SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI MEXANIKA-MATEMATIKA
FAKULTETI AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA BO'LIMI
201-GURUH TALABASI SHOKIROV IBROHIMXONNING

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR FANIDAN

KURS ISHI

MAVZU:Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar nazariyasi taqqoslash teoremasi.Chegaraviy masalalar. Grin funksiyasi. Grin funksiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

Bajardi: SHOKIROV I.

Tekshirdi: AKTAMOV H.

SAMDU-2015

MAVZU:Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar nazariyasi taqqoslash teoremasi.Chegaraviy masalalar. Grin funksiyasi. Grin funksiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

Reja:

I. KIRISH.

Differensial tenglamalar fizika, mexanika, differensial geometriya, variyasion hisob, issiqlik texnikasi, elektrotexnika, kimyo, biologiya va iqtisod kabi fanlarda keng qullaniladi.
Bu fanlarda uchraydigan ko'plab jarayonlar differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi.Shu tenglamalarni o'rganish bilan tegishli jarayonlar haqida biror ma'lumotga, tasavvurga ega bo'lamiz.
Usha differensial tenglamalar, o'rganilayotgan jarayonning matematik modelidan iborat bo'ladi.Bu model qancha mukammal bo'lsa,differensial tenglamalarni o'rganish natijasida olingan ma'lumotlar jarayonlarni shuncha to'la tavsiflaydi.Shuni aytib utish kerakim, tabiatda uchraydigan turli jarayonlar bir xil differensial tenglamalar bilan tavsiflanishi mumkin.

Ta'rif. Differensial tenglama deb, erkli uzgaruvchi x, noma'lum funksiya y va uning hosilalari orasidagi bog'lanishdan iborat bo'lgan tenglamaga aytiladi.

U simvolik ravishda

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bunda F ko'rilayotgan sohada o'z argumentlarining uzluksiz funksiyasidir.(1) tenglamada erkli uzgaruvchi, noma'lum funksiya va hosilalardan bir nechtasi qatnashmasligi mumkin. Lekin u differensial tenglama bo'lsa, u holda hosilalardan hech bo'lmaganda bittasi qatnashishi shart.

Differensial tenglama tarkibiga kirgan hosilalarning eng Yuqori tartibiga, differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

Masalan (1) tenglama, n-chi tartibli differensial tenglamadir.

Agar tenlamadagi noma'lum funksiya faqat bitta erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday tenglamaga oddiy differensial tenglama deyiladi (ODT).

Agar tenglamadagi noma'lum funksiya bir nechta erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, tenglamada har-bir erkli o'zgaruvchilar bo'yicha olingan xususiy hosilalar qatnashishi mumkin. Bunday differensial tenglamalarga xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.
Masalan $u(x, y)$ funksiya ikkita x, y agrumentga bog'liq bo'lsin.
U holda

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (2)$$

tenglamaga ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

ga esa birnichi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.
Birinchi tartibli ODT ning umumiy ko'rinishi

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (4)$$

dan iborat.

II. ASOSIY QISM.

"Ikkinchi tartibli differenstil tenglmalar nazariyasi taqqoslach teoremasi.Chegaraviy masalalar. Grin funksiyasi. Grin funksiyasining mavjudligi va yagonaligi haqida"mavzusi bo‘yicha tarqatma material

Ma’lumki ikkinchi tartibli bir jinsli

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning bitta $y_1(x)$ xususiy yechimi ma’lum bo’lsa, uning umumiy yechimi

$$y = y_1\left[\int \frac{\int c_1 \ell^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx + c_2\right]$$

formula bilan aniqlanar edi. Bunda $P_1(x)$ *ва* $P_2(x)$ lar ko’rilayotgan oraliqda uzluksiz funksiyalardir.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

differensial tenglamaga o’ziga qo’shma ikkinchi tartibli differensial tenglama deyiladi.(2) ni ochib chiqsak:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p'(x)\frac{dx}{dy} + q(x)y = 0$$

bundan kurinadikim, o’ziga qo’shma differensial tenglamada y' oldidagi koeffisiyent y'' oldidagi koeffisiyentning hosilasiga tengdir.

Xossa1Xarqandayikkinchitartiblibirjinslichiziqlitenglamanio’zigaqo’shmabo’lgandifferensialtenglamagakeltirishmumkin.

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \qquad (3)$$

differensial tenglama berilgan bo’lsin. $P_0(x) \neq 0$.

(3) tenglamaning xar ikkala tomonini $\mu(x)$ ga ko’paytirganda,*y*o’ziga qo’shma bo’lgan differensial tenglamaga aylansin, ya’ni quyidagi shart bajarilsin.

$$(\mu P_0)' = \mu P_1$$

Bundan $\mu' P_0 + \mu P_0' = \mu P_1,\qquad \mu' P_0 = \mu(P_1 - P_0')$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_1 - P_0}{P_0}dx = -\frac{P_0'(x)}{P_0(x)}dx + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx$$

integrallasak

$$\ln\mu = -\ln P_0 + \int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx + C, \quad C = 0$$

$$\mu = \frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx}$$

$$P_o(x)\cdot\frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx} y'' + P_1(x)\frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx} + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)dx}{P_0(x)}} y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx} y = 0$$

bunda $\qquad p(x) = e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx} \qquad (6)$

$$q(x) = \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx}$$

deb olsak (2) tenglamaga ega bo'lamiz (6) dan ko'rinadikim

$p(x) > 0.$

Misol-1 Bessel tenglamasini o'ziga qo'shma bo'lgan differensial tenglamaga keltiring.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Bu yerda $\qquad p_o(x) = x^2 \qquad p_1(x) = x \qquad p_2(x) = x^2 - n^2$

$$p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} = e^{\int \frac{x}{x^2}dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$$q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx} = \frac{x^2 - n^2}{x^2}\cdot x = x - \frac{n^2}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} \right) + \left(x - \frac{n^2}{\alpha} \right)y = 0$$

Bu Bessel tenglamasiga qo'shma bo'lgan differensial tenglamadir.

Xossa 2. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamani erklio'zgaruvchini almashtirish yordamida uni xamma vaqt

$y'' + Q(t)y = 0 \qquad (8)$

Ko'rinishga keltirish mumkin.

