Т.Ш.ШОДИЕВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

Т. Ш. ШОДИЕВ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ВА ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА

Ўзбекистон ССР Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги олий техника ўқув юртларининг студентлари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ — «ЎҚИТУВЧИ» — 1984

Махсус муҳаррир: физика-математика фанлари кандидати
Ғ. Н. Насритдинов

Тақризчилар: педагогика фанлари кандидати, доцент
Муханов А. Т.,
физика-математика фанлари кандидати, доцент
Раҳмонов У.
физика-математика фанлари кандидати, доцент
Юсупов А.

Дарсликда аналитик геометрия ва чизиқли алгебра асослари: детерминантлар назарияси, чизиқли тенгламалар системаларини текшириш, векторлар алгебраси элементлари, фазода тўғри чизиқ ва текисликлар, иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар, чизиқли акслантиришлар, матрицалар, аффин ва Евклид фазолари, чизиқли операторлар ва квадратик формалар баён этилган. Назарий материал мисол ва масалаларни таҳлил этиш билан қўшиб олиб борилган, мустақил ечиш учун масалалар келтирилган.

Китоб олий техника ўқув юртлари студентлари учун мўлжалланган.

Ш 74

Шодиев Т. Ш.

Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра: Олий техн. ўқув юрт. студ. учун дарслик. Махсус муҳаррир Ғ. Н. Насритдинов.— Т.: Ўқитувчи, 1984.—320 б.

Шадиев Т. Ш. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебник для ВТУзов.

ББК 22. 151. 5+22. 143я7
517.3+51

Ш $\frac{1702030000 - 123}{353(04) - 84}$ 170 — 84

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб олий техника ўқув юртларининг студентлари учун Олий ва ўрта махсус таълим министрлиги тасдиқлаган олий математика курси программасининг аналитик геометрия ва чизиқли алгебра қисмларига мувофиқ ёзилди.

Китобда назарий масалаларнинг математик нуқтаи назардан қўйилиши ва исботланиши мумкин қадар қатъий бўлишига ҳаракат қилинди. Программадан ташқари материаллар билан танишишни истаган студентлар учун керакли адабиёт кўрсатилиб ўтилди.

Китоб икки қисмдан иборат : I қисм — «Аналитик геометрия» ва II қисм — «Чизиқли алгебра элементлари».

Биринчи қисмда детерминантлар назарияси, чизиқли тенгламалар системаси, фазода вектор элементлари, координаталар методи, фазода текислик ва тўғри чизиқ, иккинчи тартибли чизиқ ва сирт тенгламалари баён қилинган. Иккинчи қисм эса чизиқли алгебранинг асосий тушунчаларини, чунончи, чизиқли акслантиришлар, матрицалар, бичизиқли формалар, бир базисдан иккинчи базисга ўтишдаги ўзаро боғланишлар, аффин ва Евклид фазолари, чизиқли операторлар ҳамда квадратик формаларни ўрганишга бағишланган.

Маълумки, чизиқли алгебра уч ўлчовли Евклид фазосидаги аналитик геометрияни кўп ўлчовли чизиқли вектор фазоларга кенг маънода ва турли-туман умумлаштирилишидан иборатдир. Шу сабабли иккала қисм орасида бир қатор чуқур боғланиш мавжуд бўлиб, иккинчи қисмга тегишли материаллар биринчи қисм материалларини анча мураккаб ва абстракт ҳолларда умумлаштиради ва ривожлантиради.

Китобда аналитик геометрия ва чизиқли алгебрадан олий техника ўқув юртларининг студентлари учун зарур бўладиган маълумотларни имкони борича кўпроқ беришга, қаралаётган масалаларни ихчам баён қилишга, материални ўрта мактаб дарсликларида киритилган баъзи бир белгилашлардан фойдаланиб баён қилишга ҳаракат қилинди.

Қўлланма олий техника ўқув юртларининг студентларига мўлжалланган бўлса-да, ундан педагогика институтларининг физика ихтисослиги бўйича таълим олаётган студентлари, шунингдек, кечки ва сиртқи бўлим студентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Қўлланма авторнинг Фарғона политехника институтида ўқиган лекциялари асосида вужудга келди. Китобни ёзишда бундан ташқари ўзбек ва рус тилидаги мавжуд адабиётлардан ҳам фойдаланилди.

Китоб қўлёзмасини диққат билан ўқиб чиқиб, ўзларининг фойдали фикр ва мулоҳазаларини билдирган Тошкент политехника институтининг доцентлари А. Юсупов, У. Раҳмонов, китобнинг махсус муҳаррири Тошкент Давлат университетининг доценти Ғ. Насриддиновга автор ўз миннатдорчилигини билдиради.

Китоб айрим камчиликлардан холи эмас, албатта. Китобнинг сифатини яхшилаш ва унда учраган камчиликларни бартараф этишга қаратилган фикр ва мулоҳазаларини билдирадиган ўртоқларга автор олдиндан ўз миннатдорчилигини билдиради.

Автор

1-ҚИСМ.
АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

I БОБ. ДЕТЕРМИНАНТЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Иккинчи тартибли детерминантлар. Иккита биринчи тартибли икки номаълумли тенглама системаси

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

система *иккита биринчи тартибли икки номаълумли тенглама системаси* дейилади. Бунда x, y — номаълум миқдорлар; a_1, b_1, a_2, b_2, — системанинг коэффициентлари, c_1, c_2 эса унинг *озод ҳади* деб юритилади.

Аслида a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 миқдорлар ихтиёрий комплекс сонлар бўлиши мумкин. Агар

$$a_1 = a'_1 + ia''_1, \;\; a_2 = a'_2 + ia''_2, \;\; b_1 = b'_1 + ib''_1, \;\; b_2 = b'_2 + ib''_2,$$
$$c_1 = c'_1 + ic''_1, \;\; c_2 = c'_2 + ic''_2, \;\; i = \sqrt{-1}$$

бўлиб, a'_1, a''_1, a'_2, a''_2, b'_1, b''_1, b'_2, b''_2, c'_1, c''_1, c'_2, c''_2 ҳақиқий бўлса, (1.1) система $x = x' + ix''$ ва $y = y' + iy''$ бўлганда иккита ҳақиқий коэффициентли системага эквивалент бўлади.

Қуйида баён этиладиган тасдиқлар умумий ҳолда тўғри бўлса ҳам асосий теоремалар коэффициентлар ҳақиқий бўлганда келтирилади.

Агар $c_1 = c_2 = 0$ бўлса,

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0 \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

системага эга бўламиз, у *иккита биринчи тартибли бир жинсли тенглама системаси* дейилади; агар $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, яъни c_1 ва c_2 дан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (1.1) система *иккита биринчи тартибли бир жинслимас тенглама системаси* дейилади.

1°. Иккита биринчи тартибли бир жинслимас тенглама системаси. Биз $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ бўлган ҳолни кўрамиз.

1.1-таъриф. Агар (x_0, y_0) ҳақиқий сонлар жуфти учун

$$\left.\begin{array}{r} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

сонли тенгликлар ўринли бўлса, (x_0, y_0) жуфтлик (1.1) системанинг *ечими* дейилади.

Ечим таърифи $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ бўлганда ҳам (1.2) система учун айтилиши мумкин.

(1.1) системанинг ечими мавжуд бўлиши ёки мавжуд бўлмаслиги мумкин, ҳатто ечимлар сони чексиз кўп бўлиши ҳам мумкин. Бу (1.1) системанинг коэффициентлари ва озод ҳадларига боғлиқ.

Аввал *иккинчи тартибли ёки* 2×2 *ўлчамли матрицалар* деб аталувчи қуйидаги

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

жадвалларни ва *иккинчи тартибли детерминантлар* деб аталувчи қуйидаги миқдорларни қурамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

1.1-теорема. *Агар* $\Delta \neq 0$ *бўлса,* Δ_1 *ва* Δ_2 *ихтиёрий бўлса ҳам* (1.1) *системанинг фақат битта ечими мавжуд*

Исбот. Ягоналиги. Аввал (1.1) системанинг ечими мавжуд деб фараз этиб, ечимнинг ягоналигини исбот этамиз.

(1.1) система тенгламаларининг биринчисини b_2 га, иккинчисини эса b_1 га кўпайтириб, уларнинг чап ва ўнг томонларини мос равишда айирамиз:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\text{ёки } \Delta x = \Delta_1. \qquad (1.4)$$

Шунга ўхшаш, (1.1) система тенгламаларининг биринчисини a_2 га, иккинчисини a_1 га кўпайтириб, биринчисидан иккинчисини юқоридагидек айирсак,

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

ёки

$$\Delta y = \Delta_2 \qquad (1.5)$$

муносабатга эга бўламиз. $\Delta \neq 0$ бўлгани учун (1.4) ва (1.5) дан

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{1.6}$$

га эга бўламиз. Демак, мавжудлиги фараз этилган ечимлардан биттаси $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ жуфтликдан иборат.

Энди (x', y') жуфтлик ҳам ечим бўлиб, юқоридаги ечимдан фарқли бўлсин. У ҳолда (x', y') учун

$$\begin{cases} a_1x' + b_1y' = c_1, \\ a_2x' + b_2y' = c_2 \end{cases} \tag{1.7}$$

сонли тенгликларга эга бўламиз. (1.7) сонли тенгликлар системасига юқоридаги каби «кўпайтириб айириш» усулини қўлласак,

$$\Delta \cdot x' = \Delta_1, \quad \Delta \cdot y' = \Delta_2 \tag{1.8}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Аммо $\Delta \neq 0$ ва $(x', y') \neq \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ бўлгани учун (1.8) муносабатлар бизни зиддиятликка олиб келади. (1.8) система $(x', y') = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ бўлгандагина сонли тенгликлардан иборат бўлади. Шундай қилиб, ягоналик исбот этилди.

Мавжудлиги. Ушбу $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ жуфтликни кўрайлик. $\Delta \neq$ бўлгани учун Δ_1, Δ_2 ихтиёрий чекли бўлганда бу жуфтликнинг маъноси бор. Шу жуфтлик (1.1) системанинг ечими эканини исбот этамиз. Бунинг учун ўрнига қўйиб текшириш усулини қўлланамиз:

$$a_1 \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + b_1 \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_1(c_1b_2 - c_2b_1) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{\Delta} =$$

$$= \frac{a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1}{\Delta} = \frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{\Delta} = \frac{c_1\Delta}{\Delta} = c_1;$$

$$a_2 \frac{\Delta_1}{\Delta} + b_2 \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{a_2\Delta_1 + b_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{c_2\Delta}{\Delta} = c_2.$$

Бу ҳисоблашлар кўрсатадики, $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}\right)$ жуфтлик (1.1) системанинг ечимидир. Демак, (1.1) системанинг ечими мавжуд. 1.1-теорема тўла исбот қилинди.

1.2-теорема. *Агар $\Delta = 0$ бўлиб, Δ_1 ва Δ_2 дан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (1.1) системанинг ечими мавжуд эмас.*

Исбот. 1.1-теоремада ягоналикни исботлашда бажарилган ёрдамчи ҳисоблаш билан

$$\Delta\cdot x=\Delta_1,\qquad \Delta\cdot y=\Delta_2$$

муносабатларни ҳосил қилиш мумкин. Аммо $\Delta=0$ бўлгани учун бу муносабатлардан

$$0\cdot x=0,\ 0\cdot y=\Delta_2\neq 0 \text{ ёки } 0\cdot x=\Delta_1\neq 0,\ 0\cdot y=0$$

тенгликларнинг зид системасига келамиз. Демак, битта ҳам ечим мавжуд эмас.

1.2-теорема шартлари бажарилганда берилган система тенгламалари биргаликда эмас деб ҳам айтишади.

1.3-теорема. *Агар* $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ *бўлиб,* (1.1) *система коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса,* (1.1) *система чексиз кўп ечимга эга бўлади.*

Исбот. $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ бўлгани учун $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ га эгамиз. Демак, (1.1) система тенгламаларидан бири иккинчисидан уни бирор ўзгармас сонга кўпайтириш натижасида келиб чиқади. Шундай қилиб, биз аслида (1.1) система ўрнига битта тенгламага эгамиз. Фараз этайлик, $a_1\neq 0$ бўлсин. У ҳолда $a_1x+b_1y=c_1$ дан $x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}$ келиб чиқади. Ушбу $\left(\frac{c_1-b_1y}{a_1},\ y\right)$ жуфтликни кўрайлик, бу ерда $y\in R$, яъни y — ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу жуфтлик ечимдир. Ҳақиқатан, бунга ишонч ҳосил қилиш учун бу жуфтликни иккинчи тенгламага қўйиб текшириш етарли:

$$a_2\,\frac{c_1-b_1y}{a_1}+b_2y=\frac{a_2c_1-a_2b_1y}{a_1}+b_2y=$$

$$=\frac{a_2c_1-a_2b_1y+a_1b_2y}{a_1}=\frac{a_2\cdot c_1-\Delta y}{a_1}=\frac{a_2c_1-0}{a_1}=$$

$$=\frac{a_2c_1}{a_1}=\frac{a_1c_2}{a_1}=c_2.$$

Теорема исбот бўлди.

1.4-теорема. *Агар* $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ *бўлиб,* (1.1) *системанинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлса,* (1.1) *система ечимга эга эмас.*

Исбот. Ушбу $\begin{cases}0\cdot x+0\cdot y=c_1,\\ 0\cdot x+0\cdot y=c_2\end{cases}$

системанинг камида битта тенгламаси $c_1^2+c_2^2\neq 0$ бўлганда зид тенгликдан иборат. Шунинг учун (1.1) система ечимга эга эмас.

2°. Иккита биринчи тартибли бир жинсли тенглама системаси. 1.5-теорема. *Агар* $\Delta \neq 0$ *бўлса,* (1.2) *система фақат тривиал, яъни* (0,0) *ечимга эга.*

Исбот. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлгани учун камида a_1 ва b_2 ёки a_2 ва b_1 нолдан фарқли. Агар a_1 ва b_2 нолдан фарқли бўлса, масалан, биринчи тенгламадан $x = -\frac{b_1}{a_1}y$ ни топамиз. Энди $\left(-\frac{b_1}{a_1}y, y\right)$ жуфтликни кўрайлик. Уни иккинчи тенгламага қўямиз:

$$a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y\right) + b_2y = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a}y = \frac{\Delta}{a_1}y.$$

Иккинчи тенглама $\frac{\Delta}{a_1}y = 0$ кўринишда ёзилади. $\Delta \neq 0$, $a_1 \neq 0$ бўлган учун бундан $y = 0$ келиб чиқади. Шундай қилиб, $\left(-\frac{b_1}{a_1}y, y\right)$ жуфтлик (0,0) кўринишни олади. Демак, (1.2) система фақат тривиал, яъни (0,0) ечимга эга. Теорема исбот бўлди.

1.6-теорема. *Агар* $\Delta = 0$ *бўлиб, система коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса,* (1.2) *система чексиз кўп ечимга эга бўлади.*

Исбот. Система коэффициентларидан $a_1 \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $x = -\frac{b_1}{a_1}y$ бўлиб, $\left(-\frac{b_1}{a_1}y, y\right)$ жуфтлик ечим бўлади. Бу $\frac{\Delta}{a_1}y = 0$ дан $\Delta = 0$, $a_1 \neq 0$ эканидан англашилади. $\left(\frac{-b_1}{a_1}y, y\right)$ жуфтлик y ихтиёрий ҳақиқий бўлганда ҳам ечим эканидан теореманинг исботи келиб чиқади.

1.7-теорема. Агар $\Delta = 0$ *бўлиб, система коэффициентлари нолга тенг бўлса, у ҳолда* (1.2) *система учун ихтиёрий* (x, y), $x \in \mathrm{R}$, $y \in \mathrm{R}$ *жуфтлик ечим бўлади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра (1.2) система

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

кўринишни олади. Бундан ихтиёрий (x, y), $x \in \mathrm{R}$, $y \in \mathrm{R}$ жуфтлик ечим экани кўриниб турибди.

3°. Системаларни график усулда ечиш. Энди юқорида келтирилган теоремаларнинг геометрик маъносини ойдинлаштирамиз.

Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, (1.1) системанинг тенгламалари билан тавсифланадиган тўғри чизиқлар ўзаро параллел ҳам эмас, ўзаро устма-уст ҳам тушмайди. Фақат ула ягона нуқтада кесишади. Шу нуқта координаталари ечимдан иборат сонлар жуфтлигини ташкил этади. Агар $\Delta=0$ бўлса, (1.1) система тенгламалари билан тавсифланадиган тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади. Агар улар устма-уст тушса, (1.1) система чексиз кўп ечимга эга, устма-уст тушмаса ечимга эга эмас.

(1.2) система тенгламалари координаталар бошидан ўтадиган тўғри чизиқларни тасвирлайди. Агар $\Delta\neq0$ бўлса, бу тўғри чизиқлар ўзаро устма-уст тушмайди ва ягона умумий нуқтага (координаталар бошидан иборат нуқтага) эга бўлади. Бунда (1.2) система фақат тривиал ечимга эга бўлади. Агар $\Delta=0$ бўлса, тегишли тўғри чизиқлар устма-уст тушади ва чексиз кўп умумий нуқтага эга бўлади. Бу ҳолда (1.2) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Агар (1.2) системанинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлса, (1.2) система тенгламалари тўғри чизиқларни тавсифламайди ва текисликнинг ихтиёрий нуқтаси ечим бўлаверади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} 2x-y=0, \\ x+2y=5 \end{cases}$$

система учун $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5$ бўлиб, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=5$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=10$. Бу ерда $\Delta=5\neq0$ бўлгани учун берилган система 1.1-теоремага кўра ягона ечимга эга. Бу ечим, маълумки, $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}$ ва $y=\frac{\Delta_2}{\Delta}$ формулалар ёрдамида топилади. Шундай қилиб, $x=\frac{5}{5}=1$, $y=\frac{10}{5}=2$, яъни ечим (1,2) жуфтликдан иборат,

2. Ушбу

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ -4x+2y=3 \end{cases}$$

система учун $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=4-4=0$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=3$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}=6$. Бу ерда $\Delta=0$ ва $\Delta_1\neq0$, $\Delta_2\neq0$. Шундай қилиб, берилган система 1.2-теоремага кўра ечимга эга эмас,

3. Ушбу $\begin{cases} 2x-y=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases}$

система учун

$$\Delta=0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=0$$

бўлиб, система коэффициентлари нолдан фарқли, у ҳолда берилган система 1.3-теоремага кўра чексиз кўп ечимга эга. Бу ечимлар $(x, 2x)$, $x\in R$ жуфтликлар тўпламини ташкил этади.

4. Ушбу

$$\begin{cases} 0\cdot x + 0\cdot y = 0, \\ 0\cdot x + 0\cdot y = 1 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 0\cdot x + 0\cdot y = 1, \\ 0\cdot x + 0\cdot y = -2 \end{cases}$$

системалар ечимга эга эмас. Бу 1.4-теоремадан келиб чиқади.

5. Ушбу

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

бир жинсли система учун $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0$. Шунинг учун берилган бир жинсли система 1.5-теоремага кўра фақат тривиал ечимга эга.

6. Ушбу

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

бир жинсли система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

бўлиб, система коэффициентлари нолдан фарқли. Берилган система 1.6-теоремага кўра чексиз кўп ечимга эга бўлиб, бу ечимлар ушбу $(x, 2x)$, $x \in \mathrm{R}$ жуфтликлар тўпламини ташкил этади.

7. Ушбу

$$\begin{cases} 0\cdot x + 0\cdot y = 0, \\ 0\cdot x + 0\cdot y = 0 \end{cases}$$

система учун ихтиёрий (x, y), $x \in \mathrm{R}$, $y \in \mathrm{R}$ жуфтлик ечим бўлади (1.7-теоремага қаранг).

1.6. Иккита биринчи тартибли уч номаълумли бир жинсли тенглама системаси

Ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

кўринишидаги система *иккита биринчи тартибли уч номаълумли бир жинсли тенглама системаси* дейилади.

(1.9) системанинг *ечими* деб унинг тенгламаларини сонли тенгликка айлантирадиган сонларнинг (x_0, y_0, z_0) учлигига айтилади, яъни агар (x_0, y_0, z_0) учлик (1.9) системанинг ечими бўлса,

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

сонли тенгликлар ўринли бўлади.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, (1.9) системанинг (0, 0, 0) учликдан иборат ечими мавжуд, чунки (1.9) системанинг коэффициентлари қандай бўлишидан қатъи назар (0, 0, 0) учлик уни (1.10) сонли тенгликларга айлантиради. Шу (0, 0, 0) учликни (1.9) системанинг *тривиал (ноль) ечими* дейилади.

(1.9) системанинг тривиал бўлмаган ечимларини (агар бундай ечимлар мавжуд бўлса!) топиш асосий масала ҳисобланади. Қуйидаги мулоҳазалар кўрсатадики, тривиал бўлмаган ечимлар ҳар доим мавжуд. Аввал ушбу белгилашларни киритамиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.11)$$

1.8-теорема. *Агар Δ_1, Δ_2 ва Δ_3 миқдорлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, яъни $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \neq 0$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда* (1.9) *система чексиз кўп тривиал бўлмаган ечимларга эга.*

Исбот. $\Delta_3 \neq 0$ дейлик. (1.9) системани қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= -c_1z, \\ a_2x + b_2y &= -c_2z \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

кўринишда ёзамиз ва бу ерда z номаълумга биронта аниқ z_0 сон қиймат берилган деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда z ни *озод номаълум* деб юритилади. (1.12) система z нинг аниқ сон қийматида биргина ечимга эга. Агар $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ бўлса, 1.1-теоремага кўра, агар $c_1 = c_2 = 0$ бўлса, 1.5-теоремага кўра (1.12) нинг ягона ечими топилади. Биринчи ҳолда $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ бўлган (x_0, y_0, z_0) ечим, иккинчи ҳолда эса $(0, 0, z_0)$ ечим топилади. Ҳар икки (x_0, y_0, z_0) ва $(0, 0, z_0)$ ечимда z_0 ихтиёрий ҳақиқий, аммо тайинланган сон бўлгани учун уни ўзгартириб (ҳақиқий сонлар тўпламида), чексиз кўп (x_0, y_0, z_0) учликни ёки $(0, 0, z_0)$ учликни ҳосил қилиш мумкин. Қуйида $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ бўлганда ечимни ёзамиз:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z_0 & b_1 \\ -c_2z_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z_0 \\ a_2 & -c_2z_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (1.13)$$

1-§ да киритилган иккинчи тартибли детерминантларнинг таърифига кўра қуйидаги тенгликларга эгамиз:

$$\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z_0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} z_0.$$

Шу тенгликларга асосан (1.13) формулаларни бундай ёзиш мумкин:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z_0, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z_0. \qquad (1.14)$$

Юқорида киритилган (1.11) белгилашлардан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta_3} z_0, \qquad y_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} z_0. \qquad (1.15)$$

Бу формулаларни яна ҳам қулай формага келтириш учун $\frac{z_0}{\Delta_3} = \lambda_0$ деб λ_0 параметрни киритамиз. Равшанки, бунда $\lambda_0 \in R$. Кўринадики, z_0 ни танлаш λ_0 ни ва аксинча, λ_0 ни танлаш z_0 ни танлаш билан тенг кучли. Шунинг учун x_0, y_0, z_0 ва λ_0 ларнинг индексларини тушириб қолдирамиз ҳамда (1.15) формулалар ва киритилган λ параметрнинг ифодасидан фойдаланиб, (1.9) системанинг барча ечимларини ашиқлайдиган

$$x = \Delta_1\lambda, \ y = \Delta_2\lambda, \ z = \Delta_3\lambda, \ \lambda \in R \qquad (1.16)$$

формулаларни ҳосил қиламиз. λ параметрнинг ҳар бир қиймати (1.9) системанинг $(\Delta_1\lambda_0, \Delta_2\lambda_0, \Delta_3\lambda_0)$ ечимини аниқлайди. Энди $\lambda \in R$ шартдан теореманинг исботи келиб чиқади.

Эслатиб ўтамизки, юқоридаги мулоҳазаларни $\Delta_1 \neq 0$ ёки $\Delta_2 \neq 0$ бўлганда ҳам юритиш мумкин. $\Delta_1 \neq 0$ бўлганда x ни, $\Delta_2 \neq 0$ бўлганда эса y ни озод номаълум деб ҳисобланади.

1.9-теорема. *Агар* $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, *яъни* (1.9) *системанинг коэффициентлари пропорционал бўлиб, система коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда* (1.9) *система чексиз кўп ечимга эга ва бу ечимлар* (уни P деб белгилаймиз) $P = \{(x, y, z): a_1x + b_1y + c_1z = 0\}$ *тўпламни ташкил этади.*

Исбот. Теореманинг шартига кўра (1.9) система тенгламаларидан бири иккинчисининг натижасидан иборат бўлади. Демак, биз кўрилаётган ҳолда (1.9) система ўрнига битта биринчи тартибли учта номаълумли тенгламага эгамиз. Келажакда $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ тенглама билан аниқланадиган (x, y, z) нуқталар тўплами P координаталар бошидан ўтадиган текисликни аниқлашини кўрамиз. Шундай қилиб, P тўплам текисликни аниқлайди. Уни ҳам P текислик деб юритаверамиз. Шу P текисликнинг ҳар бир (x_0, y_0, z_0) нуқтаси тегишли тенгламанинг ечими бўлади. Демак, (1.9) система 1.9-теореманинг шартлари бажарилганда чексиз кўп ечимга эга ва бу ечимлар $P = \{(x, y, z): a_1x + b_1y + c_1z = 0\}$ тўпламни ташкил этади.

Эслатма. Агар $a_1 \neq 0$ бўлса, y ва z ни, $b_1 \neq 0$ бўлса, x ва z ни ва ниҳоят, $c_1 \neq 0$ бўлса, x ва y ни озод номаълумлар деб ҳисобланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y + z = 0,\\ 7x + 2y + z = 0 \end{aligned}\right\}$$

системанинг барча ечимлари топилсин.

Ечиш. (1.11) формулаларга асосан: $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 44$, $\Delta_3 = -29$. Берилган системанинг барча ечимлари

$$x = 4\lambda,\ y = 44\lambda,\ z = -29\lambda,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

формулалар билан аниқланади. Агар, масалан, $\lambda = 0$ бўлса, $(0, 0, 0)$ тривиал ечим, $\lambda = 1$ бўлса, $(4, 44, -29)$ ечим, $\lambda = \frac{1}{4}$ бўлганда эса $\left(1, 11, -\frac{29}{4}\right)$ ечимга эга бўламиз.

2. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} 6x + 2y - 3z = 0,\\ 12x + 4y - 6z = 0 \end{aligned}\right\}$$

системанинг барча ечимлари топилсин.

Ечиш. Равшанки, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$. Иккинчи тенглама биринчи тенгламанинг натижасидан иборат. Бу ҳолда $c_1 \neq 0$ бўлгани учун x ва y ни озод номаълумлар деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун $3x + 2y - 3z = 0$ тенгламадан $z = \frac{3x + 2y}{3}$ га эга бўламиз. Энди бундан x ва y га ихтиёрий ҳақиқий қийматлар бериб, z нинг тегишли қиймати аниқланади. Масалан, $x = 1$, $y = -1$ бўлса, $z = \frac{1}{3}$ бўлиб, $\left(1, -1, \frac{1}{3}\right)$ ечимга, $x = 1$, $y = 0$ бўлса, $z = 1$ бўлиб, $(1, -0, 1)$ ечимга эгамиз.

Эслатмалар. 1. Агар (1.9) системанинг барча коэффициентлари ноль бўлса, яъни $\left.\begin{aligned} 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0,\\ 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0 \end{aligned}\right\}$ кўринишга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$ сонлардан тузилган (x, y, z) учлик ечим бўлаверади.

2. (1.9) система тривиал ечимдан бошқа яна чексиз кўп ечимларга эга (коэффициентлари қандай бўлишидан қатъи назар).

3-§. Учинчи тартибли матрицалар ва детерминантлар

Биз 1-§ да 2×2 ўлчамли матрицалар ва детерминантлар тушунчасини киритган эдик. Мазкур параграфда учинчи тартибли, яъни 3×3 ўлчамли матрица ва детерминант тушунчаси билан танишамиз.

Қуйидаги

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

жадвал берилган 9 та ҳақиқий $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ сонлардан тузилган 3×3 *ўлчамли ёки учинчи тартибли квадрат матрица*, берилган сонлар эса *матрицанинг элементлари* дейилади.

Учинчи тартибли матрицаларнинг хоссаларига ҳозир тўхталмаймиз.

Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

символ билан белгиланадиган ва

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 -$$

$$- a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1 \qquad (1.18)$$

тенглик билан аниқланадиган сон (бу сон *детерминантнинг қиймати* дейилади) (1.17) матрицага мос *учинчи тартибли детерминант* деб аталади. Бу ерда $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ векторлар *детерминантнинг устунлари*, $(a_1, b_1, c_1,)$, $(a_2, b_2, c_2,)$ ва (a_3, b_3, c_3) векторлар эса унинг *сатрлари* дейилади. Учинчи тартибли детерминант *элемент* деб аталувчи $3^2 = 9$ та сондан тузилган. Ҳар бир элемент қайси сатр ва қайси устунда турганлигини айтиш қулай бўлиши мақсадида (1.18) детерминантнинг элементларини иккита индекс ёрдамида ёзилади. Биз учинчи тартибли детерминантларни умумий кўринишда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

каби ёзамиз. Бунда ҳар бир a_{ij} элемент учун i сон сатр номерини, j сон эса устун номерини англатади. Масалан,

a_{21} элемент 2- сатр, 1- устунда, a_{13} элемент 1- сатр, 3- устунда жойлашган. Ушбу a_{11}, a_{22}, a_{33} элементлар детерминантнинг биринчи бош диагоналини, a_{31}, a_{22}, a_{13} элементлар эса унинг иккинчи ёрдамчи диагоналини ташкил этади.

Детерминантнинг таърифига кўра (1.19) детерминант учун тегишли (1.18) формулани ёзамиз:

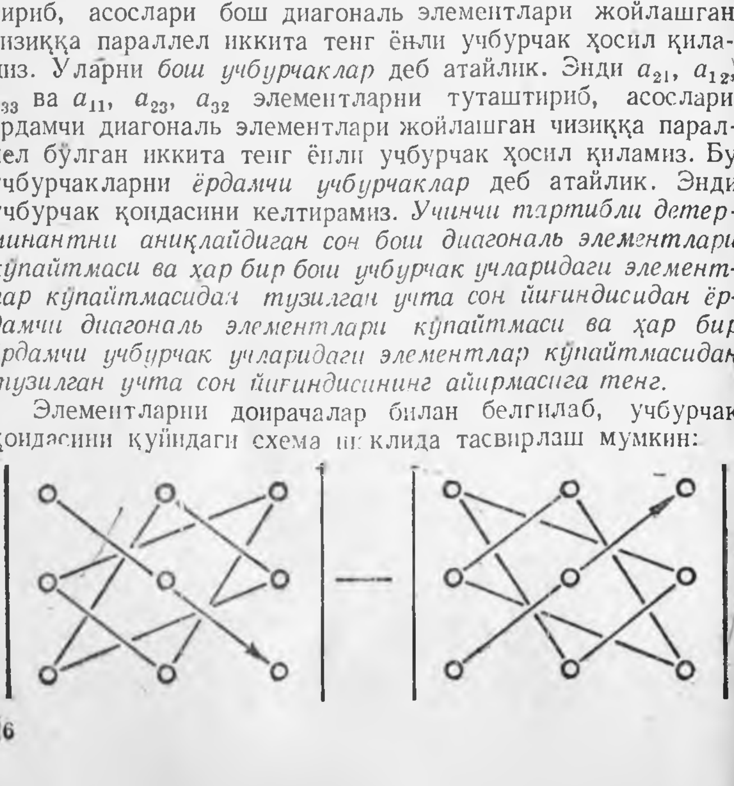
$$\Delta = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12} a_{23}\, a_{31} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{21}\, a_{12}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}. \qquad (1.20)$$

(1.20) йиғиндини эслаб қолиш ноқулай бўлгани учун бу йиғинди хоссаларини ўрганиш фойдали бўлади: равшанки, (1.20) йиғиндининг ҳар бир қўшилувчиси учта кўпайтувчидан иборат бўлиб, улар турли сатр ва турли устундан олинган. Шу усул билан фақат 6 та қўшилувчи ҳосил қилиш мумкин. Қуйида (1.20) йиғиндини ёзишни осонлаштирадиган учбурчак қоидасини келтирамиз:

Аввал a_{12}, a_{23}, a_{31}, ларни ва a_{21}, a_{32}, a_{13} ларни туташтириб, асослари бош диагональ элементлари жойлашган чизиққа параллел иккита тенг ёнли учбурчак ҳосил қиламиз. Уларни *бош учбурчаклар* деб атайлик. Энди a_{21}, a_{12}, a_{33} ва a_{11}, a_{23}, a_{32} элементларни туташтириб, асослари ёрдамчи диагональ элементлари жойлашган чизиққа параллел бўлган иккита тенг ёнли учбурчак ҳосил қиламиз. Бу учбурчакларни *ёрдамчи учбурчаклар* деб атайлик. Энди учбурчак қоидасини келтирамиз. *Учинчи тартибли детерминантни аниқлайдиган сон бош диагональ элементлари кўпайтмаси ва ҳар бир бош учбурчак учларидаги элементлар кўпайтмасидан тузилган учта сон йиғиндисидан ёрдамчи диагональ элементлари кўпайтмаси ва ҳар бир ёрдамчи учбурчак учларидаги элементлар кўпайтмасидан тузилган учта сон йиғиндисининг айирмасига тенг.*

Элементларни доирачалар билан белгилаб, учбурчак қоидасини қуйидаги схема шаклида тасвирлаш мумкин:



Мисоллар. 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + (-4)\cdot3\cdot8 + 2\cdot(-6)\cdot7 -$$

$$-3\cdot5\cdot7 - 1\cdot8\cdot(-6) - 2\cdot(-4)\cdot9 = 45 - 96 - 84 - 105 + 48 + 72 = -120.$$

2. $$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 6\cdot0\cdot12 + 0\cdot3\cdot8 + (-1\cdot)0\cdot(-7)$$

$$-(-7)\cdot0\cdot8 - 6\cdot0\cdot3 - (-1\cdot)0\cdot12 = 0.$$

Биз учинчи тартибли детерминантларнинг баъзи хоссалари билан танишайлик (бу хоссалар аслида ихтиёрий тартибли детерминантлар учун ҳам ўринли).

Детерминантда мос сатр ва устун элементлари ўрнини алмаштириш уни *транспонирлаш* дейилади.

1.1- **хосса.** *Транспонирлаш натижасида детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Исбот. Бу хоссани исбот этиш учун ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

тенгликнинг тўғрилигини кўрсатиш етарли. Аммо (1.21) даги ҳар икки детерминантни учбурчак қоидасини қўлланиб ҳисобласак, бир хил натижага келамиз.

1.2- **хосса.** *Детерминантда исталган икки сатр ёки икки устуннинг ўрнини алмаштирсак, унинг қиймати ўз ишорасини ўзгартиради, аммо абсолют қиймати ўзгармайди.*

Исбот. Бу хоссанинг тўғрилигига берилган детерминантга ва ундан икки сатр ёки икки устуннинг ўрнини алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантга учбурчак қоидасини бевосита қўлланиш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Жумладан, 1- ва 3- устунларнинг ўрнини алмаштирсак, ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

тенгликка эга бўламиз.

1.1- **натижа.** *Иккита сатри ёки устуни бир хил бўлган детерминантнинг қиймати нолга тенг.*

Исбот. Ҳақиқатан, (1.20) детерминантнинг 1- ва 2- сатри элементлари мос равишда бир-бирига тенг бўлсин, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Шу детерминантдаги бу сатрлар ўринларини алмаштирамиз. У вақтда, бир томондан, 1.2- хоссага асосан детерминантнинг қиймати ўз ишорасини ўзгартиради. Лекин иккинчи томондан, ўзаро алмаштирилаётган сатрлар бир хил бўлгани учун уларни ўзаро алмаштириш детерминант қийматини ўзгартирмайди. Демак, $\Delta = -\Delta$ тенгликка эгамиз, бундан $2\Delta = 0$ ёки $\Delta = 0$ келиб чиқади. Детерминантнинг элементлари тенг икки устунининг ўринларини алмаштиришга тегишли мулоҳазалар ҳам шунга ўхшаш юритилади. Натижа исбот бўлди.

1.3- хосса. *Детерминантнинг сатри ёки устунидаги элементлар умумий m кўпайтувчига эга бўлса, m ни детерминант белгиси ташқарисига чиқариш мумкин.*

Исбот. Бу хоссани исбот этиш учун, масалан, ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.23)$$

муносабатнинг тўғрилигини кўрсатамиз. Қолган ҳоллар шунга ўхшаш бўлади. (1.23) нинг чап томонидаги детерминат учун учбурчак қоидасини қўлланамиз:

$$\Delta = a_{11}\,(ma_{22})\,a_{33} + a_{31}\,a_{12}\,(ma_{23}) + (ma_{21})\,a_{32}a_{13} -$$
$$-a_{31}\,(ma_{22})a_{13} - a_{11}\,a_{32}\,(ma_{23}) - (ma_{21})\,a_{12}\,a_{23}.$$

Ҳар бир ҳаддаги умумий m кўпайтувчини қавс ташқарисига чиқарсак, (1.23) нинг ўнг томони ҳосил бўлади.

Мисол,

$$\begin{vmatrix} 16 & 1 & -2 \\ 24 & 2 & 3 \\ -32 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-4 - 12 - 6 -$$
$$-16 - 6 + 3) = 8 \cdot (-41) = -328.$$

1.2- натижа. *Детерминантнинг бирор сатри ёки устуни бошқа сатри ёки устунига пропорционал бўлса, бундай детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.*

Исбот. (1.20) детерминантнинг, масалан, биринчи сатри элементлари унинг учинчи сатри элементлари билан пропорционал, яъни $a_{11} = ma_{31}$, $a_{12} = ma_{32}$, $a_{13} = ma_{33}$ муносабатлар ўринли бўлсин дейлик. Бу муносабатлардан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_{31} & ma_{32} & ma_{35} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Охирги детерминантнинг биринчи ва учинчи сатрлари элементлари бир хил бўлгани учун 1.1- натижага кўра унинг қиймати нолга тенг. Қолган ҳолларда ҳам мулоҳазалар шу каби юритилади. 1.2- натижа исбот бўлди.

1.4- хосса. *Агар детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) элементлари икки қўшилувчидан иборат бўлса, бундай детерминант икки детерминант йиғиндисига тенг бўлиб, биринчи қўшилувчи детерминантнинг мос сатри (ёки устуни) элементлари биринчи қўшилувчилардан, иккинчи қўшилувчи детерминантнинг мос сатри (ёки устуни) элементлари иккинчи қўшилувчилардан иборат бўлади.*

Исбот. Хоссани детерминантнинг биринчи сатри элементларининг ҳар бири икки қўшилувчидан иборат бўлган ҳолда исбот этамиз. Қолган ҳолларда ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш юритилади. Шундай қилиб, биз ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.24}$$

ёйилманинг тўғрилигини исбот этамиз. Бунинг учун (1.24) нинг чап томонидаги детерминант учун учбурчак қоидасини қўлланамиз ва ҳосил бўлган ёйилма ҳадларини группалаймиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+a'_{11})\, a_{22}\, a_{33} +$$

$$+ (a_{12}+a'_{12})\ a_{31}\ a_{23} + (a_{13}+a'_{13})\ a_{21}\ a_{32} - a_{31}\ a_{22}\ (a_{13} +$$
$$+ a'_{13}) = (a_{11}+a'_{11})\, a_{32}a_{23} - a_{21}\, a_{33}\, (a_{12}+a'_{12}) = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$
$$+ a_{31}\ a_{12}\ a_{23} + a_{21}\ a_{32}\ a_{13} - a_{31}\ a_{22}\ a_{13} - a_{11}\ a_{32}\ a_{23} -$$
$$- a_{21}\ a_{33}\ a_{12}) + (a'_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{31}\ a'_{12}\ a_{23} + a_{21}\ a_{32}\ a'_{13} -$$
$$- a_{31}\ a_{22}\ a'_{13} - a'_{11}\ a_{32}\ a_{25} - a_{21}\ a_{33}\ a'_{12}).$$

Охирги ёйилмада биринчи қавс ичидаги йиғинди (1.24) нинг ўнг томонидаги биринчи детерминантни, иккинчи қавс ичидаги ифода (1.24) нинг ўнг томонидаги иккинчи детерминантни беради. Шу билан хосса исбот этилди.

1.3- **натижа.** *Агар детерминантнинг бирор сатри (устуни) элементларини нолдан фарқли бирор сонга кўпайтириб, унинг бошқа сатри (устуни) элементларига мос равишда қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди.*

Исбот. (1.20) детерминантнинг қийматини Δ деймиз. (1.20) детерминантнинг биринчи сатри элементларини m га кўпайтириб, иккинчи сатри элементларига мос равишда қўшайлик (бошқа ҳоллар учун ҳам исбот шунга ўхшаш бўлади). Кўрилаётган ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ma_{11} & a_{22}+ma_{12} & a_{23}+ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминант қийматини Δ_* деб белгилайлик. Биз $\Delta = \Delta_*$ эканини кўрсатишимиз лозим. 1.4- хоссага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\Delta_* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

1.5- **хосса.** *Агар бирор устуни ёки бирор сатрининг барча элементлари нолга тенг бўлса, детерминантнинг ўзи ҳам нолга тенг бўлади.*

Исбот. Детерминант, масалан, ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

кўринишда бўлсин. Агар биринчи устун элементларини 1 га кўпайтириб, иккинчи устун элементларига мос равишда қўшсак, детерминантнинг қиймати ўзгармайди, аммо биринчи ва иккинчи устун элементлари бир хил бўлиб қолади. Маълумки, бундай детерминантнинг қиймати нолга тенг. 1.5- хосса исбот этилди (чунки қолган ҳоллар шунга ўхшаш кўрилади).

Юқорида кўрилган хоссалар ва натижалар учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаш жараёнини енгиллаштиради.

4- §. Минорлар ва алгебраик тўлдирувчилар

1.2- **таъриф.** *Детерминантнинг берилган элементининг минори деб, шу элемент турган сатр ва устунни бир вақтда ўчиришдан ҳосил бўлган детерминантга айтилади.*

Масалан, ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантда a_{12} турган сатр ва устунни чизиш натижасида ҳосил бўлган

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

иккинчи тартибли детерминант a_{12} элементнинг миноридан иборат бўлади. Уни M_{12} деб белгиланади. Шундай қилиб, юқорида ёзилган учинчи тартибли Δ детерминантнинг ҳар бир a_{ik}, $i,k = 1, 2, 3$ элементига мос минори M_{ik} бўлиб, бундай минорлар иккинчи тартибли ва ҳаммаси бўлиб 9 та.

Агар a_{ik} элементнинг минори M_{ik} бўлса, $(-1)^{i+k}$ билан M_{ik} нинг кўпайтмаси бу элементнинг *алгебраик тўлдирувчиси* дейилади. Одатда алгебраик тўлдирувчини детерминант элементига мос бўлган бош ҳарф билан белгиланади, Δ детерминантдаги a_{ik} элементнинг алгебраик тўлдирувчисини $A_{ik} = (-1)^{i+k} \ M_{ik}$ каби ёзилади.

Масалан, a_{13} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси бундай ёзилади:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \ M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Энди детерминант ва унинг алгебраик тўлдирувчилари орасидаги боғланишни очиб берадиган икки даъвони келтирамиз.

1.10- теорема. *Детерминантнинг қиймати унинг бирор сатри (ёки устуни) элементларини бу элементларнинг мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг.*

Исбот. (1.19) детерминантнинг иккинчи устуни учун теореманинг тасдиғи қуйидаги

$$\Delta = a_{12} \ A_{12} + a_{22} \ A_{22} + a_{32} \ A_{32} \tag{1.26}$$

тенгликнинг тўғрилигидан иборат. Уни исбот этамиз. Бевосита ҳисоблашлар ёрдамида қуйидагини топамиз:

$$\Delta = a_{11} \ a_{22} \ a_{33} + a_{21} \ a_{32} \ a_{13} + a_{31} \ a_{12} \ a_{23} - a_{21} \ a_{12} \ a_{33} -$$
$$- a_{31} \ a_{22} \ a_{13} - a_{11} \ a_{23} \ a_{32} = a_{12} \ (a_{31} \ a_{23} - a_{21} \ a_{33}) +$$
$$+ a_{22}(a_{11} \ a_{33} - a_{31} \ a_{13}) + a_{32} \ (a_{21} \ a_{13} - a_{11} \ a_{23}) =$$
$$= a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{12}\ (-1)^{1+1} M_{12} + a_{22}(-1)^{2+2} M_{22} +$$
$$+ a_{32}\ (-1)^{3+2} M_{32} = a_{11}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Агар (1.19) детерминантнинг биринчи ёки учинчи устунини олсак, ёки у, ё бу сатрини олсак ҳам тегишли даъвонинг тўғрилигини шу усул билан исботланади.

1.11- теорема. *Детерминантнинг бирор устуни (сатри) элементлари билан унинг бошқа устуни (сатри) элементлари алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.*

Исбот. Иккинчи устун элементлари биринчи устун элементларининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтирилган бўлсин. У вақтда

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{31} = 0 \tag{1.27}$$

тенглик тўғрилигини кўрсатиш керак. Биринчи устун элементларининг алгебраик тўлдирувчилари шу устун элементларининг иштирокисиз тузилгани сабабли исталган x, y, z сонлар учун ушбу

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = x\ A_{11} + yA_{21} + z\ A_{31}$$

айният ўринли бўлади. У ҳолда $x = a_{12}$, $y = a_{22}$, $z = a_{32}$ деб олсак, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{32}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Агар (1. 27) каби тенгликни бошқа ҳоллар учун ёзилганда ҳам теореманинг тасдиғи юқоридагича исботланади.

5- §. Учта биринчи тартибли уч номаълумли бир жинслимас тенглама системаси

Агар $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0$ бўлса, яъни b_1, b_2 ва b_3 бир вақтда нолга тенг бўлмаса, ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ x + a_{12}\ y + a_{13}\ z = b_1, \\ a_{21}\ x + a_{22}\ y + a_{23}\ z = b_2, \\ a_{31}\ x + a_{12}\ y + a_{33}\ z = b_3, \end{aligned}\right\} \tag{1. 28}$$

система учта *биринчи тартибли уч номаълумли бир жинслимас тенглама системаси* дейилади. Агар $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ бўлса, тегишли система *бир жинсли система* дейилади. Биз аввал бир жинсли бўлмаган системаларни ўрганамиз.

(1.28) системада a_{ij} лар система коэффициентлари, b_1, b_2, b_3 эса *озод ҳадлари* деб юритилади.

Агар (x_0, y_0, z_0) учлик учун

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\ x_0 + a_{12}\ y_0 + a_{13}\ z_0 = b_1, \\ a_{21}\ x_0 + a_{22}\ y_0 + a_{23}\ z_0 = b_2, \\ a_{31}\ x_0 + a_{32}\ y_0 + a_{33}\ z_0 = b_3, \end{array}\right\} \qquad (1.29)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда (x_0, y_0, z_0) учлик (1.28) *системанинг ечими* дейилади.

Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминант (1.28) *системанинг детерминанти* дейилади.

(1.28) система ечимининг мавжудлиги ва ечимлари сони ҳақида қуйидаги теоремалар ўринли.

1.12- теорема. *Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда* (1.28) *системанинг фақат битта ечими мавжуд.*

Исбот. A_{ij} лар a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари бўлиб, Δ_x, Δ_y ва Δ_z орқали

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

миқдорлар белгиланган бўлсин.

Теоремани исбот этиш учун аввал ечим мавжуд деб фараз этиб, унинг ягона эканлигини, сўнгра ечимнинг мавжудлигини алоҳида исбот этамиз.

Ягоналиги. (1.28) система тенгламаларидан биринчисини A_{11} га, иккинчисини A_{21} га, учинчисини A_{31} га кўпайтириб, натижаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$x\ (a_{11}\ A_{11} + a_{21}\ A_{21}\ a_{31}A_{31}) + y\ (a_{12}\ A_{11} + a_{22}\ A_{21} + a_{32}\ A_{31}) + \\ + z\ (a_{13}\ A_{11} + a_{23}\ A_{21} + a_{33}\ A_{31}) = b_1\ A_{11} + b_2\ A_{21} + b_3\ A_{31}.$$

Юқорида исботланган 1.10- ва 1.11- теоремаларга кўра

$$\begin{array}{l} a_{11}\ A_{11} + a_{21}\ A_{21} + a_{31}\ A_{31} = \Delta, \\ a_{12}\ A_{11} + a_{22}\ A_{21} + a_{32}\ A_{31} = 0, \\ a_{13}\ A_{11} + a_{23}\ A_{21} + a_{33}\ A_{31} = 0, \end{array}$$

ва шунингдек,

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3\ A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_x$$

муносабатларга эгамиз. Шунинг учун

$$x \cdot \Delta = \Delta_x \text{ ёки } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} .$$

Шунга ўхшаш, иккинчи ва учинчи устунлар элементларининг алгебраик тўлдирувчилари ёрдамида юқоридаги амалларни бажарсак, мос равишда

$$y \cdot \Delta = \Delta_y , \ z \cdot \Delta = \Delta_z \text{ ёки } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} , \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

натижаларга келамиз. Ҳосил бўлган $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$ учлик (1. 28) системанинг ечимидир. Фараз этайлик. (1. 28) системанинг яна (x', y', z'), $x' \neq x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y' \neq y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z' \neq z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ ечими мавжуд бўлсин. У ҳолда (x', y', z') ечим учун (1. 29) муносабатлар ўринли. Улардан юқоридаги мулоҳазалар ёрдамида

$$x' \cdot \Delta = \Delta_x , \ y' \cdot \Delta = \Delta_y , \ z' \cdot \Delta = \Delta_z$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу $(x', y', z') \neq (x, y, z)$ фаразга зид. Шундай қилиб, ягоналик исбот этилди.

Мавжудлиги. Ушбу $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$ учликни оламиз. Бу учлик (1. 28) системанинг ечими эканини кўрсатамиз. Аввало бу учлик (0, 0, 0) учликдан фарқ қилади, чунки $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0$, $\Delta \neq 0$ ва шунинг учун $\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 \neq 0$. Энди олинган учлик учун (1. 29) тенгликларнинг бажарилишини исбот этамиз. (1. 28) системанинг биринчи тенгламасига $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$ учликни қўямиз:

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = \frac{1}{\Delta}\left(a_{11} \Delta_x + a_{12} \Delta_y + a_{13} \Delta_z\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\Big[a_{11} (b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}) + a_{12} (b_1 A_{12} + b_2 A_{22} +$$

$$+ b_3 A_{32}) + a_{31} (b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33})\Big] = \frac{1}{\Delta}\Big[b_1 (a_{11} A_{11} +$$

$$+ a_{12} A_{12} + a_{13} A_{1,}\Big) + b_2 \Big(a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} +$$

$$+ a_{13} A_{23}\Big) + b_3 \Big(a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\Delta} b_1 \cdot \Delta = b_1.$$

(1.29) даги иккинчи ва учинчи тенгликларнинг тўғрилиги ҳам шунга ўхшаш текширилади. Бу билан мавжудлик исбот этилди. Демак, теорема ҳам тўла исботланди.

Шундай қилиб, $\Delta \neq 0$ бўлганда (1.28) система инг ечими

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{1.30}$$

формулалар ёрдамида топилади. Улар *Крамер формулалари* дейилади.

1.13-теорема. *Агар* $\Delta = 0$ *бўлиб,* Δ_x, Δ_y, Δ_z *нинг камида биттаси нолдан фарқли бўлса,* (1.28) *системанинг ечими мавжуд эмас.*

Исбот. Содда ҳисоблашлар ёрдамида

$$x \cdot \Delta = \Delta_x, \qquad y \cdot \Delta = \Delta_y, \qquad z \cdot \Delta = \Delta_z$$

муносабатларни ҳосил қилиш мумкин. $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta_x \neq 0$ бўлсин. У ҳолда $x \cdot 0 = \Delta_x \neq 0$ муносабат зиддиятликдан иборат. Шундай қилиб, (1.28) система ечимга эга эмас.

Бу ҳолда тегишли *система тенгламалари биргаликда эмас* деб ҳам юритилади.

1.14-теорема. *Агар* $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ *бўлиб, система коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса,* (1.28) *система ё чексиз кўп ечимга эга бўлади, ёки битта ҳам ечимга эга бўлмайди* (1.3-теоремага таққосланг!)

Исбот. 1.3-теореманинг исботига ўхшаш бевосита ҳисоблашлар ёрдамида олиб борилади. Агар (1.28) системада $a_{11} \neq 0$ бўлиб, система тенгламаларидан бири қолган иккитасининг натижасидан иборат бўлса, у ҳолда $\left(\frac{b_1 - a_{12}y - a_{13}z}{a_{11}}, y, z\right)$, $y \in R$, $z \in R$ учликлар ечим бўлади. Бошқа ҳолда ечим мавжуд эмас.

1.15-теорема. *Агар* $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_x = 0$ *бўлиб, система коэффициентлари нолга тенг бўлса,* (1.28) *система ечимга эга эмас.*

Исботи равшан. Агар, масалан, $b_1 \neq 0$ бўлса, $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = b_1$ тенглама ечимга эга эмас.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ 2x - 6y + 4z = -9, \\ 6x - 18y + 12z = 5 \end{cases}$$

система учун бевосита текшириш йўли билан $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ эканига ишонч ҳосил қилиш осон. Аммо система тенгламалари биргаликда эмас. Масалан, биринчи тенгламанинг чап ва ўнг томонларини 2 га кўпайтириб, ундан иккинчи тенгламанинг мос равишда чап ва ўнг томонларини айирсак, $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 11$ зид тенгликка келамиз. Демак, система ечимга эга эмас.

2. Ушбу

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7z = 3, \\ x + 3y + z = 2, \\ 3x + 8y - 6z = 5 \end{cases}$$

система учун $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ га эгамиз. Учинчи тенглама биринчи икки тенгламанинг ўзаро қўшилишидан келиб чиқишини кўриш осон. Шундай қилиб, система икки тенгламага келтирилади:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 7z + 3, \\ x + 3y = 2 - z, \end{cases}$$

Бу системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

ва шунинг учун

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7z + 3 & 6 \\ 2 - z & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 26z - 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7z - 3 \\ 1 & 2 - z \end{vmatrix}}{\Delta} = -9z + 1.$$

Бундан дастлабки система чексиз кўп ечимга эга экани келиб чиқади, чунки z ни ихтиёрий олиб, z бўйича x ва y ни бир қийматли топамиз. Масалан,

$$z = 1 \text{ бўлса}, \ x = 25, \ y = -8;$$
$$z = 2 \text{ бўлса}, \ x = 51, \ y = -17.$$

6-§. Учта биринчи тартибли уч номаълумли бир жинсли тенглама системаси

Учта биринчи тартибли уч номаълумли бир жинсли тенглама системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0, \end{cases} \qquad (1.30)$$

Бир жинсли (1.30) система доим ноль (тривиал) ечимга эга, яъни (0,0,0) учлик (1.30) учун доим ечим бўлади. Система қачон нолмас ечимга эга бўлади, деган савол қизиқтиради.

1.16-теорема. *Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда* (1.30) *система биргина $x = y = z = 0$ ечимга эга.*

Исбот. Ҳақиқатан, Крамер формулалари $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ бўлганда ҳам ўринли, чунки тегишли мулоҳазалар бу ҳолда ҳам юритилиши мумкин. Шунинг учун (1.30) системанинг ягона ечими

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

тенгликлар билан аниқланади. Аммо Δ_x, Δ_y, Δ_z нинг ҳар бирининг битта устуни ноллардан иборат (озод ҳадлар ноль) бўлгани учун $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Демак,

$$x = \frac{0}{\Delta} = 0, \qquad y = \frac{0}{\Delta} = 0, \qquad z = \frac{0}{\Delta} = 0.$$

1.17-теорема. (1.30) *бир жинсли система нолдан фарқли ечимларга эга бўлиши учун унинг коэффициентларидан тузилган Δ детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

Исбот. Зарурлиги. (1.30) системанинг нолдан фарқли ечими (x_0, y_0, z_0) мавжуд бўлсин.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

эканини исбот қиламиз. Содда ҳисоблашлар ёрдамида

$$\left.\begin{aligned} x_0 \cdot \Delta &= \Delta_x, \\ y_0 \cdot \Delta &= \Delta_y, \\ z_0 \cdot \Delta &= \Delta_z \end{aligned}\right\}$$

муносабатларни ҳосил қилиш мумкин. Бу бизга аввалдан маълум. $(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ бўлгани учун $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ га кўра охирги муносабатлардан $\Delta = 0$ деган натижа келиб чиқади.

Етарлилиги. Бу ҳолда $\Delta = 0$. $(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ечим мавжуд эканини исбот этамиз.

а) дастлаб Δ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчилари A_{ij} лар ичида ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли деб фараз қиламиз. Аниқлик учун

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

деб ҳисоблаймиз. (1.30) системанинг биринчи иккита тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \tag{1.31}$$

Сўнгра $A_{33} \neq 0$ бўлгани учун ҳар қандай z да (1.31) система қуйидаги

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{31}}{A_{33}}\, z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{A_{23}} = \frac{A_{32}}{A_{33}}\, z$$

ечимга эга. $k = \frac{z}{A_{33}}$ деб белгилаймиз. У ҳолда (1.31) нинг ечими ушбу кўринишда ёзилади:

$$x = kA_{31}, \quad y = kA_{32}, \quad z = kA_{33},$$

бунда k ихтиёрий сон қийматларни қабул қилиши мумкин. Шундай қилиб, топилган учлик (1.30) системанинг биринчи икки тенгламасининг ечимидан иборат. Ихтиёрий k да бу сонлар учлиги (1.30) системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиришини текшириб кўрамиз. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики,

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k\,[a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}] = k \cdot \Delta = 0$$

бўлади. k ҳар қандай ҳақиқий қийматларни қабул қилгани учун (1.30) система чексиз кўп тривиалмас ечимга эга;

б) агар Δ детерминантнинг барча алгебраик тўлдирувчилари нолга тенг бўлса, у ҳолда (1.30) системанинг ҳар қандай иккита тенгламаси ўзаро пропорционал коэффициентларга эга ва, демак, система битта тенгламага келтирилади — қолган икки тенглама бу тенгламанинг натижаси бўлади. Бундай тенглама чексиз кўп ечимга эга: иккита номаълумга ихтиёрий қийматлар бериш мумкин, учинчисини эса системанинг бирдан-бир тенгламасидан топиш мумкин.

Шундай қилиб, теорема тўла исбот бўлди.

Эслатма. Агар (1.30) системанинг барча коэффициентлари нолга тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий (x, y, z), $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{R}$ учлик шу системанинг ечими бўла олади.

7-§. n-тартибли детерминантлар ҳақида

Биз юқорида иккинчи ва учинчи тартибли матрица ва детерминантлар тушунчаси ва уларнинг чизиқли системаларни ечишда қўлланилиши билан танишдик. Аммо баъзи масалаларни ҳал этиш учун юқори тартибли детерминантлар билан ҳам иш кўришга тўғри келади. *n-тартибли квадрат матрица* деб қуйидаги

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилган жадвалга айтилади.

1.2-таъриф. *A матрицанинг детерминанти* det*A* деб, қуйидаги

$$\Delta_n = \det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \qquad (1.32)$$

формула билан аниқланадиган сонга айтилади, унда M_{ik} ифода A матрицанинг i-сатри ва k-устунини чизишда ҳосил бўлган $(n-1)$-тартибли A_{ik} матрицанинг детерминантидан иборат, i — олинган сатр номери.

Таърифдан кўриниб турибдики, n-тартибли детерминант $(n-1)$-тартибли детерминант орқали ифодаланади. Аммо шу таърифни кетма-кет қўлланиш натижасида n-тартибли детерминантни 3-ёки 2-тартибли детерминант орқали аниқлашгача олиб келиш мумкин.

Бизга маълумки, $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Биз юқорида иккинчи ва учинчи тартибли детерминантларнинг барча хоссалари n-тартибли детерминантлар учун ҳам ўринли бўлишини эслатиб ўтганмиз. Демак, Δ_n детерминантнинг i-сатри бўйича қуйидаги ёйилмани ёза оламиз:

$$\Delta_n = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}, \qquad (1.33)$$

яъни *детерминантнинг қиймати унинг ихтиёрий сатрининг барча элементларини уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг.*

Детерминантнинг қиймати учун ёйилмани унинг ихтиёрий устуни элементлари бўйича ҳам олиш мумкин.

(1.33) ёйилмада алгебраик тўлдирувчиларни мусбат ёки манфий ишорали мос минорлар билан алмаштириб, n-тартибли детерминантни ҳисоблашни $(n-1)$-тартибли бир нечта детерминантни ҳисоблашга келтирамиз. Агар i-сатрдаги баъзи элементлар нолга тенг бўлса, у ҳолда уларга мос минорларни, табиийки, ҳисоблаб ўтириш керак эмас.

Қуйидаги тўртинчи тартибли детерминант берилган бўлсин:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи сатр бўйича ёзамиз:

$$\Delta_4 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Энди a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}$$

эканини эътиборга олиб, берилган детерминантни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Мисоллар. Қуйидаги тўртинчи тартибли детерминантлар ҳисоблансин:

$$1.\quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни биринчи сатри элементлари бўйича ёйиб ёзамиз ҳамда нолга тенг бўлган элементларга мос минорларни тушириб қолдирамиз:

$$\Delta_4 = 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\,(-6 - 6 + 16 + 4) - 2\,(8 + 45 - 80 - 12) = -54.$$

$$2.\quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантни унинг учинчи сатрида битта ноль борлигидан фойдаланиб, шу сатр бўйича ёямиз:

$$\Delta_4 = (-1)^{3+1}\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 16 - 40 + 48 = 40.$$

8-§. n та номаълумли n та чизиқли тенглама системасини детерминантлар ёрдамида ечиш

n та номаълумли n та чизиқли (биринчи тартибли) тенгламалар системаси деб ушбу

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = b_j\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n) \qquad (1.34)$$

кўринишда ёзиладиган системага айтилади.

1.3-таъриф. *Агар ушбу n та сон системаси x_0^1, x_2^0, $\ldots$, x_n^0 учун*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j^0 = b_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \qquad (1.35)$$

сонли тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда шу сонлар системаси $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ (1.34) *системанинг ечими дейилади.*

Агар $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \neq 0$ бўлса, (1.34) *система бир жинслимас*, $b_1 = b_2 = \ldots b_n = 0$ бўлганда эса *система бир жинсли система* деб юритилади. Шу система детерминантини Δ_n билан, Δ_n да j-устунни озод ҳадлар устуни билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган детерминантларни Δ_{x_j} билан белгилаймиз.

Агар $\Delta_n \neq 0$ бўлса, (1.34) системанинг ечими $x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta_n}$ Крамер формулалари ёрдамида топилади.

(1.34) система учун Крамер формулаларини келтириб чиқариш мақсадида $n=3$ бўлган ҳолда бажарилган амалларни шу ерда ҳам қўллаймиз. Элементар ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \ \ldots\ + a_{1n}\,x_n = b_1\ \ (i = 1) \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \ \ldots\ + a_{2n}\,x_n = b_2\ \ (i = 2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n\ \ (i = n) \end{array}\right| \begin{array}{l} A_{1} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{array}$$

$$x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\,A_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\,A_{i1} + \ \ldots\ + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{in}\,A_{i1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_1\,A_{i1}. \qquad (1.36)$$

Равшанки,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \Delta_n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0 \quad (j \neq k).$$

Буларни эътиборга олсак, (1.36) муносабатдан $x_1 \cdot \Delta_n = \Delta_{x1}$ ёки$\Delta_n \neq 0$ бўлганда $x = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_n}$ формула келиб чиқади.

Шу процессни давом эттириб, $x_j \Delta_n = \Delta_{x_j}$ ёки $\Delta_n \neq 0$ бўлганда

$$x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta_n} \quad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

формулаларни топиш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги теоремани исботладик.

1.18-теорема. *Агар* (1.34) *системада* $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2 \neq 0$ *бўлиб*, $\Delta_n \neq 0$ *бўлса, у ҳолда шу система битта ечимга эга.*

Ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги юқоридаги ҳисоблашларга кўра 1.12-теореманинг исботига ўхшаш.

1.19-теорема. *Агар* $\Delta_n = 0$ *бўлиб*, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ нинг *камида биттаси нолдан фарқли бўлса*, *у ҳолда* (1.34) *система* (*унда* $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \neq 0$) *ечимга эга эмас.*

Исботи учинчи тартибли тенгламалар системаси учун исботланган 1.13-теореманинг исботига ўхшаш.

1.20-теорема. *Агар* $\Delta_n = 0$, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$ *бўлиб, система коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, у ҳолда* (1.34) *система ё чексиз кўп ечимга эга бўлади, ёки битта ҳам ечимга эга бўлмайди.*

Исботи 1.14-теореманинг исботига ўхшаш.

1.21-теорема. *Агар* $\Delta_n = 0$, $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$ *бўлиб, система коэффициентлари нолга тенг бўлса*, $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 \neq 0$ бўлганда (1.34) система ечимга эга эмас.

Исботи равшан.

Мисол. Ушбу тенгламалар системаси ечилсин:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ y + 2z + 3z = 20, \\ z + 2t + 3x = 14, \\ t + 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Ечиш. Бу системани

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 0\cdot t = 14, \\ 0\cdot x + y + 2z + 3t = 20, \\ 3x + 0\cdot y + z + 2t = 14, \\ 2x + 3y + 0\cdot z + t = 12 \end{cases}$$

кўринишда ёзамиз. Бу системанинг детерминантини тузамиз ва ҳисоблаймиз:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Унда биринчи устунни 2 ва 3 га кўпайтириб, иккинчи ва учинчи устуннинг мос ҳадларидан айирсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4 - 2 + 54 - 12 + 6 + 6) =$$

$$= 2\ (66 - 18) = 2\cdot 48 = 96.$$

Энди Δ_x, Δ_y, Δ_z ни тузамиз ва ҳисоблаймиз; булардан, масалан, Δ_y ни ҳисоблаймиз, қолганлари шунга ўхшаш аниқланади:

$$\Delta_y = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Биринчи сатрни 3 ва 2 га кўпайтириб, учинчи ва тўртинчи сатрларнинг мос элементларидан айирсак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & -14 & -8 & 2 \\ 0 & -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -14 & -8 & 2 \\ -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 24 = 192.$$

Демак, $y = \frac{192}{96} = 2$. Шунга ўхшаш мулоҳазалар ёрдамида $\Delta_x = 96$, $\Delta_z = 288$, $\Delta_t = 384$ ни топиш мумкин, ва демак, $x = 1$, $z = 3$, $t = 4$. Шундай қилиб, ягона ечим (1, 2, 3, 4) дан иборат.

I бобга доир машқлар

Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг:

1.

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$

Жавоблар: а) 18; б) 10; в) 1; г) 0; д) 0.

2. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$;

д) $\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; е) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-4 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

ж) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$.

Жавоблар:

а) $x = 12$; б) $x = 2$; в) $x_1 = -1$; $x_2 = -4$; г) $x_1 = -\frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{3}{2}$; д) $x_{1;2} = \pm 2i$; е) $x_1 = 2$; $x_{3;4} = -2 + i$; ж) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$, бунда n — бутун сон.

Қуйидаги детерминантларни ҳарфлар иштирок этган устун (сатр) элементлари бўйича ёйиб ҳисобланг:

3. а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Жавоблар:

а) $3a - b + 2c + d$;
б) $4t - x - y - z$;
в) $2a - b - c - d$.

4. Ушбу тенгликни исботланг:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

5. Қуйидаги детерминантларни соддалаштиринг ва ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \sin 3x & \cos 3x & 1 \\ \sin 2x & \cos 2x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \end{vmatrix}$.

Жавоблар: а) 48; б) 160; в) $(x+1)(x^2-x+1)^2$; г) x^2z^2; д) $4\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}$.

6. Қуйидаги чизиқли системаларни ечинг:

а) $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3y=6, \\ 2x-6y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y\sqrt{3}=1, \\ x\sqrt{3}-3y=\sqrt{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} ax+by=c, \\ bx-ay=d; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x\sqrt{5}-5y=\sqrt{3}, \\ x-y\sqrt{5}=5. \end{cases}$

Жавоблар: а) $x=16$, $y=7$; б) $x=2$, $y=3$; в) система ечимга эга эмас; г) система чексиз кўп ечимга эга; бу ечимларни $y=\frac{x-1}{\sqrt{3}}$ формула ёрдамида аниқланади.

д) $x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}$; $y=\frac{bc-ad}{a^2+b^2}$;

е) система ечимга эга эмас.

7. Қуйидаги чизиқли системаларни ечинг:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z+4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x-3y-4z=0; \end{cases}$

Жавоблар: а) $x=5$, $y=6$, $z=10$; б) $x=-1$, $y=0$, $z=1$; в) $x=5k$, $y=-11k$; $z=7k$.

8. Ушбу

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни 2- тартибли минорлари бўйича ёйиб ҳисобланг.

Жавоб: -372.

9. Қуйидаги детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлишини кўрсатинг:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

10. Қуйидаги n- тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Бу детерминантнинг ҳисобланишига тўхталамиз. Детерминантни биринчи устуни элементлари бўйича ёямиз:

$$\Delta = a_{11}\ A_{11} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ҳосил бўлган детерминантни юқоридагига ўхшаш яна биринчи устуни бўйича ёямиз:

$$\Delta = a_{11}\ a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n3} & a_{n4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Бу процессни n марта такрорлаб, ушбу натижага эга бўламиз:

$$\Delta = a_{11}\ a_{22}\ \ldots\ a_{nn}.$$

11. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг:

а) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

б) $$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}$$

в) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & \ldots & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \ldots & 4 \\ 4 & 4 & 6 & \ldots & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 4 & 4 & 4 & \ldots & 2n \end{vmatrix}.$$

Жавоблар: а) $\Delta_n = n!$; б) $\Delta_n = (a - b)^{n-1}\ [a + (n-1)\,b]$.

12. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $$\begin{cases} y - 3z + 4t = -5, \\ x - 2z + 3t = -4, \\ 3x + 2y - 5t = 12, \\ 4x - 3y - 5z = 5; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x - 4y + 5z - 7t = 12, \\ 3x - 5y + 7z - t = 0, \\ 5x - 7y + z - 3t = 4, \\ 7x - y + 3z - 15t = 16; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3y + 4z = 18, \\ 5z - 6u = 39, \\ 7u + 8v = 68, \\ 9v + 10x = 55. \end{cases}$$

Жавоблар: а) $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 1,\quad z = -1,$
б) $x = 1,\quad y = 1,\quad z = 0,\quad t = -2,$
в) $x = 1,\quad y = 2,\quad z = 3,\quad u = 4,\ v = 5.$

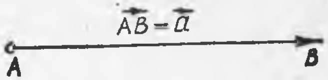
2- БОБ АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

9- §. Векторлар. Асосий тушунчалар

Тўғри чизиқда оддий кесма билан бир қаторда йўналган кесмани, яъни бир учи унинг боши, иккинчи учи охири ҳисобланган кесмани қараш мумкин. Бошқача айтганда, йўналган кесмани белгили тартибда берилган икки нуқта аниқлайди. Оддий кесмада эса аниқловчи нуқталар тенг ҳуқуқли бўлиб, улар тартибининг аҳамияти йўқ.

2.1- таъриф. *Йўналган кесма ёки нуқталарнинг устма-уст тушмайдиган тартиблашган* $\{A, B\}$ *жуфти вектор дейилади; одатда биринчи нуқтани векторнинг боши, иккинчи нуқтани эса унинг охири (учи) дейилади.*

Боши A нуқтада, охири B нуқтада бўлган вектор $\overrightarrow{AB}$ каби белгиланади (векторнинг бошини англатадиган ҳарф ҳар доим биринчи ёзилади). Вектор баъзида битта ҳарф билан ҳам белгиланади: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$; чизмада векторлар стрелкали кесмалар шаклида тасвирланади (1- чизма). Одатда боши билан охири устма-уст тушадиган векторлар *ноль вектор* дейилади ва $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ кўринишда белгиланади.



1- чизма.

Векторнинг бошидан охиригача бўлган масофа векторнинг *узунлиги* (ёки *модули*) дейилади ва қуйидагича белгиланади: $\overrightarrow{AB}$ векторнинг узунлиги: $|\overrightarrow{AB}|$; $\vec{a}$ векторнинг узунлиги: $|\vec{a}|$.

Ноль векторнинг узунлиги нолга тенг, яъни $|\vec{0}| = 0$, аммо унинг йўналиши аниқланмаган. Узунлиги 1 га тенг вектор *бирлик вектор* дейилади.

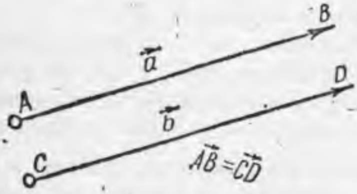
2.2- таъриф. *Узунликлари тенг, йўналишлари бир хил ва параллел бўлган икки вектор тенг деб аталади, бошқача айтганда, агар* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторлар учун қуйидаги учта шарт*

$$\begin{pmatrix} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{pmatrix}$$

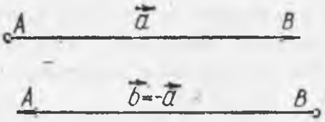
бажарилса, у ҳолда $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторлар тенг дейилади ва* $\vec{a} = \vec{b}$ *деб ёзилади.*

Агар $\vec{a} = \vec{b}$ бўлса, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ тенглик ҳамма вақт бажарилади (2- чизма), аксинча $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ дан $\vec{a} = \vec{b}$ тенглик ҳамма вақт келиб чиқавермайди.

2.3- таъриф. $\overrightarrow{AB}$ *ва* $\overrightarrow{BA}$ *векторларни қарама-қарши векторлар дейилади.*



2- чизма.

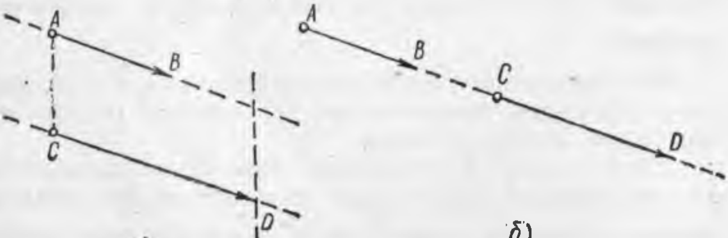


3- чизма.

Қарама-қарши векторлар учун қуйидаги муносабатларни ёза оламиз (3- чизма):

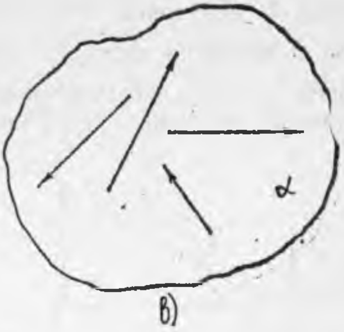
$$(\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| \\ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{BA} \end{pmatrix}.$$

2.4- таъриф. *Параллел тўғри чизиқларда ётувчи ёки бир тўғри чизиқда ётувчи векторлар коллинеар вектор-*



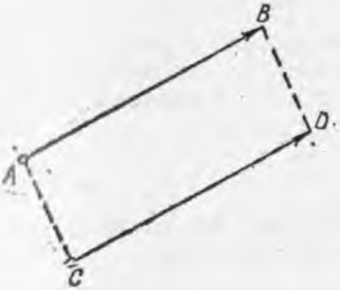
4- чизма.

лар дейилади. Бир текисликка параллел ёки шу текисликда ётувчи векторлар компланар векторлар дейилади (4- *а*, *б*, *в* чизмалар).

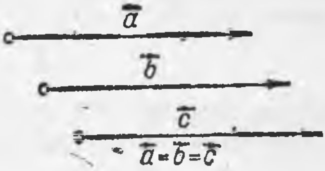


4- *в* чизма

Агар $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар тенг бўлиб, бир тўғри чизиқда ётмаса, у ҳолда $ABCD$ тўртбурчак (5- чизма) параллелограмм бўлади; аксинча, $ABCD$ тўртбурчак параллелограмм бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ бўлади. Шундай қилиб, бир тўғри чизиқда ётмаган $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{CD}$ векторлар тенг бўлиши учун $ABCD$ тўртбурчак параллелограмм бўлиши зарур ва етарли. Бу тасдиқнинг исботи равшан. Шунинг учун биз унга тўхталмаймиз.



5- чизма.



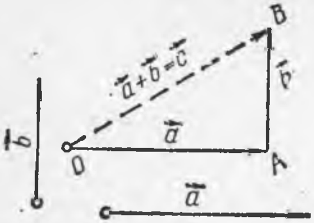
6- чизма.

Равшанки, агар $ABCD$ параллелограмм бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Шунга ўхшаш, агар $\vec a=\vec b$ бўлса, у ҳолда $\vec b=\vec a$ бўлади; агар $\vec a=\vec b$, $\vec b=\vec c$ бўлса, у ҳолда $\vec a=\vec c$ бўлади (6- чизма).

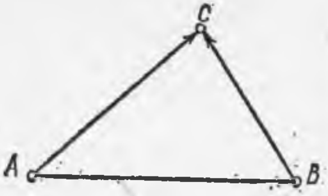
10- §. Векторларни қўшиш ва айириш

Аввал қайд қилиб ўтамизки, векторни параллел кўчирилса, берилган векторга тенг вектор ҳосил бўлади.

Иккита $\vec a$ ва $\vec b$ векторнинг йиғиндисини тушунтириш учун қуйидагича мулоҳаза юритилади: $\vec a=\overrightarrow{OA}$ векторнинг охири $\vec b$ векторнинг боши билан устма-уст тушадиган қилиб $\vec b$ векторни параллел кўчирамиз. Ҳосил бўлган векторни $\vec b = \overrightarrow{AB}$ деб белгилаймиз (7- чизма). Энди O нуқта билан B нуқтани туташтирамиз. Натижада ҳосил бўлган



7- чизма.



8- чизма.

$\overrightarrow{OB} = \vec c$ вектор $\vec a$ ва $\vec b$ *векторларнинг йиғиндиси* дейилади ва $\vec c = \vec a + \vec b$ каби ёзилади. Векторларни бундай қўшиш қоидаси «учбурчак қоидаси» деб аталади. Векторларни қўшиш қоидасидан ушбу муҳим хулосани чиқарамиз: текисликдаги исталган учта A, B, C нуқта учун

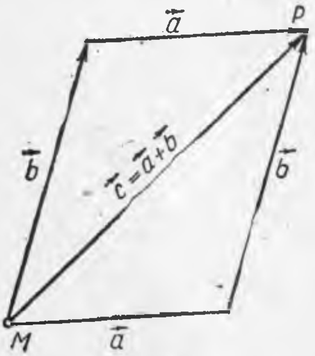
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad (2.1)$$

тенглик ўринли. («Уч нуқта қоидаси».) Бу қоидани «учбурчак қоидаси» ҳам деб юритилади (8- чизма).

