Министерство образования Республики Беларусь

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Е.А. Ровба, Е.А. Сетько, А.С. Ляликов, К.А. Смотрицкий

ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Высшая математика» по экономическим специальностям Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Дата сборки: 9 декабря 2010 г.

Общая информация

Методические указания

Комплект поставки, требования к системе, процедура запуска

Комплект поставки

ЭУМК поставляется на ...

Требования к системе

Запуск ЭУМК

Принцип построения и структура

Знакомство с ЭУМК

Рекомендации для преподавателя

Наличие у преподавателя ...

Лекции

Организация практических занятий

Тесты

Рекомендации для студента

Изучение теоретического материала

Практические занятия

Тесты

Типовые программы курсов

Указатель по направлениям и специальностям

Список учебных программ

Рекомендуемая литература

[1] Мазаник С.А., Размыслович Г.П., Ширяев В.М. Функции от матриц. Мн.: БГУ, 2002.

Часть I

Теория

Глава 1

Аналитическая геометрия

1.1. Прямая на плоскости

1.1.1. Декартовы координаты

Декартова прямоугольная система координат позволяет дать числовое представление каждой точке плоскости M. Для этого на плоскости проводится пара взаимно перпендикулярных прямых, называемых *осями координат*, на каждой из которых задаётся положительное направление. Первую из них называют *осью абсцисс* и обозначают Ox, а вторую — *осью ординат* и обозначают Oy. Точка их пересечения O называется *началом координат*. Оси координат делят плоскость на четыре части — *квадранты* (смотрите рисунок 1.1).

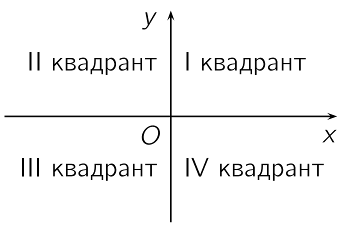

Рисунок 1.1

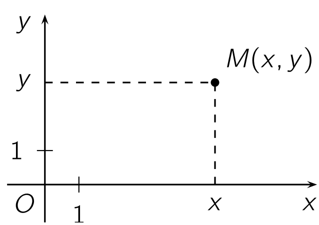

Рисунок 1.2

На каждой из осей выбирается единичный отрезок, задающий масштаб чертежа. Эти отрезки могут как совпадать, так и различаться по длине. Теперь всякой точке M плоскости можно поставить в соответствие упорядоченную пару чисел x и y, называемых *координатами* (смотрите рисунок 1.2), причём первое число x называется *абсциссой*, а второе число y — *ординатой* точки M. И обратно, каждой паре чисел (x, y) можно сопоставить точку плоскости $M(x, y)$. Это позволяет отождествить упорядоченные пары чисел и точки плоскости.

Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ плоскости определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{1.1}$$

справедливость которой следует из теоремы Пифагора (смотрите рисунок 1.3).

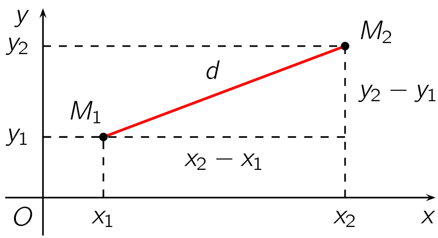

Рисунок 1.3

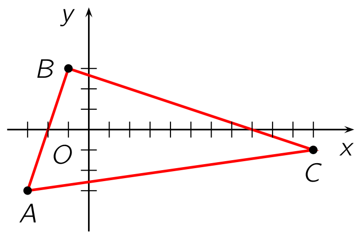

Рисунок 1.4

Пример 1.1. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3, -3)$, $B(-1, 3)$, $C(11, -1)$ (смотрите рисунок 1.4) прямоугольный.

Решение. По формуле (1.1) найдём длины сторон треугольника:

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$
$$BC = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$
$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Так как

$$AB^2 + BC^2 = 40 + 160 = 200 = AC^2,$$

то сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Отсюда заключаем, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является гипотенузой. □

Точка $M(x, y)$, делящая отрезок между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ в отношении $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} > 0$, имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{1.2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат *середины отрезка*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.3}$$

Пример 1.2. Известны концы $A(2, -3)$ и $B(14, 3)$ отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние которой от A в два раза больше расстояния от B (смотрите рисунок 1.5). Определить координаты точки C.

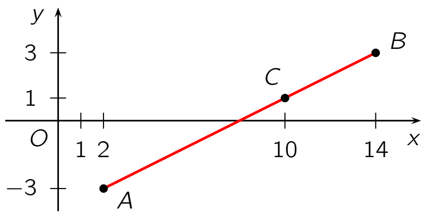

Рисунок 1.5

Решение. Так как $AC = 2CB$, то $\lambda = \frac{AC}{CB} = 2$. По формуле (1.2)

$$x = \frac{2 + 2 \cdot 14}{1 + 2} = 10, \quad y = \frac{-3 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 1,$$

поэтому точка C имеет координаты $(10, 1)$. $\square$

Площадь S треугольника ABC с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|. \tag{1.4}$$

Пример 1.3. Найти площадь треугольника ABC с вершинами в точках $A(-2, -4)$, $B(2, 8)$, $C(10, 2)$.

Решение. По формуле (1.4)

$$S = \frac{1}{2}\left|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)\right| = \frac{1}{2}\left|24 - 144\right| = 60\,\text{кв.ед.} \qquad \square$$

1.1.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Определение. *Линией на плоскости* называется множество точек плоскости, обладающих каким-то характерным свойством.

Например, окружность состоит из точек, равноудалённых от некоторой точки, называемой центром.

Декартовы координаты позволяют задавать линии с помощью уравнения, которое часто упрощает исследование их геометрических свойств.

Определение. Уравнение с двумя неизвестными x и y называется *уравнением линии L*, если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки $M(x, y)$, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никаких точек, не лежащих на этой линии. В таком случае говорят, что уравнение *определяет*, или *задает* линию L.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Простейшей линией является *прямая на плоскости*. Рассмотрим некоторую прямую, не перпендикулярную оси Ox.

Определение. Назовем *углом наклона данной прямой к оси Ox* угол α, на который нужно повернуть ось Ox против часовой стрелки до совпадения с прямой.

Определение. Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называют *угловым коэффициентом этой прямой* и обозначают буквой k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Из определения углового коэффициента, в частности, следует, что если $\alpha = 0$, т.е. прямая параллельна оси Ox, то $k = 0$. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. прямая перпендикулярна оси Ox, то выражение $k = \operatorname{tg}\alpha$ не имеет смысла. Тогда говорят, что угловой коэффициент «обращается в бесконечность».

Выведем уравнение прямой, если известны ее угловой коэффициент и величина отрезка OB, отсекаемого ей на оси Oy.

Пусть M — произвольная точка плоскости с координатами x и y. Если провести прямые BN и NM, параллельные осям, то образуется прямоугольный треугольник (см. рисунок 1.6). Точка M лежит на прямой тогда и только тогда, когда величины BN и NM удовлетворяют условию $\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg}\alpha$. Но

$$NM = CM - CN = CM - OB = y - b, \quad BN = x.$$

Отсюда по определению углового коэффициента получаем, что точка M лежит на данной прямой тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $\frac{y-b}{x} = k$, которое после преобразования примет вид:

$$y = kx + b. \tag{1.5}$$

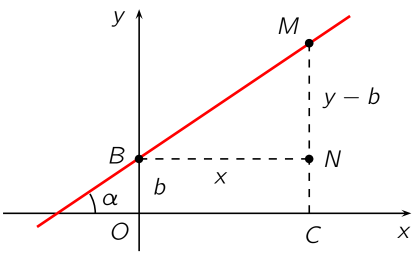

Рисунок 1.6

Определение. Уравнение (1.5) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если $k = 0$, то прямая параллельна оси Ox, и ее уравнение имеет вид $y = b$.

Итак, любая прямая, не перпендикулярная оси Ox, имеет уравнение вида (1.5). Верно и обратное: любое уравнение вида (1.5) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок, величина которого равна b.

Пример 1.4. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 2$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Находим угловой коэффициент:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Подставляя k и b в уравнение (1.5), получаем искомое уравнение прямой: $y = \sqrt{3}x + 2$ или $y - \sqrt{3}x - 2 = 0$. □

1.1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом

Иногда возникает необходимость составить уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1; y_1)$ и угловой коэффициент k. Запишем уравнение прямой в виде (1.5), где b — пока неизвестное число. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1.5): $y_1 = kx_1 + b$. Отсюда $b = y_1 - kx_1$.

Подставляя найденное значение b в уравнение (1.5), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1.6}$$

Пример 1.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 2)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Подставляя координаты точки M и значение углового коэффициента k в уравнение (1.6), получим искомое уравнение прямой:

$$y - 2 = 1(x - 1), \quad y - x - 1 = 0. \qquad \square$$

1.1.4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Приняв в (1.6) точку $M(x; y)$ за $M_2(x_2; y_2)$, получим: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Таким образом, если $x_2 \neq x_1$, то для прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.7}$$

Подставляя вычисленное значение k в уравнение (1.6), получаем искомое уравнение прямой:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Это уравнение, если $y_2 \neq y_1$, можно записать в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.8}$$

Если $y_1 = y_2$, то уравнение искомой прямой имеет вид $y = y_1$. Такая прямая параллельна оси Ox. Если $x_1 = x_2$, то прямая, проходящая через точки M_1 и M_2, параллельна оси Oy. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

1.1.5. Общее уравнение прямой

Теорема 1.1. *В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени*

$$Ax + By + C = 0. \tag{1.9}$$

И обратно, уравнение (1.9) при произвольных коэффициентах A, B, C (A и B одновременно не равны нулю) определяет некоторую прямую в прямоугольной системе координат Oxy. [Доказательство]

Определение. Линии вида (1.9) называются *линиями первого порядка*.

Определение. Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой*, или *полным уравнением прямой*. При различных значениях A, B, C оно определяет всевозможные прямые.

1.1.6. Неполные уравнения первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим три частных случая, когда уравнение $Ax + By + C = 0$ является *неполным*, т.е. один из коэффициентов равен нулю:

1) $C = 0$; уравнение имеет вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат;
2) $B = 0$ $(A \neq 0)$; уравнение имеет вид $Ax + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy. В частности, уравнение $x = 0$ определяет ось ординат;
3) $A = 0$ $(B \neq 0)$; уравнение имеет вид $By + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Ox. В частности, уравнение $y = 0$ определяет ось абсцисс.

Рассмотрим теперь уравнение $Ax + By + C = 0$ при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Преобразуем его к виду:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Вводя обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1.10}$$

Определение. Уравнение (1.10) называется *уравнением прямой «в отрезках»*. Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Эта форма уравнения удобна для геометрического построения прямой.

Пример 1.6. Прямая задана уравнением $2x - 3y + 6 = 0$. Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую.

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Чтобы построить эту прямую, отложим на осях координат Ox и Oy отрезки OM_1 величины $a = -3$ и OM_2 величины $b = 2$ и проведем прямую через точки M_1 и M_2 (рисунок 1.7). □

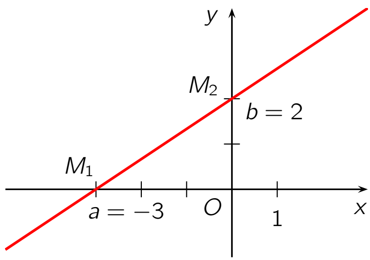

Рисунок 1.7

1.1.7. Угол между двумя прямыми

Определение. *Углом между прямыми* L_1 и L_2 называется угол, на который надо повернуть прямую L_1 против часовой стрелки до ее совпадения с прямой L_2.

Рассмотрим две прямые L_1 и L_2. Пусть уравнение L_1 имеет вид $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, а уравнение L_2 — вид $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, а φ — угол между прямыми L_1 и L_2, $0 \leqslant \varphi < \pi$ (рисунок 1.8).

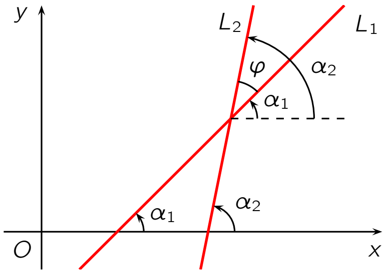

Рисунок 1.8

Из геометрических соображений устанавливаем соотношение между углами α_1, α_2, φ: $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{1.11}$$

Формула (1.11) определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi - \varphi$.

Пример 1.7. Прямые заданы уравнениями $y = 3x + 2$ и $y = -2x + 3$. Найти угол между этими прямыми.

Решение. Имеем $k_1 = 3$, $k_2 = -2$, и по формуле (1.11)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Таким образом, угол между данными прямыми равен $\frac{\pi}{4}$. $\square$

1.1.8. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Прямые L_1 и L_2 параллельны, когда $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Это верно, если числитель правой части формулы (1.11) равен нулю, т.е. $k_2 - k_1 = 0$, откуда

$$k_1 = k_2. \tag{1.12}$$

Равенство (1.12) называется *условием параллельности двух прямых*.

Прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\varphi = 0$. Из (1.11) находим:

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

Значит, равенство $\operatorname{ctg}\varphi = 0$ выполняется, если $1 + k_1 k_2 = 0$, откуда

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{1.13}$$

Равенство (1.13) называется *условием перпендикулярности двух прямых* и состоит в том, что угловые коэффициенты прямых обратны по величине и противоположны по знаку.

Пример 1.8. Показать, что прямые $2x - 3y + 1 = 0$ и $6x - 9y + 2 = 0$ параллельны.

Решение. Приведем каждое из уравнений к виду уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}.$$

Угловые коэффициенты данных прямых равны: $k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$. Значит, прямые параллельны. $\square$

1.1.9. Расстояние от точки до прямой

Теорема 1.2. Расстояние d от данной точки $M(x_0; y_0)$ до прямой L, *заданной уравнением* $Ax + By + C = 0$, *на плоскости определяется формулой:*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.14}$$

Пример 1.9. Пусть прямая L задана уравнением $2x - 3y + 5 = 0$, и дана точка $M(1; 2)$. Найти расстояние d от точки M до прямой L.

Решение. По формуле (1.14)

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}. \qquad \square$$

1.1.10. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, & (L_1) \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. & (L_2) \end{cases} \tag{1.15}$$

Все возможные *взаимные расположения этих прямых* могут быть описаны следующим образом:

1) если $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, то прямые пересекаются и их точка пересечения может быть получена как решение системы (1.15);
2) если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то
   а) при $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$ и $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ прямые совпадают, т.е. оба уравнения (1.15) задают одну и ту же прямую;
   б) при $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ либо $B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$ прямые параллельны и различны.

Итак, две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке, либо совпадают, либо параллельны.

1.2. Кривые второго порядка

1.2.1. Окружность

Определение. *Окружность* — это множество точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии r, называемом *радиусом* окружности, от точки $C(x_0, y_0)$ — *центра* (смотрите рисунок 1.9).

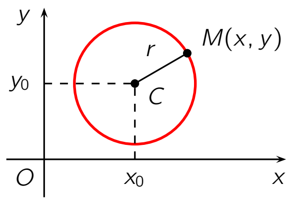

Рисунок 1.9

Согласно формуле для расстояния между двумя точками (1.1) уравнение окружности может быть представлено в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{1.16}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (1.16) принимает вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Пример 1.10. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ задаёт окружность. Найти её центр и радиус.

Решение. Сгруппируем все члены уравнения, содержащие x, а потом — содержащие y:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4.$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 4, \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2.$$

Мы преобразовали исходное уравнение к виду (1.16), где $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ и $r = 3$. Следовательно, это уравнение задаёт окружность, центр которой находится в точке $(2, -1)$ и радиус равен 3. $\square$

1.2.2. Эллипс

Определение. *Эллипс* (смотрите рисунок 1.10) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{1.17}$$

называемому *каноническим уравнением эллипса*.

Из определения следует, что эллипс

1) симметричен относительно осей координат и начала координат;
2) целиком лежит внутри прямоугольника $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Выполним построение эллипса. Для первой четверти, где координаты $x, y \geqslant 0$, выразим явно переменную y через x:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}, \quad y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2, \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Используя это уравнение, построим эллипс в первой четверти. Затем, симметрично отображая построенный фрагмент относительно осей и центра координат, получим весь эллипс (смотрите рисунок 1.10).

Определение. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ (рисунок 1.10), очевидно, принадлежащие эллипсу, называются *вершинами* эллипса.

Определение. Начало координат $O(0,0)$ (рисунок 1.10), играющее роль центра симметрии эллипса, называют *центром эллипса*.

Определение. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 (рисунок 1.10), а также их длины $2a$ и $2b$, называют *большой* и *малой осями* эллипса.

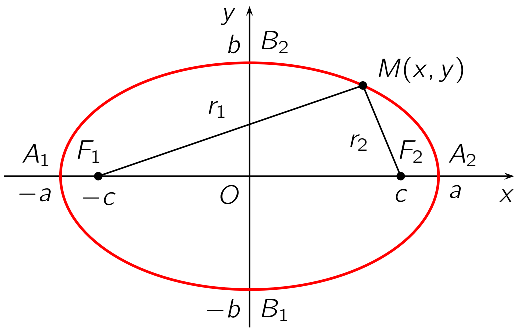

Рисунок 1.10

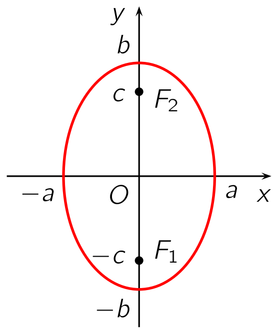

Рисунок 1.11

Определение. Отрезки OA_2 и OB_2 (рисунок 1.10), представляющие собой половины большой и малой осей, и их длины a и b называют *большой* и *малой полуосями* эллипса.

Определение. Положим

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

Из (1.17) следует, что $a \geqslant b > 0$, поэтому $0 \leqslant c < a$. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ (рисунок 1.10) называют *фокусами* эллипса.

Если $a < b$, то уравнение (1.17) задаёт эллипс, большáя полуось которого равна b и лежит на оси Oy, а малая равна a и лежит на оси Ox. Фокусы такого эллипса расположены в точках $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$, где $c^2 = b^2 - a^2$ (смотрите рисунок 1.11).