Bunda $\qquad Q(t) \in C(I) \qquad I = (a;b)$

Faraz etaylik ikkinchi tartibli differensial tenglama o'ziga qo'shma xolga keltirilgan bo'lsin.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0 \qquad (9)$$

Bunda $\qquad t = \int \frac{dx}{p(x)}$

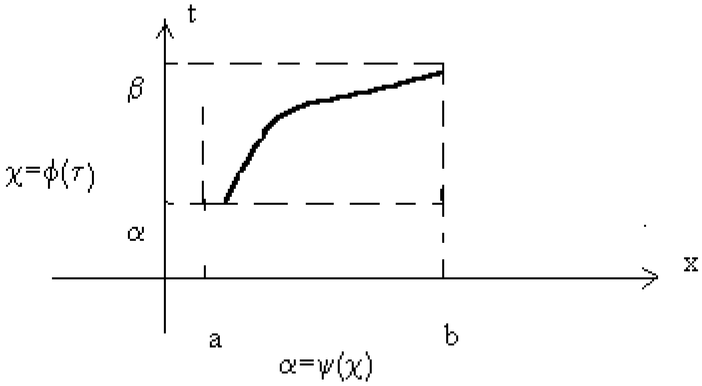
Almashtirishni olamiz.

(16) ga asosan

$p(x) \neq 0, \qquad p(x) > 0$ bo’lgani uchun

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p(x)} > 0$ ga ega bo’lamiz.

Bundan t o’zgaruvchi $x$ning monotan o’suvchi funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.
Bundan chiqadikim, x xam t ning uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyasi sifatida
$I = (a;b)$ interavalga mos kelgan $I_1 = (\alpha, \beta)$ interavalda aniqlanadi.



Uni $$x = \varphi(t) \qquad (10)$$

desak $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{dt}$ bajariladi.

U xolda $$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(p(x) \cdot \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) \qquad (11)$$

(11) ga asosan (9) $\frac{1}{p(x)} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + q(x)y = 0$ (10)ni e’tiborga olsak keyingi tenglamani

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Q(t)y = 0$$

ko’rinishda yoza olamiz.

Bunda $Q(t) = p(\varphi(t))q(\varphi(t))$

Misol-2 $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$

$$\mu = \frac{1}{x}\ell^{\frac{dx}{2x}} = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}y'' + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y' - x^{-\frac{1}{2}}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\right) - x^{-\frac{1}{2}}y = 0$$

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}\right) - x^{-\frac{1}{2}}y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{t} = c_1e^{-2\sqrt{x}} + c_2e^{\sqrt{2x}}$$

Xossa 3. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamani, noma’lum funksiyani chiziqli almashtirish yordamida.

$$z'' + I(x)z = 0$$

ko’rinishga keltirish mumkin.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (12)$$

tenglamada $y = u(x)z$ (13)

almashtirishni olamiz. Bundan

$$y' = uz' + u'z \qquad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z$$

Bu qiymatlarni (12) ga qo’ysak

$$uz'' + 2u'z' + u''z + p(x)(uz' + u'z) + q(x)uz = 0$$

$$uz'' + (2u' + p(x)u)z' + (u'' + p(x)u' + q(x)u)z = 0 \qquad (14)$$

$$z'' + \left(\frac{2u'}{u} + p(x)\right)z' + \frac{1}{u}(u'' + p(x)u' + q(x)u)z = 0$$

$u(x)$ ixtiyoriyfunksiyabo’lganiuchununishundaytanlabolamizkim

$\frac{2u'}{u} + p(x) = 0$ bajarilsin.

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}p(x)dx \qquad \ln|u| = -\frac{1}{2}\int p(x)dx \qquad u = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

bundan $u' = -\frac{1}{2}p(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$

$$u'' = -\frac{1}{2}p'(x)\cdot e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} + \frac{1}{4}p^2(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$

Bu qiymatlarni (14) ga qo’ysak

$$z'' + e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx} \times$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}p'(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} + \frac{1}{4}p^2(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} + p(x)\left(-\frac{1}{2}p(x)\right)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} + q(x)e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}\right]z = 0$$

$$z'' + (q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x))z \qquad z'' + I(x)z = 0$$

$$I = q(x) - \frac{1}{2}p'(x) - \frac{1}{4}p^2(x)$$

Bunga (12) tenglamaning invarianti deyiladi.

Agar invariant o'zgarmas songa yoki $I = \dfrac{c}{(x+a)^2}$ ko'rinishga ega bo'lsa u holda ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani xamma vaqt integrallash mumkin. Chunki bu xolda (12) tenglama yo koeffisiyentlari o'zgarmas tenglamaga yoki Eyler tenglamasiga keltiriladi.

Misol-3 $xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$

$$q(x) = 1; \qquad p(x) = \frac{2}{x}$$

$$I = 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1$$

$$z'' + z = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i \qquad z = c_1\cos x + c_2\sin x$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \qquad y = uz = \frac{1}{x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$$

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani tebranmas va tebranuvchi yechimlari. Taqqoslash teoremasi

Koeffisiyentlari o'zgarmas bo'lgan, ikkita ikkinchi tartibli

$$y'' - a^2y = 0 \qquad (1)$$

$$y'' + a^2y = 0 \qquad (2)$$

differensial tenglamalar berilgan bo'lsin.

Bunda $a = \cos t$

Ma'lumki (1) tenglamaning xususiy yechimlari $y_1 = e^{-ax}$, $y_2 = e^{ax}$ dan iborat bo'lib

Uning umumiy yechimi $y = c_1e^{ax} + c_2e^{ax}$ dan iborat.

Uning nolini topamiz

$c_1e^{-ax}+c_2e^{ax}=0 \qquad a>0 \qquad c_1c_2<0$

$c_1+c_2e^{2ax}=0 \qquad e^{2ax}=-\frac{c_1}{c_2} \qquad 2ax=\ln\left|-\frac{c_1}{c_2}\right|$

$x=\frac{1}{2a}\ln\left|-\frac{c_1}{c_2}\right|$

ya’ni (1) tenglamaning yechimi $(-\infty,\infty)$ da bittadan ortiq nolga ega emas.

(1) tenglamaning umumiy yechimi $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax=A\sin(ax+\varphi)$
ning nolini topamiz:

$A\sin(ax+\varphi)=0 \qquad ax_k+\varphi=\pi k$

$x_k=\frac{\pi k}{a}-\frac{\varphi}{a} \qquad x_{k+1}-x_k=\frac{\pi(k+1)}{a}-\frac{\pi k}{a}=\frac{\pi}{a}$

ya’ni (2) tenglama $(-\infty,\infty)$ oraliqdacheksizko’pnollargaegabo’lib, ketma-ketikkitanolorasidagamasofa $\frac{\pi}{a}$ gateng.

