ўзи билан қўшнидир.

Агар u ва v қирралар учун $u \neq v \wedge \psi(u) = \psi(v)$ бўлса, u ҳолда улар **параллел (каррали)** дейилади.

Агар графнинг учлари $X = \{1, 2, \dots, n\}$ каби тартибланган бўлса, u ҳолда уни $A(G) = (\alpha_{ij})$ қўшнилик матричаси ёрдамида бериш мумкин, бу ерда α_{ij} — шу i ва j учларни туташтирувчи қирралар сони. Албатта, бу матрица граф учларининг тартибланишига боғлиқ ва уни параллел қирраларни жойлашиш тартиби аниқлигигина тиклайди. Инцидентлик матричаси $B(G) = (\beta_{ij})_m^n$ бўйича графни ягона равишда тиклаш мумкин:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар } i \text{ уч ва } j \text{ қирра инцидент бўлса,} \\ 0, & \text{акс ҳолда.} \end{cases}$$

Бу ерда $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$ ва қирралар ҳам тартибланган деб ҳисобланади: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.



IX.9- шакл.

IX.9- шаклда учлари $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, қирралари $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ бўлган $G = (X, U, \psi)$ граф (мультиграф) берилган. Акслантириш ψ эса қуйидагича аниқланган:

$$\psi(a) = \psi(b) = \psi(c) = 14, \quad \psi(d) = 12, \quad \psi(e) = \psi(f) = 22, \\ \psi(g) = \psi(h) = 35.$$

Бу граф учун

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4- §. Маршрутлар, занжирлар, цикллар. Боғлиқлилик

Маршрут. Циклик маршрут. Занжир. Цикл. Содда занжир. Туташтирилган учлар. Боғлиқли граф. Қўшнилик матрицаси. Такомиллаштирилган қўшнилик матрицаси.

1- таъриф. *Оддий $G = (X, U)$ графдаги*

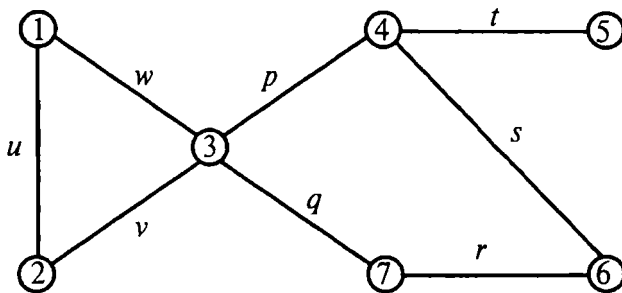
$$x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 u_3 x_3 \dots x_{l-1} u_l x_l$$

кетма-кетлик (бу ерда $x_0, x_1, \dots, x_l \in X; u_1, u_2, \dots, u_l \in U$) узунлиги l тенг бўлган ва x_0, x_l учларни туташтирувчи маршрут дейилади.

Агар $x_0 = x_l$ ва $l \geq 1$ бўлса, маршрут *циклик* дейилади. $l = 0$ маршрут битта x_0 учдан иборат бўлади ва у *циклик* ҳисобланмайди.

Маршрутда учлар ва қирраларнинг ҳар хил бўлиши талаб қилинмайди. Битта уч ёки қирра бир неча марта такрорланиши мумкин.

2- таъриф. *Қирралари ҳар хил бўлган маршрут занжир деб аталади. Циклик занжир эса цикл дейилади. Агар занжирда (циклда) x_0 ва x_l лардан ташқари барча учлари ҳар хил бўлса, у ҳолда у содда занжир (цикл) дейилади.*



IX.10- шакл.

IX.10- шаклдаги графда $3v2u1w3p4t5t4t5$ ва $3w1u2v3p4t5t4t5$ маршрутлар бир хил элементлардан тузилган бўлса-да, лекин ҳар хилдир. Улар циклик эмас ва занжир ҳам эмасдир. $3w1u2v3p4$ маршрут занжир, лекин содда эмас ва циклни ташкил этмайди. $3w1u2v3p4s6r7q3$ ва $3v2u1w3p4s6r7q3$ ҳар хил содда бўлмаган циклар. $3q7r6s4p3$ маршрут содда циклдир. $1u3v2$ кетма-кетлик умуман маршрут эмас.

3- таъриф. Агар G графнинг x ва y учлари орасида ҳеч бўлмаганда битта занжир мавжуд бўлса, у ҳолда улар **туташтирилган** дейилади.

Равшанки, графнинг учлари тўпламида берилган «туташтирилганлик» муносабати рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эга. Демак, бу муносабат эквивалентликдир ва графнинг X учлари тўпламини X_1, X_2, \dots, X_k синфларга ажратади. Ҳар бир синфга тегишли бўлган учлар ўзаро туташтирилгандир (турли синфларга тегишли бўлган учлар орасида занжирлар йўқ).

$G = (X, U)$ графнинг $G_i = (X_i, V_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) қисм графи унинг **боғлиқли компонентаси** дейилади. Агар $k(G) = 1$ бўлса, граф **боғлиқли** дейилади.

Боғлиқли G графнинг учлари тўплами X да масофа тушунчасини киритиш мумкин: i ва j учлар орасидаги масофа деб

$$d(i, j) = \min l_{|i, j|}$$

га айтилади, бу ерда $l_{i,j}$ шу $[i, j]$ занжирнинг узунлиги ва минимум барча $[i, j]$ занжирлар бўйича олинади (албатта, бу минимум содда занжирларда эришилади).

Кирилган $d(i, j)$ учун масофанинг барча хоссалари (аксиомалари) бажарилади:

$$1) d(i, i) = 0, d(i, i) > 0 (i \neq j);$$

$$2) d(i, j) = d(j, i);$$

$$3) d(i, j) + d(j, k) \geq d(i, k).$$

Демак, X тўплам метрик фазони ташкил этади.

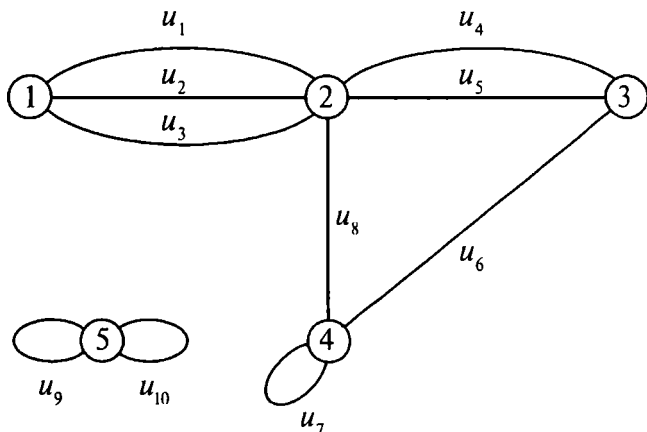
$G = (X, U, \psi)$ мультиграф берилган бўлсин, бу ерда $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ва $A(G) = (\alpha_{ij})$ қўшнилик матрицаси. Графнинг x_i ва x_j учларини туташтирувчи узунлиги $l \geq 1$ бўлган турли хил маршрутлар сонини ва уларнинг ўзларини аниқлаш масаласини қараймиз. Бу сон $[A(G)]^l = (\alpha_{ij}^{(l)})$ матрицанинг $\alpha_{ij}^{(l)}$ элементига тенг.

Ҳақиқатан ҳам, $l = 1$ бўлганда, бу ўз-ўзидан равшан. Фараз қилайлик, $\alpha_{ik}^{(l)}$ берилган x_i ва x_k учларни туташтирувчи l узунликдаги маршрутлар сони бўлсин. Унда x_i ва x_j учларни туташтирувчи ва узунликлари $l + 1$ бўлган (охиридан олдинги x_k учни танлаб олган ҳолда) маршрутлар сони $\alpha_{ik}^{(l)} \alpha_{kj}$ га тенг, умумий ҳолда эса барча маршрутлар сони матрица-

лар кўпайтмаси қоидасига асосан $\sum_{k=1}^n \alpha_{ik}^{(l)} \alpha_{kj} = \alpha_{ij}^{(l+1)}$ га тенг.