Определение. Расстояния r_1 и r_2 (рисунок 1.10) от точки M эллипса до его фокусов F_1 и F_2 называются левым и правым *фокальными радиусами* этой точки.

Теорема 1.3. *Точка M плоскости принадлежит эллипсу (1.17) тогда и только тогда, когда сумма ее фокальных радиусов равна $2a$:*

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1.18}$$

[Доказательство]

Определение. Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется *эксцентриситетом*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $0 \leqslant c < a$, то $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Если, в частности, $a = b$, то $c = 0$ и $\varepsilon = 0$. В этом случае фокусы сливаются в одной точке — центре, и эллипс деформируется в окружность с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. По мере возрастания эксцентриситета от нуля до единицы увеличивается «сплющенность» эллипса.

Из равенств (Д.2) и определения эксцентриситета следует, что фокальные радиусы любой точки $M(x, y)$ эллипса могут быть найдены по формулам:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Пример 1.11. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2, \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Решение. Подставляя координаты точек M и N в каноническое уравнение (1.17), получим систему уравнений для нахождения полуосей a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{(-2)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}{b^2} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{25}{4a^2} + \dfrac{3}{8b^2} = 1, \\ \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{3}{5b^2} = 1. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения системы на 8, а второго — на 5; затем вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{cases} \dfrac{50}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 8, \\ \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{30}{a^2} = 3, \\ \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{3}{b^2} = 5. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$a^2 = 10; \qquad \frac{3}{b^2} = 5 - \frac{20}{a^2} = 5 - \frac{20}{10} = 3, \quad b^2 = 1.$$

Итак, искомое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{10} + y^2 = 1.$ □

1.2.3. Гипербола

Определение. *Гипербола* (смотрите рисунок 1.12) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \tag{1.19}$$

называемому *каноническим уравнением гиперболы*.

Из канонического уравнения (1.19) следует, что гипербола:

1) симметрична относительно осей координат и начала координат;
2) не пересекает ось Oy;
3) лежит за пределами полосы $|x| < a$;
4) состоит из двух *ветвей*: левой для $x \leqslant -a$ и правой для $x \geqslant a$.

Построим гиперболу. Получим зависимость переменной y от x в первой четверти:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Теперь выполним построение в первой четверти и симметрично отобразим полученный фрагмент на всю систему координат (смотрите рисунок 1.12).

Определение. Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ (рисунок 1.12) лежат на гиперболе и называются *вершинами* гиперболы.

Определение. Начало координат $O(0, 0)$ (рисунок 1.12), выступающее в роли центра симметрии гиперболы, называют *центром гиперболы*.

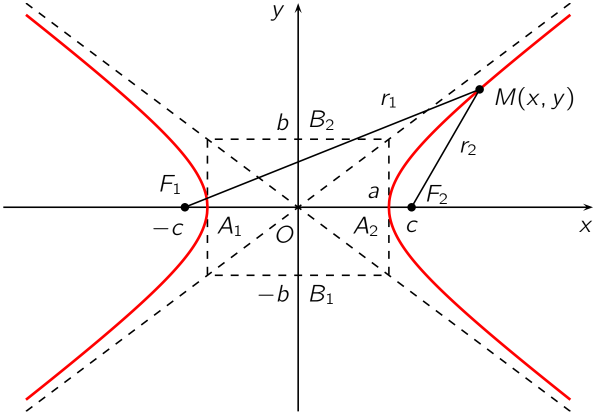

Рисунок 1.12

Определение. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, где $B_1 = (0, -b)$ и $B_2 = (0, b)$ (рисунок 1.12), а также их длины $2a$ и $2b$, называют *действительной* и *мнимой осями* гиперболы.

Определение. Отрезки OA_2 и OB_2 (рисунок 1.12), представляющие собой половины действительной и мнимой осей, и их длины a и b называют *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Определение. Положим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ (рисунок 1.12) называют *фокусами* гиперболы. Ясно, что $a < c$, т. е. расстояние между фокусами больше действительной оси гиперболы.

Определение. Расстояния r_1 и r_2 (рисунок 1.12) от точки M гиперболы до ее фокусов F_1 и F_2 называются левым и правым *фокальными радиусами* этой точки.

Определение. Прямоугольник, образованный прямыми $x = -a$, $x = a$, $y = -b$ и $y = b$ (рисунок 1.12), называется *основным прямоугольником* гиперболы.

Определение. Две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рисунок 1.12) называются *асимптотами* гиперболы.

Замечание 1.1. При удалении от начала координат гипербола как угодно близко подходит к своим асимптотам, не пересекая их. Построение чертежа гиперболы удобно начинать с изображения основного прямоугольника. Далее рисуют асимптоты, которые являются диагоналями основного прямоугольника. После этого вычерчивание гиперболы не составляет труда (рисунок 1.12).

Теорема 1.4. *Точка M плоскости принадлежит гиперболе (1.19) тогда и только тогда, когда абсолютная величина разности фокальных радиусов этой точки равна $2a$:*

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{1.20}$$

[Доказательство]

Определение. *Эксцентриситетом* гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

характеризующее её форму. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Понятие эксцентриситета позволяет переписать формулы (Д.4) и (Д.5) для фокальных радиусов точки M, лежащей соответственно на правой и левой ветвях гиперболы, следующим образом:

1) $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$ для правой ветви;
2) $r_1 = -\varepsilon x - a$, $r_2 = -\varepsilon x + a$ для левой ветви.

Определение. Если $a = b$, то есть действительная и мнимая полуоси равны, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Её асимптоты образуют прямой угол и являются биссектрисами координатных углов.

Определение. Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{1.21}$$

задаёт гиперболу, действительной и мнимой осями которой служат соответственно мнимая и действительная оси гиперболы (1.19). Гиперболы (1.19) и (1.21) имеют общие полуоси, асимптоты и основной прямоугольник и называются *сопряженными*.

На рисунке 1.13 сопряженная гипербола начерчена курсивом, её фокусы обозначены через F_1' и F_2'.

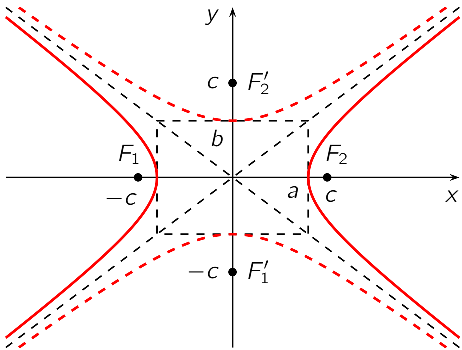

Рисунок 1.13

Пример 1.12. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$ и имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Решение. Согласно определению эксцентриситета

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \quad c = \sqrt{2}a, \quad c^2 = 2a^2.$$

Так как для всякой гиперболы верно равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то в нашем случае

$$b^2 = c^2 - a^2 = 2a^2 - a^2 = a^2,$$

т. е. гипербола равнобочная.

Подставим координаты данной по условию точки M в каноническое уравнение (1.19):

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1, \quad \frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 1, \quad \frac{1}{a^2} = 1, \quad a^2 = 1.$$

Значит, уравнение искомой гиперболы имеет вид $x^2 - y^2 = 1$. $\square$

1.2.4. Парабола

Определение. *Парабола* (смотрите рисунок 1.14) — это геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0, \tag{1.22}$$

называемому *каноническим уравнением параболы*.

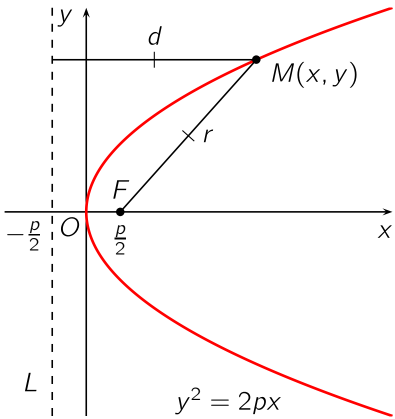

Рисунок 1.14

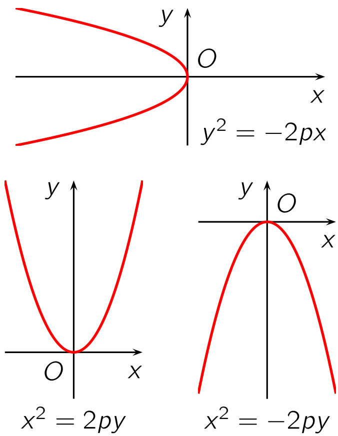

Рисунок 1.15

Из определения следует, что парабола:

1) симметрична относительно оси Ox;
2) лежит в правой полуплоскости, т. е. $x \geqslant 0$;
3) проходит через начало координат.

Уравнение $y^2 = -2px$ задаёт параболу, симметричную (1.22) относительно оси ординат. Уравнения $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ определяют «повёрнутые» параболы, чья ось симметрии совпадает с осью ординат (смотрите рисунок 1.15).

Определение. Ось абсцисс, которая является осью симметрии параболы, называется *осью параболы*.

Определение. Начало координат $O(0,0)$ называется *вершиной* параболы.

Определение. Точка $F(\frac{p}{2},0)$ (рисунок 1.14) называется *фокусом* параболы.

Определение. Прямая L, задаваемая уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (рисунок 1.14), называется *директрисой* параболы.

Определение. Расстояние от фокуса до директрисы, равное p, называется *параметром* параболы.

Определение. Для любой точки $M(x,y)$ параболы отрезок $r = MF$ (рисунок 1.14) именуется *фокальным радиусом параболы*.

Теорема 1.5. *Точка M плоскости принадлежит параболе тогда и только тогда, когда эта точка равноудалена от фокуса F и директрисы L.*

[Доказательство]

Так как для точек $M(x,y)$ параболы (1.22) $x \geqslant 0$, то из теоремы 1.5 следует, что фокальный радиус таких точек

$$r = d = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}.$$

Пример 1.13. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 4.

Решение. Из условия следует, что точка $M(4,8)$ лежит на параболе (смотрите рисунок 1.16). Подставим координаты M в каноническое уравнение параболы (1.22):

$$8^2 = 2p \cdot 4, \quad 2p = \frac{64}{4} = 16.$$

Знаая параметр, выписываем искомое уравнение: $y^2 = 16x$. □

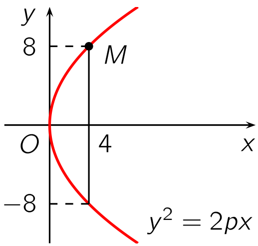

Рисунок 1.16

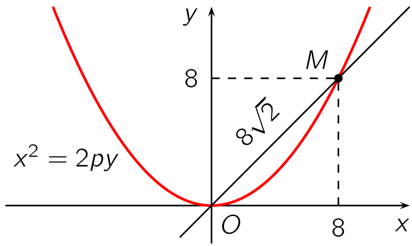

Рисунок 1.17

Пример 1.14. Составить уравнение симметричной относительно оси Oy параболы с вершиной в начале координат, если известно, что эта парабола отсекает на биссектрисе первого и третьего координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

Решение. Из условия следует, что на параболе лежит точка $M(8,8)$ (смотрите рисунок 1.17). Подставляем координаты точки M в каноническое уравнение $x^2 = 2py$ данной параболы:

$$8^2 = 2p \cdot 8, \quad 2p = 8.$$

Итак искомое уравнение имеет вид $x^2 = 8y$. □

1.2.5. Кривые второго порядка со смещенным центром

Центр эллипса и гиперболы, а также вершина параболы могут быть помещены в любую точку $C\,(x_0, y_0)$ плоскости. При этом канонические уравнения соответствующих кривых преобразуются к следующему виду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$
$$(y-y_0)^2=2p\,(x-x_0)\,.$$

Например, эллипс с центром в точке $C(3,2)$ и полуосями $a=2$ и $b=1$ (смотрите рисунок 1.18) имеет уравнение

$$\frac{(x-3)^2}{4}+(y-2)^2=1.$$

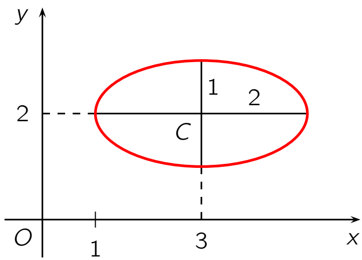

Рисунок 1.18

Пример 1.15. Установить вид линии второго порядка, заданной уравнением $9x^2-4y^2+18x+8y-31=0$.

Решение. Выделим в данном уравнении полные квадраты по каждой из переменных:

$$9(x^2+2x+1)-9-4(y^2-2y+1)+4-31=0,$$

$$9(x+1)^2-4(y-1)^2=36, \quad \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $C(-1,1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$. □

Пример 1.16. Установить вид линии второго порядка, заданной уравнением $x^2-4x-4y=0$.

Решение. Выделим полный квадрат по переменной x:

$$(x^2-4x+4)-4-4y=0, \quad (x-2)^2=4y+4, \quad (x-2)^2=4(y+1).$$

Получено каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $C(2,-1)$ и параметром $p=2$. □

Глава 2

Предел последовательности и функции

2.1. Предел числовой последовательности

2.1.1. Числовая последовательность

Определение. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена *числовая последовательность*. Числа x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами*, или *членами последовательности*. Для числовой последовательности мы будем использовать следующие обозначения:

$$x_1, \; x_2, \; \dots, \; x_n, \; \dots; \quad \{x_n\}; \quad x_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Последовательности встречались в средней школе, например, *бесконечная геометрическая прогрессия* $1, \; q, \; q^2, \; \dots, \; q^n, \; \dots, \; |q| < 1$, является числовой последовательностью.

Определение. Последовательности $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_ny_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ называются соответственно *суммой, разностью, произведением и частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant M$.

В этом определении, а также в формулировках многих других определений и теорем используются слова «существует» и «для любого». Для краткости записи вместо этих терминов будем использовать символы соответственно $\exists$ и $\forall$. Символ $\exists$ называют *квантором существования*, а символ $\forall$ — *квантором общности*.

С помощью указанных символов определение ограниченной последовательности выглядит следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Определение. *Окрестностью* точки называется любой интервал, содержащий эту точку. *ε-окрестностью* точки $x = a$ называется интервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$.

Геометрической смысл ограниченной последовательности состоит в том, что все члены последовательности находятся в некоторой окрестности (M-окрестности) точки $x = 0$ (рисунок 2.1).

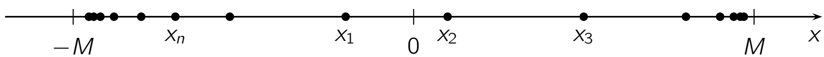

Рисунок 2.1

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если она не является ограниченной. Это значит что для любого $M > 0$, каким бы большим оно ни было, найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, для которого будет $|x_n| > M$. На языке кванторов это определение будет выглядеть следующим образом:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad |x_n| > M.$$

Например:

а) последовательность

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ \ldots$$

ограничена, так как $\forall\, n \in \mathbb{N}$ верно, что $|x_n| = \dfrac{1}{n} \leqslant 1$;

б) последовательность $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ является неограниченной, так как, каково бы ни было число $M > 0$, $\exists\, x_n = n^2$ такое, что $x_n > M$.

Определение. Последовательность x_n называется *постоянной*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n = a,$$

то есть все элементы последовательности равны некоторому числу a.

Например, последовательность $1, 1, \ldots, 1, \ldots$ является постоянной. Здесь $\forall\, n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $x_n = 1$.

2.1.2. Предел последовательности

Изучение предела последовательности — основного понятия этой главы, начнем с наводящего примера. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n-1}{n}.$$

Из рисунка 2.2, где изображены ее первые несколько элементов, видно, что они приближаются к значению $a = 1$. Для первый пяти элементов оценим степень этой близости:

$$|x_1 - 1| = 1, \quad |x_2 - 1| = \frac{1}{2}, \quad |x_3 - 1| = \frac{1}{3}, \quad |x_4 - 1| = \frac{1}{4}, \quad |x_5 - 1| = \frac{1}{5}.$$

Итак, видно, что по мере возрастания номера n элемент последовательности $\{x_n\}$ неограниченно приближается к единице. В таком случае говорят, что число 1 является пределом последовательности $\{x_n\}$.

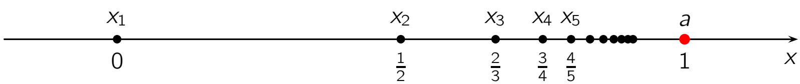

Рисунок 2.2

Получив наглядное представление о сути предельного перехода, мы готовы перейти к математически строгому определению.

Определение. Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым оно бы ни было, существует номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > N_0$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. На языке кванторов это звучит так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Например, из геометрических соображений мы уже убедились, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Этому факту можно дать и строгое математическое доказательство, пользуясь введенным ранее определением предела последовательности (проделайте это самостоятельно).

Геометрический смысл предела последовательности состоит в том, что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности, начиная с некоторого номера N_0, зависящего, вообще говоря, от ε (смотрите рисунок 2.3).

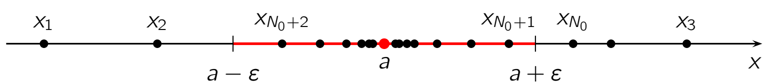

Рисунок 2.3

Пример 2.1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим модуль разности между n-м членом последовательности и числом $\frac{1}{2}$:

$$\left|\frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер N_0 такой, что $\forall\, n > N_0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon.$$

Для отыскания номера N_0 решим это неравенство относительно n:

$$2(2n-1) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1\right).$$

Таким образом, в качестве номера N_0 можно взять целую часть числа $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon}+1\right)$, т.е.

$$N_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1\right)\right]. \qquad \square$$

2.1.3. Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой (БМП)*, если для любого положительного числа ε, сколь бы малым оно бы ни было, существует номер N_0 такой, что для любого $n > N_0$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Из определения предела последовательности следует, что последовательность x_n является бесконечно малой тогда и только тогда, когда сходится, причем предел ее равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Например, последовательность $x_n = 1/n$ бесконечно малая, или, что то же самое, ее предел равен нулю.