Uzunligi $\frac{\pi}{a}$ dankattabo’lganxarbiroraliqda (2) tenglamaningixtiyoriyyechiminingbittanoliyetadi, uzunligi $\frac{2\pi}{a}$ dankattabo’lganixtiyoriyintervaldaesa 2 tanoliyotadi.

Ta’rif. Agar differensial tenglamaning yechimi berilgan oraliqda bittadan ortiq nolga ega bo’lmasa, bunday yechimga tebranmas yechim deyiladi.

Agar bu yechim yetarli katta oraliqda 2 tadan ortiq nolga ega bo’lsa, bunday yechimga tebranuvchi yechim deyiladi.

Ma’lumki har qanday ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani.

$y''+p_1(x)y'+P_2(x)y=0$

ni $y''+p(x)y=0$ (3)

ko’rinishga keltirish mumkin.

Teorema1. Agar (a,b) oralig’ining barcha nuqtalarida $p(x)\le 0$ bo’lsa u, xolda (3) tenglamaning xamma yechimlari bu oraliqda tebranmas bo’ladi.

Isbot. Aksincha faraz etaylik, (3) tenglamaning ixtiyoriy $y_1(x)$ yechimi ikkita nolga ega bo’lsin.Bu nollarni x_0,x_1 bilan belgilaymiz.

Masalaning aniqligi uchun $x_0<x_1$ va $(x_0;x_1)$ oraliqda $y_1(x)$ yechim boshqa nolga ega bo’lmasin.

U xolda uzluksiz $y_1(x)$ funksiya bu oraliqda o’z ishorasini o’zgartirmaydi. Hamma vaqt bu oraliqda o’z ishorasini o’zgartirmaydi. Xamma vaqt bu oraliqda $y_1(x)>0$ deb olish mumkin (aks xolda $-y_1(x)$ yechimni olar edik). U xolda $y_1'(x)>0$ chunki x_0 ningo’ng tomonida $y_1(x)$ o’suvchi funksiya bo’lib, $y_1'(x_0)\ne 0$ aks xolda $y_1(x)\equiv 0$ bo’lar edi (3) tenglamadan.

$y''=-p(x)y \quad \Rightarrow \quad y_1''=-p(x)y_1>0$

ya’niikkinchihosila (x_0,x_1) oraliqdamusbatbo’lganiuchun, $y'_1(x)$ buoraliqdakamayuvchidir ya'ni

$y_1'(x) \ge y_1'(x_0) \qquad (x_0 < x \le x_1)$

U xolda chekli ortirma haqidagi teoremaga asosan

$y_1(x_1) - y_1(x_0) = y_1'(\xi)(x_1 - x_0)$

Butenglikningchaptomoninolgatengbo'lib, o'ngtomoniesanoldanfarqlibuningbo'lishimumkinemas. Buqarama -qarshilikko'rsatidikim $y_1(x)$ yechimkurilayotganoraliqdatebranmasyechimdir.

Shturm teoremasi

Ma'lumki $y'' + a^2 y = 0$ tenglama 2 ta chiziqli bog'lik bo'lmagan

$y_1 = \cos ax \qquad y_2 = \sin a\lambda$

yechimlarga ega bo'lib, bu yechimlardan birini ketma-ket ikkita nollari orasida ikkinchi yechimning faqat bitta noli yotadi.

Bundayxossaga, harqandayikkinchitartiblibirjinslichiziqlidifferensialtenglamaningchiziqlibog'liqbo'lmaganikkitatebranuvchiyechimlargaegabo'ladi.

Shturmteoremasi. Ikkinchitartiblibirjinsli

$y'' + p(x)y = 0$ (3)

differensial tenglamaning ikkita chiziqli bog'lik bo'lmagan tebranuvchi yechimlarining nollari bir-birini o'zora ajratadi.

Isbot. Faraz etaylik $y_1(x)$ va $y_2(x)$ (3) tenglamaning ikkita chiziqli bog'lik bo'lmagan tebranuvchi yechimlari bo'lsin va $y_1(x)$ yechimning ikkita ketma- ket noli x_0 va $x_1$bo'lib, $[x_0, x_1]$ oraliqda

$y_1(x)$ boshqa nolga ega bo'lmasin.

Ya'ni $\qquad y_1(x) \ne 0 \qquad x_0 < x < x_1$

Isbot etamizkim (x_0, x_1) oraliqda faqat bitta $\bar{x}$ $\bar{x}$ nuqta mavjudkim, bu nuqtada $y_2(\bar{x}) = 0$ bo'ladi. Teskarisincha faraz etaylik $x_0 < \bar{x} < x_1$ oraliqdagi nuqta uchun

$y_2(\bar{x}) \ne 0$ bo'lsin.

Masalanning aniqligi uchun (x_0,x_1) da $y_2(x)>0$ bo'lsin.

$[x_0,x_1]$ oraliq oxirida $y_2(x)$ nolga teng bo'lmaydi, ya'ni $y_1(x_0) \ne 0 \quad y_2(x_0) \ne 0$ aks, xolda Vronskian

$W(x) = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x)$ (4)

x_0 va $x_1$nuqtada nolga teng bo'lar edi. Buning bo'lishi mumkin emas, chunki $y_1(x)$va$y_2(x)$ lar chiziqli boglik emas.

Demak Vronskiy determinanti bu oraliqda o'z ishorasini o'zgartirmaydi. Shuning uchun $W(x)>0$ deb olish mumkin $[x_0,x_1]$ da.

(4) ning xar ikkala tomonini $y_2^2(x)$ ga bo'lamiz.

$$\frac{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}{y_2^2} = \frac{W(x)}{y_2^2} \Rightarrow -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{W(x)}{y_2^2}$$

$y_2>0$ bo’lgani uchun, bu tenglikning o’ng tomoni $x$ni uzluksiz funksiyasi bo’ladi.Keyingi tenglikni xar ikkala tomonini x_0 dan x_1 oraliqda integrallaymiz:

$$-\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{y_2^2(x)}dx$$

Bu keyingi tenglikning chap tomoni nolga teng bo’lib, o’ng tomoni esa musbatdir.
Bu qarama-qarshilik ko’rsatadikim, shunday $\bar{x}$ nuqta ($x_0<\bar{x}<x_1$) mavjudkim bu nuqtada $y_2(\bar{x})=0$ .Bunday nuqta yagonadir aksincha faraz etaylik $y_2(x)$ ikkita $\bar{x}_0, \bar{x}_1$ nolga ega bo’lsin bunda $x_0<\bar{x}_0<\bar{x}_1<x_1$.

y_1 bilan y_2o’rinlarini almashtirsak, $\bar{x}_0$ bilan $\bar{x}_1$ oraliqda $y_1(x)$ ning bitta noli bo’lar edi.Bu esa $y_1(x)$ ikkita ketma-ket x_0,x_1 nolga ega degan shartga karama karshidir.