IX.11- шаклдаги граф учун

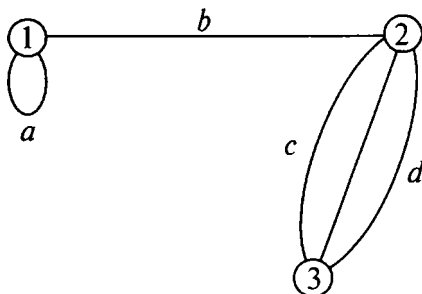
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 14 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 42 & 3 & 9 & 0 \\ 42 & 15 & 31 & 18 & 0 \\ 3 & 31 & 5 & 9 & 0 \\ 9 & 18 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \dots;$$



IX.11- шакл.

масалан, x_1 уч билан x_4 учни туташтирувчи узунликлари 2 га тенг бўлган учта маршрут ($x_1u_1x_2u_8x_4$, $x_1u_2x_2u_8x_4$, $x_1u_3x_2u_8x_4$) бор ва бу учларни туташтирувчи узунликлари 3 га тенг тўққизта маршрут ($x_1u_1x_2u_4x_3u_6x_4$, $x_1u_1x_2u_5x_3u_6x_4$, $x_1u_2x_2u_4x_3u_6x_4$, $x_1u_2x_2u_5x_3u_6x_4$, $x_1u_3x_2u_4x_3u_6x_4$, $x_1u_3x_2u_5x_3u_6x_4$, $x_1u_1x_2u_8x_4u_7x_4$, $x_1u_2x_2u_8x_4u_7x_4$, $x_1u_3x_2u_8x_4u_7x_4$) мавжуд, x_5 учни ўзи билан боғловчи узунлиги 2 га тенг тўртта маршрут ($x_1u_9x_5u_9x_5$, $x_5u_9x_5u_10x_5$, $x_5u_10x_5u_9x_5$, $x_5u_10x_5u_10x_5$) бор ва ҳоказо.

Маршрутларнинг ўзларини аниқлаш усулини (ҳисоблашлари кўплиги сабабли) содда мисолда кўрсатамиз (IX.12- шакл).



IX.12- шакл.

Бу графнинг такомиллаштирилган қўшнилик матрицасини тузамиз:

$$A(u) = (a_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c+d \\ 0 & c+d & 0 \end{pmatrix},$$

бу ерда $a_{ij}(u)$ — шу i ва j учларни туташтирувчи қирраларнинг шартли йиғиндиси. Қирралар белгиларини (a , b , c , d) нокоммутатив (лекин ассоциатив) ярим ҳалқанинг ясовчилари деб қабул қиламиз.

$A(u)$ матрицанинг кетма-кет даражаларини топамиз:

$$[A(U)]^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab & bc + cd \\ ba & b^2 + c^2 + d^2 + cd + dc & 0 \\ cd + db & 0 & c^2 + d^2 + cd + dc \end{pmatrix},$$

$$[A(U)]^3 = \begin{pmatrix} a^3 + b^2a + ab^2 & a^2b + b^3 + bc^2 + bcd + bdc + bd^2 & abc + abd \\ ba^2 + b^3 + c^2b + d^2b + cdb + dc b & bab & b^2c + c^3 + d^2c + cdc + dc^2 + b^2d + c^2d + d^3 + cd^2 + dcd \\ cba + dba & cd^2 + db^2 + c^3 + d^2c + cdc + dc^2 + c^2d + d^3 + cd^2 + dcd & 0 \end{pmatrix},$$

Масалан, $[A(U)]^3$ матрицанинг $\alpha_{21}^{(3)}(U) = ba^2 + b^3 + c^2b + d^2b + cdb + dc b$ элементи x_2 билан x_1 ни туташтирувчи узунлиги 3 га тенг бўлган олтига маршрутни аниқлайди:

$$\begin{array}{lll} x_2bx_1ax_1ax_1, & x_2bx_1bx_2bx_1, & x_2cx_3cx_2bx_1, \\ x_2dx_3dx_2bx_1, & x_2cx_3dx_2bx_1, & x_2dx_3cx_2bx_1. \end{array}$$

Агар бизни x_i дан x_j га l қадамлар билан ўтиш масаласи қизиқтирса, бутун мусбат сонлар ярим ҳалқасига $2 = 1$ бул муносабатини киритамиз. У ҳолда, агар x_i дан x_j гача камида битта узунлиги l га тенг бўлган маршрут бўлса, $[A(G)]^l$ матрицанинг $\alpha_{ij}^{(l)}$ элементи 1 га, акс ҳолда 0 га тенг. IX.11-шаклдаги граф учун

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Агар x_i дан x_j гача l дан кўп бўлмаган қадамлар билан ўтиш масаласини кўрсак, у ҳолда $A + E$ (E_n^n – бирлик матрица) матрицанинг даражаларини қараймиз. Юқоридаги мисолда

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

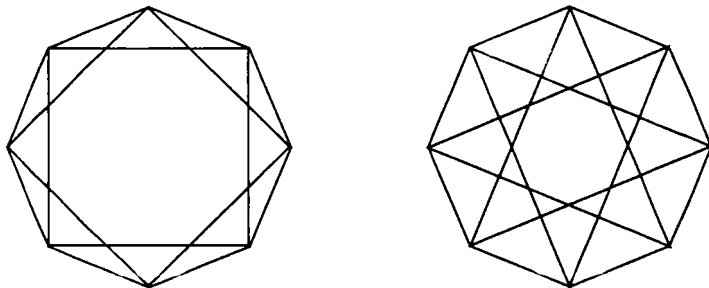
$$(A + E)^2 = (A + E)^3 = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бу усул билан графнинг барча боғлиқлик компонента-ларини ҳам топиш мумкин.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. IX.13- шаклда кўрсатилган иккита графнинг изоморфли-гини исботланг.



IX.13- шакл.

2. Бир-бири билан аразлаган учта кўшнининг учта умумий қудуқлари бор. Ҳар бир уйдан ҳар бир қудуққа бир-бири билан кесишмайдиган йўл ўтказиш мумкинми? Жавобин-гизни изоҳланг.
3. Бешта тўғри кўп қиррали графлар учларининг сони ва даражасини аниқланг.
4. Тўғри кўп қиррали графлар учун кўшнилик ва инцидент-лик матрицаларини тузинг.



Муस्ताқил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Оддий графлар. Қирралар, учлар. Йўналтирилган ва йўналтирилмаган қирралар. Инцидент.
2. Графнинг тўлдирувчиси. Қисм граф. Суграф.
3. Графлар изоморфизми. Изоморф графлар. Қўшнилик муносабати.
4. Мультиграфлар.
5. Маршрутлар, занжирлар, циклар. Боғлиқлилик.

5- §. Дарахтлар

- Циклик ва ациклик қирра. Цикломатик сон. Дарахт. Поғона учлари. Графнинг асоси. Ватар. Чекли дарахтда қирралар сони учлар сонидан битта камлиги ҳақида.*

1- таъриф. *Агар G графнинг n қирраси камида битта циклга тегишли бўлса, у **циклик қирра**, акс ҳолда **ациклик қирра** деб аталади. G граф учун*

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + k(G)$$

*(бу ерда $m(G)$ — берилган G нинг қирралари сони, $n(G)$ — учлари сони ва $k(G)$ — компоненталари сони) ифода унинг **цикло-матик сони** деб аталади.*

Осонгина кўрсатиш мумкинки:

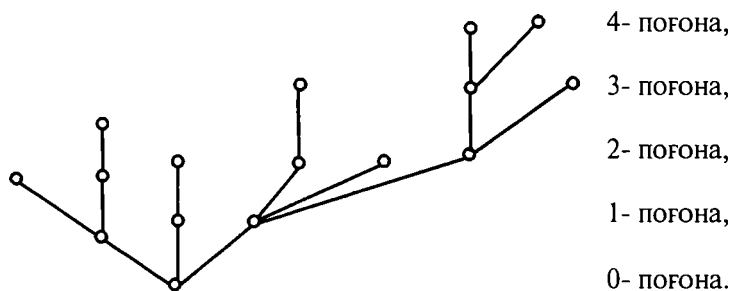
$$K(G \setminus u) = \begin{cases} K(G), & \text{агар } u \text{ циклик қирра бўлса,} \\ K(G) + 1, & \text{агар } u \text{ ациклик қирра бўлса;} \end{cases}$$

$$\lambda(G \setminus u) = \begin{cases} \lambda(G) - 1, & \text{агар } u \text{ циклик қирра бўлса,} \\ \lambda(G), & \text{агар } u \text{ ациклик қирра бўлса.} \end{cases}$$

Ўз-ўзидан равшанки, $n(G \setminus u) = n(G)$, $m(G \setminus u) = m(G) - 1$, $\lambda(G) \geq 0$ ва фақат циклари бўлмаган граф учун $\lambda(G) = 0$.