Геометрический смысл БМП можно сформулировать так: для любой ε-окрестности точки $x = 0$, существует номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что все члены последовательности, начиная с (N_0+1)-го, принадлежат этой ε-окрестности (смотрите рисунок 2.3, считая $a = 0$).

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. *Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть БМП.* [Доказательство]

2. *Бесконечно малая последовательность является ограниченной.* [Доказательство]

3. *Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности есть БМП.* [Доказательство]

4. *Произведение нескольких БМП есть БМП.* [Доказательство]

5. *Если БМП* $\{x_n\}$ *имеет постоянное значение* a, *т.е.* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *верно, что* $x_n = a$, *то* $a = 0$. [Доказательство]

2.1.4. Бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой (ББП)*, если для всякого $A > 0$, сколь большим оно бы ни было, существует номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n > N_0$ верно неравенство $|x_n| > A$, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n| > A.$$

В таком случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если дополнительно известно, что последовательность $\{x_n\}$ для достаточно больших n сохраняет знак, то есть

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad x_n > A \quad \Big(x_n < -A\Big),$$

то к символу бесконечности «∞» добавляют соответствующий знак:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\Big).$$

Примерами бесконечно больших являются последовательности

$$x_n = \ln n, \quad x_n = -\sqrt{n}, \quad x_n = (-2)^n.$$

Свойства бесконечно больших последовательностей

1. *ББП — неограниченная последовательность.*
2. *Произведение двух ББП есть ББП.*
3. *Сумма ББП и ограниченной последовательности есть ББП.*
4. *ББП не может являться постоянной последовательностью.*

Замечание 2.1. Сумма двух ББП не обязательно является ББП. Например, последовательности $x_n = n$ и $y_n = -n$ бесконечно большие. Однако сумма $x_n + y_n = 0$ бесконечно большой не является.

Приводимая ниже теорема иллюстрирует связь между БМП и ББП.

Теорема 2.1. *Если $\{x_n\}$ есть ББП и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\{1/x_n\}$ есть БМП; и обратно, если $\{x_n\}$ — БМП, все члены которой отличны от нуля, то $\{1/x_n\}$ — ББП.* [Доказательство]

2.1.5. Сходящиеся последовательности

Определение. Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

где a — конечное число или бесконечность, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Простейшим примером сходящейся последовательности является БМП. В качестве примера расходящейся можно привести последовательность

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

Свойства сходящихся последовательностей

1. *Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела своим пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n - a\}$ была БМП.* [Доказательство]

2. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.* [Доказательство]

3. *Сходящаяся последовательность ограничена.* [Доказательство]

Замечание 2.2. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Ограниченная последовательность может быть и расходящейся. В качестве такого примера можно рассмотреть последовательность

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

4. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда* *а)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b;$ *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=ab;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$ *(при условии, что $b\neq 0$).*

[Доказательство]

Пример 2.2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{n^2-1}$.

Решение. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности (являются ББП). Следовательно, непосредственно применить свойство о пределе частного нельзя. Поэтому необходимо преобразовать общий член этой последовательности, разделив числитель и знаменатель на n^2 (на n в максимальной степени). Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{1-0}=2. \qquad \square$$

2.1.6. Предельный переход в неравенствах

Теорема 2.2. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

и, начиная с некоторого номера, $x_n \geqslant b$, то $a \geqslant b$. [Доказательство]

Следствие 2.1. *Если элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \leqslant y_n$, то и их пределы удовлетворяют неравенству*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

[Доказательство]

С помощью настоящего следствия можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.3 (о сжатой последовательности)**.** *Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, и, начиная с некоторого номера, $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют один и тот же предел a. Тогда последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел a.*

2.1.7. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant x_{n+1}$, *убывающей*, если $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \leqslant x_n$.

Определение. Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными*.

Определение. Если $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей*, если же $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} < x_n$, то *строго убывающей*.

Определение. Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Рассмотрим примеры монотонных последовательностей:

a) $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dots, \dfrac{n-1}{n}, \dots$ — строго возрастающая ограниченная последовательность. Очевидно, она сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

б) $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ — строго возрастающая неограниченная последовательность. Эта последовательность является ББП.

c) $1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dots, \sin\dfrac{n}{n+1}\pi, \dots$ — строго убывающая ограниченная последовательность, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{n+1}\pi = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n+1} = 0.$$

d) $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, [n/2], \dots$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа, — возрастающая, но не строго возрастающая ББП.

Оказывается, что все монотонные ограниченные последовательности обладают общим свойством — они сходятся.

Теорема 2.4. *Монотонная ограниченная последовательность сходится.*

Таким образом, ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости.

Рассмотрим важный пример монотонной ограниченной последовательности.

Теорема 2.5. *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.1}$$

сходится. [Доказательство]

Определение. Предел последовательности (2.1), существующий в силу теоремы 2.5, обозначается буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.2}$$

Число e известно как основание натуральных логарифмов. Из соотношений (Д.7) и (Д.8) вытекает, что $2 < e < 3$. Можно доказать, что число e является иррациональным, $e = 2{,}7182\ldots$ Это число играет важную роль в математике и ее приложениях.

2.1.8. Непрерывное начисление процентов

В банковской системе, как правило, практикуются дискретные проценты по вкладам. Если начальная сумма вклада составляла S_0 денежных единиц, p — годовая процентная ставка, представленная в виде десятичной дроби, и проценты начисляются один раз в год, то каждый год вклад будет увеличиваться в $(1+p)$ раз. Таким образом, через t лет сумма вклада составит

$$S = S_0(1+p)^t.$$

Если проценты начисляются не один, а n раз в году, то при сохранении годовой процентной ставки p сумма вклада каждый раз будет увеличиваться в $(1+\frac{p}{n})$ раз. По прошествии t лет таких увеличений произойдёт tn, и сумма вклада составит

$$S = S_0\left(1+\frac{p}{n}\right)^{tn}. \qquad (2.3)$$

Некоторые сложные экономические процессы по своей природе подразумевают столь частое начисление процентов, что его можно считать непрерывным. Для таких процессов количество n начислений в год принимает очень большие значения, которые можно условно считать близкими к бесконечности. Поэтому сумму вклада S в момент времени t в таких случаях можно определить, если в формуле (2.3) перейти к пределу при $n \to \infty$. Предположим, что процентная ставка $p = 1$, то есть вклад удваивается каждый год[1], и $t \in \mathbb{N}$. По свойству 4 сходящихся последовательностей и определению числа e (2.2)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^{tn} = S_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{t} = S_0e^t.$$

[1] Разумеется, не стоит рассчитывать на такие проценты в реальной жизни.

Можно доказать, что для произвольной процентной ставки p и любого, не обязательно целого, времени $t > 0$

$$S = S_0 e^{pt}. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) определяет закон *непрерывного начисления процентов*. Процентная ставка p при непрерывном начислении процентов называется *силой роста*.

Заметим, что, чем чаще начисляются проценты, тем быстрее растёт вклад. Данный факт объясняется дополнительной прибавкой сложных процентов, то есть процентов от процентов. При фиксированной годовой ставке p вклад растёт быстрее всего, если проценты начисляются непрерывно.

Поясним сказанное на примере. Предположим, что начальный вклад $S_0 = 1$, процентная ставка $p = 1$ и проценты начисляются n раз в год. Вычислим по формуле (2.3) размер вклада через год для некоторых значений n:

$$n = 1: \quad S = (1+1)^1 = 2; \qquad n = 10: \quad S = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}594;$$

$$n = 100: \quad S = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}705;$$

$$n = 1000: \quad S = \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}717.$$

В случае непрерывного начисления процентов через год вклад вырастет максимально и согласно (2.4) составит

$$S = e^1 = e \approx 2{,}718.$$

2.2. Функциональная зависимость

2.2.1. Понятие функции

При изучении явлений природы, физических, экономических и других процессов часто встречаются с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин полностью определяют значения других. Например, площадь круга S однозначно определяется значением его радиуса с помощью формулы $S = \pi r^2$.

Определение. Пусть X и Y — два произвольных множества. Если *каждому* элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие *единственный* элемент y из множества Y, то говорят, что задана *функция* f (смотрите рисунок 2.4). Функцию f, как правило, обозначают одним из следующих способов:

$$y = f(x), \quad f : X \to Y.$$

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом функции*, переменная y — *зависимой переменной*, или *значением функции*. Множество X называют *областью определения*, или *областью существования* функции f и обозначают $D(f)$. Множество всех значений, принимаемых функцией f, когда аргумент x пробегает всю область определения X, называется *множеством значений* функции f обозначается $E(f)$:

$$E(f) = \left\{ y \in Y \;\middle|\; y = f(x), x \in X \right\}.$$

Множество значений функции $E(f)$ содержится, очевидно, в Y. При этом Y может также содержать элементы, не входящие в $E(f)$ (смотрите рисунок 2.4).

Определение. Если $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$, то есть X и Y являются числовыми множествами, то функция $f : X \to Y$ называется *числовой*.

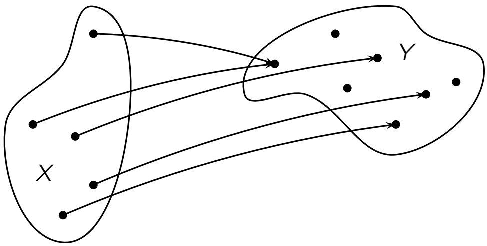

Рисунок 2.4

Например, функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ определена на отрезке $[-1; 1]$, т.е. областью определения является множество $X = [-1; 1]$. Множеством значений функции в данном случае является отрезок $[0; 1]$, $Y = [0; 1]$.

Определение. Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают буквой C.

Определение. *Графиком* функции называется множество всех точек плоскости с координатами $\big(x; f(x)\big)$, т.е. координаты x и y точек графика связаны соотношением $y = f(x)$.

Например, графиком функции $y = x^2$ является парабола. Естественно, что графиком функции не обязательно является «сплошная» кривая. В частности, графиком функции $y = n!$ будет бесконечное множество изолированных точек (нарисуйте!).

Пример 2.3. Найти $f(2)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(-x)$, если $f(x) = 1 + x + x^2$.

Решение. Очевидно, $f(2) = 1 + 2 + 2^2 = 7$. Если вместо независимого переменного подставить выражение $\frac{1}{x}$, то получим:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1 + x + x^2}{x^2}.$$

Аналогично, $f(-x) = 1 + (-x) + (-x)^2 = 1 - x + x^2$. □

Пример 2.4. Определить область существования функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Решение. В этом случае подкоренное выражение должно быть неотрицательно: $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$. Решая это неравенство, получим, что областью определения является множество

$$D = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty).$$ □

2.2.2. Способы задания функции.

Чтобы задать функцию, требуется указать правило: как по каждому значению аргумента x находить соответствующее значение функции $y = f(x)$. Существуют три основных *способа задания функции*: аналитический, табличный и графический.

1. *Аналитический способ*. Если зависимость между переменными выражена с помощью формул, то говорят, что функция задана *аналитически*. Формула, задающая функцию, указывает совокупность действий, которые нужно в определенном порядке произвести, чтобы получить соответствующее значение функции.

Рассмотрим, например, функцию $y = \sqrt{x-1}$. Функция, заданная этой формулой, определена на промежутке $[1; +\infty)$. Чтобы вычислить значение функции $\forall x \in [1; +\infty)$, необходимо от значения аргумента x вычесть 1 и извлечь из полученного числа квадратный корень. Множеством значений является промежуток $[0; +\infty)$. Графиком функции является множество всех точек плоскости с координатами $(x; \sqrt{x-1})$, переменная x пробегает здесь промежуток $[1, +\infty)$ (рисунок 2.5).

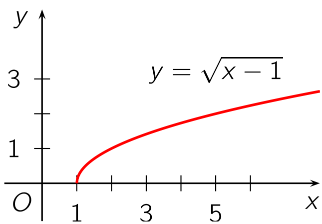

Рисунок 2.5

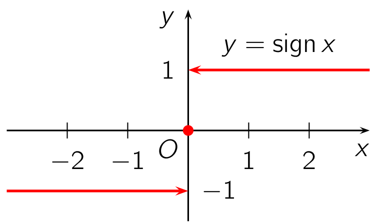

Рисунок 2.6

Пусть

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (0; +\infty), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Данная функция выражена при помощи нескольких формул. Областью определения является вся числовая прямая, множество значений состоит из трех элементов: -1, 0, 1. График изображен на рисунке 2.6. Рассматриваемую функцию обозначают

$$y = \operatorname{sign} x.$$

2. *Табличный способ*. Предположим, что нас интересует зависимость расхода топлива от скорости движения легкового автомобиля определенной марки. В инструкции к автомобилю имеется таблица 2.1.

Таблица 2.1

Скорость движения (км/час)	70	80	90	100	110	120
Расход топлива (л/100 км)	6,6	6,3	6,1	6,4	7,0	8,0

Из таблицы видно, что расход топлива изменяется в зависимости от скорости движения автомобиля и, если каждому значению скорости, записанному в первой строке таблицы, поставить в соответствие число литров топлива, стоящих во второй строке и в этом столбце, то получим функцию, заданную *таблично*. Областью определения этой функции является множество из 6 чисел, стоящих в первой строке. Множеством значений является также совокупность из 6 чисел второй строки.

С помощью таблицы часто задают функции, значения которых вычислить сложно. Например, широко известны таблицы тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций и т.д.

Заметим, что имеются способы перехода от функций, заданных таблично, к функциям, которые заданы аналитически. Безусловно, это можно сделать, как правило, лишь приближенно.

3. *Графический способ*. В данном случае предполагается, что задан график функции $y = f(x)$ (см., например, рисунок 2.7).

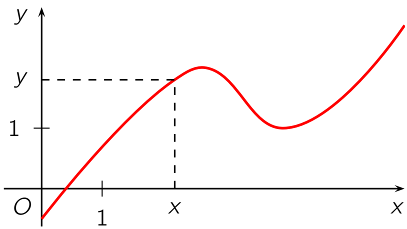

Рисунок 2.7

Здесь, чтобы для некоторого значения аргумента x найти соответствующее значение функции, нужно построить на оси Ox точку x, затем восстановить в этой точке перпендикуляр к оси Ox, найти точку пересечения этого перпендикуляра с графиком и найти длину этого перпендикуляра. Значение функции будет равно этому числу с соответствующим знаком.

Примерами графического изображения могут быть записи самопишущих приборов (барографы, осциллографы и т.д.).

2.2.3. Основные характеристики функций

Определение. Функция $f : X \to Y$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *четной*, если $\forall x \in X$ верно, что $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $\forall x \in X$ имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат. Примером четной является функция $y = x^2$ (рисунок 2.12), нечетной — $y = x^3$ (рисунок 2.13). Функция $y = 2^x$ (рисунок 2.18) имеет общий вид, т.е. не является как четной, так и нечетной.

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $A \subset X$, если $\forall x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$.

Определение. Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) на множестве $A \subset X$, если $\forall x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует *строгое* неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение. Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

Определение. Интервалы, на которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности* этой функции.

Функция $y = x^2$ (рисунок 2.12) монотонно убывает на интервале $(-\infty, 0]$ и возрастает на интервале $[0, +\infty)$, но не является монотонной на всей числовой оси. В данном случае $(-\infty, 0]$ — интервал убывания, $[0, +\infty)$ — интервал возрастания.

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in X \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *неограниченной*, если

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, x \in X : \quad |f(x)| > M.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ (рисунок 2.28) является ограниченной на $\mathbb{R}$, так как $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $|\operatorname{arctg} x| \leqslant \pi/2$, а функция $y = \operatorname{tg} x$ (рисунок 2.24) является неограниченной на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, так как не существует числа $M > 0$ такого, чтобы $\forall\, x \in (-\pi/2; \pi/2)$ имела место оценка $|\operatorname{tg} x| \leqslant M$.

Определение. Функция $f : X \to Y$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для всякого $x \in X$ значение $x + T$ также принадлежит области определения X и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называют *периодом функции*. Наименьший положительный период называют *основным периодом*.

Периодической является, например, функция $y = \sin x$ (рисунок 2.22). В качестве ее периода могут выступать числа $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, $\ldots$ Основной период всегда *единственный*. В данном случае он равен 2π.

2.2.4. Понятие обратной и сложной функции

Определение. Пусть дана функция $f : X \to Y$. Если каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (смотрите рисунок 2.8), то задана функция $\varphi : Y \to X$ такая, что $x = \varphi(y)$. Эта функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

Поскольку функция $f(x)$ является обратной к $f^{-1}(x)$, то функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ еще называют *взаимно обратными*.

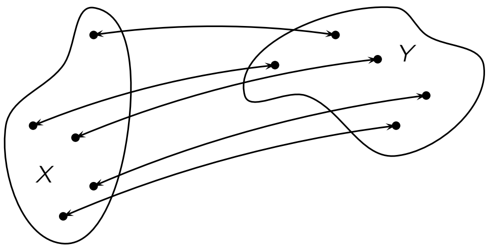

Рисунок 2.8

Для нахождения обратной функции $y = f^{-1}(x)$ следует решить уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x. Так, для функции $y = 2x$ существует обратная функция $x = y/2$. Для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[0, 1]$, существует обратная функция $x = \sqrt{y}$. Однако в случае, когда функция $y = x^2$ задана на отрезке $[-1, 1]$, обратной функции не существует, поскольку одному значению y может соответствовать несколько значений x. Например, значению $y = 1$ соответствуют $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Предположим, что для функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a; b]$, существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Пусть множеством значений функции f является отрезок $[c; d]$. Тогда этот отрезок является областью определения обратной функции f^{-1}, а отрезок $[a; b]$ — множеством ее значений. Графики функции $y = f(x)$ и ее обратной $x = f^{-1}(y)$ будут совпадать, если в первом случае аргумент откладывать вдоль оси Ox, а во втором — вдоль оси Oy (рисунок 2.9).