Shturm teoremasiga misol kilib, $y''+y=0$ tenglamani olish mumkin. Bu tenglamaning ikkita $y_1=\cos x$,$y_2=\sin x$ chiziqli boglik bo’lmagan yechimlarinining nollari almashinib keladi.

Taqqoslash teoremasi

$$y''+p_1(x)y=0 \qquad (1)$$

$$z''+p_2(x)z=0 \qquad (2)$$

tenglamalari berilgan bo’lsin. Bunda $p_1(x)$ va $p_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda uzluksiz va bu oraliqda

$$p_1(x)\le p_2(x)$$

sharti bajarilsin.U xolda birinchi tenglamaning ixtiyoriy $\bar{y}(x)$ yechimining ikkita ketma-ket x_0,x_1 nollari orasida, ikkinchi tenglamaning ixtiyoriy $\bar{z}(x)$ yechimining xech bo’lmaganda bitta noli yetadi.

Isbot. Faraz etaylik $x_0$vax_1 yechimning ikkita ketma-ket noli bo’lsin. Isbot etamizkim, shunday x^*nuqta mavjudkim, uning uchun ($x_0<x^*<x_1$) bo’ladi. Teskarisini faraz etamiz (x_0,x_1) oraliqda $\bar{z}(x)$ ning birorta xam noli bo’lmasin, ya’ni $\bar{z}(x)\ne 0$. Aniqlik uchun (x_0,x_1) oraliqda $\bar{y}(x)>0,\quad \bar{z}(x)>0$ bo’lsin.

U xolda $\bar{y}(x)$, x_0 ning o’ng tomonida o’suvchi va x_1 ning chap tomonida kamayuvchi bo’ladi. Demak

$$\bar{y}'(x_0)>0, \qquad \bar{y}'(x_1)<0$$

$\bar{y}(x)$ va $\bar{z}(x)$ yechimlarni (1) va (2) tenglamaga olib borib qo’ysak

$$\begin{aligned}\bar{y}''+p_1(x)\bar{y}\equiv 0\\ \bar{z}''+p_2(x)\bar{z}\equiv 0\end{aligned} \qquad (3)$$

Bularning birinchisini $\bar{z}(x)$ ga, ikkinchisini $\bar{y}(x)$ ga ko’paytirib, birinchisidan ikkinchisini hadlab ayirsak

$$\bar{y}''\bar{z}-\bar{y}\bar{z}''=(p_2(x)-p_1(x))\bar{y}\bar{z} \qquad \text{ёки}$$

$$(\bar{y}'\bar{z}-\bar{y}\bar{z}')'=(p_2(x)-p_1(x))\bar{y}\bar{z}$$

Bu keyingi tenglikni x_0 dan x_1 oralig’ida integrallasak

$$(\bar{y}'\bar{z}-\bar{y}\bar{z}')\big|_{x_0}^{x_1}=\int_{x_0}^{x}(p_2(x)-p_1(x))\bar{y}\bar{z}dx \qquad (4)$$

ga ega bo’lamiz.

Lekin $\bar{y}'(x_0) > 0,\quad \bar{y}'(x_1) < 0,\quad \bar{z}'(x_0) > 0,\quad \bar{z}'(x_1) > 0,$ bo'lgani uchun (4)ning chap tomini manfiy bo'lib, o'ng tomoni esa musbatdir.
Bu qarama qarshilik ko'rsatadikim, (x_0,x_1) oraliqda shunday x* nuqta topiladikim, bu nuqtada $\bar{z}(x^*) = 0$.
Shuning bilan birga quyidagi teoremani isbot etdik.
Agar x_0 (1) va (2) tenglamaning $\bar{y}(x)$ va $\bar{z}(x)$ yechimlarining umumiy noli bo'lib, x_0 dan keyingi $\bar{y}(x)$ yechimning x_1 noli orasida $p_1(x) < p_2(x)$ shartini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo'lsa, bundan tashqari $p_2(x)$-$p_1(x)$ manfiy bo'lmasa u holda $\bar{z}(x)$ yechimning x_0 dan keyingi noli x_1 ning chap tomonida yotadi.
Natija. Faraz etaylik $y''+p(x)y=0$ tenglama berilgan bo'lsin.bunda $p(x)>0$ bo'lib, $p(x) \in C_{(a,b)}$ da

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} p(x) = M, \qquad \min_{x\in[\alpha,\beta]} p(x) = m \qquad M > 0,\quad m > 0$$ bo'lsin.

U xolda trivial bo'lmagan tenglamaning ixtiyoriy $y(x) \neq 0$ yechimining ikkita ketma-ket nollari orasidagi masofa ρ

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \le \rho \le \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

tengsizlikni kanoatlantiradi.
Buning isboti uchun

$$\begin{cases} z''+mz = 0 \\ y''+p(x)y = 0 \end{cases} \qquad m < p(x) \qquad \rho \le \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

$$y_1 = \cos\sqrt{m}x,\quad y_2 = \sin\sqrt{m}x$$

$$\sin\sqrt{m}x = 0 \qquad \sqrt{m}x = \pi k \qquad k = 1 \quad x = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

$$\begin{cases} y''+p(x)y = 0 \\ z''+Mz = 0 \end{cases} \qquad M > p(x) \qquad \rho \ge \frac{\pi}{\sqrt{M}} \qquad y_2 = \sin\sqrt{M}x$$

$$\sin\sqrt{M}x = 0 \qquad \sqrt{M}x = \pi k \qquad k = 1 \quad x = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