2- таъриф. *Барча қирралари ациклик бўлган боғлиқлик граф **дарахт** деб аталади.*

Дарахтнинг исталган иккита учи ягона занжир билан боғлангандир. Дарахтнинг исталган x_0 учини танлаб олиб, уни *илдиз ёки нолинчи поғонали уч* деб атаймиз. x_0 га қўшни бўлган барча учларни *биринчи поғона учлари* деймиз ва ҳоказо $i - 1$ поғонадаги учларга қўшни (бошқа поғоналарга тегишли бўлмаган) учларни *i поғона учлари* деб атаймиз (IX.14- шакл).



IX.14- шакл.

Дарахтнинг бундай тасвирланишидан келиб чиқадики, у четки (фақат битта қиррага инцидент бўлган) учларга эга. Масалан, охириги поғонанинг учлари.

Боғлиқли G графдан кетма-кет барча циклик қирраларни олиб ташлаймиз. Натижада, ҳамма қирралари ациклик бўлган боғлиқли H графни — дарахтни ҳосил қиламиз. Бу дарахт G графнинг *асоси* дейилади. Графнинг *асоси* ягона танланмайди, лекин барча ациклик қирралар исталган асосга киради. H асосга нисбатан $G \setminus H$ бўлакнинг барча қирралари *ватарлар* деб аталади.

H дарахтдан четки учни (автоматик тарзда битта қиррани) олиб ташласак, яна дарахтни ҳосил қиламиз. Агар H чекли бўлса, $n(H) - 2$ қадамдан кейин битта қирра ва иккита учга эга дарахтни ҳосил қиламиз. Дарахтдан олиб ташланган учлар ва қирралар сони бир хил бўлганлиги сабабли қуйидаги хулосага келамиз: *ҳар қандай чекли дарахтда қирралар сони учлар сонидан битта кам*. Аксинчаси ҳам, яъни қуйидаги теорема ўринлидир.

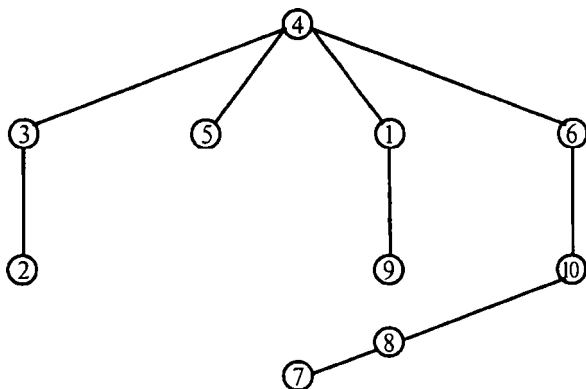
Теорема. Чекли боғлиқли G граф дарахт бўлиши учун унинг қирралари сони учлари сонидан биттага кам бўлиши зарур ва етарли.

Учлари $1, 2, 3, \dots, n$ рақамлари билан тартибланган n учли дарахт берилган бўлсин. Дарахтнинг четки учлари орасидаги энг кичик номерлиси i_1 ва у билан қўшни бўлган ягона уч j_1 бўлсин. Дарахтдан i_1 учни, демак, $i_1 j_1$ қиррани олиб ташлаймиз. Ҳосил бўлган дарахтда энг кичик номерли четки i_2 учни ва $i_2 j_2$ қиррани олиб ташлаймиз ва ҳоказо. Бу жараёни $n - 2$ марта такрорлаб, икки уч ва битта қиррали дарахтни ҳосил қиламиз. Олиб ташланган учларни $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}\}$ ва $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-2}\}$ билан белгилаймиз. Бу иккала I ва J мажмуа берилган дарахт бўйича ягона равишда аниқланади, шу билан бирга I нинг барча сонлари ҳар хил, J ники эса ҳар хил бўлиши шарт эмас (IX.15- шакл).

Бу дарахт учун $I = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 1, 4\}$ ва $J = \{3, 4, 4, 8, 10, 1, 4, 6\}$.

Шу билан бирга ҳар қандай $J = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-2}\}$ ($1 \leq j_k \leq n$) мажмуа битта дарахтга мос келади. Уни қуйидагича қуриш мумкин.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ тўпламнинг J да қатнашмаган сонларининг энг кичигини i_1 билан белгилаймиз (бундай сон ҳамма вақт мавжуд, чунки J да $n - 2$ та сон бор). i_1 ва j_1 учларни



IX.15- шакл.

қирра билан туташтирамиз, j_1 ни J дан, i_1 ни эса N дан ўчирамиз ва жараённи такрорлаймиз: $J_1 = \{j_2, j_3, \dots, j_{n-2}\}$ мажмуада қатнашмаган $N_1 = N \setminus \{i_1\}$ нинг энг кичик сонини i_2 билан белгилаймиз; i_2, j_2 учларни қирра билан туташтирамиз ва уларни мос равишда N_1 ва J_1 дан ўчирамиз ва ҳоказо. Охирида N_{n-2} да қолган иккита учни қирра билан туташтирамиз.

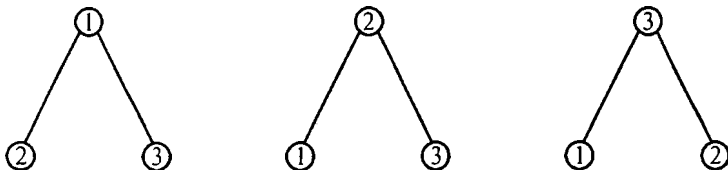
Бундан кўринадики, ҳар қандай $k = 1, 2, \dots, n-2$ учун k қадамдан кейин ясалган қирралар ичида i_k га инцидент бўлганлари йўқ, лекин j_k га инцидент бўлган камида битта қирра мавжуд. Буни назарда тутган ҳолда, жараённи тескари тартибда бажариб, k бўйича индукцияни қўллаб, ҳақиқатан ҳам дарахт ҳосил бўлишини кўрсатамиз (чунки ҳар гал битта қирра янги, четки уч билан қўшилади).

Шунга ўхшаш индукция бўйича, лекин тўғри тартибда қуриб исботлаш мумкинки, ушбу дарахтга айнан J мажмуа мос келади.

Юқоридаги жараёндан кўринадики, ҳар хил дарахтларга турли хил (I, J) жуфтликлар мос келади. Агар $I' \neq I''$ бўлса, у ҳолда $J' \neq J''$. Ҳақиқатан ҳам, $i'_k \neq i''_k$ ва $i'_k < i''_k$ бўлса, у ҳолда i'_k сон (j'_k, \dots, j'_{n-2}) га кирмайди, лекин у $(j''_k, \dots, j''_{n-2})$ га киради. Шунинг учун ҳар хил дарахтларга ҳар хил J кўринишдаги мажмуалар мос келади. Шундай қилиб, қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема (Кэли). *Учлар сони тартибланган n та бўлган дарахтлар сони n^{n-2} га тенг. (n та элементлардан $n-2$ тадан тузилган барча такрорий ўринлаштиришлар сони). Албатта булар ичида кўплари ўзаро изоморфдир.*

Масалан, $n = 3$ бўлганда, учала дарахт ҳам ўзаро изоморфдир (IX.16- шакл).



IX.16- шакл.

6- §. Эйлер графлари

✓ *Характеристик вектор. Жуфт граф. Эйлер цикли. Эйлер графи. Цикломатик сон.*

G графнинг барча учларини ўз ичига олувчи қисм графларни қараймиз. G нинг барча қирралари u_1, u_2, \dots, u_m каби тартибланган бўлсин. G графнинг ҳар қандай $H \subseteq G$ қисмига 0 ва 1 дан иборат m ўлчовли (a_1, a_2, \dots, a_m) векторни мос қўямиз:

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{агар } u_i \in H \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } u_i \notin H \text{ бўлса,} \end{cases}$$

(H нинг *характеристик вектори*). Бу мослик ўзаро бир қийматлидир, шу билан бирга қисм графларнинг 2 модул бўйича йиғиндисига уларнинг характеристик векторларининг йиғиндиси мос келади. Барча қисм графлар тўплами йиғинди амалига нисбатан абель группасини ташкил этади. Бу группа $\{0, 1\}$ коэффицентлар майдони устида чизиқли фазони ташкил этади (исталган H қисм графнинг 1 га кўпайтмаси H ни беради, 0 га кўпайтмаси эса бўш графдир).