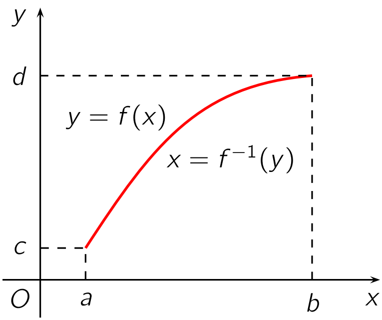

Рисунок 2.9

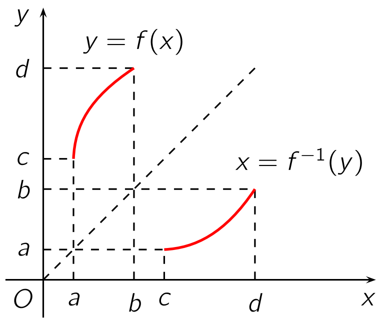

Рисунок 2.10

Если же условиться и в случае функции f, и в случае обратной функции f^{-1} независимую переменную обозначать через x, а зависимую — через y, то для того, чтобы получить график функции $y = f^{-1}(x)$ из графика $y = f(x)$, нужно первый график зеркально отобразить относительно биссектрисы I и III четвертей координатной плоскости (рисунок 2.10).

Определение. Пусть заданы функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ (смотрите рисунок 2.11). Функция $\varphi : X \to Z$, определяемая по формуле $\varphi(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией*, или *суперпозицией* функций $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

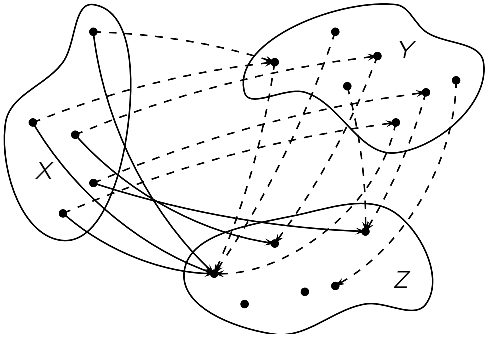

Рисунок 2.11

Например, функция $z = \sqrt{\cos x}$ является сложной функцией: суперпозицией тригонометрической функции $y = \cos x$ и степенной $z = y^{1/2}$. Функция $y = e^{2x+1}$ также является сложной функцией: суперпозицией линейной функции $t = 2x + 1$ и показательной $y = e^t$.

Определение. Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, называется *неявной*.

Например, уравнение $y^3 + x^2y - 2x^2 = 0$ определяет y как неявную функцию от x.

Пример 2.5. Для функции $y = \ln \frac{x}{2}$ найти обратную.

Решение. Очевидно, данная функция определена на промежутке $(0; \infty)$. Множеством ее значений является $\mathbb{R}$. С помощью потенцирования находим $e^y = \frac{x}{2}$. Значит, $x = 2e^y$ является обратной функцией к функции $y = \ln \frac{x}{2}$. Функция $x = 2e^y$ определена на $\mathbb{R}$, множеством ее значений является промежуток $(0; +\infty)$. $\square$

Пример 2.6. Представить сложную функцию $y = \arcsin 3^x$ в виде суперпозиции соответствующих функций.

Решение. Данная сложная функция является суперпозицией степенной функции $u = 3^x$ и обратной тригонометрической функции $y = \arcsin u$. □

2.2.5. Элементарные функции

Значительную роль в математике и ее приложениях играет небольшой набор функций, которые принято называть *основными элементарными функциями*. Перечислим их.

1. Простейшей является постоянная функция $y = C$.
2. *Степенная функция* имеет вид $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Примеры степенных функций с различными показателями приведены на рисунках 2.12–2.17.

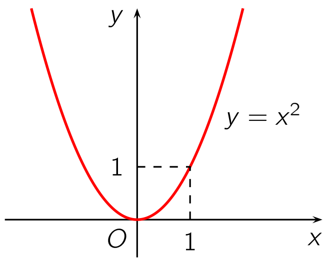

Рисунок 2.12

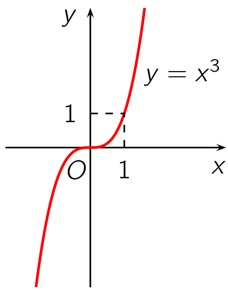

Рисунок 2.13

3. *Показательная функция* имеет вид $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. На рисунках 2.18 и 2.19 представлен график показательной функции в случаях, когда $a > 1$ и когда $0 < a < 1$.
4. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$ задана для $a > 0$, $a \neq 1$. Ее графики для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ изображены на рисунках 2.20 и 2.21.
5. *Тригонометрические функции* $y = \sin x$ (*синус*, рисунок 2.22), $y = \cos x$ (*косинус*, рисунок 2.23), $y = \operatorname{tg} x$ (*тангенс*, рисунок 2.24) и $y = \operatorname{ctg} x$ (*котангенс*, рисунок 2.25) являются периодическими.

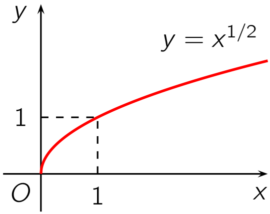

Рисунок 2.14

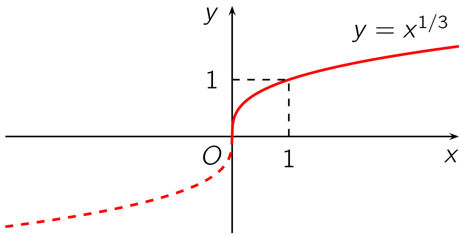

Рисунок 2.15

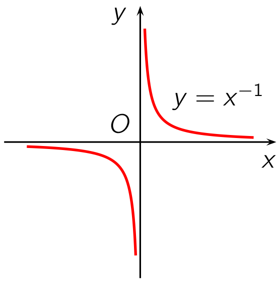

Рисунок 2.16

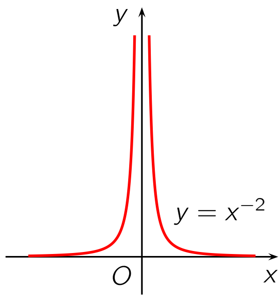

Рисунок 2.17

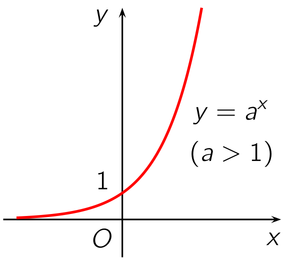

Рисунок 2.18

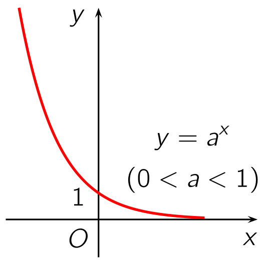

Рисунок 2.19

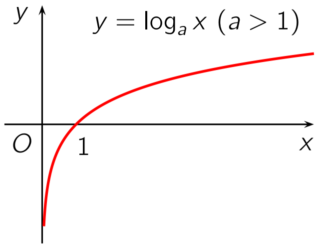

Рисунок 2.20

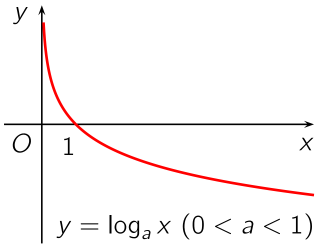

Рисунок 2.21

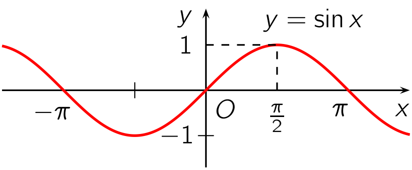

Рисунок 2.22

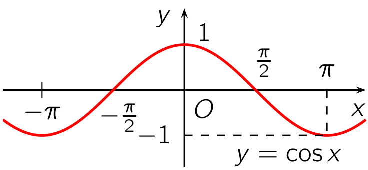

Рисунок 2.23

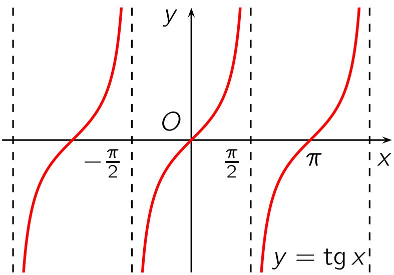

Рисунок 2.24

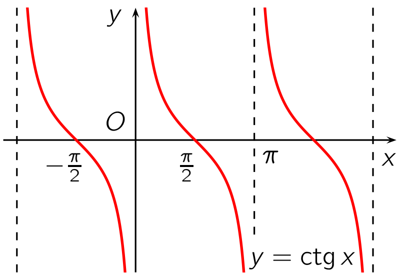

Рисунок 2.25

6. *Обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$ (*арксинус*), $y = \arccos x$ (*арккосинус*), $y = \operatorname{arctg} x$ (*арктангенс*) и $y = \operatorname{arcctg} x$ (*арккотангенс*) представлены на рисунках 2.26, 2.27, 2.28 и 2.29.

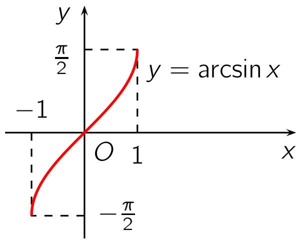

Рисунок 2.26

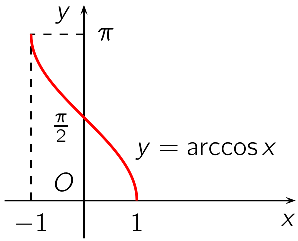

Рисунок 2.27

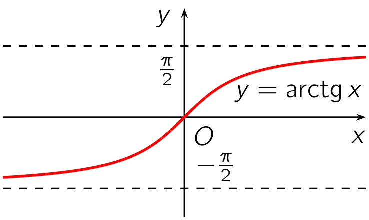

Рисунок 2.28

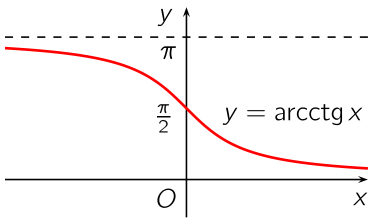

Рисунок 2.29

Определение. Функция, составленная из основных элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, называется *элементарной функцией*.

Следующие функции являются элементарными:

$$y = x - \operatorname{arctg} x, \quad y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = 2^{-x^2}.$$

Определение. Простейшими элементарными функциями являются *целая рациональная функция*, или *алгебраический многочлен*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а также *дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество целых и дробных рациональных функций образует класс *рациональных функций*.

Определение. Функции, не являющиеся элементарными, называются *неэлементарными*.

В качестве характерных примеров отметим неэлементарные функции $y = |x|$ и $y = \operatorname{sign} x$ (см. рисунок 2.6).

В данном курсе мы сосредоточим внимание преимущественно на элементарных функциях.

2.2.6. Построение графиков функций

Зная графики основных элементарных функций, рассмотрим *построение графиков функций* с помощью линейных преобразований.

Пусть задана функция $y = f(x)$ и ее график известен (см. рисунок 2.30).

- График функции $y = f(x)+c$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси Oy на величину, равную c (рисунок 2.31).
- График функции $y = f(x-a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига последнего вдоль оси Ox на величину, равную a (рисунок 2.32).
- График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси Oy (при $k < 1$ — сжатием). Если $k < 0$, то график функции $y = kf(x)$ получается из графика функции $y = -kf(x)$ «зеркальным» отображением относительно оси Ox (рисунок 2.33).
- График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением (при $0 < k < 1$) или сжатием (при $k > 1$) вдоль оси Ox. При $k < 0$ нужно «зеркально» отобразить график функции $y = f(-kx)$ относительно оси Oy.

Остановимся еще на одном часто встречающемся преобразовании графиков функций. Чтобы получить график функции $y = |f(x)|$, нужно участки графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси Ox, оставить без изменений, а участки графика, лежащие ниже оси Ox, «зеркально» отобразить относительно этой оси (рисунок 2.34).

Пример 2.7. Построить график функции $y = |1 + (x-1)^3|$.

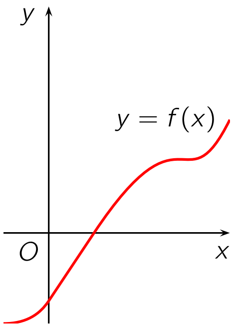

Рисунок 2.30

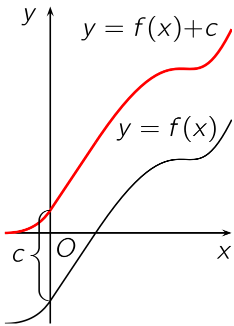

Рисунок 2.31

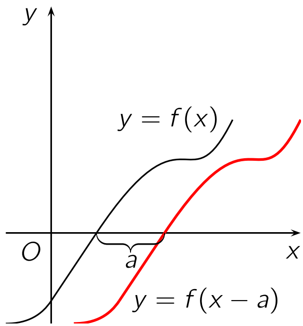

Рисунок 2.32

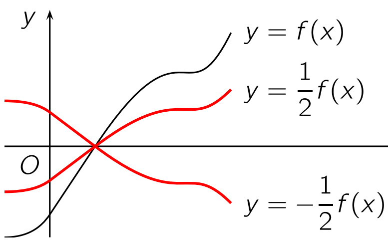

Рисунок 2.33

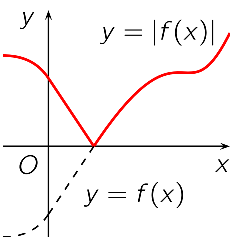

Рисунок 2.34

Решение. В качестве исходного возьмем график функции $y = x^3$ (рисунок 2.35). С помощью сдвига на величину $a = 1$ вправо вдоль оси Ox получим график функции $y = (x-1)^3$ (рисунок 2.36). Если сделать перенос полученного графика вдоль оси Oy на одну единицу вверх, то получим график функции $y = 1 + (x-1)^3$ (рисунок 2.37). Наконец, «зеркально» отображая ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox, получим график функции $y = |1 + (x-1)^3|$ (рисунок 2.38). □

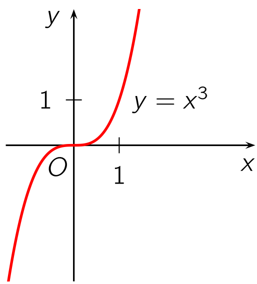

Рисунок 2.35

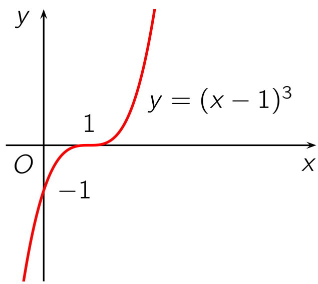

Рисунок 2.36

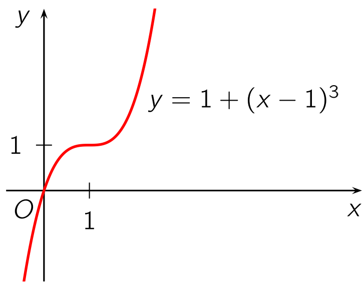

Рисунок 2.37

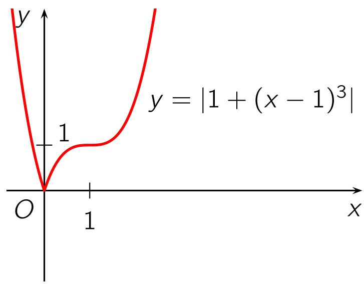

Рисунок 2.38

2.2.7. Функциональная зависимость в экономике

Применение математического аппарата в экономических исследованиях способно принести большую пользу. Но прежде, чем применить математические методы, исследователь должен составить *математическую модель* прикладной задачи. Такой математической моделью может, например, стать описание какого-либо экономического процесса в виде математической функции. Рассмотрим важнейшие функциональные зависимости, используемые в экономике.

Определение. *Функция издержек* $C = C(q)$ выражает зависимость издержек производства C от объема выпуска q.

Например, если функция издержек некоторого производства задается по формуле $C = 100\sqrt{q}$, то при объеме выпуска 25 единиц издержки составят

$$C = 100\sqrt{25} = 500$$

денежных единиц.

Определение. *Функция выручки* $R = R(q)$ задает зависимость выручки R от объема выпуска q.

Если продано q единиц товара по цене p за каждую единицу, то выручка $R = pq$.

Определение. *Функция прибыли* $P = P(q)$ — это зависимость прибыли P от объема выпуска q.

Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$P(q) = R(q) - C(q).$$

Определение. *Точка безубыточности* — это такой такой объем выпуска q, при котором издержки равны выручке: $C(q) = R(q)$.

Очевидно, что при достижении объемом выпуска точки безубыточности прибыль становится равной нулю.

Определение. *Функции спроса и предложения* $D = D(p)$ и $S = S(p)$ задают зависимость спроса и предложения от цены товара p (смотрите рисунок 2.39).

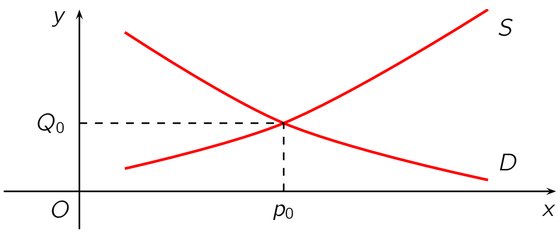

Рисунок 2.39

Естественно, что по мере увеличения цены предложение растет, а спрос падает.

Определение. *Точка рыночного равновесия* $(p_0; Q_0)$ — это точка пересечения линий спроса и предложения (смотрите рисунок 2.39). При этом цена p_0 называется *равновесной ценой*, объем продаж Q_0 называется *равновесным объемом продаж*.

Определение. *Производственная функция* выражает зависимость результатов производства от обуславливающих его факторов.

Определение. *Функция полезности* $u(x)$ дает субъективную числовую оценку полезности некоторого действия.

2.3. Предел функции. Два замечательных предела

2.3.1. Предел функции по Гейне

Определение. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x = a$ за исключением, быть может, самой точки a. Возьмем последовательность точек $\{x_n\}$ из этой окрестности, сходящуюся к точке a. Значения функции в точках последовательности, в свою очередь, образуют последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ (см. рисунок 2.40).

Число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Другими словами, число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$, если

$$\forall \{x_n\},\ x_n \neq a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Гейне*, или *на языке последовательностей*.