Teorema 1 ni taqqoslash teoremasidan foydalanib isbotlash mumkin.
Natija 1. Agar $y''+p(x)y=0$ tenglamada $p(x) \le 0$ bo'lsa, u xolda uning hamma yechimlari tebranmasdir.
Isbot. (1), (2) tenglamada $p_1(x)=p(x)$, $p_2(x)=0$ deb olamiz. Teskarisincha faraz etamiz (1) tenglamaning ixtiyoriy $y(x)$ yechimi ikkita ketma-ket x_0,x_1 nollarga ega bo'lsin. U xolda [x_0,x_1] oraliqda $z''(x)=0$ tenglamaning ixtiyoriy yechimi nolga aylanishi zarur.
Buning bo'lishi mumkin emas.Masalan $z(x) \equiv 1$ yechim uchun.
Shturm teoremasini xam taqqoslash teoremasidan foydalanib isbotlash mumkin.
Natija 2.$y''+p(x)y=0$ tenglamaning chiziqli bog'lik bo'lmagan tebranuvchi yechimlarining nollari navbatlashib keladi.
Boshqacha aytganda $y_1(x)$ yechimning ixtiyoriy ikkita ketma-ket noli orasida $y_2(x)$ yechimning bitta noli yotadi.
Isbot.$y_1(x)$,$y_2(x)$ tenglamaning chiziqli bog'lik bo'lmagan yechimlari bo'lsin. Ular umumiy nolga ega bo'lishi mumkin emas, chunki $y_1(x_0)=y_2(x_0)=0$ bo'lganda edi, bularning Vronskiy

determinanti $x_0$nuqtada nolga teng bo'lar edi. Buning bo'lishi mumkin emas chunki $y_1(x)$va $y_2(x)$ chiziqli bog'lik emas.

Faraz etaylik $x_1,x_2,$ $y_1(x)$ ning qo'shni nollari bo'lsin. Taqqoslash uchun (1), (2) tenglamada

$p_1(x)=p_2(x)=p(x)$

deb olamiz.

Taqqoslash teoremasiga asosan $y_1(x)$ yechimning $x_1$vax_2 nollari orasida $y_2(x)$ yechimning x_3 noli yotadi.

Agar $y_2(x)$ yechim yana bitta $x_4 \in (x_1, x_2)$ nolga ega bo'lsa edi, isbotlaganimizga asosan $y_1(x)$ yechim x_3 va x_4 nollar orasida nolga ega bo'lar edi. Buning bo'lishi mumkin emas chunki x_1,x_2qo'shni nollar.

Misol.

$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ Bessel tenglamasini $0 < x < +\infty$ oraliqda qaraymiz. $y=\frac{z}{\sqrt{x}}$ almashtirishyordamidauni

$$z''+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0 \qquad (6)$$

ko'rinishgakeltiramiz.

Bundazoldidagikoeffisiyent $n^2 < \frac{1}{4}$ bo'lgandabirdankatta , $n^2 > \frac{1}{4}$ bo'lgandabirdankichikbo'ladi.

(6) tenglamani

$y''+y=0$

tenglama bilan taqqoslab, Bessel funksiyasining ketma-ket nollari orasidagi masofa ρ,

$-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ da π dan kichik (ρ< π) va $n > \frac{1}{2}$ *ва* $n < -\frac{1}{2}$` da π dan katta bo'ladi (ρ>π)

$n = \pm\frac{1}{2}$ da Bessel funksiyasining ketma-ket nollari orasidagi masofa ρ= π ga teng bo'ladi.

Chegaraviy masalalarning qo'yilishi.

Differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini izlaganda Koshi masalasi bilan birga boshqa chegaraviy deb ataluvchi masalalalarni ko'rib chiqishga to'g'ri keladi. Bunday masalalarga noma'lum funksiya qiymatlari bir nuqta emas intervalning ikki yoki undan ko'p nuqtalarida berilishi mumkin.

Misol. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta $F(t,\overline{r},\dot{\overline{r}})$ kuch ta'sirida harakatga keltirgan bo'lsin. Harakat qonunini aniqlash talab qilinadi. Agar boshlang'ich $t=t_0$ momentda uni o'rni $\overline{r}=\overline{r}_0$ da bo'lib, $t=t_1$ momentda esa $\overline{r}=\overline{r}_1$ da bo'lsa, ($\overline{r}$ bunda M nuqtaning radius vektori)

Masala ushbu

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}=F(t,\overline{r},\dot{\overline{r}})$$

differensial tenglamaning $\overline{r}(t_0)=\overline{r}_0$,$\overline{r}(t_1)=\overline{r}_1$ chegaraviy shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini izlashga keltiriladi.

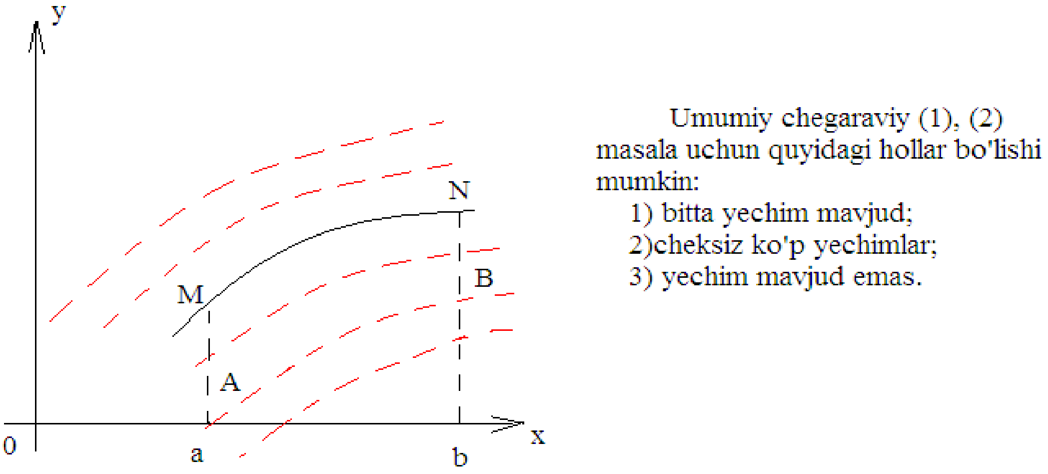
Ikkinchi tartibli differensial tenglamani qaraymiz:

$$y''=f(x,y,y') \qquad (1)$$

Eng sodda chegaraviy masala bu tenglama uchun ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$y(a) = A\,, y(b) = B \tag{2}$$

ya'ni (1) differensial tenglamaning $[a, b]$ da aniqlangan shunday $y = y(x)$ yechimini topish talab etiladiki, u chetki nuqtalarida A va B qiymatlarni qabul qilsin. Geometrik nazardan $M(a, A)$ va $N(b, B)$ nuqtalardan o'tadigan integral egri chiziqni topish talab qilinadi.