Кўриниб турибдики, G граф қисмларининг фазоси уларнинг характеристик векторларининг фазосига изоморф ва m ўлчовли.

Агар графнинг барча учларининг даражалари (яъни уларга инцидент бўлган қирралар сони) жуфт бўлса, граф ҳам *жуфт* дейилади.

Жуфт графда исталган содда занжирни (циклдан фарқли ўлароқ) унга кирмаган қирра билан давом эттириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, занжирда охириги учнинг даражаси 1 га тенг, лекин граф жуфт бўлганлиги сабабли бу учга инцидент бўлган камида битта қирра мавжуд. Агар граф чекли бўлса, занжирни кетма-кет давом эттириб, аввал босиб ўтган учларнинг бирига келамиз, яъни содда циклни ҳосил қиламиз. Бу циклнинг барча қирраларини графдан олиб ташлай-

миз. Унинг қолган қисми яна жуфт графдир, чунки учларнинг даражалари 2 га камаяди (агар ундан занжир ўтса) ёки ўзгармайди (агар занжир ўтмаса). Бу графда яна циклни ажратамиз ва ҳоказо. Юқоридаги жараёни яна давом этамиз, токи унда бирорта ҳам цикл қолмасин (яъни бўш граф ҳосил бўлгунча). Шундай қилиб, чекли жуфт граф ўзаро қирралар бўйича кесишмайдиган содда цикллар йиғиндисига ёйилади. Бундан унинг барча қирралари циклик эканлиги келиб чиқади.

Агар чекли жуфт граф боғлиқли бўлса, у ҳолда осонгина кўрсатиш (содда цикллар сони бўйича индукцияни қўллаб) мумкинки унда барча қирраларини ўз ичига олган содда цикл мавжуд. Бундай цикл *Эйлер цикли*, графнинг ўзи эса *Эйлер графи* дейилади. Юқорида айтилганлардан куйидаги теорема келиб чиқади.

Т е о р е м а. *Чекли боғлиқли граф Эйлер графи бўлиши учун у жуфт бўлиши зарур ва етарли.*

Исталган чекли жуфт графнинг ҳар бир боғлиқли компонентаси Эйлер графидир.

Ихтиёрий графнинг ҳар қандай иккита H_1 ва H_2 жуфт қисм графларининг йиғиндисини яна жуфт қисм графдир. Ҳақиқатан ҳам, α учнинг $S(\alpha)$ даражаси $H_1 + H_2$ қисм графда $s_1 + s_2 - 2s_{12}$ га тенг. Бу ерда s_1 ва s_2 шу α учнинг мос равишда H_1 ва H_2 даги даражалари, s_{12} эса α нинг уларнинг $H_1 \cap H_2$ кесишмасидаги даражаси. Шундай қилиб, жуфт қисм графлар тўплами барча қисм графлар фазосининг қисм фазосидир. Бу қисм фазонинг ўлчови v ни аниқлаймиз.

G боғлиқли, m қиррала, n учли D граф унинг ихтиёрий асоси бўлсин. Ватарлар сони $m - n + 1$ га тенг. Ҳар бир $\alpha\beta$ ватар ягона содда $[\alpha, \beta] \subseteq D$ занжир билан содда циклни ҳосил қилади. Барча циклларнинг векторлари боғлиқмас Σ системани ҳосил қилади. Чунки ҳар бир цикл системанинг бошқа циклларига тегишли бўлмаган қиррага (ўзининг ватарига) эга. Демак, $v \geq m - n + 1$.

Иккинчи томондан, ҳар қандай жуфт қисм граф, хусусий ҳолда исталган содда цикл Σ системанинг цикллари орқали ифодаланади. Ҳақиқатан ҳам, жуфт H қисм графга ватарлари унга тегишли Σ системанинг циклларини қўшамиз. Ҳосил бўлган йиғинди бирорта ҳам ватарга эга эмас. Демак, бу йиғинди D дарахтнинг қисм графи, яъни у бўш графдир. Акс ҳолда содда циклларга эга жуфт қисм граф (H ва циклларнинг йиғиндиси) дарахтнинг қисм графи бўлар эди. Бундан $v \leq m - n + 1$ келиб чиқади ва юқоридаги тенгсизликни инобатга олган ҳолда $v = m - n + 1$ га эга бўламиз.

Боғлиқли бўлмаган k компонентали графнинг жуфт қисм графлари фазосининг базиси унинг барча боғлиқли компоненталари базисларининг йиғиндисидан иборат. Қирралар ва учлар сони ҳам компоненталар бўйича қўшилади. Агар i компонента m_i қиррага ва n_i учга эга бўлса, у ҳолда

$$v = m - n + k, \quad m = \sum_{i=1}^k m_i, \quad n = \sum_{i=1}^k n_i.$$

Демак, жуфт қисм графлар қисм фазосининг ўлчови v графнинг цикломатик сони $\lambda(G)$ га тенг.

Исталган граф учун $v \geq 0$ бўлганлиги сабабли $k \geq n - m$.

Цикломатик сони нолга тенг бўлган боғлиқли графлар — дарахтлардир.

7- §. Хроматик сон ва хроматик синф

☑ *Тўғри бўялган граф. Хроматик сон. Хроматик синф. Бихроматик граф. Бихроматик бўлишининг етарли ва зарурий шарт. Брукс теоремаси.*

Сиртмоқсиз G графнинг ҳар бир учига (қиррасига) берилган ранглардан биттасини мос қўямиз. Агар қўшни учларга (қўшни қирраларга) турли хил ранглар мос қўйилган бўлса, у ҳолда G граф *тўғри бўялган* дейилади. G графнинг учларини (қирраларини) тўғри бўйаш учун керак бўлган энг кам миқдордаги турли хил ранглар сони $\chi(G)$ мос равишда унинг *хроматик сони* (*хроматик синфи*) дейилади.

Ҳар қандай оддий G граф учун $\chi(G) \leq n$ ($\chi(E_n) = 1$). Тенглик фақат E_n учун бажарилади.

Агар графда камида битта қирра бўлса, $\chi(G) \leq 2$. Демак, $2 \leq \chi(G) \leq n(G)$ тенгсизлик ўринли.

Таъриф. Агар G граф учун $\chi(G) = 2$ бўлса, у ҳолда G **бихроматик граф** дейилади.

1-теорема. Камида битта қиррага эга бўлган граф бихроматик бўлиши учун унда узунликлари тоқ содда циклларнинг бўлмаслиги зарур ва етарли.

Агар G граф χ тўлиқ F_χ қисмларга эга бўлса, унинг хроматик сони $\chi(G) \leq \chi$. Лекин тескариси тўғри эмас.

Шундай графлар мавжудки, уларда ҳаттоки F_3 (учбурчак) бўлмаса-да исталганча катта хроматик сонга эга.

Хроматик сон ва граф учларининг даражалари (учга инцидент бўлган қирралар сони) орасидаги боғланишни ўрганамиз. G граф учларининг максимал даражаси $S(G)$ бўлсин. Γ_s билан $S(G) \leq S$ бўлган оддий графлар синфини белгилаймиз. Ҳар қандай $G \in \Gamma_s$ граф учун $\chi(G) \leq S + 1$ эканлигини учлар сони бўйича индукция усули билан исботлаш мумкин. Ягона F_s граф учун $\chi(F_s) = S + 1$.

2-теорема. Камида битта қиррага эга бўлган граф бихроматик бўлиши учун унда узунликлари тоқ сонларга тенг содда циклларнинг бўлмаслиги зарур ва етарлидир.

Зарури йлиги. Графни тўғри бўялганда цикл учларининг ранглари алмашиб келади, демак, узунлиги тоқ бўлган содда циклни тўғри бўяш учун икки ранг етарли эмас. Бундай циклни ўзида сақлаган граф ҳам бихроматик бўла олмайди.

Етарли йлиги. Аввало шуни таъкидлаймизки, ҳар қандай дарахт бихроматик графдир. Ҳақиқатан ҳам, дарахтнинг жуфт поғоналаридаги барча учларини битта рангга бўяймиз, тоқ поғоналардаги учларни эса иккинчи рангга бўяймиз. Натижада у тўғри бўялган бўлади, чунки дарахтнинг қирралари фақат қўшни поғоналардаги учларни туташтиради.