Предел функции f в точке $x = a$ обозначается следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Определение. Число b называется *пределом функции f при $x \to \infty$*, или *на бесконечности*, если для любой ББП $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Для обозначения предела функции на бесконечности применяется запись:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

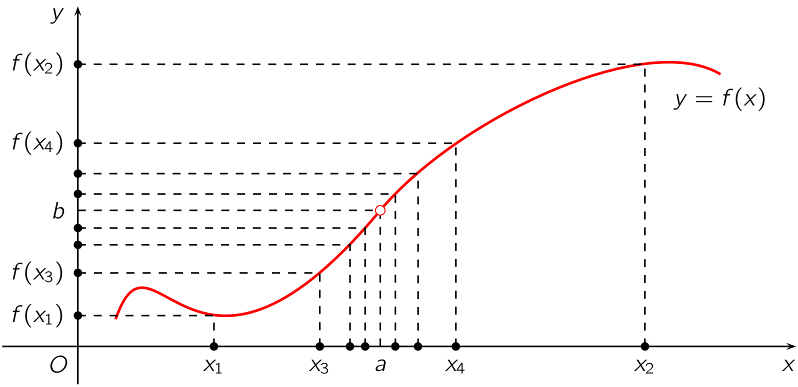

Рисунок 2.40

Пример 2.8. Постоянная функция $f(x) = C$ в каждой точке имеет предел. Действительно, пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, сходящаяся к a. Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = C$, и последовательность $\{f(x_n)\}$ будет иметь своим пределом число C.

Пример 2.9. Функция

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

определена всюду на $\mathbb{R}$, за исключением точки $x = 0$. Выясним, существует ли предел этой функции в точке $x = 0$. С этой целью возьмем следующие две последовательности.

Пусть первую последовательность составляют числа $x_n > 0$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что $\sin\frac{\pi}{x_n} = 1$, т.е.

$$\frac{\pi}{x_n} = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x_n = \frac{2}{4n+1}.$$

Очевидно, последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x = 0$, а соответствующая последовательность значений функции будет состоять из единиц и иметь своим пределом число 1.

Теперь возьмем другую последовательность значений аргумента $\{y_n\}$, где $y_n > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, такую, что $\sin \frac{\pi}{y_n} = 0$, т.е.

$$\frac{\pi}{y_n} = n\pi, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, в этом случае последовательность значений аргумента $\{y_n\}$ сходится к нулю, и соответствующая последовательность значения функции $\{\sin \frac{\pi}{y_n}\}$ также сходится к нулю.

Таким образом, в первом случае последовательность значений функции сходится к 1, а во втором — к 0. Это означает, что у функции $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ в точке $x = 0$ предел не существует. Это факт хорошо иллюстрируется на графике рассматриваемой функции (рисунок 2.41).

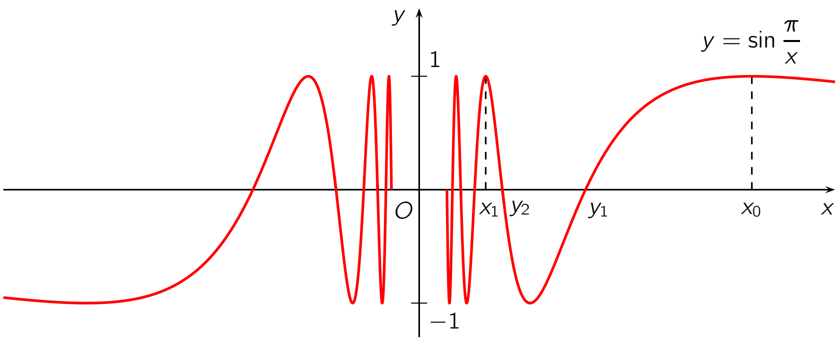

Рисунок 2.41

2.3.2. Предел функции по Коши

Имеет место и другое определение предела функции в точке.

Определение. Число b называется *предела* функции f в точке $x = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым оно бы ни было, существует положительное число δ такое, что для всякого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Это определение называется определением *предела функции по Коши*, или *на языке ε-δ*.

Можно доказать, что определения предела функции по Гейне и по Коши равносильны.

Определение предела функции по Коши можно переформулировать следующим способом.

Определение. Число b называется *пределом* функции f в точке $x = a$, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки b.

Это определение называется *определением предела функции на языке окрестностей* и выражает *геометрический смысл предела функции* (смотрите рисунок 2.42).

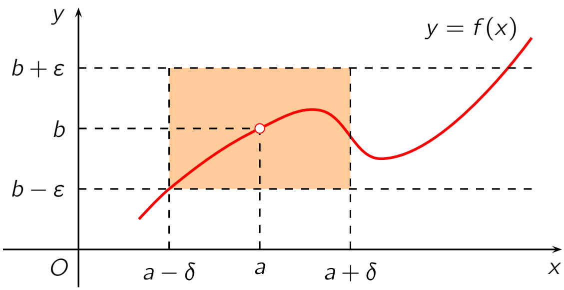

Рисунок 2.42

2.3.3. Односторонние пределы

Определение. Число c называется *правым пределом* функции f в точке $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{y_n\}$, члены которой больше a, соответствующая последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится к c (смотрите рисунок 2.43). Символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c.$$

Аналогичным образом определяется *левый предел*.

Определение. Число b называется *левым пределом* функции f в точке $x = a$, если (смотрите рисунок 2.43)

$$\forall \{x_n\},\ x_n < a \ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

В этом случае применяется обозначение: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

В случае, когда $a = 0$, используются обозначения:

$$\lim_{x \to +0} f(x), \quad \lim_{x \to -0} f(x).$$

Определение. Правый и левый пределы функции в точке называются *односторонними*.

Определение. Число b называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если для любой такой ББП $\{x_n\}$, что $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Аналогично определяется *предел функции при $x \to -\infty$*. Для записи таких пределов применяются обозначения:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

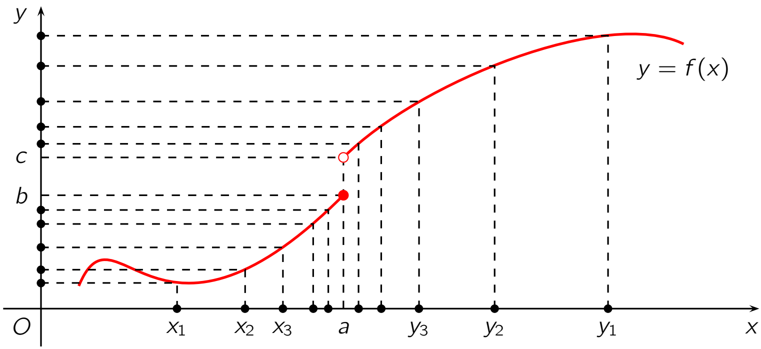

Рисунок 2.43

Сформулируем эти определения *на языке* ε*-*δ. Число b называется *правым (левым) пределом* функции f в точке $x = a$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x,\ a < x < a + \delta\ (a - \delta < x < a), \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пример 2.10. Функция $y = \operatorname{sign} x$ (рисунок 2.6) имеет односторонние пределы в точке $x = 0$. Очевидно,

$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции.

Теорема 2.6. *Для того, чтобы функция f имела предел в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны односторонние пределы. В этом случае предел функции равен односторонним пределам:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

2.3.4. Бесконечно малые функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to a$ (БМФ)*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Согласно определению предела функции по Коши функция $\alpha(x)$ является *бесконечно малой при $x \to a$* тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Обратим внимание на необходимость указания точки, в которой функция является бесконечно малой. Например, функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$, но не является бесконечно малой при $x \to 1$. В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \to 1} x^2 = 1.$$

Свойства БМФ

1. *Сумма любого конечного числа БМФ есть БМФ.* [Доказательство]

2. *Бесконечно малая функция при $x \to a$ является ограниченной в некоторой окрестности точки a.* [Доказательство]

3. *Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ и функции, ограниченной в некоторой окрестности точки a, есть бесконечно малая функция при $x \to a$.* [Доказательство]

4. *Произведение нескольких БМФ есть БМФ.* [Доказательство]

5. *Произведение БМФ на постоянную есть БМФ.* [Доказательство]

2.3.5. Бесконечно большие функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \to a$ (ББФ)*, если для любого числа $A > 0$, сколь большим оно бы ни было, существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > A$, т.е.

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta, \quad |f(x)| > A.$$

В этом случае применяется обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Если известно, что при $0 < |x-a| < \delta$ функция $f(x)$ принимает только *положительные* (*отрицательные*) значения, данное обозначение может быть дополнено путем указания знака бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right).$$

Не забывайте указывать точку, в которой функция является бесконечно большой. Например, функция $y = 1/(x-2)$ является бесконечно большой при $x \to 2$, но не является бесконечно большой при $x \to 1$.

Свойства бесконечно больших функций

1. *ББФ при $x \to a$ не ограничена ни в какой окрестности точки $x = a$.*

2. *Произведение ББФ при $x \to a$ и функции, имеющей ненулевой предел при $x \to a$, есть ББФ при $x \to a$.*

3. *Частное ББФ при $x \to a$ и функции, имеющей конечный предел при $x \to a$, есть ББФ при $x \to a$.*

4. *Произведение двух ББФ при $x \to a$ есть ББФ при $x \to a$.*

5. *Сумма ББФ при $x \to a$ и ограниченной в некоторой окрестности точки a функции есть ББФ при $x \to a$.*

Связь между БМФ и ББФ характеризует следующая теорема.

Теорема 2.7. *Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, причем $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то $1/\alpha(x)$ — ББФ при $x \to a$. И обратно, если $f(x)$ — ББФ при $x \to a$, то $1/f(x)$ — БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

2.3.6. Свойства предела функции

При исследовании свойств предела функции мы будем пользоваться рассмотренными ранее свойствами БМФ.

1. *Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to a$ тогда и только тогда, когда разность $\alpha(x) = f(x) - b$ является БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

2. *Если у функции $f(x)$ есть предел при $x \to a$, то этот предел единственный.* [Доказательство]

3. *Функция, имеющая предел при $x \to a$, ограничена в некоторой окрестности точки a.* [Доказательство]

4. *Произведение функции, имеющей предел при $x \to a$, на БМФ при $x \to a$ есть БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

5. *Если функция $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a.*
[Доказательство]

6. *Отношение БМФ при $x \to a$ и функции, имеющей отличный от нуля предел при $x \to a$, есть БМФ при $x \to a$.* [Доказательство]

7. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда*

а) $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = b + c$; *б)* $\lim\limits_{x\to a}\Big(f(x)-g(x)\Big) = b - c$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ *(при условии, что $c \neq 0$).*

[Доказательство]

Пример 2.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Решение. Здесь можно применить свойство 7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)^2+\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}2}=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}. \qquad \square$$

Пример 2.12. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

Поэтому свойство предела частного здесь применить нельзя. Однако заметим, что и

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1)=0.$$

Говорят, что здесь имеем *неопределенность* вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1, \quad x\neq 1.$$

Так как при рассмотрении предела функции в точке $x=1$ ее аргумент не принимает значения, равного 1, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3. \qquad \square$$

Пример 2.13. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}$.

Решение. Здесь имеем *неопределенность* вида $\frac{0}{0}$. Поэтому выражение под знаком предела следует преобразовать. Числитель содержит радикал, и в этом случае частное удобно умножить и разделить на «сопряженное» выражение $\sqrt{5+x^2}+3$. Будем иметь:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^2-3^2}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{5+x^2-9}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-4)\left(\sqrt{5+x^2}+3\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5+x^2}+3}=\frac{1}{6}.\quad\square$$

Пример 2.14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{99x^2+x+1}{x^2+99}$.

Решение. Числитель и знаменатель в отдельности при $x\to\infty$ являются ББФ. Поэтому непосредственно перейти к частному пределов на основании свойства 7 нельзя. Преобразуем функцию, стоящую под знаком предела. Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. в данном случае, x^2. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{99x^2+x+1}{x^2+99}=\lim_{x\to\infty}\frac{99+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{99}{x^2}}=\frac{99}{1}=99.\quad\square$$

2.3.7. Признак существования предела функции

Теорема 2.8 (о пределе промежуточной функции)**.** *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ *определены в некоторой окрестности точки* $x = a$, *кроме, быть может, самой точки* a, *и удовлетворяют неравенствам*

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x).$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$. [Доказательство]

2.3.8. Замечательные пределы

Теорема 2.9. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{2.5}$$

[Доказательство]

Определение. Равенство (2.5) называется *первым замечательным пределом*.

Следующие соотношения являются следствиями первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Теорема 2.10. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2.6}$$

Определение. Равенство (2.6), представляющее собой обобщение уже известного предела (2.2), называется *вторым замечательным пределом*.

Часто встречаются следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \tag{2.7}$$

а также

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k\qquad (k>0).\end{gathered} \tag{2.8}$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Пример 2.15. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Решение. Первый способ. Чтобы воспользоваться первым замечательным пределом, в выражении под знаком предела выполним замену переменной, полагая $3x=t$, $x=t/3$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{t}{3}}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3.$$

Второй способ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3. \qquad \square$$

Пример 2.16. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь удобно использовать замену $2x=t$, чтобы свести этот предел к следствию второго замечательного предела 2.7. Действительно, в этом случае имеем, что если $x\to 0$, то $t\to 0$. Значит,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e^2. \qquad \square$$

2.3.9. Эквивалентные бесконечно малые функции

С целью сравнения значений двух бесконечно малых при $x \to a$ функций в окрестности точки a вводится следующее определение.

Определение. Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* в окрестности точки a, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В этом случае пишут, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *при* $x \to a$.

Определение. *Таблицей эквивалентностей* называется следующий список часто встречаемых пар эквивалентных БМФ. Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то при $x \to a$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha(x) &\sim \alpha(x), & \operatorname{tg}\alpha(x) &\sim \alpha(x),\\
\arcsin\alpha(x) &\sim \alpha(x), & \operatorname{arctg}\alpha(x) &\sim \alpha(x),\\
\log_a\Big(1+\alpha(x)\Big) &\sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}, & \ln\Big(1+\alpha(x)\Big) &\sim \alpha(x),\\
a^{\alpha(x)-1} &\sim \alpha(x)\ln a, & e^{\alpha(x)-1} &\sim \alpha(x),\\
\Big(1+\alpha(x)\Big)^k &\sim k\alpha(x), & \sqrt{1+\alpha(x)} &\sim \frac{\alpha(x)}{2}.
\end{aligned}$$

Замечание 2.3. Из таблицы эквивалентностей следует, что функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ являются эквивалентными в окрестности точки $x = 0$, т.е. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$. Иначе говоря, значения многочлена $g(x) = x$ в окрестности точки $x = 0$ мало отличаются от значений функции $f(x) = \sin x$; или, можно сказать, многочлен $g(x) = x$ приближает функцию $f(x) = \sin x$ в окрестности точки $x = 0$ (смотрите рисунок 2.44).

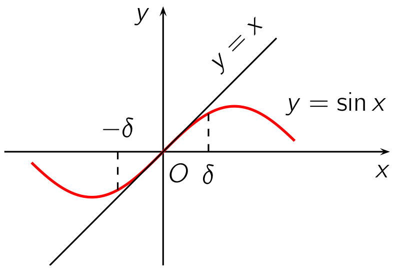

Рисунок 2.44

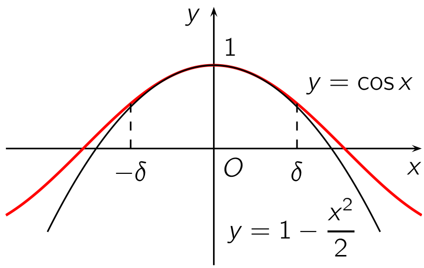

Рисунок 2.45

Пример 2.17. Показать, что $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

Решение. В самом деле,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = 1.$$

Значит, функция $\cos x$ приближается многочленом $1-x^2/2$ в окрестности точки $x=0$ (смотрите рисунок 2.45). □

Следующие две теоремы существенно упрощают вычисление некоторых пределов.

Теорема 2.11. *Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные БМФ при $x\to a$, а функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то $\alpha(x)f(x) \sim \beta(x)f(x)$ при $x \to a$.*

Теорема 2.12. *Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если любую из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.*

Пример 2.18. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ (сравните с примером 2.15).

Решение. Функция $\alpha(x) = 3x$ бесконечно малая при $x \to 0$. Согласно *таблице эквивалентностей* отсюда следует, что $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$. Тогда по теореме 2.12

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x} = 3. \qquad \square$$

2.4. Непрерывные функции

2.4.1. Непрерывность функции в точке

Из всего множества функций целесообразно выделить функции, обладающие свойством *непрерывности*. Грубо говоря, функция *непрерывна*, если ее график представляет сплошную линию, т.е. не имеет разрывов. Непрерывные функции обладают рядом интересных свойств.

Определение. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, включая саму точку a, называется *непрерывной в точке a*, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \tag{2.9}$$

т.е. предел функции и ее значение в точке a равны.

Например, функция $y = \operatorname{sign} x$ (смотрите рисунок 2.6) является *непрерывной* $\forall x \neq 0$. В точке $x = 0$ она не является непрерывной, так как в соответствии с теоремой 2.6 и задачей 2.10 в этой точке не существует ее предела.

Определение. Функция f называется *непрерывной справа в точке a* (рисунок 2.46), если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a),$$

и *непрерывной слева в точке a* (рисунок 2.47), если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a).$$

Для примера рассмотрим функцию $f(x) = [x]$, задающую целую часть числа x (смотрите рисунок 2.48). В точке $a = 2$ для этой функции

$$f(2) = 2, \qquad \lim_{x \to 2+0} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 2-0} f(x) = 1.$$

Итак, функция $f(x)$ непрерывна справа в точке $a = 2$, но не является непрерывной слева и непрерывной в обычном смысле в этой точке.