1-Misol. Quyidagi $y'' + y = 0$; $y(0) = 1\,, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ chegaraviy masalani yeching.

Yechilishi: Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimining shakli:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,,$$

bunda $c_1\,, c_2$ ixtiyoriy o'zgarmaslar. Chegaraviy shartlarni qo'yib, $c_1$vac_2 larni topamiz. Birinchi shartdan $c_1 = 1$, ikkinchisidan $c_2 = 0$.

Izlangan yechim

$$y = \cos x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right).$$

2-Misol. Ushbu $y'' + y = 0$ tenglamaning, chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimini toping: $y(0) = 1\,, y(\pi) = -1$

Yechilishi: Differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,,$$

Birinchi chegaraviy shartda $x = 0$ da $y = 1$. Bundan $c_1 = 1$. Ikkinchi shartga ko'ra, $x = \pi$da $y = -1$

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = -1\,, c_2 * 0 = 0.$$

Demak, c_2 ixtiyoriy o'zgarmas. Shunday qilib, chegaraviy masala yechimi cheksiz ko'p va u quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$y = c_2 \sin x + \cos x$$

3-Misol. Ushbu $y'' + y = 0$; $y(0) = 1\,, y(2\pi) = 7$ chegaraviy masala yechimi bo'lmasligini ko'rsating.

Yechilishi: Differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

Berilgan shartlarni yechimga qo'yamiz:

$$\left.\begin{array}{r} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 1 \\ c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = 7 \end{array}\right\} =>$$

$$\begin{rcases} c_1 * 1 + c_2 * 0 = 1 \\ c_1 * 1 + c_2 * 0 = 7 \end{rcases}$$

Sistemaning birinchi tengligidan $c_1 = 1$, ikkinchisidan $c_2 = 7$ bo‘layapti. Xulosa, chegaraviy masalani qanoatlantiruvchi yechimi yo‘q. Bu holda chegaraviy masala nokorrekt qo‘yilgan deyiladi.

Yuqorida eng oddiy chegaraviy masalalarni ko‘rdik. Unda berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi ma’lum edi. Biz berilgan shartlardan foydalanib, ixtiiyoriy o‘zgarmaslar qiymatini aniqladik, shu bilan chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimlarni topib oldik. Ayniqsa, matfizika masalalarini yechishda ancha murakkab hollar ham bo‘ishi mumkin.

Chiziqli chegaraviy masala.

Yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar nazariyasida n-tartibli chiziqli tenglamalar alohida o‘rin tutadi. Buning sababi chiziqli differensial tenglamalar nazariyasi har tomonlama chuqur o‘rganib chiqqan, yechim metodlari mavjud va chiziqli tenglamalar fizika, mexanika, texnikada keng tadbiq qilinadi. Injinerlik amalida tez-tez $L(y) = f(x)$ differensial tenglamaning biror $[a, b]$ kesmada u yoki bu shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlashga to‘g‘ri keladi. Bunga misol oldin ko‘p marotaba ko‘rgan Koshi masalasi bo‘ladi. Koshi masalasining o‘ziga xos talabi shu ediki, noma’lum $y = y(x)$ funksiya va uning $(n-1)$ tagacha hosilalarining qiymati $x = x_0$ bitta nuqtada berilgan edi. Vaholanki ba’zi fizik, texnik masalalarni yechishda shu jarayonni tasvirlovchi chiziqli differensial tenglamalarning boshlang‘ich shartlar kesmaning bir nechta nuqtalarida berilgan yechimlarini izlashga to‘g‘ri keladi.

Chegaraviy masala chiziqli deyiladi, agar differensial tenglama va chegaraviy shartlar chiziqli berilgan bo‘lsa. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama va chegaraviy shartlar ushbu ko‘rinishda o‘lishi mumkin:

$$L(y) \equiv f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = d(x) \tag{3}$$

$$\begin{rcases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = A \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = B \end{rcases} \tag{4}$$

bu yerda $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B$ –berilgan o‘zgarmaslar.

Chiziqli chegaraviy masala (3) , (4) bir jinsli chegaraviy masala deyiladi, agar $d(x) = 0$ va$A = B = 0$ bo‘lsa.

Bir jinsli chegaraviy masala.

Chiziqli bir jinsli chegaraviy masalani qaraymiz:

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0\,, a \le x \le b \tag{5}$$

$$\begin{rcases} \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \end{rcases} \tag{6}$$

bu yerda $f(x) \neq 0$, f, g, h –lar $x \epsilon [a, b]$ lar uchun uzluksiz funksiyalar bo‘lsin.

Faraz qilaylik, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ va $|\gamma| + |\delta| \neq 0 y \equiv 0$ trivial yechim. Biz $y \neq 0$ yechimlarni izlaymiz.

Aytaylik $y_1(x)$va$y_2(x)$ berilgan differensial tenglamaning yechimlar fundamental sistemasi bo‘lsin.unda umumiy yechim ushbu formula orqali ifodalanadi:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{7}$$

(6) chegaraviy shartlarga (7) ni qo‘yamiz:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha[c_1y_1(a)+c_2y_2(a)]+\ \beta\left[c_1y_1'(a)+c_2y_2'(a)\right]=0\\ \gamma[c_1y_1(b)+c_2y_2(b)]+\delta\left[c_1y_1'(b)+c_2y_2'(b)\right]=0\end{array}\right\}$$

$c_1$vac_2 koeffitsientlarni gruppalaymiz unda,

$$\left.\begin{array}{r}c_1\left[\alpha y_1(a)+\beta y_1'(a)\right]+c_2\left[\alpha y_2(a)+\beta y_2'(a)\right]=0\\ c_1\left[\gamma y_1(b)+\delta y_1'(b)\right]+c_2\left[\gamma y_2(b)+\delta y_2'(b)\right]=0\end{array}\right\}\qquad(8)$$

Yuqoridagi (8) sistema $c_1$vac_2 larga nisbatan chiziqli bir jinsli algebraik sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun, ushbu tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha y_1(a)+\beta y_1'(a) & \alpha y_2(a)+\beta y_2'(a)\\ \gamma y_1(b)+\delta y_1'(b) & \gamma y_2(b)+\delta y_2'(b)\end{vmatrix}=0\qquad(9)$$

Shunday qilib, (5), (6) chegaraviy masalaning noldan farqli yechimi mavjud bo‘lishi uchun (9) shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

4-Misol. Bir jinsli chegaraviy masalani yeching:

$$y''-y=0, y(0)=y(1)=0$$

Yechilishi: Differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

Chegaraviy shartlarni qo‘yamiz:

$$\left.\begin{array}{r}c_1+c_2=0\\ c_1e+c_2e^{-1}=0\end{array}\right\}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e & e^{-1}\end{vmatrix}=e^{-1}-e=\frac{1-e^2}{e}\neq 0$$

Sistema yechimi $c_1=c_2=0$. Unda faqat $y=0$ yechim mavjud.