Эслатма. Коллинеар ва йўналишлари бир хил икки вектор учун ушбу $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ тенгликдан қуйидаги

$$AB + BC = AC$$

сонли тенглик келиб чиқади, қолган ҳолларда $AB + BC \neq AC$ тенгсизлик ўринли.



9- чизма.

Векторлар йиғиндисининг таърифидан ҳар қандай $\vec a$ вектор учун $\vec a + \vec 0 = \vec a$ экани келиб чиқади.

$\vec a$, $\vec b$ векторлар ўзаро коллинеар бўлмаган вектор бўлсин. Уларни битта M нуқтага параллел кўчирамиз, сўнгра томонлари $\vec a$ ва $\vec b$ векторлардан иборат бўлган параллелограмм чизамиз. Унинг M нуқтага қарама-қарши учини P деб $\overrightarrow{MP}$ векторни қараймиз. Равшанки, $\overrightarrow{MP}=\vec{a}+\vec{b}$ (9- чизма). Векторлар йиғиндисини бундай геометрик ясаш одатда «параллелограмм қоидаси» деб юритилади.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар векторлар бўлса, у ҳолда $\vec{a}+\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга коллинеар бўлади ҳамда бу $\vec{a}+\vec{b}$ вектор узунлиги бўйича катта бўлган (ё $\vec{a}$, ёки $\vec{b}$) вектор билан бир хил йўналган бўлади. $\vec{a}+\vec{b}$ векторнинг узунлиги: 1) агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бир хил йўналган бўлса, $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ га; 2) агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар қарама-қарши йўналган бўлса, $|\vec{a}|-|\vec{b}|$ га тенг бўлади.

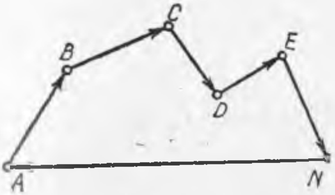
Бизга бир неча $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EN}$ векторлар берилган бўлсин. Бу векторларнинг ҳар бир кетма-кет келган жуфти учун биринчисининг охири билан иккинчининг боши устма-уст тушсин (10- чизма). Бу ҳолда векторлар синиқ чизиқ ташкил қилиб, йиғинди вектор уларнинг ёпувчисига тенг, яъни

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{AN}.$$

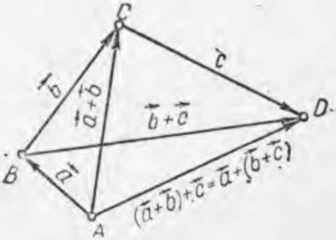
Биз вектор ҳисобида (алгебрасида) фойдаланишга тўғри келадиган асосий тасдиқларни келтирамиз.

2.1- теорема (группалаш қонуни). *Бир неча векторларни қўшишда группалаш қонуни ўринли, яъни йиғиндини топиш учун қўшилувчиларни кетма-кет қўшиш керак* (11- чизма):

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$



10 чизма.



11 чизма.

Исбот. Берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг биринчисининг охирини иккинчисининг боши, иккинчисининг охирига учинчисининг боши тўғри келадиган қилиб жойлаштирамиз. Бу ҳолда векторларни кетма-кет қўямиз, деб ҳам айтишади.

Энди $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$ деб белгиласак, учбурчак қоидасига кўра $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{CD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ келиб чиқади. Шунга ўхшаш,

$$\vec{BD} = \vec{b} + \vec{c},\ \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

2.2- теорема (ўрин алмаштириш қонуни). *Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг йиғиндиси қўшилувчилар тартибига боғлиқ эмас, яъни қўшилувчилар ўрнини алмаштириш натижасида йиғинди ўзгармайди.*

Исбот. Агар векторлардан бири ноль вектор бўлса, бу теорема ўз-ўзидан равшан. Бунда икки ҳолни қараймиз.

1) айтайлик, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлмасин. Бу ҳолда ўзаро параллел бўлмаган $[AB]$, $\vec{AB} = \vec{a}$, $[BC]$, $\vec{BC} = \vec{b}$ кесмаларни ажратиш мумкин (12- чизма). Агар ΔABC ни $\Delta\ ABCD$ параллелограммга тўлдирсак, икки вектор йиғиндисининг таърифига кўра:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC};\ \vec{AD} + \vec{AC} = \vec{AC} \Rightarrow$$

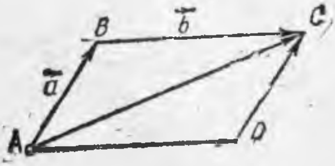
$$\Rightarrow \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{DC}.$$

Бу тенгликдан

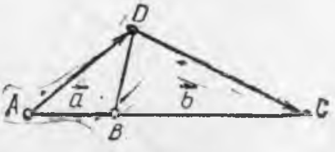
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

келиб чиқади;

2) айтайлик, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро коллинеар бўлсин. Бу ҳолда $[AB]$ ва $[BC]$ кесмаларнинг учлари бўлмиш



12- чизма.



13- чизма.

A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. (AB) тўғри чизиққа тегишли бўлмаган D нуқтани олайлик (13- чизма): $D \notin (AB)$. Бу ҳолда қуйидаги муносабатларни ёза оламиз:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}.$$

Бу муносабатлардан қуйидагини топамиз:

$$\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB};\quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Векторлар алгебрасида векторларни айириш амали ҳам киритилган. Векторларни айириш амали векторларни қўшиш амалига тескари амал сифатида киритилади.

2.5- таъриф. $\vec{a}, \vec{b}$ *векторларнинг айирмаси деб шундай* $\vec{x}$ *векторга айтиладики, уни* $\vec{b}$ *векторга қўшганда* $\vec{a}$ *вектор ҳосил бўлади, яъни агар* $\vec{x}$ *вектор учун ушбу*

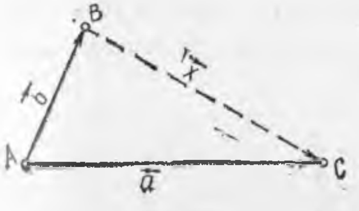
$$\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\vec{x}$ *вектор* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторларнинг айирмаси дейилади ҳамда* $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ *деб ёзилади.*

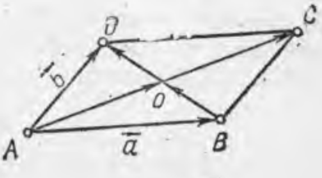
Агар «камаювчи» $\vec{a}$ ва «айирилувчи» $\vec{b}$ векторлар берилса, у ҳолда ушбу

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$$

муносабатни қаноатлантирувчи $\vec{x}$ вектор доим мавжуд. 14- чизмада $\overrightarrow{BC}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Демак $\vec{a}-\vec{b}$ айирма векторни чизиш учун бир нуқтадан чиқувчи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни чизиб, $\vec{b}$ векторнинг учидан $\vec{a}$ векторнинг учига борувчи векторни чизиш кифоя (14- чизма).



14- чизма,

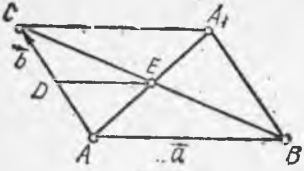


15- чизма,

Шундай қилиб, векторларни айириш амали ҳамма вақт маънога эга.

Масалалар. 1. $ABCD$ параллелограммда $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ва $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторларни $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{BD}$ векторлар орқали ифодаланг (15- чизма).

Ечиш. Векторларни қўшиш ва айириш қоидаларига асосан: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}$. Бу тенгликларни қўшамиз ва айирамиз:



16- чизма.

$$2\vec{b}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\Longrightarrow\vec{b}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}}{2},$$

$$2\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\Longrightarrow\vec{a}=\frac{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}}{2}.$$

2. *ABC учбурчак берилган. Унинг DE ўрта чизиғи учбурчакнинг асосига параллел ва унинг ярмига тенг эканини исботланг* (16- чизма).

Исбот. Берилган $\triangle ABC$да $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ деб оламиз, $\overrightarrow{DE}$ ўрта чизиқни ўтказамиз. Томонлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан иборат бўлган параллелограммни ясаймиз. Векторларни қўшиш таърифига кўра:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AA_1}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2};$$

$$\triangle ADE\Longrightarrow\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{\vec{a}}{2}.$$

Бундан

$$|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\vec{a}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.$$

Шундай қилиб, $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$. Ниҳоят, ушбу $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ муносабат $\overrightarrow{DE}$ ва $\overrightarrow{AB}$ векторларнинг коллинеар эканини билдиради.

11- §. Векторни сонга кўпайтириш

2.6 - таъриф. *$\vec{a}$ векторнинг $\lambda\in R$ сонга кўпайтмаси деб шундай $\vec{b}$ векторга айтиладики, бу вектор ушбу шартларни қаноатлантиради:*

1) $\lambda>0$ бўлганда

$$(\vec{b}=\lambda\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda)\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}|\vec{b}|=\lambda|\vec{a}|\\ \vec{b}\parallel\vec{a}\\ \vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}\end{pmatrix};$$

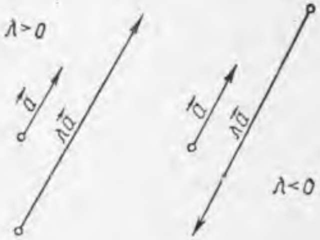
2) $\lambda < 0$ бўлганда

$$(\vec{b} = \lambda \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} |\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \\ \vec{b} \parallel \vec{a} \\ \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \end{pmatrix};$$

3) $\lambda = 0$ бўлганда

$$(\vec{b} = \lambda \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda) \Longleftrightarrow (|\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\lambda| = \vec{0}).$$

Бу ҳоллардан биринчи иккитаси 17- чизмада кўрсатилган.



а) б)

17- чизма.

$\lambda \vec{a}$ векторнинг таърифидан ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун $(-1)\vec{a}$ вектор $\vec{a}$ векторга қарама-қарши бўлган векторга тенг, яъни

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

2.3-теорема. *Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлиб, $\vec{a} \neq \vec{0}$ бўлса, у ҳолда R ҳақиқий сонлар тўпламида шундай ягона λ сонни топиш мумкинки, унда $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ бўлади.*

Исбот. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ деб белгилаймиз. Бунда $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$, чунки $\vec{a} \neq 0$. Агар $C \equiv D$ бўлса, бу ҳолда $[CD]$ кесманинг узунлиги нолга тенг бўлади. Бунда λ нинг $\lambda = 0$ қиймати олинади. $C \not\equiv D$ бўлсин. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $[AB]$ ва $[CD]$ кесмаларнинг йўналишлари бир хил бўлганда

$$\lambda = \frac{|CD|}{|AB|};$$

б) $[AB]$ ва $[CD]$ кесмаларнинг йўналишлари қарама-қарши бўлганда

$$\lambda = -\frac{|CD|}{|AB|}.$$

Булардан λ нинг танланган қиймати учун

$$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}\Rightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}.$$

муносабатни ҳосил қилиш мумкин.

2.4-теорема. *Векторни сонга кўпайтириш группалаш қонунига бўйсунади, яъни ихтиёрий $\vec{a}$ вектор ва ихтиёрий ҳақиқий p, q сонлар учун $p(q\vec{a})=q(p\vec{a})=(pq)\vec{a}$ тенгликлар ўринли.*

Исбот. Айтайлик, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $p>0$, $q>0$ бўлсин, бу ҳолда $\vec{a}$ векторни q га кўпайтириб, ҳосил бўлган $q\vec{a}$ векторни p га кўпайтирамиз. Ҳосил бўлган $p(q\vec{a})$ векторнинг йўналиши $\vec{a}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлади, чунки p ва q сонлар мусбат. $p(q\vec{a})$ векторнинг узунлиги $p\cdot q\cdot|\vec{a}|$ га тенг. Шунинг учун $p(q\vec{a})=(pq)\vec{a}$ бўлади. Агар p ва q ҳар хил ишорали бўлса, у ҳолда p ва q сонларга кўпайтиришдан ҳосил бўлган векторнинг йўналиши $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлиб, барибир $p(q\vec{a})$ векторнинг узунлиги $|pq|\cdot|\vec{a}|$ га тенг бўлади. Шунинг учун $p(q\vec{a})=(pq)\vec{a}$ тенглик ўринли бўлаверади.

Агар p ва q манфий бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ векторни p ва q га кўпайтиришдан ҳосил бўлган векторнинг йўналиши барибир $\vec{a}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлади ва теореманинг тасдиқи ўринли бўлади. Агар $p=0$ ёки $q=0$ бўлса, ёки $\vec{a}=\vec{0}$ бўлса, у ҳолда теореманинг тасдиғи яна ўринли бўлади, чунки бу ҳолда $p(q\vec{a})=(pq)\vec{a}=\vec{0}$.

2.5-теорема. *Векторни сонга кўпайтириш сонли кўпайтувчига нисбатан тақсимот қонунига бўйсунади, яъни ихтиёрий p, q сонлар ва $\vec{a}$ вектор учун*

$$(p+q)\vec{a}=p\vec{a}+q\vec{a}$$

тенглик ўринли.

Исбот. Ҳақиқатан, $\vec{a}\neq\vec{0}$, p ва q сонлар бир хил ишорали бўлса, $p\vec{a}$, $q\vec{a}$ ва $(p+q)\vec{a}$ векторларнинг йўналиши бир хил бўлади. Бундан ташқари, $p\vec{a}$ ва $q\vec{a}$ векторларнинг узунликлари мос равишда $|p|\cdot|\vec{a}|$ ва $|q|\cdot|\vec{a}|$ миқдорларга тенг бўлиб, $p\vec{a}+q\vec{a}$ векторнинг узунлиги қуйидагича аниқланади:

$$|p|\cdot|\vec{a}|+|q|\cdot|\vec{a}|=[|p|+|q|]\cdot|\vec{a}|.$$

Демак, $p\vec{a}+q\vec{a}$ ва $(p+q)\vec{a}$ векторларнинг узунликлари ҳам, йўналишлари ҳам бир хил экан. Агар p ва q сонлар қарама-қарши ишорали бўлса, аниқлик учун $p>0$, $q<0$ бўлса, у ҳолда $p\vec{a}+q\vec{a}$ векторнинг узунлиги $(p-|q|)\,|\vec{a}|=(p+q)\,|\vec{a}|$ бўлади. Йиғинди векторнинг йўналиши $p-|q|>0$ бўлганда $\vec{a}$ векторнинг йўналиши билан бир хил, $p-|q|<0$ бўлганда унга қарама-қарши бўлади.

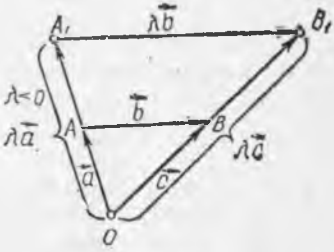
Агар p ва q манфий бўлса, у ҳолда $p\vec{a}$ ва $q\vec{a}$ векторларнинг йўналишлари бир хил бўлиб, $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлади. Йиғинди векторнинг узунлиги $(|p|+|q|)\,|\vec{a}|$ га тенг бўлади. Аммо $p<0$, $q<0$ бўлгани учун $(|p|+|q|)\,|\vec{a}|=-(p+q)\,|\vec{a}|$. Бундан $-[-(p+q)\vec{a}]=(p+q)\,\vec{a}=p\vec{a}+q\vec{a}$.

2.6-теорема. *Ихтиёрий λ сон ва ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар учун*

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

тенглик ўринли.

Исбот. $\lambda=0$ ёки $\vec{a}=\vec{0}$ $(\vec{b}=\vec{0})$ бўлганда теореманинг исботи равшан. Исботни $\lambda\neq0$ бўлган ҳолда кўрамиз. Икки ҳол бўлиши мумкин: 1) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар; 2) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас. Мулоҳазаларни $\lambda>0$ учун олиб берамиз ($\lambda<0$ бўлганда исбот шунга ўхшаш бўлади).



18- чизма.

1) ҳолни кўрамиз. Бунда $\vec{b}=p\vec{a}$ ва $p=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ ёки $p=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ бўлади. Шунинг учун $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda(\vec{a}+p\vec{a})=$

$= \lambda (1 + p)\vec{a}$ келиб чиқади. Бу аввалги теоремага кўра тўғри.

Энди 2) ҳолни кўрайлик. «Учбурчак қоидасига» кўра $\vec{a} + \vec{b}$ йиғиндини ясайлик, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ бўлсин (18-чизма). $\lambda > 0$ бўлгани сабабли $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{c} = \vec{OB_1}$ векторнинг охири бўлган B_1 нуқта $[OB)$ нурга тегишли. Энди шу нуқта орқали (OAB) текисликда (AB) тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиб, унинг $[OA)$ нур билан кесишган нуқтасини A_1 билан белгилайлик. OAB ва OA_1B_1 учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\lambda = \frac{|OB_1|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OA|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|},$$

булардан эса $\vec{OA_1} = \lambda\vec{a}$, $\vec{AB} = \lambda\vec{d}$ келиб чиқади. Аммо $\vec{OB_1} = \vec{OA_1} + \vec{A_1B_1}$. Демак, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

12- §. Чизиқли боғлиқ ва чизиқли эркли векторлар

2.7-таъриф. *Агар берилган* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторлар учун камида биттаси нолдан фарқли шундай* λ_1, λ_2 ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{R}$) *сонлар мавжуд бўлсаки, ушбу* $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{0}$ *тенглик ўринли бўлса,* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *векторлар чизиқли боғлиқ дейилади; агар бундай* λ_1, λ_2 *сонлар мавжуд бўлмаса,* $\vec{a}$ *ва* $\vec{b}$ *векторлар чизиқли эркли дейилади.*

Мисол. Коллинеар векторлар чизиқли боғлиқдир. Ҳақиқатан, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлсин. У ҳолда $\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow \vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$ бўлади. Агар $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\lambda$ десак, $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{0}$ келиб чиқади.

2.8-таъриф *Агар берилган учта* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ва* $\vec{c}$ *векторлар учун камида биттаси нолдан фарқли шундай* λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_i \in \mathrm{R}$) *сонлар мавжуд бўлсаки, ушбу*

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$$

тенглик ўринли бўлса $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ва* $\vec{c}$ *векторлар чизиқли боғлиқ дейилади, акс ҳолда векторлар чизиқли, эркли дейилади.*

Умуман, чизиқли боғлиқлик тушунчасини n та вектор учун ҳам шундай киритилади.

Мисол. Ўзаро коллинеарлари бўлмаган компланар векторлар чизиқли боғлиқдир.

Ҳақиқатан, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланар бўлгани учун улар бир текисликда ётади. Уларни параллел кўчириб, бошларини бир нуқтага келтирамиз. Энди $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни шундай λ_1 ва λ_2 сонларга кўпайтирамизки, натижада йиғинди вектор $\vec{c}$ векторга коллинеар бўлади, яъни $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \lambda_3' \vec{c}$. Бундан $\lambda_3' = -\lambda_3$ десак, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0}$ келиб чиқади. Бу эса таъриф бўйича $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг чизиқли боғлиқлигини англатади.

Энди фазонинг ўлчамлилиги ва базиси тушунчаларига тўхталамиз.

2.9-таъриф. *Агар V тўплам учун қуйидаги шартлар бажарилса, у чизиқли фазо, элементлари эса векторлар деб аталади:*

1) *V тўпламнинг ихтиёрий икки x ва y элементига уларнинг йиғиндиси деб аталадиган $x + y$ элементни мос келтирувчи қўшиш амали берилган;*

2) *V тўпламнинг x элементи ва α сон учун x нинг α га кўпайтмаси деб аталадиган αx элементни мос келтирувчи сонга кўпайтириш амали берилган;*

3) *V тўпламнинг ихтиёрий x, y ва z элементлари ва ихтиёрий α ва β сонлар учун қуйидаги аксиомалар ўринли:*

1°. $x + y = y + x$.

2°. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3°. *Шундай 0 элемент мавжудки, V нинг ҳар бир элементи учун $x + 0 = x$ тенглик бажарилади.*

4° *Ҳар бир x элемент учун шундай $-x$ элемент мавжудки, $x + (-x) = 0$ бўлади.*

5°. $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$.

6°. $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$.

7°. $\alpha (\beta x) = (\alpha\beta) x$.

8°. $1 \cdot x = x$, *яъни ихтиёрий x элементнинг 1 га кўпайтмаси x га тенг.*

Энди фазонинг ўлчамлилигини таърифлашга ўтамиз. $\mathbf{R}$ ҳақиқий сонлар тўплами, V эса вектор фазо бўлсин.

2.10-таъриф. *Агар V фазонинг ихтиёрий икки элементи ўзаро коллинеар бўлса, яъни $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ($\vec{a} \in V$, $\vec{b} \in V$) бўлса, V бир ўлчовли (ўлчамли) чизиқли (вектор) фазо дейилади.*

Демак, бир ўлчовли вектор фазонинг элементи бўлган вектор тўғри чизиққа параллел бўлади.

2.11-таъриф. *Агар бир ўлчовли V_1 вектор фазода*

$$(\vec{e}\neq\vec{0})\in V_1,\ \vec{a}\in V_1,\ \vec{a}=\lambda\vec{e}$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\vec{e}$ *сектор бир ўлчовли вектор фазонинг базиси дейилади ва* $\{\vec{e}\}$ *кўринишда белгиланади.*

2.12-таъриф. *Агар V фазога тегишли бўлган ҳар қандай учта* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *сектор компланар бўлса, V икки ўлчовли ектор фазо дейилади. (Уни* V_2 *деб белгилаймиз).*

Демак, икки ўлчовли вектор фазонинг элементлари компланар бўлади.

2.13-таъриф. *Агар икки ўлчовли* V_2 *вектор фазода*

$$(\vec{e}_1\neq\vec{0},\vec{e}_2\neq\vec{0})\in V_2,\ \vec{a}\in V_2,\ \vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2,\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0 \quad (2.2)$$

муносабат ўринли бўлса, $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ *векторлар системаси икки ўлчовли вектор фазонинг базиси дейилади.*

(2.2) муносабатда $\vec{a}$ вектор $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, бошқача айтганда, (2.2) муносабат $\vec{a}$ нинг $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар бўйича *ёйилмаси* дейилади.

2.14-таъриф. *Агар V фазога тегишли бўлган учта чизиқли эркли вектор системаси мавжуд бўлса, V уч ўлчовли вектор фазо дейилади.* (уни V_3 деб белгилаймиз.) *Шу билан бирга агар*

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\in V_3\Rightarrow\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3 \quad (2.2')$$

муносабат λ_1, λ_2, λ_3 *нинг* $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0$ *қийматларида бажарилса, у ҳолда* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ *система уч ўлчовли вектор фазонинг базиси дейилади.*

2.7-теорема. V_3 *фазода ҳар қандай* $\vec{a}$ *вектор чизиқли эркли учта векторнинг ягона чизиқли комбинациясидан иборатдир.*

Исбот. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар ўзаро чизиқли эркли векторлар бўлиб, $\vec{a}$ фазонинг ихтиёрий вектори бўлсин. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлишини, яъни

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3,\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0 \quad (2.3)$$

ёйилманинг тўғрилигини исбот этамиз. Сўнгра бу ёйилманинг ягоналигини кўрсатамиз.

(2.3) ёйилмани бевосита геометрик ясаш йўли билан исботлаш мумкин. Биз бунга тўхталмаймиз. Энди (2.3) нинг ягоналигини кўрсатамиз. $(\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3') \neq (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ учун яна ушбу

$$\vec{a} = \lambda_1'\vec{e}_1 + \lambda_2'\vec{e}_2 + \lambda'_3\vec{e}_3$$

ёйилма мавжуд бўлсин, деб қарайлик. Равшанки,

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = \lambda_1'\vec{e}_1 + \lambda_2'\vec{e}_2 + \lambda'_3\vec{e}_3$$

ёки

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\vec{e}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\vec{e}_2 + (\lambda_3 - \lambda_3')\vec{e}_3 = \vec{0}$$

муносабатга эгамиз. Энди $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ нинг чизиқли эрклилигидан $\lambda_1 - \lambda_1' = 0$, $\lambda_2 - \lambda_2' = 0$, $\lambda_3 - \lambda_3' = 0$ тенгликлар келиб чиқади. Бундан

$$\lambda_1 = \lambda_1', \ \lambda_2 = \lambda_2', \ \lambda_3 = \lambda_3'.$$

Биз теоремани уч ўлчовли фазо элементлари учун исботладик. Тегишли теорема икки ўлчовли, умуман, ихтиёрий n ўлчовли фазо элементлари учун ҳам тўғри.

Агар текисликда ёки фазода бирор базис танланган бўлса, у ҳолда текисликдаги (ёки фазодаги) ҳар бир векторга тўла аниқланган тартибланган (номерланган) сонлар жуфти (ёки тартибланган сонлар учлиги) мос келтирилади, бу сонлар векторнинг базис бўйича ёйилмасининг коэффициентларидан иборат бўлади. Берилган $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ базисда $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ векторни аниқловчи λ_1, λ_2 сонлар, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базисда $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$ векторни тўла аниқловчи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сонлар $\vec{a}$ *векторнинг тегишли базисдаги компонентлари* дейилади.

13- §. Декарт координаталар системаси

1°. Тўғри чизиқдаги йўналиш. Мусбат йўналиши танлаб олинган l тўғри чизиқ *ўқ* деб аталади. Ўқнинг йўналишини одатда стрелка билан кўрсатилади (19- чизма). бу стрелканинг йўналиши l тўғри чизиқдаги мусбат йўналишни аниқловчи $\vec{m}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлади.

19- чизма.

Йўналиши ўқдаги мусбат йўналиш билан бир хил бўлган ҳамда узунлиги бирга тенг бўлган (яъни $|\vec{e}| = 1$) $\vec{e}$ вектор *ўқнинг орти (базиси)* дейилади.

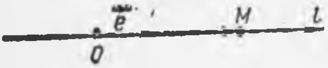
Агар тўғри чизиқда *координаталар боши* деб аталувчи O нуқта, мусбат йўналиш ва узунлик бирлиги танлаб олинган бўлса, у ҳолда тўғри чизиқда *Декарт координаталар системаси* берилган дейилади.

Агар ўқда бирор базис танланган бўлса, у ҳолда ўқдаги ҳар бир векторга тўла аниқланган битта сон мос келтирилади ва бу сон векторнинг базис бўйича ёйилмасининг коэффициентидан иборат бўлади.

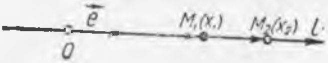
l ўқда ётган $\overrightarrow{OM}$ вектор шу ўқда танланган $\vec{e}$ базис билан коллинеар бўлади. Векторларнинг коллинеар бўлиш шартидан (20- чизма)

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e} \tag{2.4}$$

муносабатни ёза оламиз. (2.4) даги x сонни одатда $\overrightarrow{OM}$ *векторнинг координатаси* дейилади. Агар x сон $\overrightarrow{OM}$ векторнинг координатаси бўлса, унинг $M(x)$ кўринишдаги ёзуви x сон $\overrightarrow{OM}$ векторнинг координатаси деган маънони англатади, шу билан бирга x сон M нуқтанинг координатаси деган маънони ҳам англатади.



20- чизма.



21- чизма.

2.8- теорема. *Ўқнинг ихтиёрий икки $M_1(x_1)$ ва $M_2(x_2)$ нуқтаси учун ушбу тенглик ўринли бўлади* (21- чизма):

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \tag{2.5}$$

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, векторларни қўшиш қоидасига кўра

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}.$$

Бундан

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}.$$

Агар $\overrightarrow{OM_2} = x_2\vec{e}, \overrightarrow{OM_1} = x_1\vec{e}$ эканини эътиборга олсак,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\overleftrightarrow{e} \text{ ёки } |\overrightarrow{M_1M_2}| = |x_2 - x_1|\cdot|\overleftrightarrow{e}| = |x_2 - x_1|$$

формулага эга бўламиз.

(2.5) формула билан аниқланган $|x_2 - x_1|$ миқдор $M_1(x_1)$ *ва $M_2(x_2)$ нуқталар орасидаги масофа* дейилади ва уни d билан белгиланади, яъни

$$d = |x_2 - x_1|.$$

2°. Векторнинг ўқдаги проекцияси

2.15-таъриф. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг *l ўқдаги проекцияси деб, шундай $\overrightarrow{A_1B_1}$ векторнинг узунлигига айтиладики, унда A_1 ва B_1 мос равишда A ва B нуқталарнинг l ўқдаги ортогонал проекциялари бўлиб, бу узунлик $\overrightarrow{A_1B_1}$ ва $\overleftrightarrow{e}$ векторларнинг йўналишлари бир хил бўлганда мусбат ишора билан, акс ҳолда манфий ишора билан олинади* (22-чизма).

$\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги проекциясини $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$ символи билан белгилаймиз. Таъриф бўйича

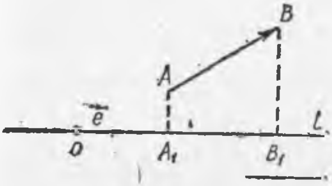
$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = \pm|A_1B_1|.$$

Бу таърифдан $\overrightarrow{AB}$ вектор ўққа перпендикуляр бўлгандагина унинг проекцияси нолга тенг деган хулоса келиб чиқади. (2.4) формулага кўра

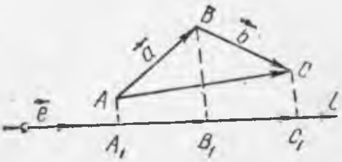
$$\overrightarrow{A_1B_1} = x\overleftrightarrow{e} \tag{2.6}$$

деб ёза оламиз. Бу тенгликдаги x сон $\overrightarrow{AB}$ векторнинг проекциясидир, яъни

$$x = \text{пр}_l\overrightarrow{AB}.$$



22-чизма.



23-чизма.

Векторнинг ўқдаги проекцияси хоссалари

1. *Векторлар йиғиндисининг бирор ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўқдаги проекциялари йиғиндисига тенг, яъни*

$$\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots+\vec{d})=\text{пр}_l\vec{a}+\text{пр}_l\vec{b}+\text{пр}_l\vec{c}+\ldots+\text{пр}_l\vec{d} \quad (2.7)$$

Исбот. Исботни икки вектор учун келтирамиз, яъни

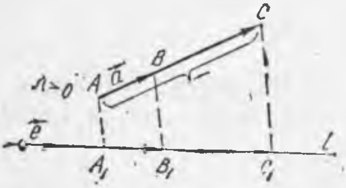
$$\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_l\vec{a}+\text{пр}_l\vec{b} \quad (2.8)$$

эканини исбот этамиз. Агар $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ бўлсин десак, у ҳолда $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ бўлади (23- чизма.)

23- чизмадан, (2.6) ни эътиборга олсак,

$$\overrightarrow{A_1B_1}=x_1\vec{e},\ \overrightarrow{B_1C_1}=x_2\vec{e},\ \overrightarrow{A_1C_1}=x_3\vec{e}$$

ни ёза оламиз. Бунда $x_1=\text{пр}_l\vec{a}$, $x_2=\text{пр}_l\vec{b}$, $x_3=\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b})$. Энди $x_3=x_1+x_2$ эканини кўрсатамиз. Равшанки, $x_3\vec{e}=$ $=\text{пр}_l\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=x_1\vec{e}+x_2\vec{e}=(x_1+x_2)\ \vec{e}$. Шундай қилиб, (2.8) формула исбот этилди.



24- чизма.

Қўшилувчилар сони иккитадан ортиқ бўлганда ҳам исбот шунга ўхшаш олиб борилади.

2. *Векторнинг сонга кўпайтмасининг проекцияси шу вектор проекциясини ўша сонга кўпайтмасига тенг, яъни*

$$\text{пр}_l(\lambda\vec{a})=\lambda\ \text{пр}_l\vec{a},\ \lambda\neq 0. \quad (2.9)$$

Исбот. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{a}$ бўлсин деб фараз қилайлик. A,B,C нуқталарнинг l ўқдаги проекциялари A_1,B_1,C_1 бўлсин (24- чизма). $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ кесмалар ўзаро параллел, шунинг учун $\overrightarrow{A_1C_1}=\lambda\overrightarrow{A_1B_1}$. (2.6) формулага кўра

$$\overrightarrow{A_1B_1}=x\vec{e},\ \overrightarrow{A_1C_1}=x_1\vec{e},$$

яъни $x=\text{пр}_l\vec{a}$, $x_1=\text{пр}_l(\lambda\vec{a})$ деб белгиласа

$$x_1\vec{e} = \overrightarrow{A_1C_1} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda(x\vec{e}) = (\lambda x)\vec{e},$$

бундан эса $x_1 = \lambda x$ келиб чиқади. Хосса исбот этилди.

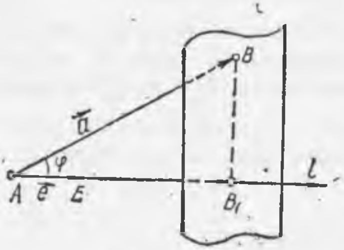
3. *Тенг векторларнинг битта ўққа проекциялари ўзаро тенгдир.*

Исботи равшан бўлгани учун унга тўхталмаймиз.

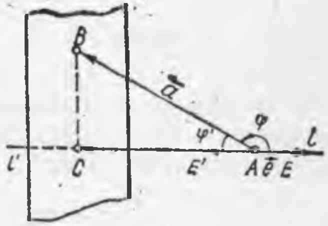
4. *Векторнинг ўқдаги проекциясининг катталиги шу вектор узунлигини вектор ва ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги φ бурчак косинусига кўпайтмасига тенг, яъни*

$$\text{пр}_e \vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi. \qquad (2.10)$$

Исбот. Айтайлик, $A\in l$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{e}$, B_1 нуқта B нинг l ўқдаги проекцияси бўлсин. $\overrightarrow{AB}$ вектор билан ўқ орасидаги бурчак ўткир бўлса (25- чизма), проекция таърифига кўра $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = +|\overrightarrow{A_1B}|$ бўлади. ABB_1 учбурчакдан $|\overrightarrow{AB_1}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos\varphi$, яъни



25- чизма.



26- чизма.

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Агар φ бурчак ўтмас бўлса (26- чизма), у ҳолда

$$\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AC}|. \qquad (2.11)$$

26- чизмадаги ABC учбурчакдан

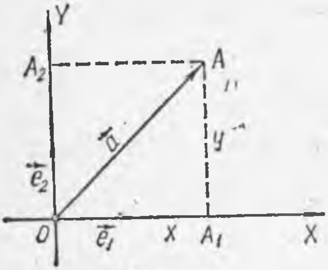
$$|\overrightarrow{AC}| = |\vec{a}|\cos\varphi', \qquad (2.12)$$

бу ерда $\varphi' = \pi - \varphi$. Бундан

$$\cos\varphi' = -\cos\varphi. \qquad (2.13)$$

(2.11)—(2.13) формулалардан изланган (2.10) формула келиб чиқади.

3°. **Векторнинг координаталари.** Агар текисликда (ёки фазода) координаталар боши деб аталувчи нуқта, ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқлар, уларда мусбат йўналиш ҳамда узунлик бирлиги (умуман айтганда, ҳар бир йўналишдаги ўқда ҳар хил) танланган бўлса, *текисликда (фазода) Декарт координаталар системаси* берилган дейилади. Ўқлар мос равишда *абсциссалар ўқи, ординаталар ўқи* (аппликаталар ўқи) деб юритилади. Тегишли ўқлар *координата ўқлари* дейилади. Фараз этайлик, текисликда Декарт координаталар системаси берилган бўлсин (уни қисқача *xOy* система деб ҳам юритилади) ва $\vec{a}$ вектор координаталар боши *O* нуқтадан чиққан бўлсин (27-чизма).



27-чизма.

2.16-таъриф. *$\vec{a}$ векторнинг xOy системадаги координаталари деб унинг координата ўқларидаги проекцияларига айтилади, яъни*

$$x = \text{пр}_{Ox}\vec{a}, \quad y = \text{пр}_{Oy}\vec{a}.$$

Таърифга кўра x, y сонлар $\vec{a}$ векторнинг *xOy* системадаги координаталаридир; x сонни $\vec{a}$ векторнинг *абсциссаси*, y ни эса унинг *ординатаси* деб аталади. Координаталари x, y дан иборат вектор $\vec{a} = \{x, y\}$ символи билан белгиланади. Фазода (*Oxyz* системада) $\vec{a}$ векторнинг координаталари унинг система ўқларидаги проекциялари сифатида таърифланади, яъни

$$x = \text{пр}_{Ox}\vec{a}, \quad y = \text{пр}_{Oy}\vec{a}, \quad z = \text{пр}_{Oz}\vec{a}.$$

Координаталар системасини бундан буён координата ўқларидаги $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ бирлик векторлар билан кўрсатамиз.

Агар $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторларнинг ихтиёрий жуфти ўзаро перпендикуляр бўлиб, уларнинг узунликлари бирга тенг бўлса (яъни $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$), у ҳолда фазода $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлардан иборат базис *ортонормаланган базис* дейилади.

Агар $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ вектор координаталар бошидан чиқиб, унинг координаталари x, y бўлса, A нуқтанинг координаталари ҳам шу сонлардан иборат бўлади. Бу равшан. $\overrightarrow{OA}$ вектор A нуқтанинг радиус-вектори дейилади. Шундай қилиб, A нуқтанинг тўғри бурчакли системадаги координаталари шу нуқта *радиус-векторининг* координаталарига тенгдир. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ векторни ўқлардаги $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ бирлик векторларнинг йўналишлари бўйича ёйиш мумкин:

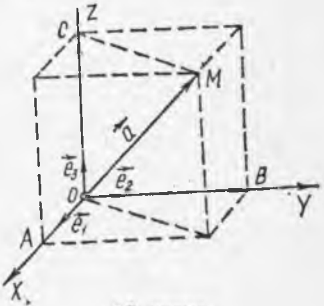
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}.$$

Аммо $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{e}_2$, бунда A_1, A_2 лар A нуқтанинг система ўқларидаги проекцияларидир. Демак,

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{a} = \{x, y\}.$$

Шунга ўхшаш, фазода (28- чизма)

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}.$$



28- чизма.

Бу ерда x сон $\overrightarrow{OM}$ векторнинг биринчи координатаси, y сон иккинчи координатаси, z сон учинчи координатаси ҳисобланади. Адабиётда одатда мос равишда *абсцисса*, *ордината*, *аппликата* терминлари ишлатилади.

Векторлар устида бажариладиган амалларни уларнинг координаталари устида бажариладиган амалларга алмаштириш имкониятини берувчи баъзи теоремаларни келтирамиз.

2.8- теорема. Агар *xOy системада* $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ бўлса, $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, \ y_1 + y_2\}$ *бўлади* (29- чизма).

Исбот. Теоремани исботлаш учун икки вектор йиғиндисининг проекцияси ҳақидаги хоссадан фойдаланамиз:

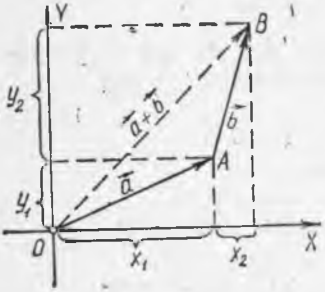
$$x = \text{пр}_{Ox}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{Ox}\vec{a} + \text{пр}_{Oy}\vec{b} = x_1 + x_2;$$

$$y = \text{пр}_{Oy}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{Oy}\vec{a} + \text{пр}_{Oy}\vec{b} = y_1 + y_2.$$

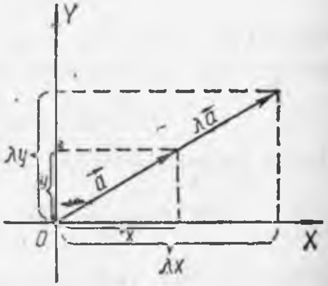
Юқоридаги теоремага кўра $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\{x_1-x_2, y_1-y_2\}$, чунки $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$ деб ёзсак, теорема натижасидан фойдаланиш мумкин.

Бу теорема уч ўлчовли ва ихтиёрий n ўлчовли фазо учун ҳам ўринли.

2.9-теорема. *Агар xOy системада $\overrightarrow{a}$ векторнинг координаталари $\{x, y\}$ бўлса, $\lambda\overrightarrow{a}$ векторнинг шу системадаги координаталари $\{\lambda x, \lambda y\}$ бўлади (30-чизма).*



29-чизма.



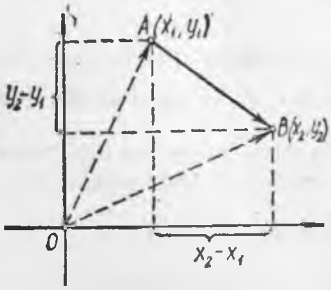
30-чизма.

Исбот. Ҳақиқатан, $\overrightarrow{a}$ ва $\lambda\overrightarrow{a}$ векторлар проекцияларининг хоссасига кўра:

$$\text{пр}_{Ox}(\lambda\overrightarrow{a})=\lambda\,\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{a}=\lambda x,$$

$$\text{пр}_{Oy}(\lambda\overrightarrow{a})=\lambda\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a}=\lambda y.$$

$$\text{Демак, } \lambda\overrightarrow{a}=\{\lambda x, \lambda y\}.$$



31-чизма.

2.10-теорема. *Агар xOy системада $\overrightarrow{AB}$ вектор бошининг координаталари $\{x_1, y_1\}$ ва охирининг координаталари $\{x_2, y_2\}$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари $\{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ бўлади (31-чизма), яъни*

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\}$$

Исбот. 31- чизмага кўра $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Бундан $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. 2.8- теоремага кўра

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\}.$$

27- чизмага Пифагор теоремасини қўллаб,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2.14)$$

формулага эга бўламиз. 28- чизмадан $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторнинг узунлиги учун ушбу

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + x^2 + z^2} \qquad (2.15)$$

формулага эгамиз. Ортонормаланган базисдаги

$$\vec{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\} \Rightarrow \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3,$$

$$\vec{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\} \Rightarrow \vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

векторлар учун қуйидаги формулаларни ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2\} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} =$$

$$= (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 + (z_1 + z_2)\vec{e}_3,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\} \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\vec{e}_3,$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\} \Rightarrow \lambda\vec{a} =$$

$$= (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda y_1)\vec{e}_2 + (\lambda z_1)\vec{e}_3.$$

14- §. Икки нуқта орасидаги масофа. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

а) Икки нуқта орасидаги масофа. Фазода иккита ихтиёрий $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталар орасидаги масофани топиш билан шуғулланамиз. A, B нуқталарни координаталар боши O нуқта билан туташтириб, бу нуқталарнинг радиус-векторларини ясаймиз. Изланаётган масофани $d(A,B)$ билан белгилаймиз, яъни $|\overrightarrow{AB}| = d(A,B)$. Бу ҳолда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

OA ва OB радиус-векторларнинг координаталари мос равишда $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$ бўлгани учун $\overrightarrow{AB}$ векторнинг тўғри бурчакли $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базисга нисбатан координаталари қуйидагича бўлади:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} =$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\vec{e}_3.$$

Энди (2.15) формулани қўллаб,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ни ҳосил қиламиз. $|\overrightarrow{AB}|$ эса A ва B нуқталар орасидаги $d(A,B)$ масофа бўлгани учун

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.16)$$

Агар текисликда иккита $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ нуқта берилган бўлса, улар орасидаги масофа

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.17)$$

формула билан аниқланади. Уни исбот этишда (2.14) формулага асосланилади.

б) кесмани берилган нисбатда бўлиш масаласига тўхталайлик. $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар фазодаги иккита ихтиёрий ҳар хил нуқта бўлсин. Сўнгра C нуқта (AB) тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Агар C нуқта AB кесма ичида ётса, у ҳолда $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{CB}$ коллинеар векторлар бир хил йўналган. Шунинг учун

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB} \quad (2.17')$$

тенгликда C нуқта $[AB]$ кесманинг ички нуқтаси бўлса, $\lambda > 0$, C нуқта $[AB]$ кесманинг ташқи нуқтаси бўлса, $\lambda < 0$ бўлади.

$AB]$ кесмани берилган нисбатда бўлиш масаласи қуйидагича қўйилади: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар ва λ сон берилган. (AB) тўғри чизиқда ётувчи ва (2.17') тенгликни қаноатлантирувчи C нуқтанинг координаталари топилсин.

Равшанки, (2.17) дан $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{CB}|$, бундан

$$\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = |\lambda|. \tag{2.18}$$

Шунинг учун биз қараётган масала (AB) тўғри чизиқда ётиб, $[AB]$ кесмани $\lambda > 0$ бўлганда ичкаридан, $\lambda < 0$ бўлганда ташқаридан λ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталарини топишдан иборатдир.

Қайд қиламизки, $\lambda \neq -1$ бўлади, чунки C нуқта $[AB]$ кесмадан ташқарида $(\lambda < 0)$ ётса, у ҳолда ҳар доим $|\overrightarrow{AC}| > |\overrightarrow{CB}|$ ёки $|\overrightarrow{AC}| < |\overrightarrow{CB}|$ бўлади.

C нуқтанинг Декарт координаталарини $\{x, y, z\}$ билан белгилайлик. У ҳолда (2.17) тенгликка кўра ушбу тенгликлар системасини ҳосил қиламиз:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

$\lambda \neq -1$ эканини ҳисобга олиб, C нуқтанинг координаталари учун бундан қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{2.19}$$

Агар $\lambda = 1$ бўлса, (2.19) дан ушбу формулаларга эга бўламиз.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{2.20}$$

Бу берилган кесма ўртасининг координаталарини беради. Агар $[AB]$ кесма текисликда берилган бўлса, уни λ нисбатда бўлиш [формулалари

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

кўринишда, ниҳоят, $[AB]$ кесма тўғри чизиқда берилган бўлса, тегишли формула

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

кўринишда бўлади.

C нуқтанинг радиус-вектори учун (2.19) дан қуйидаги

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1 + \lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{1 + \lambda}\overrightarrow{OB} \tag{2.21}$$

формула келиб чиқади,

Энди қуйидаги масала билан шуғулланамиз: берилган $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарга мос равишда m_1 ва m_2 массалар жойлаштирилган бўлсин (равшанки, $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0$, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$). Бу массалар системасининг оғирлик маркази C нинг координаталари топилсин.

Физикадан маълумки, C нуқта $[AB]$ кесма ичида ётади ва бу кесмани узунликлари кесма учларига жойлаштирилган массаларга тескари пропорционал кесмаларга ажратади, яъни ушбу $m_1|AC| = m_2|CB|$ тенглик ўринли. $\lambda = \frac{|AC|}{|CB|}$ десак, бундан $\lambda = \frac{|m_2|}{|m_1|}$ келиб чиқади. Шунинг учун (2.19) формулаларга кўра изланаётган C нуқта координаталари учун қуйидаги

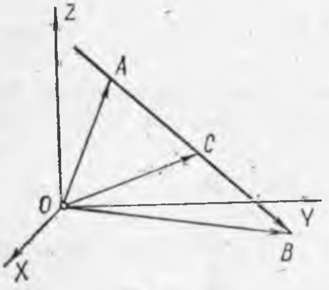
$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

формулаларга эга бўламиз. (2.21) га ўхшаш, бу ҳолда C нуқтанинг радиус-вектори учун

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{OB}$$

формула келиб чиқади (32- чизма).

Агар m_1 ва m_2 массалар тўғри чизиқ ёки текисликда жойлашган бўлса, юқоридаги мулоҳазаларнинг хусусий ҳолига эга бўламиз.



32- чизма.

Энди $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ нуқталар берилган бўлиб, уларга m_1, m_2, m_3 массалар жойлаштирилган бўлсин, бунда $m_1 \geqslant 0$, $m_2 \geqslant 0, m_3 \geqslant 0, m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \neq 0$. Бу массалар системасининг оғирлик марказини топамиз. Физикадан маълумки, бу масалани икки босқичда ҳал қилиш мумкин. Олдин A ва B нуқталарга жойлаштирилган m_1 ва m_2 массалар оғирлик маркази M_1 нинг координаталарини, сўнгра M_1 ва C нуқталарга жойлаштирилган массалар системасининг оғирлик марказини топилади. Авалги масалада кўрилганидек, M_1 нуқта учун

$$x_{M_1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_{M_1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad z_{M_1} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$$

формулаларга эгамиз. Равшанки, M_1 ва C нуқталарга жойлаштирилган m_1+m_2 ва m_3 массалар системаси учун $\lambda = \frac{m_3}{m_1+m_2}$ бўлади. Шунинг учун M_1 ва C нуқталар бўйича қуйидагиларни топамиз:

$$x_M = \frac{x_{M_1} + \frac{m_3}{m_1+m_2} x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

$$y_M = \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}, \quad z_M = \frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

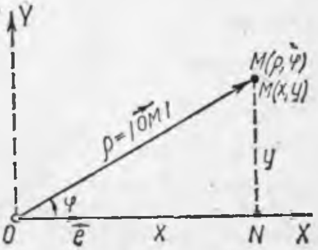
M нуқтанинг радиус-вектори учун қуйидагича бўлишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OB} + \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OC}.$$

5- §. Текисликда қутб координаталар системаси

Текисликда бирор O нуқтани ва боши шу O нуқтада бўлган қўзғалмас l нурни оламиз. Текисликда ихтиёрий M нуқта олиб, уни O билан туташтирамиз. $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ деб белгилайлик. $\overrightarrow{OM}$ вектор билан l нур (йўналтирилган нур) орасидаги бурчакни φ дейлик. Энди M нуқта φ ва ρ миқдорлар орқали ягона усул билан аниқланади. Юқоридаги ясашлар бажарилганда *текисликда қутб координаталар системаси берилган* дейилади. Унда φ *қутб бурчаги*, ρ *нуқтанинг радиуси*, O қутб, (ρ, φ) *нуқтанинг қутб координаталари* дейилади. Йўналтирилган l нур *қутб ўқи* дейилади.

Қутб системасида φ бурчак l нурдан (қутб ўқининг) унинг мусбат йўналишидан соат стрелкасига тескари йўналишда ҳисобланади. $\rho = 0$ бўлганда φ нинг қиймати бир қийматли аниқланмайди. Ҳатто $\rho \neq 0$ бўлганда ҳам шундай. Ҳақиқатан, агар (ρ, φ) билан аниқланган нуқтани олинса, худди шу нуқта $(\rho, \varphi + 2k\pi)$, $k \in Z$ билан ҳам аниқланади. Бу ҳолат ҳатто кўп текширишларда қулайликка олиб келади. Бу қутб



33- чизма.

системасининг Декарт системасидан устунлигини ифода этади.

Агар текисликда координаталар боши қутб билан, абсциссалар ўқининг мусбат қисми эса қутб ўқи билан устма-уст тушадиган Декарт координаталар системаси киритилса (33- чизма), у ҳолда M нуқтанинг (x, y) Декарт координаталари шу нуқтанинг (ρ, φ) қутб координаталари орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi.$$

Ўз навбатида ρ ва φ лар x ва y орқали $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ бўлганда бир қийматли топилади:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ &\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned}\right| \tag{2.22}$$

Қутб координаталар системасида $A(\rho_1, \varphi_1)$ ва $B(\rho_2, \varphi_2)$ *нуқталар берилган бўлса, бу нуқталар орасидаги* $d(A, B)$ *масофа қуйидагича аниқланади:*

$$d(A,B) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{2.23}$$

Агар учбурчакнинг учларидан бири қутб бошида бўлиб, қолган икки учи $A(\rho_1, \varphi_1)$, $B(\rho_2, \varphi_2)$ нуқталарда бўлса, OAB учбурчакнинг юзи қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{2.24}$$

Бу формулани биз қуйидагиларга асосланиб ёздик: тригонометриядан маълумки, агар учбурчакнинг томонларидан бири a, иккинчиси b ва булар орасидаги бурчак φ бўлса, унинг юзи $S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$ формула билан ҳисобланади. Биз бу ерда $a = \rho_1$; $b = \rho_2$; $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ деб қабул қилдик.

Мисоллар. 1. Берилган $A\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$ ва $B\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. A ва B нуқталар орасидаги масофани топиш учун (2.23) формуладан фойдаланамиз. A ва B нуқталарнинг координаталарига қараб $\rho_1 = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{12}$, $\rho_2 = 1$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{12}$ деб белгилаш мумкин. Энди (2.23) га кўра топамиз:

$$d(A,B)=\sqrt{4+1-2\cdot2\cdot1\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)}=\sqrt{5-4\cos\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$ Демак, $d=\sqrt{3}.$

2. *Қутб координаталар системасида ABC учбурчакнинг учлари берилган:*

$$A\left(5;\ \frac{\pi}{12}\right),\ B\left(8;\frac{5\pi}{6}\right),\ C\left(3;\frac{7\pi}{6}\right).$$

Бу учбурчакнинг мунтазам эканини исботланг.

Ечиш. ABC учбурчакнинг мунтазам эканини кўрсатиш учун унинг томонлари узунликларини топамиз. (2.23) формулага кўра:

$$d(A,B)=\sqrt{64+25-80\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)}=\sqrt{49}=7.$$

$$d(B,C)=\sqrt{64+9-48\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)}=\sqrt{73-48\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{73-48\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7,$$

$$d(C,\ A)=\sqrt{25+9-30\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{6}\right)}=\sqrt{34-30\cos\left(-\frac{4\pi}{6}\right)}=$$

$$=\sqrt{34-30\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{49}=7,$$

Шундай қилиб, $d(A,B)=d(B,C)=d(C,A)=7$. Демак $\triangle ABC$ мунтазам.

16- §. Векторлар устида навбатдаги амаллар

1°. **Векторларни скаляр кўпайтириш.** Векторлар устида ҳозирча бажарилган қўшиш, айириш, векторни сонга кўпайтириш амаллари *чизиқли амаллар* дейилиб, векторлар устида бундай амаллар бажариш натижасида яна векторлар ҳосил бўлади.

2.17- таъриф. *Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси деб, бу векторлар узунликларининг улар орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмасига тенг бўлган сонга айтилади* ва $(\vec{a}\ \vec{b})$ ёки $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *билан белгиланади.*

Таърифга кўра

$$(\vec{a},\ \vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\varphi. \qquad (2.25)$$

Скаляр кўпайтма тушунчасининг манбаи механикадир. Ҳақиқатан, агар $\vec{a}$ озод вектор қўйилган нуқтаси $\vec{b}$ векторнинг бошидан охирига силжувчи кучни тасвирласа, бу куч бажарган A иш ушбу тенглик билан аниқланади:

$$A = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Агар $\vec{a}\cdot\vec{b}$ кўпайтмани $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ кўринишда ёзиб,

$$|\vec{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$$ ни назарга олсак,

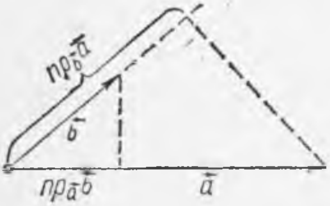
$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$$

ни ва $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ ни назарга олсак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\ \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (2.26)$$



34- чизма.

формулалар ўринли. Бошқача айтганда, *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси улардан бирининг узунлиги миқдори билан иккинчисининг шу вектор йўналишидаги проекцияси кўпайтмасига тенг* (34-чизма).

Агар икки вектор орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$ га тенг бўлса, улар *ортогонал векторлар* дейилади.

Скаляр кўпайтманинг бир қатор энг содда хоссаларини келтирамиз.

2.11- теорема. *Агар $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал бўлади.*

Исбот. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлардан ҳеч бўлмаганда бири нолга тенг бўлса, уни иккинчисига перпендикуляр деб ҳисоблаш мумкин, чунки ноль векторнинг йўналиши аниқмас. Агар бу векторлардан бирортаси ҳам нолга тенг бўлмаса, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ муносабатдан таъриф бўйича қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi = 0 \Rightarrow \left|\begin{matrix}\vec{a}\neq 0, & \vec{b}\neq 0\\ \\ \cos\varphi = 0 & \end{matrix}\right| \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}.$$

2.12- теорема. *Ҳар қандай векторнинг шу векторнинг ўзига скаляр кўпайтмаси бу векторнинг узунлиги квадратига тенг, яъни*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Исбот. Фараз қилайлик, $\vec{a} \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{a})} = 1$. Шунинг учун

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{a})} = |\vec{a}|^2.$$

2.13- теорема. *Скаляр кўпайтма ўрин алмаштириш қонунига бўйсунади, яъни ихтиёрий икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор учун*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

муносабат ўринли.

Исбот. Бу теореманинг исботи скаляр кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади.

2.14- теорема. *Скаляр кўпайтма скаляр кўпайтувчига нисбатан группалаш қонунига бўйсунади, яъни*

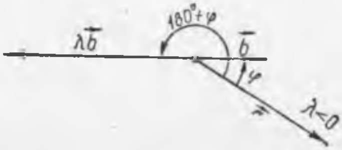
$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

муносабатлар ўринли.

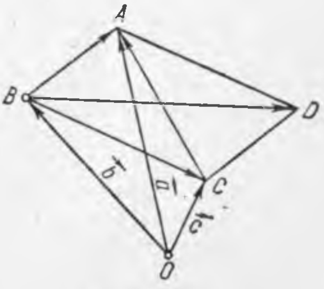
Исбот. Айтайлик, $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ва $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \varphi$ бўлсин. 1) $\lambda > 0$ бўлсин. Равшанки,

$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b},$$
$$\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot |\lambda \vec{b}| \cos \varphi = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b});$$

2) $\lambda < 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\lambda \vec{b}$ векторнинг йўналиши $\vec{b}$ векторнинг йўналишига (35- чизма) қарама-қарши бўлади. Шунинг учун



35- чизма.



36- чизма

$$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\lambda\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\ \lambda\vec{b}})=|\lambda|\cdot|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos(180^\circ+\varphi)=$$
$$=-\lambda\,|\vec{a}|\ |\vec{b}|\,(-\cos\varphi)=\lambda\,(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Эслатиб ўтамизки, агар $\vec{b}'=-\vec{b}$ бўлса, $\vec{a}\cdot\vec{b}'=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$ бўлади, агар $\vec{b}'=-\vec{b}$, $\vec{a}'=-\vec{a}$ бўлса, $\vec{a}'\cdot\vec{b}'=\vec{a}\cdot\vec{b}$ бўлади. Буларнинг исботи таърифдан бевосита келиб чиқади.

2.15- **теорема.** *Скаляр кўпайтма қўшишга нисбатан тақсимот қонунига бўйсунади, яъни ихтиёрий учта* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *ва* $\vec{c}$ *вектор учун ушбу тенглик ўринли:*

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Исбот. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг бошларини бирор O нуқтага келтирайлик (36- чизма). $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ деб белгилаймиз. $\triangle ABC$ ни $ABCD$ параллелограммга тўлдирамиз. Элементар математикадан маълум бўлган ушбу муносабатни ёзамиз:

$$2|\vec{BA}|^2+2|\vec{BC}|^2=|\vec{BD}|^2+|\vec{CA}|^2.$$

Бунда $\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{BD}=\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}$, $\vec{CA}=\vec{a}-\vec{c}$ эканини ҳисобга олсак,

$$2(\vec{a}-\vec{b})^2+2(\vec{c}-\vec{b})^2=[(\vec{a}+\vec{c})-2\vec{b}]^2+(\vec{a}-\vec{c})^2$$

ёки

$$2\vec{a}^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})+2\vec{b}^2+2\vec{c}^2-4(\vec{c}\cdot\vec{b})+2\vec{b}^2=\vec{a}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{c})+$$
$$+\vec{c}^2-4(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2+\vec{a}^2-2(\vec{a}\cdot\vec{c})+\vec{c}^2$$

муносабат ҳосил бўлади. Буни соддалаштириб изланаётган тенгликка эга бўламиз.

2. Скаляр кўпайтманинг Декарт координаталар системасидаги формуласи

2.16- **теорема.** *Декарт координаталар системасида* $\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ ва $\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ *векторлар берилган бўлса, бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг, яъни*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (2.27)$$

Агар $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$, $b\{x_2, y_2\}$ *бўлса,*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

бўлади.

Исбот. Исбот қилиш учун $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси таърифидан фойдаланамиз:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3)(x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3) = x_1x_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) +$$
$$+ x_1y_2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2) + x_1z_2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3) + y_1x_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1) + y_1y_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) +$$
$$+ y_1z_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) + z_1x_2(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1) + z_1y_2(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2) + z_1z_2(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3).$$

Бунда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ва $\vec{e}_3$ ўзаро ортогонал ортлар бўлгани учун

$$(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) = (\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) = (\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3) \Rightarrow |\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_1|\cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_1}) = 1,$$
$$\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 =$$
$$= |\vec{e}_2|\,|\vec{e}_1|\cos(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_1}) = 0$$

бўлади. Шунинг учун юқоридаги тенгликдан изланган формула келиб чиқади.

Эслатма. (2.27) формулани $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси таърифи деб ҳам қараш мумкин. Бу ҳолда ҳам скаляр кўпайтманинг барча хоссаларини осонлик билан исботлаш мумкин. Биз бунга тўхталмаймиз.

Шу билан теорема исбот бўлди.

Масала. $\vec{F} = \{6, -2, 1\}$ кучнинг A (3, 4, —2) нуқтадан тўғри чизиқ бўйлаб B (4 —2, —3) га силжишида бажарган ишини ҳисобланг.

Ечиш. $\overrightarrow{AB} = \{x, y, z\}$ векторнинг координаталарини аниқлаймиз·

$$x = x_2 - x_1,\ y = y_2 - y_1,\ z = z_2 - z_1$$

формулаларга A ва B нуқталарнинг координаталарини қўйсак:

$$x = 4 - 3 = 1,\ y = -2 - 4 = -6,\ z = -3 + 2 = -1.$$

Демак, $\overrightarrow{AB} = \{1, -6, -1\}$. F куч таъсири остида бажарилган иш ўтилган $\overrightarrow{AB}$ йўл билан F кучнинг скаляр кўпайтмасига тенглиги маълум, яъни иш $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ га тенг. Шуни ҳисоблаймиз: $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = (6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)\cdot(\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = 6\cdot 1 - 2\cdot(-6) + 1\cdot(-1) = 17$. Демак, $A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = 17$.

$\vec{a} = \{x, y\}$ векторнинг узунлиги координаталарда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2.28)$$

$\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$ векторнинг узунлиги эса

$$\vec{a}^2 = x^2+y^2+z^2;\quad |\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2.29)$$

формула билан топилади.

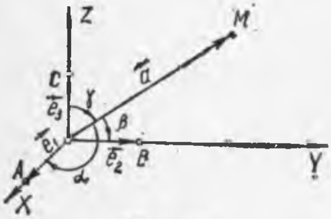
Векторлар орасидаги бурчак координаталари орқали (Декарт системасида), яъни скаляр кўпайтма таърифига кўра осонгина топилади: $\vec{a}=\{x_1,\ y_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2\}$ векторлар учун

$$\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}},$$

$\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ векторлар учун

$$\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (2.30)$$

формулалар ўринли.



37- чизма.

Одатда векторнинг координата ўқлари билан ташкил қилган α, β, γ бурчакларининг косинуслари унинг *йўналтирувчи косинуслари* дейилади (37- чизма).

$\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари унинг координаталари орқали қуйидагича аниқланади;

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad (2.31)$$

Ҳақиқатан, масалан, $\cos\alpha$ учун формула қуйидагича исботланади:

$$x = \text{пр}_{\vec{e}_1}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha;\quad \cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Бирлик векторнинг координаталари унинг йўналтирувчи косинусларидан иборат, яъни агар $|\vec{a}^\circ| = 1$ бўлса, $\vec{a}^\circ = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

(2.31) га кўра

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1 \qquad (2.32)$$

формулани ҳосил қилиш мумкин, яъни *векторнинг йўналтирувчи косинуслари квадратларининг йиғиндиси бирга тенг.*

3°. **Икки векторнинг вектор кўпайтмаси.** Вектор кўпайтма таърифини киритишдан аввал, биз учта ўзаро нокомпланар вектор учлигининг фазода жойлашиши билан боғлиқ бўлган зарур бир тушунчани киритамиз. Шуни айтиб ўтамизки, кейинги пунктларда юритиладиган мулоҳазалар фақат уч ўлчовли фазога доир бўлади.

2.18-таъриф. *Агар компланар $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар боши умумий нуқтага келтирилгандан сўнг $\vec{c}$ векторнинг охиридан (учидан) қаралганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга қараб π дан кичик бурчакка буриш соат стрелкасига тескари бўлса, бу $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ учлик ўнг учлик, акс ҳолда чап учлик дейилади. Чап ёки ўнг учликни ташкил этадиган учлик тартибланган учлик деб юритилади.*

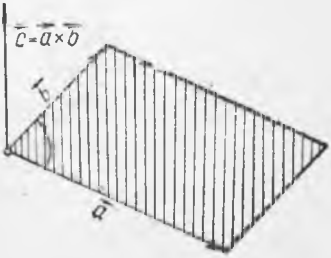
Биз ўнг учликдан фойдаланамиз.

2.19-таъриф. *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси деб қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\vec{c}$ векторга айтилади.*

1) *$\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр (ортогонал);*

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

3) *$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг тартибланган учлиги ўнг учликни ташкил этади* (38- чизма). (*Бу таърифда $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$ деб фараз қилинади*) *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $\vec{a}\times\vec{b}$* ёки $[\vec{a}, \vec{b}]$ *кўринишда ёзилади. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлмаса, у ҳолда $|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ сон $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзига тенг бўлади.*



38- чизма.

Ҳақиқатан, мактаб геометрия курсидан маълумки, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг S юзи унинг томонлари узунликларини шу томонлар орасидаги бурчак синуси билан кўпайтмасига тенг. Демак,

$$S = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда $|\vec{a}\times\vec{b}|=0$, чунки $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ ёки π ва $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$.

Вектор кўпайтма қуйидаги қонунларга бўйсунади.

1. *Вектор кўпайтмада кўпайтувчилар ўрнини алмаштирилса, унинг ишораси ўзгаради, яъни*

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}).$$

Ҳақиқатан ҳам, агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, бу равшан. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас деб фараз қилайлик. Бу ҳолда икки векторнинг вектор кўпайтмаси таърифига кўра $\vec{c}_1 = \vec{a}\times\vec{b}$ ҳамда $\vec{c}_2 = \vec{b}\times\vec{a}$ векторларнинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзига тенг бўлгани учун бир хил; аммо $\vec{c}_1$ ва $\vec{c}_2$ векторлар бир-бирига қарама-қарши йўналган. Демак,

$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}).$$

2. *Вектор кўпайтма скаляр кўпайтувчига нисбатан группалаш қонунига бўйсунади, яъни*

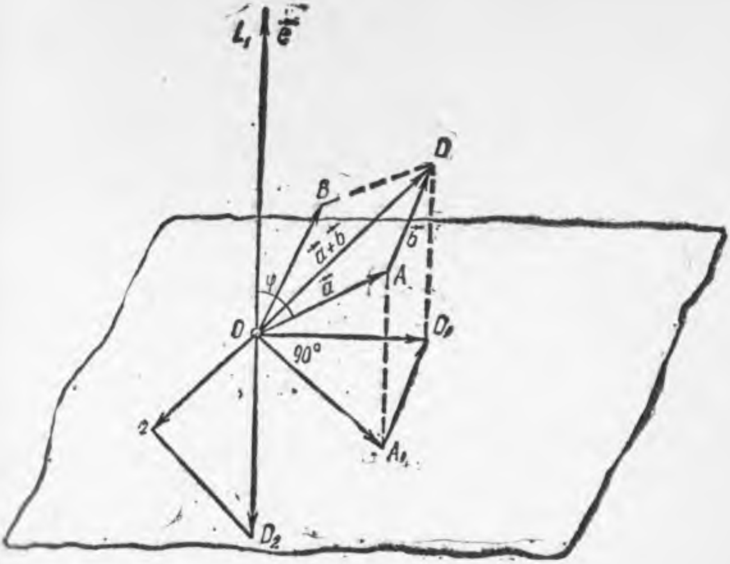
$$\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Бу хоссанинг исботи вектор кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади.

3. *$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси билан $\vec{c}$ векторнинг вектор кўпайтмаси тақсимот қонунига бўйсунади, яъни*

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}.$$

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{c}$ ноль вектор бўлса, бу тенгликнинг бажарилиши равшан. Энди $\vec{c}\neq 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда $\vec{c} = |\vec{c}|\ \vec{e}$ деб ёзиш мумкин. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторларни умумий O нуқтага келтирамиз (39- чизма) ҳамда $\vec{e}$ векторга перпендикуляр бўлган T текисликни ўтказамиз. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлардан параллелограмм чизиб, $\vec{a}+\vec{b}$ йиғинди векторни топамиз. Энди $\vec{a}$ ҳамда $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{OD}$ векторларнинг T текисликка проекцияларини оламиз;



89- чизма.

$$\text{пр}_T\vec{a} = \overrightarrow{OA}_1,\ \text{пр}_T(\vec{a}_1+\vec{b}) = \overrightarrow{OD}_1;$$

$\overrightarrow{OA}_1$ ва $\overrightarrow{OD}_1$ векторларни O нуқта атрофида соат стрелкаси йўналиши бўйича 90° га бурамиз. Натижада $\overrightarrow{OA}_1$ вектор T текисликдаги $\overrightarrow{OA}_2$ векторнинг, $\overrightarrow{OD}_1$ вектор эса $\overrightarrow{OD}_2$ векторнинг вазиятини олиб, уларнинг узунликлари тенг бўлади, яъни

$$|\overrightarrow{OA}_2| = |\overrightarrow{OA}_1|, \quad |\overrightarrow{OD}_1| = |\overrightarrow{OD}_2|.$$

Агар $\overrightarrow{OA}$ вектор билан $\vec{e}$ орасидаги бурчакни φ билан белгиласак,

$$|\overrightarrow{OA}_2| = |\overrightarrow{OA}_1| = |\overrightarrow{OA}|\cos(90° - \varphi) = |\overrightarrow{OA}|\sin\varphi = \vec{a}\times\vec{e}.$$

Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан:

$$\widehat{A_2OL_1} = \widehat{A_2OA} = \frac{\pi}{2}.$$

Шунинг учун $\overrightarrow{OA}_2$ вектор $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OL}_1$ векторлар текислигига перпендикуляр ва $\overrightarrow{OA}_2$ дан қараганда $\overrightarrow{OA}$ дан $\vec{e}$ га йўналиш соат стрелкасига тескари йўналишда бўлади. Шундай қилиб,

$$\overrightarrow{OA_2} = \vec{a} \times \vec{e}.$$

Шунга ўхшаш,

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OD} \times \vec{e} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e};$$

$$\overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{AD} \times \vec{e} = \vec{b} \times \vec{e}.$$

Аммо чизмадан

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2D_2}$$

эканини кўрамиз, яъни

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e} = \vec{a} \times \vec{e} + \vec{b} \times \vec{e}.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $|\vec{c}|$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times |\vec{c}|\,\vec{e} = \vec{a} \times |\vec{c}|\,\vec{e} + \vec{b} \times |\vec{c}|\,\vec{e}.$$

ёки

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Демак, хосса исбот этилди.

Шунга ўхшаш,

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

эканини ҳам исбот қилиш қийин эмас.

Энди вектор кўпайтманинг координата формада (координаталар орқали) ёзилишини кўриб ўтамиз. Аввало координата ўқларининг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортлари учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлишини эслатиб ўтамиз:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = 0, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1. \end{array} \qquad (2.33)$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар Декарт координаталар системасида мос равишда $\{x_1, y_1, z_1\}$ ва $\{x_2, y_2, z_2\}$ координаталарга эга бўлсин, яъни

$$\vec{a}=\{x_1,\ y_1,\ z_1\}\Rightarrow\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$$
$$\vec{b}=\{x_2,\ y_2,\ z_2\}\Rightarrow\vec{b}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3.$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ кўпайтма учун формула чиқарайлик. (2.33) ни ҳамда вектор кўпайтманинг хоссаларини эътиборга олиб топамиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_1x_2(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)+y_1x_2(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)+z_1x_2(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)+$$
$$+x_1y_2(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)+y_1y_2(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)+z_1y_2(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)+x_1z_2(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)+$$
$$+y_1z_2(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)+z_1z_2(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)$$

ёки

$$\vec{a}\times\vec{b}=-y_1x_2\vec{e}_3+z_1x_2\vec{e}_2+x_1y_2\vec{e}_3-z_1y_2\vec{e}_1-x_1z_2\vec{e}_2+y_1z_2\vec{e}_1.$$

Бир хил ортларга эга бўлган қўшилувчиларни группалаб ёзамиз:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{e}_1-(x_1z_2-x_2z_1)\vec{e}_2+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{e}_3=$$
$$=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{e}_1+\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{e}_3 \qquad (2.34)$$

Буни яна ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (2.35)$$

(2·35) формуладан қуйидаги икки тасдиқ келиб чиқади.

1. (икки векторнинг коллинеар бўлиш шарти). $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторлар коллинеар бўлиши учун*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исботи равшан.

2. (учбурчак юзининг формуласи). $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторларга учбурчак ясалган бўлсин, у ҳолда бу учбурчакнинг юзи:*

$$S=\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix} \qquad .(2.36)$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар xOy текисликда ётган хусусий ҳолни алоҳида таъкидлаб ўтамиз. Бу ҳолда $z_1=z_2=0$ ва

$$S=\frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,|x_1y_2-y_1x_2| \qquad (2.37)$$

формулага эгамиз.

Масала. Учлари $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзини ҳисобланг.

Ечиш. ABC учбурчакнинг юзи $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторлардан тузилган параллелограмм юзининг ярмига тенг, яъни

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

$\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг координаталарини ёзамиз:

$$\overrightarrow{AB}=2\vec{e}_1-2\vec{e}_2-3\vec{e}_3,\quad \overrightarrow{AC}=4\vec{e}_1+6\vec{e}_3$$

Энди $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ векторларнинг вектор кўпайтмасини топамиз:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=4(-3\vec{e}_1-6\vec{e}_2+2\vec{e}_3).$$

Бу векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=4|-3\vec{e}_1-6\vec{e}_2+2\vec{e}_3|=4\sqrt{3^2+6^2+2^2}=28.$$

Демак,

$$S_{\Delta\,ABC}=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=14 \text{ кв. бирлик.}$$

4°. **Вектор кўпайтмани механикага татбиқ қилиш.** *а) куч моменти.* Q қаттиқ жисм берилган бўлсин ва бу жисмнинг битта, масалан, O нуқтаси ҳаракатланмайдиган қилиб маҳкамланган бўлсин. Агар Q жисмнинг бошқа P нуқтасига $\vec{F}$ куч қўйилса, у ҳолда айлантирувчи момент ёки куч моменти ҳосил бўлади. Механикадан маълум бўлган таърифга кўра куч моменти ($\vec{m}$ вектор) ушбу формула бўйича топилади:

$$\vec{m}=\vec{r}\times\vec{F},\ \text{бунда}\ \vec{r}=\overrightarrow{OP}.$$

Энди P нуқтага иккита $\vec{F}_1$ ва $\vec{F}_2$ куч қўйилган бўлсин ва бу кучларнинг йиғиндиси $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ бўлсин. Агар $\vec{m}$, $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ мос равишда $\vec{F}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ кучларнинг моментлари бўлса, у ҳолда табиийки,

$$\vec{m}=\vec{m}_1+\vec{m}_2$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{r} \times \vec{F}_1) + (\vec{r} \times \vec{F}_2) = \vec{m}_1 + \vec{m}_2;$$

б) **Тангенциал ва бурчак тезлик.** Бирор P нуқта l тўғри чизиқ атрофида узунлик бўйича ўзгармас $\vec{v}(t)$ тангенциал тезлик билан айланма ҳаракат қилаётган бўлсин (тангенциал тезлик $\vec{v}(t)$ вектордан иборат бўлиб, бу вектор вақтнинг ҳар бир моментида P нуқта траекториясига уринма бўйлаб йўналган, бизнинг ҳолда ($|\vec{v}(t)| = v_0 = \text{const} > 0$):

$$r_0 = |\vec{r}(t)| \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}(t)})$$

(бунда $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ вектор l тўғри чизиқда ётади). r_0 миқдор P нуқтадан чизиққача бўлган масофа бўлгани учун t вақтга ва O нуқтанинг l тўғри чизиқдаги ҳолатига боғлиқ бўлмаган мусбат ўзгармасдир.

Энди қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $\vec{\omega}$ векторни қараймиз: 1) $|\vec{\omega}| = \frac{v_0}{r_0}$; 2) вақтнинг ҳар қандай моментида $\vec{\omega}$, $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ векторлар ўнг учликни ташкил қилади.

Ҳар қандай t да, бундан ташқари, $\vec{v}(t)$ вектор $\vec{\omega}$, $\vec{r}(t)$ векторларга перпендикуляр ва

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}(t)| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}(t)| \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}(t)}) = \frac{v_0}{r_0} \cdot r_0 = v_0 = |\vec{v}(t)|$$

бўлгани учун

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t).$$

Шундай қилиб, агар ҳаракатланаётган нуқтанинг тангенциал тезлиги узунлик бўйича ўзгармас бўлса, нуқтанинг l тўғри чизиқ атрофида айланма ҳаракати l да ётувчи бирор $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ўзгармас вектор билан тўла характерланади.

$\vec{\boldsymbol{\omega}}$ вектор қаралаётган ҳаракатнинг *бурчак тезлиги* дейилади. Шу нарса муҳимки, l ўқ атрофида $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \ldots, \vec{\omega}_n$ бурчак тезликлар билан кетма-кет бир қанча айланма ҳаракат бажарилаётган бўлса, у ҳолда натижавий ҳаракат ҳам l ўқ атрофида $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n$ тезликли айланма ҳаракат бўлади.

Юқоридаги формулага кўра

$$\vec{v}(t)=\vec{\omega}\times\vec{r}(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{\omega}_i\right)\times\vec{r}(t)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\omega}_i\times\vec{r}(t)=\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i(t).$$

Масала. $B(1,\ 2,\ 3)$ нуқтага $\vec{F}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$ куч қўйилган. Бу кучнинг $A\ (3,\ 2,\ -1)$ нуқтага нисбатан моменти топилсин.

Ечиш. $\vec{AB}$ векторни аниқлайлик: $\vec{AB}=-2\vec{e}_1+4\vec{e}_3$. A нуктага қўйилган $\vec{F}$ кучнинг моменти

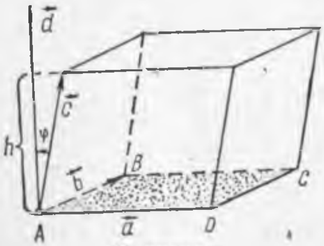
$$\vec{m}_A\ (\vec{F})=\vec{AB}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ F_x & F_y & F_z\\ (AB)_x & (AB)_y & (AB)_z\end{vmatrix}$$

формула билан топилади. Бу формулага асосан қуйидагини топамиз:

$$m_A\,(\vec{F})=\vec{AB}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=-8\vec{e}_1-12\vec{e}_2-4\vec{e}_3.$$

5°. Векторларнинг аралаш кўпайтмаси. 2.20-таъриф. *$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар тартибланган учлигининг аралаш кўпайтмаси деб, $\vec{a}\times\vec{b}$ вектор билан $\vec{c}$ векторнинг скаляр кўпайтмасига тенг сонни айтилади ва $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ёки $[\vec{a},\ \vec{b}]\cdot\vec{c}$ каби белгиланади.*

Аралаш кўпайтманинг миқдор нуқтаи назардан маъносини англаш учун унинг геометрик маъносини текширамиз.