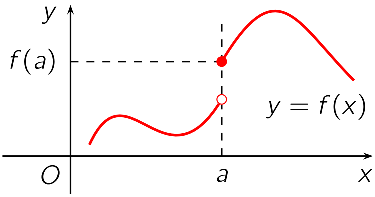

Рисунок 2.46

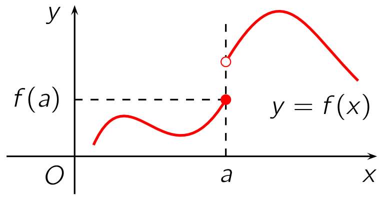

Рисунок 2.47

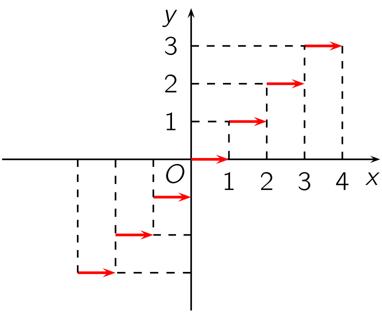

Рисунок 2.48

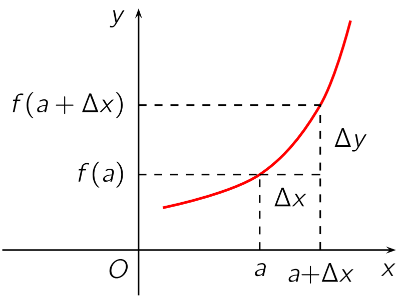

Рисунок 2.49

Теорема 2.13. *Для того, чтобы функция f была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в этой точке справа и слева.*

Эта теорема является по существу переформулированной теоремой 2.6 об односторонних пределах. Приведем еще одно определение непрерывной в точке функции. Если учесть, что соотношения $x \to a$ и $(x - a) \to 0$ равносильны, то получим, что условие непрерывности функции f в точке a (2.9) запишется в виде

$$\lim_{x-a\to 0}\Big(f(x) - f(a)\Big) = 0. \tag{2.10}$$

Определение. Разность $x - a$ называют *приращением аргумента* x в точке a и обозначают через Δx, а разность $f(x) - f(a)$ — *приращением функции* f в точке a и обозначают Δy:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a),$$

или, другими словами, $x = a + \Delta x$, $y = f(a) + \Delta y$.

Теперь условие (2.10) можно записать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Тогда новое определение непрерывности функции в точке будет следующим.

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке a*, если ее приращение в этой точке есть БМФ, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Данное определение выражает *геометрический смысл непрерывной в точке функции* (смотрите рисунок 2.49).

2.4.2. Теоремы о непрерывных в точке функциях

Рассмотрим для начала алгебраические свойства непрерывных в точке функций.

Теорема 2.14. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \ \big(g(a) \neq 0\big)$$

также непрерывны в точке a. [Доказательство]

Теорема 2.15 (о непрерывности сложной функции)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке y_0, где $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Другими словами, суперпозиция непрерывных функций есть функция непрерывная. [Доказательство]

Теорема 2.16 (о непрерывности обратной функции)**.** *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Тогда, если для функции f существует обратная функция $f^{-1} : Y \to X$, то она непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.*

2.4.3. Точки разрыва и их классификация

Определение. *Точками разрыва* функции f называются те точки, в которых функция f не является непрерывной.

В зависимости от своей «величины» разрывы допускают следующую классификацию.

Определение. Точка разрыва a функции $f(x)$ называется

1) *точкой разрыва первого рода*, если в ней существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$, причём, если они

   а) равны, то есть

   $$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x),$$

   то a называется *точкой устранимого разрыва*,

   б) различны, то есть

   $$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

   то a называется *точкой конечного разрыва*, а модуль разности левостороннего и правостороннего предела

   $$h = \left| \lim_{x\to a-0} f(x) - \lim_{x\to a+0} f(x) \right|$$

   — *скачком функции* $f(x)$ в точке a;

2) *точкой разрыва второго рода* в противном случае, то есть если в ней не существует либо равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов.

В точках устранимого разрыва в силу равенства односторонних пределов существует двухсторонний предел, доопределив функцию значением которого, можно сделать её непрерывной, то есть «устранить» разрыв.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Её график, называемый *мексиканской шляпой*, изображён на рисунке 2.50. Функция $f(x)$ не задана и, следовательно, терпит разрыв в нуле. По формуле (2.5) предел $f(x)$ в нуле равен единице, поэтому точка $a = 0$ является точкой устранимого разрыва. В самом деле, доопределив $f(x)$ в нуле по непрерывности, то есть положив

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

мы ликвидируем разрыв.

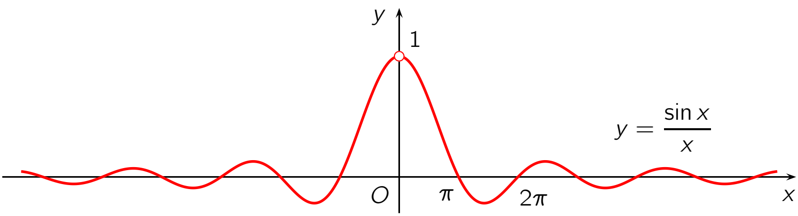

Рисунок 2.50

Функция $y = \operatorname{sign} x$ (смотрите рисунок 2.6) в точке $a = 0$ имеет конечный разрыв, так как левый и правый пределы здесь существуют и равны -1 и 1. Скачек $h = |-1-1| = 2$. Конечный разрыв в точке $a = 2$ терпит также функция $y = [x]$ (смотрите рисунок 2.48). Ее скачек $h = |1-2| = 1$.

Функция $y = \frac{1}{x}$ (смотрите рисунок 2.16) в точке $a = 0$ имеет разрыв второго рода, так как односторонние пределы в данном случае бесконечны. По той же причине точки $a_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются точками разрыва второго рода для функции $y = \operatorname{tg} x$ (смотрите рисунок 2.24). Функция

$y = \sin\frac{\pi}{x}$ (смотрите рисунок 2.41) в точке $a = 0$ терпит разрыв второго рода, поскольку ее односторонние пределы в этой точке не существуют.

Замечание 2.4. Проходя точку разрыва при вычерчивании графика, нам приходится отрывать карандаш от бумаги.

2.4.4. Непрерывность элементарных функций

Интересно, являются ли элементарные функции непрерывными. Рассмотрим вначале *простейшие элементарные функции*.

Постоянная функция $f(x) = c$ является непрерывной в каждой точке числовой прямой. Действительно, $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = c = f(a).$$

Непрерывной на всей числовой прямой является и функция $f(x) = x$. Действительно, $\forall\, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

Отсюда по теореме 2.14 получим, что степенная функция $f(x) = x^n$ для $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, так как x^n есть произведение n непрерывных функций $f(x) = x$.

Следовательно, по той же теореме 2.14 многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

есть функция, непрерывная на $\mathbb{R}$.

Рациональная функция $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, где p и q — многочлены, есть также непрерывная функция всюду на $\mathbb{R}$ за исключением тех точек, в которых знаменатель $q(x)$ обращается в нуль.

Можно доказать, что степенная функция $f(x) = x^a$ является непрерывной на всей своей области определения для любых $a \in \mathbb{R}$, а не только для натуральных показателей.

Теорема 2.17. *Тригонометрические функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *являются непрерывными на* $\mathbb{R}$. [Доказательство]

Следствие 2.2. *Тригонометрическая функция* $\operatorname{tg} x$ *является непрерывной во всех точках, где* $\cos x \neq 0$, *т.е.* $x \neq p/2 + \pi n$ *для* $n \in \mathbb{Z}$, *а функция* $\operatorname{ctg} x$ *— во всех точках, где* $\sin x \neq 0$, *т.е.* $x \neq \pi n$ *для* $n \in \mathbb{Z}$.

Можно также доказать, что функции $f(x) = a^x$ и $f(x) = \log_a x$ для $0 < a \neq 1$ также являются непрерывными в области своего существования: первая — на $\mathbb{R}$, вторая — на $(0, +\infty)$.

Исходя из определения элементарных функций, теоремы 2.14 об алгебраических свойствах непрерывных функций, теоремы 2.15 о непрерывности сложной функции и теремы 2.16 о непрерывности обратной функции можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.18 (о непрерывности элементарных функций)**.** *Любая элементарная функция непрерывна во всех точках области своего существования.*

Пример 2.19. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$.

Решение. Пусть $x > 0$. Тогда $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция непрерывна как частное двух непрерывных функций. Если же $x < 0$, то функция $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ непрерывна на промежутке $(-\infty; 0)$ по такой же причине. Осталось исследовать функцию в точке $x = 0$. Имеем:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \left(-\frac{\sin x}{x}\right) = -1.$$

Таким образом, левый и правый пределы существуют, конечны и различны. Следовательно, в точке $x = 0$ функция f имеет разрыв 1-го рода. □

Пример 2.20. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. По теореме 2.18 о непрерывности элементарных функций данная функция непрерывна на своей области определения, т.е. всюду на числовой оси, кроме точки $x = 0$. Исследуем функцию $f(x)$ в этой точке:

$$\lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода. $\square$

2.4.5. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, непрерывна справа в точке $x = a$ и непрерывна слева в точке $x = b$.

Теорема 2.19 (об устойчивости знака непрерывной функции)**.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a, и $f(a) \neq 0$. Тогда существует δ-окрестность точки a такая, что в этой окрестности функция f имеет тот же знак, что и $f(a)$.* [Доказательство]

Геометрический смысл теоремы об устойчивости знака состоит в том, что если функция f непрерывна в точке a и отлична в ней от нуля, то некоторая часть графика этой функции, проходящая через точку $(a; f(a))$, не пересекает ось Ox (рисунок 2.51).

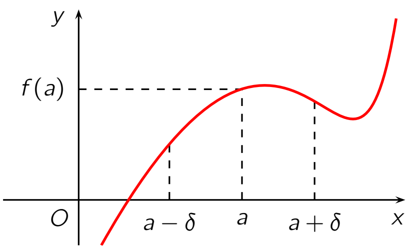

Рисунок 2.51

Теорема 2.20 (Больцано—Коши, первая)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a; b)$, в которой $f(c) = 0$.*

Геометрический смысл первой теоремы Больцано—Коши также очевиден. Поскольку функция f непрерывна на отрезке, то ее график состоит из одного «сплошного» куска. Эта кривая соединяет точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, одна из которых лежит ниже оси Ox, вторая — выше оси Ox (рисунок 2.52). Следовательно, существует точка c на оси Ox, в которой график пересекает ось Ox.

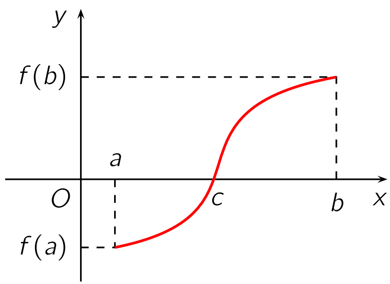

Рисунок 2.52

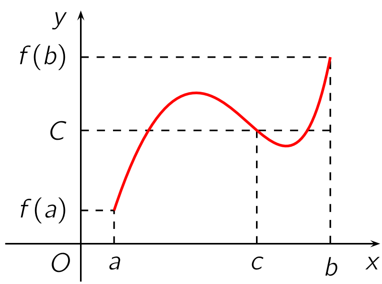

Рисунок 2.53

Первую теорему Больцано—Коши легко обобщить.

Теорема 2.21 (Больцано—Коши, вторая)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) \neq f(b)$. Тогда, если C — любое число, лежащее строго между $f(a)$ и $f(b)$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $f(c) = C$.*

[Доказательство]

Другими словами, теорема 2.21 утверждает, что непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция принимает любое свое промежуточное значение.

Геометрический смысл второй теоремы Больцано—Коши проиллюстрирован рисунком 2.53.

Теорема 2.22 (Вейерштрасса, первая)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Таким образом, первая теорема Вейерштрасса утверждает, что если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in [a; b] \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Заметим, что если в первой теореме Вейерштрасса вместо отрезка $[a; b]$ рассматривать интервал $(a; b)$ или какой-либо полуинтервал, то функция $f(x)$ может оказаться и неограниченной. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на полуинтервале $(0; 1]$, но не ограничена на нем.

Теорема 2.23 (Вейерштрасса, вторая)**.** *Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f достигает в некоторых точках этого отрезка своих максимума и минимума, т.е. существуют точки α и β, принадлежащие $[a; b]$, для которых*

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(\beta).$$

Из второй теоремы Вейерштрасса, в частности, следует, что непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

Глава 3

Теория дифференцирования

3.1. Производная. Вывод таблицы

3.1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки $x = a$. Если независимой переменной x придать приращение Δx в этой точке, то функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. По определению непрерывной функции, если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$.

Если же мы хотим получить представление, как быстро изменяется значение функции при изменении независимой переменной в окрестности точки $x = a$, то должны сопоставить или сравнить каким-то образом приращение аргумента Δx и приращение функции Δy. С целью более глубокого изучения функции, исследования скорости изменения ее значений вводится понятие производной — одно из важнейших понятий математики.

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Для обозначения производной используются символы:

$$f'(a), \qquad y'(a), \qquad \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, по определению

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Определение. Операцию нахождения производной называют *дифференцированием*.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in X$, то производную можно рассматривать как функцию переменной x на X.

Из определения производной следует и способ ее вычисления.

Пример 3.1. Найти производную функции $f(x) = x^2 + 2x + 2$ в точке $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Придадим приращение Δx аргументу в точке $x = a$. Найдем соответствующее приращение Δy функции $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = ((a + \Delta x)^2 + 2(a + \Delta x) + 2) - (a^2 + 2a + 2) = \\ = 2a\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x = (2a + 2 + \Delta x)\Delta x.$$

Теперь воспользуемся формулой (3.1):

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2a + 2 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} (2a + 2 + \Delta x) = 2(a + 1).$$

Таким образом, $f'(a) = 2(a + 1)$, $a \in \mathbb{R}$. □

Пример 3.2. Найти производную функции $f(x) = |x - 1|$ в точке $x = 1$.

Решение. Исходя из определения производной, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|1 + \Delta x - 1| - |1 - 1|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Очевидно, в этом случае существуют односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1,$$

неравные между собой. Таким образом, производная функции $f(x) = |x - 1|$ в точке $x = 1$ не существует.

Учитывая, что существуют вышеуказанные односторонние пределы, в этом случае говорят, что у рассматриваемой функции существуют односторонние производные в точке $x = 1$ (правая и левая, соответственно). □

Выясним связь между существованием производной в точке и непрерывностью функции.

Теорема 3.1. *Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$, то она непрерывна в этой точке.* [Доказательство]

Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывной в точке, но не иметь в ней производной. Это видно на примере 3.2. Функция $y = |x - 1|$ в точке $x = 1$ непрерывна, но не имеет в ней производной.

3.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b). Предположим, что кривая AB является графиком этой функции, рисунок 3.1. Пусть $M(x_0; f(x_0))$ — какая-либо точка графика. Придадим аргументу приращение Δx в точке x_0. Соответствующую точку на графике обозначим через $P(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$.

Через точки M и P проведем прямую и назовем ее секущей. Если точку P устремить по кривой AB к точке M, то положение секущей будет, вообще говоря, изменяться.

Определение. *Касательной* к кривой в точке M называется предельное положение (если оно существует) секущей MP, когда точка P неограниченно приближается к точке M.

Обозначим через a угол между касательной MT и осью Ox (или, что то же самое, между касательной MT и прямой MN, рисунок 3.1, а через φ — угол между секущей MP и осью Ox, т.е. α — угол наклона касательной MT к оси Ox, а φ — угол наклона секущей MP к оси Ox. Очевидно, $\lim\limits_{P\to M} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha$.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \frac{NP}{MN}$, то будем иметь, что $\lim\limits_{P\to M} \frac{NP}{MN} = \operatorname{tg}\alpha$. Но из рисунка 3.1 видно, что

$$NP = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \text{ а } MN = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$$

или $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

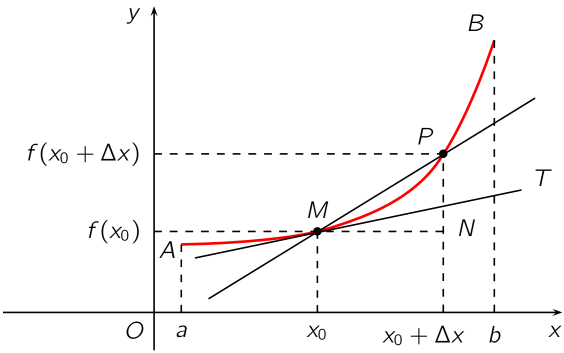

Рисунок 3.1

Геометрический смысл производной функции состоит в том, что производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ есть тангенс угла наклона касательной к ее графику в точке $(x_0; f(x_0))$. Другими словами, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M(x_0; y_0)$.

Теперь, учитывая уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом (1.6), несложно получить уравнение касательной:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.2}$$

Определение. Прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и перпендикулярная касательной, называется *нормалью* к графику в этой точке.

Учитывая условие перпендикулярности двух прямых (1.13), можем записать уравнение нормали:

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0), \tag{3.3}$$

полагаем, что $f'(x_0) \neq 0$. Если же $f'(x_0) = 0$, то нормалью будет прямая $x = x_0$.

Пример 3.3. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2x + 3x^{-2}$ в точке $(1; 5)$.

Решение. Полагаем $x_0 = 1$. Очевидно, $y(1) = 5$. Найдем $y'(1)$:

$$y' = 2 - 6x^{-3}, \quad y'(1) = 2 - 6 = -4.$$

Теперь воспользуемся формулой (3.2) и запишем уравнение касательной в точке $(1; 5)$:

$$y - 5 = (-4)(x - 1), \quad y - 5 = -4x + 4, \quad y = -4x + 9.$$

Уравнение нормали будет иметь следующий вид:

$$y - 5 = \frac{1}{4}(x - 1), \quad y = \frac{1}{4}x + 4{,}8. \qquad \square$$

3.1.3. Физический смысл производной

Пусть некоторая материальная точка M движется прямолинейно и задан закон ее движения $s = s(t)$, т.е. известно расстояние $s(t)$ от точки M до некоторой начальной точки отсчета в каждый момент времени t. В момент времени t_0 точка пройдет расстояние $s(t_0)$, а в момент времени $t_0 + \Delta t$ — расстояние $s(t_0 + \Delta t)$. За промежуток времени Δt точка M пройдет расстояние $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ можно рассматривать как среднюю скорость движения на промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$. Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее соответствующая средняя скорость будет характеризовать движение точки в момент времени t_0. Поэтому предел средней скорости движения при $\Delta t \to 0$ называют скоростью движения (или мгновенной скоростью движения) точки M в момент времени t_0 и обозначают $v(t_0)$, т.е.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Но выражение справа есть $s'(t_0)$. Таким образом,

$$v(t_0) = s'(t_0),$$

т.е. скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пройденного расстояния по времени.