Дарахтда i ва j поғоналар учларини туташтирувчи содда занжирнинг узунлигининг жуфт-тоқлиги $i-j$ соннинг жуфт-тоқлиги билан бир хил. Хусусий ҳолда, бир хил жуфтликдаги поғоналарнинг учлари узунлиги жуфт содда занжир билан боғлангандир.

Узунлиги тоқ сонга тенг содда занжирга эга бўлмаган G графда исталган асосни танлаб оламиз. Бу асосга нисбатан барча ватарлар турли хил жуфтликларга эга бўлган поғоналарнинг учларини туташтиради, акс ҳолда унда узунлиги тоқ содда занжирлар бўлар эди. Демак, асоснинг икки ранг билан тўғри бўялгани бутун графнинг ҳам тўғри бўялганидир.

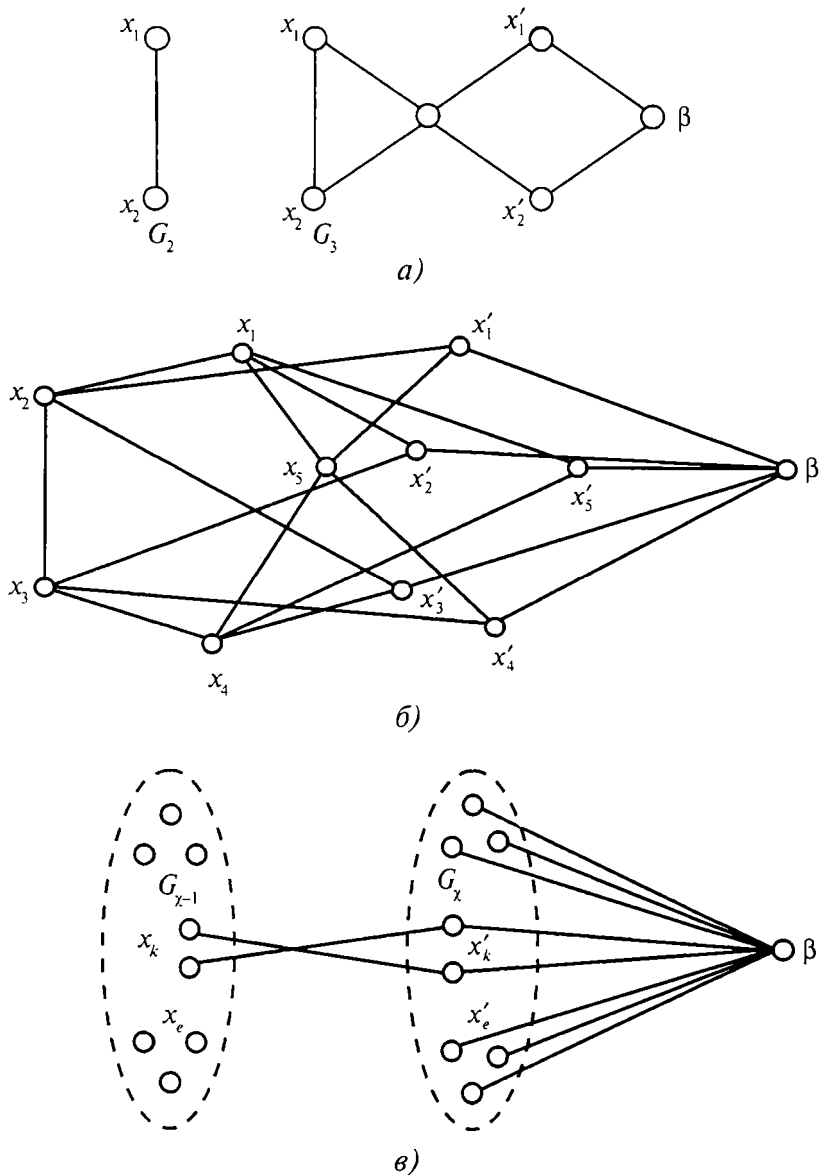
Агар G графда χ учли тўлиқ F_χ қисм граф мавжуд бўлса, у ҳолда $\chi(G) \geq \chi$. Тескариси эса тўғри эмас, яъни шундай графлар мавжудки, уларда ҳатто уч учли тўлиқ қисм графлари (учбурчаклар) йўқ, лекин хроматик сони исталганча катта.

Бунда G_χ граф индуктив равишда ясалади. G_2 битта қиррадан иборат.

Фараз қилайлик, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ учлар тўпламида $G_{\chi-1}$ граф қурилган бўлсин. $G_{\chi-1}$ графга $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ учлар тўпламини ва β учни қўшамиз. Ҳар бир x'_i учни β уч ҳамда $G_{\chi-1}$ графда x_i га қўшни бўлган учлари билан туташтирамиз (IX.17- шакл). Ҳосил бўлган G_χ графда учбурчаклар йўқлигини кўрсатамиз. Индукция фаразига кўра $G_{\chi-1}$ графда учбурчаклар йўқ. Агар учбурчак мавжуд бўлса, у ҳолда X' тўпламдаги учлар бир-бири билан туташтирилмаганлиги сабабли, унга бу учларнинг кўпи билан биттаси тегишли; β ҳам бирорта учбурчакка тегишли эмас, чунки у фақат X' даги учлар билан туташтирилган.

Агар $[x_i, x_j, x'_k]$ учбурчак бўлса, у ҳолда $[x_i, x_j, x_k]$ учбурчак ҳам мавжуд бўлар эди (чунки x'_k ва x_k учлар X да бир хил қўшни учларга эга). Бу эса индукция фаразимишга зид.

Энди $\chi(G_\chi) = \chi$ эканлигини кўрсатамиз. Равшанки, $\chi(G_2) = 2$. Фараз қилайлик, $\chi(G_{\chi-1}) = \chi - 1$. У ҳолда G_χ графни $\chi - 1$ ранг



IX.17- шакл.

билан тўғри бўяш мумкин: масалан, $G_{\chi-1}$ графни $\chi - 1$ ранг билан тўғри бўяганимиздан кейин ҳар бир x'_i учни x_i нинг рангига бўйямиз ва β учга қолган χ рангни берамиз.

G_χ графни $\chi - 1$ ранг билан тўғри бўяш мумкин эмаслигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қиламиз, яъни G_χ граф $\chi - 1$ ранг билан тўғри бўялади ва β учга l ранг тўғри келади. Бунда X' тўпламнинг учлари l дан фарқли рангларга бўялган. $A \subseteq X$ тўплам l рангга бўялган учлар қисм тўплами бўлсин. Ҳар бир $x_i \in A$ учни x'_i учнинг рангига қайтадан бўйямиз. Бу ҳолда $G_{\chi-1} \subseteq G_\chi$ графнинг барча учлари $\chi - 2$ ранг билан тўғри бўялган бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\tilde{x}_i \tilde{x}_j$ шу $G_{\chi-1}$ графнинг исталган қирраси бўлсин. G_χ графда x_i ва x_j турли рангларга бўялганлиги сабабли уларнинг иккаласи бирданга A га тегишли эмас. Агар $x_i \notin A$, $x_j \in A$ бўлса, графни қайта бўяганимизда уларнинг ранглари ўзгармайди ва турли хил бўлганлигича қолади. Шундай қилиб, $G_{\chi-1}$ граф индукция фаразимизга зид равишда $\chi - 2$ ранглар билан тўғри бўялади.

Хроматик сон ва граф учларининг даражалари орасидаги боғланишни аниқлаймиз. $s(G)$ орқали G граф учлари даражаларининг энг каттасини белгилаймиз, Γ_s эса параллел қирраларга эга бўлмаган ва $s(G) \leq s$ графлар синфи.

Учлар сони бўйича индукцияни қўллаб осонгина кўрсатиш мумкинки, ҳар қандай $G \in \Gamma_s$ учун $\chi(G) \leq s + 1$. Ҳақиқатан ҳам, агар графда учлар сони $s + 1$ дан ошмаса, $\chi(G) \leq s + 1$. Фараз қилайлик, бу тенгсизлик G дан кам учларга эга Γ_s нинг барча графлари учун ўринли бўлсин. G графдан исталган x учни олиб ташлаймиз (унга инцидент бўлган барча қирралар билан биргаликда). Индуктив фаразимизга асосан $G \setminus \{x\}$ графни $s + 1$ ранг билан тўғри бўйямиз. G графда x учга кўпи билан s та қўшни уч мавжуд, шунинг учун камида битта ранг топиладики, унга x га қўшни бўлган учларнинг ҳеч бири бўялмаган. Шу рангга x учни бўйямиз ва G граф $s + 1$ ранг билан тўғри бўялган бўлади.