40- чизма.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлмаган векторлар бўлсин. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ деб белгиласак, $\vec{d}$ вектор миқдори $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлардан ясалган параллелограмм юзига тенг (40-чизма) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}==\vec{d}\cdot\vec{c}$ бўлгани учун скаляр кўпайтма таърифига кўра $\vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{d}|\ \text{пр}_{\vec{d}}\,\vec{c}$

Аммо $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}=h$ миқдорнинг модули, яъни $|h|$ сон $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларга ясалган параллелепипеднинг баландлигини англатади ($\vec{c}$ билан $\vec{d}$ орасидаги ўткир бурчак бўлса, h

плюс ишора билан, ўтмас бурчак бўлса, минус ишора билан олинади). Шундай қилиб, $\vec{d}\cdot\vec{c} = |\vec{d}|\ \text{пр}_{\vec{d}}\,\vec{c} = \pm|\vec{d}|\cdot h.$

Аралаш кўпайтманинг абсолют қиймати шу $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *векторларга ясалган параллелепипед ҳажмига тенг, яъни* $V = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$.

Энди аралаш кўпайтманинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1. *Кўпайтмада икки қўшни векторнинг ўринлари алмаштирилса, аралаш кўпайтманинг ишораси тескарига алмашади, яъни қуйидаги тенгликлар ўринли:*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

Бу тенгликларнинг ҳар бири бевосита аралаш кўпайтма таърифи ва геометрик маъносидан фойдаланиб исботланади.

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *векторларнинг ўринлари «доиравий циклда» алмаштирилса, аралаш кўпайтма ўз ишорасини ўзгартирмайди, яъни ушбу тенгликлар ўринли:*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда ҳосил бўладиган векторлар асосий система векторлари $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ билан ҳамма вақт бир хил тартибланган бўлади. Бундан юқоридаги тенгликларнинг келиб чиқишини кўриш қийин эмас.

3. *Агар* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *векторлардан исталган иккитаси бир-бирига тенг ёки параллел (коллинеар) бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар параллел бўлсин дейлик. Бу ҳолда $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$ дейиш мумкин ва уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг, яъни $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\lambda\vec{a} = \lambda(\vec{a}\times\vec{a}) = \vec{0}$. Шунинг учун $(\vec{a}\times\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = 0$ бўлади.

Агар $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ бўлса, қуйидагига эгамиз: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = (\lambda\vec{a}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{a})\cdot\vec{c} = \lambda(\vec{0}\cdot\vec{b}) = 0.$

4. *Агар* $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ *векторлар ўзаро компланар векторлар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг.*

Ҳақиқатан, бу ҳолда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар бир текисликда ётади. Шунинг учун $\vec{a}\times\vec{b}$ вектор кўпайтма аниқлайдиган $\vec{d}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ётган текисликка перпендикуляр, демак, $\vec{c}$ векторга перпендикуляр. Перпендикуляр векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенглигидан $\vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ келиб чиқади. Хосса исбот этилди.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, агар $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ бўлса, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ вектор билан $\vec{c}$ вектор ўзаро перпендикуляр бўлади. Аммо $\vec{a}\times\vec{b}$ вектор кўпайтма $\vec{a}$ векторга ҳам, $\vec{b}$ векторга ҳам перпендикуляр бўлгани учун $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар векторлардир.

Шундай қилиб, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *векторларнинг компланар бўлиши учун бу векторлардан тузилган ихтиёрий аралаш кўпайтманинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.*

6°. **Скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмаларнинг татбиқлари.** 1-масала. Берилган икки векторга компланар бўлган векторни аниқлаш.

Ечиш. Берилган (коллинеар бўлмаган) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга компланар бўлган ҳар қандай $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича ёйилади, яъни уларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади:

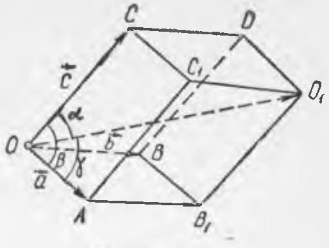
$$\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b},\ \lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0.$$

Агар $\vec{a}=\{x_1, y_1\}$, $\vec{b}=\{x_2, y_2\}$, $\vec{c}=\{x_3, y_3)$ десак, шартга кўра $\vec{a}\neq\vec{b}$, $\vec{c}\neq 0$. Демак, $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\neq 0$ ва

$$\begin{cases} \lambda_1\ x_1+\lambda_2\,y_1=z_1, \\ \lambda_1\ x_2+\lambda_2\,y_2=z_2 \end{cases}$$

бир жинсли бўлмаган чизиқли системадан λ_1 ва λ_2 нинг ягона қиймати аниқланади.

2-масала. Параллелепипеднинг O учидан чиқувчи OA, OB, OC қирраларининг узунликлари a, b, c ва шу учдаги α, β, γ текис бурчаклари берилган (41-чизма). Шу O учдан чиқувчи диагоналнинг узунлигини топиш талаб қилинади.



41-чизма.

Ечиш. Масала шартида кўрсатилган $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ ни $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ билан белгилаймиз. У ҳолда диагональ билан устма-уст тушувчи $\vec{R}=\vec{OO_1}$ вектор қуйидагича аниқланади:

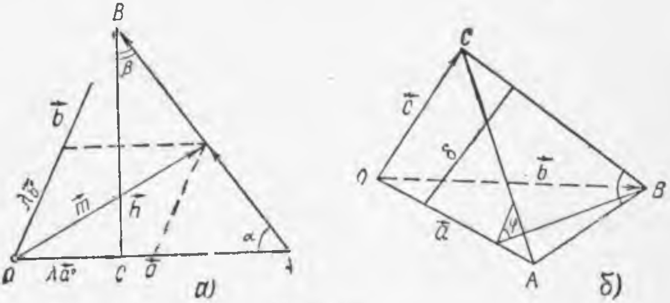
$$\vec{R}=\vec{OA}+\vec{BB_1}+\vec{O_1B_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

Бу ифоданинг ҳар икки томонини квадратга кўтариб (яъни $\vec{R}\cdot\vec{R}$ скаляр кўпайтмани қараб) қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\vec{R}^2=a^2+b^2+c^2+2\ (\vec{a}\cdot\vec{b})+2\ (\vec{a}\cdot\vec{c})+2\ (\vec{b}\cdot\vec{c})=$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab\ \cos\gamma+2ac\ \cos\beta+2bc\ \cos\alpha,$$

бунда cosα, cosβ, cosγ — йўналтирувчи косинуслар.



42-чизма.

Демак, диагоналнинг узунлиги $|\vec{R}|$ учун ушбу формулага эгамиз:

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab\ \cos\gamma+2ac\ \cos\beta+2bc\ \cos\alpha}.$$

3-масала. OAB учбурчакда O учидан чиқувчи $\vec{OA}=\vec{a}$, $|\vec{a}|=a$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $|\vec{b}|=b$ векторлар берилган. Бу учбурчакнинг барча элементлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ёрдамида ифодалансин (42-чизма).

Ечиш. а) AB томоннинг узунлиги:

$$|\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})};$$

б) $\widehat{OAB}$ бурчак қуйидагича аниқланади:

$$\cos(\widehat{OAB}) = \frac{-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}-\vec{a}|} = \frac{\vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\sqrt{a^2+b^2-2\,(\vec{a}\cdot\vec{b})}};$$

в) Бу учбурчакнинг юзи S қуйидагича аниқланади:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2};$$

г) B учдан OA томонга туширилган h баландликни аниқлайлик:

$$\vec{h} = \vec{OC} - \vec{b} = \vec{a}^0\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} - \vec{b},\ |\vec{a}^0| = 1.$$

Бундан

$$h = \sqrt{\vec{h}^2} = \sqrt{(\vec{a}^0\ \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} - \vec{b})^2} =$$

$$= \sqrt{(\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b})^2 + (\vec{b})^2 - 2\ \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}\,(\vec{a}^0\cdot\vec{b})};$$

е) O учдан чиқувчи биссектрисани топайлик. Унга мос векторни $\vec{m}$ деб белгиласак, бир томондан, $\vec{m} = \lambda\,(\vec{a}^0 + \vec{b}^0)$, $\lambda > 0$, иккинчи томондан равшанки

$$\vec{m} = \vec{a} + \mu\,(\vec{b} - \vec{a}),\ 0 < \mu < 1$$

муносабатларни ёзиш мумкин (42-чизма). $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{a}$, $\vec{b}^0 = \frac{\vec{b}}{b}$ эканини ҳисобга олиб, $\lambda\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}\right) = \vec{a} + \mu\,(\vec{b} - \vec{a})$ тенгликдан $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ олдидаги коэффициентларни мос равишда тенглаштирсак, $\lambda a = ab - ab\mu$, $\lambda b = ab\mu$ ёки $\lambda a = ab - \lambda b$ ҳосил бўлади. Бундан $\lambda b = \frac{ab}{a+b}$. Шунинг учун $\vec{m} = \frac{ab}{a+b}\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}\right)$ га эга бўламиз. Демак,

$$m = \sqrt{\vec{m}^2} = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2ab\,(\vec{a}\cdot\vec{b})}}{a+b}.$$

Бошқа элементларни топишни ўқувчига топширамиз.

4-масала. $OABC$ тетраэдр берилган. Тетраэдрнинг баъзи элементлари унинг O учидан чиқувчи $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ векторлар ёрдамида ифодалансин (42-чизма).

а) AB қирранинг узунлиги:

$$|\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})};$$

б) $\widehat{ABC}$ текис бурчак:

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a} - \vec{b}| \cdot |\vec{c} - \vec{b}|} =$$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})}\sqrt{c^2 + b^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{c})}}.$$

в) OA қиррадаги икки ёқли φ бурчак:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{c})}{|\vec{a} \times \vec{b}|\,|\vec{a} \times \vec{c}|} =$$

$$= \frac{(\vec{b} \cdot \vec{c})a^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \cdot \sqrt{a^2 c^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2}}.$$

Энди аралаш кўпайтмани $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг координаталари орқали ифодалашга ўтамиз. Декарт координаталар системасига нисбатан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг ёйилмаси берилган бўлсин:

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \Rightarrow \vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3,$$
$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \Rightarrow \vec{b} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3,$$
$$\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\} \Rightarrow \vec{c} = x_3 \vec{e}_1 + y_3 \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_3.$$

У ҳолда

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Шунинг учун

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Шундай қилиб, изланган ифода ушбу кўринишда бўлади:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.38}$$

(2.38) формуладан келиб чиқадиган баъзи натижаларни келтирамиз.

1-натижа. *$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлиши учун*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

2-натижа. *Икки векторнинг ўрнини алмаштириш натижасида аралаш кўпайтманинг ишораси ўзгаради.*

Ҳақиқатан, икки векторнинг ўрнини алмаштириш (2.38) детерминантда икки сатр элементлари ўрнини алмаштиришга олиб келади. Аммо бунда детерминант ишораси тескарига ўзгариши 1-бобдан маълум:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}.$$

3-натижа. *Агар $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ бўлиб, бу векторлар компланар бўлмаса, у ҳолда уларга қурилган параллелепипед ҳажми V учун $V = \pm\Delta$ (бунда Δ (2.38) детерминантдан иборат) формула ўринли. Унда мусбат ишора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ўнг учликни, минус ишора шу $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чап учликни ташкил этганда олинади.*

Параллелепипед ҳажмини қисқача $V = |\Delta|$ деб ёзиш мумкин.

Масалалар. 1. Учлари $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ нуқталардан иборат бўлган тетраэдр берилган. Бу тетраэдрнинг ҳажми топилсин.

Ечиш. $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ векторларни аниқлаймиз. Равшанки, бу векторларнинг аралаш кўпайтмасининг $\frac{1}{6}$ қисми абсолют қиймат бўйича тетраэдрнинг ҳажмига тенг бўлади. Энди $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$ векторларни ёзамиз:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - y_1)\vec{e_2} + (z_2 - z_1)\vec{e_3},$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1)\vec{e_1} + (y_3 - y_1)\vec{e_2} + (z_3 - z_1)\vec{e_3},$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1)\vec{e_1} + (y_4 - y_1)\vec{e_2} + (z_4 - z_1)\vec{e_3}.$$

(2.38) га кўра

$$V_{\text{тетраэдр}} = \frac{1}{6}\ \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

2. Учлари A (1, 2, 3), B (— 2, 4, 1), C (7, 6, 3) ва D (4, — 3, 1) нуқталардан иборат бўлган параллелепипеднинг ҳажми топилсин.

Ечиш. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ва $\overrightarrow{AD}$ векторларни ёзамиз:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3} \Rightarrow \{-3,\ 2,\ -2\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 6\vec{e_1} + 4\vec{e_2} \Rightarrow \{6,\ 4, 0\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 3\vec{e_1} - 5\vec{e_2} - 4\vec{e_3} \Rightarrow \{3, -5, -4\}.$$

(2.38) га асосан

$$V = \mathrm{mod} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 180 \text{ куб бирлик.}$$

2-бобга доир машқлар

1. Ушбу тенгликларда номаълум $\vec{x}$ векторни топинг: а) $\vec{a} + \vec{x} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$.

2. $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ тўғри бурчакли параллелепипедда берилган $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ векторларга кўра а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 2) $-\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ векторларни ясанг.

3. Ихтиёрий $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар учун

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

муносабатнинг ўринли бўлишини кўрсатинг. Векторлар қандай шартни қаноатлантирганда бу муносабатда тенглик ишораси бўлади?

4. Ихтиёрий ABC учбурчакда E ва F нуқталар мос равишда AB ва AC томонларнинг ўртаси бўлсин. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ векторларни $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ векторлар орқали ифодаланг.

Жавоб: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = 2(\vec{b} - 2\vec{a})$; $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{b} - \vec{a})$.

5. Асоси учбурчакдан иборат бўлган $SABC$ пирамидада $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$ ва $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Агар M нуқта ΔABC нинг оғирлик маркази бўлса, $\overrightarrow{SM}$ векторни бу векторлар орқали ифода қилинг.

Жавоб: $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

6. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро 60° ли бурчак ҳосил қилади ва $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 8$. $|\vec{a} + \vec{b}|$ ва $|\vec{a} - \vec{b}|$ векторларни ҳисобланг.

Жавоб: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

7. Агар $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$ ва $(\vec{a} - 4\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 2\vec{b})$ эканлиги маълум бўлса, нолга тенг бўлмаган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро қандай бурчак ҳосил қилади?

Жавоб: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$.

8. $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 15$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 96$ бўлса, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторнинг узунлигини топинг.

Жавоб: $(\vec{\imath} \times \vec{b}) = 72$.

9. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ шартни қаноатлантиради. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ эканини исботланг.

10. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ихтиёрий векторлар бўлсин. $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 = (ab)^2$ эканини кўрсатинг.

11. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ ихтиёрий векторлар. $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$ ва $\vec{c} - \vec{a}$ векторлар ўзаро компланар бўлишини исботланг.

Кўрсатма. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларга ясалган параллелепипеддан фойдаланинг.

12. Текисликда A (3,3), B (—3,3), C (—3,0) нуқталарга координаталар бошидан $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ва $\overrightarrow{OC}$ кучлар қўйилган. Уларнинг тенг таъсир этувчиси $\overrightarrow{ON}$ ни ясанг ва унинг координата ўқларидаги проекцияларини ҳамда катталигини топинг.

Жавоб: $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; $\text{пр}_{Ox}\,\overrightarrow{ON} = -3$; $\text{пр}_{Oy}\,\overrightarrow{ON} = 6$; $|\overrightarrow{ON}| = 3\sqrt{50}$.

13. $\vec{a} = \{5,4\}$ вектор бошининг координаталари A (—2,3) бўлса, унинг охирининг координаталарини аниқланг.

14. $\vec{a}=\{1,-2\}$, $\vec{b}=\{0{,}5;-1\}$, $\vec{c}=\{2{,}0\}$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларнинг координаталарини аниқланг: а) $\frac{\vec{c}-2\vec{b}}{2}$; б) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\vec{c}$.

Жавоб: а) $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$ б) $\left(-\frac{7}{4},-\right)\frac{1}{2}$.

15. $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$ параллелепипед тўртта учининг координаталари $A\ (2,-1{,}1)$, $B\ (1,\ 3,\ 4)$, $C\ (4,\ 2,\ 0)$, $D\ (6{,}0{,}1)$ берилган. Қолган учларнинг координаталарини топинг.

Жавоб: $B_1\ (3{,}6{,}3)$; $C_1\ (7{,}7{,}3)$, $C\ (5{,}4{,}4)$, $D_1\ (8{,}3{,}0)$.

16. Тўртбурчак учларининг координаталари берилган: $A\ (4{,}0{,}8)$, $B\ (5{,}2{,}6)$, $C\ (3{,}1{,}4)$, $D\ (2,-1{,}6)$. Шу тўртбурчакнинг квадрат эканини кўрсатинг.

17. $\vec{AB}$ векторнинг боши $A\ (-1,\ 2,\ 4)$ ва уни тенг иккига бўлувчи нуқта $C\ (2{,}0{,}2)$ бўлса, B учининг координаталарини топинг.

Жавоб: $B\ (8,-4,-2)$.

18. Учлари $A\ (1{,}1{,}1)$, $B\ (5{,}1,-2)$, $C\ (7{,}9{,}1)$ нуқталарда бўлган ΔABC берилган. A бурчак биссектрисаси CB томон билан D нуқтада кесишади. D нуқтанинг координаталарини аниқланг.

Жавоб: $D\ \left(\frac{17}{3},\ \frac{11}{3},\ -1\right)$.

19. Қутб координаталар системасида қуйидаги нуқталарни ясанг: $N_1\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$, $N_2\left(1,\ \frac{5\pi}{3}\right)$, $N_3\left(\frac{1}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$, $N_4\left(4,\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

20. $N_1\ \left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $N_2\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$, $N_3\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$, $N_4\left(3,-\frac{\pi}{3}\right)$ нуқталар учун: а) қутбга нисбатан симметрик бўлган нуқталарни; б) қутб ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқталарни топинг.

Жавоб: а) $N_1'\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)$, $N_2'\left(3,-\frac{2\pi}{3}\right)$, $N_3'\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)$, $N_4'\left(3,\ \frac{2\pi}{3}\right)$, б) $N_1''\left(2,-\frac{\pi}{4}\right)$, $N_2''\left(3,-\frac{\pi}{3}\right)$, $N_3''\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)$, $N_4''\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$.

21. Қутб координаталар системасига нисбатан қуйидаги нуқталар берилган: $A\ \left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$. Шу нуқталарнинг тўғри бурчакли Декарт координаталарини топинг.

Жавоб: $A\ (1,\ \sqrt{3})$; $B\ (-1,\ 1)$; $C\ (0{,}5)$; $D\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$.

22. $\vec{a}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2+7\vec{e}_3$, $\vec{b}=2\vec{e}_1-5\vec{e}_2+2\vec{e}_3$ векторлар берилган. Бу векторларнинг скаляр кўпайтмасини аниқланг.

Жавоб: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

23. $\vec{a}=m\vec{e}_1+3\vec{e}_2+4\vec{e}_3$ ва $\vec{b}=4\vec{e}_1+m\vec{e}_2-7\vec{e}_3$ векторлар берилган. m нинг қандай қийматларида бу векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади?

Жавоб: $m=4$.

24. Учлари $A\ (-1{,}5{,}1)$, $B\ (1{,}1, -2)$ ва $C\ (-3{,}3{,}2)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. AC томонни давом эттиришдан ҳосил бўлган ташқи бурчакни аниқланг.

Жавоб: $\varphi = \arc\cos\left(\frac{4}{9}\right)$.

25. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар координаталари билан берилган:

$$\vec{a} = \{1, -4,\ 8\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3,$$
$$\vec{b} = \{4,\ 4, -2\} \Rightarrow \vec{b} = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$$
$$\vec{c} = \{2,\ 3,\ 6\} \Rightarrow \vec{c} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3.$$

$\vec{b} + \vec{c}$ векторнинг $\vec{a}$ вектордаги проекциясини топинг.

Жавоб: $\text{пр}_{\vec{a}}\ (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{10}{9}$.

26. Ушбу векторлар берилган:

$$\vec{a} = \{1,\ 1,\ 2\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$
$$\vec{b} = \{1, -1,\ 4\} \Rightarrow \vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

$\text{пр}_{\vec{b}}\ \vec{a}$ ва $\text{пр}_{\vec{a}}\ \vec{b}$ ни аниқланг.

Жавоб: $\text{пр}_{\vec{b}}\ \vec{a} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\text{пр}_{\vec{a}}\ \vec{b} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

27. $\vec{a} = \{5,\ 1\}$ векторнинг $\vec{b} = \{5, -12\}$ вектор йўналишидаги ўққа туширилган проекциясини аниқланг.

Жавоб: $\text{пр}_{\vec{b}}\ \vec{a} = 1$.

28. $\vec{a} = \{2,\ 3,\ 5\}$ ва $\vec{b} = \{1,\ 2,\ 1\}$ векторлар берилган. Бу векторларнинг вектор кўпайтмасини топинг.

Жавоб: $\vec{a} \times \vec{b} = 7\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

29. $\vec{a} = 6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ ва $\vec{b} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3$ векторлардан ясалган параллелограммнинг юзини топинг.

Жавоб: $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 49$ кв. бирлик

30. Учлари $A\ (1,\ 2,\ 0)$, $B\ (3,\ 0, -3)$ ва $C\ (5,\ 2,\ 6)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Жавоб: $S = \frac{1}{2}\ |\vec{a} \times \vec{b}| = 14$ кв. бирлик.

31. $\overrightarrow{AB} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ ва $\overrightarrow{BC} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ векторлар ΔABC нинг томонлари. AD баландликнинг узунлигини ҳисобланг.

Жавоб: $|\overrightarrow{AD}| = \frac{2S_{ABC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$.

32. $N\ (1,\ 2,\ 3)$ нуқтага $\vec{F} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ куч қўйилган. Бу кучнинг $A\ (3,\ 2, -1)$ нуқтага нисбатан моментини топинг.

Жавоб: $m_A\ \vec{F} = \overrightarrow{AN} \times \vec{F} = -8\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - 4\,\vec{e}_3$.

33. $A(2,1,-3)$ нуқтага $\vec{F}=\{3,4,-2\}$ куч қўйилган. Бу кучнинг координаталар бошига нисбатан моменти ва координата ўқлари билан ҳосил қилган бурчакларини топинг.

Жавоб: $m_0\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}=-10\vec{e}_1+13\vec{e}_2+11\vec{e}_3$;

$$\cos\alpha=-\frac{10}{\sqrt{390}};\qquad \cos\beta=\frac{13}{\sqrt{390}};\cos\gamma=\frac{11}{\sqrt{390}}.$$

34. $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2-\vec{e}_3$; $\vec{c}=3\vec{e}_1-4\vec{e}_2+7\vec{e}_3$ векторларнинг аралаш кўпайтмасини ҳисобланг.

Жавоб: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=33$.

35. $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{b}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3$, $\vec{c}=3\vec{e}_1-4\vec{e}_2+7\vec{e}_3$ векторларнинг компланарлигини исботланг.

36. Учлари $A(1,2,3)$, $B(2,4,1)$, $C(7,6,3)$ ва $D(2,-3,-1)$ нуқталарда бўлган пирамида берилган. Шу пирамида учун қуйидагиларни топинг: а) AB, AC, AD қирраларнинг узунлигини; б) ABC ёқнинг юзини; в) AD ва AC қирралар орасидаги бурчакни; г) пирамиданинг ҳажмини.

Жавоб: а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{13}$, $|\overrightarrow{AD}|=5\sqrt{2}$;

б) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=14$ кв. бирлик;

в) $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right)$;

г) $V_{\text{пир}}=30$ куб бирлик.

37. Учлари қуйидаги нуқталарда бўлган тетраэдрнинг ҳажмини ҳисобланг: $O(-5,-4,8)$, $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$ ва $C(6,3,7)$.

Жавоб: $V_{\text{т.эдр.}}=50\frac{3}{154}$ куб бирлик.

38. $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4-4)$ ва $D(1,5,0)$ нуқталарнинг бир текисликда ётишини исботланг.

39. Қуйидаги $\vec{a}=\{1,3,0\}$; $\vec{b}=\{5,10,0\}$; $\vec{c}=\{4,-2,6\}$, $\vec{a}=\left\{\frac{21}{2},17,3\right\}$ векторларнинг чизиқли боғлиқлигини исботланг ва боғланиш коэффициентларини топинг.

Жавоб: $2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}-2\vec{d}=0$.

40. $\vec{a}=\{2,3,-1\}$; $\vec{b}=\{0,1,4\}$; $\vec{c}=\{1,0,-3\}$ векторлар берилган. Қуйидаги векторларнинг координаталарини аниқланг:

а) $\vec{p}_1=2\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$;

б) $\vec{p}_2=\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c}$;

в) $\vec{p}_3=\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$.

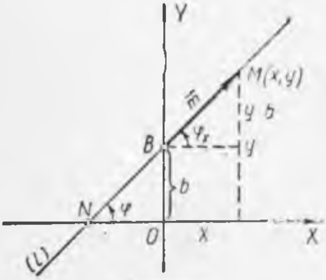
Жавоб: а) $\vec{p}_1\{2,5,0\}$; б) $\vec{p}_2=\{-1,2,4\}$;

в) $\vec{p}_3=\{5,5,-2\}$.

3- БОБ. ТЕКИСЛИКДАГИ БИРИНЧИ ВА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

17- §. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

Текисликда Декарт координаталар системаси берилган бўлиб, бу системада *Ox* ўқни *N* нуқтада кесиб ўтувчи ихтиёрий *l* тўғри чизиқ берилган бўлсин (43- чизма). *Ox* ўқни *N* нуқта атрофида соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналишда *l* тўғри чизиқ билан устма-уст тушгунча айлантиришдан ҳосил бўлган φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ бурчак *l* тўғри чизиқ билан *Ox* ўқ орасидаги *бурчак* дейилади. Агар *l* тўғри чизиқ *Ox* ўққа параллел бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ билан *Ox* ўқ орасидаги бурчак нолга тенг деб ҳисобланади. Кейинги мулоҳазаларимизда аввал $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ҳолни қараймиз.



43- чизма.

Агар *l* билан *Ox* ўқ орасидаги φ бурчак ва *l* тўғри чизиқнинг *Oy* ўқ билан кесишиш нуқтасининг ординатаси *b* маълум бўлса, у ҳолда *l* тўғри чизиқ текисликда бир қийматли аниқланган бўлади.

$M(x, y) \in l$ тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда

$$\vec{m} = \overrightarrow{BM} = x\,\vec{e_1} + (y - b)\,\vec{e_2}$$

вектор *l* да ётади ва $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун тангенснинг таърифига кўра

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Бундан $y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x + b$ бўлиб, $k = \operatorname{tg}\varphi$ десак,

$$y = kx + b \qquad (3.1)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, l тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасининг координаталари (3.1) тенгламани қаноатлантиради. $M\in l$, $M\in \vec{m}$ бўлгани учун $\vec{m}\in l$ бўлади. Демак, $y = kx + b$ тенглама l тўғри чизиқнинг тенгламасидир. $k = \operatorname{tg}\varphi$ миқдорни *l тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти*, (3.1) тенгламани эса *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси* дейилади. (3.1) тенгламада b сон (3.1) тўғри чизиқнинг Oy ўқдан ажратган кесманинг миқдорини англатади.

Ox ўққа параллел тўғри чизиқ учун бурчак коэффициент нолга тенг. Шунинг учун бу тўғри чизиқнинг тенгламаси $y = b$ кўринишга эга.

Энди $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлган ҳолни қараб чиқамиз, бу ҳолда $k = \operatorname{tg}\varphi$ сон аниқланмаган бўлади. Бундан Oy ўққа параллел бўлган тўғри чизиқни бурчак коэффициентли тенглама билан бериб бўлмаслиги келиб чиқади, Oy ўққа параллел бўлган l_1 тўғри чизиқнинг барча нуқталари учун абсцисса ўзгармас бўлиб, бу тўғри чизиқнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси a га тенг бўлгани учун l_1 нинг тенгламаси $x = a$ кўринишга эга бўлади.

Шундай қилиб, Oy ўққа параллел бўлмаган ҳар қандай тўғри чизиқ $y = kx + b$ тенгламага эга, Oy ўққа параллел тўғри чизиқ эса $x = a$ тенгламага эга, ниҳоят, Ox ўққа параллел тўғри чизиқ тенгламаси эса $y = b$ кўринишга эга.

1°. Биринчи тартибли чизиқлар ҳақидаги асосий теорема. 3.1- теорема. *Текисликда ҳар қандай биринчи тартибли чизиқ тўғри чизиқдир.*

Исбот. Биринчи тартибли l чизиқ

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{3.2}$$

тенглама билан аниқлансин.

Бунда икки ҳолни қараймиз: а) $B = 0$, бу ҳолда $A \neq 0$. Шунинг учун (3.2) тенглама

$$x = -\frac{C}{A}$$

тенгламага эквивалент бўлади. Бу ҳолда l чизиқ Oy ўққа параллел тўғри чизиқ бўлади;

б) $B \neq 0$, бу ҳолда (3. 2) тенглама

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{3.3}$$

тенгламага эквивалент бўлади. Агар $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ деб белгиланса, (3.3) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$y = kx + b.$$

Бундан l чизиқ Ox ўқ билан

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{B}\right)$$

бурчак ташкил қилувчи ва $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исботланди.

2°. **Тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси.** (3.2) тенгламада C ни тенгламанинг ўнг томонига ўтказайлик, яъни $Ax + By = -C$. Бундан $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ ни ҳосил қилиш мумкин. Бу ерда $-\frac{C}{A} = m$ ва $-\frac{C}{B} = n$ белгилашларни киритиб, (3. 2) тенгламани

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \tag{3.4}$$

кўринишга келтирамиз. Тўғри чизиқнинг бундай формадаги тенгламаси *тўғри чизиқнинг кесмалардаги тенгламаси* дейилади.

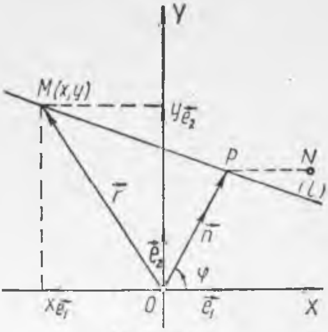
18- §. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси

Координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқлар учун кўпинча (3.2) тенгламанинг махсус формасидан фойдаланилади.

l координаталар бошидан ўтмайдиган тўғри чизиқ бўлсин. Координаталар бошидан l тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги p га тенг дейлик, яъни $|\overrightarrow{OP}| = p$, бунда P — ўша перпендикулярнинг асоси. $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{OP}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналган бўлиб, $\vec{n}$ вектор $(|\vec{n}| = 1)$ $\overrightarrow{OP}$ нинг бирлик вектори бўлсин. Бу ҳолда $\overrightarrow{OP} = p\,\vec{n}$ деб ёзиш мумкин.

$\overrightarrow{OP}$ вектор билан $\vec{e}_1$ вектор ўзаро φ бурчак ҳосил қилсин (44-чизма). Одатда, $\overrightarrow{OP}$ ни l чизиқнинг *нормали* дейилади. Агар ихтиёрий $M\ (x,y) \in l$ нуқтани олсак, у ҳолда $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ радиус-векторнинг координаталари $(x,\ y)$ бўлади, яъни

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$



44- чизма.

44- чизмадан $\overrightarrow{PM} = \vec{r} - \overrightarrow{OP}$. Бу вектор $\overrightarrow{OP}$ векторга перпендикуляр бўлгани учун ушбу тенгликни ёза оламиз:

$$(\vec{r} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n} = 0 \text{ ёки } \vec{r} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}.$$

Агар $\vec{n}$ бирлик вектор учун

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi$$

эканини эътиборга олсак, юқоридаги тенгликдан

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p \tag{3.5}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама *l тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси* дейилади. (3.5) тенгламада $|\overrightarrow{OP}| = p$ ва φ миқдорларнинг ўзгаришига қараб, l тўғри чизиқнинг ҳолати турлича бўлиши мумкин.

Энди тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенглама кўринишига келтириш билан шуғулланамиз. Бунинг учун $Ax + By + C = 0$ тенгламанинг ҳар иккала томонини $\lambda \neq 0$ га кўпайтирамиз (тўғри чизиқнинг $Ax + By + C = 0$ тенгламаси фақат $A^2 + B^2 \neq 0$ ва $C < 0$ бўлгандагина нормал тенглама бўлади):

$$(\lambda A)\ x + (\lambda B)\ y + \lambda C = 0. \tag{3.6}$$

Энди λ ни қуйидагича танлаб оламиз:

$$\lambda A = \cos\varphi,\ \lambda B = \sin\varphi,\ \lambda C = -p.$$

Бу тенгликларнинг биринчиси ва иккинчисини квадратга кўтариб, қўшамиз:

$$\lambda^2 (A^2 + B^2) = \cos^2 \varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Бундан

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.7}$$

Ўнг томондаги $\pm$ ишоралардан қайси бирини олиш $\lambda C = -p$, $p > 0$ тенгликка боғлиқ бўлади. Бошқача айтганда, λ ва C нинг ишораси қарама-қарши қилиб танланади.

λ нинг топилган қийматини (3.6) тенгламага қўямиз:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0. \tag{3.8}$$

(3.7) тенглик билан аниқланган λ ни *нормалловчи кўпайтувчи* дейилади. Юқоридаги мулоҳазалардан тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенгламага келтириш учун умумий тенгламанинг иккала томонини нормалловчи кўпайтувчига кўпайтириш кифоя деган хулоса келиб чиқади.

Мисол. Тўғри чизиқнинг умумий $3x + 4y - 5 = 0$ тенгламаси нормал тенгламага келтирилсин.

Ечиш. Аввало $C = -5 < 0$ бўлгани учун $\lambda > 0$ бўлиши лозим. Шунинг учун (3.7) формулада « + » ишорасини олиб қуйидагини топамиз:

$$\lambda = \frac{1}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Берилган тенгламанинг иккала томонини бу кўпайтувчига кўпайтирамиз:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{3}y - 1 = 0.$$

Бу тўғри чизиқнинг изланаётган нормал тенгламасидир.

19- §. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа

M_1 ихтиёрий нуқта ва l текисликдаги бирор тўғри чизиқ бўлсин. M_1 нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган масофа учун формула чиқарамиз. Текисликда xOy Декарт координаталар системаси тайинланган бўлсин, бу системада M_1 нуқта (x_1, y_1) координаталарга, l тўғри чизиқ эса $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ тенгламага эга бўлсин. M_1 нуқта ва l тўғри чизиқнинг координаталар системасига нисбатан жойлашишини қуйидагича изоҳлаймиз (45- чизма):

$$|\vec{n_l}| = 1;\ \vec{n} = \overrightarrow{ON};\quad \overrightarrow{ON}\cdot\vec{n}_l = \mathrm{p};$$

$$\overrightarrow{ON} \perp l;\ M\,(x,y) \in l;\ M_1 K_1 \perp l;$$

$$M_1K_1 = PP_1 = \delta;\ l\colon\ x\cos\varphi + y\sin\varphi = p.$$

$\overrightarrow{M_1M}$ вектор билан $\vec{n}_l$ бирлик векторнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\delta = \overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n}_l = (\vec{r}_1 - \vec{r}) \cdot \vec{n}_l$$

ёки

$$\delta = \{x_1 - x,\ y_1 - y\} \cdot \{\cos\varphi,\ \sin\varphi\}.$$

Бундан

$$\delta = (x_1 - x)\cos\varphi + (y_1 - y)\sin\varphi$$

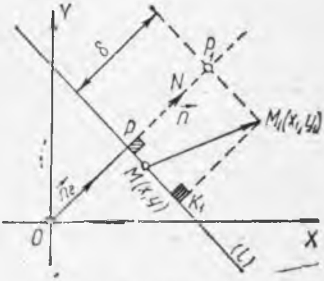
ёки

$$\delta = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (x\cos\varphi + y\sin\varphi).$$

Демак,

$$\delta = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p. \tag{3.9}$$

Охирги формуладан шуни айтиш мумкинки, M_1 нуқтадан l тўғри чизиққача масофани топиш учун тўғри чизиқнинг нормал тенгламасидаги ўзгарувчи (x,y) координаталар ўрнига M_1 нуқтанинг (x_1,y_1) координаталарини қўйиш кифоя. (45- чизмада O ва M_1 нуқталар тўғри чизиқдан турли томонда ётади). Агар O ва M_1 нуқталар l тўғри чизиқдан бир томонда жойлашган бўлса ҳам (3.9) кўринишдаги формулани юқоридаги мулоҳазалардан фойдаланиб келтириб чиқариш мумкин.



45- чизма

Маълумки, биз ушбу формулаларга эгамиз:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\varphi = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$-p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Буларни эътиборга олсак, (3.9) ни доим қуйидаги

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{3.10}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Мисол. M_1 (1,2) нуқтадан $2x-2y-6=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. M_1 (1,2) нуқтанинг координаталарини

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

формулага қўямиз:

$$\delta = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-8|}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx$$

$$\approx 2 \cdot 1{,}4142 \approx 2{,}8284.$$

Демак, $\delta \approx 2{,}8284$.

Энди берилган тўгри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал тенгламага келтирамиз:

$$\frac{2}{2\sqrt{2}} x - \frac{2}{2\sqrt{2}} y - \frac{6}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Бундан координаталар бошидан тўғри чизиққача бўлган масофа:

$$p = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 1{,}5 \cdot 1{,}4142 \approx 2{,}1213.$$

20- §. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар мос равишда қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$(l_1){:}\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ва } (l_2){:}\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

У ҳолда $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ вектор l_1 га, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ вектор эса l_2 га нормал вектор бўлади. Агар $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ ўзаро коллинеар бўлмаса, у ҳолда $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ орасидаги φ бурчак l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ўзаро ташкил қилган бурчаклардан бирига тенг бўлади. Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар параллел бўлса, у ҳолда улар орасидаги бурчак нолга тенг бўлади. Энди умумий ҳолда φ бурчакни топиш учун $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3.11)$$

Агар $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ бўлса, ўнг томон ҳадларининг ҳаммасини $B_1B_2 \neq 0$ га бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}+1}{\sqrt{\frac{A_1^2}{B_1^2}+1}\cdot\sqrt{\frac{A_2^2}{B_2^2}+1}},$$

Бунда бурчак коэффициентлар учун $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ ва $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ ифодалардан фойдалансак,

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2+1}{\sqrt{(k_1^2+1)(k_2^2+1)}}$$

формулани ҳосил қиламиз. Содда ҳисоблашлар ёрдамида $\operatorname{tg}\varphi$ учун қуйидаги

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

формулани ҳосил қилиш мумкин.

Энди икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик ва параллеллик шартларини келтириб чиқарамиз.

а) икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартини $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$ скаляр кўпайтманинг нолга тенг бўлиши шартидан ҳосил қилиш мумкин. Агар $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ тўғри чизиқларнинг тенгламалари бўлса, уларнинг нормаллари $\vec{n_1} = \{A_1, B_1\}$, $\vec{n_2} = \{A_2, B_2\}$ нинг перпендикулярлигидан

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \tag{3.12}$$

шарт ёки ($B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ деб) бурчак коэффициентлар орқали

$$k_1\cdot k_2 + 1 = 0 \tag{3.12'}$$

шарт келиб чиқади;

б) икки тўғри чизиқнинг параллеллик шарти нормал векторларнинг коллинеарлик шартидан келиб чиқади. Агар $\vec{n_1} = \lambda\vec{n_2}$ ёки $\{A_1, B_1\} = \{\lambda A_2, \lambda B_2\}$ бўлса, ундан

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \text{ ёки } \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad (B_1 \neq 0,\ B_2 \neq 0) \tag{3.13}$$

келиб чиқади. (3.13) шартни бурчак коэффициентлар орқали яна

$$k_1 = k_2$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

Мисол. Ушбу $2x+2y-13=0$, $7x-y+8=0$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. (3.11) формулага кўра топамиз:

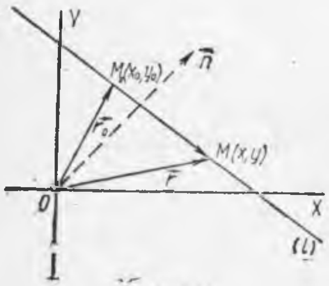
$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 7-2\cdot 1}{\sqrt{2^2+2^2}\cdot\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

Бундан

$$\varphi=53°08'.$$

21- §. Берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи чизиқ тенгламаси

l чизиқ xOy координаталар текислигидаги тўғри чизиқ бўлиб, $M_0\,(x_0,\,y_0)\in l$ бўлсин. Ундан ташқари, $\vec{n}=\{A,B\}$ вектор бу тўғри чизиққа перпендикуляр (ноль бўлмаган) вектор бўлсин. Бу вектор l тўғри чизиқнинг нормал вектори бўлади. M_0 нуқта ва $\vec{n}$ векторнинг берилиши l ни тўла аниқлашини ҳамда xOy текисликдаги исталган тўғри чизиқ ана шундай қилиб берилиши мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз (46- чизма). Энди l тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M\,(x,y)$ нуқтасини оламиз. Бу ҳолда $\overrightarrow{M_0M}$ вектор шу l тўғри чизиқ бўйлаб йўналган бўлади. Шунинг учун $\overrightarrow{M_0M}$ ва $\vec{n}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенглиги равшан, яъни $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. M_0 нуқтанинг радиус-векторини $\vec{r}_0$ орқали ва M нуқтанинг радиус-векторини $\vec{r}$ орқали белгилаб, бундан қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:



46- чизма.

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0.$$

Бу тенглама M нуқтанинг l тўғри чизиққа тегишли бўлишининг зарурий ва етарли шартини ифодалайди ва *l тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси* деб аталади.

Аммо $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\;y-y_0\}$ бўлгани учун $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}$ скаляр кўпайтмани Декарт координаталарида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)=0. \qquad (3.14)$$

Бу тенглама берилган нуқтадан берилган йўналиш бўйича ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини ифодалайди. Агар (3.14) тенгламанинг иккала томонини B га бўлиб (албатта $B \neq 0$ деб ҳисоблаб), $k = -\frac{A}{B}$ деб белгиласак,

$$y - y_0 = k\ (x - x_0) \tag{3.15}$$

ни ҳосил қиламиз. $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада ва турли k да бу тенглама тўғри чизиқлар тўпламини беради. Бу тўплам *маркази* M_0 *нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастаси* деб аталади.

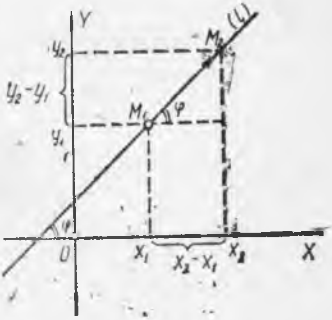
M_0 нуқтадан ўтувчи фақат битта тўғри чизиқ, чунончи абсциссалар ўқига перпендикуляр тўғри чизиқ бундай тенглама орқали ифодаланмаслигини эслатиб ўтамиз. Унинг тенгламаси

$$x = x_0$$

бўлади.

Берилган иккита $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2\ (x_2, y_2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини топиш талаб қилинсин ($x_1 \neq x_2$ деб ҳисоблаймиз).

Аввало берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топамиз. Бунинг учун $\overrightarrow{M_1 M_2}$ векторнинг абсциссалар ўқи билан ташкил қиладиган бурчагининг тангенсини топамиз. 47- чизмадан



47- чизма.

$$\operatorname{tg} \varphi = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ни кўриш осон. k нинг бу қийматини (3.15) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ёки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3.16}$$

Бу тенглама *берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси* дейилади.

Берилган (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкинлигини текшириш осон:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ҳақиқатан, бу детерминантнинг биринчи ва учинчи сатри элементларидан унинг иккинчи сатри элементларини айириб, сўнгра детерминантни учинчи устун элементлари бўйича ёйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0.$$

Бундан (3.16) келиб чиқади.

22- §. Иккинчи тартибли чизиқлар

Текисликда иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (3.17)$$

ёки

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (3.17')$$

Бунда A, B, C, D, E, F ва a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13} ,a_{23}, a_{33} ўзгармас коэффициентлар бўлиб, булардан A, B, C ёки a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларнинг камида биттаси нолга тенг эмас (акс ҳолда биз биринчи тартибли чизиқларга эга бўламиз).

Қуйида (3.17) ёки (3.17′) тенгламанинг муҳим хусусий ҳоллари билан танишамиз.

1°. **Айлана.** 3.1- таъриф. *Марказ деб аталувчи (a, b) нуқтадан бир хил R масофада жойлашган нуқталар тўплами маркази (a, b) нуқтада бўлган R радиусли айлана дейилади.*

Биз қисқача, уни $N(a, b, R)$ деб белгилаймиз.

Айлана текисликда ўз марказининг координаталари ва радиуси билан бир қийматли аниқланади. Агар айлананинг маркази $C(a, b)$ нуқтада бўлса, у ҳолда унинг тенгламаси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$$

кўринишга эга бўлади. Қавсларни очиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

Агар ушбу

$$-2a = 2D, -2b = 2E, \; a^2 + b^2 - R^2 = F$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда айлананинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

кўринишга келади. Бундан айлана иккинчи тартибли чизиқ экани келиб чиқади, чунки охирги тенглама (3.17) билан $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ бўлганда устма-уст тушади. Энди (3.17) тенглама қачон айланани тасвирлайди, деган савол қўямиз. (3.17) тенглама айланани ифода этиши учун унда $A = C$, $B = 0$, $M = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} > 0$ бўлиши етарли. Ҳақиқатан ҳам, $A = C$, $B = 0$ бўлгани учун эгри чизиқнинг тенгламаси

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

кўринишга келади.

$C = A \neq 0$ бўлиши турган гап, чунки $B = 0$. Шунинг учун охирги тенгламанинг ҳар икки томонини A га бўлсак,

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

тенгламага эга бўламиз. Унинг чап томонидан тўла квадратлар ажратамиз:

$$\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{E}{2A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) + \left(\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4A^2}\right) = 0$$

ёки

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(\frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{F}{A} = M.$$

Аммо $M > 0$ бўлгани учун $M = R^2$, $a = -\frac{D}{2A}$, $b = -\frac{E}{2A}$ десак, маркази (a, b) нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган айлана тенгламаси ҳосил бўлади.

Агар $A = C$, $B = 0$, $M = 0$ бўлса, тенгламанинг кўриниши

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

бўлиб, бу тенглама текисликда фақат битта нуқтани тасвирлайди. (Бошқача қилиб айтсак, ноль радиусли айланани тасвирлайди.) Агар $A = C$, $B = 0$, $M < 0$ бўлса, бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = -R^2$$

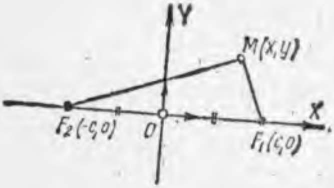
бўлиб, бу тенглама мавҳум айланани тасвирлайди. Бошқача қилиб айтганда, бу тенгламани қаноатлантирадиган ҳақиқий (x, y) нуқталар тўплами бўш тўпламдир.

Агар айлана маркази координаталар бошида бўлса, у ҳолда $a = b = 0$ бўлиб, тенглама

$$x^2 + y^2 = R^2$$

кўринишни олади.

2°. **Эллипс.** 3.2- таъриф. *Эллипс деб, текисликнинг шундай нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталардан фокуслар деб аталувчи берилган икки нуқтагача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас бўлиб, у фокуслар орасидаги масофадан катта бўлади.*



48- *а* чизма.

Қуйида Декарт координаталар системасида эллипс тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланамиз. Эллипс фокусларини F_1 ва F_2 билан белгилаймиз. Декарт координаталар системасини Ox ўқ фокуслардан ўтадиган, Oy ўқ эса $[F_1F_2]$ кесмани тенг иккига бўладиган қилиб киритамиз (48*а*- чизма). Фокуслар орасидаги масофани $2c$ орқали белгилаймиз, яъни $d(F_1, F_2) = 2c$. У ҳолда F_1 ва F_2 нуқталарнинг координаталари мос равишда $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ бўлади.

$M(x, y)$ — эллипснинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Эллипснинг таърифига кўра:

$$d(F_1, M) + d(F_2, M) = 2a \qquad (3.18)$$

ёки $d(F_1,M) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $d(F_2,M) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ ифодаларни ўрнига қўйиб

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (3.18')$$

тенгламага эга бўламиз. Бу эллипснинг Декарт координаталар системасидаги тенгламасидир. Тенгламани соддалаштириш учун уни радикаллардан қутқариш керак. Битта радикални тенгламанинг ўнг томонига ўтказамиз ва содда ҳисоблашлар бажарамиз:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x -$$

$$- c)^2 + y^2 \Longleftrightarrow \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow a^2(x -$$

$$- c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

F_1MF_2 учбурчакда $MF_1+MF_2>F_1F_2$ бўлади, яъни

$$2a>2c \text{ ёки } a>c.$$

Демак, $a^2>c^2$ ёки $a^2-c^2>0$. Шунинг учун

$$a^2-c^2=b^2,\ b\neq 0$$

деб белгилаймиз. Энди охирги тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.19}$$

Бу эллипснинг каноник *тенгламаси* дейилади. Бу (3.19) тенглама (3.18′) тенгламадан икки марта квадратга кўтариб радикалдан қутқариш йўли билан ҳосил қилинди. Кўрсатиш мумкинки, бу амалларни бажаришда тегишли нуқталар тўпламига янги нуқталар кириб қолмайди ҳамда ҳеч бир нуқта ҳам йўқотилмайди.

3°. **Каноник тенгламаси бўйича эллипс шаклини текшириш.** Эллипснинг шаклини (графигини) қуйидаги схема бўйича текширамиз: 1) агар эллипснинг фокуслари деб аталувчи F_1 ва F_2 нуқталар устма-уст тушиб қолса, у ҳолда $c=0$ бўлади. Бунда $a^2=b^2$ бўлиб, (3.19) тенглама

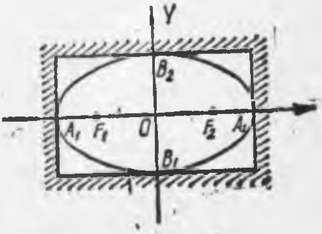
$$x^2+y^2=a^2$$

кўринишга келади. Бу тенглама бизга таниш маркази координаталар бошида бўлган айлана тенгламасидир. Демак, айлана эллипснинг хусусий ҳолидир;

2) энди эллипснинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаймиз. Ox ўқ билан кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\pm a, \\ y=0. \end{cases}$$

Демак, эллипс Ox ўқ билан икки A_2 $(a,0)$, A_1 $(-a,0)$ нуқтада кесишади. Шунингдек равшанки, эллипс Oy ўқ билан ҳам икки B_1 $(0,-b)$, B_2 $(0,b)$ нуқтада кесишади (48- б, чизма).



48- б чизма.

Бунда A_1, A_2, B_1, B_2 нуқталарни *эллипснинг учлари* деб аталади; $[A_1 A_2]$, $[B_1 B_2]$ кесмаларни *эллипснинг ўқлари* дейилади.

Бизга $|A_1A_2| = 2a$, $| B_1 B_2 | = 2b$, $a > b$ эканлиги маълум бўлганлиги учун $[A_1 A_2]$ кесмани *эллипснинг катта ўқи*, $[B_1 B_2]$ кесмани эса *эллипснинг кичик ўқи* дейилади. Демак, a ва b сонлар эллипс ярим ўқларининг узунлиги бўлади,

3) эллипснинг координата ўқларига нисбатан симметриклигини текширамиз. Эллипснинг каноник тенгламасини ушбу шаклда ёзамиз:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Равшанки, x ва y нинг исталган қийматлари учун ушбуга эгамиз:

$$F(-x, -y) = F(x, y); F(-x, y) = F(x, y),$$
$$F(x, -y) = F(x, y).$$

Бу муносабатларнинг ўринли бўлишига сабаб тенгламада ўзгарувчи координаталарнинг фақат квадратлари иштирок этади ва $F(x, y)$ функция x ва y га нисбатан жуфт функциядир. Демак, эллипс Ox ва Oy ўқларга нисбатан симметрик равишда жойлашган. Бундан ташқари,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

тенгламада иштирок этаётган x, ва y ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳалари

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b$$

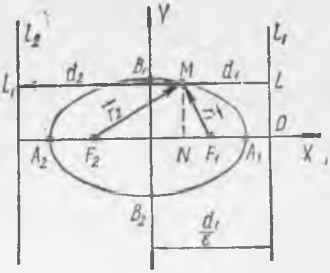
тенгсизликлар билан аниқланади.

Бундан қуйидаги хулосага келамиз: эллипсга тегишли бўлган барча нуқталар $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$ тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлган тўғри тўртбурчакка тегишли бўлади. Координаталар боши $O\ (0, 0)$ нуқта эллипсга тегишли эмаслиги ҳам равшан;

4) эллипснинг формасини текширайлик. Бунинг учун (3.19) тенгламада $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ деб ҳисоблаб, эллипснинг I чоракка тегишли қисмини текшириш кифоя. Шунинг учун (3.19) тенгламадан

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

келиб чиқади. Маълумки, $-a \leqslant x \leqslant +a$, яъни $|x| \leqslant a$. Демак, $x = 0$ бўлганда ордината энг катта қийматга эришади, у $y = b$ бўлади. Шунга ўхшаш, $y = 0$ бўлганда абсцисса энг катта қийматга эришади, у $x = a$ бўлади (49-чизма). Эллипснинг биринчи чоракда жойлашган қисми қавариқлиги юқорига қараган силлиқ эгри чизиқ бўлади. Буни ҳосилалар ёрдамида тўла текшириш мумкин. Биз ҳозир бунга тўхталмаймиз;



49- чизма.

5) эллипснинг эксцентриситети тушунчасини киритамиз. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофанинг унинг катта ўқи узунлигига нисбати эллипснинг *эксцентриситети* деб аталади ва у ε ҳарфи билан белгиланади. Таърифга кўра

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} \text{ ёки } \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Бунда $0 \leqslant c < a$ га асосан эксцентриситет учун

$$0 \leqslant \varepsilon < 1$$

тенгсизлик ўринли.

Эксцентриситет эллипснинг *чўзиқлик даражасини характерлайди*. Эксцентриситет қанча катта бўлса, эллипс шунча чўзиқ бўлади. $\varepsilon = 0$ да фокуслар устма-уст тушади ва ярим ўқлар тенг бўлиб қолади, бу ҳолда эллипс айланага ўтади.

Энди $\frac{b}{a}$ ни ε орқали ифодалайлик. Бунинг учун $a^2 - c^2 = b^2$ тенгликдан фойдаланамиз. Содда алмаштиришлар кўрсатадики,

$$c = \varepsilon a, \quad a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2 \ (1 - \varepsilon^2)$$

$$b^2 = a^2 \ (1 - \varepsilon^2), \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Агар b нинг қиймати a дан нолгача камайса, ε нинг қиймати 0 дан 1 гача ўсиб боради. Шундай қилиб, эллипснинг эксцентриситети нолга қанча яқин бўлса, эллипснинг шакли айланага шунча яқин ва эксцентриситети қанча катта бўлса, унинг шакли шунча чўзиқ (юқоридан қисилган айлана каби) бўлади;

6) эллипснинг нуқтасининг фокал радиусларини ўрганамиз. *Эллипснинг ихтиёрий нуқтасидан унинг фокусларигача бўлган масофалар бу нуқтанинг фокал радиуслари дейилади.*

Бу таърифга қараганда $\overrightarrow{F_1M}$ билан $\overrightarrow{F_2M}$ векторлар эллипсдаги M нуқтанинг фокал радиусларидир, буларни мос равишда $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ билан белгилаймиз, бу ҳолда (3.18′) формулага биноан:

$$|\vec{r}_1| = |\overrightarrow{F_1M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |\vec{r}_2| = |\overrightarrow{F_2M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Фокал радиуслар учун соддароқ формула топиш мақсадида бу тенгламаларнинг иккала томонини квадратга кўтариб, чиққан натижанинг иккинчисидан биринчисини ҳадлаб айирсак,

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

тенглик ҳосил бўлади. Буни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(r_2 - r_1)\ (r_2 + r_1) = 4cx$$

ёки

$$2a\ (r_2 - r_1) = 4cx \Rightarrow r_2 - r_1 = 2\,\frac{c}{a}\ x.$$

Бу тенглик билан $r_2 + r_1 = 2a$ ни биргаликда ечсак ҳамда $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ни эътиборга олсак,

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

формулаларга эга бўламиз. Бу формулалар фокал радиусларни x орқали чизиқли ифодалайди.

Мисол. $2x^2 + 4y^2 = 8$ эллипс фокусларининг координаталари, эксцентриситети ва абсциссаси 1 га тенг бўлган нуқтасининг фокал радиуслари топилсин.

Ечиш. Эллипс тенгламасининг иккала томонини 8 га бўламиз:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

Бундан кўринадики, $a^2 = 4$; $a = 2$ ($a > 0$ бўлгани учун) $b^2 = 2$; $b = \sqrt{2}$ ($b > 0$ бўлгани учун). Бизга $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$ экани маълум. Демак, $F_1\ (\sqrt{2}; 0)$, $F_2\ (-\sqrt{2};\ 0)$ нуқталар эллипснинг фокусларидир.

Эллипснинг эксцентриситети учун қуйидаги сонни топамиз:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$x = 1$ бўлганда фокал радиуслар осонгина топилади, яъни

$$r_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{4-\sqrt{2}}{2}; \quad r_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

7) Энди эллипснинг директрисаларини кўрайлик.

Эллипснинг директрисалари деб, унинг катта ўқига перпендикуляр бўлган ва марказдан масофаси $\frac{a}{\varepsilon}$ га тенг бўлган иккита тўғри чизиққа айтилади.

Бу таърифга мувофиқ, эллипс директрисаларининг тенгламаси

$$x = +\frac{a}{\varepsilon} \text{ ва } x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

бўлади. Эллипсда $\varepsilon < 1$ бўлгани сабабли $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Демак, директрисалар эллипснинг A_1 ва A_2 учларидан ташқарида жойлашган.

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ тўғри чизиқлар ушбу хоссага эга. *Эллипснинг ҳар қандай нуқтасидан ўнг фокусигача ва ўша нуқтадан унга мос директрисагача бўлган масофалар нисбати ўзгармас миқдор бўлиб, ε га тенг.*

Ҳақиқатан ҳам, $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ ёки $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ эканини кўрсатиш керак. 49-чизмадан $d_1 = |ML|$, $d_2 = |ML_1|$ сонлар M нуқтадан директрисаларгача бўлган масофалар бўлиб, r_1, r_2 — фокал радиусларидир. Ўша чизмадан

$$d_1 = |ML| = |OD| - |ON| = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}$$

экани кўриниб турибди. Демак,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

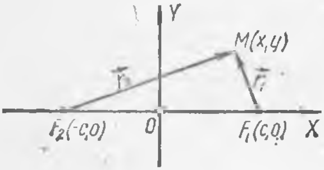
Шунга ўхшаш,

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

4°. **Гипербола.** *Гипербола деб, текисликнинг шундай нуқталар тўпламига айтиладики, бу нуқталардан фокуслар деб аталувчи берилган икки нуқтагача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати ўзгармас бўлади.*

Бу ўзгармасни $2a$ деб, фокуслар орасидаги масофани $2c$ деб белгиланади. Шу билан бирга $2c > 2a$ деб ҳисобланади.

Гиперболанинг содда тенгламасини келтириб чиқариш учун Декарт координаталар системасини эллипс тенгламасини келтириб чиқаргандагидек танлаймиз. Аниқроқ айтганда, абсциссалар ўқини гиперболанинг F_1 ва F_2 фокуслари орқали ўтказамиз, координаталар боши деб $[F_1F_2]$ кесманинг ўртасини оламиз (50-чизма).



50- чизма.

$M\,(x,\ y)$ гиперболанинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $[F_1M]$ ва $[F_2M]$ кесмаларнинг узунликларини мос равишда r_1 ва r_2 билан белгилаймиз. Бу ҳолда

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$
$$r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

r_1 ва r_2 нинг қийматларига кўра таъриф бўйича ушбу тенгламани ёзиш мумкин:

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

ёки

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm\, 2a. \qquad (3.20)$$

Бу ҳолда ҳам эллипс тенгламасини келтириб чиқаришда қилинган алмаштиришларни бажариб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

$c > 0$ бўлгани сабабли $b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$ белгилашни киритиб, гипербола тенгламасини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.21)$$

Бу тенглама *гиперболанинг каноник тенгламаси* дейилади.

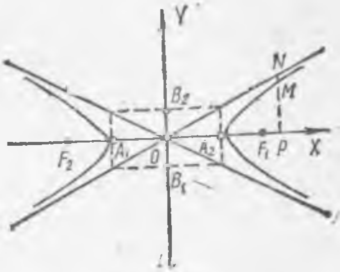
5°. **Каноник тенгламаси бўйича гипербола шаклини (графигини) текшириш.** 1) Гиперболанинг симметриклиги.

Гипербола шаклини унинг (3.21) тенгламасига кўра текширамиз. Бу тенгламага x ва y нинг квадратлари киради, аммо биринчи даражалари кирмайди. Шунинг учун (x, y) нуқта гипербола нуқтаси бўлса, $(\pm x, \pm y)$ нуқталар ҳам гиперболанинг нуқталари бўлади, бу эса гиперболанинг нуқталари координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашганини билдиради. Симметрия ўқларининг кесишган нуқтаси гиперболанинг *маркази* дейилади. Равшанки, марказ гиперболага тегишли эмас.

2) координата ўқлари билан кесишиш нуқталари. Гипербола координаталар бошидан ўтмайди, бошқача айтганда $O(0; 0)$ нуқта гипербола тенгламасини қаноатлантирмайди. (Бу мулоҳазалар координаталар системасини 50-чизмадагидек танланганда ўринли). Гиперболанинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтасининг координаталарини топиш учун

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

системани ечамиз. Бунда $x = \pm a$. Демак, гипербола Ox ўқ билан $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ нуқталарда кесишади. Бу нуқталарни, одатда, *гиперболанинг учлари* дейилади (51-чизма), $[A_1A_2]$ кесмани эса *гиперболанинг ҳақиқий ўқи* дейилади.



51-чизма.

Шунга ўхшаш, гиперболанинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтасини топиш учун

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

системани ечамиз. Бундан $y^2 = -b^2$, $b \neq 0$. Бу тенглама ҳақиқий ечимларга эга эмас. Демак, гипербола ординаталар ўқи билан кесишмайди. Чиқарилган натижаларга мувофиқ, $[B_1B_2]$ кесмани *гиперболанинг мавҳум ўқи* деб аталади. a ва b сонлар мос равишда *ҳақиқий* ва *мавҳум ярим ўқлар* дейилади.

Гиперболанинг икки тармоғи (шохи) мавжуд бўлиб, улардан бири $x \leqslant -a$ ярим текисликда, иккинчиси эса $x \geqslant a$ ярим текисликда ётади. Ҳақиқатан, (3.2) тенгламадан қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right), \text{ ёки } \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \geqslant \Rightarrow x^2 - a^2 \geqslant 0. \\ y^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Бундан $\begin{cases} x \leqslant -a, \\ x \geqslant a. \end{cases}$

Бундан кўринадики, $x = a$ ва $x = -a$ тўғри чизиқлар орасидаги вертикал полосада гиперболанинг нуқталари йўқ.

3) гиперболанинг формаси. Гиперболанинг формасини x ва y мусбат бўлган ҳолда текшириш етарли, чунки гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган. (3.21) тенгламадан $\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1$ бўлгани учун x нинг қиймати a дан $+\infty$ гача ўзгариши мумкин. x миқдор a дан $+\infty$ гача ортганда, y ҳам 0 дан $+\infty$ гача ортади. Эгри чизиқнинг формаси 51-чизмада тасвирланганидек бўлади. Гиперболанинг у ёки бу чоракда қавариқлиги ҳосилалар ёрдамида текширилади. Ҳозир биз бунга тўхталмаймиз.

4) гиперболанинг асимптоталари. Гиперболанинг графигини яна ҳам очиқроқ тасаввур қилиш учун у билан ўзаро боғлиқ бўлган *асимптоталар* деб аталувчи икки тўғри чизиқни кўздан кечирамиз.

x ва y ни мусбат деб фараз қилиб, гиперболанинг (3.21) тенгламасини y га нисбатан ечамиз:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \text{ ёки } y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Бу тенгламани $y = \frac{b}{a} x$ тўғри чизиқнинг тенгламаси билан солиштириб кўрамиз. Шу тўғри чизиқ ва гиперболанинг бирор вертикал тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини, яъни $N(x, Y)$ ва $M(x, y)$ нуқталарни *мос нуқталар* деб атаймиз. Равшанки, кўрилаётган ҳолда $Y > y$ ва 51-чизмадан

$$|MN| = Y - y$$

га эгамиз. Энди биз x чексиз ўсганда бу айирманинг нолга интилишини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$Y - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

функциянинг $x \to \infty$ даги лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to \infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Демак,

$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = 0.$$

Бу охирги натижадан кўрамизки, x абсцисса чексиз ортиб борганда $|MN|$ масофа камая боради ва нолга интилади. Бунинг маъноси қуйидагидан иборат: биринчи чоракда гиперболанинг тармоғи $x \to \infty$ да $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чизиққа интилади. Учинчи чоракда эса гиперболанинг тегишли тармоғи $x \to \infty$ да яна шу тўғри чизиққа интилади. Бу ҳолда биринчи ва учинчи чораклардаги тармоқлар $y = \frac{b}{a} x$ тўғри чизиққа *асимптотик яқинлашади* дейилади. Иккинчи ва тўртинчи чораклардаги тармоқлар эса $x \to \pm \infty$ да $y = -\frac{b}{a} x$ тўғри чизиққа *асимптотик яқинлашишини* ҳам кўрсатиш мумкин.

Ушбу $y = \frac{b}{a} x$, $y = -\frac{b}{a} x$ тўғри чизиқлар гиперболанинг *асимптоталари* дейилади.

Гиперболани унинг тенгламаси бўйича чизиш учун олдин унинг асимптоталарини ясаш қулайлик туғдиради.

5) тенг томонли гипербола. $a = b$ бўлган ҳолда *гипербола тенг томонли* деб аталади, унинг тенгламаси (3.21) кўра

$$x^2 - y^2 = a^2$$

кўринишда бўлади. Очиқ кўринадики, асимптоталарнинг бурчак коэффициентлари $\left(k = \pm \frac{b}{a}\right)$ тенг томонли гипербола учун ± 1 га тенг. Демак, тенг томонли гиперболанинг асимптоталари ўзаро перпендикуляр.

6) гиперболанинг эксцентриситети. *Гипербола фокуслари орасидаги масофанинг гиперболанинг ҳақиқий ўқи узунлигига нисбати гиперболанинг эксцентриситети дейилади ва* ε *орқали белгиланади.*

Таърифга кўра

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Гиперболада $c>a$ бўлгани сабабли $\varepsilon>1$. Демак, гиперболанинг эксцентриситети ҳамма вақт бирдан катта бўлади. Эксцентриситет формуласини $c=\sqrt{a^2+b^2}$ эканидан фойдаланиб,

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Эллипсга ўхшаш, ε бирга қанча яқин бўлса, гиперболанинг тармоқлари шунча сиқиқ ва ε бирдан қанча катта бўлса, гипербола тармоқлари шунча ёйиқ жойлашган бўлади.

7) гиперболанинг фокал радиуслари. *Гиперболанинг исталган $M(x, y)$ нуқтасидан унинг $F_1(c, 0)$ ва $F_2(-c, 0)$ фокусларигача бўлган*

$$r_1=d(F_1, M),\ r_2=d(F_2, M)$$

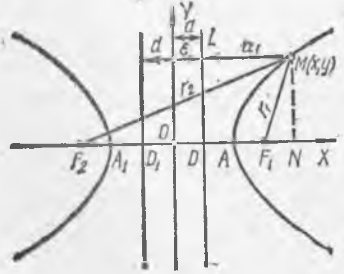
масофалар шу M нуқтанинг фокал радиуслари дейилади.

Эллипснинг фокал радиусларини ҳисоблашга ўхшаш, гиперболанинг фокал радиуслари учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$x<0 \text{ да } \left.\begin{aligned} r_1&=a-\varepsilon x,\\ r_2&=-a-\varepsilon x;\end{aligned}\right\} \qquad \text{(чап тармоқ учун)}$$

$$x>0 \text{ да } \left.\begin{aligned} r_1&=-a+\varepsilon x,\\ r_2&=a+\varepsilon x.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ўнг тармоқ учун)}$$

Бу формулалар гиперболанинг абсциссаси x га тенг бўлган нуқтасининг фокал радиусларини топишга имкон беради (52-чизма).



52-чизма.

8) гиперболанинг директрисалари.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

гиперболанинг директрисалари деб, унинг марказидан $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ *масофада фокал ўқига перпендикуляр бўлиб ўтадиган икки тўғри чизиққа айтилади.*

Бу таърифга кўра гипербола директрисаларининг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x = +\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{ва} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Гиперболада $\varepsilon > 1$ бўлгани сабабли $\frac{a}{\varepsilon} < a$ бўлади. Демак, гиперболанинг директрисалари унинг маркази O билан A ва A_1 учлари орасида жойлашган (52-чизма).

Қуйидаги хоссани исбот қиламиз.

Гиперболанинг ихтиёрий нуқтасидан фокусгача бўлган масофанинг мос директрисагача бўлган масофага нисбати ўзгармас ва ε *га тенг.*

Исбот. Бу хоссанинг исботини гиперболанинг ўнг фокуси ва унга мос директрисаси учун берамиз (унинг чап фокуси ва унга мос директрисаси учун хоссанинг тўғри экани симметриядан келиб чиқади). Гиперболанинг M (x, y) нуқтасидан DL директрисагача бўлган масофа d_1 бўлсин. 52-чизмадан

$$x = ON = OD + DN = \frac{a}{\varepsilon} + d_1 \Rightarrow d_1 = x - \frac{a}{\varepsilon}.$$

Агар M нуқта гиперболанинг чап тармоғида бўлса, у ҳолда шунга ўхшаш усул билан

$$d_1 = \frac{a}{\varepsilon} - x$$

бўлишини кўриш қийин эмас. Энди $\frac{r_1}{d_1}$ нисбатни тузамиз.

M нуқта ўнг тармоқда бўлган ҳолда бу нисбат

$$\frac{r_2}{d_1} = \frac{-a + \varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon\ (-a + \varepsilon x)}{\varepsilon x - a} = \varepsilon$$

га, M нуқта чап тармоқда бўлган ҳолда

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{\varepsilon\ (a - \varepsilon x)}{a - \varepsilon} = \varepsilon$$

га тенг бўлади. Иккала ҳолда ҳам нисбат ўзгармас ε сонга тенг экани исбот қилинди.

1-мисол. Гиперболанинг ҳақиқий ярим ўқи 3 га, мавҳум ярим ўқи 2 га тенг. Гиперболанинг ва унинг асимптоталарининг тенгламаларини тузинг, Ечиш. Масала шартига кўра:

$$\left.\begin{matrix} a=3, \\ b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$$

Асимптоталарнинг тенгламалари: $y = \pm\frac{2}{3}x$.

2-мисол. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ гиперболанинг абсциссаси 8 га ва ординатаси мусбат бўлган нуқтасининг фокал радиуслари ҳисоблансин.

Ечиш. Абсциссаси $x = 8$ ва ординатаси мусбат ($y > 0$) бўлган нуқта биринчи чоракда ётади ва гиперболанинг ўнг тармоғи бўлади. Аввало $a = 4$, $b = 3$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.

Демак,

$$r_1 = -4+\frac{5}{4}\cdot 8 = 6, \quad r_2 = 4+\frac{5}{4}\cdot 8 = 14.$$

3-мисол. Гипербола директрисалари орасидаги масофа унинг фокуслари орасидаги масофадан 3 марта кичик. Гиперболанинг мавҳум ўқи 4 га тенг. Гиперболанинг эксцентриситети топилсин ва директрисалари тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Масала шартига кўра

$$3\left(2\frac{a}{\varepsilon}\right)=2c \Rightarrow 3a = c\cdot\varepsilon;$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \Rightarrow 3a=\frac{c^2}{a} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}=3 \Rightarrow \varepsilon^2=3 \Rightarrow \varepsilon=\sqrt{3}.$$

Директрисаларининг тенгламаларини тузиш учун a ни топиш керак. Маълумки, $c^2 = a^2 + b^2$, демак, $\frac{a^2+b^2}{a^2}=3 \Rightarrow b^2=2a^2$. Масала шартига кўра $2b = 4 \Rightarrow b = 2$. Шунинг учун $2a^2=4$; $\varepsilon=\sqrt{2}$ $(a>0)$. Энди директрисаларнинг тенгламаларини ёзиш мумкин:

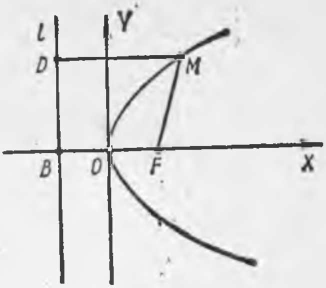
$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=0.$$

6°. Парабола. *Парабола деб, текисликнинг шундай нуқталари тўпламига айтиладики, бу нуқталар фокус деб аталувчи берилган нуқтадан ва директриса деб аталувчи берилган тўғри чизиқдан тенг узоқлашган бўлади.*

Параболанинг тенгламасини келтириб чиқариш учун, эллипс ва гипербола тенгламаларини чиқаришда қилинганидек, Декарт координаталар системаси махсус танланади. Бошқача айтганда, фокус деб аталувчи F нуқтадан ўтувчи ва берилган l тўғри чизиққа (директрисага) перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни Ox ўқ деб қабул қиламиз, берилган F нуқтадан l тўғри чизиққача бўлган масофани $|p|$ деб белгилаймиз. Буни

$$d(F,\ B) = |p|$$

каби ёзамиз.



53- чизма.

$[F,\ B]$ кесманинг ўртасини координаталар боши O деб қабул қиламиз (53- чизма). У ҳолда F нуқтанинг координатаси $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. Директрисанинг тенгламаси эса

$$x = -\frac{p}{2} \text{ ва } x + \frac{p}{2} = 0.$$

кўринишда ёзилади. Параболанинг ихтиёрий $M(x,\ y)$ нуқтаси учун унинг таърифига биноан $|MD| = |MF|$.

Агар $|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ ва $|MD| = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ эканини ҳисобга олсак, юқоридаги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини мос равишда квадратга кўтариб ва содда алмаштириш бажариб,

$$y^2 = 2px \tag{3.22}$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенглама *параболанинг каноник тенгламаси* дейилади.

(3.22) тенглама билан берилган параболанинг баъзи содда хоссаларини келтирамиз:

1) парабола координаталар бошидан ўтади, яъни $O(0,\ 0)$ нуқта парабола тенгламасини қаноатлантиради;

2) парабола координата ўқлари билан фақат ва фақат координаталар бошида кесишади, шунинг учун $O(0,\ 0)$ нуқтани *параболанинг учи* дейилади;

3) (3.22) парабола Ox ўққа нисбатан симметрик;

4) парабола $x \geqslant 0$ ярим текисликда жойлашган;

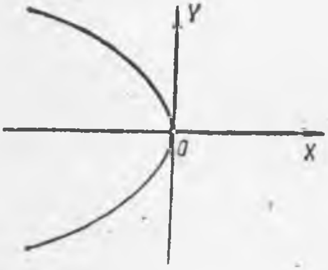
5) параболанинг шакли (графиги) (3.22) тенгламадан $y = \pm\sqrt{2px}$ экани кўринади. Бундан агар $p > 0$ бўлса, $x \geqslant 0$ экани, агар $p < 0$ бўлса, $x \leqslant 0$ экани келиб чиқади. $p > 0$ (ёки бари бир $x \geqslant 0$) бўлганда график биринчи ва тўртинчи чоракларда, $p < 0$ бўлганда эса график иккинчи ва учинчи чоракларда жойлашган бўлади. Агар $x \geqslant 0$ бўлиб, $y > 0$ бўлса, x нинг қиймати 0 дан $+\infty$ гача ўз-

гарганда y ҳам 0 дан $+\infty$ гача ўзгаради. $y < 0$ бўлганда эса тескариси бўлади. Бунда график 53-чизмадагидек бўлади. Агар $p < 0$ бўлса, график 54-чизмадагидек бўлишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

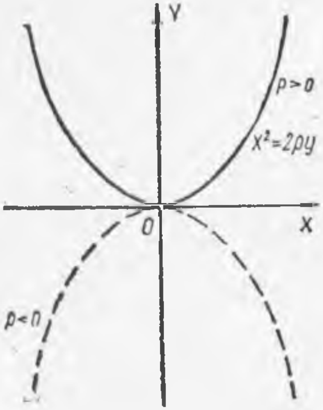
Агар параболанинг тенгламасида x билан y нинг ўринларини алмаштирсак, унинг тенгламаси

$$x^2 = 2py \tag{3.23}$$

кўринишни олади; бу ҳолда парабола координата ўқларига нисбатан 55-чизмада кўрсатилганидек жойлашади.



54- чизма.

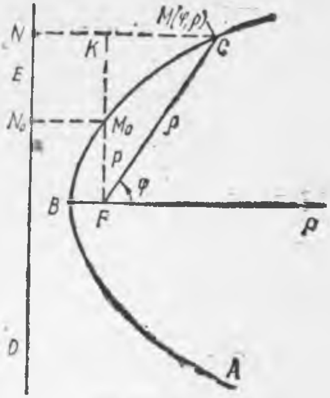


55- чизма.

7°. Параболанинг эксцентриситети ва директрисаси. Параболанинг ихтиёрий нуқтасидан унинг фокусигача бўлган масофани r билан, директрисагача бўлган масофани k билан белгиласак, парабола таърифидан $r = k$ деб ёзиш мумкин. *Параболанинг эксцентриситети* деб $\varepsilon = \frac{r}{k}$ сонга айтилади. Бу ҳолда, равшанки,

$$\varepsilon = \frac{r}{k} = 1.$$

Юқорида эллипс, гипербола ва парабола ҳақида баён қилинган учта пункт натижаларини бирлаштирсак, қуйидаги умумий таърифни ҳосил қиламиз: *эллипс, гипербола ва парабола шундай иккинчи тартибли чизиқлардан иборатки, бу чизиқларнинг ихтиёрий нуқталаридан фокус деб аталувчи нуқтагача ва директриса деб аталувчи тўғри чизиққача бўлган масофалар нисбати ўзгармас сонга тенгдир.* Бу миқдор *эксцентриситет* дейилади. Юқоридаги мулоҳазалардан равшанки, эллипс учун $\varepsilon < 1$, гипербола учун $\varepsilon > 1$, парабола учун $\varepsilon = 1$.