Понятие скорости, заимствованное из механики, удобно использовать и при изучении производной функции. Какую бы зависимость ни отражала бы функция $y = f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения зависимой переменной y относительно аргумента x, а $y'(x)$ есть скорость изменения y в точке x.

3.1.4. Правила дифференцирования

Теорема 3.2. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ в точке x имеют производные, то сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производную в этой точке (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) и справедливы следующие формулы:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \tag{3.4}$$

$$(uv)' = u'v + v'u; \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $(u + v)' = u' + v'$. Воспользуемся определением производной:

$$\begin{aligned}(u+v)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' + v'.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}(u-v)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) - v(x+\Delta x)) - (u(x) - v(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u' - v'.\end{aligned}$$

Для вывода формулы нахождения производной произведения поступим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(uv)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] = \\
&= u'v+v'u.
\end{aligned}
$$

Теперь найдем производную функции $\frac{1}{v}$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{v}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)} = \\
&= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} = \\
&= -v'(x)\cdot\frac{1}{v^2(x)} = -\frac{v'}{v^2}.
\end{aligned}
$$

Осталось получить формулу для производной частного:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u\cdot\frac{1}{v}\right)' = u'\cdot\frac{1}{v}+u\cdot\left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'}{v}-\frac{uv'}{v^2} = \\
&= \frac{u'v-v'u}{v^2}.
\end{aligned}
$$

□

3.1.5. Таблица производных основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функции

1. $(C)' = 0$, C — const.

Доказательство. Пусть $f(x) = C$. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0. \qquad \square$$

2. $(\sin x)' = \cos x$.

Доказательство. Имеем, что

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Первый предел вычислили исходя из первого замечательного предела, второй — исходя из непрерывности функции $\cos x$. $\square$

3. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство. Поступим так же как и при выводе формулы 2:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x = -\sin x. \qquad \square$$

4. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Доказательство. На основании формул 2, 3 и правила дифференцирования частного (3.6) имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = $$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \square$$

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Доказательство. Поступим аналогичным образом, как и при выводе формулы для производной $\operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = $$
$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \square$$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$.

Доказательство. Пользуясь определением производной (3.1), следствием из второго замечательного предела и непрерывностью функции a^x, получим

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = $$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \ln a. \qquad \square$$

7. $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. Положив $a = e$ в формуле 6, получим

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x. \qquad \square$$

Теорема 3.3. *Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в соответствующей точке y_0, $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$(f^{-1}(y_0))' = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По теореме 2.16 обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует, является монотонной и непрерывной в некоторой окрестности точки y_0. Придадим аргументу y некоторое приращение $\Delta y \neq 0$ в этой точке. Соответствующее приращение Δx в силу строгой монотонности тоже будет отличным от нуля. Следовательно,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x},$$

причем, если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$. Перейдем к пределу в этом равенстве. Будем иметь

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x)}$$

или

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Доказательство. Логарифмическую функцию $y = \log_a x$ можно рассматривать как обратную показательной функции $x = a^y$. Поэтому, применяя теорему 3.3, получим

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}. \qquad \square$$

9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Доказательство. Полагая $a = e$ в формуле 8, получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}. \qquad \square$$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Функция $y = \arcsin x$ является обратной для функции $x = \sin y$. Поэтому, в силу теоремы 3.3

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Корень взят со знаком плюс, так как

$$y = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad \cos y > 0. \qquad \square$$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. Функция $y = \arccos x$ является обратной для функции $x = \cos y$. Поэтому, в силу теоремы 3.3

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Корень взят со знаком плюс, так как

$$y = \arccos x \in (0; \pi) \quad \text{и} \quad \sin y > 0. \qquad \square$$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$. Поэтому, в силу теоремы 3.3

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \square$$

13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Доказательство. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной для функции $x = \operatorname{ctg} y$. Поэтому, в силу теоремы 3.3

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\sin^2 y =$$
$$= -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \square$$

Теорема 3.4. *Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную, а функция $y = f(u)$ имеет в соответствующей точке u_0, $u_0 = \varphi(x_0)$, производную, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x_0 и справедлива следующая формула:*

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0). \qquad (3.7)$$

Доказательство. По определению производной (3.1)

$$f'(u_0) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0+\Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u}.$$

На основании свойства предела функции 1 можем записать, что

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha(\Delta u),$$

где $\alpha(\Delta u)$ есть БМФ при $\Delta u \to 0$. Следовательно,

$$\Delta f(u_0) = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u.$$

Разделив обе части этого равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Теперь перейдем к пределу, когда $\Delta x \to 0$. Заметив, что и $\Delta u \to 0$, будем иметь:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Остается учесть, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = \Big(f\big(\varphi(x_0)\big)\Big)', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = 0\cdot\varphi'(x_0) = 0$$

и получим формулу (3.7). Теорема 3.4 доказана. □

14. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Доказательство. Преобразуем исходную функцию

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha\ln x}.$$

Тогда, применив теорему 3.4, правила 7 и 9, получим

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}. \qquad \square$$

Таким образом, найдены производные всех простейших элементарных функций, и можно составить следующую таблицу (в правом столбце считаем u некоторой функцией, зависящей от x, т.е. $u = u(x)$).

Формулы производных, приведенные выше в таблице, правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и правило дифференцирования сложной функции являются основными формулами дифференцирования функции. С их помощью можно найти производную любой элементарной функции.

Пример 3.4. Найти производную функции $y = \cos x + x \operatorname{arctg} x + 2$.

Решение. Вначале применим правило дифференцирования суммы (3.4):

$$y' = (\cos x)' + (x \operatorname{arctg} x)' + (2)'.$$

Затем воспользуемся таблицей производных и правилом дифференцирования произведения (3.5):

$$y' = -\sin x + (x)' \operatorname{arctg} x + x(\operatorname{arctg} x)' + 0 = -\sin x + \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}. \qquad \square$$

Пример 3.5. Найти производную функции $y = \sin(2x + 1)$.

Решение. Данная функция является сложной, $y = \sin u$, $u = 2x + 1$. Обе эти функции имеют производные, и по правилу дифференцирования сложной функции (3.7) находим

$$y' = (\sin u)'(2x + 1)' = \cos u \cdot 2 = 2\cos(2x + 1). \qquad \square$$

Таблица 3.1

$(C)' = 0$	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha \neq 0)$ $(x)' = 1$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'\ (\alpha \neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(a^x)' = a^x \ln a,\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u',\ (a > 0,\ a \neq 1)$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a},\ (a > 0,\ a \neq 1)$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

3.1.6. Логарифмическая производная

Предположим, что

$$f(x) > 0, \quad x \in (a, b).$$

Рассмотрим функцию $y = \ln f(x)$. Дифференцируя эту функцию как сложную, $y = \ln u$, $u = f(x)$, получим

$$\Big(\ln f(x)\Big)' = (\ln u)' f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{3.8}$$

Определение. Производная от логарифма функции называется *логарифмической производной* этой функции, а последовательное применение операции логарифмирования, а затем дифференцирования называется *логарифмическим дифференцированием*.

С помощью этого метода найдем, например, производную показательно-степенной функции $y = (u(x))^{v(x)}$, где u, v — некоторые функции, имеющие в точке x производные, $u(x) > 0$. Применяя формулу (3.8), получим

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln\Big(u(x)\Big)^{v(x)}\right)' = \Big(v(x)\ln u(x)\Big)'.$$

В правой части имеем производную произведения:

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\,.$$

Следовательно,

$$y' = \Big(u(x)\Big)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right). \tag{3.9}$$

Пример 3.6. Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Решение. Если положить $u = x$ и $v = x$, то можно применить формулу (3.9) и сразу записать производную. Мы же повторим рассуждения, использованные при выводе формулы (3.9). Прологарифмируем исходную функцию

$$\ln y = x \ln x.$$

Дифференцируя это равенство как тождество, т.е. дифференцируя обе его части, находим

$$\frac{y'}{y} = (x \ln x)' = \ln x + 1.$$

Следовательно,

$$y' = x^x(1 + \ln x). \qquad \square$$

3.1.7. Производная неявной функции

Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно:

$$F(x, y) = 0.$$

Для нахождения производной y' будем дифференцировать обе части этого равенства, считая, что x — независимая переменная, а y есть функция переменной x. Из полученного уравнения найдем y'. Проиллюстрируем этот метод на следующем примере.

Пример 3.7. Найти производную функции y, заданной уравнением

$$y = \cos(x + 3y).$$

Решение. Дифференцируем обе части уравнения:

$$y' = -\sin(x + 3y)(x + 3y)', \quad y' = -\sin(x + 3y)(1 + 3y').$$

Решаем полученное уравнение относительно y':

$$y' + 3\sin(x + 3y)y' = -\sin(x + 3y),$$
$$y' = \frac{-\sin(x + 3y)}{1 + 3\sin(x + 3y)}. \qquad \square$$

3.1.8. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке $x \in (a; b)$. Тогда на промежутке $(a; b)$ будет определена функция $f'(x)$, и тоже можно говорить о ее производной.

Назовем $f'(x)$ производной первого порядка функции $f(x)$.

Определение. *Производной второго порядка* функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует.

Обозначается вторая производная символами

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Производную от второй производной называют производной третьего порядка функции $f(x)$ и обозначают y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Определение. *Производной n-го порядка* функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует.

Производная n-го порядка обозначается

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Производные высших порядков широко применяются, в частности, в физике. Выясним, например, физический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно и пройденный ею путь описывается уравнением $s = s(t)$, t — время. Как известно из раздела 3.1.3, первая производная от пути по времени есть мгновенная скорость движения точки в момент времени t, $v(t) = s'(t)$. Тогда вторая производная от пути по времени равна скорости изменения функции скорости $v(t)$.

А это есть ускорение $a(t)$ материальной точки в момент времени t. Таким образом, вторая производная от пути по времени есть ускорение, т.е.

$$a(t) = s''(t).$$

Теперь найдем производные n-го порядка для некоторых элементарных функций.

1) Найдем $y^{(n)}$ степенной функции $y = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Очевидно,

$$\begin{gathered} y' = \alpha x^{\alpha-1}, \\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \end{gathered}$$

Если предположить, что $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{gathered} y^{(k)} = (x^k)^{(k)} = k(k-1)\ldots 2\cdot 1 = k!, \\ y^{(k+1)} = (k!)' = 0. \end{gathered}$$

2) Замечательным свойством обладает показательная функция $y = e^x$. Для любого n справедлива формула

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{3.10}$$

3) Найдем n-производную функции $y = \sin x$. Будем иметь

$$\begin{gathered} y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\ y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right). \end{gathered}$$

С помощью метода математической индукции можно показать, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.11}$$

Аналогично,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Приведем еще одну формулу для нахождения производной n-го порядка. Пусть $y = uv$, где u и v — некоторые функции, имеющие производные любого порядка. Будем последовательно находить производные от функции y:

$$\begin{aligned}
y' &= u'v + uv',\\
y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'',\\
y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =\\
&= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.
\end{aligned}$$

Правые части полученных формул похожи на разложение степеней бинома Ньютона $(u+v)^n$, $n = 1, 2, 3$. Только вместо показателей степени стоят порядки производных. Сами функции u и v следует рассматривать в этом случае как производные нулевого порядка $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$.

Тогда можно записать формулу для производной n-го порядка:

$$\begin{aligned}
y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' +\\
+ \ldots + \frac{n(n-k)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + u^{(0)}v^{(n)}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Эта формула называется *формулой Лейбница*. Ее можно доказать методом математической индукции.

Пример 3.8. Найти n-ую производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение. Полагаем $u = \sin x$, $v = x^2$ и применим формулу Лейбница (3.12). Найдем

$$u^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v''' = 0,\ v^{(n)} = 0,\ n = 3, 4, \ldots$$

Подставляя в формулу (3.12), имеем

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + n\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)2x + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!}\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)2 = \\ &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)x^2 + 2nx\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ n(n-1)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

□

3.1.9. Применения производной в экономике

Пусть $q = q(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t на некотором предприятии. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0.

Очевидно, за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $q_0 = q(t_0)$ до значения $q_0 + \Delta q = q(t_0 + \Delta t)$. Средняя производительность труда Q_{cp} за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ будет равна

$$Q_{cp} = \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Производительность труда Q в момент времени t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Пусть функция $C = C(q)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции. Предположим, что количество продукции увеличивается на Δq, т.е. равно $q + \Delta q$, соответствующие издержки производства будут равны $C(q + \Delta q)$.

Тогда приращению количества продукции Δq соответствует приращение издержек производства продукции

$$C(q + \Delta q) - C(q) = \Delta C(q).$$

Среднее приращение издержек производства будет равно $\frac{\Delta C(q)}{\Delta q}$. Это есть приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции. Если перейти к пределу, когда $\Delta q \to 0$, то получим значение *предельных издержек производства*

$$MC = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C(q)}{\Delta q} = C'(q).$$

Аналогично, если выручка от реализации q единиц товара описывается функцией $R = R(q)$, то *предельная выручка* определяется как

$$MR = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R(q)}{\Delta q} = R'(q).$$

Подобным образом в экономике определяются другие предельные понятия. Например, широко применяется понятие эластичности функции.

Определение. *Эластичностью* функции $y = f(x)$ относительно переменной x называется величина

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)} f'(x). \tag{3.13}$$

Эластичность функции характеризует процент прироста зависимой переменной, соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Пример 3.9. Найти эластичность функции $y = x^3 + 2$.

Решение. Применяя формулу (3.13), имеем

$$E_x(y) = \frac{x}{x^3+2}(x^3+2)' = \frac{3x^3}{x^3+2}\,.$$

В частности, если $x = 2$, то

$$E_x(y) = \frac{3 \cdot 8}{8+2} = 2{,}4.$$

Это означает, что если переменная x возрастает на 1%, то переменная y увеличится на 2,4%. □

3.2. Дифференцируемость функции. Основные теоремы дифференциального исчисления

3.2.1. Понятие дифференцируемости функции в точке

Выше указывалось, что операция нахождения производной называется дифференцированием. Применение этого термина оправдано следующими рассуждениями.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x, если ее приращение y в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{3.14}$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$.

Теорема 3.5. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную $f'(x)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда справедлива формула (3.14). Разделим обе части этого равенства на Δx и получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

По свойству предела функции 1 это означает, что существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

т.е.

$$f'(x) = A.$$

Достаточность. Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда по тому же свойству 1 имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

т.е. функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. $\square$

Таким образом, в формуле 3.14 можно положить $A = f'(x)$.

3.2.2. Дифференциал функции и приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда приращение функции в этой точке может быть записано по формуле (3.14) в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Второе слагаемое $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ является БМФ более высокого порядка по сравнению с функцией $A \cdot \Delta x$ (при условии, что $A \neq 0$), т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{A\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{A} = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $A \cdot \Delta x$ является главной частью приращения Δy, причем это слагаемое есть линейная относительно Δx функция.

Определение. Главная линейная относительно Δx часть приращения функции

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

в точке x называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в этой точке.

Для обозначения дифференциала используется символ

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

Если $A = 0$, то $A \cdot \Delta x$ не является, вообще говоря, главной частью приращения Δy. В этом случае по определению полагают $dy = 0$.

Учитывая теорему 3.5, а именно, что $A = f'(x)$, можно записать

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{3.15}$$

Теперь найдем дифференциал функции $f(x) = x$. Применяя формулу (3.15), имеем

$$dy = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Поэтому определяют дифференциал независимой переменной x следующим образом: полагают $dx = \Delta x$. Тогда формулу (3.15) можно записать в виде

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{3.16}$$

Заметим, что именно последнее равенство объясняет обозначение производной $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x)}{dx}$.

Обратимся снова к формуле (3.15). На основании вышеизложенного можно записать, что $\Delta y \approx dy$ или

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \tag{3.17}$$

Формула (3.17) часто используется в приближенных вычислениях.

Пример 3.10. Найти приближенное значение $e^{0,2}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.17). Очевидно, в данном случае $f(x) = e^x$. Положим $x = 0$, $\Delta x = 0{,}2$.

Будем иметь:

$$e^{x+\Delta x} - e^x \approx (e^x)'\Delta x$$

или

$$e^{0,2} - e^0 = e^0 \cdot 0{,}2, \quad e^{0,2} \approx 1 + 0{,}2 = 1{,}2.$$

Итак, $e^{0,2} \approx 1{,}2$. Более того, при малых Δx и $x = 0$ мы получим формулу

$$e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x. \qquad \square$$

При применении формулы (3.17) важно правильно выбрать точку x и Δx.

3.2.3. Геометрический смысл дифференциала

Проведем к графику функции $y = f(x)$ касательную MT в точке $M(x, y)$ (см. рисунок 3.2).

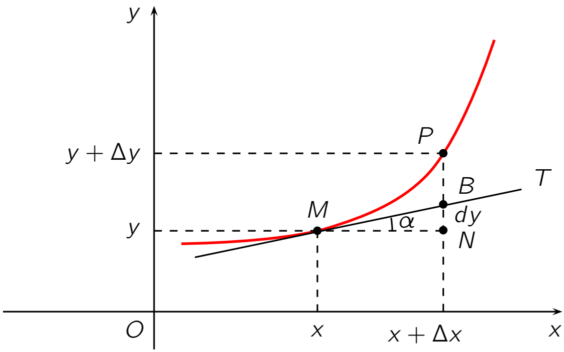

Рисунок 3.2

Очевидно, $MN = \Delta x$, $PN = \Delta y$. Из прямоугольного треугольника MNB находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BN}{MN} \quad \Rightarrow \quad BN = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x.$$

Согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Значит,

$$BN = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Теперь сравим последнюю формулу с формулой (3.16). Получим

$$dy = BN.$$

Геометрический смысл дифференциала функции состоит в том, что дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

3.2.4. Теоремы о среднем

Рассматриваемые в этом пункте теоремы о среднем значении называют еще основными теоремами о дифференцируемых функциях.