Куйидаги теоремадан келиб чиқадики, Γ_s синф графлари ичида хроматик сони $s + 1$ га тенг бўлган ягона тўлиқ $s + 1$ учли F_{s+1} графдир.

Теорема (Брукс). Агар $s \geq 3$, $G \in \Gamma_s$ ва $G \neq \Gamma_{s+1}$ бўлса, у ҳолда $\chi(G) \leq s$.

8- §. Тўрлар ва тўрдаги оқимлар

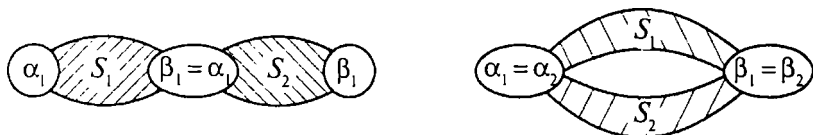
☑ *Тўр. Тўрнинг қутблари. Қутбли қирра. Ички қирра. π - тўрлар. Тўрдаги оқим. Тўрнинг кесими. Кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти. Форд–Фалкерсон теоремаси.*

Баъзи бир учлари танлаб олинган граф тўр деб аталади. Танлаб олинган учлар тўрнинг қутблари дейилади. Масалан, дарахтни бир қутбли тўр деб қараш мумкин (унинг илдизи қутбдир). Тўрнинг қутбларидан фарқли учлари унинг ички учлари дейилади. Камида битта қутбга инцидент бўлган қирра қутбли, бошқалари эса ички қирралар дейилади.

Иккита синфга ажратилган: k та кириш ва l та чиқиш қутбларга бўлинган тўр (k, l) - қутблилиқ дейилади. $(1, 1)$ - қутблилиқ тўр икки қутбли тўр дейилади.

Умумий элементларга эга бўлмаган S_1 ва S_2 тўрларнинг қутблари мос равишда α_1, β_1 ва α_2, β_2 бўлсин. S_1 ва S_2 тўрларнинг кетма-кет уланишидан ҳосил қилинган α_1, β_2 қутбларга эга бўлган тўрни $S_1 S_2$ каби белгилаймиз. S_1 ва S_2 тўрларнинг параллел уланишидан ҳосил бўлган α_1, β_1 қутбларга эга тўрни эса $S_1 \vee S_2$ каби белгилаймиз (IX.18- шакл).

Юқоридагига ўхшаш S_1, S_2, \dots, S_n ва $S_1 \vee S_2 \vee \dots \vee S_n$ тўрларни аниқлаш мумкин.



IX.18- шакл.

Бир қиррали тўрлардан параллел ва кетма-кет улаш натижасида ҳосил бўлган тўр *параллел–кетма-кет тўр* дейилади. Бундай тўрларни π - тўрлар деб атаيمиз. π - тўрлар индуктив равишда аниқланади:

- 1) бир қиррали тўр π - тўрдир;
- 2) агар S_1 ва S_2 π - тўрлар бўлса, u ҳолда, $S_1 S_2$ ва $S_1 \vee S_2$ ҳам π - тўрлардир.

S қисман ориентирлаштирилган тўрнинг ҳар бир u қиррасига *ўтказувчанлик қобилияти* деб аталувчи манфий бўлмаган $C(u)$ сон мос қўйилган бўлсин.

1- т а ʼ р и ф . *Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган (f, ω) жуфтлик S тўрдаги оқим дейилади:*

1) ω - тўрнинг барча звеноларини бирор ориентирлаштирилиши;

2) $f(u)$ – қирралар тўпламида аниқланган қийматлари манфий эмас ва u нинг ўтказувчанлик қобилиятидан катта бўлмаган функция. Шу билан бирга барча ички учларда Кирхгоф қонуни бажарилади, яъни α учга кирувчи барча қирралар бўйича оқимларнинг йиғиндиси ундан чиқувчи қирралар бўйича оқимларнинг йиғиндисига тенг.

Бошқача қилиб айтганда:

- 1) $0 \leq f(u) \leq C(u)$ – тўрнинг барча қирралари учун;
- 2) $R(\alpha) = 0$ – барча ички учлар учун, бу ерда

$$R(\alpha) = \sum_{\alpha \in \Gamma(\alpha)} f(u) - \sum_{\alpha \in \Gamma'(\alpha)} f(u),$$

$\Gamma(\alpha)$ ($\Gamma'(\alpha)$) – ω - ориентирлаштирилишда α учдан чиқувчи (мос равишда α га кирувчи) қирралар тўплами.

Равшанки, тўрнинг барча учлари бўйича (қутбларни ҳам инобатга олган тақдирда) $R(\alpha)$ ларнинг йиғиндиси 0 га тенг (чунки ҳар бир қирра бирор учдан чиқиб бошқасига киради). Шунинг учун $R(\alpha_s) = -R(\beta_s)$.

$R = R(\alpha_s)$ нинг қиймати тўрдаги оқимнинг миқдори дейилади.

Қирраларнинг берилган ўтказувчанлик қобилиятларида S тўрдан ўтувчи оқимнинг максимал қиймати R_{\max} ни аниқлаш масаласини кўрамиз. Бу масаланинг ечими тўрдаги кесимлар билан боғлиқдир.

2- таъриф. *Агар тўрнинг баъзи бир қирраларини олиб ташлаганимизда, у боғлиқли бўлмай, қутблари турли компонентларига тушиб қолса, бу қирралар тўплами тўрнинг кесими дейилади.*

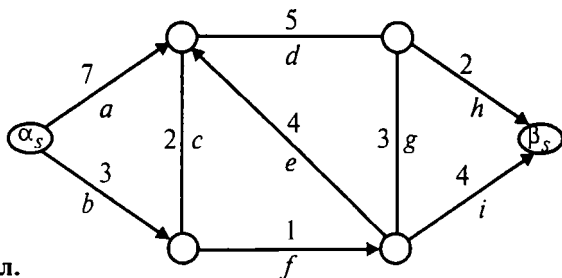
IX.19- шаклда берилган тўр учун $\{d, e, f\}$, $\{b, c, e, g, h\}$, $\{d, g, h, i\}$ қирралар тўплamlари кесимлардир.

Агар кесимдан исталган қиррасини олиб ташлаганда кесим бўлмай қолса, у *содда кесим* дейилади. Масалан, $\{d, e, f\}$, $\{b, c, e, g, h\}$ кесимлар содда, $\{d, g, h, i\}$ эса содда эмас.

Боғлиқли тўрнинг содда кесими уни иккита: α_s қутбни ўз ичига олган чап ва β_s қутбни ўз ичига олган ўнг қисмларга ажратади. Кесимнинг ҳар бир қирраси турли қисмларга тегишли бўлган учларни туташтиради. Агар кесимнинг қирраси звено бўлса ёки чапдан ўнгга қараб йўналтирилган бўлса, у *тўғри*, акс ҳолда *тескари* дейилади.

3- таъриф. *Содда ω кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти $C(\omega)$ деб унинг барча тўғри қирраларининг ўтказувчанлик қобилиятлари йиғиндисига айтилади.*

Масалан, $\{d, e, f\}$ кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти $5 + 1 = 6$ тенг, $\{b, c, e, g, h\}$ кесимники эса $3 + 2 + 3 + 2 = 10$. Агар тўр боғлиқли бўлмай, қутблари турли компонентларига тегишли бўлса, у ҳолда ягона содда кесим бўш тўплам, унинг ўтказувчанлик қобилияти эса нолга тенг.



IX.19- шакл.

Теорема (Форд–Фалкерсон). S тўрдан ўтувчи оқимнинг максимал қиймати R_{\max} унинг содда кесимларининг минимал ўтказувчанлик қобилияти C_{\min} га тенг.



Муаммоли масала ва топшириқлар

1. Дарахтнинг иккита T_1 ва T_2 қисм дарахтларининг $T_1 \cap T_2$ кесишмаси дарахт бўлишини исботланг.
2. Агар i компонента m_i қирраларга ва n_i учларга эга бўлса, у ҳолда

$$v = m - n + k, \quad m = \sum_{i=1}^k m_i, \quad n = \sum_{i=1}^k n_i$$

бўлишини исботланг.