56- чизма.

8°. **Иккинчи тартибли чизиқларнинг қутб координаталардаги тенгламаси.** Бу пунктнинг вазифаси иккинчи тартибли чизиқларнинг фокусларидан бирини қутб деб ва унинг фокал радиусларидан бирини қутб ўқи деб қабул қилиб, тегишли чизиқ тенгламасини қутб координаталарда ифодалашдан иборат.

ABC бирор иккинчи тартибли чизиқнинг (эллипс, гипербола, параболанинг) ёйи, *B* нуқта учи, *F* нуқта фокуси ва *DE* унга мос директрисаси бўлсин (56- чизма). *F* ни қутб, *BFP* ни қутб ўқи деб оламиз ва эгри чизиқнинг эксцентриситетини ε билан, фокал ўқига перпендикуляр бўлган радиус-векторнинг $|\overrightarrow{FM}|$ узунлигини ρ билан белгилаймиз; *M* (φ, ρ) эгри чизиқнинг ихтиёрий бир нуқтаси бўлсин. Энди унинг φ, ρ қутб координаталари билан берилган ε, *p* сонлар (параметрлари) орасидаги муносабатни ифодаловчи тенгламани тузамиз. Эгри чизиқнинг тегишли ҳамма нуқталарининг умумий хоссасига асосан ушбу муносабатларни ёза оламиз:

$$\frac{d(F,\ M)}{d(M,\ N)} = \frac{d(F,\ M_0)}{d(M_0,\ N_0)} = \varepsilon \text{ ёки } \frac{\rho}{d(M,\ N)} = \frac{p}{d(M_0,\ N_0)} = \varepsilon.$$

Бундан ҳосила пропорциядан фойдаланиб,

$$\frac{\rho - p}{d(M,\ N) - d(M_0,\ N_0)} = \varepsilon$$

ни ҳосил қиламиз. Равшанки (56- чизмага қаранг),

$$d(M, N) - d(M_0, N_0) = |KM| = \rho \cos \varphi.$$

Шунинг учун

$$\frac{\rho - p}{\rho \cos \varphi} = \varepsilon.$$

Бундан узил-кесил

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \tag{3.24}$$

тенгламани топамиз. Шу тенглама $\varepsilon < 1$ бўлганда эллипснинг, $\varepsilon > 1$ бўлганда гиперболанинг, $\varepsilon = 1$ бўлганда эса параболанинг қутб координаталар системасидаги тенгламасидан иборатдир. Парабола тенгламасини $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ деб ёзиш мумкин. Учала ҳолда ҳам $1 - \varepsilon\cos\varphi > 0$ бўладиган φ лар назарда тутилади. Гипербола учун бу (3.24) тенглама эса фақат битта тармоқ учун яроқлидир;

Парабола учун p параметр ушбу $y^2 = 2px$ тенгламадаги p нинг ўзидан иборат бўлади. Ҳақиқатан, парабола учун $p = d(F,M_0) = d(M_0, N_0)$, яъни p — фокусдан директрисагача бўлган масофадан иборат.

Эллипс ва гипербола учун бундай савол қўйиш мумкин:

p параметрни a ва b ярим ўқлар орқали қандай ифодалаб бўлади?

Эллипс учун унинг $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламасига эллипс нуқталаридан бирининг, яъни $M_0(-c,\ p)$ нуқтанинг координаталарини қўямиз. Бунда ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{p^2}{b^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} \Rightarrow p^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}.$$

Гибербола учун унинг $M_0(c,p)$ нуқтасининг координаталарини $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламасига қўйиб ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2-a^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^4}{a^2} = p^2 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}.$$

Демак, эллипснинг, гиперболанинг ва параболанинг қутб координаталардаги тенгламалари (қутб ва қутб ўқини юқорида кўрсатилганидек олинганда) бир хил, яъни ушбу кўринишда бўлади:

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

Шу билан бирга эллипс ва гипербола учун p параметр билан a ва b параметрлар орасида ушбу боғланиш мавжуд:

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

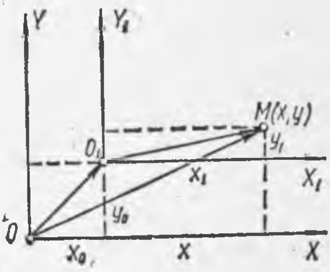
23-§. Декарт координаталар системасини алмаштириш

Текисликда нуқтанинг ўрни координаталар системасига нисбатан аниқланиши маълум. Агар координаталар системаси ўзгартирилса, нуқтанинг координаталари ҳам ўзгаради, албатта. Агар бирор тўғри чизиқ ёки иккинчи тартибли чизиқ берилган бўлса, унинг тенгламаси бирор системада қандайдир кўринишда берилган бўлса, у ҳолда бу тенглама бошқа системада, албатта, бошқача кўринишда бўлади. Декарт координаталар системаси бошини ва ўқларининг йўналишини ўзгартириш билан чизиқнинг бу системада ёзилган тенгламасини баъзида содда кўринишга келтириш мумкин бўлади.

Координаталар системасини ўзгартиришда қуйидаги 3 ҳол юз бериши мумкин: а) координаталар боши текисликнинг бошқа нуқтасига кўчирилган ва координата ўқларининг йўналиши ўзгармаган ҳол; б) координаталар боши ўзгармаган ва координата ўқлари бирор α бурчакка бурилган ҳол; в) ҳам координата боши ўзгарган, ҳам координата ўқларининг йўналиши ўзгарган ҳол.

Бу ҳолларни алоҳида-алоҳида кўрамиз.

а) координаталар боши текисликнинг бошқа нуқтасига кўчирилган ва координата ўқларининг йўналиши ўзгармаган ҳол. Иккита xOy ва $x_1O_1y_1$ Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Унда $O \neq O_1$, $Ox \parallel O_1x_1$, $Oy \parallel O_1y_1$ (57-чизма). Янги $x_1O_1y_1$ системанинг координаталар боши O_1 нинг координаталари эски xOy системага нисбатан $(x_0, \ y_0)$ бўлсин. Текисликда бирор M нуқтани олайлик: бу нуқтанинг xOy системага нисбатан координаталари $(x, \ y)$, шу нуқтанинг $x_1O_1y_1$ системага нисбатан координаталари $(x_1, y_1$ бўлсин. Чизмадан



57- чи

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

Эски координаталар системасида

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2,$$

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2}$$

муносабатларни ёзиш мумкин. $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO_1}$,$\overrightarrow{O_1M}$ векторларнинг бу ифодаларини юқоридаги тенгликка қўямиз:

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2}) + (x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2})$$

ёки

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (x_1 + x_0)\vec{e_1} + (y_1 + y_0)\vec{e_2}.$$

Бу тенгликнинг икки томонидаги $\vec{e_1}$ ва $\vec{e_2}$ бирлик векторларнинг коэффициентларини мос равишда тенглаштириб,

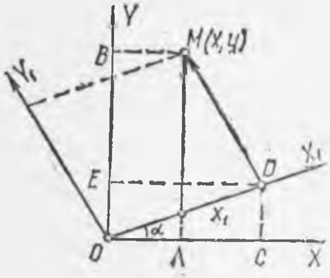
$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{array}\right\} .$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Бу формулалар M нуқтанинг эски ва янги координаталари орасидаги боғланишни аниқлайди, яъни

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0. \end{array}\right\} \qquad (3.25)$$

б) координаталар боши ўзгармаган ва координата ўқлари α бурчакка бурилган ҳол.

Энди координаталар бошини ўзгартирмай, Ox ва Oy ўқларни α бурчакка бурайлик. Ҳосил бўлган янги системани x_1Oy_1 билан белгилаймиз (58- чизма.)



28- чизма.

Энди текисликдаги бирор M нуқтанинг xOy системадаги координаталари билан янги x_1Oy_1 системадаги координаталари орасидаги боғланишни аниқлаймиз. 58-чизмадан равшанки,

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{OC}| = x_1 \cos\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{OE}| = x_1 \cos(90^\circ - \alpha) = x_1 \sin\alpha,$$

$$\text{пр}_{Ox}\overrightarrow{DM} = |\overrightarrow{CA}| = -y_1 \sin\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}\overrightarrow{DM} = |\overrightarrow{EB}| = y_1 \cos\alpha.$$

Шунга ўхшаш,

$$x = |\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OC}| - |\overrightarrow{AC}|,$$
$$y = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| + |\overrightarrow{EB}|$$

муносабатларга эгамиз. Юқорида топилган қийматлардан фойдаланиб узил-кесил

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

формулаларга эга бўламиз. (3.26) формула нуқтанинг эски координаталарини унинг янги координаталари орқали ифода этади. Агар (3.26) тенгликларни x_1, y_1 га нисбатан тенгламалар системаси деб қарасак, у ҳолда биз ушбу

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y_1 &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3.26')$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Бу формулалар нуқтанинг янги координаталарини унинг эски координаталари орқали ифода этади.

в) ҳам координаталар боши ўзгарган, ҳам координата ўқларининг йўналишлари ўзгарган ҳол. (3.25) ва (3.26) формулалардан

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha + x_0, \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

ни осонлик билан ҳосил қилиш мумкин. Агар (3.27) тенгликларни x_1, y_1 га нисбатан тенгликлар системаси деб қараб, уни x_1, y_1 га нисбатан ечсак,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y_1 &= -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3.27')$$

формулалар ҳосил бўлади. Одатда (3.25), (3.26), (3.27′) формулаларни *координаталар системасини алмаштириш формулалари* дейилади.

Энди Декарт координаталар системасини алмаштириш формулаларидан фойдаланиб учбурчакнинг юзини топайлик.

Учларидан бири координаталар бошида бўлган OAB учбурчак берилган бўлсин.

59-чизмадан равшанки,

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \sin\varphi.$$

Бу ерда

$$\sin\varphi = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1.$$

Агар учбурчакнинг икки учи $A(x_2, y_2)$ ва $B(x_1, y_1)$ нуқталарда бўлсин десак, у ҳолда

$$|\sin\varphi| = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}$$

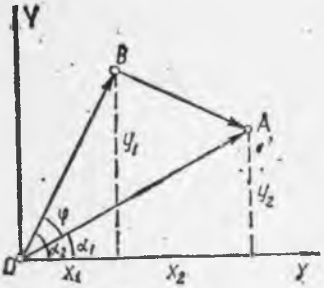
бўлади. Шунинг учун

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\frac{|x_1y_2 - y_1x_2|}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| =$$

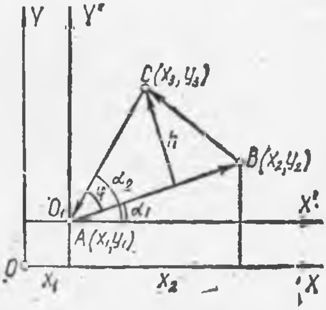
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

формулага эгамиз.

Айтайлик, учбурчакнинг учлари $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ нуқталарда бўлсин. $\triangle ABC$ нинг юзини топамиз



59- чизма.



60 - чизма.

(60-чизма). Бу ҳолда учбурчакнинг юзи учун ушбуга эгамиз:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{h}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\varphi.$$

Биз координаталар бошини $A(x_1, y_1)$ нуқтага кўчириб, координата ўқлари эски ўқларга параллел бўлган ҳолдаги формулани эътиборга олсак,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|x_2'y_3' - y_2'x_3'| = \frac{1}{2}\ \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2' & y_2' \\ x_3' & y_3' \end{vmatrix}$$

ифодага эга бўламиз. Бу ерда

$$x_2' = x_2 - x_1, \qquad x_3' = x_3 - x_1,$$
$$y_2' = y_2 - y_1, \qquad y_3' = y_3 - y_1$$

эканлигидан фойдаланиб, узил-кесил

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \bmod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

формулани ҳосил қиламиз.

1- мисол. Учбурчак учларининг координаталари берилган: $A\ (4,\ 2)$, $B\ (9,\ 4)$ ва $C\ (7,\ 6)$. Бу учбурчакнинг юзи ва периметри топилсин.

Ечиш. а) учбурчакнинг юзини топиш учун (*) формуладан фойдаланамиз:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(16 + 14 + 54 - 28 - 42) = \frac{1}{2} \times$$

$\times\ 14 = 7$ кв. бирлик;

б) учбурчакнинг периметри p ни ҳисоблайлик:

$$p = |AB| + |BC| + |AC|.$$

Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига асосан:

$$|AB| = \sqrt{(9-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{29}.$$

$$|BC| = \sqrt{(7-9)^2 + (6-4)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$|AC| = \sqrt{(7-4)^2 + (6-2)^2} = 5.$$

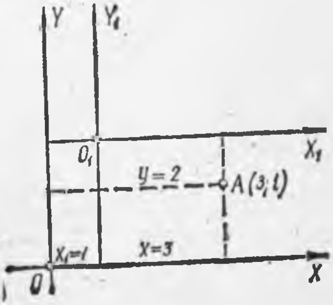
Демак, $p = \sqrt{29} + 2\sqrt{2} = 5$.

2- мисол. Координата ўқларини параллел кўчирганда $A\ (3,1)$ нуқта янги $(2,\ -1)$ координаталарга эга бўлади. Эски ва янги координата системаларини ҳамда A нуқтани ясанг.

Ечиш. Масала шартига асосан: $x = 3$, $y = 1$, $x_1 = 2$, $y_1 = -1$. Бу қийматларни (3.25) га қўйсак,

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 2 + x_0, \\ 1 &= -1 + y_0 \end{aligned}\right\} \text{ ёки } \left\{\begin{aligned} x_0 &= 1, \\ y_0 &= 2. \end{aligned}\right.$$

Демак, координаталар боши $O\ (1,\ 2)$ нуқтага кўчирилган (61- чизма).



61- чизма

3- мисол. Координата ўқларининг йўналишини маълум бир ўткир бурчакка бурилганда $A\ (1,\ 4)$ нуқтанинг янги системадаги абсциссаси 4 га тенг. Ўша бурчакни топинг. Иккала системани ва нуқтани ясанг.

Ечиш. Масала шартига асосан: $x = 2$, $y = 4$, $x_1 = 4$. Бу қийматларни (3.26) формулаларга қўйсак,

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 4\cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ 4 &= 4\sin\alpha + y_1 \cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

ға эга бўламиз. Бу системанинг иккала тенгламасининг ҳар иккала томонини квадратга кўтариб қўшсак,

$$20 = 16 + y_1^2 \text{ ёки } (y_1)_{1,2} = \pm 2.$$

$y_1 = 2$ қийматни қараймиз. Бу қийматни (А) нинг биринчи тенгламасига қўйсак:

$$2 = 4\cos\alpha - 2\sin\alpha \Rightarrow 1 = 2\cos\alpha - \sin\alpha$$

ёки

$$1 + \sin\alpha = 2\cos\alpha.$$

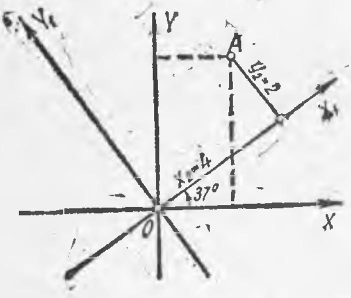
Бу ифодани ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha,$$
$$1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 4 - 4\sin\alpha,$$
$$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 3 = 0.$$

Бундан $(\sin\alpha)_{1;\,2} = \frac{-2 \pm 8}{10}$; $(\sin\alpha)_1 = \frac{-2 + 8}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6;\ \alpha \approx 37°$,

$$(\sin\alpha)_2 = \frac{-2 - 8}{10} = -1;\ \alpha_2 = 270°.$$

$\alpha = 270°$ қиймат масала шартини қаноатлантирмайди (62- чизма).



62- чизма.

4- мисол. Координаталар бошини кўчириб, ушбу $x^2 + 4y^2 - 16x - 8y = 3$ тенгламани соддалаштиринг. Эски ва янги координата системаларини ҳамда эгри чизиқни ясанг.

Ечиш. Координаталар бошини ҳозирча ихтиёрий $O_1(x_0, y_0)$ нуқтага кўчирамиз. Ўтиш формулаларини, яъни $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$ ни берилган тенгламадаги x ва y нинг ўрнига қўйиб топамиз:

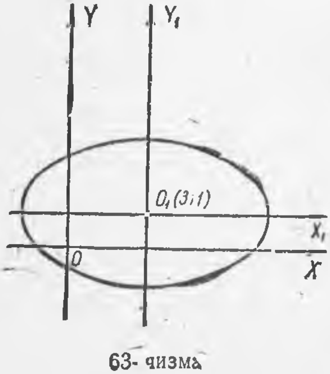
$$(x_1 + x_0)^2 + 4(y_1 + y_0)^2 - 6(x_1 + x_0) - 8(y_1 + y_0) = 3.$$

Энди қавсларни очиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$x_1^2 + 4y_1^2 + (2x_0 - 6) + (8y_0 - 8)\,y_1 = 3 - x_0{}^2 - 4y_0{}^2 + 6\,x_0 + 8y_0.$$

Энди x_0, y_0 ихтиёрий бўлганлигидан, уларни шундай танлаб оламизки, x_1 ва y_1 ҳадлар йўқоладиган бўлсин, яъни

$$\left.\begin{matrix} 2\,x_0 - 6 = 0, \\ 8\,y_0 - 8 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ ёки } \left\{\begin{matrix} x_0 = 3, \\ y_0 = 1. \end{matrix}\right.$$



63- чизма

Демак, O (3, 1) (янги координаталар боши) эканини ҳисобга олсак, берилган тенглама янги системада ушбу кўринишга келади:

$$\frac{x_1^2}{14} + \frac{y_1^2}{7/2} = 1.$$

Бу эгри чизиқ 63- чизмада тасвирланган бўлиб, у эллипсдан иборат.

3- бобга доир машқлар

1. $2x - y + 3 = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти ва ординаталар ўқидан кесган кесмасини топинг.
Жавоб: $k = \operatorname{tg}\varphi = 2;\ b = 3$.

2. Oy ўқдан $b = 3$ бирлик кесма ажратувчи ҳамда Ox ўқ билан $\varphi = 150^\circ$ бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

$$\textit{Жавоб:}\ y = -\frac{\sqrt{3}x + 3.}{3}$$

3. Oy ўқдан 2 бирлик кесма ажратувчи ҳамда $x - 2y + 3 = 0$ тўғри чизиқ билан 45° ли бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.
Жавоб: $y = 3x + 2$.

4. Тўғри чизиқнинг $x + 3y - 4 = 0$ умумий тенгламасини нормал формага келтиринг.

Жавоб: $\frac{1}{\sqrt{10}}x + \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{4}{\sqrt{10}} = 0$.

5. Координаталар бошидан $3x - 6y + 5 = 0$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлигини ҳамда унинг асосининг координаталарини аниқланг.

Жавоб: $p = \frac{2}{3};\ N\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

6. Координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги $p = \sqrt{2}$. Бу перпендикуляр ўқнинг мусбат йўналиши билан $\varphi = 45^\circ$ ли бурчак ҳосил қилади. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2} = 0$.

7. $6x - 8y - 15 = 0$ тўғри чизиқнинг йўналтирувчи косинусларини аниқланг.

Жавоб: $\cos\alpha = \frac{3}{5};\ \sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

8. $A\ (2,5)$ нуқтадан $6x + 8y - 6 = 0$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.
Жавоб: $\delta = 4{,}6$.

9. $5x - 12y - 13 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлиб, ундан 3 масштаб бирлик узоқликда ётувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.
Жавоб: $5x - 12y + 26 = 0$ ва $5x - 12y - 52 = 0$.

10. $6x - 2y + 5 = 0$ ва $4x + 2y - 7 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқланг.

Жавоб: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

11. $A\ (5, -4)$ нуқтадан ўтувчи ва $3x + 2y - 7 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $2x - 3y - 22 = 0$.

12. $A\ (1, 2)$ ва $B\ (4, 3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.
Жавоб: $x - 3y + 5 = 0$.

13. $x-y-4=0$ ва $2x-11y+37=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ҳамда координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $y=\frac{5}{9}x$.

14. Параллелограммнинг икки қўшни томонларининг тенгламалари $x-y-1=0$, $x-2y=0$ ва диагоналларининг кесишиш нуқтаси $N(3,-1)$ бўлса, унинг қолган томонлари тенгламасини тузинг.

Жавоб: $x-2y-10=0$ ва $x-y-7=0$.

15. Айлананинг ушбу

$$2x^2+2y^2-3x+4y+2=0$$

тенгламасига кўра унинг марказини ва радиусини аниқланг:

Жавоб: $C\left(\frac{3}{4},-1\right)$; $R=\frac{3}{4}$.

16. $A(-1,1)$ ва $B(1,-3)$ нуқталардан ўтиб маркази $2x-y+1=0$ тўғри чизиқда ётган айлана тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{69}{9}$.

17. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган:

$9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

Бу учбурчакка ташқи чизилган айлана тенгламасини тузинг.

Жавоб: $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$.

18. Ўзаро параллел бўлган $2x+y-5=0$ ва $2x+y+15=0$ тўғри чизиқларга уринувчи айлана тўғри чизиқлардан бири $2x+y-5=0$ га $A(2,1)$ нуқтада уринади. Айлана тенгламасини тузинг.

Жавоб: $(x+2)^2+(y+1)^2=20$.

19. $A(4,4)$ нуқтадан ва $x^2+y^2+4x-4y=0$ айлана билан $y=-x$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтувчи айлананинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $x^2+y^2-8y=0$.

20. λ нинг қандай қийматларида $x^2+y^2-6x-4y+\lambda=0$ айлана билан $2x-y+1=0$ тўғри чизиқ ўзаро кесишади.

Жавоб: $\lambda=8$.

21. $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ айлана ва $Ax+By+C=0$ тўғри чизиқ берилган. Берилган айлана билан кесишиб, берилган тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $A(x-a)+B(y-b)\pm R\sqrt{A^2+B^2}=0$.

22. Координата ўқларига симметрик бўлган эллипс $A(4,1)$ ва $B\left(\frac{5\sqrt{5}}{3},-2\right)$ нуқталардан ўтади. Эллипснинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

23. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ эллипснинг $2x-y-9=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Жавоб: $N_1\left(\frac{69}{13};\frac{21}{13}\right)$; $N_2(3;-3)$.

24. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ эллипсга $(2,-3)$ нуқтада уринувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Жавоб: $y=\frac{1}{2}x-4$.

25. $M(x, y)$ нуқта $x = -2$ тўғри чизиққа нисбатан $F(-8,0)$ нуқтага икки баробар яқинроқда ҳаракат қилади. Унинг траекториясини аниқланг.

Жавоб: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1.$

26. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ эллипснинг $2x - y + 17 = 0$ тўғри чизиққа параллел бўлган уринмаларини топинг.

Жавоб: $2x - y + 12 = 0$ ва $2x - y - 12 = 0$.

27. Эллипснинг катта ярим ўқи $a = 12$, эксцентриситети $\varepsilon = 0,5$. Эллипснинг тенгламасини ҳамда фокуслар орасидаги масофани топинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$; $|F_1 F_2| = 2c = 12$.

28. Координата ўқларига нисбатан симметрик эллипс $N(2\sqrt{3}, 6)$ ва $A(6, 0)$ нуқталардан ўтади. Унинг тенгламаси, эксцентриситети ва нуқтадан фокусларгача бўлган масофаларни топинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $r_1 = 3$; $r_2 = 9$.

29. Координата ўқларига нисбатан симметрик ҳамда $M(2a, a\sqrt{3})$ нуқтадан ўтувчи ва эксцентриситети $\varepsilon = \sqrt{2}$ бўлган гипербола тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $x^2 - y^2 = a^2$.

30. Асимптотаси ҳақиқий ўқи билан 60° бурчак ташкил этувчи гиперболанинг эксцентриситетини топинг.

Жавоб: $\varepsilon = 2$.

31. Бирор учидан фокусларигача масофалари 9 ва 1 га тенг бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

32. Гипербола асимптоталарининг тенгламалари $4y + 3x = 0$ ва $4y - 3x = 0$ ҳамда фокуслари орасидаги масофа $2c = 10$. Унинг каноник тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

33. Асимптоталари орасидаги бурчак 120° ва фокуслари абсциссалар ўқида бўлиб, улар орасидаги масофа $2c = 4\sqrt{3}$ га асосланиб гипербола тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1.$

34. Гиперболанинг эксцентриситети $\varepsilon = 1,5$; M нуқтанинг фокал радиуси $r = 12$, шу нуқтадан y билан бир томонда ётувчи директрисагача бўлган масофани ҳисобланг.

Жавоб: $d = 8$.

35. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ гипербола асимптоталари билан $4x - 3y - 8 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган учбурчак юзини ҳисобланг.

Жавоб: $S = \frac{32}{9}$ кв. бирлик.

36. Қуйидаги гиперболанинг тенгламасини энг содда шаклга келтиринг. $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.

Жавоб: $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)}{9} = 1.$

37. Асимптоталарининг тенгламалари $y = \pm\ 3x$ ва директрисаларининг тенгламалари $x = \pm 1$ бўлган гипербола тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{90} = 1$.

38. Гиперболага ўтказилган ҳар қандай уринмадан гиперболанинг икки фокусигача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси ўзгармас сон бўлишини исбот қилинг.

39. Горизонтга нисбатан ўткир бурчак остида отилган тош парабола ёйини чизиб, бошланғич жойдан 16 метр узоққа тушди. Тошнинг 12 м баландликка кўтарилганлигини билган ҳолда унинг параболик траекторияси тенгламасини тузинг.

Жавоб: $x^2 = -\frac{16}{3}(y - 12)$.

40. Фонтандан отилиб чиқаётган сув оқими параметри $p = 0{,}1$ бўлган парабола шаклини олади. Сувнинг отилиб чиқаётган жойдан 2 м узоқликка тушаётганлиги маълум бўлса, отилиб чиқувчи сувнинг баландлигини топинг.

Жавоб: $h = 5$ м.

41. $x^2 + y^2 - 16\ x = 0$ айлана $x + y = 0$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталаридан ўтиб, Oy ўққа нисбатан симметрик бўлган парабола ва унинг директрисаси тенгламаларини тузинг.

Жавоб: $x^2 = -3y,\ 4y - 3 = 0$.

42. Фокуси $4\ x - 3\ y + 4 = 0$ тўғри чизиқ билан Ox ўқнинг кесишиш нуқтасида бўлган парабола тенгламаси ёзилсин.

Жавоб: $y^2 = 4\ x$.

43. $y^2 = 6\ x$ параболада фокал радиус-вектори 4,5 га тенг бўлган нуқтани топинг.

Жавоб: $N\ (3; \pm 3\sqrt{2})$.

44. $y^2 = 8\ x$ параболага $A\ (0, -2)$ нуқтада ўтказилган уринмаларнинг тенгламаларини ёзинг.

Жавоб: $x = 0,\ x + y + 2 = 0$.

45. $y^2 = 2\ px$ параболага мунтазам учбурчак ички чизилган. Учбурчак учларининг координаталарини аниқланг.

Жавоб: $O\ (0,0);\ A\ (6; +2\sqrt{3});\ B\ (6, -2\sqrt{3})$.

46. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг ушбу

$$5x^2 + 4xy + 8\ y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

тенгламасини энг содда кўринишга келтиринг ва бу эгри чизиқни ясанг.

Жавоб: $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1$.

47. Ушбу тенгламани соддалаштиринг:

$$32\ x^2 + 52\ xy - 7y^2 + 180 = 0.$$

Жавоб: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$.

48. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг ушбу

$$2\ x^2 + 4\ y^2 - y - 1 = 0$$

тенгламасини энг содда кўринишга келтиринг ва бу эгри чизиқни ясанг

Жавоб: $x_1^2 = \frac{1}{2}\ y_1$.

4- БОБ. ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

24- §. Фазода текислик

1°. **Текисликнинг умумий тенгламаси.** 4.1- теорема. *Фазода ҳар қандай текислик* x, y, z *ўзгарувчи координаталарга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенглама билан тасвирланади ва аксинча,* x, y, z *ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали ҳар қандай алгебраик тенглама фазода текисликни тасвирлайди.*

x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши

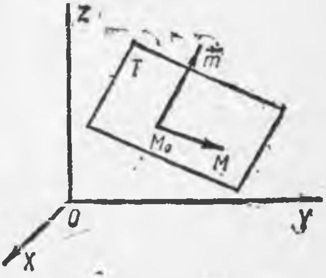
$$(T):\ Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (4.1)$$

бўлиб, бунда A, B, C, D — ўзгармас сонлар.

Исбот. а) биз (T) текисликка перпендикуляр бўлган $\vec{m} \neq \vec{0}$ векторни (T) *текисликнинг нормали* деймиз. Уч ўлчовли фазода Декарт координаталар системаси тайинланган бўлсин. Текисликнинг бу координаталар системасига нисбатан тайин $M(x_0, y_0, z_0) \in T$ нуқтасини олайлик. Агар $\vec{m}$ нормалнинг шу координаталар системасидаги координаталари

$$\vec{m} = \{A, B, C\} = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$$

бўлиб, $M(x, y, z)$ фазонинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда $M \in T$ бўлиши учун $\overrightarrow{M_0M}$ вектор $\vec{m}$ векторга перпендикуляр, яъни уларнинг скаляр кўпайтмаси $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{m} = 0$ бўлиши зарур ва етарли (64-чизма). $\overrightarrow{M_0M}$ векторнинг координаталари



64- чизма.

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2 + (z - z_0)\vec{e}_3$$

бўлгани учун

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m} = A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Бундан

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$$

ёки

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

бу ерда

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Теореманинг бир қисми исботланди.

б) Айтайлик, (x_0, y_0, z_0) учлик (4.1) тенгламанинг ечими бўлсин, у ҳолда x, y, z ўрнига (x_0, y_0, z_0) ечимни қўйиб, ундан

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0$$

га эга бўламиз. D нинг топилган бу қийматини (4.1) тенгламага қўйсак,

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (4.2)$$

ёки вектор кўринишда

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{m}=0$$

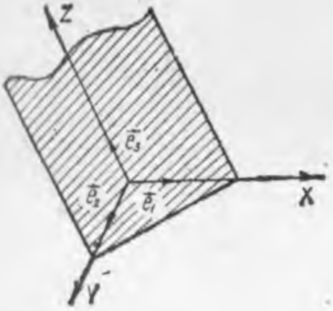
тенгламага эга бўламиз. Бу муносабатдан $M_0(x_0, y_0, z_0)\in T$ экани келиб чиқади. Бу мулоҳазалар теоремани тўла исботлайди.

2°. Текисликнинг координата ўқларига нисбатан жойлашуви. Текисликнинг умумий тенгламасидаги баъзи коэффициентлар нолга тенг бўлган ҳолда текисликнинг фазода қандай жойланишини текширамиз.

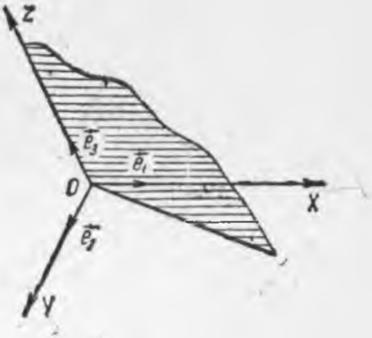
1) $D=0$ бўлсин, бу ҳолда текисликнинг умумий тенгламаси $Ax+By+Cz=0$ кўринишни олади. Бу тенглама координаталар бошидан ўтган текисликни тасвирлайди, чунки координаталар боши $O(0, 0, 0)$ нинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради;

2) агар T текисликнинг $\vec{m}=\{A, B, C\}$ нормалининг координаталаридан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда $\vec{m}$ вектор мос ўққа перпендикуляр бўлади. Масалан, $C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+By+D=0$ текислик Oz ўққа параллел бўлган текисликни аниқлайди (65- чизма);

3) агар $C=0$ ва $D=0$ бўлса, $Ax+By=0$ тенглама Oz ўқдан ўтган текисликни тасвирлайди (66- чизма). Агар



65- чизма.



66- чизма.

$A=0$, $D=0$ бўлса, текислик Ox ўқдан ўтади. $B=0$, $D=0$ бўлса, текислик Oy ўқдан ўтади;

4) энди $A\neq 0$, $B=0$, $C=0$, $D\neq 0$ бўлсин, бу ҳолда $Ax+D=0$ ёки $x=-\frac{D}{A}$ тенглама (yOz) координаталар текислигига параллел ёки ундан $k=\left|-\frac{D}{A}\right|$ га тенг масофада ётган текисликни аниқлайди (67- чизма).

Агар тенглама $By+D=0$ бўлса, у (xOz) координаталар текислигига параллел ва ундан $\left|-\frac{D}{B}\right|$ га тенг бўлган масофада жойлашган текисликни тасвирлайди.

Шунга ўхшаш, $Cz+D=0$ тенглама (xOy) координаталар тѐкислигига параллел ва ундан $\left|-\frac{D}{C}\right|$ га тенг масофада жойлашган текисликни тасвирлайди;

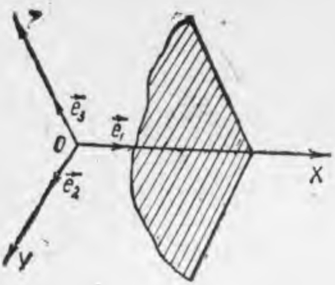
5) қуйидаги:

а) $A\neq 0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$;
б) $A=0$, $B\neq 0$, $C=0$, $D=0$;
в) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$, $D=0$

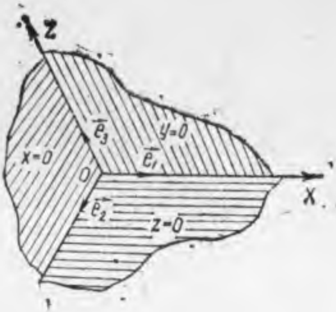
ҳолларда мос равишда $Ax=0$, $By=0$, $Cz=0$ ёки $x=0$, $y=0$, $z=0$ тенгламаларга эгамиз. Улар мос равишда (xOy), (xOz), (yOz) координата текисликларини тасвирлайди (68- чизма).

Энди текисликнинг $Ax+By+Cz+D=0$ тенгламасини қуйидагича ёзайлик:

$$Ax+By+Cz=-D \text{ ёки } \frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1.$$



67- чизма.



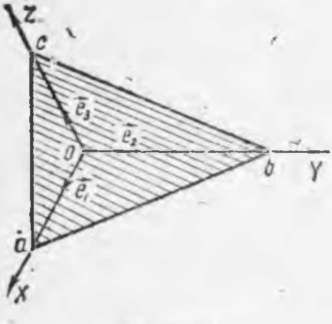
68- чизма.

Бундан

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Агар

$$-\frac{D}{A}=a,\quad -\frac{D}{B}=b,\quad -\frac{D}{C}=c$$



69- чизма.

белгилашларни киритсак,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани *текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси* деб аталади (69- чизма).

3°. **Уч текисликнинг ўзаро жойланиши.** (T_1), (T_2), (T_3) текисликлар берилган бўлсин:

$$(T_1):\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$(T_2):\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$(T_3):\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0.$$

Бу текисликларнинг нормал векторларини ёзамиз:

$$\vec{n}_1=\{A_1,\ B_1,\ C_1\},\quad \vec{n}_2=\{A_2,\ B_2,\ C_2\},\quad \vec{n}_3=\{A_3,\ B_3,\ C_3\}.$$

Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлган векторлар бўлсин, яъни

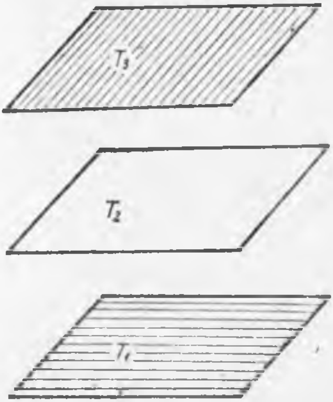
$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \lambda\,\vec{n}_2,\\ \vec{n}_2 &= \lambda\,\vec{n}_3.\end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

а) (4.3) муносабатлар бажарилиб, $\frac{D_1}{D_2} = \frac{A_1}{A_2}$, $\frac{D_1}{D_3} = \frac{A_1}{A_3}$ тенгликлар ўринли бўлганда учала (T_1), (T_2) ва (T_3) текислик устма-уст тушади;

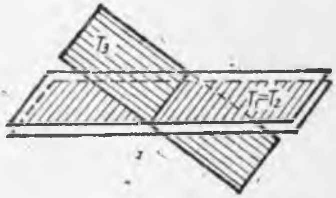
б) (4.3) муносабат ўринли бўлиб,

$$\frac{D_1}{D_2} \neq \frac{A_1}{A_2}, \quad \frac{D_1}{D_3} \neq \frac{A_2}{A_3}$$

шартлар бажарилса, (T_1), (T_2), (T_3) текисликлар ўзаро параллел бўлади (70-чизма);



70- чизма.



71- чизма.

2) $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ векторлардан фақат иккитаси чизиқли боғлиқ бўлсин, яъни

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \lambda\vec{n}_2,\\ \vec{n}_2 &\neq \lambda_1\vec{n}_3.\end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

а) (4.4) муносабатлар ўринли бўлиб,

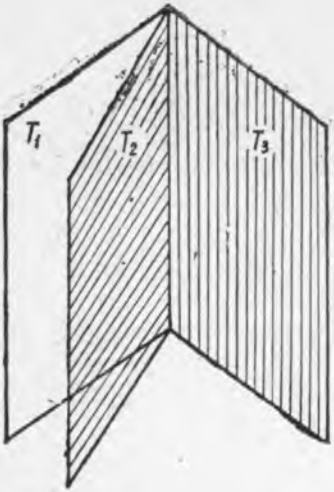
$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

шарт бажарилса, (T_1) ва (T_2) текисликлар устма-уст тушиб, (T_3) текислик улар билан кесишади (71- чизма);

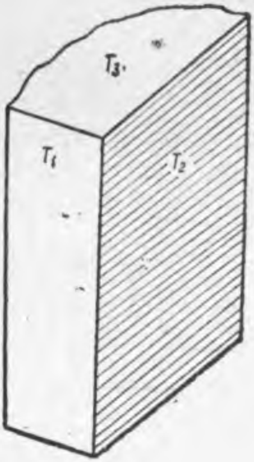
б) (4.4) муносабатлар ўринли бўлиб,

$$\frac{D_1}{D_2} \neq \frac{A_1}{A_2}$$

шарт бажарилса, (T_1) ва (T_2) текисликлар ўзаро параллел бўлиб, (T_3) бу параллел текисликлар билан кесишади;



72- чизма



73- чизма

3) агар

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2, \\ \vec{n}_2 \neq \lambda_1 \vec{n}_3\end{array}\right\} \qquad (4.5)$$

муносабатлар ўринли бўлиб,

а) $(T_1 \cap T_2) \equiv (T_1 \cap T_3)$

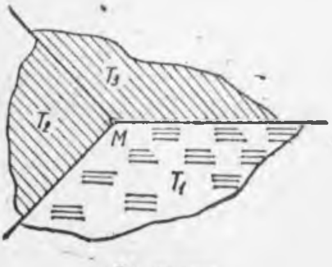
шарт бажарилса, (T_1), (T_2), (T_3) текисликлар бир тўғри чизиқ бўйлаб кесишади (72- чизма), яъни текисликлар боғлами ҳосил бўлади;

б) (4.5) муносабатлар ўринли бўлиб.

$$(T_1 \cap T_2) \not\equiv (T_1 \cap T_3)$$

шарт бажарилса, (T_1), (T_2), (T_3) текисликлар кесишиб призма ҳосил қилади (73- чизма);

в) агар $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ векторлар чизиқли эркли бўлса, (T_1), (T_2), (T_3) текисликлар бир нуқтада кесишади (74- чизма).



74- чизма,

25- §. Текисликнинг нормал тенгламаси. Нуқтадан текисликкача бўлган масофа

Координаталар бошидан ўтмайдиган текисликлар учун кўпинча текисликнинг нормал тенгламасидан фойдаланилади. Бунинг учун энг олдин $\vec{n}_e$ бирлик нормал аниқланади. $\vec{n}_e$ вектор Ox, Oy, Oz координата ўқлари билан мос равишда α, β, γ бурчаклар ташкил қилса, у ҳолда

$$\vec{n}_e = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\} \Rightarrow \vec{n}_e = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\beta\cdot\vec{e}_2 + \cos\gamma\cdot\vec{e}_3$$

бўлиши маълум. (OP) координаталар бошидан T текисликка туширилган перпендикуляр бўлиб, унинг узунлиги

$$|OP| = p$$

га тенг бўлсин.

$\vec{n}$ ва $\vec{OP}$ векторлар коллинеар (бир хил йўналган) бўлгани учун

$$\vec{OP} = p\vec{n}_e.$$

Қуйидаги муносабатларга асосланиб текисликнинг нормал тенгламасини келтириб чиқарайлик:

$$M(x,\ y,\ z) \in T;\ \ \vec{n} \perp T;\ \ \vec{n}_e \perp T;$$
$$\vec{PM} \perp \vec{n};\ \ |\vec{n}_e| = 1,\ \ ON \cap T = P,$$

Равшанки, 75- чизмадан

$$(\vec{OM} - p\vec{n}_e)\cdot\vec{n}_e = 0$$

ёки

$$\vec{OM}\cdot\vec{n}_e = p\vec{n}_e^2 = p.$$

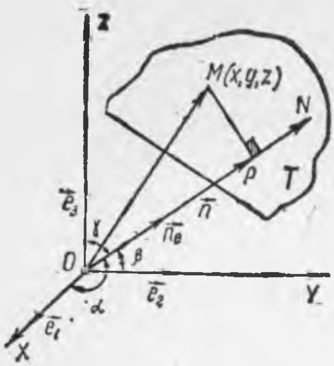
Агар $\vec{OM} = \{x,\ y,\ z\} \Rightarrow \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

эканини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

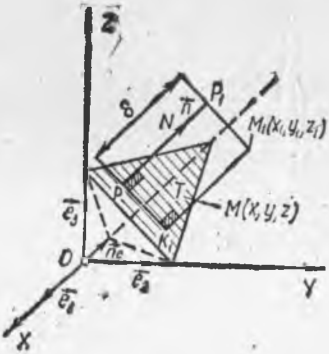
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

ёки

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (4.6)$$



75- чизма.



76- чизма.

Бу тенгламани одатда *текисликнинг нормал тенгламаси* дейилади.

Энди ихтиёрий нуқтадан текисликкача бўлган масофани топишни кўрайлик (76- чизма). Бунда қуйидагиларга асосланамиз:

$$|\vec{n}_e| = 1;\ \overrightarrow{ON} = \vec{n};\ M_1K_1 \parallel PP_1;$$

$$M(x,\ y,\ z) \in T;\ \overrightarrow{ON} \perp T;\ [M_1K_1] \perp T;$$

$$\overrightarrow{ON} \cap T = P;\ M_1K_1 \# PP_1 = \delta;$$

$$(T):\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Чизмадан кўринадики, $\overrightarrow{M_1M}$ вектор билан $\vec{n}_e$ бирлик векторнинг скаляр кўпайтмаси M_1 нуқтадан T текисликкача бўлган δ масофага тенг, яъни

$$\delta = \overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{n}_e = (\vec{r}_1 - \vec{r}) \cdot \vec{n}_e.$$

Агар $\vec{r}_1$, $\vec{r}$ радиус-векторларнинг ҳамда $\vec{n}_e$ бирлик векторнинг координаталарини ҳисобга олсак, охирги тенгликни бундай ёзиш мумкин:

$$\delta = \{x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z\} \cdot \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$$

ёки

$$\delta = (x_1 - x)\cos\alpha + (y_1 - y)\cos\beta + (z_1 - z)\cos\gamma, \quad (4.7)$$

бундан

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$$

га эга бўламиз. Бу формуладан шуни айтиш мумкинки, *$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан текисликкача бўлган масофани топиш учун текисликнинг нормал тенгламасидаги ўзгарувчи x, y, z координаталар ўрнига M_1 нуқтанинг x_1, y_1, z_1 координаталарини қўйиш кифоя.*

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан $Ax + By + Cz + D = 0$ тенглама билан берилган текисликкача бўлган масофа

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{4.8}$$

формула бўйича топилади. (4.8) формулани исбот этиш учун текислик тенгламасининг икки томонини нормалловчи кўпайтувчи $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ га кўпайтириб, йўналтирувчи косинуслар таърифидан фойдаланиш етарли.

26- §. Уч нуқта орқали ўтувчи текислик тенгламаси

Берилган учта $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нуқтадан ўтувчи ягона текислик тенгламасини топайлик.

Қуйидаги учта векторни қараймиз (77- чизма):

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \{x', y', z'\} = \{x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z\},$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r} = \{x'', y'', z''\} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$

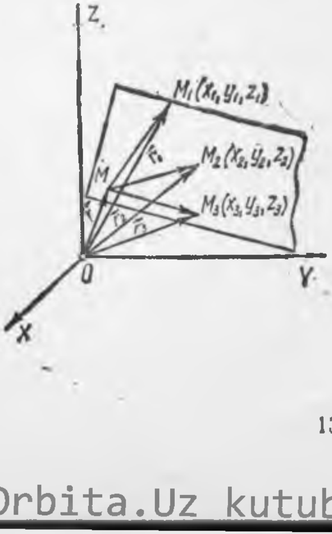
$$\overrightarrow{MM_3} = \vec{r}_3 - \vec{r} = \{x''', y''', z'''\} = \{x_3 - x, y_3 - y, z_3 - z\}$$

$M(x, y, z) \in T$ бўлиши учун $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{MM_2}$, $\overrightarrow{MM_3}$ векторларнинг компланар бўлиши, яъни уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Уч векторнинг компланарлик шартидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$



Детерминантнинг хоссаларидан фойдаланиб, бу учинчи тартибли детерминантни тўртинчи тартибли детерминант билан алмаштирамиз:

$$\begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x & x_3-x \\ y_1-y & y_2-y & y_3-y \\ z_1-z & z_2-z & z_3-z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ёки барибир

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.9)$$

(4.9) тенглама учта M_1, M_2, M_3 нуқта орқали ўтувчи (T) текисликнинг тенгламасидан иборат. Агар (4.9) нинг чап томонидаги детерминантни биринчи сатр элементлари бўйича ёйсак, текисликнинг умумий тенгламасини ҳосил қиламиз, бошқача айтганда, (4.9) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

27- §. Икки текислик орасидаги бурчак

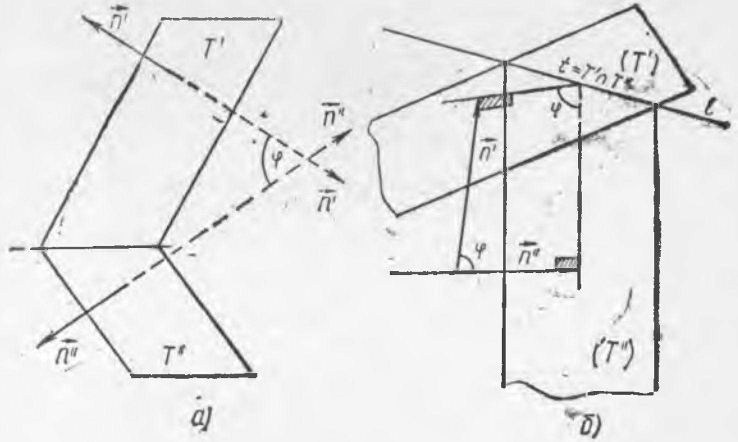
Икки текислик орасидаги бурчак деб бу текисликларнинг нормал векторлари орасидаги бурчаклардан ихтиёрий биттасига айтилади.

Ҳар қайси текисликнинг қарама-қарши йўналган нормаллари мавжуд бўлгани учун берилган икки T' ва T'' текисликнинг нормаллари орасидаги бурчак бир қийматли аниқланмайди: бу бурчак φ га ёки $\pi-\varphi$ га тенг бўлиши мумкин (78- *а* чизма). Агар $\vec{n}'$ ва $\vec{n}''$ мос равишда T' ва T'' текисликларнинг нормаллари бўлса, у ҳолда (78- *б* чизма):

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}'\cdot\vec{n}''|}{|\vec{n}'|\cdot|\vec{n}''|}.$$

Агар берилган икки текислик тенгламалари қуйидагича

$$(T'):\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$(T''):\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



78- чизма.

ёзилган бўлса, бу текисликларнинг нормал векторлари (78- а, б- чизма)

$$\vec{n'} = \{A_1,\ B_1,\ C_1\},\ \vec{n''} = \{A_2,\ B_2,\ C_2\}$$

бўлади. У ҳолда узил-кесил ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$\cos(T' \overset{\wedge}{,} T'') = \cos(\vec{n'} \overset{\wedge}{} \vec{n''}) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{4.10}$$

Энди текисликларнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартларини келтириб чиқарамиз.

а) T' ва T'' текисликлар параллел бўлиши учун уларнинг нормал векторлари коллинеар бўлиши етарли, яъни

$$\vec{n'} = \lambda\, \vec{n''},\ \lambda \neq 0 \text{ ёки } A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2.$$

Агар $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу тенгликлардан

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{4.11}$$

келиб чиқади. Агар (4.11) тенгликлар бажарилса, T' ва T'' текисликлар, равшанки, параллел бўлади. Демак, *T' ва T'' текисликлар параллел бўлиши учун* (4.11) *тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.*

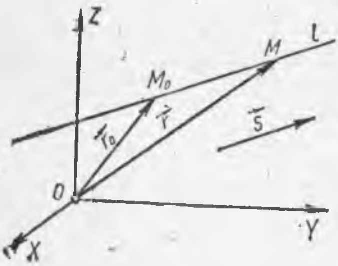
б) T' ва T'' текисликлар перпендикуляр бўлиши учун уларнинг нормал векторлари ўзаро перпендикуляр бўлиши етарли, яъни $(\vec{n'} \perp \vec{n''}) \Rightarrow (\vec{n'} \cdot \vec{n''}) = 0$. Бундан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (4.12)$$

Агар (4.12) тенглик бажарилса, равшанки, T' ва T'' текисликлар перпендикуляр бўлади. Демак, *T' ва T'' текисликлар перпендикуляр бўлиши учун* (4.12) *тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.*

28- §. Фазода тўғри чизиқ

1°. Тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси. l ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг фазодаги ҳолати бирор тайин $M_0 \in l$ нуқта ва l да ётувчи ёки унга параллел бўлган $\vec{s}$ вектор билан тўла аниқланади. Фазода Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Берилган M_0 ва ихтиёрий M нуқталарнинг радиус-векторларини мос равишда $\vec{r_0}$ ва $\vec{r}$ билан белгилаймиз. Энди қуйидагича мулоҳаза юритамиз (79- чизма):



79- чизма.

$$M_0(\vec{r_0}),\ M(\vec{r}) \in l \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \in l$$

ёки шартга кўра $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ бўлгани учун $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{s}$ ёки $\vec{r} - \vec{r_0} = \lambda\vec{s}$, $\lambda \neq 0$. Бундан

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{s} \qquad (4.13)$$

тенглама келиб чиқади. Уни *тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси* дейилади.

2°. Тўғри чизиқнинг параметрик ва каноник тенгламалари. l тўғри чизиқ ўзининг вектор тенгламаси

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{s}$$

билан берилган бўлсин. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта $\vec{r_0}$ радиус-векторнинг охири, $M(x, y, z)$ эса l тўғри чизиқнинг ўзгарувчи $\vec{r}$ радиус-векторининг охири бўлсин, $\vec{s}$ векторнинг Ox, Oy, Oz координата ўқларига проекцияларини мос равишда m, n, p билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\lambda\vec{s}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-x_0=\lambda m,\\ y-y_0=\lambda n,\\ z-z_0=\lambda p.\end{array}\right\}$$

Бундан ушбу тенгликларга эга бўламиз:

$$\left|\begin{array}{l}x(\lambda)=x_0+\lambda m,\\ y(\lambda)=y_0+\lambda n,\\ z(\lambda)=z_0+\lambda p.\end{array}\right. \tag{4.14}$$

(4.14) тенгламалар тўплами *тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси* дейилади. Параметр $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ турли қийматлар қабул қилганда l тўғри чизиқнинг турли нуқталари ва фақат шу тўғри чизиқнинг нуқталари ҳосил бўлади. Шунинг учун $(x(\lambda),\ y(\lambda),\ z(\lambda))\in l$, $\lambda\in R$ деб ёзиш мумкин. Равшанки, (4.14) муносабатлардан параметр λ ни чиқариш мумкин. Натижада

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{4.15}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Одатда (4.15) тенгламалар системаси *тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси* дейилади.

Баъзи хусусий ҳолларни таъкидлаб ўтамиз. Агар l тўғри чизиқ координата ўқларидан бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда шу l тўғри чизиқда ётувчи исталган векторнинг шу ўқдаги проекцияси нолга тенг. Масалан, агар l тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр бўлса, $m=0$ бўлади. Бу ҳолда l тўгри чизиқнинг тенгламаси бундай ёзилади:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Бу тенгламада $\frac{x-x_0}{0}$ каср символик равишда ёзилган (симметрия учун). Аслида биз

$$\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\ x=x_0$$

тенгликларга эгамиз.

Шунга ўхшаш, агар l тўғри чизиқ иккита координата ўқига, масалан, Ox ва Oy ўқларга бир вақтда перпендикуляр бўлса, унинг каноник тенгламаси бундай ёзилади:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{x-z_0}{p},$$

Энди l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар каноник тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$(l_1):\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\ M_1(x_1,\ y_1,\ r_1)\in l_1,$$

$$(l_2):\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_3}{p_2},\ M_2(x_2,\ y_2,\ z)_2\in l_2.$$

Бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари мос равишда

$$\vec{s}_1=\{m_1,\ n_1,\ p_1\},\ \ \vec{s}_2=\{m_2,\ n_2,\ p_2\}$$

бўлади. Бунда $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар орасидаги муносабатларни текширамиз. $\vec{s}_1$ ва $\vec{s}_2$ векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлсин, яъни

$$\vec{s}_1=\lambda\vec{s}_2,\ \lambda\neq 0\ (l_1,\ l_2\subset T).$$

а) $\vec{s}$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлганда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушади. Масалан, ушбу

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3},\\[2ex] \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-6}{6}\end{array}\right\}$$

тўғри чизиқлар устма-уст тушади;

б) $\vec{s}_1$ ва $\overline{M_1M_2}$ векторлар чизиқли эркли бўлса, яъни $\vec{s}_1\neq\lambda\overrightarrow{M_1M_2}$, $\lambda\neq 0$ бўлса, бу ҳолда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлади. Масалан,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3},\\[2ex] \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-5}{6}\end{array}\right\}$$

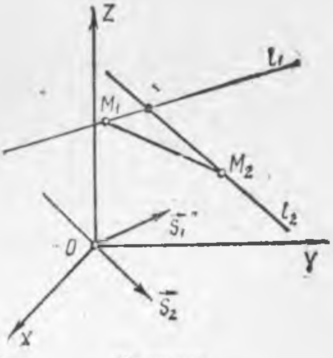
тўғри чизиқлар ўзаро параллелдир.

Агар $\vec{s}_1$ ва $\vec{s}_2$ векторлар чизиқли эркли бўлса, у ҳолда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ўзаро кесишади. Масалан,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3},$$
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3}$$

тўғри чизиқлар ўзаро кесишади (80- чизма).

Агар $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар компланар бўлмаса, бу ҳолда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар фазода кесишмайди. Бунда улар *учрашмас тўғри чизиқлар* дейилади. Масалан,



80- чизма.

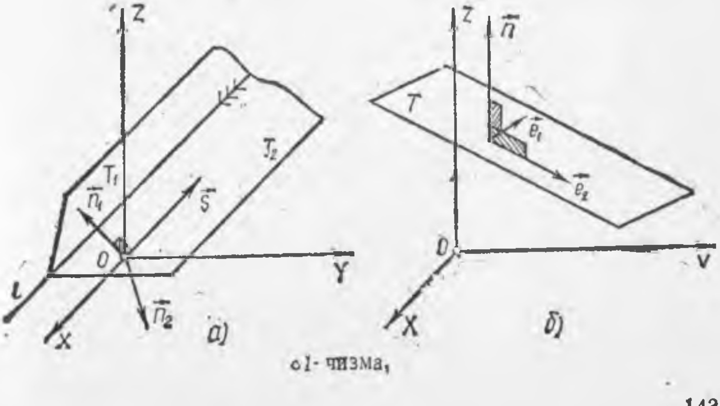
$$\left.\begin{aligned}\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-5}{5},\\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{4}\end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқлар учрашмасдир.

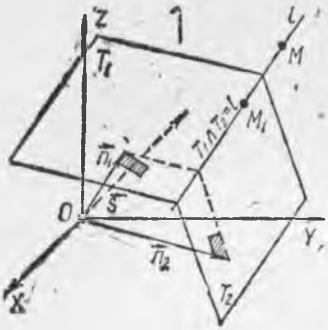
Фазода T_1 ва T_2 текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган l тўғри чизиқ берилган бўлсин (81- *а* чизма). T_1 ва T_2 текисликларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторларини (улар коллинеар эмас) ясайлик. Ясашга кўра

$$\vec{n}_1 \perp T_1, \quad \vec{n}_2 \perp T.$$

Бу ҳолда $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторларнинг вектор кўпайтмаси тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади. Бу ерда иккита $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ нормал вектор фазодаги l тўғри чизиқнинг ҳам нормали бўлади.



81- чизма,



82- чизма.

Фазода (T) текислик берилган бўлсин (81-б чизма). Бу текисликнинг ўзаро коллинеар бўлмаган ихтиёрий иккита $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ йўналтирувчи векторларини олайлик. Бу текисликнинг иккита йўналтирувчи векторларининг (юқоридаги мулоҳазага ўхшаш) вектор кўпайтмаси (T) текисликнинг нормал вектори бўлади.

Энди l тўғри чизиқ бўйлаб ўзаро кесишувчи T_1, T_2 текисликлар берилган бўлсин (82-чизма), яъни

$$(l = T_1 \cap T_2): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}.$$

l тўғри чизиқнинг тайин M_1 нуқтасини олайлик. Агар M шу тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда унинг тенгламасини

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\vec{s} \quad \text{ёки} \quad \vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\vec{s}, \quad \lambda \neq 0$$

ёки

$$\left| \begin{array}{l} x - x_1 = \lambda m, \\ y - y_1 = \lambda n, \\ z - z_1 = \lambda p \end{array} \right| \Rightarrow \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} = \lambda$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини биламиз, бунда l тўғри чизиқнинг $\vec{s}$ йўналтирувчи векторининг координаталари $\{m, n, p\}$.

Бизга иккита кесишувчи T_1, T_2 текисликнинг нормал векторларининг вектор кўпайтмаси l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори эканлиги маълум.

Икки векторнинг вектор кўпайтмаси таърифига асосан:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Шунга кўра l тўғри чизиқнинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x - x_1}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_1}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_1}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

3°. Берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Фазода $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлиб, бу нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузиш талаб қилинсин. $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектор берилган тўғри чизиққа коллинеар бўлади, яъни

$$\vec{s} = \lambda\overrightarrow{M_1M_2}, \ \lambda \neq 0.$$

Бунда $\vec{s}$ вектор l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори. Агар бошланғич нуқтаси M_1 нуқтада бўлган $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторни l тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида олиб, тўғри чизиқнинг вектор тенгламасини эътиборга олсак,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\overrightarrow{M_1M_2}$$

тенгламага эга бўламиз. $\vec{r}$, $\vec{r}_1$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторларнинг координаталаридан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 + \lambda[(x_2 - x_1)\vec{e}_1 + \\ + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\vec{e}_3]$$

ёки

$$(x - x_1)\vec{e}_1 + (y - y_1)\vec{e}_2 + (z - z_1)\vec{e}_3 = \lambda(x_2 - x_1)\vec{e}_1 + \\ + \lambda(y_2 - y_1)\vec{e}_2 + \lambda(z_2 - z_1)\vec{e}_3.$$

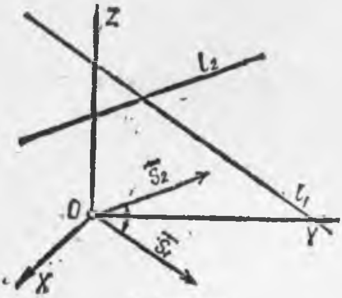
Бу тенглама каноник кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4.16)$$

(4.16) тенглама фазода *икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасидир.*

29-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Фазодаги *икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак* деб фазонинг ихтиёрий нуқтасидан берилган тўғри чизиқларга



83- чизма.

параллел қилиб ўтказилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакка айтилади.

Бошқача айтганда, тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчак берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб аталади.

Тўғри чизиқлар каноник тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$(\vec{l_1}):\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\ M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)\in l_1,$$

$$(l_2):\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)\in l_2.$$

Бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари

$$\vec{s_1}=\{m_1,\ n_1,\ p_1\},\ \vec{s_2}=\{m_2,\ n_2,\ p_2\}.$$

Бу ҳолда $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ векторлар орасидаги бурчак (83- чизма) бундай топилади:

$$\cos(\widehat{l_1,\ l_2})=\cos(\widehat{\vec{s_1},\ \vec{s_2}})=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_2^2+p_2^2}}\quad(4.17)$$

Агар l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўлса, $\vec{s_1}$ ва $\vec{s_2}$ векторлар ўзаро коллинеар бўлади. Бундан икки тўғри чизиқнинг параллеллик шарти ушбу

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}\quad(4.18)$$

кўринишда ёзилиши келиб чиқади. Агар (4.18) тенгликлар бажарилса, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар параллел бўлади. Шунинг учун бундай тасдиқ ўринли: l_1 ва l_2 *тўғри чизиқлар параллел бўлиши учун* (4.18) *тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.*

Икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шарти ушбу

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0\quad(4.19)$$

кўринишда ёзилишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. *Фазода икки тўғри чизиқ перпендикуляр бўлиши учун* (4.19) *тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.*

30- §. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак

Тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчак *тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак* дейилади. Бу таъриф икки бурчакни аниқлайди. Улар бири иккинчисини π га тўлдирувчи бурчаклардир.

Текислик ва тўғри чизиқ қуйидаги тенгламалар билан берилган бўлсин:

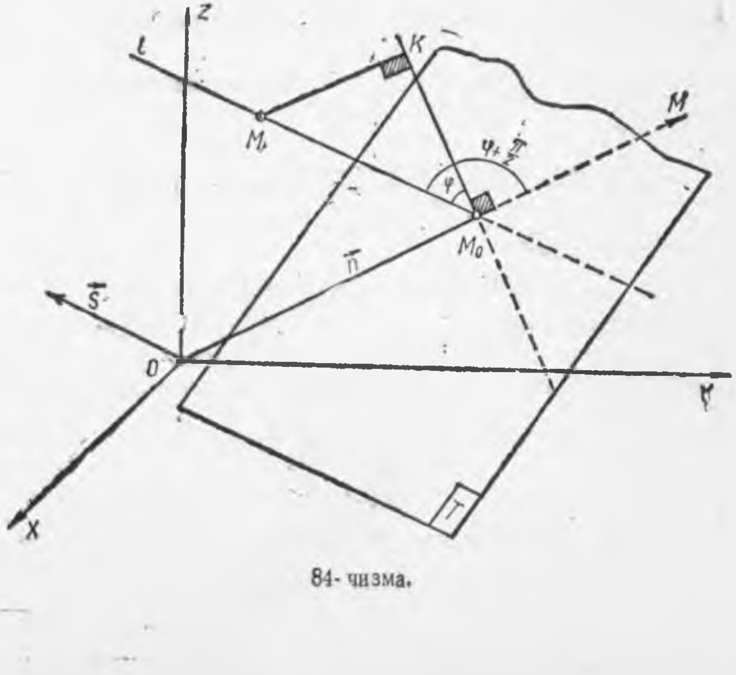
$$(T):\ Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{n} = \{A,\ B,\ C\},$$

$$(l):\ \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

$$\vec{s} = \{m,\ n,\ p\},\ M_1(x_1,\ y_1,\ z_1) \in l.$$

84- чизмадан l тўғри чизиқ билан (T) текислик орасидаги бурчак $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар орасидаги бурчакдан $\frac{\pi}{2}$ га фарқ қилади. Шунинг учун чизмадан қуйидагиларга эгамиз:

$$(\widehat{M_0M_1,\ M_0K}) = \varphi = (\widehat{l,\ T});\ (\widehat{M_0K,\ M_0M}) = 90°.$$



84- чизма.

Демак,

$$(\widehat{\vec{s}, \vec{n}}) = (\widehat{M_0M_1, M_0M}) = (\widehat{M_0M_1, OM}) =$$
$$= (\widehat{M_0M_1, M_0K}) + (\widehat{M_0K, M_0M}) = (\widehat{l, T}) + 90°.$$

Буларга кўра қуйидаги формулага эгамиз:

$$|\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{n}})| = |\sin(\widehat{l, T})| = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (4.20)$$

Агар l тўғри чизиқ (T) текисликка параллел бўлса, у ҳолда (4.20) дан ушбу

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (4.21)$$

тенглик келиб чиқади. Бу зарурий ва етарли шартдан иборат.

Аввалги пунктлардаги каби, l тўғри чизиқ билан (T) текислик перпендикуляр бўлиши учун

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (4.22)$$

тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

31- §. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиши

Ушбу

$$(l): \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}; \quad M_1(x_1, y_1, z_1) \in l$$

тўғри чизиқ билан

$$(T): Ay + By + Cz + D = 0$$

текисликнинг кесишиш нуқтасини (бундай нуқта мавжуд бўлса) топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун l тўғри чизиқнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзамиз:

$$x = x_1 + \lambda m;$$
$$y = y_1 + \lambda n;$$
$$z = z_1 + \lambda p.$$

x, y, z нинг бу қийматларини (T) нинг тенгламасига қўямиз:

$$A(x_1 + \lambda m) + B(y_1 + \lambda n) + C(z_1 + \lambda p) + D = 0$$

ёки

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(Am + Bn + Cp) = 0.$$

Бу тенгламадан

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}. \qquad (4.23)$$

λ нинг бу қийматини l тўғри чизиқнинг тенгламасига қўйиб, берилган тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топамиз.

Агар (4.23) формулада $Am + Bn + Cp \neq 0$ бўлса, кесишиш нуқтаси мавжуд бўлади ва шунинг учун тўғри чизиқ билан текислик битта нуқтада кесишади.

Агар $Am + Bn + Cp = 0$ бўлиб,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$$

бўлса, тўғри чизиқ текисликка параллел бўлади ва тўғри чизиқдаги (x_1, y_1, z_1) нуқта текисликда ётмайди. Демак, тўғри чизиқ билан текислик кесишмайди. Агар

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \end{cases}$$

шартлар бажарилса, бундан тўғри чизиқ билан текислик ўзаро параллел экани ва текислик тўғри чизиқдаги (x_1, y_1, z_1) нуқтадан ўтиши келиб чиқади. Демак, тўғри чизиқ текисликда ётади.

1°. Икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётиш шарти

Ушбу тўғри чизиқлар берилган бўлсин:

$$(l_1): \ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};$$

$$(l_2): \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Бу ерда $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{s}_1 = \{m_1, n_1, p\} \in l_1$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{s}_2 = \{m_2, n_2, p_2\} \in l_2$.

Равшанки, l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бир текисликда ётиши учун $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ учта вектор компланар бўлиши зарур ва етарли.

Уч векторнинг компланарлик шартидан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1) \cdot \vec{s}_2 = 0.$$

Агар $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ векторларнинг координаталарини эътиборга олсак, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.24}$$

Бу тенгликнинг бажарилиши l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар бир текисликда ётиши учун зарур ва етарлидир.

Энди мисоллар кўрамиз.

1-мисол Ушбу (T): $2x + y - z - 4 = 0$ текислик берилган. $M_1(1, 3, 0)$ нуқтадан ўтиб, (T) текисликка параллел бўлган текислик тенгламаси ёзилсин.

Ечиш. Фараз қилайлик, изланаётган текислик (T_1) бўлсин. (T_1) текислик $M_1(1, 3, 0)$ нуқтадан ўтганлиги учун унинг тенгламаси:

$$(T_1):\ A_1(x-1) + B_1(y-3) + C_1(z-0) = 0$$

бўлади. (T) ва (T_1) текисликлар ўзаро параллел бўлгани учун изланган (T_1) текислик тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$2(x-1) + 1\cdot(y-3) - 1\cdot(z-0) = 0$$

ёки $2x + y - z - 5 = 0$.

2-мисол. (T): $2x + y - z - 4 = 0$ текислик ва $M_1(1, 3, 0)$ $M_2(0, -2, -1)$ нуқталар берилган. $(M_1M_2) = (l)$ тўғри чизиқдан ўтиб (T) текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Агар изланаётган текисликни (T_1) десак,

$$(M_1 \in T_1):\ A_1(x-1) + B_1(y-3) + C_1(z-0) = 0,$$
$$(M_2 \in T_1):\ A_1\ (0-1) + B_1(-2-3) + C_1(-1-0) = 0.$$

Иккинчи томондан, $T \perp T_1$ бўлгани учун

$$\begin{cases} -A_1 - 5\,B_1 - C_1 = 0, \\ 2A_1 + B_1 - C_1 = 0. \end{cases}$$

Биз бу ерда уч номаълумли иккита тенглама системасига эга бўлдик. Номаълумлардан бирини ихтиёрий танлаймиз. Агар $A_1 = 1$ десак, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} -5B_1 - C_1 = 1, \\ B_1 - C_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = -\dfrac{1}{2}, \\ C_1 = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Энди изланаётган текислик тенгламасини ёзамиз:

$$x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z + \frac{3}{2} - 1 = 0$$

ёки

$$2x - y + 3z + 1 = 0.$$

3-мисол. Қуйидаги

$$(l_1):\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2},\ M_1(2,1,3)\in l_1;$$

$$(l_2):\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-0}{2},\ M_2(-1,\ 1,\ 0)\in l_2$$

параллел тўғри чизиқлар орқали текислик тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Изланаётган текислик берилган параллел тўғри чизиқларда ётувчи $M_1(2,1,3)$, $M_2(-1,1,0)$ нуқталардан ўтади. M_1 нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзамиз:

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z-3)=0. \qquad (a)$$

$M_2'(-1,1,0)$ нуқта шу текисликда ётади. Шунинг учун

$$A(-1-2)+B(1-1)+C(0-3)=0$$

ёки

$$3A+3C=0 \qquad (б)$$

тенгликка эгамиз.

Бундан ташқари, изланаётган текисликнинг берилган параллел тўғри чизиқларга параллеллик шартидан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$2\cdot A+1\cdot B+2\cdot C=0. \qquad (в)$$

Равшанки, $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Шунинг учун (а), (б), (в) тенгламаларни A, B, C га нисбатан система деб қараб, бу система тривиал бўлмаган ечимга эга бўлишини ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Бундан изланган текислик тенгламаси $x-z+1=0$ келиб чиқади.

IV бобга доир машқлар

1. а) $A(0,2,3)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{a}=\{1,0,1\}$, $\vec{b}=\{2,1,3\}$ векторларга параллел бўлган текисликнинг тенгламасини тузинг;

б) Oz ўқ ва $N(4,-2,7)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг;

в) $N(4,-5,7)$ нуқтадан ўтиб, yOz текисликка параллел бўлган текислик тенгламасини тузинг;

г) $N(4,3,-2)$ нуқтадан ўтувчи ва Oy ўққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

Жавоблар: а) $x+y-z+1=0$; б) $x+2y=0$; в) $x-4=0$; г) $y-3=0$.

2. $A(2,3,-1)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{a}=\{1,2,-4\}$ векторга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси тузилсин.

Жавоб: $x+2y-4z-12=0$.

3. Ушбу текисликлар йўналтирувчи векторларнинг координаталарини топинг: а) $x+2y-z+1=0$; б) $x-3z+5=0$; б) $y+1=0$; г) $x-3y+z+4=0$.

Жавоблар: а) $\{1,2,-1\}$; б) $\{1,0,-3\}$; в) $\{0,1,0\}$: г) $\{1,-3,1\}$.

4. $N(2,1,3)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{a}=\{1,3,-1\}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$.

5. Тўғри чизиқнинг қуйидаги тенгламасини каноник шаклга келтиринг:

$$\begin{cases}2x+3y-z-9=0,\\ x-2y+z+3=0.\end{cases}$$

Жавоб:

$$\frac{x-27}{5}=\frac{y-15}{3}=\frac{z}{1}.$$

6. Қуйидаги тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ёзинг:

$$\begin{cases}x+2y+z-1=0,\\ x-y+1=0.\end{cases}$$

Жавоб:

$$\begin{cases}x=t,\\ y=t+1,\\ z=-3t-1.\end{cases}$$

7. $A(1,-5,3)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар ўқлари билан мос равишда

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{\pi}{4}$$

бурчаклар ташкил қилувчи тўғри чизиқнинг каноник ва параметрик тенгламаларини тузинг.

Жавоблар: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}$;

$$\begin{cases}x=-t+1,\\ y=t-5,\\ z=\sqrt{2}\,t+3.\end{cases}$$

8. $\begin{cases}3x+2y-z+5=0,\\ x-y-z+1=0\end{cases}$ тўғри чизиқнинг xOz ва yOz координата текисликлардаги проекциялари қандай тенгламалар билан ифодаланади?

Жавоб: $\begin{cases}z=\frac{5}{3}x+\frac{7}{3},\\ y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}z=-\frac{5}{2}y-1,\\ x=0.\end{cases}$

9. Қуйидаги икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг:

$$\begin{cases}3x-4y-2z=0,\\ 2x+y-2z+1=0\end{cases}\quad \text{ва}\quad \begin{cases}4x+y-6z-2=0,\\ y-3z-2=0.\end{cases}$$

Жавоб: $\varphi=\arccos\frac{98}{195}\approx 59°48'$.

10. Ушбу $\frac{x-0}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ тўғри чизиқнинг $x-y+3z+$ $+8=0$ текисликдаги проекциясини топинг.

Жавоб: $\begin{cases} x-y+3z+8=0, \\ x-2y-z+7=0. \end{cases}$

11. $A(4,-3,1)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда

$$(l_1)\colon \frac{x-0}{6}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-3},\ O(0,0,0)\in l_1,$$

$$(l_2)\colon \frac{x+5}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2},\ M(-5,3,4)\in l_2$$

тўғри чизиқларга параллел текисликнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $16x-27y+14z-159=0$.

12. $\begin{cases} x-y+3=0, \\ 6y+1=0 \end{cases}$ тўғри чизиқ орқали ўтадиган ва $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$ тўғри чизиқ билан кесишиб 45° ли бурчак ҳосил қилувчи текислик тенгламасини тузинг.

Жавоб: $2x+4y+7=0$.

13. $A(4,-3,1)$ нуқтанинг $x+2y-z-3=0$ текисликдаги проекциясини топинг.

Жавоб: $A(5,-1,0)$.

14. $A(7,9,7)$ нуқтадан $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{3}$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Кўрсатма. $$d=\frac{\begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}$$

ёки вектор формадаги

$$d=\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1\times\vec{n}_2|}$$

формуладан фойдаланинг.

Жавоб: $d=7$.

15. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ тўғри чизиқ $4x+3y-z+3=0$ текисликда ётадими?

16. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{6}$ тўғри чизиқ билан $6x+15y-10z=0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

Жавоб: $\varphi=1°17'$.

17. $N(2,3,-1)$ нуқтадан ўтиб, $5x-3y+2z-10=0$ текисликка параллел бўлган текислик тенгламаси тузилсин.

Жавоб: $5x-3y+2z+1=0$.

18. Қуйидаги текисликлар тенгламасини нормал формага келтиринг: а) $x+y-z-2=0$; б) $3x+5y-4z+7=0$,

Жавоблар: а) $\frac{x + y - z - 2}{\sqrt{3}} = 0;$

б) $-\frac{3}{5\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{4}{5\sqrt{2}}z - \frac{7}{5\sqrt{2}} = 0.$

19. $N(2, 3, -5)$ нуқтадан $4x - 2y + 5z - 12 = 0$ текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлигини топинг.

Жавоб: $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}$.

20. $A(0, -2,1)$, $B(4,6,1)$ $C(-3,4,2)$ нуқталар

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқда ётадими?

21. $2x - y + 3z - 6 = 0$ ва $x + 2y - z + 3 = 0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ва $(1, 2, 4)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

Жавоб: $x - 8y + 9z = 21$.

22. $A(-1, 2, 3)$ ва $B(2, 6,8; 4,5)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг ва унинг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Жавоблар: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}$, $\cos\alpha = 0.3\cdot\sqrt{2}$; $\cos\beta = 0,4\cdot\sqrt{2}$; $\cos\gamma = 0,75\sqrt{2}$.

23. Ушбу $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 2, \\ z = 1 - t \end{cases}$ тўғри чизиқнинг

$3x - 2y + z = 3$ текислик билан кесишган нуқтасининг координаталарини топинг.

Жавоб: $(5, 5, -2)$.

24 Қуйидаги тўғри чизиқ ва текисликлар орасидаги муносабатларни аниқланг:

а) $\begin{cases} x = -6 - 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ ва $2x - 5y + 6z - \quad = 0;$

б) $\begin{cases} x = -4 - 5t, \\ y = 1 + 6t, \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ ва $3x + 2y - z + 5 = 0;$

в) $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 + 7t \end{cases}$ ва $2x - 5y + 3z - 1 = 0;$

г) $\begin{cases} x = 3 - 5t, \\ y = 2 + t, \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ ва $2x - 2y - 3z - 5 = 0;$

д) $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 1 - 3t \\ z = 7 - 6t \end{cases}$ ва $x - y + 2z = 0.$

Жавоблар: а) кесишади; б) тўғри чизиқ текисликда ётади; в) кесишмайди; г) кесишмайди; д) кесишади.

25. Қуйидаги берилган учта текислик орасидаги муносабатларни аниқланг:

а) $$\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + y + 3z = 11, \\ 2x + 3y + z = 1; \end{array}$$

б) $$\begin{array}{l} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 4 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0; \end{array}$$

в) $$\begin{array}{l} x - 2y + 4z - 6 = 0, \\ x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 4x - 3y + 10z - 19 = 0; \end{array}$$

г) $$\begin{array}{l} 4x - y + 5z - 1 = 0, \\ 2x + y + z - 4 = 0, \\ -8x + 2y - 10z + 7 = 0; \end{array}$$

Жавоблар: а) текисликлар битта (2; —2; 3) нуқтада кесишади; б) текисликлар умумий нуқтага эга бўлмай, ҳар иккиси ўзаро кесишади; в) текисликларнинг ҳар иккиси турли тўғри чизиқлар бўйича кесишади; г) текисликларнинг ҳар иккиси ўзаро кесишиб, бу текисликлар призма ташкил қилади.

5-БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

32-§. Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси

Фазонинг бирор Декарт координаталар системасида A, B, C, D, E, F коэффициентлардан камида бири нолдан фарқли бўлган

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Kx + Ly + Mz + \\ + N = 0 \qquad (5.1)$$

тенглама билан бериладиган нуқталари тўплами *иккинчи тартибли сирт* дейилади.