Teorema. (5) differensial tenglamaning (3) umumiy chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimi bitta va faqat bitta bo‘lishi uchun, (1) differensial tenglamaning bir jinsli chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimi faqat trivial $y\equiv 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy masala.

Ushbu differensial tenglamani

$$L(y)\equiv f(x)y''+g(x)y'+h(x)y=d(x)\qquad(10)$$

Quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinadi.

$$\left.\begin{array}{r}\alpha y(a)+\beta y'(a)=A\\ \gamma y(b)+\delta y'(b)=B\end{array}\right\}\qquad(11)$$

Aytaylik, $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyalar (10) tenglamaning mos chiziqli bir jinsli tenglamaning yechimlar sistemasi, $\psi(x)$ funksiya esa (10) tenglamaning biror xususiy yechimi bo‘lsin. Unda dastlabgi tenglamaning umumiy yechimi quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\psi(x)\qquad(12)$$

Endi (12) umumiy yechim ifodasini (11) ga qo‘yamiz, keyin c_1 , c_2 oldidagi koeffitsientlarni guruhlaymiz, natija quyidagicha bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{r}c_1\left[\alpha y_1(a)+\beta y_1'(a)\right]+\ c_2\left[\alpha y_2(a)+\beta y_2'(a)\right]=A-\alpha\psi(a)+\beta\psi(a)\\ c_1[\gamma y_1(b)+\delta y_1'(b)]+\ c_2[\gamma y_2(b)+\delta y_2'(b)]=B-\gamma\psi(b)+\delta\psi(b)\end{array}\right\}$$

Bu algebraik sistema yagona $c_1$vac_2 yechimga ega bo‘ladi, agar

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha y_1(a)+\beta y_1'(a) & \alpha y_2(a)+\beta y_2'(a)\\ \gamma y_1(b)+\delta y_1'(b) & \gamma y_2(b)+\delta y_2'(b)\end{vmatrix}\neq 0\,.$$

5-Misol. Bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy masalani yeching.

$$y''+y=4\sin x\,,\quad y(0)=y(1)=0$$

Yechilishi: Berilgan bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x\,.$$

Chegaraviy shartlarni $x = 0$ da $= 0$; $x = 1$ da $y = 0$ umumiy yechim formulasiga qo‘yamiz.

$$\left.\begin{array}{r} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \\ c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 - 2\cos 1 = 0 \end{array}\right\} => \left.\begin{array}{r} c_1 = 0 \\ c_2 = 2ctg1 \end{array}\right\}$$

Ixtiyoriy o‘zgarmaslarning qiymatlarini hisobga olib, chegaraviy masala yechimini yagona tarzda topamiz.

$$y = 2ctg1 \sin x - 2x \cos x$$

6-Misol. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$ tenglamaning $y(0) + 2y'(0) = 1$, $y(1) - y'(1) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini izlaymiz.

Yechilishi: Berilgan Eyler tenglamasi $x = e^t$ deymiz, unda

$$\frac{dy}{dx} = e^t \frac{dy}{dt}\,, \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

bo‘ladi. Bularni dastlabgi tenglamaga qo‘yib ixchamlaymiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \qquad (*)$$

o‘zgarmas koeffisientli chiziqli tenglama. Bir jinsli tenglamaning xarakteristik ko‘phadi

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0\,, P(\lambda) = 0$$

ildizlari $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 2$, umumiy yechim

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Endi $(*)$tenglamaning xuxusiy yechimini izlaymiz: bunda $q(t) = e^{3t}\,, m = 0$, $a = 3\,, P(3) \neq 0$. Demak,$\psi(t) = \mathrm{A}e^{3t}, A$ —noma’lum son.

$$\psi(t), \psi'(t) = 3\mathrm{A}e^{3t}, \psi''(t) = 9\mathrm{A}e^{3t}$$

Ifodalarni $(*)$ tenglamaga qo‘yamiz va e^{3t} ga qisqartirib quyidagilarni hosil qilamiz:

$9A - 9A + 2A = 1\,, A = \frac{1}{2}\,, \psi(t) = \frac{1}{2}e^{3t}$ — xususiy yechim.

$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$ — berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi:

$$y(t) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Bundan

$$y'(t) = c_1 + 2c_2 x + \frac{3}{2}x^2\,.$$

$y(t)$ va $y'(t)$ larga $x = 0$, keyin $x = 1$ ni qo‘ysak, $y(0) = 0, y'(0) = c_1$,

$$y(1) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}\,, \quad y'(1) = c_1 + 2c_2 + \frac{3}{2}$$

Bu qiymatlarni qo‘yilgan chegaraviy shartlarga qo‘ysak, bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{c} 0c_1 + 2\,c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 + \frac{1}{2} - c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2} = 0 \end{array}\right\} => c_1 = \frac{1}{2}\,, c_2 = -1$$

Shunday qilib izlanayotgan yechim

$$y = \frac{1}{2}x - 1x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

Grin funksiyasi

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), x\epsilon[a, b] \qquad (1)$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \qquad (2)$$

(1), (2) chgaraviy masalaning Grin funksiyasi deb, $G(x,s), \forall x \epsilon [a,b] s \epsilon (a,b)$uzluksiz shunday funksiyaga aytiladiki, ushbu shartlar bajarilsa,

1)$x \neq s$bo‘lganda , $G(x,s)$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{3}$$

tenglamani qanoatlantiradi;

2)$x = a$va$x = b$da$G(x,s)$funksiya (2) – chi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi;

3)$x = s$da$G(x,s)x$bo‘yicha uzluksiz uning xosilasi$G'_x(x,s)x = s$nuqtada chekli uzulishga ega bo‘lsin ya’ni uning sakrashi,$\frac{1}{a(s)}$

$$G(s+0,s) = G(s-0,s), G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a(s)} \tag{4}$$