3. Цикломатик сони нолга тенг бўлган боғлиқли графлар дарахтлар бўлишини исботланг.
4. Агар $s \geq 3$, $G \geq \Gamma_s$ ва $G = \Gamma_{s+1}$ бўлса, у ҳолда $\chi(G) \leq s$ эканлигини исботланг.
5. Форд–Фалкерсон теоремасини исботланг.



Мустақил ишлаш учун савол ва топшириқлар

1. Дарахтлар. Циклик ва ациклик қирра. Цикломатик сон.
2. Графнинг асоси. Ватар. Чекли дарахтда қирралар сони учлар сонидан битта камлиги ҳақида.
3. Эйлер графлари.
4. Хроматик сон ва хроматик синф. Бихроматик граф. Бихроматик бўлишнинг зарурий ва етарли шарти.
5. Тўрлар ва тўрдаги оқимлар. Тўрнинг қутблари. Қутбли қирра. Ички қирра. Тўрнинг кесими. Кесимнинг ўтказувчанлик қобилияти.
6. Форд–Фалкерсон теоремаси.

АДАБИЁТ

1. **Алексеев В.Б., Кудрявцев В.Б., Сапоженко А.А., Яблонский С.В. и др.** Методическая разработка по курсу «Математическая логика и дискретная математика». 1980.
2. **Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.** Сборник задач по дискретной математике. М., «Наука», 1977.
3. **Гильберт Д., Бернайс П.** Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., «Наука», 1979.
4. **Гёдел К.** Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, 3, №1, 1948.
5. **Гейтинг А.** Интуиционизм, М., «МИР», 1965.
6. **Горбатов В.А.** Семантическая теория проектирования автоматов. М., «Энергия», 1979.
7. **Горбатов В.А., Кафаров В.В., Павлов П.Г.** Логическое управление технологическими процессами. М., «Энергия», 1978.
8. **Горбатов В.А., Останков Б.Л., Фролов С.А.** Регулярные структуры автоматного управления/(под ред. В.А.Горбатова). М., «Машиностроение», 1980.
9. **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М., «Высшая школа», 1986.
10. **Горбатов В.А., Павлов П.Г., Четвериков В.Н.** Логическое управление информационными процессами. М., «Энергоатомиздат», 1984.
11. **Гиндикин С.Г.** Алгебра логики в задачах. М., «Наука», 1972.
12. **Гаврилов М.А., Девятков В.В., Пупырев Е.И.** Логическое проектирование дискретных автоматов. М., «Наука», 1977.
13. **Ёкубов Т.** Математик мантиқ элементлари. Т., «Ўқитувчи», 1983.
14. **Т.Ёкубов, С.Каллибеков.** Математик мантиқ элементлари. Т., «Ўқитувчи», 1996.
15. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика. М., «Наука», 1979.
16. **Журавлёв Ю.И., Мазурик В.П., Столяров Л.Н.** Элементы математической логики. Д., МФТИ, 1975.
17. **Зыков А.А.** Основы теории графов. М., «Наука», 1987.
18. **Искандаров Р.И.** Математик логика элементлари. Самарқанд. СамДУ, 1970.
19. **Игошин В.И.** Математическая логика и теория алгоритмов. Саратов. Изд-во Саратовского университета, 1991.
20. **Игошин В.И.** Задачник-практикум по математической логике. М., «Просвещение», 1986.
21. **Клини С.** Математическая логика. М., МИР, 1973.
22. **Карри Х.Б.** Основания математической логики. М., МИР, 1969.
23. **Кондаков Н.И.** Введение в логику. М., «Наука», 1967.
24. **Каменский М.И., Петрова Л.П., Садовский Б.Н.** Математическая логика. М., МГУ, 1982.
25. **Калбертсон Т.** Математика и логика цифровых устройств. М., «Просвещение», 1965.

26. **Кудрявцев В.Б.** а) Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 8. М., Физматгиз, 1962, стр. 91–116;
б) О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 13. М., «Наука», 1965 стр. 45–74
27. **Колдуэлл С.** Логический синтез релейных устройств. М., 1961.
28. **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М., «Наука», 1975.
29. **Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г.** Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения. Санкт-Петербург, «Лань», 1999.
30. **Лупанов О.Б.** а) О синтезе некоторых классов управляющих систем. Сб. «Проблемы кибернетики», вып.10. М., Физматгиз, 1963, стр. 88–96;
б) Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципы локального кодирования. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 14. М., «Наука», 1965, стр. 31–110;
в) Об возможностях синтеза схем из произвольных элементов. Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 158–183.
31. **Ляпунов А.А.** О логических схемах программ. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 1. М., Физматгиз, 1958, стр. 46–74.
32. **Лазарев В.Г., Пийль Е.И.** Синтез управляющих автоматов. М., «Энергия», 1978.
33. **Мальцев А.И.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М., «Наука», 1965.
34. **Мальцев А.И.** Алгебраические системы. М., «Наука», 1970.
35. **Марков А.А.** Теория алгорифмов. Труды математического института АН СССР им. В.А.Стеклова, XLII, АН РФ, 1954.
36. **Марков А.А.** Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, ДАН СССР, 55, 1947, стр. 587–590 с.
37. **Марков А.А.** Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, ДАН СССР, 58, 1947, стр. 353–356 с.
38. **Матиясевич Ю.В.** Диофантовость перечислимых множеств, ДАН СССР, 191, 1970, стр. 279–282.
39. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику. М., «Наука», 1976.
40. **Михайлов А.Б., Плоткин А.И.** Введение в алгебру и математический анализ. Сборник задач. 1. Высказывания. Предикаты. Множества. Санкт-Петербург, 1992.
41. **Новиков П.С.** Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., «Наука», 1977.
42. **Новиков П.С.** Элементы математической логики. М., «Наука», 1973.
43. **Поспелов Д.А.** Логико-лингвистические модели в системах управления. М., «Энергия», 1981.
44. **Оре О.** Теория графов. М., «Наука», 1980.
45. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., МИР, 1972.

46. **Трахтенброт Б.А.** Алгоритмы и машинное решение задач. М., Физматгиз, 1960.
47. **Тўраев Ҳ.Т.** Математик мантиқ ва дискрет математика I қисм. Самарқанд, СамДУ. 2000, II қисм. Самарқанд: СамДУ, 2001.
48. **Л.Р.Форд., Д.Р.Фалкерсон.** Потоки в сетях. М., МИР, 1966.
49. **Шоломов Л.А.** Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. М., «Наука», 1960.
50. **Шестаков В.И.** Математическая логика и автоматика. «Математика в школе», № 6, 1958, № 1, 1959.
51. **Шеннон К.Э.** Работы по теории информации и кибернетики. М., ИЛ, 1963.
52. **Чёрч А.** Введение в математическую логику. Том I, М., ИЛ, 1961.
53. **Чудновский Г.В.** Диофантовы предикаты, УМН, 25, № 4, 1970.
54. **Чегис И.А., Яблонский С.В.** Логические способы контроля работы электрических схем. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 270–360.
55. **Угрюмов Е.П.** Проектирование элементов и узлов ЭВМ. М., «Высшая школа», 1987.
56. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М., «Наука», 1979.
57. **Яблонский С. В., Лупанов О. Б. и др.** Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Том I. М., «Наука», 1974.
58. **Яблонский С.В.** Основы алгебры логики и теории контактных схем. М., Тр. института математики им. Стеклова, 1958, т. 51.
59. **Яблонский С.В.** а) Функциональные построения в k -значной логике. М., Труды МИАН СССР, 51, 1958, стр. 5–142.
б) Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». М., МГУ, 1971.
60. **Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. М., «Наука», 1966.
61. **Қобулов В.Қ.** Рақамли автоматлар. Т., 1980.