Бу параграфда асосий эътибор иккинчи тартибли айланма сиртлар: конуслар, цилиндрлар, эллипсоидлар, гиперболоидлар ва параболоидларга қаратилади.

Бизнинг асосий мақсадимиз қуйидагидан иборат: агар *нуқталарнинг геометрик ўрни сифатида сирт берилган бўлса, унинг тенгламасини тузиш ёки аксинча, агар $Oxyz$ координаталар системасида тенглама берилган бўлса, шу тенглама билан тасвирланадиган сиртнинг шаклини текшириш керак.*

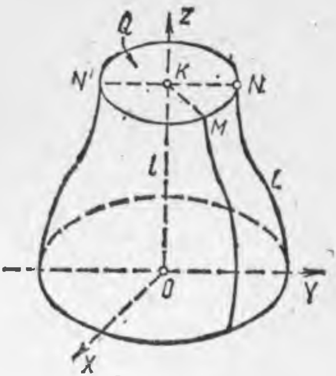
1°. Айланма сиртлар. Бирор текис L чизиқнинг l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган нуқталар тўплами *айланма* сирт дейилади. L чизиқ айланма сиртнинг *меридиани*, l ўқ эса унинг *айланиш ўқи* дейилади. Шуни таъкидлаб ўтамизки, меридианнинг айланиш ўқи атрофида айланишида унинг ҳар бир нуқтаси айлана чизади.

Биз қуйида бирор $Oxyz$ координаталар системасини танлаб, ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушадиган айланма сиртларнинг тенгламаларини қараймиз. Ишни айланиш ўқи Oz ўқдан иборат бўлган, L меридиан эса Oyz текисликда ётиб,

$$\begin{cases} F\ (y,\ z) = 0, \\ \quad x = 0 \end{cases} \qquad (5.2)$$

тенглама билан берилган ҳолни қарашдан бошлаймиз, s берилган l чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт ва $M\,(x,\,y,\,z) \in S$ бўлсин (85-чизма). M нуқта орқали Oz ўққа перпендикуляр қилиб ўтказилган Q текислик S

сиртни маркази Oz ўқда ётувчи K нуқтада бўлган айлана бўйича кесади. Шуни қайд қилиб ўтамизки, айлананинг барча нуқталарининг аппликаталари ва K нуқтанинг аппликатаси M нуқтанинг аппликатаси бўлган z сонга тенг. Айлана билан L чизиқнинг кесишиш нуқтасини N билан белгилаймиз. N нуқта $(0, y_1, z)$ координаталарга, K нуқта эса $(0, 0, z)$ координаталарга эга. 85-чизмадан равшанки,



85- чизма.

$$|KM| = |KN| = |y_1|,$$

$$d\ |K, M| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Бундан

$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ёки } y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Буни эътиборга олсак, (5.1) тенглама қуйидаги

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0 \tag{5.3}$$

кўринишга келади. Шундай қилиб, S айланма сиртга тегишли ихтиёрий M нуқтанинг координаталари (5.3) тенгламани қаноатлантиради. Шундай қилиб, (5.3) тенглама меридианларидан бири yOz текисликда ётиб, (5.2) тенглама билан аниқланувчи, айланиш ўқи эса Oz ўқдан иборат бўлган S айланма сиртни аниқлайди.

Шунга ўхшаш, агар шу меридианнинг ўзини Oy ўқ атрофида айлантирилса, ҳосил бўлган айланма сирт

$$F\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$$

тенгламага эга бўлади.

Агар l меридиан Oxy текисликда ётса ва

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда l ни Ox ўқ ёки Oy ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси мос равишда

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

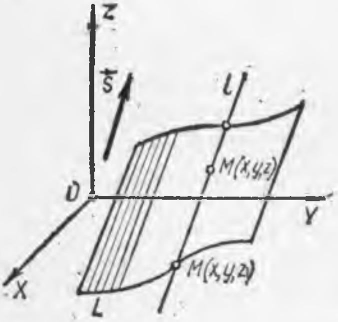
ёки

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2},\ y)=0$$

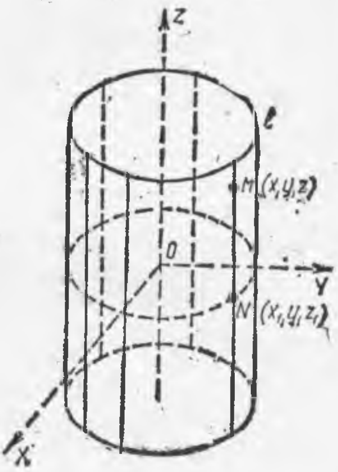
кўринишда бўлади.

2°. **Цилиндрик сиртлар.** Берилган $\vec{s}$ вектор йўналишига параллеллигича қолиб, берилган L чизиқни кесадиган тўғри чизиқлар тўплами *цилиндрик сирт* дейилади (86-чизма). Бунда L чизиқ *цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси*, $\vec{s}$ векторга параллел l тўғри чизиқлар *цилиндрик сиртнинг ясовчилари* дейилади.

Баъзи хусусий ҳолларни қарайлик:



86- чизма.



87- чизма.

1) ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни қарайлик. Бу сиртнинг ясовчиси l тўғри чизиқнинг тенгламаси $y=a$ $(a>0)$ бўлиб, у Oyz текисликда ётади. Олдинги параграфдаги айланма сиртнинг тенгламасини эътиборга олсак, бу сиртнинг тенгламаси (87-чизма):

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a \text{ ёки } x^2+y^2=a^2.$$

Бу сиртни *тўғри доиравий цилиндр* дейилади.

2) ясовчилари Oz ўққа параллел, йўналтирувчиси L эса Oxy текисликда ётган цилиндрик сиртни қарайлик. Равшанки, L йўналтирувчи

$$\begin{cases} F(x,\ y)=0,\\ z=0 \end{cases} \qquad (5.4)$$

тенгламалар системаси билан берилади. Энди бу сиртнинг тенгламаси $F(x,\ y)=0$ дан иборат эканини исботлаймиз.

Ҳақиқатан, $M(x, y, z)$ нуқта сиртнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда M нуқтанинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлмиш $N(x_1, y_1, 0)$ координаталарга эга бўлади ва L йўналтирувчида ётади. Шу сабабли $N(x_1, y_1, 0)$ нуқтанинг координаталари

$$F(x, y) = 0$$

тенгламани қаноатлантиради. Демак, $F(x, y)$ тенглама ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни тасвирлайди.

3) ясовчилари Oy ўққа параллел, йўналтирувчиси L эса Oyz текисликда ётиб, унинг тенгламаси

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

система билан берилган сирт $F(y, z) = 0$ тенглама билан тасвирланади.

Шунга ўхшаш, ясовчилари Ox ўққа параллел, йўналтирувчиси L эса Oxz текисликда ётиб, унинг тенгламаси

$$\begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

система билан берилган сирт $F(x, z) = 0$ тенглама билан тасвирланади.

1-мисол. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (5.5)

тенглама фазода цилиндрик сиртни тасвирлайди, унинг йўналтирувчиси эллипс бўлиб, у эллипс xOy текисликда ётади, ясовчилари эса Oz ўққа параллел (эллиптик цилиндр) бўлади.

2-мисол. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (5.6)

тенглама фазода цилиндрик сиртни тасвирлайди, унинг йўналтирувчиси гипербола бўлиб, у гипербола xOy текисликда ётади, ясовчилари эса Oz ўққа параллел (гиперболик цилиндр) бўлади.

3-мисол. Ушбу $y^2 = 2px$ (5.7)

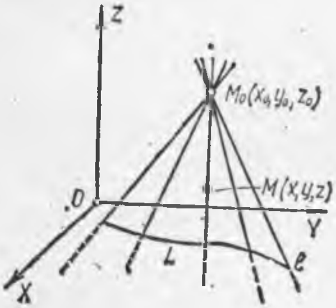
тенглама цилиндрик сиртни тасвирлайди, унинг йўналтирувчиси парабола бўлиб, у парабола xOy текисликда ётади, ясовчилари эса Oz ўққа параллел (параболик цилиндр) бўлади.

3°. Конус сиртлар. Фазодаги бирор қўзғалмас $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтиб, берилган L чизиқни кесувчи l тўғри чизиқнинг ҳаракатидан ҳосил бўлган сирт *конус сирт* дейилади (88-чизма). $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта *конус сиртнинг учи*, L чизиқ унинг *йўналтирувчиси*, l тўғри чизиқ эса *конус сиртининг ясовчиси* дейилади.

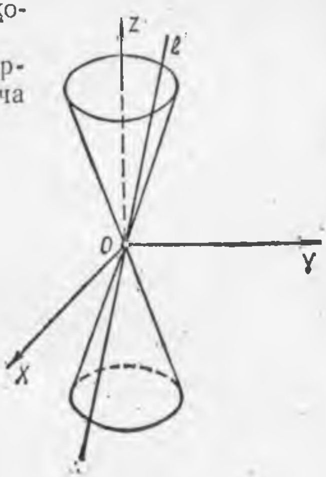
Агар биздан учи координаталар бошида бўлиб, $z = Y$ тўғри чизиқнинг Oz аппликаталар ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасини тузиш талаб қилинса, у ҳолда бу сиртнинг тенгламаси айланма сиртнинг тенгламасига ўхшаш

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2} <=> z^2 = x^2 + y^2$$

бўлади (89-чизма) Бу конусни одатда *доиравий конус* дейилади. Шу конусни xOy текисликка параллел текислик билан кесилса, кесимда доира ҳосил бўлади.



88-чизма.



89-чизма

4°. Эллипсоид. Декарт координаталар системасини тегишлича танланганда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5.8}$$

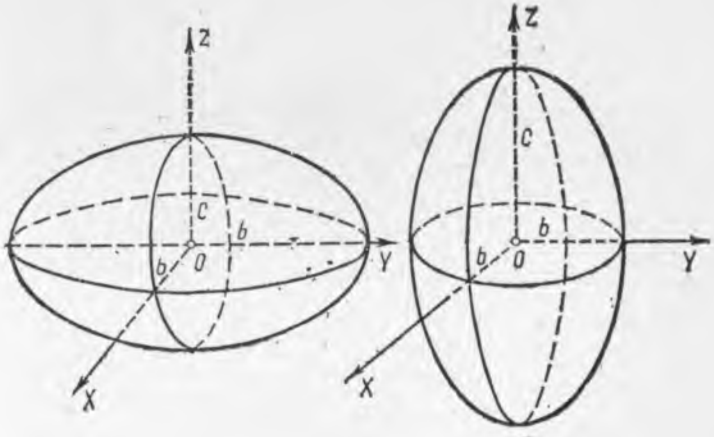
дан иборат бўлган сирт *эллипсоид* дейилади, бунда a, b, c — мусбат сонлар.

Эллипсоид ҳақида умумий тасаввурга эга бўлиш учун қуйидаги масалани қарайлик.

Масала. Oyz текисликда $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ тенглама билан берилган эллипснинг Oz ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Айланма сиртнинг тенгламасини тузиш қоидасидан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ёки } \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



а). б)

90- чизма.

Бундан

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (5.9)$$

(5.9) тенглама билан берилган сирт *айланма эллипсоид* дейилади (90- *а*, *б* чизмалар). Агар $b>c$ бўлса, (5.9) тенглама қисилган айланма эллипсоидни (90- *а* чизма), $b<c$ бўлса, чўзилган айланма эллипсоидни (90- *б* чизма), $b=c$ бўлганда эса тенглама

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

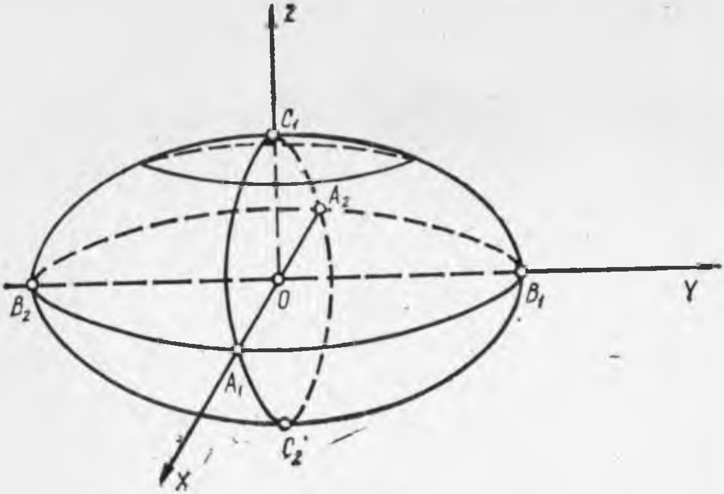
кўринишни олади ва бу тенглама бизга маълум бўлган сферани ифодалайди.

Одатда a, b, c мусбат сонлар *эллипсоиднинг ярим ўқлари* дейилади. Агар $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$ бўлса, у ҳолда эллипсоид *уч ўқли эллипсоид* дейилади.

Умумий ҳолда эллипсоиднинг формасини текшириш қулай. Бунинг учун унинг координата текисликлари ва координата текисликларига параллел текисликлар билан кесимларини қараш лозим.

1) эллипсоиднинг $z=0$ текислик билан кесишиш чизиғи ушбу тенгламалар системаси билан берилади:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{cases}\Bigg| \Longleftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$



91- чизма.

Бу чизиқ ярим ўқлари a ва b дан иборат бўлиб, Oxy ва Oxz текисликларига симметрик бўлган $A_1B_1A_2B_2$ эллипсдир (91- чизма).

2) эллипсоиднинг $y = 0$ текислик билан кесимининг тенгламаси

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

бўлиб, у ярим ўқлари a ва c бўлиб, Oxy ва Oyz текисликларга нисбатан симметрик бўлган $A_1C_1A_2C_2$ эллипсдир (91- чизма).

3) эллипсоиднинг $x = 0$ текислик билан кесимининг тенгламаси

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

бўлиб, у ярим ўқлари b ва c дан иборат, Oxy ва Oxz текисликларга нисбатан симметрик бўлган $B_1C_1B_2C_2$ эллипсдир (91- чизма).

4) эллипсоидни Oxy текисликка параллел $z = h$ текислик билан кесамиз. Бунда бизни қизиқтираётган кесим ушбу тенгламалар билан берилади:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Бу ерда учта ҳол бўлиши мумкин:

а) агар $|h| < c$ бўлса, у ҳолда $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ бўлиб, кесимда ярим ўқлари

$$a_h = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \ b_h = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

ва маркази Oz ўқдаги $(0, 0, h)$ нуқтада бўлган

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

эллипс ҳосил бўлади;

б) агар $h = c$ ёки $h = -c$ бўлса, у ҳолда кесимда эллипсоиднинг C_1 ва C_2 учлари ҳосил бўлади;

в) агар $h > c$ ва $h < -c$ бўлса, у ҳолда кесимда мавҳум эллипслар ҳосил бўлади, яъни $z = h$ текислик эллипсоид билан умумий нуқтага эга бўлмайди.

Эллипсоид ҳақидаги маълумотларни кенгайтириш мақсадида яна қуйидагиларни таъкидлаб ўтамиз:

5) эллипсоид координаталар бошидан ўтмайди, чунки $O(0, 0, 0)$ нуқтанинг координаталари унинг тенгламасини қаноатлантирмайди.

6) эллипсоиднинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \text{ёки} \begin{cases} x = -a, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $A_1(a, 0, 0)$ ва $A_2(-a, 0, 0)$ нуқталар эллипсоиднинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталари, худди шунга ўхшаш, унинг Oy ўқ билан кесишиш нуқталари $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$, Oz ўқи билан кесишиш нуқталари эса $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$ бўлади. Ушбу A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 ва C_2 нуқталар *эллипсоиднинг учлари* дейилади.

7) эллипсоиднинг тенгламасида x, y, z ўзгарувчилар фақат жуфт даражада қатнашади, бундан эллипсоиднинг

координаталар бошига нисбатан симметрик экани, координата текисликлари эса унинг симметрия текисликлари экани келиб чиқади.

Эллипсоид координата ўқларига нисбатан ҳам симметрикдир. Координаталар боши *эллипсоиднинг маркази* дейилади.

8) энди сирт тенгламасига кирувчи ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳасини аниқлаймиз: эллипсоид тенгламасидан

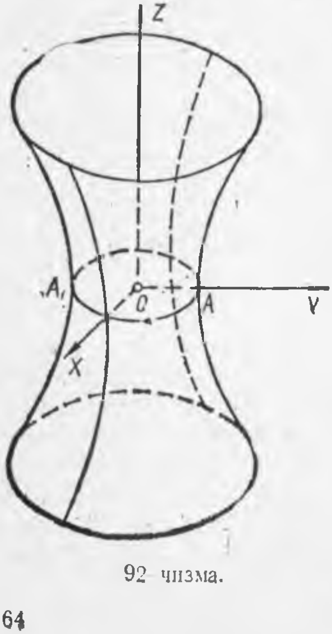
$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1; \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1; \quad \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \text{ ёки } x^2 \leqslant a^2; \; y^2 \leqslant b^2;$$

$z^2 \leqslant c^2$ ёки $-a \leqslant x \leqslant a$; $-b \leqslant y \leqslant b$; $-c \leqslant z \leqslant c$ тенгсизликлар келиб чиқади.

5°. **Гиперболоидлар.** Масала. Oyz текисликда $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ тенглама билан берилган гиперболанинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Айланма сиртнинг тенгламасини тузиш қоидасидан фойдаланиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ёки } \frac{x^2+y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



92 чизма.

Бундан

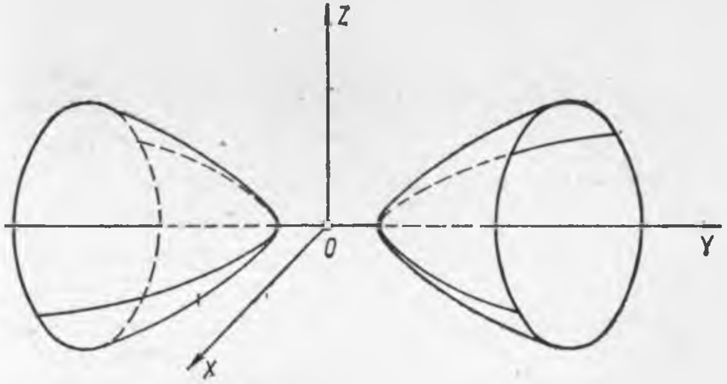
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5.10)$$

тенглама келиб чиқади. (5.10) тенглама билан берилган сирт *бир паллали айланма гиперболоид* дейилади (92- чизма).

Агар $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ гиперболани Oy ўқ атрофида айлантирсак, ҳосил бўладиган сирт тенгламаси

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5.11)$$

кўринишга эга бўлади. Бу сирт *икки паллали айланма гиперболоид* дейилади (93- чизма). Энди шу бир паллали



93- чизма.

ва икки паллали гиперболоидларни тўлароқ ўрганамиз.

1) бир паллали гиперболоид. Тегишлича танланган Декарт координаталар системасида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

тенгламага эга бўлган сирт *бир паллали гиперболоид* дейилади, бунда a, b, c — мусбат сонлар. Бу тенгламани одатда *бир паллали гиперболоиднинг каноник тенгламаси* дейилади. Бир паллали гиперболоиднинг тенгламасида x, y, z ўзгарувчилар фақат жуфт даражада қатнашади. Демак бир паллали гиперболоид барча координата текисликларига, координата ўқларига ва координаталар бошига нисбатан симметрикдир.

Координаталар боши *бир паллали гиперболоиднинг маркази*; a, b сонлар *бир паллали гиперболоиднинг* ҳақиқий ярим ўқлари, c эса *мавҳум ярим ўқи* дейилади.

Бир паллали гиперболоиднинг текисликлар билан кесимларини қараймиз:

а) Oxz текислик билан кесими

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилади ҳамда ярим ўқлари a ва b дан иборат эллипсни ифодалайди.

б) Oxy текисликка параллел текисликлар билан кесим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \\ z=h \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1 \\ z=h \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилади. Бу чизиқ ярим ўқлари

$$a_h=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b_h=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

симметрия маркази Oz ўқдаги $(0,\ 0,\ h)$ нуқтада бўлган эллипсдан иборат.

$|h|$ нинг чексиз катталашиши билан бу эллипснинг a_h ва b_h ярим ўқлари ҳам чексиз катталашади. $h=0$ бўлганда энг кичик ярим ўқли эллипс ҳосил бўлади.

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ва } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

тенгламалар ҳам бир паллали гиперболоидларни ифодалайди.

2) икки паллали гиперболоид.

Тегишли Декарт координаталар системасида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

тенгламага эга бўлган сирт *икки паллали гиперболоид* дейилади, бунда a, b, c — мусбат сонлар. Бу тенгламани одатда *икки паллали гиперболоиднинг каноник тенгламаси* дейилади.

Бу сиртнинг турли текисликлар билан кесимларини қараймиз.

а) Oyz текислик билан кесим

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилади. Тенгламаларнинг бу системаси ечимга эга эмас, шунинг учун Oyz текислик берилган сирт билан кесишмайди.

б) Oyz текисликка параллел текисликлар билан кесимлар

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1, \\ x = h \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилади. $|h| < 0$ да бу система ечимга эга эмас. Демак, $-a < h < a$ да $x = h$ текислик гиперболоид билан кесишмайди. Бошқача айтганда, $x = -h$ ва $x = h$ параллел текисликларнинг орасидаги полосада гиперболоиднинг нуқталари йўқ.

Агар $|h| > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{h^2}{a^2} - 1 > 0$ ва гиперболоиднинг $x = h$ текисликлар билан кесимида ярим ўқлари

$$b_h = b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}, \quad c_h = c\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$$

дан иборат, марказлари эса Ox ўқдаги $(h, 0, 0)$ нуқталардан иборат

$$\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} = 1$$

эллипслар ҳосил бўлади.

Бу эллипслар Oxy ва Oxz текисликларга нисбатан симметрик бўлгани учун $|h|$ нинг чексиз ўсиши билан b_h ва c_h ярим ўқлари ҳам чексиз ўсади;

в) Oxy текислик билан кесим

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

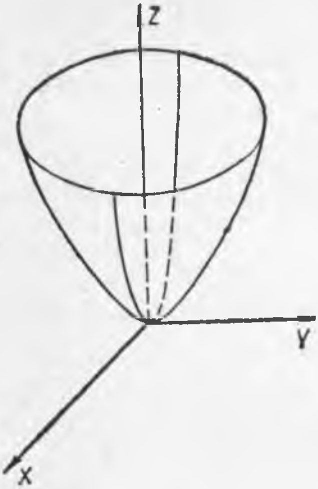
тенгламалар системаси билан берилиб, ҳақиқий ўқлари Ox ўқда ётувчи, учлари A $(a, 0, 0)$ ва A_1 $(-a, 0, 0)$ нуқталарда бўлган гиперболани ифодалайди (92-чизма). Шуни таъкидлаймизки,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ва } -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

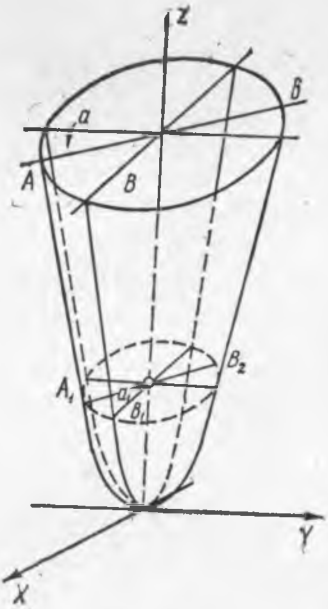
тенгламалар ҳам икки паллали гиперболоидларни ифодалайди.

6°. Параболоидлар. 1. Эллиптик параболоид. Тегишлича танланган Декарт координаталар системасида ушбу

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \tag{5.12}$$



94- чизма.



95- чизма.

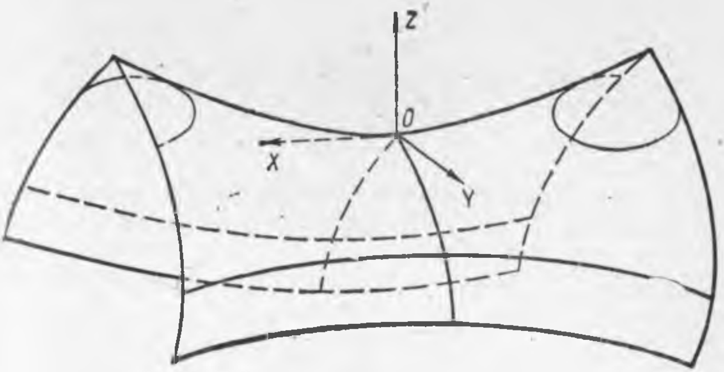
тенгламага эга бўлган сирт *эллиптик параболоид* дейилади, бунда $p>0$, $q>0$.

Агар $p=q$ бўлса, у ҳолда эллиптик параболоид

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0 \end{cases}$$

параболанинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма (айланиш) сирт бўлади (94- чизма). $p \neq q$ бўлган умумий ҳолда эллиптик параболоид айланма сирт бўлмайди: унинг Oz ўққа перпендикуляр текисликлар билан кесимлари энди айланалар эмас, балки эллипслар бўлади (95- чизма).

Охирида шуни қайд қиламизки, эллиптик параболоидга эллипснинг ҳаракатидан ҳосил бўлган сирт деб қараш мумкин, бу эллипс ҳаракат қилган вақтда ўзига ўхшашлигича қолади ва ўқларининг учлари параболалар бўйича сирпанади. Ҳаракат вақтида эллипс текислиги Oxy текисликка параллеллигича қолади. Тенгламада x ва y координаталарнинг фақат квадратлари бор, шунинг учун Oxz ва Oyz текисликлар сиртнинг симметрия текисликлари бўла-



96- чизма.

ди. $p = q$ бўлганда тенглама айланиш ўқи Oz бўлган айланма параболоидни тасвирлайди.

2. Гиперболик параболоид. Тегишлича танланган Декарт координаталар системасида ушбу

$$\frac{x^2}{2p} \quad \frac{y^2}{2q} = z \qquad (5.13)$$

тенгламага эга бўлган сирт *гиперболик параболоид* дейилади.

(5.13) тенглама одатда *гиперболик параболоиднинг каноник тенгламаси* дейилади. Бу сиртнинг асосий хоссалари қуйидагилардан иборат:

а) гиперболик параболоид координаталар бошидан ўтади;

б) гиперболик параболоид координата ўқлари билан фақат координаталар бошида кесишади;

в) гиперболик параболоид Oxz ва Oyz текисликларга нисбатан симметрик, Oxy текисликка нисбатан эса симметрик эмас. Демак, бу сирт Oz ўққа нисбатан симметрик, Ox, Oy ўқларга ва координаталар бошига нисбатан эса симметрик эмас;

г) энди (5.13) гиперболик параболоиднинг кесимларини ўрганамиз (96- чизма).

(5.13) сирт Oxz координаталар текислиги билан кесилса, кесимда

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланадиган ва ўқи Oz ўқнинг мусбат йўналиши билан устма-уст тушадиган парабола ҳосил бўлади.

Oyz текислик билан кесилса, кесимда

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0 \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланадиган ва ўқи Oz ўқнинг манфий йўналиши билан устма-уст тушадиган парабола ҳосил бўлади.

Агар Oxy текислик билан кесилса, кесимда иккита параллел тўғри чизиқ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

ҳосил бўлади.

Агар Oxy текисликка параллел текисликлар билан кесилса, кесимда

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h, \\ z = h \end{cases}$$

гиперболалар ҳосил бўлади.

Агар $h > 0$ бўлса, гиперболанинг ҳақиқий ўқи Ox ўққа, $h < 0$ бўлганда эса Oy ўққа параллел бўлади. Гиперболик параболоид айланма сирт бўла олмайди, чунки у ҳар қандай текислик билан гипербола ёки парабола бўйича кесишади ва унинг кесимида эллипс ёки айлана ҳосил бўлиши мумкин эмас.

7°. Иккинчи тартибли конус. 5.1-теорема. *Тегишли Декарт координаталар системасида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{5.14}$$

тенгламага эга бўлган К сирт учи $O(0, 0, 0)$ *нуқтада ва йўналтирувчиси*

$$\mathrm{L}: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c \end{cases} \tag{5.15}$$

эллипсдан иборат бўлган конусни ифодалайди.

Уни *иккинчи тартибли конус* деб юритилади. Биз бу теореманинг исботига тўхталмаймиз. Агар $a = b$ бўлса, у ҳолда (5.14) конус айланиш ўқи Oz ўқдан иборат бўлган тўғри доиравий конусга айланади. $y = \pm \frac{b}{2}$ асимптоталар $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гипербола учун қандай роль ўйнаган бўлса, (5.14) конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ бир паллали гиперболоид учун шундай роль ўйнайди. Шунинг учун бу конусни

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

гиперболоид учун *асимптотик конус* дейилади.

Шунга ўхшаш,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ ва } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тенгламалар учлари координаталар бошида ва йўналтирувчилари

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = a \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = b \end{cases}$$

эллипслардан иборат конусларни ифодалайди.

5-бобга доир машқлар

1. $x^2 + y^2 = R^2$ айлананинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$ ёки $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ доиравий конус.

2. $\left.\begin{matrix} z = x^2, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ эгри чизиқнинг: а) Oz ўқ атрофида; б) Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоблар: а) $z = x^2 + y^2$, б) $\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$.

3. Oxy текисликдаги $y = e^{-x^2}$ эгри чизиқнинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $y = e^{-(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}$ ёки $y = e^{-x^2-y^2}$.

4. $x = 0$, $y = z$ тўғри чизиқнинг: а) Oy ўқ атрофида; б) Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоблар: а) $x^2 + z^2 = y^2$; б) $z^2 = x^2 + y^2$.

5. Ясовчиси Oz ўққа параллел, йўналтирувчиси $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ сфера ва $x + y + z = 1$ текисликларнинг кесишиш чизиғидан иборат бўлган цилиндрик сиртнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $x^2 + y^2 + xy - x - y = 4$.

6. Йўналтирувчиси

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

айланадан иборат бўлиб, ясовчиси $\vec{a}=\{1, 1, 1\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz-\frac{3}{2}=0$.

7. Йўналтирувчиси

$$\begin{cases} x^2+y^2=4x, \\ z=0 \end{cases}$$

чизиқдан иборат бўлган ва ясовчиси $\vec{b}=\{1, 1, 1\}$ векторга параллел бўлган цилиндрик сиртнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$.

8. $A(0, 0, 4)$ нуқтадан ўтувчи цилиндрик сирт берилган. Унинг ясовчисини аниқланг.

Жавоб: $x=y=z-4$.

9. Учи $O(0, 0, 0)$ координаталар бошида ва йўналтирувчиси

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0, \\ 5x+4y-z-1=0 \end{cases}$$

дан иборат бўлган конус сиртнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $24x^2+15y^2+8xy-10xz-8yz=0$.

10. Учи $S(0, 0, 8)$ нуқтада ва йўналтирувчиси

$$\begin{cases} z=0, \\ y^2=2x \end{cases}$$

бўлган конус сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $2y^2-xz+8x=0$.

11. $x^2+(y-a)^2=a^2$ конуснинг учи ва унинг $z=a$ текисликдаги йўналтирувчиси аниқлансин.

Жавоблар: 1) $S(0, a, 0)$; 2) $\begin{cases} z=a \\ x^2+(y-a)^2=a^2. \end{cases}$

12. Ясовчилари координаталар бошидан ўтиб, ўқи билан 45° бурчак ташкил қилувчи конус сиртнинг каноник тенгламасини тузинг.

Жавоб: $x^2+y^2-z^2=0$.

13. $3x^2+36y^2+81z^2-324=0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Жавоб: $\frac{x^2}{108}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоид.

14. Ушбу $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ эллипсоиднинг $z=0$ текислик билан кесишдан ҳосил қилинган кесимини топинг.

Жавоб: $\begin{cases} \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1, \\ z=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases}$ эллипснинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

16. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоиднинг $\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Жавоб: $N(2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2})$, $N_1(-2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$.

17. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ эллипсоиднинг 1) $z=3$; 2) $y=1$ текисликлар билан кесимларининг юзларини топинг.

Жавоб: $S=3{,}84\ \pi$; $S_1=\frac{45}{4}\pi$.

18. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{36}=1$ эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесилишидан ҳосил бўлган эллипсларнинг тенгламаларини ёзинг.

Жавоб: Oxy текислик билан кесилганда

$$\begin{cases}\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

Oxz текислик билан кесилганда:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{144}+\frac{z^2}{36}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

Oyz текислик билан кесилганда: $\begin{cases}\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{36}=1,\\ x=0.\end{cases}$

19. $x^2+2y^2+20y-z^2+34=0$ тенглама билан берилган сиртнинг шаклини аниқланг.

Жавоб: $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{8}-\frac{z^2}{16}=1$ бир паллали гиперболоид.

20. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ гиперболоиднинг $N(4,\ 2,\ 6)$ нуқтадан ўтувчи ясовчиларини топинг.

Жавоблар: $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{z}{6}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{y}{2}\right),\\ \frac{x}{4}-\frac{z}{6}=3\left(1-\frac{y}{2}\right);\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x}{4}+\frac{z}{6}=1-\frac{y}{2},\\ \frac{x}{4}-\frac{z}{6}=1+\frac{y}{2}.\end{cases}$

21. $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}$ эгри чизиқнинг: а) Oz ўқ; б) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоблар: а) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ бир паллали гиперболоид;

б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$ икки паллали гиперболоид.

22. Ушбу $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{9}=-1$ икки паллали гиперболоидни координата текисликлари ва координата текисликларига параллел бўлган текисликлар билан кесилганда ҳосил бўладиган кесимларнинг тенгламасини ёзинг.

Жавоблар: (Oyz): $\begin{cases} \frac{x^2}{6}-\frac{z^2}{9}=1, \\ x=0. \end{cases}$

(Oxz): $\begin{cases} \frac{x^2}{12}+\frac{z^2}{9}=-1, \\ y=0. \end{cases}$ (Oxy): $\begin{cases} \frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{12}=1, \\ z=0. \end{cases}$

$Oxy \parallel (z=h)$: $\begin{cases} \frac{y^2}{\frac{2}{3}(h^2+9)}-\frac{x^2}{\frac{4}{3}(h^2+9)}=1, \\ z=h. \end{cases}$

23. $x^2-y^2=8x$ тенглама билан берилган сиртнинг формасини аниқланг.

Жавоб: $z=\frac{x^2}{2\cdot 4}-\frac{y^2}{2\cdot 4}$ гиперболик параболоид.

24. $2x^2-y^2-z^2=0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Жавоб: $\frac{y^2+z^2}{2}-x^2=0$ доиравий конус.

25. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-z^2=0$ тенглама қандай сиртни тасвирлайди?

Жавоб: иккинчи тартибли конус.

26. $y^2=2px$ параболанинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламасини тузинг.

Жавоб: $y^2+z^2=2px$ параболоид.

27. Oyz текисликдаги $y^2=2pz$ параболанинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт тенгламасини ёзинг.

Жавоб: $x^2+y^2=2pz$ айланма параболоид.

28. Қуйидаги тенгламалар билан қандай сиртлар берилган?

1) $x^2+y^2+z^2=16$;
2) $36x^2+64y^2+144z^2=576$;
3) $36x^2+64y^2-144z^2=-576$;
4) $3x^2-2y^2=12z$;
5) $16x^2+9y^2=144$;
6) $x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)=22$.

Жавоблар: 1) сфера; 2) эллипсоид; 3) икки паллали гиперболоид; 4) гиперболик параболоид; 5) эллиптик цилиндр; 6) сфера.

II ҚИСМ

ЧИЗИКЛИ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

6- БОБ. n- ЎЛЧОВЛИ ВЕКТОР ВА ЧИЗИҚЛИ ФАЗОЛАР

33- §. Асосий тушунчалар ва таърифлар

1°. Дастлабки мулоҳазалар. Кейинги муҳокамаларимизда муҳим роль ўйнайдиган кўп ўлчовли вектор фазо тушунчасини киритамиз. Дастлаб бир неча бошланғич изоҳларни бериб ўтайлик. Китобхонларга ушбу китобнинг биринчи қисмидан маълумки, текисликнинг ҳар қандай нуқтаси ўзининг иккита координатаси (берилган координата ўқларидаги) билан, яъни иккита ҳақиқий соннинг тартибланган системаси билан тўла аниқланади, текисликдаги ҳар қандай вектор ўзининг иккита координатаси билан, яъни яна иккита ҳақиқий соннинг тартибланган системаси билан тўла аниқланади. Шунга ўхшаш, уч ўлчовли фазонинг ҳар қандай нуқтаси ўзининг учта координатаси билан, фазодаги ҳар қандай вектор ўзининг учта координатаси билан тўла аниқланади. Аналитик геометриянинг ўзида, шунингдек, механика ва физикада кўпинча шундай объектларни ўрганишга тўғри келадики, уларни тўла аниқлаш учун учта ҳақиқий соннинг берилиши етарли бўлмайди. Масалан, уч ўлчовли фазода шарлар тўпламини қарайлик. Шар тўла аниқланган бўлиши учун унинг радиуси ва марказининг координаталари берилган бўлиши, яъни тўртта ҳақиқий сондан иборат тартибланган система берилиши керак. Яна шуниси ҳам борки, радиус фақат мусбат қийматлар қабул қилиши лозим. Иккинчи бир масалани, аниқроғи қаттиқ жисмнинг фазодаги турли ҳолатларини қарайлик, фазода қаттиқ жисмнинг оғирлик марказининг координаталари (яъни учта ҳақиқий сон), оғирлик марказидан ўтувчи бирорта тайинланган ўқнинг йўналиши (иккита сон — учта йўналтирувчи косинусдан иккитаси) ва ниҳоят, бу ўқ атрофида бурилиш бурчаги кўрсатилган бўлса, унинг вазияти тўла аниқланган бўлади. Шундай қилиб, фазодаги қаттиқ жисмнинг вазияти олтита ҳақиқий сондан иборат тартибланган система билан тўла аниқланади.

Бу мисоллар n та ҳақиқий соннинг барча мумкин бўлган тартибланган системалари тўпламини ўрганиш мақсадга мувофиқлигини кўрсатади. Бу тўплам унда қўшиш ва сонга кўпайтириш операциялари киритилгандан кейин n ўлчовли вектор фазо номини олади. Шундай қилиб, n ўлчовли вектор фазо фақат алгебраик тузилма бўлиб, у уч ўлчовли фазонинг координаталар бошидан чиқувчи векторлар тўпламининг баъзи энг содда хоссаларини сақлайди. n та соннинг тартибланган ушбу

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \tag{6.1}$$

системаси *n ўлчовли вектор* дейилади. a_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ сонлар $\vec{a}$ векторнинг *компонентлари* (ёки *координаталари*) дейилади.

$\vec{a}$ ва

$$\vec{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \tag{6.2}$$

векторларнинг бир хил ўринда турган компонентлари устма-уст тушса, яъни агар

$$a_i = b_i, \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

бўлса, бу векторлар *тенг* деб ҳисобланади.

(6.1) ва (6.2) векторларнинг *йиғиндиси* деб компонентлари берилган векторларнинг мос компонентлари йиғиндисидан иборат бўлган

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\} \tag{6.3}$$

векторга айтилади. Ушбу

$$\vec{0} = \{0, 0, \ldots, 0\} \tag{6.4}$$

вектор *ноль вектор* дейилади.

(6.1) векторга *қарама-қарши вектор* деб

$$-\vec{a} = \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\} \tag{6.5}$$

векторни айтамиз.

Равшанки, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Бундан фойдаланиб, векторларни қўшишга тескари амал—айириш амали мавжуд эканлигини кўриш осон: (6.1) ва (6.2) векторларнинг айирмаси

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

бўлади ва

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \ldots,\ a_n-b_n\}. \tag{6.6}$$

(6.1) *векторнинг* λ *сонга кўпайтмаси* деб компонентлари $\vec{a}$ векторнинг мос компонентларини λ га кўпайтмасига тенг бўлган

$$\lambda\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \ldots,\ \lambda a_n\} \tag{6.7}$$

векторни айтилади.

Бу таърифдан қуйидаги муҳим хоссалар келиб чиқади (уларни текшириш ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади):

$$\lambda(\vec{a}\pm\vec{b})=\lambda\vec{a}\pm\lambda\vec{b}. \tag{6.8}$$

$$(\lambda_1\pm\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}\pm\lambda_2\vec{a}, \tag{6.9}$$

$$\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=\lambda_2(\lambda_1\vec{a})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}, \tag{6.10}$$

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot 1=\vec{a}. \tag{6.11}$$

Қуйидаги хоссалар ҳам осонгина исбот қилиниши мумкин ёки (6.8) — (6.11) хоссалардан натижалар сифатида ҳосил қилиниши мумкин:

$$0\cdot\vec{a}=\vec{0}, \tag{6.12}$$

$$(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}, \tag{6.13}$$

$$\lambda\vec{0}=\vec{0}. \tag{6.14}$$

Агар $\lambda\vec{a}=\vec{0}$ бўлса, ё $\lambda=0$, ёки $\vec{a}=\vec{0}$.

Векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари аниқланган барча ҳақиқий компонентли n ўлчовли векторлар тўплами *n ўлчовли вектор фазо* дейилади. Биз n ўлчовли вектор фазони R^n кўринишда белгилаймиз. n ўлчовли вектор фазонинг, яъни R^n нинг элементлари n ўлчовли векторлардан иборат.

2°. Чизиқли фазонинг таърифи. *R^n тўплам берилган бўлиб, a, b, c, ... сонлар унинг элементлари бўлсин. R^n тўпламда ундаги a, $b\in R^n$ элементларнинг ҳар қандай жуфтига R^n дан олинган, бир қийматли аниқланган $(a+b)\in R^n$ элементни мос қўювчи* ва *a, b ларнинг йиғиндиси деб аталган қўшиш амали ҳамда ҳақиқий сонга кўпайтириш, яъни $a\in R^n$ элемент ва ҳар қандай ҳақиқий* *λ сон учун $\lambda a \in R^n$ кўпайтма бир қийматли аниқланган бўлиб, кўрсатилган амаллар қуйидаги 1—8- хоссаларга эга бўлса, R^n тўплам элементлари векторлар деб, R^n нинг ўзи эса чизиқли (ёки вектор) фазо дейилади;*

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. *R^n да ундаги барча $\vec{a} \in R^n$ элементлар учун $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ шартни қаноатлантирадиган $\vec{a} \in R^n$ элемент мавжуд;*
4. *R^n да ҳар қандай $\vec{a} \in R^n$ элемент учун $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ шартни қаноатлантирадиган қарама-қарши $(-\vec{a}) \in R^n$ элемент мавжуд;*
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. $\lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = \lambda_2 (\lambda_1 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{a}$;
7. $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$;
8. $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

Агар

$$\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$$

тенгламани қаноатлантирадиган $\vec{x}$ элемент мавжуд бўлса, уни $\vec{a} - \vec{b}$ айирма деб қабул қилинади ва $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ деб ёзилади.

1—8- хоссалардан келиб чиқадиган баъзи содда тасдиқларни исботсиз эслатиб ўтамиз:

1) ҳар қандай R^n чизиқли фазода фақат битта $\vec{0} \in R^n$ элемент мавжуд;

2) R^n чизиқли фазонинг ҳар қандай элементи учун шу фазода унга қарама-қарши бўлган ягона элемент мавжуд. $(-1)\vec{a}$ элемент $\vec{a}$ элемент учун қарама-қарши бўлган элемент бўлади;

3) ҳар қандай $\vec{a} \in R^n$ элемент учун $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ муносабат ҳамма вақт бажарилади;

4) Ҳар қандай λ ҳақиқий сон ва $\vec{0} \in R^n$ элемент учун $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ муносабат ҳамма вақт бажарилади;

5) $\lambda \vec{a} = \vec{0}$ тенгликдан ё $\lambda = 0$, ёки $\vec{a} = \vec{0}$ бўлиши келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Фазонинг тайинланган нуқтасидан чиқувчи барча радиус-векторлар тўплами ҳақиқий чизиқли фазо ҳосил қилади.

2. Даражаси n натурал сондан ошмайдиган ҳамда қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари одатдагича бажариладиган барча кўпҳадлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилади.

3. Агар функцияларни қўшишни ва уларни ҳақиқий сонга кўпайтиришни функциялар назариясида қабул қилинган маънода, яъни эркли ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос келган қийматларни қўшиш ёки сонга кўпайтириш каби тушунилса, ҳақиқий ўзгарувчининг мумкин бўлган барча ҳақиқий функциялари тўплами ҳам чизиқли фазога мисол бўлади.

4. $[0,1]$ кесмада берилган ҳақиқий функциялар тўплами функцияларни қўшиш ва уларни ҳақиқий сонга кўпайтиришга нисбатан чизиқли ҳақиқий фазо ташкил қилади.

5. Ҳақиқий сонлар тўплами ҳам чизиқли фазо ташкил қилади.

6. Коэффициентлари P майдоннинг сонларидан иборат бир жинсли чизиқли

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

тенгламалар системасини олайлик. Бу системанинг ечимлари тўплами чизиқли фазони ташкил этади.

7. a ва b ҳақиқий сонлар учун

$$ae^z + be^{-z}, \quad (-\infty < z < +\infty)$$

кўринишдаги функциялар тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

3°. Чизиқли фазонинг ўлчови. 6.1-таъриф. *Агар R^n чизиқли фазода n та чизиқли эркли вектор мавжуд бўлиб, чизиқли эркли векторлар сони бундан ортиқ бўлмаса, R^n фазо n ўлчовли фазо дейилади. Агар R^n фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда R^n фазо чексиз ўлчовли фазо дейилади.*

Чексиз ўлчовли фазолар математиканинг махсус бўлимларида текширилади. Биз бу ерда чекли ўлчовли фазолар билан шуғулланамиз.

Қуйида бир неча мисоллар кўрамиз.

Мисоллар. 1. Текисликда векторлар тўпламини оламиз. Бу тўплам ҳақиқий сонлар майдони устидаги чизиқли фазони ифодалайди. Бу R^n чизиқли фазонинг коллинеар бўлмаган икки $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ ва $\vec{e}_2 \neq \vec{0}$ вектори чизиқли эрклидир. Агар буларни чизиқли боғлиқ бўлсин деб фараз қилсак, $\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$ тенгликдан $\lambda_2 \neq 0$ бўлганда

$$\vec{e}_2 = \lambda \vec{e}_1, \ \lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

бўлиши келиб чиқади. Геометриядан маълумки, охирги тенглик $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторларнинг коллинеарлигини билдиради. Шундай қилиб, $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ векторлар ўзаро чизиқли эркли. Лекин R^n нинг исталган $\vec{a}$ вектори $\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ орқали чизиқли ифодаланади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{a}$ векторларнинг бошларини битта нуқтага кўчирсак,

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$$

тенглик ўринли бўлади. Демак, таърифга кўра бу фазо икки ўлчовлидир.

2. P ҳақиқий сонлар майдони устида R^n чизиқли фазони қарайлик. Тўғри бурчакли координаталар системасининг Ox, Oy ва Oz ўқларида ётган ва узунликлари 1 га тенг бўлган $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторларни олайлик. Бу уч вектор чизиқли эркли, чунки улар битта текисликда ётмайди (компланар эмас). R^n нинг исталган $\vec{a}$ вектори параллелепипед қоидаси бўйича $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ орқали чизиқли ифодаланади:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3,$$

бунда λ_1, λ_2, λ_3 — ҳақиқий сонлар ва $\lambda_1 \vec{e}_1$, $\lambda_2 \vec{e}_2$, $\lambda_3 \vec{e}_3$ мос равишда Ox, Oy, Oz ўқларда ётади. Демак, R^n чизиқли фазо уч ўлчовлидир.

3. P майдонда даражалари $(n-1)$ дан ортиқ бўлмаган кўпҳадлар фазосини олайлик. Бу фазода ушбу

$$1, \ x, \ x^2, \ \ldots, \ x^{n-1}$$

функциялар чизиқли боғланмаган, чунки

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \equiv 0$$

айният, маълумки, $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$ шартдагина ўринли бўлади. Энди, фазонинг исталган

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

элементини олсак, унинг юқоридаги функциялар орқали ифодаланиши кўриниб турибди. Шундай қилиб, биз $(n-1)$ ўлчовли фазога эга бўламиз.

4. P майдонда n ўлчовли $\vec{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ векторлар фазоси берилган бўлсин. Бу фазонинг ушбу

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 = \{1, \ 0, \ \ldots, \ 0\}, \\ \vec{e}_2 = \{0, \ 1, \ \ldots, \ 0\}, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \vec{e}_n = \{0, \ 0, \ \ldots, \ 1\} \end{array}\right|$$

векторлари чизиқли боғланмаган, чунки

$$\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

тенглик фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ бўлгандагина ўринлидир.

Фазонинг исталган $\vec{a}$ вектори юқоридаги векторлар орқали чизиқли ифодаланади. Демак, бу фазо n ўлчовлидир.

4°. **Чизиқли фазонинг қисм фазолари.** *Агар R^n чизиқли фазонинг P қисм тўплами ушбу хоссаларга эга бўлса, у шу фазонинг қисм фазоси дейилади.*

1. *Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b} \in P$ векторлар учун $\vec{a} + \vec{b}$ йиғинди ҳам P га тегишли.*

2. *Ҳар қандай $\vec{a} \in P$ вектор ва ҳар қандай λ ҳақиқий сон учун $\lambda \vec{a}$ вектор ҳам P га тегишли.*

Ҳақиқатан ҳам, 2- шартга кўра P тўплам ноль векторга эга бўлади: агар $\vec{a} \in P$ бўлса, у ҳолда $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ вектор ҳам P қисм фазога тегишли бўлади. Сўнгра P ўзининг исталган $\vec{a} \in P$ вектори билан бирга, 2- хоссага кўра, унга қарама-қарши бўлган $-\vec{a} = (-\vec{a})$ векторга ҳам эга бўлади, шунинг учун 1- хоссага кўра P даги исталган иккита векторнинг айирмаси ҳам P нинг ўзига тегишли бўлади. Чизиқли фазонинг таърифига кирувчи қолган барча талаблар эса R^n да бажарилган тақдирда P да ҳам бажарилади.

R^n фазонинг чизиқли қисм фазоларига мисол бўлиб, R^n фазонинг ўзи, шунингдек, биттагина ноль вектордан иборат — *ноль қисм фазо* деб аталувчи тўплам хизмат қилади.

Қуйидаги мисол кўпроқ қизиқиш туғдиради: R^n фазода векторларнинг исталган $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ чекли системасини олайлик. Бу векторларнинг чизиқли комбинацияларидан иборат бўлган барча векторлар тўпламини P орқали белгилаймиз. P чизиқли қисм фазо бўлишини исбот қиламиз. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n, \ \vec{c} =$$
$$= \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{b}+\vec{c}=(\lambda_1+\alpha_1)\vec{a}_1+(\lambda_2+\alpha_2)\vec{a}_2+\ldots+$$
$$+(\lambda_n+\alpha_n)\vec{a}_n,$$

яъни $\vec{b}+\vec{c}$ вектор P га тегишли; β ҳар қандай бўлганда ҳам

$$\beta\vec{b}=(\beta\lambda_1)\vec{a}_1+(\beta\lambda_2)\vec{a}_2+\ldots+(\beta\lambda_n)\vec{a}_n$$

вектор P га тегишли бўлади. P га, хусусан, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ векторларнинг ўзлари ҳам тегишлидир.

Демак, юқоридаги шартни қаноатлантирадиган $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ векторлар тўплами қисм фазо ташкил қилади.

Барча узлуксиз функциялар фазосида даражаси n дан катта бўлмаган кўпҳадлар тўплами қисм фазодир. Бирор R^n фазонинг ҳар қандай P қисм фазосида R^n фазонинг ноль элементи бўлиши ўз-ўзидан равшандир.

Ҳар қандай қисм фазо чизиқли фазо бўлгани учун юқорида биз киритган фазо ўлчови тушунчаси, базис ва бошқа тушунчаларнинг ҳаммаси қисм фазога ҳам татбиқ этилади. Қисм фазодаги чизиқли эркли векторлар бутун фазодаги чизиқли эркли векторлардан кўп бўлмайди, шунинг учун ҳар қандай қисм фазонинг ўлчови бутун фазо ўлчовидан катта эмас.

Агар R^n чизиқли фазонинг ўлчови унинг P қисм фазосининг ўлчовига тенг бўлса, у ҳолда R^n чизиқли фазо билан P қисм фазо устма-уст тушади.

Ҳар бир R^n чизиқли фазода қуйидаги умумий усул билан қисм фазо ҳосил қилиш мумкин: R^n чизиқли фазода $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ векторлар тўпламини оламиз: у ҳолда олинган $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ векторларнинг ҳамма чизиқли комбинацияларидан тузилган P тўплам R^n фазонинг қисм фазосидир. Бу берилган $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ векторларни ўз ичига олган кичик чизиқли қисм фазодир. У и $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ векторларнинг *чизиқли қобиғи* дейилади. Демак, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ векторлардан ҳосил бўлган P қисм фазонинг ўлчови булар орасидаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сонига тенг эканини кўрсатиш қийин эмас.

Агар диққатга сазовор бўлмаган ноль қисм фазони эътиборга олмасак, у ҳолда энг содда қисм фазо бир ўлчовли қисм фазодан иборат бўлади. Бундай қисм фазоларнинг ҳар бирининг базиси битта $\{\vec{e}_1\}$ вектордан иборат. Шундай қилиб, бир ўлчовли қисм фазо $\lambda\vec{e}_1$ кўринишдаги векторлардан иборат, бунда λ — ихтиёрий сон, $\lambda_1\vec{e}_1$ векторга берилган $\vec{e}_0$ векторни қўшамиз. Натижада ушбу

$$\vec{a} = \vec{e}_0 + \lambda\vec{e}_1$$

кўринишдаги векторлар тўпламини ҳосил қиламиз. Бу векторлар тўпламини, уч ўлчовли фазодагига ўхшаш, R^n чизиқли фазодаги тўғри чизиқ деб атаи табиийдир.

Шунингдек, $\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$ кўринишдаги векторлар ($\vec{e}_1$ ва $\vec{e}_2$ — чизиқли эркли векторлар, α ва β — ихтиёрий сонлар) икки ўлчовли қисм фазони ташкил қилади. Қуйидаги

$$\vec{a} = \vec{e}_0 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$$

векторлар тўпламини биз R^n да *текислик* деб атаймиз.

34- §. Евклид фазоси

Олдинги параграфда чизиқли фазо қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган элементлар (векторлар) тўплами деб таърифланган эди. Бу амаллар ёрдами билан тўғри чизиқни, текисликни, фазо ўлчовлари сонини ҳамда параллел тўғри чизиқлар ва ҳоказоларни таърифлаб бериш мумкин. Аммо ёлғиз шу тўпламларнинг ўзлари Евклид геометрияси деб аталмиш геометриянинг мазмунини ташкил этувчи турли-туман фактларнинг ҳаммасини ўз ичига олиши учун етарли эмас. Масалан, ёлғиз қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш терминлари ёрдамида биз векторларнинг узунлиги, векторлар орасидаги бурчак, векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва ҳоказоларни таърифлай олмаймиз. Бу тушунчаларни энг содда қилиб қуйидагича бериш мумкин.

1°. Метрик тушунчалар. $\vec{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда қуйидаги ёйилмани ёзиш мумкин:

$$\vec{a} = \{a_1, 0, \ldots, 0\} + \{0, a_2, 0, \ldots, 0\} + \\ + \ldots + \{0, 0, \ldots, 0, a_n\} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \\ + \ldots + a_n\vec{e}_n\}. \qquad (6.16)$$

(6.16) ёйилма векторларни уч ўлчовли фазода бирор базис бўйича ёйилмасининг табиий умумлашмасидир. Шунинг учун

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ чизиқли эркли векторлар системасини R^n да *базис* деб, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонларни эса $\vec{a}$ векторнинг бу *базисга нисбатан компонентлари* деб қараш табиийдир. Бу ерда биз $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни R^n да қараш билан чегараланамиз. R^n да метрик тушунчалар векторларни скаляр кўпайтириш ёрдами билан энг осон киритилади. Тартибланган

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \qquad (6.17)$$

векторлар жуфтининг скаляр кўпайтмаси деб,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

сонга айтамиз. R^n да скаляр кўпайтманинг бу таърифи табиий равишда уч ўлчовли фазода скаляр кўпайтма учун векторларнинг Декарт координаталар системасидаги компонентлари орқали ифодаловчи формулаларни умумлаштиради. (6.17) дан скаляр кўпайтманинг қуйидаги хоссалари бевосита келиб чиқади:

1) ҳар қандай $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ учун

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \qquad (6.18)$$

2) ҳар қандай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^n$ учун

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \qquad (6.19)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \qquad (6.20)$$

3) ҳар қандай $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ ва ихтиёрий λ ҳақиқий сон учун

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}); \qquad (6.21)$$

4) ҳар қандай $\vec{a} \in R^n$ учун

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) \geqslant 0, \qquad (6.22)$$

шу билан бирга, агар $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} = \vec{0}$ бўлади. Бу хосса

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

формуладан келиб чиқади.

$\vec{a}$ *векторнинг узунлиги* деб,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n} \qquad (6.23)$$

сонни айтамиз. У ҳолда ҳар қандай $\vec{a} \neq \vec{0}$ учун $|\vec{a}| > 0$; $\vec{a} = \vec{0}$ учун эса $|\vec{a}| = 0$.

Энди нолмас (ноль бўлмаган) $\vec{a}$, $\vec{b}$ *векторлар орасидаги* φ *бурчакни*

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (6.24)$$

формула билан аниқлаймиз. Бу таъриф маънога эга бўлиши учун ихтиёрий нолмас $\vec{a}$, $\vec{b} \in R^n$ векторлар учун

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leqslant 1 \qquad (6.25)$$

тенгсизликнинг тўғри эканини кўрсатиш керак. Бу тенгсизлик

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$$

тенгсизликка эквивалент. Ихтиёрий $\vec{a} \neq \vec{0}$ ва $\vec{b} \neq \vec{0}$ учун 6(.22) га кўра

$$(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \geqslant 0 \qquad (6.26)$$

тенгсизликни ёзиш мумкин. Скаляр кўпайтманинг (6.17) — (6.21) хоссаларидан фойдалансак, қуйидагига эгамиз:

$$(\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2 (\vec{b} \cdot \vec{b}) =$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2 (\vec{b} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - 2\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2 |\vec{b}|^2. \qquad (6.27)$$

Энди $c = |\vec{a}|^2$, $\vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b}$, $k = |\vec{b}|^2$ деб оламиз, у ҳолда (6.26) ва (6.27) дан барча $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ лар учун

$$k\lambda^2 - 2\lambda d + c \geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли экани келиб чиқади, бунда $c \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Бу тенгсизликнинг чап томони λ га нисбатан квадрат учҳад бўлиб, тегишли тенгсизлик бажарилиши учун унинг дискриминанти мусбат бўлмаслиги етарли, яъни

$$d^2 - ck \leqslant 0$$

тенгсизлик бажарилиши етарли. Аммо охирги тенгсизликни қуйидагича

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = d^2 \leqslant c\cdot k = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

ёзса бўлади. Бу (6.25) тенгсизликнинг ўринли эканини исботлайди.

Агар $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ бўлса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар *ортогонал векторлар* дейилади. $\vec{0}$ вектор ҳар қандай $\vec{a}\in R^n$ векторга ортогонал деб қаралиши мумкин. Барча $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ бирлик векторлар ўзаро ортогонал бўлгани сабабли улар учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, \text{ агар } i=k \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } i\neq k \text{ бўлса,} \end{cases}$$

Бу муносабатларда $\vec{e}_i$ ларни ушбу $\vec{e}_i=\{0, 0, \dots, 1, \dots 0\}$ кўринишга эга деб қаралади.

2°. Евклид фазосининг таърифи. 6.2- таъриф. *Агар n ўлчовли R^n чизиқли фазода скаляр кўпайтириш аниқланган бўлса, у ҳолда бундай фазо n ўлчовли Евклид фазоси деб аталади ва E_R^n кўринишда белгиланади.*

Ҳар қандай n ўлчовли чизиқли R^n фазода скаляр кўпайтиришни аниқлаш мумкин, яъни бу фазони Евклид фазосига айлантириш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, R^n фазода исталган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисни олайлик. Агар

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i, \quad \vec{b}=\sum_{i=1}^{n} b_i\vec{e}_i$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

бўлади. Бу тенглик R^n фазода скаляр кўпайтиришни аниқлайди.

E_R^n га тегишли икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *вектор орасидаги бурчак* деб

$$\varphi = \arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

сонга айтилади. Бу таърифда ҳар доим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$$

муносабатнинг бажарилиши кўзда тутилади. φ бурчакнинг таърифи тўғри бўлиши учун ҳар қандай икки $\vec{a}, \vec{b}\in E_R^n$ вектор учун

$$-1\leqslant\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\leqslant 1$$

тенгсизлик ўринли ёки бари бир

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqslant|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2 \qquad (6.28)$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши етарли. (6.28) тенгсизлик *Коши — Буняковский тенгсизлиги* дейилади.

Бу тенгсизликнинг исботини юқорида келтирганмиз (34- §, 1- пунктга қаранг). Коши—Буняковский тенгсизлигидан E_R^n га тегишли $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар учун

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}| \qquad (6.29)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Одатда бу тенгсизлик *учбурчак тенгсизлиги* дейилади. Коши—Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, учбурчак тенгсизлигини исботлаш мумкин. Ҳақиқатан ҳам,

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}\cdot\vec{b}.$$

(6.28) формулага асосан

$$-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant(\vec{a}\cdot\vec{b})\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Шу сабабли қуйидагига эгамиз:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\leqslant(\vec{a}\cdot\vec{a})+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+(\vec{b}\cdot\vec{b})=$$
$$=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2.$$

Бундан $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ бўлса, у ҳолда E_R^n фазодан олинган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар *ортогонал векторлар* дейилади.

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал векторлар бўлса, у ҳолда $\vec{a}+\vec{b}$ ни томонлари $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ дан иборат бўлган тўғри тўртбурчакнинг диагонали деб ҳисоблаш табиийдир. $\vec{a}+\vec{b}$ векторнинг узунлигини топамиз. Ушбуга эгамиз:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}\cdot\vec{b}.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ортогонал бўлгани учун

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Демак, $|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2.$

Бу формула E_R^n фазо учун Пифагор теоремасининг аналогидир.

Бу натижа умумлаштиришга йўл қўяди. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторларнинг ҳар бир жуфти ўзаро ортогонал бўлсин, у ҳолда

$$|\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n|^2=|\vec{a}_1|^2+|\vec{a}_2|^2+\ldots+|\vec{a}_n|^2.$$

Бу формула Пифагорнинг кўп ўлчовли теоремасининг мазмунини ташкил қилади. Бунда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторларни n ўлчовли тўғри бурчакли параллелепипеднинг бирор учидан чиқувчи қирралар деб тасвирлаш мумкин. Охирги формуланинг исботи ҳам аввалгига ўхшаш бўлгани учун унга тўхталмаймиз.

3°. **E_R^n да ортонормаланган базис.** Ушбу

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

векторлар E_R^n да ҳар бир иккитаси ўзаро ортогонал векторлар бўлсин. Агар бу векторларнинг ҳаммаси бир вақтда $\vec{0}$ дан фарқли бўлса, улар чизиқли эркли бўлади. Ушбу тенглик бажарилган бўлсин:

$$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}. \qquad (6.30)$$

Агар бу тенглик $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ бўлгандагина ўринли эканини кўрсатсак, юқоридаги тасдиқ исботланган бўлади.

(6.30) нинг иккала томонини $\vec{e}_1$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$\lambda_1\ (\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)+\lambda_2\ (\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)+\lambda_3\ (\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1)+\ldots+\lambda_n\ (\vec{e}_n\cdot\vec{e}_1)=0.$$

Шартга кўра $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1\neq 0$. Шунинг учун $\lambda_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)=0$ дан $\lambda_1=0$ экани келиб чиқади.

$\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$ экани ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Агар биттаси ҳам нолга тенг бўлмаган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар системасининг ҳар бир иккита вектори ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда *бу система ортогонал базис ташкил қилади* дейилади. Агар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар бирлик векторлар бўлиб ортогонал базис ташкил қилса, у ҳолда базис *ортогонал ва нормаланган* ёки тўғридан-тўғри *ортонормаланган базис* дейилади.

Ортонормаланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2,, \ldots, \vec{e}_n$ базис учун ушбуга эгамиз:

$$(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k)=\begin{cases}1, & \text{агар } i=k \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } i\neq k \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Ҳар иккитаси ортогонал бўлган нолмас векторлар чизиқли эркли эканлиги юқорида исботланган эди, шу сабабли ортогонал ёки ортонормаланган базис ташкил қилувчи векторлар E_R^n да оддий базис ҳам ташкил қилади.

6.1-теорема. *Ҳар қандай n ўлчовли ҳақиқий Евклид фазосида ортонормаланган базис мавжуд.*

Исбот. Бу теоремани исбот этиш учун бевосита ортонормаланган базисни қурамиз. E_R^n фазода n ўлчовли ҳақиқий Евклид фазоси таърифига кўра бирор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис мавжуд. Олдин $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдан ортогонал базис тузамиз. Аввало $\vec{q}_1=\vec{e}_1$ деб оламиз. Сўнгра $\vec{q}_2$ векторни $\vec{q}_2=\vec{e}_2+\lambda\vec{q}_1$ кўринишда излаймиз, бунда λ сонни $(\vec{q}_2\cdot\vec{q}_1)^2=0$, яъни $(\vec{e}_2+\lambda\vec{q}_1)\cdot\vec{q}_1=0$ тенглик ўринли бўладиган қилиб танлаймиз. Бундан, равшанки,

$$\lambda=-\frac{\vec{e}_2\cdot\vec{q}_1}{\vec{q}_1\cdot\vec{q}_1}.$$

Исботнинг давомини индукция методи билан ўтказамиз. Ҳар иккитаси ортогонал ва нолмас $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-1}$ векторлар ясалган деб фараз қилайлик. $\vec{q}_k$ векторни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\vec{q}_k = \vec{e}_k + \lambda_1 \vec{q}_{k-1} + \lambda_2 \vec{q}_{k-2} + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{q}_1{}^{*}. \qquad (6.31)$$

Бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ коэффициентлар $\vec{q}_k$ векторнинг $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-1}$ векторларга ортогоналлик шартларидан топилади. Бу шартларни ёзамиз:

$$(\vec{q}_k \cdot \vec{q}_1) = 0, \ (\vec{q}_k \cdot \vec{q}_2) = 0, \ \ldots, \ (\vec{q}_k \cdot \vec{q}_{k-1}) = 0$$

ёки тўлароқ ёзганда

$$\begin{gathered}
(\vec{e}_k + \lambda_1 \vec{q}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{q}_1) \cdot \vec{q}_1 = 0, \\
(\vec{e}_k + \lambda_1 \vec{q}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{q}_1) \cdot \vec{q}_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\vec{e}_k + \lambda_1 \vec{q}_{k-1} + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{q}_1) \cdot \vec{q}_{k-1} = 0.
\end{gathered}$$

$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-1}$ векторларнинг ҳар иккитаси ортогоналлигидан фойдаланиб, охирги тенгликлар системасини соддароқ кўринишда ёзамиз:

$$\begin{gathered}
(\vec{e}_k \cdot \vec{q}_1) + \lambda_{k-1} (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1) = 0, \\
(\vec{e}_k \cdot \vec{q}_2) + \lambda_{k-2} (\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{k-1}) + \lambda_1 (\vec{q}_{k+1} \cdot \vec{q}_{k-1}) = 0.
\end{gathered}$$

Бундан қуйидагиларни топамиз:

$$\lambda_{k-1} = -\frac{\vec{e}_k \cdot \vec{q}_1}{\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_1}, \ \lambda_{k-2} = -\frac{\vec{e}_k \cdot \vec{q}_2}{\vec{q}_2 \cdot \vec{q}_2}, \ \ldots, \ \lambda_1 = -\frac{\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{k-1}}{\vec{q}_{k-1} \cdot \vec{q}_{k-1}}.$$

Энди топилган $\vec{q}_k$ векторлар нолмас вектор эканини исботлаймиз. (6.31) дан $\vec{q}_k$ вектор $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-1}, \vec{e}_k$ векторларнинг чизиқли комбинацияси экани равшан, бунда $\vec{e}_k$ олдида бирга тенг коэффициент турибди, аммо $\vec{q}_{k-1}$ векторни $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-2}$ векторлар ва $\vec{e}_{k-1}$ векторнинг чизиқли комбинацияси билан алмаштириш мумкин ва ҳоказо. Шундай қилиб, $\vec{q}_k$ вектор қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкинлигини кўрамиз:

---

* Шуни қайд қиламизки, $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-1}$ векторлар ҳам (6.31) формуладек формула бўйича тузилади.

$$\vec{q}_k = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{e}_{k-1} + \vec{e}_k.$$

Агар $\vec{q}_k = \vec{0}$ бўлса, у ҳолда бундан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ векторларнинг чизиқли боғлиқ экани келиб чиқади, бу эса мумкин эмас (чунки шартга кўра $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар E_R^n да базис ташкил қилади). Шундай қилиб $\vec{q}_k \neq 0$ ва у $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{k-1}$ векторларнинг ҳаммасига ортогонал. Шу билан E_R^n да ортогонал $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n$ базис мавжудлиги исботланди.

Агар $\vec{q}_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ векторларни

$$q_i' = \frac{\vec{q}_i}{|\vec{q}_i|}$$

векторлар билан алмаштирилса, у ҳолда $\vec{q}_i''$ векторларнинг узунлиги бирга тенг бўлади ва биз $\vec{q}_1', \vec{q}_2'', \ldots, \vec{q}_n$ векторлар E_R^n да ортонормаланган базис ташкил қилишини кўрамиз. Шу билан теорема исбот бўлди.

6.2-теорема. Агар E_R^n *фазода* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *векторлар ортонормаланган базис ташкил қилса, у ҳолда бу базисга нисбатан скаляр кўпайтма*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_n b_n$$

кўринишга эга бўлади, бунда ушбу

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n,$$
$$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n$$

векторлар E_R^n *га тегишли ихтиёрий векторлар.*

Исбот. Скаляр кўпайтманинг хоссасига кўра ёзамиз:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \ldots + a_1b_n(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_n) +$$
$$+ a_2b_1(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + \ldots + a_2b_n(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_n) +$$
$$+ a_nb_1(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_1) + a_nb_2(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_2) + \ldots + a_nb_n(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n).$$

Бунда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормаланган базис бўлгани учун

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

тенгликка эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

6.3-теорема. *E_k^n га тегишли $\vec{a}$ векторнинг бирор компоненти ортонормаланган базисга нисбатан шу $\vec{a}$ векторни базиснинг тегишли вектори билан скаляр кўпайтмасига тенг, яъни*

$$\vec{a}_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Исбот. $\vec{a}$ вектор E_k^n фазонинг ихтиёрий вектори ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ исталган ортонормаланган базис бўлсин, яъни

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n.$$

Бу тengликнинг иккала қисмини $\vec{e}_j$ векторга скаляр кўпайтириб топамиз:

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j.$$

6-бобга доир машқлар

1. Агар $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{u}, \vec{v}$ векторлар орасида ноль вектор бўлса, у ҳолда бу векторларнинг чизиқли боғлиқ бўлишини исботланг.

2. $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{1, 0, 4\}$, $\vec{c} = \{2, 4, 1\}$, $\vec{d} = \{0, 3, 2\}$ векторларнинг чизиқли боғлиқ эканини исботланг.

3. $\vec{a} = \{4, 5\}$ векторни $\vec{b}\ \{1, 3\}$, $\vec{c} = \{2, 2\}$ векторлар орқали чизиқли ифодаланг.

4. Ушбу векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўла оладими: $\vec{a}_1 = \{1, 1, 4, 2\}$; $\vec{a}_2 = \{1, -1, -2, 4\}$; $\vec{a}_3 = \{0, 2, 6, -2\}$; $\vec{a}_4 = \{-3, -1, 3, 4\}$; $\vec{a}_5 = \{-1, 0, -4, -7\}$?

5. $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$. $\vec{c} = \{-1, -1, -1\}$ векторлар берилган. $x = 2\,\vec{a} - 3\,\vec{b} + 5\,\vec{c}$ векторнинг координаталарини топинг. *Жавоб*: $x = \{9, -3, -2\}$.

6. Агар R^n фазонинг R_1' ва R_2' дан иборат икки қисм фазоси учун умумий элемент фақат ноль вектор бўлса, улар ўлчовларининг йиғиндиси R^n нинг ўлчовидан катта эмаслигини кўрсатинг.

7. R^n даги иккита қисм фазонинг бирлашмаси ва кесишмаси яна R^n да қисм фазо эканини исботланг.

8. Иккита қисм фазо ўлчамларининг йиғиндиси йиғиндининг ўлчамига бу қисм фазолар кесишмаси ўлчамининг қўшилганига тенг бўлишини исботланг.

9. R^n фазода $\vec{a}=\{3, 0, 1, 0\}$, $\vec{b}=\{3, 2, 1, 1\}$, $\vec{c}=\{4, -2, -1, 1\}$ векторлар берилган. Қуйидаги скаляр кўпайтмаларни аниқланг:

а) $\vec{a}^2$; $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\cdot\vec{c}$; $\vec{b}\cdot\vec{c}$;

б) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$; $(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{b}$;

в) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

Жавоблар: а) 10; 10; 11; 8; б) 21; 2; в) —5; 105.

10. R^5 фазода $\vec{a}=\{2, 0, 6, 0, 3\}$, $\vec{b}=\{1, -3, 0, 10, \sqrt{11}\}$, $\vec{c}=\{-1, -2, 0, 2, 4\}$, $\vec{d}=\{4, -3, -1, 2, 2\}$ векторлар берилган. Бу векторларнинг узунликларини аниқланг.

Жавоблар: 7; 11; 5; $\sqrt{34}$.

11. R^5 фазода қуйидаги векторлар берилган:

а) $\vec{p}=\{1, -3, 2, 1\}$; $\vec{q}=\{0, -2, 1, 3\}$;

б) $\vec{r}=\{-2, 0, 0, -1\}$, $\vec{s}=\{4, 6, 7, -8,\}$;

в) $\vec{t}=\{4, -3, 0, -5\}$, $\vec{u}=\{0, 10, 7, -6\}$;

г) $\vec{v}=\{6, -7, 1, -2\}$, $\vec{w}=\{4, 0, -4, 10\}$.

Бу векторларнинг қайси бир жуфти ўзаро ортогонал бўлишини кўрсатинг.

Жавоблар: $\vec{r}\perp\vec{s}$, $\vec{t}\perp\vec{u}$, $\vec{v}\perp\vec{w}$.

12. R^5 фазода қуйидаги векторлар орасидаги бурчакни аниқланг.

а) $\vec{u}=\{-3, 4, 3, -1, 1\}$, $\vec{v}=\{6, 2, -2, -2, 1\}$;

б) $\vec{w}=\{2, 1, 0, -2, -4\}$, $\vec{r}=\{1, 3, -4, 2, \sqrt{6}\}$;

в) $\vec{s}=\{3, -1, 8, 8, -4\}$, $\vec{t}=\{2, 6, -1, 5, 8\}$.

Жавоблар: а) $\arccos\left(-\frac{13}{42}\right)$; б) $\arccos\left(\frac{9-4\sqrt{6}}{30}\right)$; в) $\frac{\pi}{2}$.

13 R^4 фазода $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{1, -1, -1, 1\}$, $\{2, 1, 1, 3\}$ векторларга ортогонал бўлиб, узунлиги бирга тенг бўлган векторни топинг.

14. R^n да тўғри бурчакли n ўлчовли параллелепипед диагоналининг квадрати унинг бир учидан чиқувчи қирралари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлишини исботланг (Пифагор теоремасининг n ўлчовли ҳолга умумлаштирилиши).

15. Қирраси a га тенг бўлган n ўлчовли кубнинг диагонали узунлигини топинг ва бу узунликнинг $n\to\infty$ даги лимитини аниқланг.

16. E_R^5 Евклид фазосида учлари $A\,(4, 3, 3, 4, 5)$, $B\,(-2, -2, 2, 5, 4)$, $C\,(-1, 2, 2, 1, 5)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчакда медианаларнинг узунлигини топинг.

Жавоблар: $|AD_1|=\frac{\sqrt{70}}{2}$, $|BD_2|=4\sqrt{2}$, $|CD_3|=\sqrt{19}$.

17. E_R^5 Евклид фазосида учлари $A\,(1, 4, 2, -1, 3)$, $B\,(1, 2, -2, 3, 3)$, $C\,(-2, -1, 1, -2, 3)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчакнинг тенг ёнли эканлигини исботланг.

18. $\vec{a}=\{-3, 1, 5, -1\}$ векторни нормалланг.

Жавоб: $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right\}$.

19. Ушбу ортогонал векторлар системаси берилган: $\vec{a} = \{2, 1, -2, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 1, -2\}$, $\vec{c} = \{-2, 1, -2, 1\}$. Бу системани ортогонал базисгача тўлдиринг.

Жавоб: $\{1, -2, -1, 2\}$.

20. Векторларнинг қуйидаги системаларини E_R^4 да ортонормаланган базисгача тўлдиринг:

а) $\vec{a}_1 = \left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{\sqrt{22}}{7}, \frac{5}{7}\right\}$, $\vec{a}_2 = \left\{\frac{\sqrt{22}}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right\}$;

б) $\vec{b}_1 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, $\vec{b}_2 = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}.\right\}$

21. Ортогоналлаш процессини қўлланиб, қисм фазоларнинг қуйидаги векторлар системаси вужудга келтирадиган ортонормаланган базисларини тузинг:

а) $\vec{a}_1 = \{1, -2, 1, 2\}$, $\vec{a}_2 = \{1, 0, -2, -1\}$; $\vec{a}_3 = \{2, 1, 0, 0\}$;

б) $\vec{a}_1 = \{1, 1, -1, -2, 0\}$, $\vec{a}_2 = \{0, 2, 5, 0, 8\}$, $\vec{a}_3 = \{1, 1{,}3, 0, 1\}$,

в) $\vec{a}_1 = \{1, 1, 0, 0, 0\}$, $\vec{a}_2 = \{0, 0, 1, 1, 0\}$, $\vec{a}_3 = \{0, 1, 0, 1, 1\}$-

22. E_R^4 да $\vec{a}_1 = \{1, 0, 2, 1\}$, $\vec{a}_2 = \{0, 1, -2, 1\}$ векторлар берилган. Базисини топинг.

23. E_R^5 да ушбу векторлар берилган: $\vec{a}_1 = \{1, 1, 0, 0, 0\}$, $\vec{a}_2 = \{0, 1, 1, 0, 0\}$, $\vec{a}_3 = \{0, 0, 1, 1, 0\}$, $\vec{a}_4 = \{0, 0, 0, 1, 1\}$.

Қисм фазонинг ортогонал тўлдирувчисининг базисини топинг.