Chegaraviy masalaga mos kelgan Grin funksiyasini aniqlash uchun, oldin bir jinsli (3) tenglamaning ikkita chiziqli erkli (trivialmas) yechimini topish kerak. Ular mos ravishda 1 – chi va 2 – chi chegaraviy (2) shartlarni qanoatlantirishi kerak. U vaqtda Grin funksiyasi movjud bo‘ladi va uni

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x), a \leq x \leq s, \\ \psi(s)y_2(x), s \leq x \leq b \end{cases}$$

shakilda izlash mumkin,$\varphi(s), \psi(s)$lar$s -$ ning funksiyalari bo‘lib, ularni (4) xossadan foydalanib topamiz. Ushbu algebraic sestemadan

$$\begin{cases} \varphi(s)y_1(x) - \psi(s)y_2(x) = 0 \\ \varphi(s)y'_1(x) + \psi(s)y_2(x) = \dfrac{1}{a(s)} \end{cases}$$

Grin funksiyasi mavjud bo‘lganda $y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$ formula (1), (2) chegaraviy masala yechimi bo‘ladi.

$$y(x) = y_1(x)\int_x^b \frac{y_2(s)f(s)}{w(s)}ds + y_2(x)\int_a^x \frac{y_1(s)f(s)}{w(s)}ds$$

1-Misol. Grin funksiyasini tuzing:

$$y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Yechilishi:$y'' = 0$ tenglamaning umumiy yechimi $y = c_1x + c_2$. Birinchi $y(0) = 0$ shartdan $c_2 = 0$, demak $y_1(x) = x$, $(c_1 = 1)$ Ikkinchi shartdan $y(1) = 0$, $c_1 + c_2 = 0 c_1 = -c_2 . c_1 = 1$ diylik, $c_2 = -1$; $y_2(x) = x - 1$. $y_1(x) = x$ va $y_2(x) = x - 1$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar chiziqli erkli ekanligini Vronskiy determinanti orqali ko‘rsatamiz. Haqiqatan

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Demak, Grin funksiyasini ushbu shaklda izlash kerak

$$G(x,s) = \begin{cases} x\,\varphi(s), & 0 \leq x \leq s, \\ (x-1)\psi(s), & s < x \leq 1 \end{cases}$$

Bunda $\varphi(s)$, $\psi(s)$ hozircha noma’lum. Ular ushbu tengliklarni qanoatlantirishi kerak

$$\left.\begin{matrix} (s-1)\psi(s) = s\,\varphi(s), \\ \psi(s) - \varphi(s) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (s-1)\psi(s) = s\,\varphi(s) - s$$

Bundan $\psi(s) = s, \quad \varphi(s) = s - 1$, demak

$$G(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, & 0 \leq x \leq s, \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2-Misol. Grin funksiyasini tuzing bunday qo‘yilgan chegaraviy masala uchun $y'' - y = f(x), \quad y(x) -$ chegaralangan bo‘lsin barcha $x\epsilon(-\infty, +\infty) -$ larda

Yechilishi: $Ly = y'' - y = 0$ tenglamaning xususiy yechimlari $y_1(x) = e^x$ va $y_2 = e^{-x}$, chiziqli erkli, umumiy yechimi $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

Birinchi xususiy yechim $y_1 = e^x$ chegaralangan bo‘ladi $x \longrightarrow -\infty$ da, ikkinchisi $y_2 = e^{-x}$ agar $x \longrightarrow +\infty$. Grin funksiyasini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz

$$G(x,x) = \begin{cases} \varphi\ (s)e^s, & -\infty < x \leq s \\ \psi(s)e^{-s}, & s \leq x < +\infty \end{cases}$$

Bu yerda $\varphi\ (s)$va $\psi(s)$ funksiyalarni shunday tanlab olamizki

$$G(s+0,s) = G(s-0,s), \qquad G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a(s)}$$

Tengliklar bajarilsin, bizda $a(s) = 1, \quad y''$ oldidagi koefsent.

$$\begin{cases} \psi(s)e^{-s} = \varphi\ (s)e^s, \\ -\psi(s)e^{-s} = \varphi\ (s)e^s + 1 \end{cases}$$

Bundan $\varphi\ (s) = -\frac{1}{2}e^{-s}, \quad \psi(s) = -\frac{1}{2}e^s$.

$$G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^{x-s}\ , & -\infty < x \leq s \\ -\dfrac{1}{2}e^{s-x}, & s \leq x < +\infty \end{cases}$$

III. XULOSA.

Xulosa qilib aytadigan bo'lsak, ikkinchi tartibli bir jinslitenglamaning umumiy ko'rinishi

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning bitta $y_1(x)$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, uning umumiy yechimi

$$y = y_1\left[\int \frac{\int c_1 \ell^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx + c_2\right]$$

formula bilan aniqlanar ekan. Bunda $P_1(x)$ *ва* $P_2(x)$ lar ko'rilayotgan oraliqda uzluksiz funksiyalardir.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

differensial tenglamaga o'ziga qo'shma ikkinchi tartibli differensial tenglama deyiladi.(2) ni ochib chiqsak:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p'(x)\frac{dx}{dy} + q(x)y = 0$$

bundan kurinadikim, o'ziga qo'shma differensial tenglamada y' oldidagi koeffisiyent y'' oldidagi koeffisiyentning hosilasiga tengdir.

Xossa1Xarqandayikkinchitartiblibirjinslichiziqlitenglamanio'zigaqo'shmabo'lgandifferensialtenglamagakeltirishmumkin.

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \qquad (3)$$

differensial tenglama berilgan bo'lsin. $P_0(x) \neq 0$ kelib chiqadi.

Xossa 2. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamani erklio'zgaruvchini almashtirish yordamida uni xamma vaqt

$$y'' + Q(t)y = 0$$

Ko'rinishga keltirish mumkin.

Xossa 3. Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamani, noma'lum funksiyani chiziqli almashtirish yordamida.

$$z'' + I(x)z = 0$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1.СалохиддиновМ.С. НасриддиновГ.Н. Оддийдифференциалтенгламалар. Тошкент,"Узбекистон",1994**.**
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенние дифферциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В.Курс диффренциалных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература.1958
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление. М. Наука. 1965.
5.Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 – еиздание).
6.Internet tarmog'idan: www.ziyonet.uz