МУНДАРИЖА

СЎЗ БОШИ	3
КИРИШ	9
I БОБ. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР	
1- §. Тўпламлар назариясининг асосий тушунчалари	19
2- §. Тўпламлар устида амаллар	21
3- §. Асосий тенгликлар (тенг кучлиликлар)	23
4- §. Тўпламлар алгебраси	24
5- §. Муносабатлар. Бинар муносабат	28
6- §. Эквивалентлик муносабати	31
7- §. Функция тушунчаси. Функциялар суперпозицияси	33
8- §. Тартиблаш муносабати	35
9- §. Панжара ҳақида тушунчалар	38
II БОБ. МУЛОҲАЗАЛАР АЛГЕБРАСИ	
1- §. Мулоҳаза. Мулоҳазалар устида амаллар	43
2- §. Формулалар. Тенг кучли формулалар	51
3- §. Айнан чин, айнан ёлгон ва бажарилувчи формулалар	55
4- §. Асосий тенг кучлиликлар	60
5- §. Тенг кучли формулаларга доир теоремалар	64
6- §. Формулаларнинг нормал шакллари	67
7- §. Дизъюнктив нормал шакл	71
8- §. Мукамал конъюнктив ва дизъюнктив нормал шакллар	72
9- §. Формулаларнинг асосий хоссалари	77
10- §. Тенг кучлимас формулалар сони	82
11- §. Формуланинг чинлик тўплами	85
12- §. Мулоҳазалар алгебраси функциялари. Функциялар тенг кучлилиги. Функциялар суперпозицияси	90
13- §. Буль алгебраси	93
14- §. Мантиқ алгебрасидаги икки тарафлама қонун	95
15- §. Мантиқ алгебрасидаги арифметик амаллар. Жегалкин кўпҳади ..	99
16- §. Мантиқ алгебрасидаги монотон функциялар	101
17- §. Функционал ёпиқ синфлар ва Пост теоремаси	104
III БОБ. МУЛОҲАЗАЛАР ҲИСОБИ	
1- §. Мулоҳазалар ҳисоби формуласи тушунчаси	114
2- §. Исботланувчи формула таърифи. Мулоҳазалар ҳисобининг аксиомалар системаси (тизими). Келтириб чиқариш қоидалари	116
3- §. Келтириб чиқариш қоидасининг ҳосилалари	121
4- §. Формулалар мажмуасидан формулани келтириб чиқариш қоидаси	128
5- §. Келтириб чиқариш (исботлаш) тушунчаси. Дедукция теоремаси. Умумлашган дедукция теоремаси	130

- 6- §. Айрим мантиқ қонунларининг исботи 137
 7- §. Мулоҳазалар алгебраси ва мулоҳазалар ҳисоби орасидаги муносабатлар 141
 8- §. Мулоҳазалар ҳисобида ечилиш, зидсизлик, тўлиқлилик ва эркинлик муаммолари 152

IV БОБ. ПРЕДИКАТЛАР МАНТИҚИ

- 1- §. Предикат тушунчаси. Предикатлар устида мантиқий амаллар ... 162
 2- §. Умумийлик ва мавжудлик кванторлари 167
 3- §. Предикатлар мантиқининг формуласи. Предикатлар мантиқи формуласининг қиймати. Предикатлар мантиқининг тенг кучли формулалари 171
 4- §. Предикатлар мантиқи формуласининг нормал шакли. Бажарилувчи ва умумқийматли формулалар 179
 5- §. Ечилиш муаммоси. Хусусий ҳолларда формуланинг умумқийматлигини топиш алгоритмлари 188
 6- §. Предикатлар мантиқининг математикага татбиқи 194
 7- §. Аксиоматик предикатлар ҳисоби ҳақида 201

V БОБ. МАТЕМАТИК НАЗАРИЯЛАР

- 1- §. Биринчи тартибли тил. Терм ва формулалар 205
 2- §. Мантиқий ва хос (махсус) аксиомалар. Келтириб чиқариш қоидаси 208
 3- §. Алгебра, геометрия ва анализда мавжуд бўлган математик назариялар 210
 4- §. Назарияда исботлаш тушунчаси. Тавтология хусусий ҳолларининг исботланувчанлиги 212
 5- §. Дедукция теоремаси 213
 6- §. Назария тилининг интерпретацияси. Берилган интерпретацияда формулаларнинг чинлик қийматлари. Назариянинг модели 217
 7- §. Интерпретациянинг изоморфизми. Назариянинг қатъийлиги 223
 8- §. Назариянинг зидсизлик, тўлиқлилик ва ечилиш муаммолари 225
 9- §. Предикатлар ҳисобининг зидсизлиги (махсус аксиомаларсиз назария) 228
 10- §. Натурал сонлар назарияси. Гёделнинг тўлиқсизлик ҳақидаги теоремаси 230

VI БОБ. АЛГОРИТМЛАР

- 1- §. Алгоритм тушунчаси ва унинг характерли хусусиятлари 236
 2- §. Ечилувчи ва саналувчи тўпламлар 239
 3- §. Алгоритм тушунчасига аниқлик киритиш 242
 4- §. Ҳисобланувчи функциялар. Қисмий рекурсив ва умумрекурсив функциялар 247
 5- §. Тьюринг машиналари 258

6- §. Тьюринг машинасида алгоритмни реализация қилиш	263
7- §. Алгоритмлар назариясининг асосий гипотезаси	269
8- §. Марковнинг нормал алгоритмлари	272
9- §. Марков бўйича қисмий ҳисобланувчи ва ҳисобланувчи функциялар	277
10- §. Алгоритмик ечилмовчи муаммолар	280

VII БОБ. МАТЕМАТИК МАНТИҚНИНГ ТЕХНИКАГА ТАТБИҚИ

1- §. Функционал элементлар ва улардан схемалар яшаш	290
2- §. Кўп тактли схемалар	300
3- §. Тескари боғланиши бўлмаган автоматлар	310
4- §. Тескари боғланиши бўлган функционал элементлардан схемалар яшаш. Чекли автомат ҳақида умумий тушунчалар	312
5- §. Мили ва Мур автоматлари	316
6- §. Реле-контактли схемалар	319
7- §. Контактли схемалар ва уларнинг синтези	323
8- §. Контакт схемаларни минималлаштириш муаммоси	335

VIII БОБ. МАТЕМАТИК МАНТИҚ ФУНКЦИЯЛАРИНИ МИНИМАЛЛАШТИРИШ МУАММОСИ

1- §. Масаланинг қўйилиши	342
2- §. Дизъюнктив нормал шаклни соддалаштириш ва тупикли ДНШ	347
3- §. Минималлаштириш масаласининг геометрик тарзда қўйилиши	355
4- §. Жоиз (рухсат этилган) конъюнкциялар	359
5- §. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шакл	361
6- §. Қисқартирилган дизъюнктив нормал шаклни яшаш алгоритми ...	364
7- §. Тупикли дизъюнктив нормал шаклларни геометрик асосда яшаш усуллари	366
8- §. Тупикли дизъюнктив нормал шаклларни яшаш алгоритми	370
9- §. Айрим ягона тарзда ҳосил қилинадиган дизъюнктив нормал шакллар	373

IX БОБ. ГРАФЛАР НАЗАРИЯСИНING ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1- §. Оддий графлар. Таъриф ва мисоллар	380
2- §. Графларнинг изоморфлиги	384
3- §. Мультиграфлар	386
4- §. Маршрутлар, занжирлар, циклар. Боғлиқлилик	388
5- §. Дарахтлар	395
6- §. Эйлер графлари	399
7- §. Хроматик сон ва хроматик синф	401
8- §. Тўрлар ва тўрдаги оқимлар	406

АДАБИЁТ	410
----------------------	-----

Тўраев Ҳ.

Математик мантиқ ва дискрет математика:

Бакалаврлик йўналишлари бўйича таълим олаётган талабалар учун ўқув қўлланма/Маъсул муҳаррир: А.М.Мусаев. – Т.: «Ўқитувчи», 2003. – 416 б.

Сарл. олдиди: Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги.

ББК 22.12я73+22.176я73

ҲОТАМ ТЎРАЕВ

**МАТЕМАТИК МАНТИҚ ВА
ДИСКРЕТ МАТЕМАТИКА**

Олий ўқув юртлари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 2003

Таҳририят мудир *М.Пўлатов*

Муҳаррир *Ў.Ҳусанов*

Бадий муҳаррир *М.Кудряшова*

Техник муҳаррир *Т.Грешникова*

Мусаҳҳиҳлар: *З.Содиқова, В.Тараненко*

Компьютерда саҳифаловчи *Ш.Раҳимқориев*

ИБ № 8265

Оригинал-макетдан босишга рухсат этилди 22.12.03. Бичими 60×84¹/₁₆.

Кегли 11, 10 шпонли. Таймс гарн. Офсет босма усулида босилди.

Босма т. 26,0. Шартли б.т. 24,18. Нашр т. 24,0. 1000 нусхала босилди.

Буюртма № 2035

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 700129. Навоий кўчаси, 30.

Шартнома № 09–113–03.

Ўзбекистон Матбуот ва ахборот агентлигининг 1- босмахонасида босилди. Тошкент, Сағбон кўчаси, 1- берк кўча, 2- уй. 2003.