7-БОБ. МАТРИЦА ВА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

35- §. Матрицалар алгебраси

1.° Асосий таъриф ва тушунчалар. 7.1- таъриф. *m та сатр ва n та устундан иборат*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

жадвал тўғри бурчакли $m \times n$ матрица дейилади; баъзан $m \times n$ матрицани *$m \times n$ ўлчамли тўғри бурчакли матрица* деб ҳам юритилади. Матрицани тузувчи a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) сонлар унинг *элементлари* дейилади. Матрицанинг элементлари ҳақиқий ёки комплекс сонлардан иборат бўлиши мумкин.

Умумий ҳолда матрицанинг элементлари, одатда, пастига иккита индекс қўйилиб, битта кичик латин ҳарфи билан ёзилади. Индекслардан биринчиси сатр тартибини (номерини), иккинчиси эса устун тартибини билдиради. Матрицаларни белгилаш учун қуйидаги кўринишдаги ёзувлар ҳам ишлатилади:

$$B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{Vmatrix} \text{ ёки } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Одатда матрицанинг сатрларини n ўлчовли, устунларини эса m ўлчовли векторлар деб қараб, уларни мос равишда сатр-векторлар ва устун-векторлар системаси деб қараш мумкин. (7.1) матрица учун ёзишга қулай бўлган ушбу $A = (a_{ij})$ белгилашдан ҳам фойдаланамиз. Агар матрицанинг сатрлари сони устунлари сонига тенг (яъни $m = n$) бўлса, матрицани *квадрат матрица* дейилади. Бундай матрица *n ўлчамли (n- тартибли) матрица* деб юритилади.

Ушбу

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

кўринишдаги квадрат матрица *диагонал матрица* дейилади ва қисқача қуйидагича ёзилади:

$$D = \{d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}\} \text{ ёки } D = \{ d_{ii} \}.$$

Агар (7.2) диагонал матрицада $d_{ii} = 1$ $(i = 1,2, \dots, n)$ бўлса, бу матрица бирлик матрица дейилади ва E ҳарфи орқали белгиланади, яъни

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

Қуйидагича

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} i \neq j \text{ да } 0, \\ i = j \text{ да } 1 \end{Bmatrix}$$

аниқланадиган δ_{ij} сон *Кронекер белгиси* (символи) дейилади. Кронекер белгисидан фойдаланиб, D ва E матрицаларни қисқача қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$D = [\delta_{ij} \cdot d_{ij}], \ E = [\delta_{ij}].$$

Агар матрицанинг барча элементлариноллардан иборат бўлса, у *ноль матрица* дейилади ва E^0 орқали белгиланади, яъни

$$E^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Агар m та сатрли ва n та устунли иккита A ва B матрицадан бирининг ҳамма элементлари иккинчисининг ҳамма мос элементларига тенг (яъни $a_{ij} = b_{ij}$) бўлса, бу матрицалар *тенг* деб ҳисобланади ва

$$A = B$$

кўринишда ёзилади. Агар бир матрицанинг камида битта элементи иккинчисининг мос элементига тенг бўлмаса, бу матрицалар ҳам *тенг эмас* дейилади ва

$$A \neq B$$

кўринишда ёзилади. Матрицалар учун «кичик» ва «катта» тушунчалари маънога эга эмас.

1- боб, 7- § да n-тартибли квадрат матрицанинг детерминанти тушунчаси киритилган эди. Кейинги мулоҳазаларда биз n-тартибли детерминантлар тушунчасидан тўғридан-тўғри фойдаланаверамиз.

2°. Матрицаларни қўшиш ва сонга кўпайтириш. 7.2- таъриф. *Агар бир хил тартибли иккита* $A=[a_{ij}]$ ва $B=[b_{ij}]$ *матрицалар берилган бўлса,* A *ва* B *матрицаларнинг йиғиндиси деб шундай* C *матрицага айтиладики, бу матрицанинг элементлари* A ва B *матрицаларнинг мос элементларининг йиғиндисига тенг бўлади ва* $C=A+B$ *деб ёзилади.*

Таъриф бўйича

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Матрицалар йиғиндиси таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
2. $A+B=B+A$;
3. $A+E^0=A$ (бунда $E^0=(0)$, A, B, C — берилган бир хил тартибли квадрат матрицалар)

Матрицаларнинг айирмаси уларнинг йиғиндисига ўхшаш таърифланади ва

$$C=A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

кўринишда ёзилади. Агар матрицаларнинг тартиби бир хил бўлмаса, ундай матрицаларда қўшиш ва айириш амаллари киритилмаган.

7.3- таъриф. $A=[a_{ij}]$ *матрицани* $\alpha \neq 0$ *сонга кўпайтириш деб,* A *матрицанинг ҳамма элементларини шу* α *сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган матрицага айтилади ва* αA ёки $A\alpha$ *кўринишда ёзилади.*

Таърифга кўра

$$A\alpha = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \qquad (7.7)$$

Матрицани сонга кўпайтириш таърифидан қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A;$
2. $A \cdot O = O \cdot A = E^0;$
3. $\alpha (\beta A) = \beta (\alpha A) = (\alpha \beta) A;$
4. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A;$
5. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B.$

Бу ерда A ва B — бир хил тартибли квадрат матрицалар, α ва β — ҳақиқий сонлар.

Агар A матрица n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$\det (\alpha A) = \alpha^n \det A$$

муносабатнинг ўринли бўлишини кўрсатиш унча қийин эмас. Унинг учун детерминантнинг тегишли хоссасидан фойдаланиш етарли (I боб, 7-§).

Ушбу $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ \ldots \ + \alpha_k A_k$ *ифодани* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *матрицаларнинг* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *коэффициентли чизиқли комбинацияси* дейилади.

Агар

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k = 0, \quad A_i \neq E^0, \ i = 1, 2, \ldots, n$ тенгликдан $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ келиб чиқса, у ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ матрицалар *чизиқли эркли*, акс ҳолда $A_1, A_2, \ldots, A_n$ матрицалар *чизиқли боғлиқ* дейилади.

3°. Матрицаларни кўпайтириш. Тартиблари мос равишда $m \times n$ ва $p \times q$ бўлган

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ва } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

тўғри бурчакли матрицалар берилган бўлсин. Агар A матрицанинг устунлари сони n берилган B матрицанинг сатрлари сони p га тенг бўлса, у ҳолда бу матрицаларни кўпайтириш амали маънога эга бўлади.

7.4- таъриф. *Берилган тартибда (A — биринчи, B — иккинчи) олинган A ва B матрицаларнинг кўпайтмаси AB деб, шундай $m \times n$ тартибли*

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

матрицага айтиладики, C матрицанинг элементлари

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}, \qquad (7.9)$$

$$i = 1,2, \ldots, m, \; j = 1,2, \ldots, n$$

формулалар билан аниқланади.

Агар A ва B лар n-тартибли квадрат матрицалар бўлса, уларнинг $C = AB$ кўпайтмаси ҳам n-тартибли квадрат матрица бўлади.

Таърифдан матрицаларни кўпайтириш учун қуйидаги қоида келиб чиқади: *иккита матрицани кўпайтиришдан ҳосил бўлган матрицанинг i-сатри ва j-устунида турувчи c_{ij} элементни ҳисоблаш учун биринчи матрицанинг i-сатрида турувчи элементларни иккинчи матрицанинг j-устунида турувчи элементларга мос равишда кўпайтириб қўшиш керак* [(7.9) формулага қаранг!].

Тўғри бурчакли матрицаларнинг хусусий ҳоли бўлган квадрат матрицаларни уларнинг тартиблари бир хил бўлгандагина кўпайтириш мумкин. Масалан, қуйидаги

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ва } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

тўғри бурчакли матрицалар кўпайтмасини топамиз:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 3\cdot2+2\cdot1+8\cdot0+1.3 & 3\cdot(-1)+2\cdot(-3)+8\cdot1+1\cdot1 \\ 1\cdot2+(-4)\cdot1+0\cdot0+3\cdot3 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+0\cdot1+3\cdot2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

Матрицаларнинг кўпайтмаси қуйидаги хоссаларга эга:

1. $A\,(BC) = (AB)\,C;$
2. $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B), \; \alpha \neq 0;$

3. $(A+B)C = AC + BC$;
4. $C(A+B) = CA + CB$.

Бу ерда A, B, C — матрицалар, α — ҳақиқий сон.

Икки матрицанинг кўпайтмаси учун коммутативлик (ўрин алмаштириш) хоссаси умуман айтганда ўринли эмас, яъни ушбу

$$AB = BA$$

тенглик доим ўринли бўлавермайди. Аммо матрицалардан бири E бирлик матрица бўлганда доим $AE = EA$ тенглик ўринли.

Мисоллар. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

бўлса, у ҳолда

$$AB = \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 20 & 18 \\ -2 & 14 & 20 & 6 \\ 11 & 13 & 15 & 12 \\ -5 & -19 & -25 & -12 \end{pmatrix}$$

бўлади, яъни

$$AB \neq BA.$$

Агар

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган бўлса, равшанки,

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{bmatrix},$$

Лекин BA маънога эга эмас, яъни бундай кўпайтма (яъни BA) таъриф бўйича аниқланмаган.

Агар A ва B матрицалар $AB = BA$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда A ва B матрицаларни *коммутатив матрицалар* дейилади. Юқорида эслатганимиздек, бирлик матрица ўзи билан бир хил тартибга эга бўлган квадрат матрица билан коммутативдир, яъни

$$AE = EA = A.$$

Агар A ва B бир хил тартибли бўлса, у ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

7.1- теорема. *Иккита матрица кўпайтмасининг детерминанти бу матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг, яъни*

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B.$$

Исбот. Теоремани иккинчи тартибли матрицалар учун исботлаймиз. Айтайлик, ушбу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

матрицалар берилган бўлсин. Бу ҳолда, равшанки,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix}.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta_1 = \det A, \ \Delta_2 = \det B, \ \Delta = \det(AB).$$

Детерминантнинг хоссаларини эътиборга олиб, Δ ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{11} b_{12} \\ a_{21} b_{11} & a_{21} b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} & a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} & a_{22} b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} \\ a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} b_{21} & a_{12} b_{22} \\ a_{22} b_{21} & a_{22} b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11} b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11} b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12} b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{21} b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Бу йиғиндида биринчи ҳамда охирги қўшилувчилар нолга тенг (чунки устун ва сатр элементлари ўзаро тенг). Шунинг учун

$$\Delta = b_{11} b_{22} \Delta_1 - b_{12} b_{21} \Delta_1 = \Delta_1 (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) = \Delta_1 \Delta_2.$$

Маълумки, детерминантларнинг кўпайтмаси коммутативлик хоссасига бўйсунади:

$$\det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A.$$

Демак,

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B.$$

Шундай қилиб, теорема иккинчи тартибли матрицалар учун исботланди.

n- тартибли матрица учун ҳам теорема шунга ўхшаш исботланади.

4°. Детерминантларни кўпайтириш. 7.1- теореманинг тасдиқидан детерминантларни кўпайтириш учун қуйидаги таъриф келиб чиқади.

7.5-таъриф. *n-тартибли*

$$\Delta_1 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ ва}$$

$$\Delta_2 = \det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантлар берилган бўлсин. Δ_1 *ва* Δ_2 *детерминантларнинг кўпайтмаси деб, элементлари*

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

$$(i, j = 1,2, \dots, n)$$

формулалар билан аниқланадиган ушбу детерминантга айтилади:

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детерминантларни кўпайтириш коммутативлик хоссасига бўйсунади, яъни кўпайтма кўпайтувчиларнинг ўрнини алмаштиришга боғлиқ эмас.

5°. **Транспонирланган** матрица. *Берилган* $m \times n$ *тартибли*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матрицадан сатр ва устунларнинг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўладиган матрицани A га нисбатан транспонирланган матрица дейилади ва уни A^* *ёки* A' *деб белгиланади.* Шундай қилиб,

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Бу таърифдан кўринадики, агар A матрица $m \times n$ ўлчамли бўлса, у ҳолда A^* матрица $n \times m$ ўлчамли матрица бўлади. Агар A квадрат матрица бўлса, A^* ҳам квадрат матрица бўлади, бу ҳолда A ва A^* нинг тартиблари ўзаро тенг бўлади.

Транспонирланган матрица учун қуйидаги хоссаларнинг тўғрилигини текшириш қийин эмас:

1. Икки марта транспонирланган матрица дастлабки матрицанинг ўзига тенг, яъни

$$A^{**} = (A^*)^* = A.$$

2. Транспонирланган кўпайтма матрица транспонирланган иккинчи матрицанинг транспонирланган биринчи матрицага кўпайтмасига тенг, яъни

$$(AB)^* = Б^* A^*.$$

Агар A квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$\det A^* = \det A$$

тенглик ўринли.

Агар $A = (a_{ij})$ матрица ўзининг транспонирланган A^* матрицасига тенг, яъни $A^* = A$ бўлса, у ҳолда A матрицани *симметрик матрица* дейилади. Агар матрица симметрик бўлса, бундан унинг квадрат матрица экани келиб чиқади.

Симметрик матрицанинг бош диагоналга нисбатан симметрик бўлган элементлари ўзаро тенг (яъни $a_{ij} = a_{ji}$) бўлади.

Берилган матрицанинг транспонирланган A^* матрицасига кўпайтмаси $C = AA^*$ симметрик матрица бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$C^* = (AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^* = C.$$

Агар матрицанинг бош диагоналига нисбатан симметрик жойлашган элементлари абсолют қиймат бўйича ўзаро тенг ва ишораси бўйича эса қарама-қарши (яъни $a_{ij} = -a_{ji}$) ҳамда бош диагоналида жойлашган элементлари нолга тенг (яъни $a_{ii} = 0$) бўлса, у ҳолда берилган матрицани *антисимметрик (қия симметрик) матрица* дейилади.

Қуйидаги теорема ўринли.

7.2- теорема. *Ихтиёрий n- тартибли A квадрат матрицани n- тартибли симметрик ва антисимметрик матрицаларнинг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин.*

Исбот. Тартиблари A матрицанинг тартиби билна бир хил ҳамда йиғиндиси A матрицага тенг бўлган B_c симметрик ва C_k антисимметрик матрицаларнинг мавжудлигини, яъни

$$A = B_c + C_k \tag{7.10}$$

тенглик ўринли бўлишини исботлаймиз. Шу тенглик ўринли бўлса, B_c ва C_k матрицаларнинг A матрица орқали ифодасини ягона усул билан топиш мумкин. Ҳақиқатан равшанки,

$$B^*_c = B_c\,; \qquad C^*_k = -C_k\,.$$

Шунинг учун

$$A^* = (B_c + C_k)^* = B^*_c + C^*_k = B_c - C_k\,.$$

Энди $A = B_c + C_k$ ва $A^* = B_c - C_k$ дан қуйидагиларни топамиз:

$$B_c = \frac{1}{2}\,(A + A^*),\ C_k = \frac{1}{2}\,(A - A^*).$$

Кўринадики, $A + A^*$ матрица симметрикдир, чунки

$$(A + A^*)^* = A^* + A^{**} = A^* + A = A^*.$$

Шунингдек, $A - A^*$ матрица *антисимметрикдир*, чунки унинг бош диагоналидаги элементлари нолга тенг ва у учун *антисимметрикликнинг* бошқа шартлари ҳам бажарилади. Шундай қилиб, ихтиёрий квадрат матрица учун ягона (7.10) ёйилмани топиш мумкин.

36- §. Тескари матрица ҳақида тушунча

7.6- таъриф. *Агар n- тартибли A ва B квадрат матрицалар орасида* $AB = BA = E$ (E — бирлик матрица) *муносабат ўринли бўлса, у ҳолда B матрицани A матрицага (ва аксинча) тескари матрица дейилади.*

A матрица учун унинг тескари матрицасини A^{-1} орқали белгиланади. У ҳолда ўзаро тескари матрицалар учун ушбу муносабат ўринли:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Берилган квадрат матрицага тескари матрица ҳар доим ҳам мавжуд бўлавермайди. Бундай матрица мавжуд бўлганда уни топиш кўп масалаларни ҳал этишда муҳим аҳамият касб этади.

7.7- таъриф. *Агар A квадрат матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у ҳолда A матрицани махсус, акс ҳолда махсусмас матрица дейилади.*

7.3- теорема. *Ихтиёрий махсусмас матрица учун унга тескари матрица мавжуд.*

Исбот. Фараз қилайлик, $A=[a_{ij}]$ матрица n тартибли квадрат матрица бўлиб, $\Delta=\det A\neq 0$ бўлсин. A матрицанинг a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ элементларига мос келувчи алгебраик тўлдирувчилардан тузилган ушбу матрицани қараймиз:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.11}$$

Агар бу матрицани транспонирласак,

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

матрицага эга бўламиз. (7.12) матрицани одатда A *матрицага қўшма матрица* дейилади. Қўшма матрицанинг барча элементларини A матрицанинг детерминантига бўлиб, қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$B=\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \ldots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{vmatrix}. \tag{7.13}$$

Ҳосил бўлган бу B матрицани A матрицага тескари эканини, яъни $B=A^{-1}$ эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун детерминантнинг хоссаларига асосланиб, A ва B матрицаларнинг кўпайтмасини ҳисоблаймиз:

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0..0 \\ 0 & 1..0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0..1 \end{bmatrix}$$

Демак, $B=A^{-1}$. Бундан $\det A^{-1}=\frac{1}{\Delta}A$ экани келиб чиқади.

Изоҳлар. 1. Берилган махсусмас A матрица учун унинг тескари A^{-1} матрицаси ягонадир.

2. Махсус квадрат матрица учун тескари матрица мавжуд эмас.

Энди ушбу

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

матрица учун тескари матрицани топайлик. Бунинг учун аввал $\det A$ детерминантни тузамиз ва уни ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\det A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & \underset{6}{5} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Демак, A — махсусмас матрица.

Энди қўшма матрицани тузамиз, бунинг учун A матрицанинг сатр элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз ва уларни мос равишда устунларга жойлаштирамиз:

$A_{11}=4\cdot 6-5\cdot 5=-1;$ $\quad A_{12}=-(2\cdot 6-3\cdot 5)=3;$

$A_{21}=-(2\cdot 6-5\cdot 3)=3;$ $\quad A_{22}=1\cdot 6-3\cdot 3=-3;$

$A_{31}=2\cdot 5-4\cdot 3=-2;$ $\quad A_{32}=-(1\cdot 5-3\cdot 2)=1;$

$$A_{13}=2\cdot 5-3\cdot 4=-2;$$
$$A_{23}=-(5\cdot 1-3\cdot 2)=1;$$
$$A_{33}=1\cdot 4-2\cdot 2=0.$$

Шундай қилиб,

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ниҳоят, A нинг барча элементларини $\Delta=-1$ га бўламиз, у ҳолда тескари матрица ушбу кўринишга эга бўлади:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}+1 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

Текшириш кўрсатадики, $A\cdot A^{-1}=E$. Ҳақиқатан,

$$A\,A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 9\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2(-3)+3\cdot2 & 1(-3)+2\cdot3+3\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot(-1)+3.0\\ 2\cdot1+4\cdot(-3)+5\cdot2 & 2\cdot(-3)+4\cdot3+5\cdot(-1) & 2\cdot2+4\cdot(-1)+5\cdot0\\ 3\cdot1+5\cdot(-3)+6.2 & 3\cdot(-3)+5\cdot3+6\cdot(-1) & 3\cdot2+5\cdot(-1)+6\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

Шу йўл билан $A^{-1}\cdot A=E$ эканини ҳам исботлаш мумкин.

Тескари матрицанинг баъзи хоссалари

1) *тескари матрицанинг детерминанти берилган матрица детерминантининг тескари қийматига тенг, яъни*

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}.$$

Айтайлик, $A^{-1}\cdot A=E$ бўлсин. Иккита квадрат матрица кўпайтмасининг детерминанти шу матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг эканини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$1=\det\ E=\det\ (A^{-1}\cdot A)=\det\ A^{-1}\cdot\det A.$$

Бундан изланган муносабат келиб чиқади.

2) *Квадрат матрицалар кўпайтмаси AB учун тескари матрица иккинчи B матрицага тескари матрицанинг биринчи A матрицага тескари матрицага кўпайтмасига тенг, яъни*

$$(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1},$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$AB\ (B^{-1}\ A^{-1})=A\ (B\ B^{-1})\ \ A^{-1}=AEA^{-1}=A\,A^{-1}=E.$$

Шунингдек,

$$(B^{-1}A^{-1})\ AB=B^{-1}\ (A^{-1}A)\ B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

Демак, бу хосса исбот этилди.

3) *транспонирланган тескари матрица берилган транспонирланган матрицанинг тескарисига тенг, яъни*

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Ҳақиқатан ҳам, $AA^{-1} = E$ ни транспонирлаб ва $(PQ)^* = Q^*P^*$ (Q, P — квадрат матрицалар) хоссани ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$(A^{-1}\ A)^* = A^*\ (A^{-1})^* = E^* = E.$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини чапдан $(A^*)^{-1}$ га кўпайтирамиз; бир томондан,

$$(A^*)^{-1}\ A^*\ (A^{-1})^* = E\ (A^{-1})^* = (A^{-1})^*.$$

Иккинчи томондан, $(A^*)^{-1}\ E = (A^*)^{-1}$. Демак, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

4) *Тескари матрицанинг тескариси берилган матрицанинг ўзига тенг, яъни*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Исботи равшан.

37- §. Чизиқли тенгламалар системаси

Тескари матрица тушунчаси чизиқли тенгламалар системасини ечишда муҳим роль ўйнайди.

Фараз қилайлик n та номаълумли n та чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин. Бундай система қуйидагича ёзилади:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \qquad (7.14)$$

ёки қисқача,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}\ x_2\ + \ \ldots + a_{in}\ x_n = b_i\, ,\ i, j = \overline{1,n}.$$

Бунда $x_1, x_2\ \ldots, x_n$ *номаълумлар,* a_{ij}, $i,j = \overline{1, n}$ (*система коэффициентлари,* b_1, $b_2, \ldots, b_n$ *озод ҳадлар* (системанинг ўнг томони) деб юритилади. Агар система коэффициентларидан тузилган матрицани A, номаълумлардан тузилган устун-векторни $\vec{x}$ ва озод ҳадлардан тузилган устун-векторни $\vec{b}$ десак, (7. 14) ни ушбу

$$A\vec{x}=\vec{b} \tag{7.15}$$

вектор-матрицали тенглама кўринишда ёзиш мумкин. Агар $\vec{b}\neq\vec{0}$ бўлса, (7.15) тенглама *бир жинслимас*, $\vec{b}=\vec{0}$ бўлганда эса (7.15) тенглама *бир жинсли тенглама* дейилади. Қуйидаги теорема $\vec{b}\neq\vec{0}$ бўлган ҳол учун ўринли бўлиб, аввал ушбу таърифни берамиз.

7.8-таъриф. (7.14) *чизиқли тенгламалар системасининг ечими деб, ушбу* $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ *сонларнинг шундай тартибланган* $\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ *системасига айтиладики, бу системанинг сонлари* (7.14) *системанинг ҳар бир тенгламасини сонли тенгликка айлантиради, яъни* $\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ *система учун қуйидаги*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1^0+a_{12}x_2^0+\ldots+a_{1n}x_n^0=b_1, \\ a_{21}x_1^0+a_{22}x_2^0+\ldots+a_{2n}\ x_n^0=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^0+a_{n2}x_2^0+\ldots+a_{nn}x_n^0=b_n \end{array}\right\} \tag{7.16}$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Крамер теоремаси

Бизга детерминантлар назариясидан Крамер формулалари маълум. Бу формулаларни моҳиятини очиб берувчи Крамер теоремаси билан танишайлик.

7.4-теорема (Крамер теоремаси). *Агар A махсусмас матрица* (яъни $\det A=\Delta\neq 0$) *бўлса, у ҳолда* (7.14) *система ягона ечимга эга бўлади. Шу билан бирга ечимлар қуйидаги формулалар (Крамер формулалари) орқали топилади:*

$$x_k=\frac{\Delta_k}{\Delta},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{7.17}$$

бунда

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7.18}$$

Исбот. Шартга асосан $\det A \neq 0$. Шунинг учун A матрицага тескари A^{-1} матрица мавжуд. (7.15) тенгламанинг ҳар икки томонини A матрицага кўпайтирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \text{ ёки } \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Бу формула (7. 15) тенгламанинг ечимини ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам, текшириш буни тасдиқлайди:

$$A\ (A^{-1}\ \vec{b}) = E\vec{b} = \vec{b}.$$

Шундай қилиб, биз ечимнинг мавжудлигини исбот қилдик.

Энди ечимнинг ягона эканлигини исбот қиламиз. Фараз қилайлик, (7.15) нинг $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ дан фарқли $\vec{a}$ ечими (яъни $\vec{a} \neq \vec{x}$) ҳам мавжуд бўлсин, яъни бу $\vec{a}$ вектор учун қуйидаги

$$A\vec{a} = \vec{b}$$

тенглик ўринли бўлсин. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини чапдан A^{-1} матрицага кўпайтириб топамиз: бир томондан, $A^{-1}(A\vec{a}) = A^{-1}\vec{b} = \vec{x}$; иккинчи томондан,

$$A^{-1}(A\vec{a}) = (A^{-1}A)\vec{a} = E\vec{a} = \vec{a}.$$

Шунинг учун $\vec{a} = \vec{x}$. Бундан ечимнинг ягоналиги келиб чиқади.

Энди (7.17) Крамер формулаларини келтириб чиқарайлик. Маълумки, $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$. Бундан фойдалансак, $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ ечимнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}\vec{b} \qquad \text{ёки}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}\ b_1+A_{21}\ b_2+\ \ldots\ +A_{n1}\ b_n \\ A_{12}\ b_1+A_{22}\ b_2+\ \ldots\ +A_{n2}\ b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}\ b_1+A_{2n}\ b_2+\ \ldots\ +A_{nn}\ b_n \end{pmatrix}.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} b_i\ A_{j1} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\ A_{j2} \\ \cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_j\ A_{jn} \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \ldots \\ \Delta_n \end{pmatrix}.$$

Бундан (7.17) формулалар келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу бир жинслимас система ечилсин:

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=5, \\ -2x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$$

Ечиш. 1) системани матрица кўринишда ёзайлик:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix};$$

2) берилган системанинг матрицаси A нинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=5\neq 0.$$

Демак, A матрица учун A^{-1} матрица мавжуд;

3) берилган A матрица элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаб, тескари матрицани топамиз:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix};$$

4) (7.17) формулага асосан ечимни топамиз:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

яъни $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

38-§. Матрицанинг ранги

Биз матрица ранги тушунчасини беришдан олдин китобхонларни матрица даражаси тушунчаси билан таништирамиз. Матрица даражаси ҳам сонларни даражага кўтаришга ўхшаш каби киритилади. Агар A квадрат матрица бўлса, у ҳолда A^2 деб A ни A га кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган матрицани белгиланади. Шунга ўхшаш,

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A,$$

умуман,

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A^{n-2} \cdot A \cdot A = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{n \text{ марта}}$$

матрицаларни қараш мумкин. Кўрсатилган маънони англатадиган матрицалар *A матрицани даражага кўтаришдан ҳосил бўлган матрица* деб юритилади. Қулайлик учун $A^0 = E$ деб қабул қилинади. Махсусмас матрица учун манфий даража тушунчасини ҳам киритиш мумкин. A матрица учун манфий даражани қуйидагича аниқланади:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n \text{ марта}}$$

Бутун кўрсаткичли даражали матрицалар учун қуйидаги хоссалар ўринли:

1) $A^p A^q = A^{p+q}$;
2) $(A^p)^q = A^{pq}$.

Агар A ва B бир хил тартибли квадрат матрицалар бўлиб, $AB = BA$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда бу A ва B матрицалар йиғиндисининг даражаси учун қуйидаги Ньютон биноми формуласи ўринли:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}, \tag{7.19}$$

Энди матрицанинг ранги тушунчасини киритайлик. $m \times n$ ўлчовли тўғри тўрт бурчакли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Агар $k \leqslant \min(m, n)$ бўлса, A матрицанинг k та устуни ва k сатри кесишишидан ҳосил бўлган матрица k-тартибли квадрат матрица бўлади. Шу квадрат матрицанинг детерминантини A матрицанинг *k-тартибли минори* деб аталади.

Агар A квадрат матрица бўлиб, $n \times n$ ўлчовли бўлса, унинг k-тартибли минори шу матрицанинг детерминантидан иборат бўлади.

7.9-таъриф. *Тўғри бурчакли матрицанинг ранги деб унинг чизиқли эркли устунларининг* (сатрларининг) *максимал сонига айтилади.*

Одатда A матрицанинг рангини $r(A)$ ёки $A(r)$ орқали белгиланади. Ноль матрицанинг ранги нолга тенг деб ҳисобланади. m ва n сонларнинг энг кичиги билан матрицанинг ранги орасидаги айирма, яъни $\min(m, n) - r(A)$ сон *матрицанинг дефекти* дейилади.

Агар A матрицанинг ранги r га тенг бўлса, у ҳолда:

а) унинг нолдан фарқли энг камида битта r-тартибли минори бўлади;

б) A матрицанинг $(r+1)$ ва ундан юқори тартибли барча минорлари нолга тенг бўлади.

7.5-теорема. *Тўғри бурчакли A матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартиби шу матрицанинг рангига тенг.*

Теореманинг исботини китобхонга қолдириб, матрица рангини ҳисоблаш қоидасини келтирамиз.

Матрицанинг рангини топишда қуйидаги қоидага амал қилиш фойдалидир: *агар нолдан фарқли r-тартибли M минор маълум бўлса, бундан юқори тартибли минорларни текшириш учун фақат шу M минорни ўраб турган $(r+1)$-тартибли минорларни ҳисоблаш етарли. Агар бу минорларнинг барчаси нолга тенг бўлса, у ҳолда матрицанинг ранги r га тенг бўлади; агар улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлса, бу ҳолда матрицанинг ранги r дан ортиқ бўлади.*

Масалан, ушбу

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

матрицанинг рангини ҳисоблайлик.

Бу матрицанинг юқори чап бурчагида жойлашган иккинчи тартибли минори нолга тенг. Аммо матрицада бундан бошқа нолдан фарқли 2-тартибли минорлар бор. Жумладан,

$$M=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Энди уни ўраб турган учинчи тартибли минорларни ҳисоблаймиз:

$$M_1=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0,\ M_2=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=11\neq 0.$$

Аммо M_1 минорни ўраб турган иккала тўртинчи тартибли минорлар нолга тенг. Ҳақиқатан,

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -7 & 4 & 21 \end{vmatrix}=0.$$

Аммо M_2 ни ўраб турган иккита тўртинчи тартибли минорлардан M_{21} нолдан фарқли:

$$M_{21}=\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}=127\neq 0.$$

Демак, матрицанинг тартиби рангига тенг, дефекти эса $4-4=0$.

Матрица рангининг хоссалари

1) матрицани транспонирланганда унинг ранги ўзгармайди;

2) матрицада сатр (устун) ларнинг ўрнини алмаштириш унинг рангини ўзгартирмайди;

3) матрица сатри (устуни) нинг барча элементларини нолдан фарқли сонга кўпайтирилса, унинг ранги ўзгармайди;

4) матрицанинг бирор сатри (ёки устуни) ни ихтиёрий сонга кўпайтириб, унинг бошқа сатри (ёки устуни) га қўшилса, унинг ранги ўзгармайди;

5) матрицада нолли сатр (ёки устун) ни чиқариб ташланса, унинг ранги ўзгармайди;

6) агар матрицада бирор сатрлар (ёки устунлар) элементларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган сатр (ёки устун) ни чиқариб ташланса, матрицанинг ранги ўзгармайди.

Юқоридаги хоссалардаги матрица рангини ўзгартирмайдиган жараён *элементар алмаштириш* деб юритилади.

7.10-таъриф. *Иккита матрицадан бири иккинчисидан чекли сондаги элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда бу матрицалар эквивалент матрицалар дейилади.*

Эквивалент матрицаларнинг ранглари ўзаро тенг бўлади, аммо уларнинг ўзлари умуман айтганда тенг эмас.

7.11-таъриф. *Агар матрицанинг бош диагоналининг бошланишида ётган элементлардан фақат бир нечтаси бир сонидан, қолган элементлари эса ноллардан иборат бўлса, у ҳолда бундай матрицани каноник матрица дейилади.*

Масалан, ушбу тўғри бурчакли

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

матрица каноник матрицадир.

Элементар алмаштиришлар ёрдамида ҳар қандай ихтиёрий матрицани каноник кўринишга келтириш мумкин.

Каноник (содда) матрицанинг ранги, унинг бош диагоналидаги бирлар сонига (бундан юқорида мисол тариқасида берилган матрицанинг ранги учга) тенг бўлади. Берилган матрицани элементар алмаштиришлар ёрдамида *учбурчак* (ёки *поғонасимон*) кўринишга келтириш матрицанинг рангини ҳисоблаш учун анча қулайлик туғдиради. Қуйидаги

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1,k-1}&a_{1k}&a_{1,k+1}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2,k-1}&a_{2k}&a_{2,k+1}&\dots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\dots&a_{3,k-1}&a_{3k}&a_{3,k+1}&\dots&a_{3n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0&a_{kk}&a_{k,k+1}&\dots&a_{kn}\\0&0&0&\dots&0&0&0&\dots&0\\0&0&0&\dots&0&0&0&\dots&0\end{bmatrix}$$

ёки

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2,n-1}&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\0&0&\dots&0&a_{nn}\end{bmatrix}$$

кўринишда ёзиладиган матрицалар учбурчак (ёки *поғонасимон*) *кўринишдаги матрицалар* дейилади.

Демак, поғонасимон кўринишдаги матрицаларнинг ранги бош диагоналда жойлашган нолдан фарқли элементлар сонига тенг.

Масалан, қуйидаги

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5&-3&-2\\3&4&3&-1&-3\\5&6&-1&3&-5\end{bmatrix}$$

матрицанинг рангини топайлик ва уни каноник кўринишга келтирайлик. Бунинг учун бу матрицанинг иккинчи сатридан биринчи сатрини айириб, ушбу матрицага эга бўламиз:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Энди иккинчи сатрни 2 га ҳамда 5 га кўпайтириб мос равишда биринчи ва учинчи сатрдан айирсак,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицага эга бўламиз. Шунингдек, учинчи сатрдан биринчи сатрни айирсак,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. B матрица A матрицадан чекли сондаги элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлди. Агар B матрицанинг биринчи ва иккинчи сатрларининг ўринларини алмаштирсак, у ҳолда учбурчак кўринишдаги матрица ҳосил бўлади. Демак, бу матрицанинг ранги иккига тенг. Бундан A матрицанинг ранги ҳам иккига тенглиги келиб чиқади, яъни

$$r(A) = 2.$$

Энди B матрицани каноник кўринишга келтирайлик. Бунинг учун B матрицанинг биринчи устунини $1, -2, 2$ ва -1 сонларига кўпайтириб, мос равишда иккинчи, учинчи, тўртинчи ва бешинчи устунларидан айирамиз. Ҳосил бўлган

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрицанинг иккинчи устунини 9 ва -7 га кўпайтириб, унинг учинчи ва тўртинчи устунларидан айирсак ҳамда ҳосил қилинган матрицанинг биринчи ва иккинчи сатрларининг ўринларини алмаштириб ёзсак, каноник матрицага эга бўламиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Бу каноник матрицанинг ранги 2 га тенг, бундан берилган матрицанинг ҳам ранги 2 га тенглиги бевосита кўриниб турибди.

39- §. Матрицанинг ранги билан базис векторлар орасидаги боғланиш

Матрицанинг ранги тушунчасидан фойдаланиб, унинг сатр-векторлари ёки устун-векторларининг (сатр ёки устунларидан иборат векторларнинг) чизиқли боғлиқ бўлиши ҳақидаги теоремани қараймиз.

7.6- теорема. *Агар матрицанинг ранги r га тенг бўлса, у ҳолда унинг сатр-векторлари (устун-векторлари) орасида r та чизиқли эркли вектор мавжуд; агар бу векторларнинг сони r дан ортиқ бўлса, у ҳолда улар чизиқли боғлиқдир.*

Исбот. Фараз қилайлик,

$$A=[a_{ij}],\ i=1,2,\ \dots,\ m;\ j=1,2,\ \dots,\ n$$

матрицанинг ранги r ва

$$M_r=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2r} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} \dots a_{rr} \end{bmatrix} \qquad (7.20)$$

минори нолдан фарқли бўлсин, яъни $M_r \neq 0$. Ушбу сатр-векторлар

$$\left|\begin{array}{l} \vec{x_1}=\{a_{11},\ a_{12},\ \dots,\ a_{1r},\ \dots,\ a_{1n}\}, \\ \vec{x_2}=\{a_{21},\ a_{22},\ \dots,\ a_{2r},\ \dots,\ a_{2n}\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{x_r}=\{a_{r1},\ a_{r2},\ \dots,\ a_{rr},\ \dots,\ a_{rn}\} \end{array}\right. \qquad (7.21)$$

чизиқли эркли эканини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги

$$\lambda_1\vec{x_1}+\lambda_2\vec{x_2}+\dots+\lambda_r\vec{x_r}=0 \qquad (7.22)$$

вектор тенгликнинг

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$$

бўлган ҳолдагина ўринли бўлишини кўрсатиш кифоя. Бу тенглик қуйидаги n та скаляр тенглик системасига эквивалентдир:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{r1} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_r a_{r2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_r a_{rn} = 0. \end{array}\right\} \qquad (7.22')$$

(7.22′) ни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ га нисбатан r $(r \leqslant n)$ номаълумли n та тенглама системаси деб қараш мумкин. Агар $r = n$ бўлса, у ҳолда (7.22′) бир жинсли система $M_r \neq 0$ бўлгани учун фақат $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$ ечимга эга бўлади. Демак, $n = r$ бўлганда $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ векторлар чизиқли эркли.

Фараз қилайлик, $n > r$ бўлсин. n та сатр-вектордан олинган ихтиёрий вектор биринчи r та чизиқли эркли вектор билан чизиқли боғлиқ эканини исбот этамиз. n та вектор системасининг ихтиёрий векторини $\vec{x}_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, \ldots, a_{ir}, \ldots, a_{ik}, \ldots, a_{in}\}$ орқали белгилаб, ушбу

$$\sum_{q=1}^{r} \lambda_q \vec{x}_q + \lambda_l \vec{x}_l = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_r \vec{x}_r + \lambda_i \vec{x}_i = 0$$

тенгликнинг ўринли эканини ($\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j^2 + \lambda_i^2 \neq 0$ бўлганда) кўрсатамиз. Бу вектор тенглик қуйидаги тенгликлар системасига эквивалент:

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{r1} + \lambda_l a_{i1} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_r a_{r2} + \lambda_l a_{i2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{1r} + \lambda_2 a_{2r} + \ldots + \lambda_r a_{rr} + \lambda_i a_{ir} = 0, \\ \lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_r a_{rk} + \lambda_i a_{ik} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_r a_{rn} + \lambda_l a_{in} = 0. \end{array}\right.$$

Бу система $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \lambda_i$, яъни $r+1$ та номаълумга нисбатан n та чизиқли тенглама системасидан иборат. Агар бу система нолдан фарқли ечимга ҳам эга бўлса, юқоридаги тасдиқ исботланган бўлади. Крамер формуласига асосан биринчи r та тенгламадан r та $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ номаълумни λ_i орқали аниқлаш мумкин:

$$\lambda_1 = \frac{A_{1,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \lambda_i, \ \lambda_2 = \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \lambda_i, \ldots, \lambda_r = \frac{A_{r,r+1}}{A_{r+1,r+1}} \lambda_i.$$

Бу ерда

$A_{r+1,r+1} = (-1)^{r+1+r+1} M_r \neq 0$ бўлиб, $A_{q,r+1}$ эса

$$M_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{r1} & a_{i1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{r2} & a_{i2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1r} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{ir} \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{rk} & a_{ik} \end{vmatrix}$$

детерминантнинг охирги $(r+1) =$ сатрининг, яъни a_{qk} $(q = 1, 2, \ldots, r;\ i, k = r+1, r+2, \ldots, n)$ элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари. Ихтиёрий $k = r+1, r+2, \ldots, n$ да $(r+1)$-тартибли M_{ik} минор нолга айланади. $i > r$ да бу тасдиқ матрица рангининг таърифидан ҳамда A матрицанинг ранги r га тенг деган шартдан келиб чиқади, $i \leqslant r$ да эса M_{ik} минорда иккита бир хил устун ҳосил бўлади. Агар $\lambda_i = t A_{r+1,r+1}$ белгилаш киритсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\lambda_1 = tA_{1,r+1}, \ \lambda_2 = tA_{2,r+1}, \ldots, \lambda_r = tA_{r,r+1}, \lambda_i = \\ = tA_{r+1,r+1}. \qquad (7.23)$$

Равшанки, бу формулалар билан аниқланган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, λ_i ни t нинг ихтиёрий ҳақиқий қийматларида берилган тенгламалар системасининг биринчи r та тенгламасига қўйсак, улар айниятга айланади. Шу билан бирга улар қолган $(n-r)$ та тенгламани ҳам айниятга айлантиради, чунки тенгликнинг чап томонидан умумий кўпайтувчи t ни қавс ташқарига чиқарсак, қавс ичида қиймати нолга тенг бўлган M_{ik} детерминантнинг охирги $(r+1)$-сатр элементлари бўйича ёйилмаси қолади. Топилган ифодаларни k-тенгламага қўйиб, қуйидаги айниятга эга бўламиз:

$$t\,(a_{1k}A_{1,r+1} + a_{2k}A_{2,r+2} + \dots + a_{rk}A_{r,r+1} + \\ + a_{ik}A_{r+1,r+1}) = 0$$

ёки

$$tM_{ik} = 0,\ k = r+1, r+2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, n.$$

(7.23) формулалар $t = 0$ да системанинг тривиал (ноль) ечимини беради, $t \neq 0$ да

$$\lambda_i = tA_{r+1,r+1} = tM_r \neq 0$$

бўлиб, система тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлади. Теорема исбот бўлди.

Биз теоремани сатр-векторлар учун исбот қилдик, устун-векторлар учун ҳам теорема шунга ўхшаш исбот қилинади.

40- §. Чизиқли тенгламалар системасини номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули билан ечиш

1°. Гаусс усули. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, номаълумларни кетма-кет йўқотиб, берилган системага эквивалент бўлган *поғонасимон* (ёки *учбурчак*) кўринишидаги системага келтирилади.

Қуйидаги n та номаълумли m та чизиқли тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \qquad (7.24)$$

$$(b_2^1 + b_2^2 + \dots + b_m^2 \neq 0).$$

Фараз қилайлик, (7.24) системада биринчи номаълум олдидаги коэффициент a_{11} нолдан фарқли бўлсин: $a_{11} \neq 0$.

Агар $a_{11} = 0$ бўлса, у ҳолда тенгламаларнинг ўринларини алмаштириш ёки номаълумларнинг номерларини алмаштириш йўли билан янги системада ҳамма вақт $a_{11} \neq 0$ бўлишига эришамиз.

Гаусс методида биринчи қадам шундан иборатки, биринчи тенгламадан ташқари қолган тенгламаларда x_1 ни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламанинг ҳар бир ҳадини $a_{11} \neq 0$ га бўлиб ёзамиз. Натижада берилган (7.24) системага эквивалент бўлган ушбу янги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \frac{a_{1k}}{a_{11}} x_k + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2k} x_k + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3k} x_k + \ldots + a_{3n} x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mk} x_k + \ldots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases}$$

Биринчи тенгламани a_{21} га кўпайтириб, иккинчи тенгламадан айирамиз, сўнгра биринчи тенгламани a_{31} га кўпайтириб, учинчи тенгламадан айирамиз ва шу процессни давом эттириб, биринчи тенгламадан бошқа ҳамма тенгламаларда x_1 ни йўқотамиз:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 + \ldots + a'_{1k} x_k + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1, \\ a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + \ldots + a'_{2k} x_k + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2, \\ a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 + \ldots + a'_{3k} x_k + \ldots + a'_{3n} x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2} x_2 + a'_{m3} x_3 + \ldots + a'_{mk} x_k + \ldots + a'_{mn} x_n = b'_m, \end{cases} \tag{7.25}$$

бу ерда

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}} \quad (k = 1,2, \ldots, n),$$

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{i1} \quad \begin{cases} i = 2,3, \ldots, m; \\ k = 1,2, \ldots, n. \end{cases}$$

$$b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}; \quad b'_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}} a_{i1}, \quad i = 1,2, \ldots, m.$$

Агар охирги системада бирор тенглама ушбу

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b \tag{7.26}$$

кўринишга эга бўлиб, $b \neq 0$ бўлса, системанинг ечимини топиш процесси тугайди, чунки бу тенгламанинг ечими мавжуд эмас. Демак, бу ҳолда берилган (7.24) система ечимга эга эмас. Иккинчи қадамда (7.25) системанинг биринчи тенгламасини ўзича қолдириб, қолган тенгламалардан x_2 олдидаги коэффициент нолдан фарқли бўлган ихтиёрий биттасини танлаймиз. Айтайлик, (7.25) системанинг иккинчи тенгламасида $a'_{22} \neq 0$. Бу тенгламанинг ҳамма ҳадларини $a'_{22} \neq 0$ га бўламиз, сўнгра уни мос равишда $a'_{32}, a'_{42}, \ldots, a'_{m2}$ ларга кўпайтириб учинчи, тўртинчи ва бошқа тенгламалардан айирамиз. Агар (7.26) кўринишдаги тенглама ҳосил бўлиб, озод ҳад $b \neq 0$ бўлса, берилган система ечимга эга эмас деган хулосага келамиз.

Агар (7.26) кўринишдаги тенглама учра аса, у ҳолда учинчидан бошлаб қолган тенгламалардан x_1 ҳам, x_2 ҳам йўқотилган бўлади.

Шу процессни давом эттириб, агар система ечимга эга бўлса,қуйидаги икки кўринишдаги системадан бирини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_p + \ldots + c_{pn}x_n = B_p \end{cases} \tag{7.27}$$

$(p < n)$ ёки

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = B_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = B_k \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = B_n. \end{cases} \tag{7.28}$$

(7.27) кўринишдаги система *поғонасимон матрицага*, (7.28) кўринишдаги система эса *учбурчак матрицага* эга эканлиги кўриниб турибди. Агар учбурчак матрицали (7.28) система ҳосил бўлса, охирги тенгламадан $x_n = B_n$ ни топамиз, сўнгра x_n ни олдинги тенгламага қўйиб, x_{n-1} нинг қийматини аниқлаймиз ва ҳ. к.

Демак, *агар берилган чизиқли тенгламалар системаси юқоридаги элементар алмаштиришлар ёрдамида учбурчак матрицали системага келса, бундан берилган система ягона ечимга эгалиги келиб чиқади; агар берилган система элементар алмаштиришлар ёрдамида поғонасимон (7.28) системага келса, бундан берилган система чексиз кўп ечимларга эга бўлиши келиб чиқади.*

Ҳақиқатан ҳам, (7.27) системада $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ номаълумларни ўнг томонга ўтказиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1p}x_p = B_1 - b_{1,p+1}x_{p+1} \cdots - b_{1n}x_n, \\ x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2p}x_p = B_2 - b_{2,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{2n}x_n, \\ \qquad x_3 + \ldots + b_{3p}x_p = B_3 - b_{4,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{3n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_p = B_p - b_{p,p+1}x_{p+1} - \ldots - b_{pn}x_n. \end{cases}$$

Бунда $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ лардан иборат озод номаълумларга ихтиёрий қийматлар бериб, учбурчак матрицали системани ҳосил қиламиз, сўнгра юқоридаги метод билан кетма-кет $x_p, x_{p-1}, \ldots, x_1$ номаълумларни аниқлаймиз.

Агар $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ га ихтиёрий қийматлар бериш мумкинлигини эътиборга олсак, бу ҳолда берилган система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

1- мисол. Ушбу системани кўрамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 = 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 = 39, \end{cases}$$

Ечиш. Бунда $a_{11} = 2 \neq 0$. Шунинг учун биринчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини 2 га бўламиз. Натижада берилган тенгламага эквивалент бўлган ушбу тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 14x_2 + 12x_3 &= 18, \\ 5x_1 + 25x_2 + 16x_3 &= 39. \end{aligned}\right|$$

Ҳосил бўлган системанинг биринчи тенгламасини 3 га кўпайтириб, иккинчи тенгламадан, сўнгра 5 га кўпайтириб учинчи тенгламадан айирамиз. Натижада берилган системага эквивалент бўлган қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\left|\begin{aligned} x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_3 &= 0, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{15}{2}x_3 &= 18, \\ \frac{15}{2}x_2 - \frac{33}{2}x_3 &= 39, \end{aligned}\right.$$

Шу билан биринчи қадам тугади.

Иккинчи қадамда $a_{22} = \frac{7}{2} \neq 0$ эканлигидан фойдаланиб, иккинчи тенгламанинг ҳамма ҳадларини $\frac{7}{2}$ га бўлиб, ҳосил бўлган тенгламани $\frac{15}{2}$ га кўпайтириб, учинчи тенгламадан айирамиз:

$$\left|\begin{aligned} x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_3 &= 0, \\ x_2 - \frac{15}{7}x_3 &= \frac{36}{7}, \\ -\frac{3}{7}x_3 &= \frac{3}{7}. \end{aligned}\right.$$

Бунда учбурчак система ҳосил бўлди, Учинчи тенгламадан $x_3 = -1$.

Иккинчи тенгламадан

$$x_2 = \frac{15}{7}(-1) + \frac{36}{7} = \frac{36}{7} - \frac{15}{7} = 3.$$

Биринчи тенгламадан эса

$$x_1 = -\frac{7}{2}\cdot 3 - \frac{13}{2}\cdot(-1) = -4.$$

Демак, берилган системанинг ягона ечими

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = -1.$$

2- мисол. Ушбу тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Ечиш. Бу системани ечиш учун унинг кенгайтирилган матрицасидан фойдаланамиз, яъни

$$B = \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Бу матрицада сатрларга нисбатан қуйидаги элементар алмаштиришлар бажарамиз:

а) биринчи сатр элементларини 2 га бўламиз ва уни иккинчи ва тўртинчи сатрдан айирамиз:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \frac{1}{2} & -5/2 & \frac{1}{2} & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & -13/2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 7/2 & -9/2 & 11/2 & -4 \end{array}\right];$$

б) иккинчи сатрни тўртинчи сатрга қўшамиз, сўнгра иккинчи сатрни 4/7 га кўпайтириб, учинчисига қўшамиз:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & -13/2 & 5 \\ 0 & 0 & 3/7 & -12/7 & -15/7 \\ 0 & -0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

в) учинчи сатр элементларини 3/7 га бўламиз, сўнгра уни 2 га кўпайтириб, тўртинчи сатр элементларига қўшамиз:

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1/2 & -5/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & -13/2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right]$$

Энди биринчи, иккинчи ва тўртинчи сатр элементларини мос равишда 1/2, — 1/2 ва 9 га бўлиб, ҳосил бўлган матрицага мос келучи тенгламалар системасини қуйидаги учбурчак система кўринишида ёзамиз:

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8, \\ 7x_2 - 5x_3 + 13x_4 &= -10, \\ x_3 - 4x_4 &= -5, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}\right.$$

Демак, берилган тенглама ягона ечимга эга:

$$x_4 = 1; \ x_3 = -1; \ x_2 = -4; \ x_1 = 3.$$

3-мисол, Ушбу тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 &= 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 &= 10. \end{aligned}\right\}$$

Ечиш, Берилган системанинг кенгайтирилган матрицасини тузамиз:

$$B = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array}\right].$$

Бу матрица устида қуйидагича элементар алмаштиришлар бажарамиз: биринчи сатр элементларини 2, 3 ва 1 га кўпайтириб, мос равишда иккинчи, учинчи ва тўртинчи сатр элементларидан айирамиз:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right],$$

Иккинчи сатрни 2 ва 3 га кўпайтириб, мос равишда учинчи ва тўртинчи сатрлардан айирамиз:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Матрица *поғочасимон* кўринишга келтирилди, унинг $0x_1 + 0x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$ кўринишдаги охирги иккита тенгламасини ташлаб юборсак, берилган системага эквивалент бўлган қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_3 - 5x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи тенгламадан x_3 нинг x_4 га нисбатан ифодасини топамиз. Сўнгра уни биринчи тенгламага қуйиб, x_2 нинг x_1 ва x_4 га нисбатан ифодасини аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 - 2x_4 - 4, \\ x_3 &= 5x_4 - 3. \end{aligned}\right\}$$

Шундай қилиб, берилган системанинг умумий ечими $\vec{x}$ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\,(\lambda_1 - \lambda_4 - 2) \\ 5\lambda_4 + 3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

бу ерда λ_1 ва λ_4 — ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Агар $\lambda_1 = 4$, $\lambda_4 = 1$ десак, у ҳолда системанинг ушбу хусусий ечимларидан бирини топган бўламиз:

$x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 1$.

Демак, бу берилган система чексиз кўп ечимга эга экан.

2°. Гаусс—Жордано усули. Гаусс — Жордано усулининг моҳияти шундан иборатки, агар $a_{11} \neq 0$ бўлса, биринчи тенгламадан x_1 топилади ва топилган қийматни системанинг бошқа тенгламаларига қўйилади. Сўнгра иккинчи тенгламадан x_2 топилади ва уни системанинг бошқа ҳамма тенгламаларига қўйилади ва ҳоказо.

Гаусс — Жордано усулида ҳам берилган системанинг кенгайтирилган матрицасидан фойдаланиб, унинг устида элементар алмаштиришлар ўтказиш мумкин.

4-мисол. Гаусс-Жордано усули билан қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси ечилсин:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 16. \end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Биринчи тенгламадан x_1 ни топамиз ва уни иккинчи ва учинчи тенгламаларга қўямиз. Натижада қуйидаги янги системага эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 &= 8, \\ 11x_2 + 16x_3 &= 70, \\ 5x_2 + 2x_3 &= 16. \end{aligned}\right\}$$

Иккинчи тенгламадан x_2 ни топамиз ва уни биринчи ва учинчи тенгламаларга қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{14}{11}x_3 &= \frac{53}{11}, \\ x_2 + \frac{16}{11}x_3 &= \frac{70}{11}, \\ x_3 &= 3. \end{aligned}\right|$$

Учинчи тенгламадан $x_3 = 3$ қийматни биринчи ва иккинчи тенгламаларга қўямиз ва кетма-кет x_1 ва x_2 ни топамиз:

$$x_1 + \frac{14}{11}\cdot 3 = \frac{53}{11}, \; x_1 = 1$$

$$x_2 + \frac{16}{11}\cdot 3 = \frac{70}{11}, \; x_2 = 2.$$

41-§. Чизиқли тенгламалар системасининг ечими ҳақидаги баъзи теоремалар

1°. Бир жинслимас система ечимининг мавжудлиги ҳақида. Фараз қилайлик, n та номаълумли m та чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама системаси берилган бўлсин ((7.24) га қаранг):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7.24}$$

7.7-теорема (Кронекер — Капелли теоремаси). (7.24) *система матрицасининг, яъни ушбу*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матрицанинг ранги кенгайтирилган

$$B = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

матрицанинг рангига тенг бўлган ҳолдагина ва фақат шу ҳолдагина (7.24) *системанинг тенгламалари биргаликда бўлади.* (7.24) *система камида битта ечимга эга бўлади.*

Исбот. Зарурийлиги. Фараз қилайлик, (7.24) система биргаликда бўлсин, яъни камида битта ечимга эга бўлсин. Масалан,

$$x_1 = \lambda_1, \; x_2 = \lambda_2, \; \dots, \; x_n = \lambda_n.$$

Бу сонлар системаси ечим дейлик. Бу ечимни системанинг тенгламаларига қўйиб, m та тенгликка эга бўламиз, яъни

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{in}\lambda_n = b_i;$$
$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Бу m та тенглик тўплами қуйидаги вектор тенгликка эквивалентдир:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Бундан система кенгайтирилган B матрицасининг охирги устуни унинг қолган устунларининг чизиқли комбинациясидан иборатлиги келиб чиқади. Шунинг учун B нинг охирги устунини A матрица устунларига қўшишдан чизиқли устунлар сони ортмайди. Демак,

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, (7.24) системанинг асосий матрицасининг ранги унинг кенгайтирилган матрицасининг рангига тенг бўлсин, яъни

$$r(A) = r(B) = r.$$

A матрицанинг r та базис вектор-устунларини ажратиб оламиз. Улар B матрица учун ҳам базис-устунлар бўлади. Умумийликка халал етказмасдан, биринчи $\vec{r}$ та вектор базис векторлар бўлсин деб фараз қиламиз. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ҳақидаги теоремага асосан B матрицанинг охирги устуни базис вектор-устунларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, яъни шундай

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \text{ ва } \lambda_{r+1} = 0, \ \lambda_{r+2} = 0, \ \dots, \ \lambda_n = 0$$

сонлар мавжудки, улар (7.29) тенгликни қаноатлантиради, яъни (7.29) нинг чап томонида биринчи r та йиғинди қолади, қолганлари эса нолга айланади. Бу тенглик қуйидаги m та тенглик билан эквивалент бўлади:

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \dots + a_{ir}\lambda_r = b_i; \ i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.30)$$

Агар (7.24) системанинг тенгламаларига

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_r = \lambda_r, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0. \quad (7.31)$$

ни қўйсак, у ҳолда системанинг тенгламалари (7.30) тенгламаларга айланади. Бундан сонларнинг ушбу (λ_1, λ_2, ..., λ_r, 0, ..., 0) системаси (7.24) системанинг ечими экани келиб чиқади. Демак, (7.24) система ечимга эга. Шу билан теорема исбот бўлди.

2°. Биргаликда системалар. Энди (7.24) система тенгламаларининг биргаликда бўлиш шарти ҳақида Фредгольм теоремасини келтирамиз. Аввал A матрицани транспонирлаб, қуйидаги m номаълумли n та чизиқли бир жинсли тенглама системасини қурамиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m = 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = 0. \end{array}\right| \qquad (7.32)$$

Бу система (7.24) *системага қўшма бир жинсли система* дейилади.

7.8-теорема. (7.24) *бир жинсли бўлмаган система биргаликда бўлиши учун қўшма системанинг ҳар бир ечими* $b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m = 0$ *тенгламани қаноатлантириши зарур ва етарли.*

Кўрсатиш қийин эмаски, $\mathrm{rang}\, B = \mathrm{rang}\, A$, яъни система биргаликда бўлади. Агар (7.24) система биргаликда бўлса, теорема шарти бажарилиши ҳам осонгина кўрсатилади. A матрицанинг ранги r га мос минор аниқлайдиган базис-сатрлар берилган системанинг тегишли тенгламаларига мос келади. Бу тенгламаларни *базис тенгламалар* дейилади.

7.9-теорема. *Чизиқли тенгламалар системаси ўзининг базис тенгламалари системасига эквивалентдир.*

Исбот. Маълумки, кенгайтирилган B матрицанинг ихтиёрий сатри унинг r та базис сатрининг чизиқли комбинациясидан иборат. Бундан ташқари, векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ҳақидаги теоремага асосан, (7.24) системанинг ихтиёрий тенгламаси унинг r та базис тенгламасининг чизиқли комбинациясидан иборат.

Демак, базис системани қаноатлантирувчи ихтиёрий вектор берилган системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради.

Аксинча, берилган системанинг ихтиёрий ечими бир вақтнинг ўзида базис системанинг ҳам ечими бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

Айтайлик, (7.24) системанинг базиси унинг биринчи r та тенгламасидан иборат бўлсин. Исбот қилинган теоремага асосан ушбу

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,2, \ldots, r \qquad (7.33)$$

базис тенгламалар системаси берилган тенгламалар системасига эквивалентдир. Шунинг учун берилган системани текшириш ўрнига тенгламалар сони унинг рангига тенг бўлган базис системани текшириш етарлидир.

Бизга маълумки, (7.24) система матрицасининг ранги унинг устунлари сонидан ортиб кетиши мумкин эмас, $r \leqslant n$. Бошқача айтганда, биргаликда системанинг ранги унинг номаълумлари сонидан ортиб кетмайди. Демак, иккита ҳол рўй бериши мумкин:

$$r = n, \; r > n.$$

1) Фараз қилайлик, $r = n$ бўлсин, яъни тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг. Бу ҳолда (7.33) системанинг детерминанти базис минор бўлади ва Крамер теоремасига асосан, (7.24) система ягона ечимга эга бўлади.

а) Хулоса. *Агар биргаликда системанинг ранги номаълумлар сонига тенг бўлса, у ҳолда система ечимга эга бўлади.*

2) Фараз қилайлик, $r < n$ бўлсин. Асосий номаълумлар $x_1, x_2, \ldots x_r$ бўлсин. Шу номаълумлар қатнашган ҳадлардан бошқа ҳамма ҳадларни тенгламанинг ўнг томонига ўтказамиз. Натижада (7.33) система қуйидаги кўринишни олади:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r = b_i - a_{i,\,r+1}\,x_{r+1} - \ldots -$$
$$- a_{in}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{7.34}$$

Озод номаълумларга, яъни $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ га ихтиёрий $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ қийматлар берилса, у ҳолда (7.34) системани r та (яъни $x_1, x_2, \ldots, x_r$) номаълумли r та тенглама системаси деб қараш мумкин. Бу системанинг детерминанти нолдан фарқли, чунки у базис минордан иборат. Шунинг учун Крамер формулаларидан фойдаланиш мумкин. Демак, система ягона ечимга эга бўлади. Уни қуйидагича ёзамиз:

$$x_1 = c_1, \; x_2 = c_2, \; \ldots, \; x_r = c_r.$$

Маълумки, базис системанинг ечими бўлган

$$\vec{c} = \{c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n\}$$

вектор берилган системанинг ҳам ечими бўлади. Бу тасдиқ (7.33) ва (7.24) системаларнинг эквивалентлигидан келиб чиқади. Озод номаълумларнинг қийматларини ихтиёрий равишда олиш мумкин, шунинг учун (7.24) система чексиз кўп ечимга эга.

б) Хулоса. *Агар системанинг ранги r номаълумлар сонидан кичиқ бўлса, у ҳолда система чексиз кўп ечимга эга бўлади, бунда r та асосий номаълум $n - r$ та озод номаълум орқали чизиқли боғланган бўлади.*

Юқорида исбот қилинган теоремаларга асосланиб, ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасини ечиш учун қуйидаги қоидаларга амал қилинади:

I. Системанинг асосий ва кенгайтирилган матрицасининг рангини ҳисоблаб, у системанинг биргаликдалиги аниқланади; агар система биргаликда бўлса, у ҳолда унинг бирор r-тартибли базис минори топилади.

II. Коэффициентлари базис минорни ташкил қилган r та тенглама системаси ёзилади: қолган тенгламалар эътиборга олинмайди. Коэффициентлари базис минорга кирувчи номаълумлар и асосий номаълумлар дейилиб, уларни тенгликнинг чап томонида қолдирилади, қолган $n-r$ таси озод номаълумлар дейилиб, уларни тенгликнинг ўнг томонига ўтказилади.

III. Крамер формуласи ёки Гаусс усулидан фойдаланган ҳолда асосий номаълумларнинг озод номаълумлар орқали ифодаси топилади. Топилган тенгликлар берилган системанинг умумий ечимини ифодалайди.

IV. Озод номаълумларга ихтиёрий сон қийматлар бериб, асосий номаълумларнинг сон қийматлари топилади.

1-мисол. Ушбу тенгламалар системасини текширинг; агар система бирликда бўлса, ечимни топинг:

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3&=3,\\ x_1+3x_2-x_3&=1,\\ 3x_1+4x_2-x_3&=5.\end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Бу системанинг кенгайтирилган матрицасини ёзамиз:

$$B=\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 5\end{array}\right]$$

Юқори чап бурчакда турган 2-тартибли минор

$$M=\begin{bmatrix} 1 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=5\neq 0.$$

Унинг учинчи тартибли минори

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 4 & -1\end{vmatrix}=0,$$

Бу система асосий матрицасининг детерминантидир. Демак, асосий матрицанинг ранги иккига тенг, яъни $r(A)=2$. Кенгайтирилган матрицанинг ранги $r(B)$ ни ҳисоблаш учун ўраб турувчи минорни қараймиз:

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{rr:r} 1 & -2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{array}\right|=0,$$

Демак, $r(B)=2$. Шундай қилиб, берилган чизиқли тенгламалар системаси биргаликда ва иккита ўзаро боғлиқ бўлмаган базис тенгламаси бор. Бу системанинг базис тенгламалари қилиб, унинг нолга тенг бўлмаган базис минори жойлашган биринчи иккита тенгламасини оламиз. Бу икки тенгламани асосий номаълумлар x_1 ва x_2 га нисбатан ечиб ёзамиз, яъни

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2&=3-x_3,\\ x_1+3x_2&=1+x_3\end{aligned}\right\}$$

ёки

$$x_1=\frac{11-x_3}{5},\ x_2=\frac{2\,(x_3-1)}{5}.$$

Демак, система чексиз кўп ечимга эга бўлади. $x_3=1$ деб системанинг $x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=1$ хусусий ечимини топамиз. Агар $x_3=0$ десак, системанинг яна бир $x_1=\frac{11}{5}, x_2=-\frac{2}{5}, x_3=0$ хусусий ечимига эга бўламиз.

2-мисол. Ушбу тенгламалар системаси биргаликдами:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3&=2,\\ 3x_1+x_2-x_3&=0,\\ -4x_1-3x_2+x_3&=1\end{aligned}\right\}$$

Ечиш. Бу системанинг асосий матрицасининг ранги $r(A)=2$, чунки иккинчи тартибли минори

$$M=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

уни ўраб турган учинчи тартибли минори эса

$$\left|\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ -4 & -3 & 1\end{array}\right|=0.$$

Берилган системанинг кенгайтирилган матрицасининг ранги 3 га тенг, чунки

$$\left|\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ -4 & -3 & 1\end{array}\right|=-5\neq 0.$$

Шундай қилиб, $r(A)=2$, $r(B)=3$. Шунинг учун система биргаликда эмас.

3°. Ечимларнинг фундаментал системаси. Агар n номаълумли m та чизиқли тенглама системаси (7.24) ва $b_1, b_2, \ldots, b_m$ озод ҳадлар бир вақтда нолга тенг бўлса, бир жинсли системага, яъни ушбу

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ a_{21}x_1+x_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0\end{aligned}\right\}\qquad(7.35)$$

кўринишдаги системага эга бўламиз. Шу (7.35) система берилган (7.24) системага *мос келтирилган система* дейилади. Келтирилган система вектор-матрица кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$A\vec{x} = \vec{0}. \qquad (7.35)$$

Бир жинсли бўлмаган система билан унга мос келтирилган системанинг ечимлари орасида қуйидагича боғланиш мавжуд.

7.10- теорема. *Бир жинсли бўлмаган системанинг ихтиёрий ечими билан унинг келтирилган системасининг ихтиёрий ечимининг йиғиндиси бир жинсли бўлмаган системанинг ечими бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ва } \vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

векторлар мос равишда (7.24) ва (7.35) системаларнинг ечимлари бўлсин, яъни $A\vec{a} = \vec{b}$ ва $A\vec{\lambda} = \vec{0}$. Бу фараз (7.24) система биргаликда деган фикр билан бир хил. Юқоридаги тенгликлардан

$$A(\vec{a} + \vec{\lambda}) = Aa + A\vec{\lambda} = \vec{b}$$

келиб чиқади. Бундан $\vec{a} + \vec{\lambda}$ вектор $A\vec{x} = \vec{b}$ системанинг ечими экани келиб чиқади.

7.11- теорема. *Бир жинсли бўлмаган системанинг ихтиёрий иккита ечимининг айирмаси унинг келтирилган системасининг ечими бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар

$$A\vec{a} = \vec{b} \text{ ва } A\vec{\lambda} = \vec{b}$$

бўлса, у ҳолда $A(\vec{a} - \vec{\lambda}) = A\vec{a} - A\vec{\lambda} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$

Демак, $\vec{a} - \vec{\lambda}$ вектор $A\vec{x} = \vec{0}$ бир жинсли тенгламанинг ечими бўлади.

7.12-теорема. *Агар $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n$ векторлар системаси $A\vec{x}=\vec{0}$ бир жинсли системанинг ечими бўлса, у ҳолда уларнинг ихтиёрий чизиқли комбинацияси*

$$\vec{c}=\lambda_1\vec{c}_1+\lambda_2\vec{c}_2+\dots+\lambda_n\vec{c}_n \qquad (7.36)$$

ҳам бу системанинг ечими бўлади.

Исбот. $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n$ векторлар $A\vec{x}=\vec{0}$ системанинг ечими эканлигидан

$$A\vec{c}_1=\vec{0},\ A\vec{c}_2=\vec{0},\ \dots,\ A\vec{c}_n=\vec{0}$$

тенгликлар ўринлидир. Матрицаларнинг хоссаларига асосан қуйидаги муносабатни ёза оламиз:

$$A\vec{c}=A(\lambda_1\vec{c}_1)+A(\lambda_2\vec{c}_2)+\dots+A(\lambda_n\vec{c})=$$

$$=\lambda_1(A\vec{c}_1)+\lambda_2(A\vec{c}_2)+\dots+\lambda_n(A\vec{c}_n)=\vec{0}.$$

Теорема исбот бўлди.

Бу теоремадан бундай хулоса келиб чиқади: агар бир жинсли тенгламанинг бирор тривиал бўлмаган (нолдан фарқли) ечими мавжуд бўлса, у ҳолда у ечимни ихтиёрий нолдан фарқли сонларга кўпайтириб, системанинг чексиз кўп ечимларини ҳосил қилиш мумкин.

7.12-таъриф. (7.35) *бир жинсли системанинг ечимлари қуйидаги бўлсин:*

$$\vec{\lambda}_i=\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}\},\ i=1,2,\dots,k. \qquad (7.37)$$

Агар (7.37) ечимлар чизиқли эркли бўлиб, (7.35) системанинг ихтиёрий ечими бу ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, у ҳолда (7.37) ечимлар системаси *ечимларнинг фундаментал системаси* дейилади.

Ечимларнинг фундаментал системасининг мавжудлиги ҳақида қуйидаги теоремани кўрамиз.

7.13-теорема. *Агар* (7.35.) *бир жинсли системанинг ранги r номаълумлар сони n дан кичик бўлса, у ҳолда* (7.35) *система чексиз кўп фундаментал системага эга бўлади ва ҳар бир фундаментал система ечимлари сони $n-r$ га тенг бўлади.*

Исбот. (7.35) системанинг A матрицасининг r-тартибли нолдан фарқли M_r минори шу матрицанинг чап юқори бурчагида жойлашган деб фараз қиламиз. У ҳолда

$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ озод номаълумлар бўлади. Озод номаълумларни тенгламанинг ўнг томонига ўтказиб, берилган системани $x_1, x_2, \dots, x_r$ асосий номаълумларга нисбатан (Крамер формулаларидан фойдаланиб) ечамиз, яъни $x_1, x_2, \dots, x_n$ нинг озод номаълумларга нисбатан ифодасини топамиз:

$$x_j = d_{j1} x_{r+1} + d_{j2} x_{r+2} + \dots + d_{jk} x_n \,, \; j=1,2, \dots, r; \; k=n-r$$

Бунда $x_{r+1}, x_{r+2} \dots, x_n$ озод номаълумларга ихтиёрий сон қийматлар бериб, $x_1, x_2, \dots, x_r$ номаълумлар учун мос қийматларни топамиз. Ҳосил қилинган чексиз кўп ечимлар тўпламидан шундай $n-r$ та ечимни танлаб оламизки, натижада

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_1 &= \{\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1r}, \lambda_{1,r+1}, \dots, \lambda_{1n}\}, \\ \vec{\lambda}_2 &= \{\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2r}, \lambda_{2,r+1}, \dots, \lambda_{2n}\} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{\lambda}_{n-r} &= \{\lambda_{n-r,1}, \lambda_{n-r,2}, \dots, \lambda_{n-r,r}, \lambda_{n-r,r+1}, \dots, \lambda_{n-r,n}\} \end{aligned} \tag{7.38}$$

ечимларнинг $(n-r)$-тартибли детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{1,r+1} & \lambda_{1,r+2} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{2,r+1} & \lambda_{2,r+2} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-r,r+1} & \lambda_{n-r,r+2} & \dots & \lambda_{n-r,n} \end{vmatrix} \tag{7.39}$$

нолдан фарқли бўлсин. Энди (7.38) ечимлар системаси фундаментал системани ташкил этишини исботлаймиз.

Бунинг учун (7.38) ечимлар системасидан ҳамда (7.35) тенгламалар системасининг ихтиёрий битта $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_n\}$ ечимидан тузилган қуйидаги матрицани қараймиз:

$$N = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1r} & \lambda_{1,r+1} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2r} & \lambda_{2,r+1} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n-r,1} & \lambda_{n-r,2} & \dots & \lambda_{n-r,r} & \lambda_{n-r,r+1} & \dots & \lambda_{n-r,n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r+1} & a_{r+2} & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

(7.39) детерминант N матрицанинг $(n-r)$-тартибли миноридир. У матрицанинг чап юқори бурчагида жойлашган бўлиб, $\Delta \neq 0$ эканлигидан N матрицанинг охирги $n-r$ та устуни ва биринчи $n-r$ та сатри чизиқли эрклилиги келиб чиқади. Агар бу сатрлар ва устунлар чизиқли боғлиқ бўлса, $\Delta = 0$ бўлар эди. Шунинг учун N матрицанинг биринчи r та устуни унинг охирги $n-r$ та устуни билан чизиқли боғлиқ. Бундан N матрицанинг ранги $n-r$ га тенг эканлиги келиб чиқади. Демак, унинг охирги сатри биринчи $n-r$ та сатри билан чизиқли боғлиқ. Бундан (7.38) ечимлар чизиқли эрклилиги, (7.35) системанинг ихтиёрий бошқа ечими (7.38) ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат экани келиб чиқади.

7.14- теорема. *Ранги r га тенг бўлган n номаълумли m та чизиқли бир жинсли тенглама системасининг умумий ечими*

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{c}_1 + \lambda_2 \vec{c}_2 + \ldots + \lambda_{n-r} \vec{c}_{n-r} \tag{7.40}$$

формула билан ёзилади, бу ерда $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_{n-r}$ — ечимларнинг ихтиёрий фундаментал системаси, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, юқорида исботланган теоремаларга асосан (7.40) вектор (7.35) системанинг ечими бўлади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун қуйидаги ҳисоблашни бажарамиз:

$$A\vec{x} = A(\lambda_1 \vec{c}_1 + \lambda_2 \vec{c}_2 + \ldots + \lambda_{n-r} \vec{c}_{n-r}) = A(\lambda_1 \vec{c}_1) +$$
$$+ A(\lambda_2 \vec{c}_2) + \ldots + A(\lambda_{r-n} \vec{c}_{n-r}) = \lambda_1 (A\vec{c}_1) + \lambda_2 (A\vec{c}_2) +$$
$$+ \lambda_3 (A\vec{c}_3) + \ldots + A\lambda_{n-r} (A\vec{c}_{n-r}) = \vec{0}.$$

Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисол. Қуйидаги

$$\left(\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0 \end{array} \right)$$

бир жинсли система берилган бўлиб, унинг умумий ечимини ва ечимларнинг фундаментал системасини топиш лозим бўлсин.

Ечиш. Бунинг учун биринчи, сўнгра иккинчи тенгламани кейинги тенгламалардан айириб, берилган системани поғонасимон кўринишга осонгина келтириш мумкин:

$$\left. \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_4 = 0, \end{array} \right\}$$

x_1, x_2 ва x_4 ни асосий номаълумлар, x_3 ва x_5 ни эса озод номаълумлар деб ҳисоблаймиз, Иккинчи ва учинчи тенгламалардан

$$x_2 = -2\,x_3 - 3\,x_5$$

ни топамиз. x_2 учун бу ифодани биринчи тенгламага қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$x_1 = 3\,x_3 + 5\,x_5.$$

Шундай қилиб, ушбу $x_1 = 3x_3 + 5\,x_5$, $x_2 = -2\,x_3 - 3x_5$, $x_4 = 0$ формулаларга эгамиз. Энди умумий ечимни $x_1 = 3c_3 + 5\,c_5$, $x_2 = - = -2c_3 - 3\,c_5$, $x_3 = c_3$, $x_4 = 0$, $x_5 = c_5$ кўринишда ёзиш мумкин. Энди $c_3 = 1$, $c_5 = 0$ ва $c_4 = 0$, $c_5 = 1$ қийматлар бериб, ечимларнинг ушбу

$$\vec{\lambda_1} = \{\ 3,\ \ -2\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0\ \},$$
$$\vec{\lambda_2} = \{\ 5,\ \ -3\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1\ \}$$

фундаментал системасини топамиз. Бундан фойдаланиб, умумий ечимни яна қуйидаги формада ёзамиз:

$$\vec{\lambda} = c_1\vec{\lambda_1} + c_2\vec{\lambda_2} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3\,c_1 + 5c_2 \\ -2\,c_1 - 3\,c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

4°. Матрицалардан тузилган полиномлар (кўпҳадлар).

7.13- таъриф. *Ушбу*

$$P(A) = a_0\,A^n + a_1\,A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,A + a_n\,E \quad (7.41)$$

кўринишдаги ифода матрицалардан тузилган (матрицали) полином (кўпҳад) *дейилади. Бу ерда* A ва E *«мос равишда» бир хил тартибли квадрат матрицалар бўлиб,* E *бирлик матрица,* a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n *— ихтиёрий ҳақиқий сонлар.* Матрицаларнинг хоссаларига кўра (7.41) ифодадаги амалларни берилган A матрица бўйича бажариб чиқилса, яна тартиби A нинг тартибига тенг бўлган квадрат матрица ҳосил бўлади, уни $P\,(A)$ деб белгиланган. Матрицали полиномни ушбу

$$P(x) = a_0\,x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ \ldots\ + a_{n-1}x + a_n \quad (7.42)$$

кўпҳадда ўзгарувчи x нинг ўрнига A матрицани қўйишнинг натижаси деб қараш мумкин. Агар $P(x)$ кўпҳадда ўзгарувчи x нинг ўрнига A матрицани қўйганда ноль матрица ҳосил бўлса, у ҳолда A матрица $P(x)$ кўпҳаднинг *илдизи* дейилади.

7.14-тариф. *Берилган* $A=[a_{ij}]$ *квадрат матрицанинг характеристик тенгламаси деб*

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

кўринишда ёзилган тенгламага айтилади.

A матрицанинг характеристик тенгламасини қисқача

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|=0 \qquad (7.43)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. (7.43) даги $|A-\lambda E|$ детерминантни бирор усул билан ёйиб, сўнгра λ нинг даражалари бўйича группалаб ёзамиз:

$$\varphi(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^n\lambda^n+P_1\lambda^{n-1}+\ldots+P_k\lambda^{n-k}+\ldots+$$
$$+P_{n-1}\lambda+P_n,$$

бунда

$$P_k=(-1)^{n-k}S_k$$

ва S_k ифода A матрицанинг барча k-тартибли бош минорларининг йиғиндиси, яъни элементлари бош диагоналга нисбатан симметрик жойлашган минорлар йиғиндиси. Хусусий ҳолда

$$P_1=(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}),\; P_n=|A|=\det A.$$

Бош диагональ элементларининг йиғиндиси

$$a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

A матрицани *изи* дейилади ва S_pA деб белгиланади. Характеристик полиномнинг илдизлари A матрицанинг *хос қийматлари* ёки *характеристик сонлар* дейилади. $\varphi(\lambda)$ характеристик полиномнинг барча $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ илдизлари тўплами *A матрицанинг спектри* дейилади. Виет теоремасига асосан характеристик полином илдизларининг кўпайтмаси унинг озод ҳадига тенг, яъни

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=|A|.$$

Бундан қуйидаги тасдиқнинг ўринли бўлиши келиб чиқади: *агар квадрат матрицанинг хос сонларидан ҳеч бўлмаса биттаси нолга тенг бўлса, у ҳолда A матрица махсус бўлади**.

---

*Агар A матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, уни махсус матрица дейилади.

Мисол сифатида ушбу

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

матрицанинг хос сонларини топайлик. Бунинг учун аввал A матрицага мос келган характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Бу тенгламанинг чап томонидаги детерминантни 2^3 та детерминантнинг йиғиндиси кўринишда ифодалаймиз, яъни

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}+\left\{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}+\right.$$

$$+\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}+\left.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}\right\}+$$

$$+\left\{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}+\right.$$

$$+\left.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}\right\}+\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Детерминантларни ҳисоблаб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$-\lambda^3-\lambda^2(2+3-2)-\lambda\ (6-2-1)-1=0$$

ёки $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda+1)^3=0$. Бунда $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Демак, $\lambda=1$ характеристик полиномнинг уч каррали илдизи экан. Эслаб ўтамизки, юқоридаги детерминантни учбурчак қоидаси билан бевосита очиб чиқиб, сўнгра λ нинг даражалари бўйича ёзиш мумкин эди. Детерминантнинг тартиби $n=2$, 3 бўлганда аслида шундай қилинади ҳам.

7.15- **теорема** (Кэли — Гамильтон теоремаси). *Агар* $\varphi(t)$ *кўпҳад* A *матрицанинг характеристик кўпҳади бўлса, у ҳолда* $\varphi(A)=0$, *яъни бошқача айтганда, матрица ўзининг характеристик полиномининг илдизи бўлади.*

Бу теореманинг исботини китобхонга қолдирамиз.

42- §. Чизиқли тенгсизликлар системаси

1°. Бошлангич тушунчалар. Ҳақиқий сонлар майдони P да берилган n номаълумли чизиқли тенгсизлик деб,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_n x_n + b \geqslant 0 \qquad (7.44)$$

кўринишдаги тенгсизликка айтилади, бунда $x_1, x_2, \dots, x_n$ — номаълумлар ва a_i, $b \in P$, $i = \overline{1,n}$. Агар $b = 0$ бўлса, (7.44) тенгсизлик *бир жинсли*, $b \neq 0$ бўлганда у тенгсизлик *бир жинслимас* дейилади.

Энди ҳақиқий сонлар майдони устида ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ x_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{cases} \qquad (4.75)$$

n номаълумли чизиқли тенгсизликлар системасини қараймиз, бунда ҳам $a_{ij} \in P$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, $b \in P$. Системани ташкил этувчи тенгсизликлар сони m учун $m < n$, $m = n$ $m > n$ ҳоллар бўлиши мумкин. Ҳақиқий сонлар майдони устида икки вектор учун тенгсизлик тушунчасини киритиш мумкин. Бунда бир хил ўлчовли икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор орасида $\vec{a} \leqslant \vec{b}$ муносабат ёзилиши бу векторларнинг мос координаталари орасида тегишли тенгсизликлар ўринли эканини англатади. Шу мулоҳазаларни ҳисобга олсак, (7.45) система ушбу вектор матрицали тенгсизлик кўринишида ёзилиши мумкин: $A\vec{x} \geqslant -\vec{b}$. Бу ерда $A\vec{x}$ — вектор, $\vec{b}$ ҳам вектор.

Шунга ўхшаш, матрицалар орасида ҳам тенгсизликлар тушунчасини киритиш мумкин.

(7.45) системанинг барча тенгсизликларини қаноатлантирувчи $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонларнинг тартибланган системаси бу *системанинг ечими* дейилади. Масалан, ҳақиқий сонлар майдонида ушбу

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &\geqslant 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 &\geqslant 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 &\geqslant 0 \end{aligned}\right\}.$$

система учун (4, 4, 5, 1) тўртлик ечим бўлади, чунки

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot4 - 3\cdot2 + 5 - 1 &> 0, \\ 4 + 3\cdot2 + 5 - 3 &> 0, \\ 4 - 2 + 2\cdot5 - 12 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

7.12- **таъриф.** *Камида битта ечимга эга бўлган чизиқли тенгсизликлар системаси биргаликда бўлган система дейилади, акс ҳолда система биргаликда бўлмаган (ёки зиддиятли) система дейилади.*

Зиддиятли тенгсизликка ушбу

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+\ \ldots\ +0\cdot x_n+b\geqslant 0,\ b\neq 0$$

тенгсизлик мисол бўла олади.

(7.45) тенгсизликда нолдан фарқли коэффициентлар мавжуд бўлсин дейлик. Масалан, $a_1\neq 0,\ a_2\neq 0,\ \ldots,\ a_k\neq 0$ ва $a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=a_n=0$ бўлса, тенгсизлик қуйидаги

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ \ldots\ +a_kx_k+b\geqslant 0\ (1\leqslant k\leqslant n)$$

кўринишда ёзилади. Бундан

$$a_1x_1\geqslant -a_2x_2-a_3x_3-\ \ldots\ -a_kx_k-b$$

келиб чиқади. Бунга ихтиёрий $x_2=\alpha_2,\ x_3=\alpha_3,\ \ldots,\ x_k=\alpha_k$ ҳақиқий қийматларни қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$a_1x_1\geqslant -a_2\alpha_2-a_3\alpha_3-\ \ldots\ -a_k\alpha_k-b.$$

Бундан $a_1\neq 0$ бўлгани учун бу тенгсизликни қаноатлантирувчи $x_1=\alpha_1$ қийматни кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$$

ҳамда ихтиёрий $\alpha_{k+1},\ \alpha_{k+2},\ \ldots,\ \alpha_n$ сонларнинг тартибланган системаси берилган тенгсизликнинг ечими бўлади.

Агар (7.45) системанинг исталган ечими (7.44) тенгсизлик учун ҳам ечим бўлса, у ҳолда (7.44) тенгсизлик (7.45) тенгсизликлар системасининг *натижаси* дейилади.

(7.45) системанинг биринчи тенгсизлигини $k_1\geqslant 0$ сонга, иккинчисини $k_2\geqslant 0$ сонга, ..., m- сини $k_m>0$ сонга кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$\sum_{j=1}^{m}k_j\,a_{j1}x_1+\sum_{j=1}^{m}k_j\,a_{j2}x_2+\ \ldots$$

$$\ldots+\sum_{j=1}^{m}k_j\,a_{jn}x_n+\sum_{j=1}^{m}k_j\,b_j\geqslant 0. \qquad (7.46)$$

Бу тенгсизлик (7.45) системанинг *чизиқли комбинацияси* дейилади. Ҳақиқатан, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ система (7.45) нинг ечими бўлсин. Бу ечим (7.46) тенгсизликнинг ҳам ечими экани равшан, чунки элементар ҳисоблар кўрсатадики;

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{j1}\alpha_1 + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{j2}\alpha_2 + \ldots + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{jn}\alpha_n +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} k_j b_j = k_1 \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha_i + b_1\right) + k_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\alpha_i + b_2\right) +$$
$$+ \ldots + k_n \left(\sum_{i=1}^{n} a_{n2}\alpha_i + b_n\right) \geqslant k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0 +$$
$$+ \ldots + k_n 0 = 0.$$

Масалан,

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2 \geqslant 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 \geqslant 0, \\ 4x_1 - 7x_2 - 12x_3 - 5 \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

система тенгсизликларини мос равишда 2, 3, 1 сонларига кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшсак,

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 3 \geqslant 0$$

зиддиятли тенгсизлик ҳосил бўлади. Бундан берилган система ечимга эга эмаслиги келиб чиқади.

7.13-таъриф. *Бир хил $x_1, x_2, \ldots, x_n$ номаълумли тенгсизликларнинг иккита биргаликда бўлган системасидан ҳар бирининг исталган ечими иккинчиси учун ҳам ечим бўлса, ёки иккала система ҳам биргаликда бўлмаса, улар тенг кучли системалар дейилади.*

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

7.16-теорема. (7.45) *система биргаликда бўлмаган система бўлиши учун у қуйидаги кўринишдаги*

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + b \geqslant 0 \ (b < 0) \qquad (7.47)$$

зиддиятли натижага (чизиқли комбинацияга) эга бўлиши зарур ва етарли.

7.17-теорема (Минковский теоремаси). *Бир жинсли чизиқли тенгсизликлар системасининг ҳар бир натижаси бу системанинг чизиқли комбинациясидан иборат.*

2°. **Тенгсизликлар системасининг манфий бўлмаган ечимлари.** Тенгсизликлар системаларининг таркибида

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0 \qquad (7.48)$$

тенгсизликлар мавжуд бўладиган муҳим хусусий ҳоли

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0, \\
\qquad x_1 \geqslant 0, \\
\qquad x_2 \geqslant 0, \\
\qquad \dots \\
\qquad x_n \geqslant 0
\end{array}\right\} \qquad (7.49)$$

кўринишга эга.

7.14-таъриф. (7.45) *системанинг манфий бўлмаган ечими деб ушбу*

$$x_1 = \alpha_1 \geqslant 0, \ \ x_2 = \alpha_2 \geqslant 0, \ \dots, \ x_n = \alpha_n \geqslant 0$$

сонлардан тузилган $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ *ечимга айтилади.*

(7.49) система манфий бўлмаган ечимларга эга бўлиши учун (7.45) система манфий бўлмаган ечимларга эга бўлиши лозим. Акс ҳолда (7.48) система биргаликда бўлмаган система бўлади.

Масалан,

$$\left.\begin{array}{r}
2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \geqslant 0, \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + 8 \geqslant 0, \\
x_1 \geqslant 0, \\
x_2 \geqslant 0, \\
x_3 \geqslant 0
\end{array}\right\}$$

система биргаликда, чунки унинг (2, 0, 6) манфий бўлмаган ечими мавжуд. Лекин

$$\left.\begin{array}{r}
-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1 \geqslant 0, \\
-2x_1 - x_2 - x_3 - 2 \geqslant 0, \\
x_1 \geqslant 0, \\
x_2 \geqslant 0, \\
x_3 \geqslant 0
\end{array}\right\}$$

система биргаликда эмас, чунки биринчи иккита тенгсизликдан тузилган системанинг манфий бўлмаган ечими йўқ, бу кўриниб турибди.

7.18-теорема. (7.45) *тенгсизликлар системасининг манфий бўлмаган ечимлари мавжуд бўлмаса, бу тенгсизликларнинг бирор чизиқли комбинацияси шундай*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_n\ x_n + b \geqslant 0$$

кўринишга эгаки, бунда $a_i \leqslant 0$ $(i=\overline{1,\ n})$, $b<0$ *шартлар бажарилади.*

Исбот. (7.45) система манфий бўлмаган ечимларга эга бўлмаса, (7.49) система биргаликда бўлмаган система бўлади. У ҳолда биргаликда бўлмаслик аломатига мувофиқ, (7.49) системанинг

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n+b\geqslant 0 \qquad (7.47)$$

кўринишдаги зиддиятли чизиқли комбинацияси мавжуд бўлади, бунда $b<0$. (7.47) чизиқли комбинация қандай ҳосил қилиниши билан биз аввал танишган эдик. (7.49) системанинг биринчи m та тенгсизлигини мос равишда $l_1\geqslant 0,\ l_2\geqslant 0,\ \ldots,\ l_m\geqslant 0$ сонларга, кейинги n тасини $k_1\geqslant 0,\ k_2\geqslant 0,\ \ldots,\ k_n\geqslant 0$ сонларга кўпайтириб, сўнгра уларни ҳадма-ҳад қўшиб қуйидагига келамиз:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} l_j a_{j1}+k_1\right)x_1+\left(\sum_{j=1}^{m} l_j a_{j2}+k_2\right)x_2+\ldots+$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{m} l_j a_{jn}+k_n\right)x_n+\sum_{j=1}^{m} l_j b_j=(a_1+k_1)x_1+(a_2+k_2)x_2+$$
$$+\ldots+(a_n+k_n)\,x_n+b=0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ \ldots\ +$$
$$+0\cdot x_n+b\geqslant 0.$$

Демак,

$$a_i=-k_i\leqslant 0\ \ (i=\overline{1,\ n}),\ \ b<0.$$

Масалан, юқоридаги иккинчи мисолда келтирилган

$$\left.\begin{aligned}-x_1-2x_2-3x_3-1\geqslant 0,\\ -2x_1-x_2-x_3-2\geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

системанинг манфий бўлмаган ечимларга эга эмаслиги бизга маълум. Энди, масалан, биринчи тенгсизликни 2 га, иккинчи тенгсизликни 3 га кўпайтириб ва уларни ҳадма-ҳад қўшиб, ушбу чизиқли комбинацияни ҳосил қиламиз:

$$-8x_1-7x_2-9x_3-8\geqslant 0.$$

Энди биргаликда бўлмаган

$$\left.\begin{aligned}x_1-2x_2-3x_3-1\geqslant 0,\\ -2x_1-x_2-x_3-2\geqslant 0,\\ x_1\geqslant 0,\\ x_2\geqslant 0,\\ x_3\geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

системанинг тенгсизликларини мос равишда 2, 3, 8, 7, 9 га кўпайтириб қўшсак, ушбу зиддиятли чизиқли комбинация келиб чиқади:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3-8\geqslant 0.$$

7-бобга доир машқлар

1. Қуйидаги амалларни бажаринг:

а) $[1\ \ 2\ \ 1\ \ -1]+[3\ \ 2\ \ -1\ \ 2]$;

б) $4\cdot\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&2&1\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}-1&3&1\\2&1&2\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}2&4&1\\-1&3&2\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix}3&5\\6&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\-3&2\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}^3$;

з) $\begin{bmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}^2$; и) $\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}^n$.

Жавоблар: а) $[4\ \ 4\ \ 0\ \ 1]$; б) $\begin{bmatrix}-3&9&-3\\16&1&6\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}-9&13\\15&4\end{bmatrix}$

д) $\begin{bmatrix}6&2&-1\\6&1&1\\-8&-1&4\end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix}9&3\\10&3\end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$ з) $\begin{bmatrix}7&4&4\\9&4&3\\3&3&4\end{bmatrix}$

и) $\begin{bmatrix}\cos n\varphi&-\sin n\varphi\\\sin n\varphi&\cos n\varphi\end{bmatrix}$.

2. Агар $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{bmatrix}$ матрица маълум бўлса, $2A^2+3A+5E$ йиғинди матрицани топинг.

Жавоб:

$$2A^2+3A+5E=\begin{bmatrix}28&15&16\\19&36&28\\30&19&15\end{bmatrix}$$

3. Қуйидаги детерминантлар кўпайгмасини аниқланг:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\-1&4&5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4&-1\\2&0&5\\-1&1&-3\end{vmatrix}$$

Кўрсатма. Сатрларни устунларга кўпайтириш қоидаси бўйича кўпайтиринг.

Жавоб: $\begin{vmatrix}4&7&0\\11&9&10\\0&1&6\end{vmatrix}=-286,$

4. Ушбу детерминантлар кўпайтмасини топинг:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{vmatrix}\text{ ва }\Delta_2=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{vmatrix}$$

Жавоблар: а) сатрларни сатрлар бўйича кўпайтирилганда:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & -7 & -13 \\ -3 & -4 & -13 \end{vmatrix};$$

б) сатрларни устунлар бўйича кўпайтирилганда:

$$\begin{vmatrix} 7 & -26 & 13 \\ 12 & -35 & 19 \\ 17 & -52 & 27 \end{vmatrix};$$

в) устунларни сатрлар бўйича кўпайтирилганда:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -3 & 1 & -8 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix};$$

г) устунларни устунлар бўйича кўпайтирилганда:

$$\begin{vmatrix} 9 & -35 & 18 \\ 13 & -47 & 24 \\ 12 & -37 & 17 \end{vmatrix}.$$

5. Агар

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

бўлса, $\det(A \cdot B)$ ва $\det(B \cdot A)$ ни аниқланг.

6. Агар $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ матрица берилган бўлиб, A^* матрица A нинг транспонирланган матрицаси бўлса, $A \cdot A^*$ кўпайтмани аниқланг.

Жавоб: $A \cdot A^* = \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$.

7. Қуйидаги матрицаларни транспонирланг:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ матрица берилган. $(A^*)^* = A$ эканлигини исботланг.

9. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

матрицалар берилган. $(A \cdot B)^* = B^* A^*$ эканлигини исботланг.

10. Қуйидаги матрицаларга тескари матрицаларни топинг:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Жавоблар: а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & +5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

Қуйидаги тенгламалар системасини Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг:

11.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = x_2 = 1,$
$x_3 = x_4 = -1.$

12.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = 1,$
$x_2 = x_3 = 2,$
$x_4 = 0.$

13.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = -2,\ x_2 = 0,$
$x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

14.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 2x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

Жавоб: $x = 2, \quad y = -3;$
$z = -\frac{3}{2}; \; t = \frac{1}{2}.$

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5, \\ 3x - 7y + 3z - t = -1, \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7, \\ 4x - 6y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

Жавоб: система ечимга эга эмас.

16. Қуйидаги матрицаларнинг рангини топинг:

а) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix};$

Жавоб: $r\,(A) = 2.$

б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix};$

Жавоб: $r\,(A) = 3.$

в) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix};$

Жавоб: $r\,(A) = 3.$

г) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix};$

Жавоб: $r\,(A) = 2.$

17. λ нинг қандай қийматида қуйидаги матрицанинг ранги энг кичик бўлади:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

Жавоб: $\lambda = 0$ бўлганда.

18. Қуйидаги матрицаларнинг рангини элементар алмаштиришлар ёрдамида топинг:

а) $\begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix};$

Жавоб: $r\,(A) = 3.$

б) $$\begin{bmatrix} 47 & -67 & 45 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -248 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix};$$

Жавоб: $r\ (A) = 2$.

в) $$\begin{bmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ +73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{bmatrix};$$

Жавоб: $r\ (A) = 3$.

г) $$\begin{bmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & -19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{bmatrix};$$

Жавоб: $r\ (A) = 2$.

19. Қуйидаги тенгламалар системасини Гаусс методидан фойдаланиб ечинг:

а) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = 1;\ x_2 = 5;$
$x_3 = 2.$

б) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,$
$x_3 = 3,\ x_4 = -4.$

в) $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_3 = 1. \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} 0{,}04x - 0{,}08y + 4z = 20, \\ 4x + 0{,}024y - 0{,}08z = 8, \\ 0{,}09x + 3y - 0{,}15z = 9. \end{cases}$$

Жавоб: $x = 1{,}96,\ y = 2{,}96,\ z = 5{,}04.$

20. Қуйидаги тенгламалар системасини Жордан—Гаусс методидан фойдаланиб ечинг:

а) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Жавоб: $x_1 = 0{,}4 + 0{,}6 \cdot u;$
$x_2 = 0{,}25 + 0{,}75 \cdot u;$
$x_3 = u;\ x_4 = 0{,}35 + 0{,}65 \cdot u.$
u — ихтиёрий сон.

б) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

$x_1 = 1;$
$x_2 = u + 2;$
Жавоб: $x_3 = u + 3;$
$x_4 = u + 4.$
u — ихтиёрий сон.

в) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

$x_1 = u;$
Жавоб: $x_2 = u + 1;$ $x_3 = u+2;$
$x_4 = u + 3;$
u — ихтиёрий сон.

г) $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

Жавоб: система биргаликда эмас.

21. Қуйидаги тенгламалар системаси биргаликда ёки биргаликда эмаслигини текширинг ҳамда умумий ва бирор хусусий ечимини аниқланг:

а)

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Жавоб: биргаликда;

умумий ечим:

$$x_1 = \frac{c_3 - 9c_4 - 2}{11}, \quad x_3 = c_3,$$

$$x_2 = \frac{5c_3 - c_4 + 10}{11}, \quad x_4 = c_4,$$

$$x_1 = -1, \; x_2 = 1, \; x_3 = 0, \; x_4 = 1$$

хусусуй ечим. Бунда c_n — ихтиёрий.

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Жавоб: биргаликда, умумий ечим:

$$x_1 = c_1, \; x_2 = c_2,$$
$$x_3 = 22c_1 - 33c_2 - 11,$$
$$x_4 = -16c_1 + 24c_2 + 8.$$

хусусий ечим:

$$x_1 = 2, \; x_2 = 1, \; x_3 = x_4 = 0.$$

в) $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Жавоб: система биргаликда ва ягона $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ ечимга эга.

г) $$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Жавоб: система биргаликда эмас.

22. Қуйидаги тенгламалар системасининг λ га боғлиқ бўлган умумий ечимини топинг:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Жавоб: $\lambda \neq 0$ бўлганда тенгламалар системаси биргаликда эмас. $\lambda = 0$ да умумий ечим

$$x_3 = c_3, \; x_4 = c_4 \quad x_1 = \frac{-5c_3 - 13c_4 - 3}{2}, \; x_2 = \frac{-7c_3 - 19c_4 - 7}{2}.$$

23. Қуйидаги тенгламалар системаси ечимларининг фундаментал системасини топинг:

а) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Жавоб: умумий ечим

$x_3 = c_3$, $x_4 = c_4$

$x_1 = 8c_3 - 7c_4$,

$x_2 = -6c_3 + 5c_4$.

Ечимларнинг фундаментал системаси:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

б) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Жавоб: умумий ечим $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, $x_4 = \dfrac{9c_1 + 6c_2 + 8c_3}{4}$,

$$x_5 = \frac{3c_1 + 2c_2 + 4c_3}{4}$$

Ечимларнинг фундаментал системаси:

в) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$
0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	-2	1

Жавоб: система фақат тривиал ечимга эга; ечимларнинг фундаментал системаси мавжуд эмас.

г) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Жавоб: Умумий ечим $x_4 = c_4$, $x_5 = c_5$, $x_1 = c_4 - c_5$, $x_2 = c_4 - c_6$, $x_3 = c_4$,

ечимларнинг фундаментал системаси:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

24. Қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини Кронекер-Капелли методидан фойдаланиб ечинг:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 4x_1 - 12x_2 - 17x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

Матрицалардан тузилган полиномга доир мисоллар.

25. Қуйидаги матрицаларни диагонал матрицага келтиринг:

а) $A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^2 \\ 3\lambda - 1 & 3\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2\lambda \\ \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda & 3\lambda^2 - \lambda & \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^2 + \lambda & 3\lambda^2 + 3\lambda \end{bmatrix}$

Жавоблар: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + \lambda \end{bmatrix}$.

26. Қуйидаги матрицалар учун характеристик кўпҳадни топинг:

а) $\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_0 \\ & & & & & \end{bmatrix}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{n\ \text{та}}$;

б) $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Жавоб:
а) $(\lambda - \lambda_0)^n = P(A)$; б) $P(B) = (-1)^n (\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-r} - \dots - a_n)$.

Ушбу
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
матрицанинг хос сонлари топилсин. *Жавоб:* $\lambda = 1$.

28. Қуйидаги матрицалар учун хос сонларни топинг:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$.

Жавоблар: а) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; б) $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$.

29. Қуйидаги чизиқли тенгсизликлар системаси ечимларининг мавжудлик соҳасини топинг:

а) $3x_1 + x_2 \leqslant 6$;

б) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 6; \end{aligned}\right\}$

в) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 - 3x_2 &\geqslant 12 \end{aligned}\right\}$;

г) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 + 3x_2 &\leqslant 12, \\ 2x_1 &\leqslant 3 \end{aligned}\right\}$;

д) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 - 3x_2 &\leqslant 12. \\ 2x_1 &\leqslant 3, \\ -x_1 &\leqslant 7, \\ -8x_1 + 9x_2 &\leqslant 72, \\ 2x_1 + 9x_2 &\leqslant 72, \\ 2x_1 - 2x_2 &\leqslant 13. \end{aligned}\right|$

е) $\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 6. \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ -2x_1 - 3x_2 &\leqslant 12, \\ 2x_1 &\leqslant 3, \\ 2x_1 + 2x_q &< -13. \end{aligned}\right|$

Жавоблар: а) *xOy* текисликка ортогонал бўлган $\vec{q} = \{3;\ 1\}$ вектордан иборат; б) икки ярим текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган тўплам;

в) Учлари $(10;\ 6)$, $\left(4\frac{2}{7};\ -6\frac{6}{7}\right)$, $\left(-3\frac{3}{4};\ -1\frac{1}{2}\right)$ нуқталарда бўлган ёпиқ учбурчак нуқталаридан иборат тўплам;

г) учлари $\left(1\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2}\right)$; $\left(1\frac{1}{2};\ -5\right)$; $\left(-8\frac{1}{4};\ 1\frac{1}{2}\right)$ бўлган ёпиқ учбурчак нуқталаридан иборат тўплам; е) тенгсизликлар системаси биргаликда эмас, Биз бу бобда чизиқли ва Евклид фазоларида чизиқли акслантириш ва оператор ҳамда уларнинг баъзи бир хоссалари билан танишамиз. Бунда VII бобда тўла ўрганилган матрицалар назарияси ва чизиқли тенгламалар системалари назарияси асосий аппарат бўлиб хизмат қилади. Чизиқли фазода акслантириш ёки чизиқли оператор тушунчалари математика, механика ва физиканинг кўпгина бўлимларида муҳим роль ўйнайди. Биз ўз баёнимизнинг ҳозирги замон математикасининг марказий тушунчаларидан бири бўлмиш чизиқли акслантириш ва унинг энг содда хоссаларидан бошлаймиз.

43-§. Чизиқли акслантириш.

R^n ва R^m мос равишда n ва m ўлчовли иккита ҳақиқий чизиқли фазо бўлсин. R^n фазонинг ҳар бир векторига R^m фазонинг битта векторини мос қўядиган қонун R^n *фазони* R^m *фазога акслантириш* дейилади ва $f:R^n \to R^m$ деб белгиланади.

Агар ҳар қандай $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$ ва исталган λ_1, λ_2 ҳақиқий сонлар учун

$$f(\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}) = \lambda_1 f(\vec{a}) + \lambda_2 f(\vec{b}) \tag{8.1}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу

$$f : R_n \to R^m$$

акслантириш *чизиқли акслантириш* дейилади.

Чизиқли акслантиришнинг бизга маълум бўлган базис ва матрицалар ёрдамидаги ифодасини кўрайлик. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 = \{1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}, \\ \vec{e}_2 = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 0\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 1\} \end{array}\right| \tag{8.2}$$

векторлар R^n даги,

$$\left.\begin{array}{l}\vec{e}_1' = \{1,\ 0,\ \ldots,\ 0\}, \\ \vec{e}_2' = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 0\}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{e}_m' = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 1\}\end{array}\right| \qquad (8.3)$$

векторлар эса R^m даги базис бўлсин. Энди $\vec{a} = \{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\}$ вектор R^n даги ихтиёрий вектор, $\vec{a}' = f\ (\vec{a}) = \{\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_m'\}$ вектор эса бу векторнинг R^m даги образи бўлсин. У ҳолда

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$$

ва

$$\vec{a}' = f\ (\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k' \vec{e}_k.$$

(8.1) чизиқли акслантириш $\vec{a}$ ва $f\ (\vec{a})$ векторларнинг компонентлари орқали қандай берилишини кўриб чиқамиз. Бунда

$$\vec{a}_1 = f\ (\vec{e}_1),\ \vec{a}_2 = f\ (\vec{e}_2),\ \ldots,\ \vec{a}_n = f\,(\vec{e}_n)$$

деб белгилаймиз. $\vec{a}_i \in R^m$ бўлгани сабабли $\vec{a}_i$ ни

$$\vec{e}_1',\ \vec{e}_2',\ \ldots,\ \vec{e}_m'$$

базислар бўйича ёйиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}_1 = a_{11}\vec{e}_1' + a_{21}\vec{e}_2' + \ldots + a_{m1}\ \vec{e}_m', \\ \vec{a}_2 = a_{12}\vec{e}_1' + a_{22}\vec{e}_2' + \ldots + a_{m2}\ \vec{e}_m', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{a}_n = a_{1n}\vec{e}_1' + a_{2n}\vec{e}_2' + \ldots + a_{mn}\vec{e}_m'\end{array}\right| \qquad (8.4)$$

Шундай қилиб, $\vec{a}_i = f\,\{\vec{e}_i\}$ векторлар системаси ушбу

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$(n \times m)$ матрицанинг берилиши билан бир қийматли аниқланади. Энди $\vec{a}$ вектор R^n га тегишли ихтиёрий вектор бўлсин. У ҳолда, равшанки,

$$f(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha'_k \vec{e}'_k$$

ва

$$f(\vec{a}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \vec{e}'_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\alpha_i\right) \vec{e}_k. \qquad (8.5)$$

Бундан $f(\vec{a})$ векторнинг компонентлари учун қуйидаги формулаларни келтириб чиқарамиз:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha'_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha'_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n. \end{array}\right| \qquad (8.6)$$

Бундан қуйидаги теорема ўринли экани келиб чиқади.

8.1-теорема. *$f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{a}' = f(\vec{a})$ векторнинг $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \ldots, \vec{e}'_m$ базисга нисбатан компонентлари $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисга нисбатан компонентлари орқали (8.6) формулалар бўйича ифодаланади, бунда f чизиқли акслантиришнинг*

$$A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (8.7)$$

матрицасининг устунлари ушбу $f(\vec{e}_i)$ $(i = \overline{1, n})$ векторлардан иборат. Аксинча, (8.5) формулалар билан бериладиган $f: R^n \to R^m$ акслантириш чизиқли акслантиришдир ва бу акслантиришни аниқловчи матрица f чизиқли акслантиришнинг A_f матрицасидир.

Бу теоремани исботсиз қабул қиламиз. Шундай қилиб, $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантириш (8.5) формула билан тўла аниқланади.

Агар R^n ва R^m фазолар устма-уст тушса (яъни $n = m$ бўлса), чизиқли акслантириш *айний алмаштириш* дейилади. Бунда A_f матрица n-тартибли квадрат матрица бўлади.

Чизиқли акслантиришларни қўшиш ва уларни сонга кўпайтириш. $H(R^n, R^m)$ орқали барча $f: R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришлар тўпламини белгилаймиз, бунда m, n — тайинланган натурал сонлар. R^n ни R^m га чизиқли акслантириш учун қўшиш амали ва ҳақиқий сонга кўпайтириш амали киритилади. Чунончи, агар, $f, g \in H(R^n, R^m)$ бўлиб, λ ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда f ва g *акслантиришларнинг йиғиндиси* деб шундай

$$h: R^n \to R^m$$

акслантиришга айтиладики, бунда ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \tag{8.8}$$

тенглик ўринли бўлади.

f акслантиришни λ сонга кўпайтириш шундай $l: R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришдан иборатки, бунда ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$l(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \tag{8.9}$$

тенглик бажарилади. h ва l акслантиришлар чизиқли акслантиришлар эканини кўриш осон. Одатда улар қисқача бундай белгиланади:

$$h = f + g, \quad l = \lambda f. \tag{8.10}$$

(8.10) белгилашлардан бундан кейин ҳам систематик фойдаланамиз.

(8.10) формулаларга кўра $f, g \in H(R^n, R^m)$ ва ҳар қандай λ сон учун ушбу

$$A_{f+g} = A_f + A_g, \quad A_{\lambda f} = \lambda A_f \tag{8.11}$$

тенгликлар келиб чиқади, бунда A_f, A_g, A_{f+g}, $A_{\lambda f}$ — тегишли чизиқли акслантиришларнинг матрицалари.

Чизиқли акслантиришлар учун ҳам, матрицалар учун қилинганидек, чизиқли боғлиқлик ва чизиқли эрклилик, чизиқлик комбинация, базис тушунчалари киритилади. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган барча $m\times n$ матрицалар тўпламини $M^{m,n}$ билан белгилаймиз. Квадрат матрицалар учун ($m = n$ бўлганда) M^n белгилашдан фойдаланамиз. Ҳар бир $f\in H(R^n, R^m)$ га $A_f\in M^{m,n}$ матрицани мос келтирувчи мосликка ва 8.1-теоремага биноан *биектив акслантириш* деб аталувчи

$$\psi : H\ (R^n,\ R^m) \to M^{m,n}$$

акслантиришни киритамиз. Бу акслантириш (8.11) га биноан акслантиришлар йиғиндисини тегишли матрицалар йиғиндисига ва сон билан акслантириш кўпайтмасини сонлар билан тегишли матрица кўпайтмасига ўтказади. Демак, чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли акслантиришларга чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли матрицалар мос келади ва аксинча. Шу сабабли кўп масалаларда $f\in H\ (R^n,\ R^m)$ чизиқли акслантиришлар ва уларга мос $A_f\in M^{m,n}$ матрицалар ўзаро бир хил бўлади, деб ҳисоблаш фойдалидир.

Юқорида айтилганлардан чизиқли акслантиришлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлиши келиб чиқади:

$$\begin{aligned}
&f+g=g+f;\ (f+g)+h=f+(g+h);\\
&(\lambda\mu)\,f=\lambda\,(\mu f)=\mu\,(\lambda f);\\
&(\lambda+\mu)\,f=\lambda f+\mu f;\\
&\lambda\,(f+g)=\lambda f+\lambda g,
\end{aligned}\tag{8.12}$$

бунда f, g, h лар $H\ (R^n,\ R^m)$ га тегишли исталган акслантиришлар, λ ва μ — исталган ҳақиқий сонлар, чунки бу муносабатлар $M^{m,n}$ га тегишли матрицалар учун ўринли.

R^n, R^m, R^l фазолар берилган бўлсин ва $f\in H\ (R^n,\ R^m)$; $g\in H\ (R^m,\ R^l)$ бўлсин. Юқорида аниқлаганимиздек, f ва g акслантиришнинг кўпайтмаси шундай $h: R^n\to R^l$ акслантиришки, бунда ҳар қандай $\vec{x}\in R_n$ да

$$h(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \tag{8.13}$$

тенглик бажарилади. Умум қабул қилинган белгилашларга кўра $g\cdot f$ ёзувдан фойдаланилади. Энди $h=g\cdot f\in H(R^n,\ R^l)$ эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ лар R^n га тегишли ихтиёрий векторлар, λ ва μ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлсин. У ҳолда f ва g акслантиришларнинг чизиқли эканидан кетма-кет фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$h(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}) = g(f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})) = g(\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})) =$$
$$= g(\lambda f(\vec{a})) + g(\mu f(\vec{b})) = \lambda g(f(\vec{a})) + \mu g(f(\vec{b})) = \lambda h(\vec{a}) + \mu h(\vec{b}),$$

бу эса тасдиқни исботлайди.

f ва g алмаштиришларнинг матрицалари қуйидагича бўлсин:

$$A_f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ f_{m1} & f_{m2} & \ldots & f_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2m} \\ g_{l1} & g_{l2} & \ldots & g_{lm} \end{bmatrix}$$

$A_{g\circ f}$ матрицанинг кўринишини топамиз. Энг олдин, шуни қайд қиламизки, $A_{g\circ f}$ матрица $l\times n$ ўлчамга эга, чунки $g\circ f\in H(R^n, R^l)$ ва, демак, бу матрицанинг тўла ёзилиши бундай:

$$A_{g\circ f} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ h_{l1} & h_{l2} & \ldots & h_{ln} \end{bmatrix}$$

Ҳар қандай $\vec{a}=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ учун $f(\vec{a})=\{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m\}$ векторнинг компонентлари ушбу формулалар бўйича топилади:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'_1 = f_{11}\alpha_1 + f_{12}\alpha_2 + \ldots + f_{1n}\alpha_n, \\ \alpha'_2 = f_{21}\alpha_1 + f_{22}\alpha_2 + \ldots + f_{2n}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha'_m = f_{m1}\alpha_1 + f_{m2}\alpha_2 + \ldots + f_{mn}\alpha_n. \end{array}\right| \qquad (8.14)$$

Сўнгра ҳар қандай $\vec{b}=\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ учун $g(\vec{b})$ векторнинг компонентлари қуйидаги формулалар бўйича топилади:

$$\left.\begin{array}{l} \beta'_1 = g_{11}\beta_1 + g_{12}\beta_2 + \ldots + g_{1m}\beta_m, \\ \beta'_2 = g_{21}\beta_1 + g_{22}\beta_2 + \ldots + g_{2m}\beta_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta'_l = g_{l1}\beta_1 + g_{l2}\beta_2 + \ldots + g_{lm}\beta_m \end{array}\right| \qquad (8.15)$$

Шу сабабли $\vec{c}=g(f(\vec{a}))$ векторнинг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ компонентлари ушбу формулалар бўйича топилади:

$$\begin{aligned} \gamma_i = g_{i1}(f_{11}\alpha_1 + f_{12}\alpha_2 + \ldots + f_{1n}\alpha_n) + \ldots + \\ + g_{im}(f_{m1}\alpha_1 + f_{m2}\alpha_2 + \ldots + f_{mn}\alpha_n) = \\ = (g_{i1} f_{11} + g_{i2} f_{21} + \ldots + g_{im} f_{m1})\alpha_1 + \\ + (g_{i1} f_{12} + f_{i2} f_{22} + \ldots + g_{im} f_{m2})\alpha_2 + \\ + (g_{i1} f_{13} + g_{i2} f_{24} + \ldots + g_{im} f_{m3})\alpha_3 + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (g_{i1} f_{1n} + g_{i2} f_{2n} + \ldots + g_{im} f_{mn})\alpha_n, \end{aligned} \qquad (8.16)$$

бунда $i = 1, 2, \ldots, l$. (8.16) формулаларни қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$\gamma_e = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} g_{ik} f_{kj} \right) \alpha_j, \; i = \overline{1, l}. \qquad (8.17)$$

Бундан $A_{g \cdot f}$ матрицанинг h_{ij} элементи учун ушбу формула ўринли экани кўринади:

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik} f_{kj}, \qquad (8.18)$$

бунда $i = \overline{1, l}$; $j = \overline{1, n}$.

Шундай қилиб,

$$A_{g \cdot f} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} g_{1k} f_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{1k} f_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{ik} f_{kn} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum\limits_{k=1}^{m} g_{lk} f_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{lk} f_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{m} g_{lk} f_{kn} \end{bmatrix} \qquad (8.19)$$

(8.15) ва (8.16) формулаларнинг анализи шуни кўрсатадики, $A_{g \cdot f}$ матрица A_g ва A_f матрицалардан ушбу қоида бўйича тузилади: h_{ij} элемент $A_{g \cdot f}$ матрицанинг i-сатри билан j-устунининг кесишган жойидаги элементи бўлсин. У ҳолда A_g матрицанинг i-сатри элементларини олиб, A_f матрицанинг j-устунининг мос элементларига кўпайтирамиз ва натижаларни қўшамиз. Бу ерда шуни қайд қилиш муҳимки, A_g матрица сатридаги элементлар сони A_f матрица устунидаги элементлар сонига тенг бўлиши керак (қаралаётган ҳолда бу сонларнинг иккаласи ҳам m га тенг).

(8.10) формулага векторлар нуқтаи назаридан қараш ҳам мумкин. Чунончи, агар A_g матрица сатрларини ва A_f матрица устунларини R^m нинг векторлари деб қаралса, у ҳолда h_{ij} элемент A_g матрицанинг i-сатрини A_f матрицанинг j-устунига скаляр кўпайтмаси бўлади.

Чизиқли акслантиришлар кўпайтмасининг матрицасини тузишнинг юқорида баён қилинган усули матрицаларни кўпайтиришни аниқлашга асос қилиб олинади. Ушбу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

матрицалар берилган бўлсин, буларнинг ўлчамлари мос равишда $l \times m$ ва $m \times n$ бўлсин (A матрицанинг устунлари сони B матрицанинг сатрлари сонига тенг бўлиши муҳимдир). *У ҳолда A матрицанинг B матрицага кўпайтмаси* деб ўлчами $l \times m$ га тенг бўлган шундай C матрицага айтиладики, бунинг c_{ij} элементлари

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \, (i = 1, 2, \dots, l; \; j = 1, 2, \dots, n) \quad (8.20)$$

формулалар бўйича топилади.

Биз қуйида A матрицанинг B матрицага кўпайтмасини $A \cdot B$ ёки AB кўринишда ёзамиз.

Мисоллар. 1. A ва B матрицаларнинг кўпайтмасини топинг, бунда:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш қоидасига биноан ушбуга эга бўламиз:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1\cdot0+2\cdot2+0\cdot4 & 1\cdot0+2\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot3+0\cdot5 \\ 0\cdot0+2\cdot2+1\cdot4 & 0\cdot0+2\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot1+2\cdot3+1\cdot5 \\ 3\cdot0-1\cdot2+0\cdot4 & 3\cdot0-1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot1-1\cdot3+0\cdot5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 11 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $f : R^2 \to R^4$ акслантириш R^2 фазонинг $\vec{e_1} = \{1, 0\}$, $\vec{e_2} = \{0, 1\}$ базисини мос равишда $\vec{u_1} = \{1, -1, 0,2\}$ ва $\vec{u_2} = \{0, 1, -2, 3\}$ векторларга, $g : R^4 \to R^3$ акслантириш эса R^4 фазонинг $\vec{e}\,'_1 = \{1, 0, 0, 0\}$; $\vec{e}\,'_2 = \{0, 1, 0, 0\}$; $\vec{e}\,'_3 = \{0, 0, 1, 0\}$; $\vec{e}\,'_4 = \{0, 0, 0, 1\}$ базисини мос равишда $\vec{v_1} = \{2, -1, 0\}$, $\vec{v_2} = \{1, 1, 1\}$, $\vec{v_3} = \{0, 0, 5\}$; $\vec{v_4} = \{-2, -1, 3\}$ векторларга ўтказувчи чизиқли акслантириш бўлсин. f, g ва $gof : R^2 \to R^3$ чизиқли акслантиришларга мос келувчи A_f, A_g, A_{gof} матрицаларни топиш керак. 8.1-теоремага асосан A_f матрицанинг устунлари $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ векторлардан, A_g матрицанинг устунлари эса $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, $\vec{v_4}$ вектордан иборат экани келиб чиқади. Шунинг учун

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_g = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

ниҳоят,

$$A_{gof} = A_g \circ A_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Шундай қилиб, $R^n \to R^m$ чизиқли акслантиришлар тўплами билан тўғри бурчакли $M^{m,n}$ матрицалар тўплами орасида биектив мослик ўрнатилади, бундай акслантиришлар йиғиндисига, сон билан акслантиришнинг кўпайтмасига ва акслантиришларни кўпайтиришга матрицалар устида шундай амалларни (матрицалар йиғиндиси, сонни матрицага кўпайтириш ва матрицаларни кўпайтиришни) бажариш мос келади. Бу эса чизиқли акслантиришлар учун кўрсатилган амалларнинг хоссалари тўғрилиги аниқланган бўлса, у ҳолда бу хоссалар матрицалар устида бажариладиган амаллар учун ҳам ўринли эканини тасдиқлаш имконини беради ва аксинча.

Мисол сифатида матрицалар учун кўпайтиришнинг ассоциативлигини исботлаймиз. Чунончи, агар A — $l \times m$ матрица, B — $m \times n$ матрица, C эса $n \times p$ матрица бўлса, $(AB)\,C$ ва $A\,(BC)$ кўпайтмалар аниқланган бўлади, булар $l \times p$ ўлчамли матрицалардир.

Матрицаларни кўпайтиришнинг ассоциативлик қонуни шундан иборатки, бунда

$$(AB)C = A(BC) \tag{8.21}$$

тенглик ўринли бўлиши керак. 8.1-теоремага кўра

$$f \in H\,(R^p,\ R^n),\ \ g \in H(R^n,\ R^m),\ \ h \in (R^n,\ R^l)$$

акслантиришлар мавжуд бўлиб, бунда C матрица f акслантиришнинг, B матрица g акслантиришнинг, A эса h акслантиришнинг матрицаси экани келиб чиқади. Акслантиришларнинг $(hg)f$ ва $h(gf)$ кўпайтмалари аниқланган бўлиб, улар $H(R^n,\ R^l)$ га тегишли эканини осонгина кўриш мумкин. Агар биз

$$(hg)f = h\,(gf)$$

тенгликнинг тўғрилигини кўрсатсак, (8.21) формула исботланган бўлади. Аммо бу охирги тенглик исталган акслантиришларни кўпайтиришнинг ассоциативлик қонунининг хусусий ҳолидир.

44-§. Чизиқли оператор тушунчаси

Чизиқли акслантиришларнинг татбиқлари учун R^n фазони ўзини ўзига акслантиришлар жуда муҳим аҳамиятга эгадир. Бу ҳолда $R^n \to R^n$ чизиқли акслантиришларни одатда *оператор* дейилади. Бошқача айтганда, R^n нинг ҳар бир $\vec{x}\,(\vec{x}\in R^n)$ вектори бирор қоида бўйича шу R^n нинг битта $\vec{y}\,(\vec{y}\in R^n)$ векторига бир қийматли акслансин. Мана шу қоида алгебрада одатда *оператор* ёки *алмаштириш* дейилади ва у φ, ψ ҳарфлари билан ифодаланади. Бунда $\vec{x}$ нинг $\vec{y}$ га аксланиши

$$\vec{y} = \varphi(\vec{x}) \text{ ёки } \vec{y} = \varphi\vec{x}$$

деб белгиланади. Бу ҳолни биз «φ *операторни R^n фазо векторларига татбиқ этилади* («*қўлланилади*») деймиз. Масалан, аналитик геометрияда муҳим роль ўйновчи $\varphi: R^3 \to R^3$ чизиқли акслантиришлар қаралади. Агар φ операторни R^n га қўллаш процессида $\vec{x}\in R^n$ вектор $\vec{y}\in R^n$ векторга аксланса, яъни $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$ бўлса, $\vec{y}$ ни $\vec{x}$ нинг *тасвири* (образи), $\vec{x}$ ни эса $\vec{y}$ нинг *прообрази* деб атаймиз.

8.1-таъриф. $\varphi: R^n \to R^n$ *оператор қуйидаги икки аксиомага бўйсунса, уни чизиқли оператор дейилади:*

$$1)\ \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in R^n \Rightarrow \varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2) \qquad (8.22)$$

(операторнинг аддитивлик хоссаси);

$$2)\ \forall\lambda\in P,\ \forall\vec{x}\in R^n \Rightarrow \varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x}) \qquad (8.22')$$

(операторнинг бир жинслилик хоссаси)

O символ билан белгиланувчи ва R^n фазонинг ҳамма элементларини шу R^n фазонинг ноль элементига акслантирувчи оператор қуйидаги қоида бўйича қўлланилади:

$$O\cdot\vec{x} = \vec{0}.$$

Ҳар бир φ оператор учун унга қарама-қарши бўлган операторни қуйидагича белгиланади:

$$-\varphi = (-1)\,\varphi.$$

Юқоридаги муносабатлардан қуйидаги тасдиқнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Барча $\varphi : R^n \to R^n$ чизиқли операторлар тўплами чизиқли фазони ташкил қилади ва уни $H(R^n, R^n)$ кўринишда белгиланади.

1°. **Чизиқли операторлар тўплами $H(R^n, R^n)$ нинг хоссалари.** а) $H(R^n, R^n)$ тўпламда бирлик операторни аниқлаймиз. Қуйидаги $E\vec{x} = \vec{x}$ қоида бўйича қўлланувчи чизиқли операторни *бирлик оператор* деб атаймиз, бу ерда $\vec{x}\in H(R^n, R^n)$;

б) $\varphi, \psi\in H(R^n, R^n)$ берилган бўлсин. φ ва ψ операторлар *кўпайтмаси* деб қуйидаги $(\varphi\circ\psi)(\vec{x}) = \varphi\circ(\psi(\vec{x}))$ қоида бўйича татбиқ этиладиган $\varphi\circ\psi$ операторга айтилади. Умумий ҳолда $\varphi\circ\psi \neq \psi\circ\varphi$ тенгсизлик ўринли.

Биз юқорида матрицалар назарияси чизиқли оператор учун асосий аппарат бўлиб хизмат қилади деган эдик. Чизиқли операторнинг қуйидаги хоссалари ҳам деярлик матрицаларнинг хоссаларининг ўзидир.

в) Агар $\varphi, \circ\in H(R^n, R^n)$ бўлса, қуйидаги муносабатлар ўринли:

1. $\lambda(\varphi\circ\psi) = (\lambda\varphi)\circ\psi$,
2. $(\varphi+\psi)\circ\omega = \varphi\circ\omega + \psi\circ\omega$,
3. $\varphi\circ(\psi+\omega) = \varphi\circ\psi + \varphi\circ\omega$,
4. $(\varphi\circ\psi)\omega = \psi\circ(\psi\circ\omega)$.

Биринчи тенглик операторларни кўпайтириш таърифидан келиб чиқади. Иккинчи тенглик эса қуйидаги содда ҳисобларга кўра ўринли:

$$[(\varphi+\psi)\circ\omega](\vec{x}) = (\varphi+\psi)\circ(\omega(\vec{x})) = \varphi\circ(\omega(\vec{x})) + \psi\circ(\omega(\vec{x})) =$$
$$= (\varphi\circ\omega)(\vec{x}) + (\psi\circ\omega)(\vec{x}) = (\varphi\circ\omega + \psi\circ\omega)(\vec{x}).$$

Учинчи хосса ҳам шунга ўхшаш исбот қилинади.

4-хоссанинг тўғрилиги эса чизиқли операторларни кўпайтиришда уларни кетма-кет татбиқ қилиш натижасида келиб чиқади.

4) хоссага асосан $H(R^n, R^n)$ фазога тегишли чекли сондаги операторлар кўпайтмасини, яъни $\varphi\circ\psi \ldots \circ\omega$ ни ва хусусий ҳолда φ операторнинг n-даражасини қуйидаги $\varphi^n = \varphi\circ\varphi\circ\varphi\circ \ \ldots \ \circ\varphi$ формула ёрдамида аниқланади. Бунда $\varphi^{n+m} = \varphi\circ^n \varphi^m$ формула тўғрилиги маълум.

Энди $H(R^n, R^n)$ фазода φ операторга тескари бўлган оператор тушунчасини киритайлик.

8.2-таъриф. *Агар $\varphi, \psi \in H(R^n, R^n)$ операторлар учун*

$$\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = E$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда ψ операторни φ га тескари оператор дейилади ва φ^{-1} кўринишда белгиланади.

Бу таърифдан $\vec{x}\in R^n \Rightarrow \varphi^{-1}\circ\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$ тенглик ўринли бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Шундай қилиб, агар $\overset{-1}{\varphi}\cdot\varphi(\vec{x}) = 0$ бўлса, $\vec{x} = 0$, яъни оператор учун тескари оператор мавжуд бўлса, $\varphi(\vec{x}) = 0$ шартдан $\vec{x} = 0$ келиб чиқади.

2°. **Чизиқли махсусмас оператор.** 8.3-таъриф. *Агар $\varphi : R^n \to R^n$ чизиқли операторнинг A_φ матрицаси махсусмас матрица бўлса, бу чизиқли оператор махсусмас оператор дейилади.*

8.2-теорема. *Ҳар қандай чизиқли махсусмас $\varphi : R^n \to R^n$ оператор биектив акслантиришдир.*

Исбот. $\varphi : R^n \to R^n$ чизиқли махсусмас оператор бўлсин ва

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (8.23)$$

унинг матрицаси бўлсин.

$$\varphi \text{ оператор } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n \text{ векторни } \vec{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{bmatrix} \in R^n$$

векторга ўтказади, бунда:

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (8.24)$$

φ чизиқли махсусмас оператор бўлгани учун $\det A_\varphi \neq 0$ ва Крамер теоремасига биноан олдиндан берилган ҳар бир $\vec{x}' \in R^n$ вектор учун тўла *прообраз* $\varphi^{-1}(\vec{x}')$ ягона $\vec{x} \in R^n$ вектордан иборат бўлади. Бу эса φ оператор биектив акслантириш эканини билдиради. Шу билан теорема исботланади.

8.3-**теорема**. *Чизиқли махсусмас* φ *операторга тескари* $\varphi^{-1}: R^n \to R^n$ *оператор ҳам чизиқли махсусмас оператор бўлади, матрицаси эса ушбу кўринишда бўлади:*

$$A_{\varphi^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix} \qquad (8.25)$$

бунда $\Delta = \det A_\varphi$, A_{ik} *эса* Δ *детерминантнинг* a_{ik} *элементининг алгебраик тўлдирувчиси.*

Исбот. Энг олдин қуйидаги муносабатлар ўринли эканини қайд қиламиз:

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{-1} = I_{R^n}^{*)}.$$

Бу муносабатнинг ўринли бўлиши бизга матрицалар назариясидан маълум. Энди (8.23) матрица φ операторнинг матрицаси бўлсин. У ҳолда $\varphi: R^n \to R^n$ оператор $\vec{x}$ векторни $\vec{x}' = \varphi(\vec{x})$ векторга ўтказади, бунда $\vec{x}$ ва $\vec{x}'$ ўзаро (8.24) формулалар орқали боғланган. Шартга кўра $\det A_\varphi \neq 0$ бўлгани учун Крамер теоремасига биноан:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

бунда $\Delta = \det A_\varphi$, $\Delta_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ эса Δ детерминантдан k-устунини $\vec{x}'$ вектор компонентлари устуни билан алмаштиришдан ҳосил бўлади. Энди $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ детерминантларни мос равишда биринчи, иккинчи, ..., n-устун бўйича ёйиб, топамиз:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\Delta}[A_{11}x_1' + A_{21}x_2' + \ldots + A_{n1}x_n'], \\ x_2 &= \frac{1}{\Delta}[A_{12}x_1' + A_{22}x_2' + \ldots + A_{n2}x_n'], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{1}{\Delta}[A_{1n}x_1' + A_{2n}x_2' + \ldots + A_{nn}x_n'], \end{aligned}\right\} \qquad (8.26)$$

---

* $I_{\ n}$ — *айний акслантириш* дейилади.

бунда A_{ik} детерминант $\Delta = \det A_\varphi$ детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси. (8.26) формулалардан φ^{-1} оператор R^n ни R^n га ўтказувчи чизиқли оператор экани келиб чиқади ва унинг матрицаси (8.25) дан иборат экани кўриниб турибди.

Юқоридаги мулоҳазаларга асосан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз: $A_\varphi \cdot A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi^{-1}} \cdot A_\varphi = E$, E—бирлик матрица. Энди ушбу

$$\det A_\varphi \cdot \det A_{\varphi^{-1}} = \det E = 1$$

муносабатга кўра $A_{\varphi^{-1}}$ матрица махсусмас матрица бўлади, шу сабабли $A_{\varphi^{-1}}$ оператор чизиқли махсусмас оператор бўлади.

Бизга махсусмас матрицага тескари матрица ҳар доим мавжуд ва ягона эканлиги маълум.

Демак, 8.3-*теоремадан чизиқли махсусмас* $\varphi: R^n \to R^n$ *операторга тескари оператор* φ^{-1} *нинг* $A_{\varphi^{-1}}$ *матрицаси* φ *операторнинг матрицасига тескари бўлган* A_φ^{-1} *матрица билан бир хил бўлиши келиб чиқади, яъни*

$$A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1}.$$

3°. Чизиқли операторларни берилган базисда ифодалаш. R^n фазо P майдон* устидаги n ўлчовли чизиқли фазо бўлсин. Биз R^n даги чизиқли операторни берилган базисда ифодалаш учун қуйидаги теоремалардан фойдаланамиз.

8.4-теорема. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *векторлар системаси* R^n *даги ихтиёрий базис,* $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ *эса* R^n *да берилган векторлар системаси бўлсин. У ҳолда шундай битта ва фақат битта* $\varphi: R^n \to R^n$ *оператор мавжудки,*

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, \varphi(\vec{e}_2) = \vec{g}_2, \ \ldots, \ \varphi(\vec{e}_n) = \vec{g}_n \qquad (8.28)$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, $\vec{x}$ вектор R^n нинг ихтиёрий вектори бўлсин. У ҳолда

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n, \qquad (8.29)$$

---

* Агар P тўпламдан олинган ихтиёрий икки a ва $b (b \neq 0)$ элемент учун шу тўпламга тегишли ягона ва $bq = a$ тенгликни қаноатлантирадиган a элемент мавжуд бўлса, у ҳолда P тўплам *майдон* дейилади.

бунда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис билан бир қийматли аниқланади.

(8.29) ни эътиборга олсак,

$$\varphi(\vec{x}) = \alpha_1\vec{g}_1 + \alpha_2\vec{g}_2 + \dots + \alpha_n\vec{g}_n \qquad (8.30)$$

деб олиш мумкин. Бу формула $f: R^n \to R^n$ акслантиришни тўла аниқлайди. Бу формулалардан f акслантириш R^n да чизиқли оператор экани ҳам кўринади.

Энди f оператор R^n даги чизиқли оператор бўлиб, ушбу

$$f(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, f(\vec{e}_2) = \vec{g}_2, \dots, f(\vec{e}_n) = \vec{g}_n \qquad (8.31)$$

тенгликни қаноатлантирсин. У ҳолда ҳар қандай

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$$

вектор учун φ ва f операторларнинг чизиқлилигидан ва (8.30), (8.31) шартлардан фойдаланиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{e}_i) = \varphi(\vec{x}).$$

Шундай қилиб, f ва φ операторлар бир хил экан. Шу билан теорема тўла исбот бўлди.

8.5-теорема. *R^n да ихтиёрий $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис тайинланган бўлсин, у ҳолда ҳар бир*

$$\varphi: R^n \to R^n$$

чизиқли операторга A матрица бир қийматли мос келади, бу матрица φ чизиқли операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси бўлади. Агар

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ва $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n$ вектор R^n га тегишли ихтиёрий вектор бўлиб, $\vec{x}' = \varphi(\vec{x}) = \alpha_1'\vec{e}_1 + \alpha_2'\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n'\vec{e}_n$ вектор эса унинг образи бўлса, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_n' &= a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n. \end{aligned}\right| \qquad (8.32)$$

(8.32) формулалар φ операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги *тасвири* дейилади.

Аксинча ҳар бир $A = [a_{ik}]$ матрицага тайинланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда $\varphi : R^n \to R^n$ чизиқли оператор бир қийматли мос келади, бу оператор векторларнинг компонентлари орқали (8.36) формулалар билан берилади, бунда A матрица φ чизиқли операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси. Ниҳоят A матрицанинг геометрик мазмуни бундай: A матрицанинг устунлари $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ векторларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги компонентларидир.

Исбот. $\varphi : R^n \to R^n$ чизиқли оператор бўлсин. Бу оператор (8.4) теоремага биноан $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ векторлар билан бир қийматли аниқланади, бу векторларни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис бўйича ёйилмалари билан бериш қулай:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \varphi(\vec{e}_2) &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi(\vec{e}_n) &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned}\right|$$

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ вектор R^n га тегишли ихтиёрий вектор, $\vec{x}' = \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \vec{e}_i$ эса унинг *образи* бўлсин. У ҳолда

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\vec{e}_i) = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 +$$
$$+ \dots + a_{1n}\alpha_n)\vec{e}_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n)\vec{e}_2 +$$
$$+ \dots + (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n)\vec{e}_n.$$

Бунда:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1' = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n, \\ \alpha_2' = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n' = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n. \end{array}\right|$$

Бундан кўринадики, устунлари $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(\vec{e}_2)$, ..., $\varphi(\vec{e}_n)$ векторларнинг компонентларидан иборат бўлган A матрица φ чизиқли операторнинг матрицасидир. A матрицанинг тузилишига кўра у M^n га тегишли экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, теореманинг биринчи қисми исботланланди.

Теореманинг иккинчи қисми, яъни тескари тасдиқнинг исботи векторларнинг компонентлари орқали

$$\varphi: R^n \to R^n$$

чизиқли операторни берувчи формулалардан бевосита келиб чиқади, бу оператор учун A матрица φ операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги матрицаси бўлади. Шу билан теорема тўла исбот бўлди.

8.6-теорема. *φ, ψ лар R^n га тегишли ихтиёрий чизиқли операторлар, λ эса P майдонга тегишли ихтиёрий сон бўлсин, у ҳолда қуйидаги формулалар ўринли бўлади:*

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi;\ A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi. \tag{8.33}$$

Агар, бундан ташқари, $\varphi: R^n \to R^n$ чизиқли оператор махсусмас оператор бўлса, у ҳолда A_φ махсусмас матрица ва $A_{\varphi-1} = A^{-1\varphi}$ бўлади, бунда A_φ, A_ψ, $A_{\psi+\varphi}$, A_φ^{-1} билан R^n га тегишли тайинланган базисдаги φ, ψ, $\lambda\varphi$, $\varphi+\psi$, φ^{-1} операторларнинг матрицалари белгиланган.

Исбот. (8.33) формулаларнинг келтириб чиқарилиши чизиқли акслантириш ва матрицалар учун (8.30) формулалардан иштирок этувчи операцияларнинг аниқланиш усулларидан бевосита келиб чиқади. Теореманинг иккинчи қисмининг исботи 44-§ нинг 2°-пунктидаги тегишли теореманинг исботига ўхшаш.

4°. Чизиқли операторнинг турли базислардаги матрицалари орасидаги боғланиш.

φ чизиқли оператор R^n ни ўз-ўзига акслантиришни ифодалайди. Демак, бу оператор базиснинг танланишига боғлиқ эмас. Шунга қарамай, унинг тасвирининг матрицаси эса базиснинг танланишга боғлиқ. Бунда қуйидаги теорема ўринли.

8.7-теорема. $\varphi: R^n \to R^n$ *чизиқли операторлар ва* R^n *да иккита ихтиёрий* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ва $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ *базислар берилган бўлсин.* φ *операторнинг* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *базисдаги матрицасини* A *билан,* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *базисдаги матрицасини эса* B *билан ва* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *базисдан* $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ *базисга ўтиш матрицасини* C *билан белгилаймиз. У ҳолда ушбу муносабат ўринли бўлади:*

$$B = C^{-1}AC. \tag{8.34}$$

Исбот. Агар C матрица тўла ёзувда ушбу

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.34'}$$

кўринишга эга бўлса, у ҳолда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдан $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ базисга ўтиш формулалари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \vec{g}_1 &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{g}_2 &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \ldots + c_{n2}\vec{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{g}_n &= c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + c_{nn}\vec{e}_n. \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

3°. пунктдаги теоремаларга кўра C матрица $\varphi: R^n \to R^n$ чизиқли махсусмас операторни бир қийматли аниқлайди, бу оператор ушбу тенгликларни қаноатлантиради:

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{g}_1, \ \varphi(\vec{e}_2) = \vec{g}_2, \ \ldots, \ \varphi(\vec{e}_n) = \vec{g}_n,$$

бунда C матрица φ нинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицаси.

Агар A ва B матрицалар тўла ёзувда ушбу

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

кўринишга эга бўлса, у ҳолда ихтиёрий $k=1,2,\dots,n$ ларда

$$\varphi(\vec{e}_k)=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i, \quad \varphi(\vec{g}_k)=\sum_{i=1}^{n} b_{ik}\vec{g}_i$$

тенгликлар ўринли бўлади. Барча $i=1, 2, \dots, n$ ларда $\vec{g}_i=\varphi(\vec{e}_i)$ бўлгани учун ушбуга эга бўламиз:

$$\psi[\varphi(\vec{e}_k)]=\sum_{i=1}^{n} b_{ik}\varphi(\vec{e}_i).$$

φ махсусмас оператор бўлгани учун φ^{-1} оператор мавжуд, шунинг учун охирги тенгликнинг иккала қисмига φ^{-1} операторни қўллаймиз:

$$\varphi_0^{-1}\psi\,[\varphi\,(\vec{e}_k)]=\sum_{i=1}^{n} b_{ik}\vec{e}_i\,.$$

Демак, B матрица $\varphi_0^{-1}\psi(\varphi)$ операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицасидир.

Иккинчи томондан, $\varphi_0^{-1}\psi(\varphi)$ операторнинг шу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисдаги тасвирининг матрицаси $C^{-1}(A\cdot C)$ дан иборат (3°- пунктга қаранг). 3- пунктдаги тегишли теоремага кўра ҳар бир базисда оператор тасвирининг матрицаси бир қийматли аниқлангани учун $B=C^{-1}AC$. Шу билан теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. R^4 да $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_4$ базис тайинланган ва $\varphi(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2)=\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_3)=\vec{e}_3+\vec{e}_4$, $\varphi(\vec{e}_4)=\vec{e}_1$ шартларни қаноатлантирувчи $\varphi{:}R^4\to R^4$ чизиқли оператор берилган бўлсин. Ушбу

$$\vec{q}_1=\varphi(\vec{e}_1)-\varphi(\vec{e}_2), \qquad q_2=\varphi(\vec{e}_2)-\varphi(\vec{e}_3),$$
$$\vec{q}_3=\varphi(\vec{e}_1)+\varphi(\vec{e}_3), \qquad q_4=\varphi(\vec{e}_4)$$

векторлар базис ташкил қилишини исботлаб, φ операторнинг шу басзисдаги матрицасини ёзиш талаб этилган бўлсин. Масала шартидан ушбуга эгамиз: $\vec{q}_1=\varphi(\vec{e}_1)-\varphi(\vec{e}_2)=\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2-\vec{e}_3+0\cdot\vec{e}_4$,

$$\vec{q}_2=\varphi(\vec{e}_2)-\varphi(\vec{e}_3)=0\cdot\vec{e}_1+\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3-\vec{e}_4,$$
$$\vec{q}_3=\varphi(\vec{e}_1)+\varphi(\vec{e}_3)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4,$$
$$\vec{q}_4=\varphi(\vec{e}_4)=\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3+0\cdot\vec{e}_4\cdot$$

Демак, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисдан $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4$ векторларга ўтиш матрицаси C ушбу кўринишга эга:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Унинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\det C=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2 \neq 0.$$

Шу сабабли $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3, \vec{q}_4$ векторлар R^n да базис ташкил қилади. Масала шартларидан ушбуларга эгамиз:

$$\varphi(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3+0\cdot\vec{e}_4,$$
$$\varphi(\vec{e}_2)=0\cdot\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+0\cdot\vec{e}_4,$$
$$\varphi(\vec{e}_3)=0\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4,$$
$$\varphi(\vec{e}_4)=\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2+0\cdot\vec{e}_3+0\cdot\vec{e}_4.$$

Буларга асосан φ операторнинг матрицаси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисга нисбатан ушбу кўринишга эга:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тегишли формулаларга кўра (тескари матрица учун) C^{-1} ни ҳам ҳисоблаб қўямиз:

$$C^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Бун

$$B=C^{-1}AC=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2. R^3 да $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базис ва ушбу

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2,\ \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3,\ \varphi(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 + \lambda\vec{e}_1,\ \lambda > 0$$

тенгликларни қаноатлантирувчи φ: $R^3 \to R^3$ чизиқли оператор берилган бўлсин. Ушбу

$$\vec{q}_1 = \varphi(\vec{e}_1),\ \vec{q}_2 = \varphi(\vec{e}_2),\ q_3 = \varphi(\vec{e}_3)$$

векторлар базис ташкил қилишини исботлаб, φ операторнинг шу базисдаги матрицасини ёзиш талаб этилган бўлсин. Масала шартига кўра

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3,$$
$$\varphi(\vec{e}_2) = 0\cdot\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3,$$
$$\varphi(\vec{e}_3) = \lambda\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

бўлгани учун $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдан $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \varphi(\vec{e}_3)$ векторларга ўтиш матрицаси ушбу кўринишга эга бўлади:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сўнгра

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^3 \neq 0,\ \lambda > 0$$

бўлгани учун $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ векторлар базис ташкил қилади, сўнгра шу C матрицанинг ўзи φ операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдаги матрицасидир. Шу сабабли φ нинг $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$B = C^{-1}A\cdot C = C = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5°. Чизиқли операторнинг хос векторлари ва хос сонлари. Келгусида керак бўладиган инвариант қисм фазоси тушунчасини киритайлик.

8.4-таъриф. *φ акслантириш R^n фазодаги чизиқли оператор бўлсин. Агар $\varphi(P) = P$ бўлса, $P \subseteq R^n$*) қисм фазо инвариант қисм фазо дейилади.*

---

* Агар M тўпламнинг барча элементлари бир вақтнинг ўзида N нинг ҳам элементлари бўлса, у ҳолда M тўплам N тўпламнинг қисми дейилади ва $M \subseteq N$ каби белгиланади.

8.5-таъриф. *$\varphi(\vec{x})=\lambda\vec{x}$ муносабатни қаноатлантирувчи $\vec{x}\neq\vec{0}$ вектор операторнинг хос вектори, мос λ сон эса хос қиймати ёки φ чизиқли операторнинг характеристик сони дейилади.*

Шундай қилиб, агар $\vec{x}$ хос вектор бўлса, у ҳолда $\lambda\vec{x}$ кўринишдаги векторлар бир ўлчовли инвариант қисм фазо ҳосил қилади.

8.8-теорема. *φ оператор R^n даги чизиқли оператор ва λ_0 сон операторнинг хос қиймати, $\vec{x}$ эса λ_0 сонга мос келадиган хос вектори бўлсин. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, R^n да ихтиёрий базис, $A=[a_{ij}]$ $(i,j=\overline{1,n})$ матрица эса φ операторнинг шу базисдаги матрицаси бўлсин. У ҳолда λ_0 сон ушбу*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (8.36)$$

тенгламанинг илдизи бўлади,

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\dots+\alpha_n\vec{e}_n \qquad (8.37)$$

хос векторнинг компонентлари эса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда бир жинсли

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=0, \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0 \end{array}\right| \qquad (8,38)$$

системанинг ечимлари бўлади.

Исбот. $\varphi(\vec{x})$ векторнинг $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ компонентлари $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда ушбу кўринишга эга:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n, \\ \beta_2=a_{21}a_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_n=a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+a_{nn}\alpha_n. \end{array}\right|$$

$\vec{x}$ вектор φ операторнинг λ_0 хос қийматига мос хос вектори бўлгани учун ушбуга эгамиз:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = \lambda_0\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = \lambda_0\alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = \lambda_0\alpha_n \end{array}\right|$$

ёки
$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_0)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_0)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)\alpha_n = 0. \end{array}\right| \qquad (8.39)$$

Ушбу $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ нолмас вектор (8.39) системанинг ечими бўлиши учун бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши керак.

Демак, λ_0 (8.36) тенгламанинг илдизи бўлади. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ хос векторнинг компонентлари эса (8.39) бир жинсли системанинг ечими, теорема исботланди.

Агар (8.36) нинг чап қисмида турган детерминантни бирор сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиб, натижада ҳосил бўлган алгебраик ифодани λ нинг даражалари бўйича ёзилса, n-тартибли кўпҳадга эга бўламиз. Уни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + q_2 \lambda^{n-2} + \ldots + q_n. \qquad (8.40)$$

(8.40) кўпҳадни A *матрицанинг характеристик полиноми* дейилади, (8.36) тенгламани эса шу *матрицанинг характеристик тенгламаси* дейилади.

6°. Хос векторлари базис ташкил қиладиган чизиқли операторлар. R^n фазодаги энг содда чизиқли операторлар шундай операторларки, улар n та чизиқли эркли векторга эга.

Ҳақиқатан, $\varphi: R^n \to R^n$ оператор чизиқли эркли $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларга эга бўлган оператор бўлсин. Шу векторларни базис учун қабул қиламиз. У ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\vec{e}_1) &= \lambda_1 \vec{e}_1, \\ \varphi(\vec{e}_2) &= \lambda_2 \vec{e}_2, \\ &\ldots\ldots \\ \varphi(\vec{e}_n) &= \lambda_n \vec{e}_n, \end{aligned}\right\}$$

бунда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ сонлар φ операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ хос векторларига мос келган хос қийматлари.

Бундан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ хос векторлар ташкил қилган базисда φ операторнинг матрицаси ушбу энг содда, диагонал кўринишга эга бўлади:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad (8.41)$$

Аксинча, агар бирор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисда φ операторга (8.41) матрица мос келса, у ҳолда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар φ нинг хос векторлари, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ эса операторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторларига мос келадиган хос қийматларидир.

Ҳақиқатан, A матрицанинг хоссасидан унинг устунлари $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \ldots, \varphi(\vec{e}_n)$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги компонентларидан иборатлиги келиб чиқади. Шу сабабли

$$\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2, \quad \ldots, \quad \varphi(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{e}_n.$$

Шунинг ўзи айтилган тасдиқни исботлайди.

8.9-теорема. *Агар R^n да φ чизиқли операторнинг хос қийматлари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ $(s \leqslant n)$ P майдонга тегишли жуфт-жуфти билан ҳар хил сонлар бўлса, бу хос қийматларга мос келувчи $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_s$ хос векторлар чизиқли эркли бўлади. Хусусан, агар $s = n$ бўлса, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ хос векторлар R^n да базис ташкил қилади.*

Исбот. Исботни индукция методи билан олиб борилади. $s = 1$ да тасдиқнинг тўғрилиги равшан. Тасдиқ $s - 1$ та вектор учун ўринли деб фараз қиламиз ва уни s та вектор учун исботлаймиз. Агар s та вектор учун тасдиқ тўғримас деб фараз қилинса, у ҳолда P майдонда ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаган ва

$$\gamma_1\vec{e}_1+\gamma_2\vec{e}_2+\ \ldots\ +\gamma_s\vec{e}_s=0 \qquad (8.42)$$

муносабатни қаноатлантирувчи

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_s$$

сонлар топилади. Аниқлик учун $\gamma_1\neq 0$ деб фараз қилайлик. (8.42) тенгликка φ операторни қўлланиб, қуйидагини топамиз:

$$\varphi(\gamma_1\vec{e}_1+\gamma_2\vec{e}_2+\ \ldots\ +\ \gamma_s\vec{e}_s)=\varphi(0)=0,$$

аммо

$$\varphi(\gamma_1\vec{e}_1+\gamma_2\vec{e}_2+\ \ldots\ +\gamma_s\vec{e}_s)=\gamma_1\lambda_1\vec{e}_1+\gamma_2\lambda_2\vec{e}_2+\ \ldots$$
$$+\ \gamma_s\lambda_s\vec{e}_s$$

ва шунинг учун

$$\gamma_1\lambda_1\vec{e}_1+\gamma_2\lambda_2\vec{e}_2+\ \ldots\ +\gamma_s\lambda_s\vec{e}_s=0.$$

Агар охирги тенгликдан (8.42) тенгликни λ_s га кўпайтириб айирилса, ушбуга эга бўламиз:

$$\gamma_1(\lambda_1-\lambda_s)\vec{e}_1+\gamma_2(\lambda_2-\lambda_s)\vec{e}_2+\ \ldots\ +$$
$$+\gamma_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)\vec{e}_{s-1}=0,$$

фаразга кўра $\gamma_1\neq 0$ ва $\lambda_1-\lambda_s\neq 0$ бўлгани учун

$\gamma_1(\lambda_1-\lambda_s)\neq 0$, лекин $s-1$ та $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ \ldots, \ \vec{e}_{s-1}$

векторлар чизиқли эркли эди. Биз бунга зид натижага келдик. Демак, индукция s учун ҳам тўғри эканини исбот этдик. Теорема тўла исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Шундай $\varphi: R^3\to R^3$ чизиқли оператор берилганки, берилган тайин $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базис учун φ нинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

φ операторнинг хос сонлари, хос векторларини ва (агар мумкин бўлса) φ операторнинг матрицаси диагонал кўринишни оладиган базисни топиш керак.

Ечиш. φ операторнинг характеристик кўпҳади ушбу кўринишга эга:

$$\det\,[A-\lambda E]=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & -1\\ -3 & 5-\lambda & -1\\ -3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\,(\lambda-2)^2.$$

Бундан φ операторнинг характеристик сонлари $\lambda=1$, $\lambda_2=\lambda_3=2$ бўлади. $\lambda_1=1$ сонга тўғри келадиган $\vec{q}_1=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ хос вектор ушбу системанинг ечими сифатида топилади:

$$\left.\begin{aligned} -x_1+3x_2-x_3&=x_1,\\ -3x_1+5x_2-x_3&=x_2,\\ -3x_1+3x_2+x_3&=x_3.\end{aligned}\right\}$$

$\vec{q}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$ вектор $\lambda_1=1$ сонга тўғри келадиган хос вектор эканини текшириш осон. $\lambda_2=\lambda_3=2$ характеристик сонларга тўғри келадиган $\vec{q}_2$ ва $\vec{q}_3$ хос векторларни топиш системаси ушбу кўринишга эга:

$$\left.\begin{aligned} -x_1+3x_2-x_3&=2x_1,\\ -3x_1-5x_2-x_3&=2x_2,\\ -3x_1+3x_2+x_3&=2x_3.\end{aligned}\right\}$$

Бевосита текшириш йўли билан $\vec{q}_2=\vec{e}_1$, $\vec{q}_3=\vec{e}_1-3\vec{e}_2$ векторлар φ операторнинг $\lambda_2=\lambda_3=2$ сонларга мос хос векторлари эканига ишонч ҳосил қиламиз. $\vec{q}_3$ векторлар чизиқли эркли эканини кўриш осон:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Шу сабабли $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, $\vec{q}_3$ векторлар базис ташкил қилади. $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, $\vec{q}_3$, лар φ операторнинг хос векторлари бўлгани учун

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\vec{q}_1)&=\vec{q}_1+0\cdot\vec{q}_2+0\cdot\vec{q}_3,\\ \varphi(\vec{q}_2)&=0\cdot\vec{q}_1+2\cdot\vec{q}_2+0\cdot\vec{q}_3,\\ \varphi(\vec{q}_3)&=0\cdot\vec{q}_1+0\cdot\vec{q}_2+2\vec{q}_3.\end{aligned}\right|$$

Шу сабабли φ операторнинг $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$, $\vec{q}_3$ базисдаги матрицаси бундай:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

2. $\varphi: R^2\to R^2$ оператор $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базис векторларини $\varphi(\vec{e}_1)=\vec{e}_1+i\vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2)=e_2\vec{e}_2+i\vec{e}_1$ векторга ўтказувчи оператор бўлсин. φ операторнинг матрицаси диагонал кўринишида бўладиган базисни топиш талаб қилинади.

Ечиш. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базисда φ нинг матрицаси ушбу кўринишда бўлади:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}.$$

Шунинг учун A операторнинг характеристик полиноми бундай:

$$\det|(A-\lambda E)|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & i\\ i & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-i^2=\lambda^2-2\lambda+2.$$

Ушбу $\lambda_1=1-i$ ва $\lambda_2=1+i$ сонлар φ операторнинг характеристик сонлари бўлади. λ_1 ва λ_2 хос сонларга тўғри келадиган мос $\vec{q}_1=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$ ва $\vec{q}_2=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2$ хос векторлар қуйидаги тенгламалар системасидан топилади:

$$x_1 + i\,x_2 = (1 - i)\,x_1 \text{ ва } x_1 + ix_2 = (1 + i)\,x_1,$$
$$ix_1 + x_2 = (1 - i)\,x_2 \text{ ва } ix_1 + x_2 = (1 + i)\,x_2.$$

Бундан $\vec{q}_1$ ва $\vec{q}_2$ векторлар сифатида $\vec{q}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ва $\vec{q}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ чизиқли эркли векторларни олиш мумкинлиги келиб чиқади, $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ базисда φ векторнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - i & 0 \\ 0 & 1 + i \end{bmatrix},$$

чунки

$$\varphi(\vec{q}_1) = (1 - i)\ \vec{q}_1,\ \varphi(\vec{q}_2) = (1 + i)\,\vec{q}_2.$$

8- бобга доир машқлар

1. R^4 фазода қуйидаги векторлар базис ташкил қилишини исботланг:

$$\begin{aligned} &a)\quad \vec{e}_1 = \{1,\ 1,\ 1,\ 0\}, &&\vec{e}_3 = \{1,\ 1,\ 2,\ 1\}, \\ &\qquad\ \vec{e}_2 = \{1,\ 2,\ 1,\ 1\}, &&\vec{e}_4 = \{1,\ 3,\ 2,\ 5\}, \\ &б)\quad \vec{e}_1 = \{2,\ 3,\ 4,\ -3\}, &&\vec{e}_3 = \{1,\ 0,\ 0,\ 0\}, \\ &\qquad\ \vec{e}_2 = \{5,\ 4,\ 9,\ -2\}, &&\vec{e}_4 = \{3,\ 5,\ 5,\ 3\}. \end{aligned}$$

2. $f : R^4 \to R^5$ акслантириш $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ векторларни

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= \{1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\}, \\ f(\vec{e}_2) &= \{0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0\}, \\ f(\vec{e}_3) &= \{0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\}, \\ f(\vec{e}_4) &= \{0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1\} \end{aligned}$$

векторларга ўтказувчи чизиқли акслантириш бўлсин. Шу акслантиришнинг матрицасини ва унинг координаталар бўйича тасвирини (ифодасини) ёзинг.

3. $f : R^4 \to R^4$ алмаштириш $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ векторларни

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) &= \{0,\ \ 0,\ 1,\ -1\}, \\ f(\vec{e}_1) - \vec{e}_2) &= \{0,\ \ 0,\ 1,\ \ 2\}, \\ f(\vec{e}_3) &= \{1,\ \ 2,\ 0,\ \ 0\}, \\ f(\vec{e}_4) &= \{0,\ -3,\ 2,\ \ 0\} \end{aligned}$$

векторларга ўтказувчи чизиқли акслантириш бўлсин. Шу акслантиришнинг матрицаси ва унинг координаталар орқали тасвирини ёзинг.

4. $f : R^5 \to R^3$ акслантириш қуйидаги

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5, \\ \alpha_2 &= 2x_1 + x_2 + 3\,x_3 - x_4 + 2\,x_5, \\ \alpha_3 &= -\,x_1 + x_2 - x_3 + 4\,x_4 - 6\,x_5 \end{aligned}$$

координаталар орқали тасвирланган чизиқли акслантириш бўлсин. $f(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$, $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_4 - 2\vec{e}_5)$ векторларни топинг.

5. $f: R^1 \to R^4$ чизиқли акслантиришнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисдаги матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$f: R^4 \to R^4$ нинг қуйидаги базислардаги матрицаларини топинг:

а) $\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, 3\vec{e}_3, \vec{e}_3 + \vec{e}_4$;

б) $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$.

6. Ушбу $\varphi: R^2 \to R^2$ оператор $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базис векторларни

$$\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + i\,\vec{e}_2, \quad \varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 + i\,\vec{e}_1$$

векторларга ўтказувчи оператор бўлсин. $\varphi: R^2 \to R^2$ операторнинг матрицаси диагонал кўринишда бўладиган базисни топинг.

Жавоб: $\vec{q}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$,
$\vec{q}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

$\vec{q}_1, \vec{q}_2$ базисда φ операторнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$B = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}.$$

7. $\varphi: R^2 \to R^2$ оператор $\vec{q}_1 = \{1, 2\}$, $\vec{q}_2 = \{2, 3\}$ базисдаги чизиқли оператор бўлиб, унинг матрицаси

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

дан иборат бўлсин, $\vec{e}_1 = \{3, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{4, 2\}$ базисдаги $\varphi_1: R^2 \to R^2$ чизиқли оператор эса

$$B_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица билан берилади. $A_{\varphi + \varphi_1}$, $A_{\varphi - \varphi_1}$, $A_{\varphi \cdot \varphi_1}$ матрицаларни аниқланг.

8. Тайинланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда қуйидаги матрицалар ёрдамида берилган чизиқли операторларнинг хос векторларини топинг:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, б) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

в) $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$, г) $D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

9. Агар тайинланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисда (ёки $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ базисда) чизиқли операторлар

а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

матрицалар билан берилган бўлса, шу чизиқли операторлар R^3 ва R^4 да диагонал кўринишда бўладиган базисларни топинг.

10. n-тартибли

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица учун шундай махсусмас n-тартибли B матрица топиш керакки,

$$C = B^{-1} AB$$

матрица диагонал матрица бўлсин.

11. Тайинланган базисда

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица билан берилган $\varphi : R^3 \to R^3$ чизиқли операторнинг барча инвариант қисм фазоларини топинг.

12. R^3 даги $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ базисда

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ ва } B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

матрицалар билан берилган икки чизиқли операторнинг умумий инвариант қисм фазоларини топинг.

9-БОБ. КВАДРАТИК ФОРМАЛАР

45 §. Чизиқли ва бичизиқли формалар

1°. Чизиқли формалар. 9.1- таъриф. *R^n ни R^1 га чизиқли акслантиришни чизиқли форма дейилади.*

Агар $F: R^n \to R^1$ чизиқли форма бўлса, у ҳолда F акслантиришнинг матрицаси ушбу кўринишга эга:

$$A_F = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}], \tag{9.1}$$

яъни A_F матрица $1 \times n$ ўлчовли матрицадан иборат бўлиб, уни R^n даги вектор сифатида қараш мумкин.

Ҳар қандай $\vec{x} \in R^n$ учун

$$F(\vec{x}) = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = (A_F, \vec{x}) \tag{9.2}$$

бўлгани сабабли R^n даги ҳар қандай F чизиқли форма скаляр кўпайтмадан иборат бўлиб, бунда векторлардан бири A_F тайинланган, иккинчиси $\vec{x}$ эса ўзгарувчидир. Бунда $a_{1k} = F(\vec{e}_k)$, $k = \overline{1,n}$ ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ - базис.

Чизиқли формаларни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисга нисбатан компонентлари орқали тасвирлашга доир қуйидаги асосий теоремани исботсиз келтирамиз.

9.1- теорема. *Ҳар қандай $F: R^n \to R^1$ чизиқли форма фазонинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда берилган векторлари орқали бир қийматли аниқланади. Агар $a_1 = F(\vec{e}_1), a_2 = F(\vec{e}_2), \dots, a_n = F(\vec{e}_n)$ сонлар олдиндан берилган бўлса, у ҳолда ҳар қандай*

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$$

учун F чизиқли форманинг қиймати

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$$

формула бўйича аниқланади.

(9.3) *муносабат* F *форманинг* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *базисдаги тасвири дейилади.*

Аксинча $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *базис ва* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *ҳақиқий сонлар системаси берилган бўлса,* (9.3) *формула шундай* $F : R^n \to R^1$ *чизиқли формани аниқлайдики,* (9.3) *бу форманинг* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *базисдаги тасвири бўлади.*

2°. **Поличизиқли формалар.** R^n фазо m та векторининг мумкин бўлган барча тартибланган тўпламида берилган $F(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ функция, агар F бир аргумент бўйича бошқа аргументлар ўзгармас бўлган ҳолда чизиқли форма бўлса, у ҳолда *m-чизиқли форма* дейилади. Бу таърифни қисқача бундай ифодалаймиз: агар

$$F : \underbrace{R^n \times R^n \times \ldots \times R^n}_{m \text{ марта}} \to R^1$$

ҳар бир кўпайтувчиси бўйича чизиқли форма бўлса, у m-чизиқли формадир. Агар $R^n \times R^n \times \ldots \times R^n$ да кўпайтувчилар сони кўрсатилмаган бўлса, у ҳолда форма тўғридан-тўғри *поличизиқли* (кўп чизиқли) *форма* дейилади.

$$\underbrace{R^n \times R^n \times \ldots \times R^n}_{m \text{ марта}}$$

фазо билан $m \times n$ матрицаларнинг $M^{n,m}$ тўплами орасида ўрнатилган мосликка биноан m-чизиқли формани яна бундай аниқлаш мумкин.

Агар $\vec{F} : M^{n,m} \to R^1$ функция ҳар бир устуннинг, бошқа устунларнинг тайинланган қийматларида чизиқли формаси бўлса, у ҳолда бу функция *m-чизиқли форма* дейилади, яъни k- 1, 2, ..., m да ушбу муносабатлар бажарилади:

$$F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \lambda a'_{1k} + \mu a''_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \lambda a'_{2k} + \mu a''_{2k} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \lambda a'_{nk} + \mu a''_{nk} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \lambda F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a'_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a'_{2k} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a'_{nk} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\right) +$$

$$+\mu F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a''_{2k} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}\right) \tag{9.4}$$

Шуни қайд қиламизки, (9.4) муносабатларга кирган матрицаларда k-устундан бошқа устунларнинг ҳаммаси бир хилдир.

3°. **Бичизиқли формалар.** 9.2- таъриф. *Агар $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторларнинг $F(\vec{x}, \vec{y},)$ функцияси ушбу шартларга бўйсунса, яъни 1) $\vec{y}$ нинг тайинланган қийматида $F(\vec{x}, \vec{y})$ функция $\vec{x}$ нинг чизиқли функцияси бўлса, 2) $\vec{x}$ нинг тайинланган қийматида $F(\vec{x}, \vec{y})$ функция $\vec{y}$* нинг чизиқли функцияси бўлса, у ҳолда *$F(\vec{x}\vec{y})$ ни $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторларнинг бичизиқли функцияси (ёки бичизиқли формаси) дейилади. Бошқача айтганда, ихтиёрий $\vec{x}$, $\vec{y}$ ва $\vec{z}$ векторлар ва исталган λ учун қуйидаги*

а) $F(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = F(\vec{x}, \vec{z}) + F(\vec{y}, \vec{z})$;

б) $F(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda F(\vec{x},\vec{y})$;

в) $F(\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}) = F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{x}, \vec{z})$;

г) $F(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}, \vec{y})$

шартларни қаноатлантирадиган $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар функцияси $F(\vec{x}, \vec{y})$ бичизиқли функция дейилади.

n ўлчовли фазода бичизиқли формани ёзамиз:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_1\beta_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_1\beta_n + \\ + a_{21}\alpha_2\beta_1 + a_{22}\alpha_2\beta_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_2\beta_n + \ldots + \\ + a_{n1}\alpha_n\beta_1 + a_{n2}\alpha_n\beta_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n\beta_n .$$

Бунда $\vec{x} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$; $\vec{y} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$.

9.3- таъриф. *Агар ҳар қандай $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторлар учун $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{y}, \vec{x})$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бичизиқли формани симметрик бичизиқли форма дейилади.*

Масалан, E_R^n Евклид фазосида $(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр кўпайтма симметрик бичизиқли формага мисол бўла олади. Ушбу

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} \alpha_i \beta_k \qquad (9.5)$$

бичизиқли формадаги a_{ik} элементлардан (коэффициентлардан) $A = [a_{ik}]$ матрицани тузиш мумкин. Бу матрица (9.5) бичизиқли формани тўла аниқлайди. Қуйидаги теоремани келтирамиз.

9.2- теорема. *Ҳар қандай (9.5) бичизиқли форма ўзининг $A = [a_{ik}]$ матрицаси билан тўла аниқланади, бунда*

$a_{ik} = F(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ ва шу бичизиқли форма $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисдаги векторларнинг компонентлари орқали ушбу формула билан ифодаланади:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \alpha_i \beta_k .$$

Аксинча, агар $A = [a_{ik}]$ ихтиёрий n-тартибли матрица бўлса, (9.5) кўринишдаги функция бичизиқли формани аниқлайди.

Масалан, уч ўлчовли R^3 фазода $F(\vec{x}, \vec{y})$ бичизиқли форма

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2 + 3\alpha_3 \beta_3$$

шаклда ёзилсин. Энди R^3 да базис сифатида учта вектор оламиз:

$$\vec{e}_1 = \{1, 1, 1\}, \ \vec{e}_2 = \{1, 1, -1\}, \ \vec{e}_3 = \{1, -1, -1\}.$$

$F(\vec{x}, \vec{y})$ чизиқли форманинг бу базисдаги $[a_{ik}]$ матрицасини топамиз. Ушбу $a_{ik} = F(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$ $(\lambda, k = 1, 2, 3)$ тенгликларга асосан:

$a_{11} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 6,$
$a_{12} = a_{21} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 0,$
$a_{22} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6,$
$a_{13} = a_{31} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = -4,$
$a_{23} = a_{32} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2,$
$a_{33} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 6.$
Демак,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Шундай қилиб, агар α_1', α_2', α_3' ва β_1', β_2', β_3' орқали $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ векторларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдаги координаталарини белгиласак, у ҳолда

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = 6\alpha_1'\beta_1' - 4\alpha_1'\beta_3' + 6\alpha_2'\beta_2' + 2\alpha_2'\beta_3' - \\ - 4\alpha_3'\beta_1' + 2\alpha_3'\beta_2' + 6\alpha_3'\beta_3'$$

бичизиқли форма бўлади.

46- §. Квадратик формалар

9.4- таъриф. *$F : R^n \times R^n \to R^1$ симметрик бичизиқли форма бўлсин. $\vec{y} = \vec{x}$ деб фараз қилинганда $F(\vec{x}, \vec{y})$ формадан ҳосил бўладиган $F(\vec{x}, \vec{x})$ ёки $\varphi : R^n \to R^1$ функция квадратик форма дейилади.*

n ўлчовли фазода квадратик формани умумий кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\alpha_k, \tag{9.6}$$

бунда $a_{ik} = a_{ki}$ ва $A = [a_{ik}]$ — n-тартибли симметрик матрицадир.

Уч ўлчовли фазода иккинчи тартибли сиртлар ушбу кўринишдаги тенгламалар билан берилади:

$$\sum_{i,\,k=1}^{3} a_{ik}x_i x_k + \sum_{k=1}^{3} b_k x_k + D = 0. \tag{9.7}$$

Бу тенгламада биринчи сумма ишораси билан ёзилган ифода квадратик формадир. Иккинчи сумма ишораси билан чизиқли форма ёзилган, ниҳоят D — озод ҳад. Бу тушунчалардан фойдаланиб n ўлчовли R^n фазода сирт тенгламасига таъриф беришимиз мумкин.

R^n фазода координаталари

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\alpha_i\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\alpha_k + D = 0 \tag{9.8}$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами *иккинчи тартибли гиперсирт* дейилади.

Масалан, ушбу $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = 1$ тенглама билар берилган сиртни n ўлчовли фазода сфера дейилади.

1°. Бичизиқли ва квадратик формалар орасидаги мослик. Ушбу

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik}\alpha_i\beta_k$$

бичизиқли форма берилган бўлсин ва унинг ўнг томонида ўхшаш ҳадлар бўлмасин. Бичизиқли формадан квадратик формага ўтишда ўхшаш ҳадлар мавжуд. Масалан, чизиқли формада ушбу $a_{ik}\alpha_i\beta_k + a_{ki}\alpha_k\beta_i$ кўринишдаги йиғинди бор. Бунда $\alpha = \beta$ дейилса, бу йиғиндига ушбу

$$a_{ik}\alpha_i\alpha_k + a_{ki}\alpha_k\alpha_i = (a_{ik} + a_{ki})\,\alpha_i\alpha_k$$

йигинди мос келади.

Агар $F(\vec{x}, \vec{y})$ симметрик бичизиқли форма бўлса, у ҳолда шу форма учун

$$F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = F(\vec{x}, \vec{x}) + F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x}) + F(\vec{y}, \vec{y}) \qquad (9.9)$$

муносабат ўринли ва $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(\vec{y}, \vec{x})$ ёки

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\,[F(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) - F(\vec{x}, \vec{x}) - F(\vec{y}, \vec{y}].$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида квадратик форманинг $\vec{x} + \vec{y}$, $\vec{x}, \vec{y}$ векторлардаги қийматлари турибди. Шундай қилиб, $F(\vec{x}, \vec{y})$ бичизиқли форманинг қиймати ихтиёрий жуфт $(\vec{x}, \vec{y})$ векторлар учун унга мос бўлган квадратик форманинг $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ векторлардаги қийматлари орқали бир қийматли аниқланади. Иккинчи томондан, агар $F(\vec{x}, \vec{y})$ ихтиёрий бичизиқли форма бўлса, у ҳолда

$$F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left[F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x})\right]$$

форма симметрик бичизиқли форма бўлади ва $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ бичизиқли формага $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ квадратик форма мос келади.

Бу эса квадратик формаларни ўрганишда фақат симметрик бичизиқли формалардан фойдаланиш билан чегараланиш етарли эканини билдиради.

Масалан, берилган бичизиқли

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1\beta_2 - 5\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2$$

форма учун $F(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик формага мос келувчи симметрик бичизиқли формани топайлик.

Берилгандан фойдаланиб, $F(\vec{x}, \vec{y})$ ва $F(\vec{y}, \vec{x})$ ифодаларни аниқлаймиз:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1\beta_2 - 5\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2,$$
$$F(\vec{y}, \vec{x}) = \beta_1\alpha_1 - 3\beta_1\alpha_2 - 5\beta_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2.$$

Бу ифоданинг ярим йиғиндиси:

$$F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left[F(\vec{x}, \vec{y}) + F(\vec{y}, \vec{x})\right] = \alpha_1\beta_1 - 4\alpha_1\beta_2 - 4\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$$

Берилган $F(\vec{x}, \vec{y})$ ва топилган $F_1(\vec{x}, \vec{y})$ формалар битта квадратик формага мос келади. Бу симметрик бичизиқли форма матрицаси қуйидагича ёзилади:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Бу матрица $F_1(\vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форманинг ҳам матрицасидир.

2°. Квадратик формани каноник кўринишга келтириш.

9.5-таъриф. *Агар шундай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисни кўрсатиш мумкин бўлсаки, ҳар қандай $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$ квадратик форма шу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базисда ушбу*

$$F(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \dots + \lambda_n\alpha_n^2 \tag{9.10}$$

кўринишга эга бўлса, R^n да квадратик форма каноник кўринишга келтирилган дейилади.

Квадратик формани Евклид фазосида каноник кўринишга келтириш ҳақидаги баъзи-бир мулоҳазаларни эслатиб ўтайлик. Аввал Евклид фазоси тушунчасини келтирамиз: бирор скаляр кўпайтма аниқланган n ўлчовли чизиқли ҳақиқий фазо *n ўлчовли ҳақиқий Евклид фазоси* дейилади ва E_R^n билан белгиланади.

1) $F(\vec{x}, \vec{x})$ *форма n ўлчовли E_R^n Евклид ҳақиқий фазосидаги квадратик форма бўлсин. У ҳолда бу квадратик форма каноник кўринишга келтириладиган ортонормалланган базис мавжуд бўлади**.

---

* И. Я. Бакельман. «Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра», VI боб, 41. 2-пунктга қаранг,

Бундан қуйидаги хулосага келишимиз мумкин: R^n ҳақиқий чизиқли n ўлчовли фазо бўлсин, бундан E_R^n фазо бирор скаляр кўпайтмани тайинлаш билан ҳосил қилинган бўлсин. У вақтда E_R^n нинг истаган базиси автоматик равишда R^n нинг ҳам базиси бўлади, бичизиқли ва квадратик форма тушунчалари эса R^n ва E_R^n учун бир хилдир. Шу сабабли юқоридаги айтилган фикрга асосан E_R^n ни R^n билан алмаштириш мумкин, E_R^n даги ортонормалланган базисни эса R^n даги оддий базис билан алмаштириш мумкин.

Агар $F(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форма ихтиёрий $\vec{x}$ вектор учун мусбат бўлса, у *мусбат аниқланган квадратик форма* дейилади.

Квадратик форманинг моҳиятини очиб берадиган қуйидаги теоремани келтирайлик.

9.3-теорема. *n ўлчовли чизиқли R^n фазода иккита F_1 ва F_2 квадратик форма берилган бўлсин, шу билан бирга F_2 форма мусбат аниқланган бўлсин. У ҳолда R^n да иккала квадратик форма ҳам каноник кўринишга эга бўладиган базис мавжуд.*

Исбот. $F_2 : R^n \times R^n \to R^1$ форма R^n да F_2 квадратик формани ташкил қилувчи бичизиқли симметрик форма бўлсин. R^n да скаляр кўпайтмани

$$(\vec{x}, \vec{y}) = F_2\ (\vec{x}, \vec{y})$$

формула билан тайинлаймиз ва шу йўл билан n ўлчовли Евклид ҳақиқий фазоси E_R^n га эга бўламиз. E_R^n да ортонормалланган $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис мавжуд, бу базисда F_1 формула каноник кўринишга келтирилган:

$$F_1\ (\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n^2.$$

Ортонормалланган базисда скаляр кўпайтма қуйидаги

$$F_2\ (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

кўринишга эга бўлганлиги учун шу $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базиснинг ўзида иккинчи форма каноник кўринишга эга бўлади. Агар F_1 ва F_2 квадратик формаларни R^n даги формалар деб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базисни эса R^n даги базис деб қаралса, исботланган тасдиқдан теореманинг ўринли экани келиб чиқади.

Масалан, R^3 да $F: R^3 \times R^3 \to R^1$ бичизиқли симметрик форма $\vec{e_1} = \{1, 0, 0\}$, $\vec{e_2} = \{0, 1, 0\}$, $\vec{e_3} = \{0, 0, 1\}$ базисда

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица билан берилган бўлсин. F бичизиқли форма вужудга келтирадиган F_φ квадратик формани каноник кўринишга келтириш талаб қилинади.

Ечиш. Аввало шуни қайд қиламизки, агар $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ва $\vec{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ векторлар R^3 даги иккита ихтиёрий вектор бўлса, у ҳолда F ва F_φ формалар $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базисга нисбатан ушбу кўринишга эга бўлади:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{4}{\sqrt{3}} x_1y_2 - x_1y_3 + \frac{4}{\sqrt{3}} x_2y_1 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_2;$$

$$F_\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{8}{\sqrt{3}} x_1x_2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Биз $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$ да ушбу $F(\vec{x}, \vec{y}) = (F_\varphi(\vec{x}), \vec{y})$ тенгликни қаноатлантирувчи $F_\psi: R^3 \to R^3$ чизиқли операторларга эгамиз $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базисда F_ψ бундай тасвирланади:

$$F_\psi: \left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{4}{\sqrt{3}} x_2 - x_3, \\ x_2' &= \frac{4}{\sqrt{3}} x_1 + 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + 2x_2. \end{aligned} \right|$$

Шунинг учун F_ψ операторнинг характеристик полиноми қуйидаги кўринишга эга:

$$\det |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{4}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & -\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Бундан F_ψ нинг характеристик сонлари

$$3\lambda^3 - 25\lambda^2 + 16\sqrt{3} = 0$$

тенгламанинг илдизлари экани келиб чиқади. Характеристик сонларни топиш учун бу тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$3\lambda^3 - 25\lambda^2 + 16\sqrt{3} = (\lambda - \sqrt{3})\ (3\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{3} - 16) = 0.$$

Ундан топамиз:

$$\lambda_1 = \sqrt{3};\ \lambda_2 = \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6};\ \lambda_3 = \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}.$$

Энди $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ хос векторларни қуйидаги чизиқли тенгламалар системасидан топамиз:

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_i x_1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\ x_2 - x_3 &= 0, \\ \frac{4}{\sqrt{3}}\ x_1 - \lambda_i x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 - \lambda_i x_3 &= 0, \end{aligned}\right|$$

бунда $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $i = 1,\ 2,\ 3.$

Биз $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ компонентларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисдаги сон қийматларини топишни ўқувчиларга ҳавола қиламиз.

Энди $\vec{x}, \vec{y}$ лар R^3 га тегишли ихтиёрий векторлар ва

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{q}_1 + \alpha_2\vec{q}_2 + \alpha_3\vec{q}_3,\quad \vec{y} = \beta_1\vec{q}_1 + \beta_2\vec{q}_2 + \beta_3\vec{q}_3$$

уларнинг $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ базис бўйича ёйилмалари бўлсин. У ҳолда берилган таърифга ва исботсиз берилган теоремага асосан:

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{3}\alpha_1\beta_1 + \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6}\ \alpha_2\beta_2 + \\ + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}\ \alpha_3\beta_3,$$

$$F_\psi(\vec{x}, \vec{x}) = \sqrt{3}\alpha_1^2 + \frac{-3\sqrt{3} + \sqrt{219}}{6}\ \alpha_2^2 + \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{219}}{6}\alpha_3^2.$$

47-§. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш

Координаталари Декарт координаталар системасида ушбу

$$F(x,\ y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0 \tag{9.11}$$

тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўплами *текисликдаги иккинчи тартибли чизиқ* деб аталади. Буни биз аввалги боблардан биламиз. (9.11) тенгламанинг чап томонидаги

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{9.12}$$

йиғинди *юқори ҳадлар группаси* ёки *квадратик форма* дейилади, қолган йиғинди чизиқли форма ва озод сонлардан иборат.

Эгри чизиқнинг формасини (типини) унинг (9.11) тенгламаси бўйича дарҳол аниқлаш қийин. Аммо унинг тенгламасини имкон борича соддалаштириш (каноник кўринишга келтириш) мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун координаталар системасини ўзгартириш (координаталар бошини кўчириш ва ўқларни буриш) керак бўлади. Ҳозир биз шу иш билан шуғулланамиз.

Бирор M нуқта берилган бўлиб, унинг янги ва эски координаталар системасидаги координаталари орасида ушбу

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

муносабат мавжуд бўлсин. x ва y нинг бу қийматларини (9.11) тенгламага қўямиз:

$$F(x, y) = a_{11}(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)^2 + 2a_{12}(x' \cos\varphi -$$
$$- y' \sin\varphi)(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + a_{22}(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 +$$
$$+ 2a_1(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi) + 2a_2(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) + a_0 =$$
$$= a_{11}(x'^2 \cos^2\varphi - 2x'y' \cos\varphi \sin\varphi + y'^2 \sin^2\varphi) + 2a_{12}(x'^2 \cos\varphi \times$$
$$\times \sin\varphi + x'y' \cos^2\varphi - x'y' \sin^2\varphi - y'^2 \sin\varphi \cos\varphi) +$$
$$+ a_{22}(x'^2 \sin^2\varphi + 2x'y' \sin\varphi \cos\varphi + y'^2 \cos^2\varphi) +$$
$$+ 2a_1 x' \cos\varphi - 2a_1 y' \sin\varphi + 2a_2 x' \sin\varphi + 2a_2 y' \cos\varphi + a_0 =$$
$$= (a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi \sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)\, x'^2 + (a_{11}\sin^2\varphi -$$
$$- 2a_{12}\cos\varphi \sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi)\, y'^2 + 2\,(a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi)\, x' +$$
$$+ 2\,(-a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi)\, y' + a_0 = 0.$$

Бунда қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\left|\begin{array}{l} a'_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi \sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \\ a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi \sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi \sin\varphi, \\ a'_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{21}\cos\varphi \sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi, \\ a'_1 = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi, \\ a'_2 = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi. \end{array}\right. \qquad (9.13)$$

Буларни эътиборга олсак, (9.11) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y) = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_1 x' + 2a_2 y' + a_0 = 0.$$

Бунда $a'_{12} = 0$ бўлсин деб фараз этилган. Бундай бўлиши учун ушбу тригонометрик тенглама ечимга эга бўлиши керак:

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

ёки

$$-a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}\cos^2\varphi - a_{12}\sin^2\varphi + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

ёки

$$-(a_{11}\sin\varphi - a_{12}\cos\varphi)\cos\varphi - (a_{12}\sin\varphi - a_{22}\cos\varphi)\sin\varphi = 0.$$

Уни

$$\begin{vmatrix} a_{11}\sin\varphi - a_{12}\cos\varphi & a_{12}\sin\varphi - a_{22}\cos\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда ёзса ҳам бўлади. Юқоридаги детерминант нолга тенглигидан унинг сатрлари чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади, яъни шундай $\lambda \neq 0$ мавжудки, биз ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} a_{11}\sin\varphi - a_{12}\cos\varphi &= \lambda\sin\varphi, \\ -a_{12}\sin\varphi + a_{22}\cos\varphi &= \lambda\cos\varphi \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\sin\varphi - a_{12}\cos\varphi = 0, \\ -a_{12}\sin\varphi + (a_{22} - \lambda)\cos\varphi = 0. \end{cases}$$

Унда $\sin\varphi$ ва $\cos\varphi$ бир вақтда нолга тенг бўлмагани учун система детерминанти нолга тенг бўлади, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \qquad (9.14)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу (9.14) ни (9.11) тенгламага *мос характеристик тенглама* дейилади. (9.14) дан λ ни, сўнгра юқоридаги системадан φ ни топилади. Демак, $a'_{12} = 0$ бўлиши учун (9.14) квадрат тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлиши керак.

Энди $a'_{12} = 0$ деб φ бурчакни аниқлаймиз. Бунинг учун

$$a'_{12} = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$= a_{12}\cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi = 0.$$

Шунинг учун тригонометрик тенгламани оламиз. Унда $\sin\varphi \neq 0$, $\cos\varphi \neq 0$. Шунинг учун тенгламанинг иккала томонини $\cos^2\varphi$ га бўламиз:

$$a_{12}\mathrm{tg}^2\varphi + (a_{11} - a_{22})\ \mathrm{tg}\varphi - a_{12} = 0.$$

Бундан

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},\ a_{12} \neq 0.$$

φ ни яна қулайроқ усул билан ҳам топиш мумкин, яъни

$$a'_{12} = a_{12}\cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi = 0,$$

ёки

$$a_{12}\ (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi\ \sin\varphi = 0,$$

$$a_{11}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}\ (a_{11} - a_{22})\ \sin 2\varphi = 0.$$

Бу тенгламанинг ҳар икки томонини $\sin 2\varphi \neq 0$ га бўламиз:

$$\mathrm{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},\ a_{12} \neq 0.$$

Энди $a'_{12} = 0$ ни эътиборга олиб, a'_{11} ни топиш мумкин:

$$a'_{11} = (a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)\cos\varphi + (a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi)\ \sin\varphi =$$
$$= \lambda_1\cos^2\varphi + \lambda_1\sin^2\varphi = \lambda_1\ (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \lambda_1.$$

Демак, $a'_{11} = \lambda_1$. (9.13) системадан

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22},$$
$$a'_{11}\ a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22} - a^2_{12}.$$

Равшанки,

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a_{11} + a_{22}, \\ \lambda_1\ \lambda_2 &= a_{11}a_{22} - a^2_{12}. \end{aligned}\right\}$$

Бундан $a'_{11} + a'_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$; $a'_{11} = \lambda_1$ бўлгани учун $a_{22} = \lambda_2$ бўлади.

Буни эътиборга олиб (9.11) тенгламани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0. \qquad (9.15)$$

Агар M нуқтанинг янги ва эски координаталар системаларидаги координаталари орасида

$$\left.\begin{aligned} x' &= x'' + x'_0, \\ y' &= y'' + y'_0 \end{aligned}\right\}$$

муносабатлар мавжуд бўлса, яъни координаталар ўқларининг йўналишини ўзгартирмай, координаталар бошини $O''(x'_0,\ y'_0)$ нуқтага кўчирсак,

$F''(x'', y'')=\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+2(\lambda_1 x_0'+a_1')x''+2(\lambda_2 y_0'+a_2')y''+a_0'$
тенгламага эга бўламиз, бунда

$$a_0' = \lambda_1 x_0'^2 + \lambda_2 y_0'^2 + 2a_1'x_0' + 2a_2'y_0' + a_0.$$

$F''(x'', y'')$ нинг ифодасида x'' ва y'' нинг биринчи даражалари қатнашмаслиги учун қуйидаги тенгликлар бажарилиши керак:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x_0' + a_1' = 0, \\ \lambda_2 y_0' + a_2' = 0. \end{aligned}\right\}$$

Улардан x_0', y_0' нинг ягона қийматлари топилади. Шунинг учун параллел кўчириш бизни

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0 \tag{9.16}$$

тенгламага албатта олиб келади. Энди шу тенгламани текширамиз. Бунда уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $\lambda_1\lambda_2 < 0$; 2) $\lambda_1\lambda_2 > 0$; 3) $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Бу ҳолларни алоҳида кўрамиз.

1) $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Аниқлик учун λ_2 нинг ишораси a_0' ҳаднинг ишораси билан бир хил бўлсин, у ҳолда λ_1 нинг ишораси a_0' ҳаднинг ишорасига қарама-қарши бўлади. Бу мулоҳазага асосланиб, (9.16) тенгламани қуйидагича ёза оламиз:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0, \text{ ёки } \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = -a_0'$$

ёки
$$\frac{x''^2}{-a_0'/\lambda_1} + \frac{y''^2}{-a_0'/\lambda_2} = 1.$$

Бунда $-a_0'/\lambda_1 > 0$ ҳамда $-a_0'/\lambda_2 < 0$ бўлгани учун уларни мос равишда a^2 ва $-b^2$ орқали белгилаймиз. Узил-кесил қуйидаги тенгламага эгамиз:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1.$$

Бу гиперболанинг каноник тенгламасидир.

Агар $\lambda_1\lambda_2 < 0$ бўлганда $a_0' = 0$ бўлса, у ҳолда $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = -b^2$ белгилашларни киритиб, ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$a^2x''^2 - b^2y''^2 = 0 \text{ ёки } (ax'' + by'')(ax'' - by'') = 0.$$

Бундан $ax'' + by'' = 0$, $ax'' - by'' = 0$, демак, координаталар бошида кесишувчи икки тўғри чизиққа эгамиз.

Шундай қилиб, кўрилаётган ҳолда гиперболага ёки координаталар бошидан ўтувчи бир жуфт тўғри чизиққа эга бўламиз.

2) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, бунда λ_1 ва λ_2 бир хил ишорали бўлади.

Аввал $a_0' \neq 0$ бўлсин. Агар λ_1 ва λ_2 нинг ишораси a_0' сонининг ишорасига қарама-қарши бўлса, у ҳолда $\frac{x''^2}{-a_0'/\lambda_1} + \frac{y''^2}{-a_0'/\lambda_2} = 1$ тенгламага келамиз. Унда $-a_0'/\lambda_1$ ва $-a_0'/\lambda_2$ нинг ҳар иккисининг ҳам ишораси мусбат бўлади, уларни мос равишда a^2 ва b^2 билан белгилаб, $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ эллипс тенгламасига эга бўламиз.

Агар λ_1 ва λ_2 нинг ишораси a_0' нинг ишораси билан бир хил бўлса, у ҳолда $-a_0'/\lambda_1$ ва $-a_0'/\lambda_2$ ифодалар манфий бўлиб,

$$\frac{x''^2}{-a^2} + \frac{y''^2}{-b^2} = 1$$

тенгламага (яъни a_i ва b_i мавҳум ярим ўқларга эга бўлган «мавҳум эллипс»нинг тенгламасига) эга бўламиз.

Энди $a_0' = 0$ бўлсин. Бу ҳолда тенглама

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0$$

кўринишга келади. λ_1 ва λ_2 бир хил ишорали бўлгани учун бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a^2 x''^2 + b^2 y''^2 = 0 \quad \text{ёки} \quad (ax'' + iby'') \quad (ax'' - iby) = 0,$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Бу тенглама бир жуфт кесишувчи мавҳум тўғри чизиқни ифодалайди. Ҳақиқий текисликда биргина нуқтага, яъни координаталар бошига эгамиз.

λ_1, λ_2 ва a_0' ишораларининг ўзгаришига қараб (9.16) тенглама қуйидаги эгри чизиқларни тасвирлайди:

№	λ_1	λ_2	a_0	Каноник тенглама	Эгри чизиқнинг номи
1	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс
2	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} = -1$	мавҳум эллипс
3	$\pm$	$\mp$	0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	нуқта (бир жуфт мавҳум кесишувчи чизиқлар)
4	$\pm$	$\mp$	$\neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	гипербола
5	$\pm$	$\mp$	0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	бир жуфт кесишувчи тўғри чизиқлар

3) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$. Қуйидаги $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a_2' \neq 0$ шарт бажарилган бўлсин. Бу ҳолда $R\ (0_1, \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'})$ системада берилган тенглама

$$F'\ (x',\ y') = \lambda_1 x'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0' = 0$$

кўринишни олади. Бу тенгламани y' га нисбатан ечиб,

$$y' = px'^2 + qx' + r$$

парабола тенгламасига эга бўламиз.

Юқоридаги тенгламани бошқачароқ алмаштириш ҳам мумкин. Аввал унинг чап томонини ўзгартирамиз:

$$\lambda_1 x'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0' = \lambda_1 \left(x'^2 + \frac{2a_1'x'}{\lambda_1}\right) + 2a_2'y' + a_0' =$$

$$= \lambda_1 \left(x'^2 + 2\frac{a_1'x'}{\lambda_1} + \frac{a_1'^2}{\lambda_1^2}\right) - \frac{a_1'^2}{\lambda_1^2} + 2a_2'y' + a_0' = 0.$$

Энди ушбу

$$\left.\begin{aligned} x' &= X + \left(-\frac{a_1'}{\lambda_1}\right), \\ y' &= Y + \frac{a_1'^2 - a_0'}{2a_2'} \end{aligned}\right|$$

алмаштириш ёрдамида берилган тенглама янги координата системасида OY ўқига симметрик бўлган

$$X^2 = -2\frac{a_2'}{\lambda} Y$$

парабола тенгламасига келади. Ниҳоят, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ ҳол ҳам юқоридагига ўхшаш ўрганилади.

48-§. Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш

Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади (32-§ га қаранг):

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (9.17)$$

Шу (9. 17) тенгламага қараб сиртнинг формуласини аниқлаш (айтиб бериш) қийин, албатта. Сирт тенгламасини максимал соддалаштириш (координаталар бошини кўчириш ва ўқларни буриш ёрдамида) натижасида сиртнинг формаси ҳақида аниқ хулосага кела оламиз.

1°. Маркази координаталар бошида бўлган иккинчи тартибли сирт тенгламасини каноник кўринишга келтириш.

Иккинчи тартибли сирт тенгламасини координата ўқларини буриш йўли билан шундай соддалаштирамизки, ҳосил бўлган тенгламада янги координаталар системаси бўйича координаталар кўпайтмаси иштирок этмайди.

Маркази координаталар бошида бўлган сиртнинг тенгламасида чизиқли ҳадлари ва озод ҳади иштирок этмайди. Шунинг учун унинг тенгламаси ушбу кўринишда ёзилади:

$$F\ (x,\ y,\ z) = a_{11}\, x^2 + 2a_{12}\, xy + 2a_{13}\, xz + 2a_{21}\, yz + a_{22}y^2 + a_{33}\, z^2 = 0. \tag{9. 18}$$

Унинг чап томони учта x, y, z ўзгарувчининг квадратик формасидан иборат. Уни каноник кўринишга келтириш учун x, y, z ўрнига буриш формулалари ёрдамида янги x_1, y_1, z_1 координаталар орқали ифодасини қўямиз. Буриш формулалари қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\ \cos\alpha_1 + y_1\ \cos\alpha_2 + z_1\ \cos\alpha_3,\\ y &= x_1\ \cos\beta_1 + y_1\ \cos\beta_2 + z_1\ \cos\beta_3,\\ z &= x_1\ \cos\gamma_1 + y_1\ \cos\gamma_2 + z_1\ \cos\gamma_3 \end{aligned}\right\} \tag{9. 19}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1x_1 + l_2y_1 + l_3z_1,\\ y &= m_1x_1 + m_2y_1 + m_3z_1,\\ z &= n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1, \end{aligned}\right\} \tag{9. 19'}$$

бу ерда

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Энди (9. 18) тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$F\ (x,\ y,\ z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\,x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\ y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) = 0. \tag{9. 20}$$

Энди ҳар бир қавс ичидаги ифода учун (9. 19′) формулаларга кўра қуйидагига эгамиз:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = (a_{11}l_1 + a_{12}m_1 + a_{13}n_1)\ x_1 + (a_{11}l_2 + a_{12}m_2 + a_{13}n_2)\ y_1 + (a_{11}l_3 + a_{12}m_3 + a_{13}n_3)\ z_1; \tag{9. 21}$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = (a_{21}l_1 + a_{22}m_1 + a_{23}n_1)\ x_1 + (a_{21}l_2 + a_{22}m_2 + a_{23}n_2)\ y_1 + (a_{21}l_3 + a_{22}m_3 + a_{23}n_3)\ z_1; \tag{9. 22}$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = (a_{31}l_1 + a_{32}m_1 + a_{33}n_1)\ x_1 + (a_{31}l_2 + a_{32}m_2 + a_{33}n_2)\ y_1 + (a_{31}l_3 + a_{32}m_3 + a_{35}n_2)\ z_1. \tag{9. 23}$$

Энди бу ифодаларни ва (9. 19′) ни (9. 20) гақўллансак, берилган тенглама қуйидаги тенгламага келади:

$$a_{11}{}'x_1^2 + 2a_{12}{}'x_1y_1 + a_{22}{}'y_1^2 + 2a_{13}{}'x_1z_1 + 2a_{23}{}'y_1z_1 + a_{33}{}'z_1^2 = 0. \tag{9. 24}$$

Биз a_{ij} лар учун ифодаларни ёзиб ўтирмасдан, $a_{12}'=0$, $a_{13}'=0$, $a'_{23}=0$ шартлар бажарилишини талаб қиламиз. Бу тенгликларнинг бажарилиши бизни қуйидаги системаларга олиб келади:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ l_1+a_{12}\ m_1+a_{13}\ n_1=\lambda_1\ l_1,\\ a_{21}\ l_1+a_{22}\ m_1+a_{23}\ n_1=\lambda_1\ m_1,\\ a_{31}\ l_1+a_{32}\ m_1+a_{33}\ n_1=\lambda_1\ n_1.\end{aligned}\right\}\qquad(9.\,25')$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ l_2+a_{12}\ m_2+a_{13}\ n_2=\lambda_2\ l_2,\\ a_{21}\ l_2+a_{22}\ m_2+a_{23}\ n_2=\lambda_2\ m_2,\\ a_{31}\ l_2+a_{32}\ m_2+a_{33}\ n_2=\lambda_2\ n_2.\end{aligned}\right\}\qquad(9.\,25'')$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ l_3+a_{12}\ m_3+a_{13}\ n_3=\lambda_3\ l_3,\\ a_{21}\ l_3+a_{22}\ m_3+a_{23}\ n_3=\lambda_3\ m_3,\\ a_{31}\ l_3+a_{32}\ m_3+a_{33}\ n_3=\lambda_3\ n_3.\end{aligned}\right\}\qquad(9.\,25''')$$

Юқоридаги системаларни ечиш учун қуйидаги битта

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ l+a_{12}\ m+a_{13}\ n=\lambda\ l,\\ a_{21}\ l+a_{22}\ m+a_{23}\ n=\lambda\ m,\\ a_{31}\ l+a_{32}\ m+a_{33}\ n=\lambda\ n\end{aligned}\right\}\qquad(9.\,26)$$

системани ечиш етарли. Бунинг учун (9. 26) системани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\ l+a_{12}\ m+a_{13}\ n=0,\\ a_{21}\ l+(a_{22}-\lambda)\ m+a_{23}\ n=0,\\ a_{31}\ l+a_{32}\ m+(a_{32}-\lambda)\ n=0.\end{aligned}\right\}$$

Бу система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун

$$A=\begin{bmatrix} a_{21}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{bmatrix}$$

матрицанинг ранги иккига тенг бўлиши, яъни $\det A=0$ бўлиши керак. Бу

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0\qquad(9.\,26')$$

тенглама λ га нисбатан куб тенглама бўлиб, уни *A матрицанинг характеристик тенгламаси* ёки тегишли *квадратик форманинг характеристик тенгламаси* дейилади. (9. 26′) тенгламанинг ечимларини *квадратик форманинг характеристик сонлари* ҳам дейилади. Агар (9. 26′) тенглама ечимларини λ_1, λ_2, λ_3 десак, кўрсатиш қийин эмаскн, $a_{11}'=\lambda_1$, $a'_{22}=\lambda_2$, $a_{33}'=\lambda_3$ тенгликлар ўринли бўлади.

Ҳар бир характеристик сонга мос йўналиш (9. 25) системадан топилади. Бу йўналишлар, яъни $\{ l_i , m_i, n_i \}$ $i = (1, 2, 3)$ векторлар *квадратик формага нисбатан бош йўналиш* ёки *иккинчи тартибли сиртга нисбатан бош йўналиш* дейилади.

Агар бу учта вектор бирлик вектор бўлмаса, у ҳолда уларни

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{l_i^2 + m_i^2 + n_i^2}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

сонга кўпайтириб, бирлик векторни ҳосил қилиш мумкин.

Энди бош йўналишнинг ва характеристик тенглама илдизларининг баъзи хоссаларини кўриб чиқамиз.

9. 4-теорема. *Агар* (9. 26′) *характеристик тенгламанинг иккита* λ_1, λ_2 *илдизи ҳар хил бўлса, у ҳолда бу илдизларга мос келувчи* $\{l_1, m_1, n_1\}$ *ва* $\{l_2, m_2, n_2\}$ *векторлар ортогоналдир*, яъни ушбу тенглик ўринли:

$$l_1 \ l_2 + m_1 \ m_2 + n_1 \ n_2 = 0 .$$

Исбот. (9.25′) система тенгламаларини мос равишда l_2, m_2, n_2 га кўпайтириб ва (9. 25″) система тенгламаларини мос равишда l_1, m_1, n_1 га кўпайтириб қуйидаги системаларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \ l_1 \ l_2 + a_{12} \ m_1 \ l_2 + a_{13} \ n_1 \ l_2 &= \lambda_1 \ l_1 \ l_2, \\ a_{21} \ l_1 \ m_2 + a_{22} \ m_1 \ m_2 + a_{23} \ n_1 \ m_2 &= \lambda_1 \ m_1 \ m_2, \\ a_{31} \ l_1 \ n_2 + a_{32} \ m_1 \ n_2 + a_{33} \ n_1 \ n_2 &= \lambda_1 \ n_1 \ n_2. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \ l_2 \ l_1 + a_{12} \ m_2 \ l_1 + a_{13} \ n_2 \ l_1 &= \lambda_2 \ l_2 \ l_1, \\ a_{21} \ l_2 \ m_1 + a_{22} \ m_2 \ m_1 + a_{23} \ n_2 \ m_1 &= \lambda_2 \ m_2 \ m_1, \\ a_{31} \ l_2 \ n_1 + a_{32} \ m_2 \ n_1 + a_{33} \ n_2 \ n_1 &= \lambda_2 \ n_1 \ n_2. \end{aligned}\right\}$$

Ҳар бир системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 \ (l_1 \ l_2 + m_1 \ m_2 + n_1 \ n_2), \\ A_2 &= \lambda_2 \ (l_1 \ l_2 + m_1 \ m_2 + n_1 \ n_2). \end{aligned}\right\}$$

Аммо $A_1 = A_2$ эканига бевосита ҳисоблаш ёрдамида ишонч ҳосил қилиш мумкин. Шунинг учун $(\lambda_1 - \lambda_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0$ тенгликка эгамиз. Бунда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ шартга кўра $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ келиб чиқади, шу билан теорема исбот бўлди.

9.5-теорема. (9.26′) *характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий сонлардан иборат.*

(9.26′) тенглама ё учта ҳақиқий (ҳар хил ёки каррали) илдизга, ёки албатта битта ҳақиқий ва иккита қўшма комплекс илдизларига эга бўлади. Бу элементар математикадан маълум.

Исбот. Фараз қилайлик, $\lambda_1 = a + bi$ ва $\lambda_2 = a - bi$ комплекс сонлар (9.26′) тенгламани илдизлари бўлсин, бунда $b \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$. Бунда λ_1 ечимга $\{l_2 = u_1 + vi;$ $m_1 = u_2 + v_2 i;$ $\{n_1 = u_3 + v_3 i\}$, λ_2 ечимга эга $\{l_2 = u_1 - v_1 i;$ $m_2 = u_2 - v_2 i;$ $\{n_2 = u_3 - v_3 i\}$ йўналишлар мос келсин. $b \neq 0$ шартдан $\lambda_1 = a + ib$ ва $\lambda_2 = a - ib$ илдизлар турлича.

9.5-теоремага кўра $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$. Бунда l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2 ўрнига уларнинг ифодаларини қўйсак,

$$u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + u_3^2 + v_3^2 = 0$$

тенгликка келамиз. Аммо бу тенглик фақат $u_1 = u_2 = u_3 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$ бўлгандагина ўринли бўлади. Бундан $l_1 = m_1 = n_1 = 0$ экани келиб чиқади. Бу эса $b \neq 0$ шартга зид. Демак, характеристик тенглама комплекс илдизга эга эмас.

(9.4) ва (9.5) теоремалардан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

9. 1-натижа. *Квадратик формага нисбатан бош йўналишга эга бўлган векторларнинг координаталари ҳақиқий сонлардан иборатдир.*

9.2-натижа. *Квадратик формага нисбатан ўзаро тенг бўлмаган илдизларга мос келувчи бош йўналишлар ўзаро ортогоналдир.*

Характеристик тенглама ечимида учрайдиган айрим ҳолларни кўриб чиқамиз.

1-ҳол. *Характеристик тенгламанинг ҳамма илдизлари ўзаро тенг, яъни* (9. 26′) *тенглама уч каррали илдизга эга*: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Кейинги мулоҳазаларда зарур бўлган ушбу тасдиқни кўрайлик: ҳақиқий a, b, c сонлар орасида ушбу

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc \geqslant 0$$

шарт бажарилса, бундан $a = b = c = 0$ муносабат ўринли экани келиб чиқади.

Ҳақиқатан ҳам агар $a + b + c = 0$ бўлса, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$ бўлади. $ab + ac + bc \geqslant 0$ шартга кўра охирги тенглик фақат $a = b = c = 0$ ҳолдагина ўринлидир.

Энди (9.26′) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$-\lambda^3 + s_1 \lambda^2 - s_2 \lambda + s_3 = 0. \qquad (9.27)$$

Бу тенгликда $s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$,

$$s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (9.28)$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{9.29}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (9.27) тенгламанинг илдизлари бўлгани учун Виет теоремасидан кўрилаётган $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ҳолда

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3\lambda_1, \\ s_2 &= \lambda_1 \, \lambda_2 + \lambda_1 \, \lambda_3 + \lambda_2 \, \lambda_3 = 3\lambda_1^2, \\ s_3 &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_1^3 \end{aligned}$$

тенгликларга эга бўламиз. Юқоридаги муносабатлардан

$$\left.\begin{aligned} s_1 - 3\lambda_1 = 0, \\ s_2 - 3\lambda_1^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9. 30}$$

Бунга s_1 ва s_2 учун ифодаларни қўямиз:

$$s_1 - 3\lambda_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3\lambda_1 = (a_{11} - \lambda_1) + (a_{22} - \lambda_1) + \\ + (a_{33} - \lambda_1) = 0,$$

$$s_2 - 3\lambda_1^2 = a_{11} \, a_{22} - a_{12}^2 + a_{11} \, a_{33} - a_{13}^2 + a_{22} \, a_{33} - a_{23}^2 - 3\lambda_1^2 = \\ = (a_{11} - \lambda_1) \, (a_{22} - \lambda_1) + (a_{11} - \lambda_1) \, (a_{33} - \lambda_1) + (a_{22} - \lambda_1) \times \\ \times (a_{33} - \lambda_1) - a_{12}^2 - a_{13}^2 + 2 \, (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \lambda_1 - 6 \, \lambda_1^2 = 0.$$

Аммо

$$2 \, (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \, \lambda_1 - 6 \, \lambda_2^2 = 2 \cdot 3 \, \lambda_1 \, \lambda_2 - 6 \, \lambda_1^2 = 6 \, \lambda_1^2 - \\ - 6\lambda_1^2 = 0.$$

Демак,

$$(a_{11} - \lambda_1) \, (a_{22} - \lambda_1) + (a_{11} - \lambda_1)(a_{33} - \lambda_1) + (a_{22} - \lambda_1) \, (a_{33} - \\ - \lambda_1) = a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \geqslant 0.$$

Бундан юқорида келтирилган тасдиққа кўра $a_{11} - \lambda_1 = 0$, $a_{22} - \lambda_1 = 0$, $a_{33} - \lambda_1 = 0$ ва $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ келиб чиқади. Энди $s_1 = 3\lambda_1$, $s_2 = 3\lambda_1^2$, $s_3 = \lambda_1^3$ ни (9.27) га қўйсак, характеристик тенглама қуйидаги кўринишга келади: $-\lambda^3 + 3\lambda_1 \, \lambda^2 - 3\lambda_1^2\lambda + \lambda_1^3 = 0$ ёки бу тенглама содда $-(\lambda - \lambda_1)^3 = 0$ кўринишга келади.

Юқоридаги мулоҳазалардан кўринадики, агар характеристик тенглама уч каррали λ илдизга эга бўлса, бу ҳолда квадратик форма

$$F \; (x, \; y, \; z) = \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 = \lambda \, (x^2 + y^2 + z^2)$$

кўринишга эга бўлади. Бу ҳолда иккинчи тартибли сиртга нисбатан бош йўналишни ихтиёрий иккита ўзаро перпендикуляр векторлар аниқлайди, (9.17) тенглама эса сферани тасвирлайди.

2-ҳол. *Характеристик тенглама илдизларидан иккитаси бир хил (тенг) бўлиши мумкин, яъни*

$$0 \neq \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.$$

Бу ҳолда (9.25) система битта ва фақат битта чизиқли эркли тенгламага эга бўлади. Бунга ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, Айтайлик,

$$(a_{11} - \lambda_1)\ l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \qquad (9.31)$$

тенглама (9.25) системанинг чизиқли эркли тенгламаси бўлсин, бу тенгламанинг бирорта $\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$ ечимини аниқлаймиз. Сўнгра $\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$ векторга перпендикуляр бўлган $\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$ векторни қуйидаги системадан аниқлаймиз:

$$(a_{11} - \lambda_1)\ l_2 + a_{12}\ m_2 + a_{13}\ n_2 = 0,$$
$$l_1\ l_2 + m_1\ m_2 + n_1\ n_2 = 0.$$

$\{l_3,\ m_3,\ n_3\}$ векторнинг координаталари $\lambda = \lambda_3$ бўлганда (9.25) системадан аниқланади. Лекин бу векторнинг координаталарини соддароқ йўл билан ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун (9.31) тенгламани $\{l,\ m,\ n\}$ ва $\{a_{11} - \lambda,\ a_{12},\ a_{13}\}$ векторларнинг перпендикулярлик шарти деб қараш кифоя. Бундан эса учинчи векторнинг координатаси

$$\{a_{11} - \lambda,\ a_{12},\ a_{13}\}$$

экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, агар янги координаталар системасининг йўналиши топилган векторларнинг йўналиши билан устма-уст тушса, у ҳолда янги координаталар системасига ўтилганда квадратик форма қуйидаги каноник кўринишга эга бўлади, яъни

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) + \lambda_3 z_1^2.$$

Бу ҳолда (9.17) тенглама билан ифодаланувчи иккинчи тартибли сирт айланма сиртдир.

3-ҳол. *Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳар хил:* $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ *(яъни ўзаро тенг эмас).*

Бу ҳолда (9.25) система камида иккита чизиқли эркли тенгламага эга, яъни A матрицанинг ранги 2 га тенг. Бунда характеристик тенгламанинг ҳар бир илдизига ўзаро перпендикуляр бош йўналишлар мос келади.

Демак, бу ҳолда берилган иккинчи тартибли сирт қандайдир учта ўққа эга бўлган сиртни тасвирлайди.

1-мисол. Қуйидаги иккинчи тартибли сирт тенгламасини каноник кўринишга келтиринг:

$$5x^2 + 7y^2 + 6z^2 - 4xz + 4yz - 54 = 0.$$

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Бу тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 6$. Демак, сирт тенгламаси каноник кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$3x_1^2 + 9y_1^2 + 6z_1^2 - 54 = 0$$

ёки

$$\frac{x_1^2}{18} + \frac{y_1^2}{6} + \frac{z_1^2}{9} = 1.$$

Шундай қилиб, берилган тенглама эллипсоиднинг тенгламасидан иборат бўлиб, унинг ярим ўқлари $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $c = 3$.

2-мисол. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz + 18 = 0$ иккинчи тартибли сирт тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Тенгламани ечиб, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ ва $\lambda_3 = 6$ илдизларни топамиз. Бунга асосан сиртнинг каноник тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$-3x_1^2 - 3y_1^2 + 6z_1^2 + 18 = 0 \text{ ёки } \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{6} - \frac{z_1^2}{3} = 1.$$

Демак, берилган сирт бир паллали гиперболоид экан, унинг ярим ўқлари $a = b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3}$.

2°. Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламасини каноник кўринишга келтириш. (9.17) тенгламанинг чап томони ҳадларини группалаймиз:

1) сиртнинг квадратик формаси:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz;$$

2) чизиқли формаси: $2a_{14}x + 2a_{24} + 2a_{34}z$;

3) озод ҳади: a_{44}.

Бизнинг мақсадимиз, (9.17) тенгламани каноник кўринишга келтириш ва сиртнинг кўринишини аниқлашдан иборат. Бу масалани координаталарни алмаштириш йўли билан ҳал қиламиз. Бунинг учун координата ўқларини шундай бурамизки, ўқларнинг йўналиши квадратик форманинг бош йўналишлари билан устма-уст тушсин.

Бу ҳолда квадратик форма қуйидаги каноник кўринишга келади:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz =$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2;$$

2) чизиқли форма коэффициентлари ўзгарган ҳолда худди шундай чизиқли формага ўтади:

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 2\eta_1 x_1 + 2\eta_2 y_1 + 2\eta_3 z_1$$

(μ_1, μ_2, μ_3 — коэффициентларни ҳисоблашни мисолда кўрамиз);

3) озод ҳад ўзгаришсиз қолади.

Шундай қилиб, (9.17) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 y_1 + 2\mu_3 z_1 + a_{44} = 0. \quad (9.32)$$

(9.32) тенгламани соддалаштиришнинг баъзи ҳолларини кўриб чиқамиз:

а) (9.25) характеристик тенглама илдизларининг биронтаси ҳам нолга тенг бўлмасин. Бу ҳолда (9.32) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lambda_1\left(x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(z + \frac{\mu_3}{\lambda_3}\right)^2 =$$
$$= \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3^2} - a_{44}. \quad (9.33)$$

R (0, x_1, y_1, z_1) координаталар системасини координаталар боши

$O_1\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1}, -\frac{\mu_2}{\lambda_2}, -\frac{\mu_3}{\lambda_3}\right)$ нуқтага тушадиган қилиб параллел кўчирамиз. У ҳолда (9.33) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 z_2^2 = a'_{44}. \quad (9.34)$$

Бу тенгламада x_2, y_2, z_2 янги координата системасининг ўзгарувчилари.

$$a'_{44} = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{\mu_3^2}{\lambda_3^2} - a_{44}.$$

Агар $a'_{44} \neq 0$ бўлса, (9.34) тенгламани

$$\frac{x_2^2}{\frac{a'_{44}}{\lambda_1}} + \frac{y_2^2}{\frac{a'_{44}}{\lambda_2}} + \frac{z_2^2}{\frac{a'_{44}}{\lambda_3}} = 1 \quad (9.35)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $a'_{44} = 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{x_2^2}{1/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{1/\lambda_2} + \frac{z_2^2}{1/\lambda_3} = 0 \quad (9.36)$$

тенгламага эга бўламиз. Энди (9. 34) тенглама қандай сиртни аниқлашини текшириб чиқамиз. Бунинг учун коэффициентларнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча ишораларни кўриб чиқамиз. Текшириш натижасини қуйидаги жадвалга ёзамиз.

№	λ_1	λ_2	λ_3	a'_{44}	Сиртнинг каноник тенгламаси	Сиртнинг номи
1.	±	±	±	±	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	эллипсоид
2.	±	±	±	∓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	мавҳум эллипсоид
3.	±	±	±	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	нуқта
4.	±	±	∓	±	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	бир паллали гиперболоид
5.	±	±	∓	∓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	икки паллали гиперболоид
6.	±	±	∓	0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	иккинчи тартибли конус

б) характеристик тенглама илдизларидан бири нолга тенг, яъни масалан, $\lambda_3=0$, аммо $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$, $\mu_3\neq 0$ (9.32) тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\lambda_1\left(x_1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_1+\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)^2+2\mu_3\left(z_1+\frac{a'_{44}}{\mu_3}\right)=0,$$

бунда

$$a'_{44}=a_{44}-\frac{\mu_1^2}{\lambda_1}-\frac{\mu_2^2}{\lambda_2}.$$

$R\ (O,\ x_1,\ y_1,\ z_1)$ координаталар системасини координаталар боши $O_1\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1},\ -\frac{\mu_2}{\lambda_2},\ -\frac{a'_{44}}{\mu_3}\right)$ нуқта билан уст-ма-уст тушадиган қилиб параллел кўчирамиз. Ўтиш формулалари қуйидагича бўлади:

$$x_1=x_2+\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1}\right),\quad y_1=y_2+\left(-\frac{\mu_2}{\lambda_2}\right),\quad z_1=z_2+\left(-\frac{a'_{44}}{\mu_3}\right)$$

Энди янги координаталар системасида сирт тенгламаси ушбу кўринишни олади:

$$\lambda_1\ x_2^2+\lambda_2\ y_2^2+2\mu_3\ z_2=0.$$

Бу тенглама λ_1 ва λ_2 нинг ишоралари бир хил бўлганда эллиптик параболоидни, уларнинг ишоралари ҳар хил бўлганда гиперболик параболоидни ифодалайди.

в) характеристик тенглама илдизларидан бири нолга тенг, яъни масалан $\lambda_3 = 0$, аммо $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\mu_3 = 0$. Бу ҳолда сирт тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \right)^2 = \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \mu_2^2/\lambda_2^2 - a_{44}.$$

Агар

$$x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_2} = x_2, \quad y_1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = y_2$$

ва

$$\frac{\mu_1^2}{\lambda_1} + \frac{\mu_2^2}{\lambda_2} - a_{44} = a'_{44}$$

десак, у ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$\lambda_1 \ x_2^2 + \lambda_2 \ y_2^2 = a'_{44} \tag{9.37}$$

бўлади. Озод ҳад $a'_{44} \neq 0$ бўлса, (9.37) тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x_2^2}{a'_{44}/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{a'_{44}/\lambda_2} = 1, \tag{9.38}$$

агар $a'_{44} = 0$ бўлса, у ҳолда (9.37) тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x_2^2}{1/\lambda_1} + \frac{y_2^2}{1/\lambda_2} = 0 \tag{9.39}$$

бўлади. (9.37) тенглама коэффициентларининг ишораларига қараб, қуйидаги сиртларни тасвирлайди.

№	λ_1	λ_2	a'_{44}	сиртнинг каноник тенгламаси	Сиртнинг номи
1.	±	±	±	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллиптик цилиндр
2.	±	±	∓	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мавҳум эллиптик цилиндр
3.	±	±	0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	ҳақиқий уққа эга бўлган мавҳум текисликлар жуфти
4.	±	∓	±	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	параболик цилиндр
5.	±	∓	0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	ўзаро кесишувчи текисликлар жуфти

г) характеристик тенгламанинг иккита илдизи нолга тенг бўлсин, яъни $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ ва $\mu_2 \neq 0$. У ҳолда (9.32) тенгламани

$$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right)^2 + 2\mu_2 \left(y_1 + \frac{a_{44}}{\mu_2}\right) + 2\mu_3 z_1 = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. R $(0, x, y, z)$ системанинг координаталар бошини $\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1}, -\frac{a_{44}}{\mu_2}, 0\right)$ нуқтага қуйидаги

$$x_1 = x_2 - \frac{\mu_1}{\lambda_1},\ y_1 = y_2 - \frac{a_{44}}{\mu_2},\ z_1 = z_2$$

формулалар ёрдамида параллел кўчирамиз. Бу ҳолда сирт тенгламаси

$$\lambda x_2^2 + 2\mu_2 y_2 + 2\mu_3 z_2 = 0$$

кўринишга келади. Бу системанинг ўқларини қуйидаги

$$x_2 = x',\ y_2 = \frac{\mu_2 y' - \mu_3 z'}{\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}}, \quad z_2 = \frac{\mu_3 y' + \mu_2 z'}{\sqrt{\mu_3^2 + \mu_2^2}}$$

формулалар ёрдамида R (O, x_1, y_1, z_1) координаталар системасининг $O_1 x_1$ ўқи бўйича маълум бурчакка бурамиз. Натижада қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\lambda_1 x^2 + 2\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2}\ y' = 0.$$

Бу тенглама ясовчиси Oz' ўққа параллел бўлган параболик цилиндрни ифодалайди.

д) характеристик тенгламанинг иккита илдизи нолга тенг бўлсин, яъни

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 \neq 0 \text{ ва } \mu_1 = \mu_2 = 0.$$

Бу ҳолда (9.32) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\lambda_2 \left(x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_2}\right)^2 + a_{44} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} = 0.$$

Координата ўқларининг йўналишини ўзгартирмасдан

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = z_1 \end{array}\right\}$$

формулалар ёрдамида $a_{44} - \frac{\mu_1^2}{\lambda_1} = a'_{4_4}$ белгилаш киритиб, системани параллел кўчирсак, сирт тенгламаси $\lambda_1 x_2^2 + a'_{44} = 0$ кўринишни олади. Бу тенглама $\lambda_1 a'_{44} < 0$ шартда бир жуфт ҳақиқий текисликни, $\lambda_1 a'_{44} > 0$ шартда эса бир жуфт мавҳум текисликни ва $a'_{44} = 0$ шартда эса устма-уст тушувчи икки текисликни ифодалайди.

Демак, (9.17) тенглама коэффициентларига қараб қуйидаги сиртларни ифодалаш мумкин: 1) эллипсоид (оддий, мавҳум); 2) гиперболоид (бир паллали, икки паллали); 3) параболоид (эллиптик, гиперболик); 4) цилиндр (ҳақиқий, мавҳум); 5) конус (ҳақиқий мавҳум); 6) ўзаро кесишувчи текисликлар (ҳақиқий ёки мавҳум).

Мисол. Қуйидаги иккинчи тартибли сирт тенгламасини каноник кўринишга келтиринг: $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-\sqrt{6}\,x+6\sqrt{3}\,y-5\sqrt{2}\,z-3=0$.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Бундан $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$ ни топамиз. Энди характеристик тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)\,l + 2m + n &= 0, \\ 2l + (2-\lambda)\,m + n &= 0, \\ l + m + (3-\lambda)\,n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Бунда $\lambda = \lambda_1 = 2$ десак, у ҳолда

$$\left.\begin{aligned} 2m + n &= 0, \\ 2l + n &= 0, \\ l + m + n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг тривиал бўлмаган ечими $l = 1$, $m = 1$, $n = -2$ бўлади. Демак, $\vec{a}_1 = \{1, 1, -2\}$ вектор бош йўналишни аниқлайди.

Энди $\lambda = \lambda_2 = 5$ десак,

$$\left.\begin{aligned} -3l + 2m + n &= 0, \\ 2l - 3m + n &= 0, \\ l + m - 2n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг тривиал бўлмаган ечими $l = 1$, $m = 1$, $n = 1$. Демак, $\vec{a}_2 = \{1, 1, 1\}$ вектор иккинчи бош йўналишни аниқлайди.

Ниҳоят, $\lambda = \lambda_3 = 0$ десак,

$$\left.\begin{aligned} 2l + 2m + n &= 0, \\ 2l + 2m + n &= 0, \\ l + m + 3n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системага эга бўламиз. Бу системанинг тривиал бўлмаган ечими $l = 1$, $m = -1$, $n = 0$ бўлади. Демак, $\vec{a}_3 = \{1, -1, 0\}$ вектор учинчи бош йўналишни аниқлайди.

Бош йўналишларга мос бирлик векторлар қуйидагича бўлади:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_2|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right\}.$$

Демак, буларга асосан координаталарни алмаштириш формулаларини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\,z_1, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,z_1, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y_1. \end{aligned}\right|$$

Берилган тенгламанинг чизиқли формаси озод ҳад билан бирга қуйидагича ёзилади:

$$-\sqrt{6}\,x + 6\sqrt{3}y - 5\sqrt{2}z - 3 = -\sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\,y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\,z_1\right) +$$
$$+ 6\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,z_1\right) - 5\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y_1\right) -$$
$$-3 = 10y_1 + 8z_1 - 3.$$

Унинг квадратик формаси эса $2x_1^2 + 5y_1^2$ кўринишга эга, Шундай қилиб, берилган тенглама

$$2x_1^2 + 5y_1^2 + 10y_1 + 8z_1 - 3 = 0$$

кўринишга келди. Бу тенгламани яна қуйидагича ёзиш мумкин:

$$2x_1^2 + 5\,(y_1 + 1)^2 + 8\,(z_1 - 1) = 0.$$

Энди координата ўқларининг йўналишини ўзгартирмай, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 - 1$, $z_1 = z_2 + 1$ формулалар ёрдамида $R\,(O_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1)$ системани ўз-ўзига параллел кўчирсак,

$$2x_2^2 + 5y_2^2 + 8z_1 = 0$$

ни ҳосил қилиш мумкин. Бу сирт эллиптик параболоиддир.

9-бобга доир машқлар

1. R^3 да $F\,(\vec{x},\ \vec{x}) = x^2 - 3z^2 + 4xy - xz$ квадратик форманинг матрицасини ёзинг.

Жавоб: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

2. R^4 ва R^5 да квадратик форманинг

а) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

матрицалари берилган. Квадратик формани ёзинг.

Жавоблар:

а) $F(\vec{x}, \vec{x}) = -z^3 + 2t^2 + xy + 6xz - 2yz$;

б) $F(\vec{x}, \vec{y}) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 5u^2 - 2xy + 2xz - 2xz - 2yz + 4yu + 2zu + 6zu$.

3. Ортонормалланган базисда қуйидаги квадратик формаларни каноник кўринишга келтиринг:

а) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$;
б) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz$.

Жавоблар:

а)
$$4x_1^2 + y_1^2 - 2z_1^2: \left| \begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \\ y_1 &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z, \\ z_1 &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z; \end{aligned} \right.$$

б)
$$7x_1^2 + 4y_1^2 + z_1^2: \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, \\ y_1 &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \\ z_1 &= -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}. \end{aligned} \right.$$

4. Ушбу
а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

матрицалар берилган. $A = Q^{-1}BQ$, $A_1 = Q^{-1}BQ$ муносабатлардан Q ва B матрицаларни топинг, бу ерда Q — ортогонал, B — диагонал матрица, *Жавоблар*:

а) $$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

б) $$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

5. $F(\vec{x}, \vec{x}) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz$ квадратик формани каноник кўринишга келтиринг.

Жавоб. $F = 2x_1^2 - y_1^2 + 5z_1^2$.

6. Қуйидаги иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаларини каноник кўринишга келтиринг:

а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
б) $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0$;
в) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 10x + 70y = 0$; г) $3x^2 + 4xy + 2x - 4y - 9 = 0$.

Жавоблар.

а) $\dfrac{x_1^2}{1} + \dfrac{y_1^2}{1} = 1$; б) $\dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{y_1^2}{1} = 1$;

в) $y_1^2 = \sqrt{10}\, x_1$; г) $\dfrac{x_1^2}{1} - \dfrac{y_1^2}{4} = 1$.

7. Қуйидаги сиртларнинг умумий тенгламаларини каноник кўринишга келтиринг:

а) $8x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 44x - 2z + 29 = 0$,
б) $4xy + y^2 + 4yz + 2z^2 - 4x - 2y - 5 = 0$,
в) $(x - 1)(y + 1)(z + 1) - xyz = 0$,
г) $x^2 + 2xy + 2xz + 3y^2 - 2yz + 3z^2 - 4x + 5y + 5z + 13 = 0$,
д) $y^2 - z^2 + 4xy + 4xz - 6x - 12y + 18 = 0$.

Жавоблар.

а) $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{y_1^2}{9} + \dfrac{z_1^2}{4} = 1$, б) $4x_1^2 + y_1^2 - 2z_1^2 - 8 = 0$, в) $2x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 + \dfrac{1}{3} = 0$, г) $3x_1 + 4y_1^2 + 3\sqrt{6} = 0$, д) $x_1^2 - y_1^2 = 2z_1$.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТ

1. Камолов М. Аналитик геометрия. «Ўқитувчи» Т., 1972.
2. Ефимов Н. В. Аналитик геометрия қисқа курси. «Ўқитувчи», Т., 1966.
3. Азларов Т. А. таҳр. остида. Математикадан қўлланма. 1. «Ўқитувчи». Т., 1979.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. «Высшая школа». М., 1978.
5. Гуревич В. Б., Минорский В. П. Аналитическая геометрия. М., 1958.
6. Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы, «Наука», 1975.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. «Наука». М., 1971.
8. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения, «Наука», М., 1979.
9. Глаголев А. А. Солнцева Т. В. Курс высшей математики. «Высшая школа» М., 1971.
10. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. «Наука», М., 1979.
11. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики, «Наука» М., 1978.
12. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. «Высшая школа», М., 1972.
13. Ефимов А. В., Демидович Б. П. Сборник задач по математике для вузов. «Наука» М., 1981.
14. Шнейдер В. Е. и др. Краткий курс высшей математики. том 1, «Высшая школа» М., 1978 г.
15. Шодиев Т. Ш. Аналитик геометриядан қўлланма. «Ўқитувчи», Т., 1973.
16. Шодиев Т. Ш. Геометрия. «Ўқитувчи», Т., 1978.
17. Шодиев Т. Ш. Векторлар алгебрасининг геометрияга татбиқи, «Фан», Т., 1975.

ФОЙДАЛАНИЛГАН СИМВОЛЛАР КЎРСАТКИЧИ

$\Rightarrow$ — келиб чиқади
$<=>$ — тенг кучли
«$\wedge$» — «ва», конъюнкция
«$\vee$» — «ёки», дизъюнкция
$\exists$ — «мавжуд»
$\forall$ — «ҳар қандай»
$\{A, B\}$ — A ва B элементли тўплам
$\varnothing$ — бўш тўплам
(AB), l — AB ёки l тўғри чизиқ

$[AB]$ — AB кесма

$[AB)$, l — AB ёки l нур

$|AB|$, $d(A, B)$ — A нуқтадан B нуқтагача бўлган масофа ($[AB]$ кесманинг узунлиги)

$A \in l$, $A \in T$ — нуқта l тўғри чизиққа, T текисликка тегишли

l_A белги ҳам A нуқта l тўғри чизиққа тегишли бўлишини билдиради

$A \notin l$ — A нуқта l тўғри чизиққа тегишли эмас

$l \subset T$ — тўғри чизиқдаги нуқталар тўплами T текисликдаги нуқталар тўпламининг қисмидир

$\Phi_1 \subset \Phi$ — Φ_1 фигура Φ фигуранинг қисм тўплами (қисми)

$\Phi_1 \not\subset \Phi$ — Φ_1 фигура Φ фигуранинг l қисм тўплами (қисми) эмас

$\Phi_1 \equiv \Phi_2$ — Φ_1 ва Φ_2 фигуралар устма-уст тушади

$\Phi_1 \cong \Phi_2$ — Φ_1 ва Φ_2 фигуралар конгруэнт

$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — Φ_1 ва Φ_2 фигуралар бирлашмаси

$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — Φ_1 ва Φ_2 фигуралар кесишмаси

(A, B) — A ва B нуқталарнинг тартиблашган жуфти

$\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ — вектор

$\vec{O}$, $\overrightarrow{AA}$ — ноль вектор

$|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ — векторлар узунлиги

$\uparrow\uparrow$ — йўналишдош (нурлар ёки векторлар)

$\uparrow\downarrow$ — қарама-қарши йўналган

$f_1 \circ f_2$ — f_1 ва f_2 алмаштиришлар композицияси

(ABC), (T) — A, B, C нуқталар орқали ўтувчи текислик

$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — векторлар орасидаги бурчак

$\widehat{(l_1, l_2)}$ — тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

$\widehat{(T_1, T_2)}$ — текисликлар орасидаги бурчак

$\widehat{(l, T)}$ — тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак

R — ҳақиқий сонлар тўплами

R' — чизиқли фазо

R^n — n ўлчовли вектор фазо

E_R^n — n ўлчовли Евклид фазоси

ε_{ij} — Кронекер символи

$f: R^n \to R^m$ — чизиқли акслантириш

$\varphi: R^n \to R^n$ — чизиқли оператор

$F: R^n \to R^n$ — чизиқли форма

P — майдон

$\varphi: A \to A$ — аффин алмаштириш

$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ — векторларнинг скаляр кўпайтмаси

$\vec{a} \times \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$ — векторларнинг вектор кўпайтмаси

f^{-1} — тескари акслантириш

E – айнан акслантириш

$\pi_{\vec{a}}$ — параллел кўчириш.

МУНДАРИЖА

7-боб. Матрица ва чизиқли тенгламалар системаси

8-боб. Чизиқли операторлар

9-боб. Квадратик формалар

На узбекском языке

ШАДИЕВ ТИЛАВОЛДИ ШАДИЕВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебник для втузов

Ташкент «Ўқитувчи» — 1984

Редактор *У. Хусанов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Т. Грешчикова*
Корректор *Ж. Нуриддинова*

ИБ № 2592

Теришга берилди 10.11.83. Босишга рухсат этилди 18.04.84. Формат $84\times108/_{32}$. Тип. қоғози № 3. Литературная гарн. Кегли 10, 8 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 16,80. Шартли кр.-отт. 16,8. Нашр. л. 16,35. Тиражи 4000. Зак. 2651. Баҳоси 1 с.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 9—144—82.

Ўзбекистон нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонасида терилиб, 2- босмахонасида босилди. Янгийўл, Самарқанд кўчаси, 44. 1984 й.

Набрано на головном предприятии, отпечатано в типографии № 2 ТППО «Матбуот» Государственного комитета Уз по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Янгиюль, ул. Самаркандская, 44.