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_a + \delta): \quad f(x) < f(x_0).$$

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_a + \delta): \quad f(x) > f(x_0).$$

Определение. Локальные максимумы и локальные минимумы функции называются *локальными экстремумами*.

Локальными называются свойства функции, которые имеют место в некоторой окрестности той или другой точки.

Теорема 3.6 (теорема Ферма)**.** *Пусть функция f определена на интервале $(a; b)$ и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция имеет локальный минимум или максимум (рисунок 3.3), то касательная в этой точке к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox, т.е. угол наклона касательной к оси Ox равен нулю, и $f'(x_0) = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Теорема 3.7 (теорема Ролля)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка $[a; b]$ принимает равные значения, $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $c \in (a; b)$, в которой $f'(c) = 0$.*

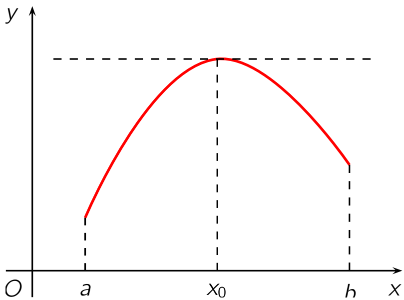

Рисунок 3.3

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что у графика непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции, принимающей на концах равные значения и дифференцируемой на $(a; b)$, существует точка $(c; f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рисунок 3.4).

Иначе говоря, такая функция внутри отрезка $[a, b]$ будет иметь экстремум (например, в точке $c \in (a; b)$) и по теореме Ролля $f'(c) = 0$.

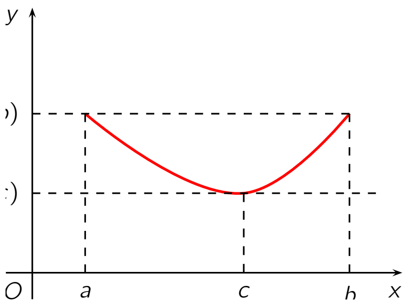

Рисунок 3.4

Теорема 3.8 (теорема Лагранжа)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что справедлива формула:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{3.18}$$

Рассмотрим *геометрический смысл теоремы Лагранжа* (рисунок 3.5). Из ΔMKN имеем, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{NK}{MK} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

т.е. левая часть равенства (3.18) есть тангенс угла наклона секущей MN к оси Ox. Правая часть равенства (3.18) есть тангенс угла наклона касательной в некоторой точке $c \in (a; b)$. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что найдется точка $c \in (a; b)$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей, соединяющей концы графика функции (точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$).

Соотношение (3.18) можно записать в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{3.19}$$

Формулу (3.19) называют *формулой конечных приращений*.

Теорема 3.9 (теорема Коши)**.** *Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы на интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$, то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что справедливо равенство:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

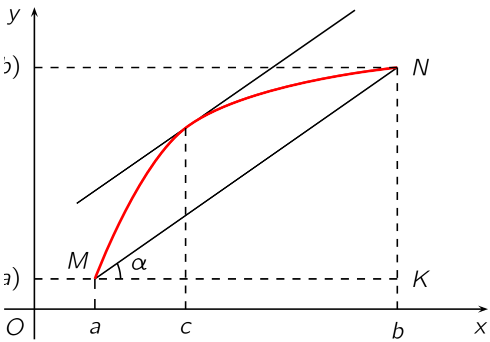

Рисунок 3.5

3.3. Правила Лопиталя. Формула Тейлора

3.3.1. Правила Лопиталя

Пусть функции f и g дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$, $f(a) = g(a) = 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Тогда, пользуясь теоремой Коши, можно записать:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где точка c находится между точками x и a. Иначе говоря,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Если $x \to a$, то $c \to a$ и, следовательно, если существует $\lim\limits_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Это утверждение и называют правилом Лопиталя. Сформулируем его более строго в виде следующей теоремы.

Теорема 3.10 (правило Лопиталя)**.** *Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a. Пусть функции f и g являются БМФ при $x \to a$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки a. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (3.20)$$

Таким образом, в данном случае предел отношения двух БМФ сводится к пределу отношения их производных, что часто является весьма удобным приемом при вычислении пределов. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 3.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. В данном случае условия правила Лопиталя выполняются. Функции $f(x) = \sin 4x$ и $g(x) = \operatorname{tg} 2x$ являются дифференцируемыми функциями, например, на интервале $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ и $f(0) = g(0) = 0$. Применим формулу (3.20):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 4x)'}{(\operatorname{tg} 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{2\cdot \frac{1}{\cos^2 2x}} = 2\lim_{x\to 0} \cos 4x \cos^2 2x =$$
$$= 2\lim_{x\to 0} \cos 4x \lim_{x\to 0} \cos^2 2x = 2. \qquad \square$$

Таким образом, первоначально мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, после перехода к пределу отношения производных такая неопределенность уже отсутствует.

Если функции f и g дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$, то имеет место равенство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Это означает, что если $f'(x)$ и $g'(x)$, в свою очередь, являются БМФ при $x \to a$, то правило Лопиталя применимо к пределу $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Нетрудно сформулировать условия, при которых справедлива следующая формула:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}. \tag{3.21}$$

Пример 3.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Функции $f(x) = x - \sin x$ и $g(x) = x^3$ являются БМФ при $x \to 0$. Применяя правило Лопиталя, найдем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Очевидно, $f'(x) = 1 - \cos x$ и $g'(x) = 3x^2$ также являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Поэтому имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}.$$

Последний предел есть первый замечательный предел. Однако и его можно вычислить с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\cos x = \frac{1}{6}. \qquad \square$$

При вычислении этого предела можно было воспользоваться формулой (3.21), положив $n = 3$.

Правило Лопиталя остается в силе и в случае $a = \infty$ или $a = \pm\infty$. В частности, если функции f и g являются БМФ при $x \to \infty$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Итак, мы рассмотрели случай отыскания предела частного $\frac{f(x)}{g(x)}$, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются БМФ при $x \to a$. Теперь рассмотрим такой же предел, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются ББФ при $x \to a$. Можно показать, что в этом случае имеет место утверждение, аналогичное теореме 3.10. При этом можно полагать, что $a = \infty$ или $a = \pm\infty$.

Пример 3.13. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Решение. Функции $f(x) = \ln^2 x$ и $f(x) = x$ являются ББФ при $x \to +\infty$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Очевидно, целесообразно еще раз применить правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

□

3.3.2. Формула Тейлора

В определении функции не говорится о том, при помощи каких средств находятся значения зависимой переменной y по значениям x. Это нелегко сделать, когда рассматриваются тригонометрические, показательные или логарифмические функции.

Для того, чтобы вычислять значения рассматриваемой функции, приходится заменять ее многочленом $P_n(x)$ степени n, значения которого легко найти с помощью четырех арифметических действий. При определенных условиях приближенно представить функцию $f(x)$ в виде многочлена и дать оценку такого приближения позволяет формула Тейлора.

Теорема 3.11. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c \in (x_0; x)$ такая, что справедлива формула*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (3.22)$$

Запишем формулу (3.22) в виде

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad (3.23)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad (3.24)$$

Определение. Многочлен $P_n(x)$, определяемый формулой (3.23), называется *многочленом Тейлора* для функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Определение. Функция $R_n(x)$, определяемая формулой (3.24), называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Определение. Формула (3.22) называется *формулой Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора (3.22) позволяет заменить функцию $f(x)$ многочленом Тейлора (3.23)

$$f(x) \approx P_n(x)$$

с погрешностью, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Если в формуле (3.22) положить $x_0 = 0$, то получим

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (3.25)$$

где c находится между 0 и x.

Определение. Формула (3.25) называется *формулой Маклорена*.

Приведем разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \cos c;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}};$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \\ + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Пример 3.14. Найти число e с точностью $0,001$.

Решение. Воспользуемся формулой (**??**). Положим в ней $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения числа e с точностью $0,001$ определим n из условия, что остаточный член $\frac{e^c}{(n+1)!}$ должен быть меньше, чем $0,001$. Так как $0 < c < 1$, то $e^c < e^1 < 3$. Поэтому неравенство

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < 0,001$$

выполняется, начиная с $n = 6$:

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0,0006 < 0,001.$$

Получаем приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$
$$\approx 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181 \approx 2,718,$$

т.е. $e \approx 2,718$. $\square$

3.4. Исследование функции с помощью производной

3.4.1. Условие постоянства функции.

Теорема 3.12. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и имеет внутри него производную $f'(x)$. Для того, чтобы функция $f(x)$ была постоянной в X, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ внутри X.* [Доказательство]

3.4.2. Достаточное условие монотонности функции.

В этом пункте рассмотрим достаточное условие строгой монотонности непрерывной функции на промежутке.

Теорема 3.13. *Если функция f непрерывна на промежутке X, дифференцируема внутри него и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) внутри X, то функция f является возрастающей (убывающей) на X.* [Доказательство]

Пример 3.15. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 2$.

Решение. Рассматриваемая функция определена на числовой прямой. Найдем ее производную $y' = 12x^2 + 18x + 6 = 6(2x^2 + 3x + 1)$.

Определим интервалы знакопостоянства производной. С этой целью решим уравнение $2x^3 + 3x + 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, $y' = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Будем иметь: если $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то $y' > 0$, если же $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, то $y' < 0$. Значит, на промежутках $(-\infty, -1)$ и $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ функция возрастает, а на интервале $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ — убывает. $\square$

3.4.3. Необходимые и достаточные условия локального экстремума

Из определения локального максимума и минимума следует, что эти понятия носят локальный характер в том смысле, что неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ может и не выполняться для всех значений в области определения функции, а должно выполняться лишь в некоторой δ-окркестности точки x_0. Следовательно, функция f может иметь несколько локальных экстремумов (рисунок 3.6).

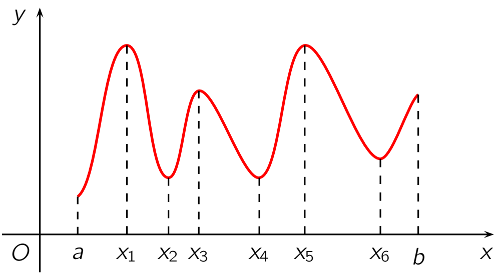

Рисунок 3.6

Теорема 3.14 (необходимое условие экстремума)**.** *Пусть функция f определена на интервале $(a; b)$ и в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.*

Заметим, что приведенное условие повторяет теорему Ферма. Другими словами, теорема Ферма является необходимым условием экстремума функции.

Определение. Значение аргумента x, при которых производная $f'(x)$ равна нулю, бесконечности или не существует, называется *критической точкой* функции.

Определение. *Стационарной точкой* функции называется критическая точка, в которой производная $f'(x)$ равна нулю.

Только стационарные точки могут быть точками возможного экстремума у дифференцируемой функции. Однако не каждая стационарная точка является точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $x = 0$ ($y' = 3x^2$), но эта точка, очевидно, не является точкой экстремума. Поэтому целесообразно найти достаточные условия локального экстремума.

Теорема 3.15 (первое достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция f дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда, если $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$: $f'(x) < 0$, то в точке x_0 функция f имеет локальный максимум; если же $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$: $f'(x) > 0$, то в точке x_0 функция f имеет локальный минимум. Если $f'(x)$ имеет во всей δ-окрестности один и тот же знак, то в точке x_0 локального экстремума нет.* [Доказательство]

Таким образом, если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум. Причем если производная меняет знак с «$+$» на «$-$», то точка x_0 является точкой максимума, если же с «$-$» на «$+$», — точкой минимума. Очевидно, теорема 3.15 имеет простой геометрический смысл.

Пример 3.16. Найти точки экстремума функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Решение. Данная функция дифференцируема на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3).$$

Теперь находим стационарные точки функции:

$$3(x^2+2x-3)=0, \quad x_1=-3,\ x_2=1.$$

Точки $x_1=-3$, $x_2=1$ являются точками возможного локального экстремума. Воспользуемся первым достаточным условием экстремума. Для этого изучим знак производной при переходе через эти точки. Очевидно,

$$\forall x \in (-\infty;-3)\cup(1;+\infty):\ \ f'(x)>0 \quad \text{и} \quad \forall x\in(-3;1):\ \ f'(x)<0.$$

Следовательно, в точке $x_1=-3$ рассматриваемая функция имеет локальный максимум, $y(-3)=28$, а в точке $x_2=1$ — локальный минимум, $y(1)=-4$. □

Часто удобно применять при исследовании точек возможного локального экстремума следующую теорему.

Теорема 3.16 (второе достаточное условие экстремума)**.** *Пусть точка x_0 есть стационарная точка функции f, в которой существует вторая производная $f''(x_0)$. Тогда, если $f''(x_0)<0$, то точка x_0 является точкой локального максимума функции f, если $f''(x_0)>0$, то точка x_0 является точкой локального минимума.* [Доказательство]

Второе достаточное условие экстремума удобно тем, что в данном случае исследуется знак второй производной $f''(x)$ только в самой стационарной точке.

Обратимся теперь к примеру 3.16. Найдем вторую производную функции y, $y''=6(x+1)$. Очевидно, $y''(-3)=-12<0$, $y''(1)=12>0$.

Следовательно, в соответствии со вторым достаточным условием тоже можно сделать заключение, что точка $x=-3$ является точкой локального максимума, а точка $x=1$ — точкой локального минимума.

3.4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$. По второй теореме Вейерштрасса функция f принимает на отрезке свое наибольшее и наименьшее значения. Поставим вопрос об их отыскании. Пусть, например, требуется отыскать наибольшее значение функции f. Тогда нужно найти все точки локального максимума, найти значения функции в этих точках. Наибольшее значение может достигаться также на одном из концов отрезка. Поэтому, сравнив значения функции во всех точках локального максимума и значения $f(a)$ и $f(b)$, найдем наибольшее из них. Оно и будет наибольшим значением функции f на отрезке $[a; b]$.

Аналогично находится наименьшее значение функции f на отрезке $[a; b]$.

Если функция f дифференцируема на $(a; b)$, то можно поступить следующим образом: найти все стационарные точки функции f на $(a; b)$, вычислить значения функции в стационарных точках и значения $f(a)$ и $f(b)$, тогда наименьшее из них будет наименьшим значением функции на отрезке $[a; b]$, наибольшее из них — наибольшим значением функции.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значения функции часто возникает в приложениях, в том числе в экономике.

3.4.5. Выпуклые функции

Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда в каждой точке ее графика существует касательная.

Определение. Функция f называется *выпуклой вверх (выпуклой)* на интервале $(a; b)$, если ее график расположен ниже любой касательной на $(a; b)$ (рисунок 3.7).

Определение. Функция f называется *выпуклой вниз (вогнутой)* на интервале $(a; b)$, если ее график расположен выше любой касательной на $(a; b)$ (рисунок 3.7).

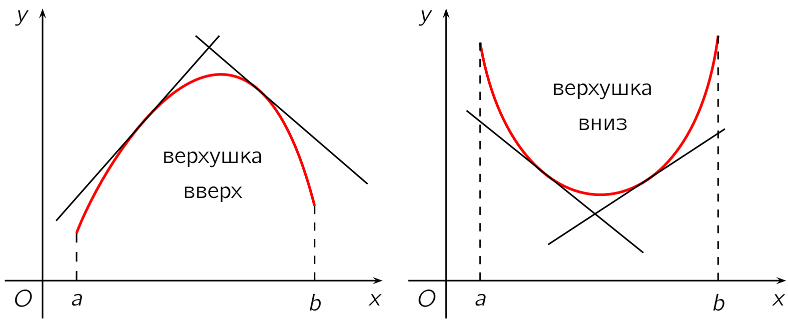

Рисунок 3.7

Теорема 3.17 (достаточное условие выпуклости)**.** *Если функция f имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) во всех точках $x \in (a; b)$, то функция f выпукла вниз (выпукла вверх) на $(a; b)$.*

[Доказательство]

Определение. Точка $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in (a; b)$ называется *точкой перегиба* непрерывной функции f, если слева и справа от этой точки функция f имеет разные направления выпуклости.

Так, например, точка $O(0;0)$ является точкой перегиба функции $y = x^3$. Так как $y'' = 6x$ и $\forall x \in (-\infty; 0)$, $y'' < 0$ и $\forall x \in (0; +\infty)$ $y'' > 0$, то на промежутке $(-\infty; 0)$ функция $y = x^3$ выпукла вверх, а на $(0; +\infty)$ — выпукла вниз, и точка $x = 0$ является точкой, разделяющей промежутки выпуклости разной направленности.

Теорема 3.18 (необходимое условие точки перегиба)**.** *Пусть точка $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба функции f. Тогда, если в точке x_0 функция f имеет вторую производную, то $f''(x_0) = 0$.*

Таким образом, условие $f''(x) = 0$ играет такую же роль в отношении точек перегиба, как условие $f'(x) = 0$ в отношении точек локального экстремума. Оно необходимо, но не достаточно. Так, например, функция $f(x) = x^4$ имеет вторую производную $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, но точка $O(0;0)$ не является точкой перегиба функции, так как $f''(x) \geqslant 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$, и функция f выпукла вниз на $(-\infty; +\infty)$.

Не будем проводить доказательства теоремы 3.18. Заметим лишь, что, например, при условии существования непрерывной второй производной в окрестности точки x_0 является вполне естественным ее равенство нулю в этой точке, так как с одной стороны от x_0 $f''(x) \leqslant 0$, а с другой стороны от точки x_0 $f''(x) \geqslant 0$.

Теорема 3.19 (достаточное условие точки перегиба)**.** *Пусть функция f имеет вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции f.*

Действительно, если производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то по теореме 3.17 это означает, что функция f является выпуклой с разной направленностью слева и справа от точки x_0, т.е. точка $(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции f.

3.4.6. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Так, график функции $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, потому что

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Теперь предположим, что функция f определена на промежутке $(a; +\infty)$.

Определение. Прямая $y = kx + l$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция f представима в виде

$$f(x) = kx + l + \alpha(x). \tag{3.26}$$

где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$. При $k = 0$ эту асимптоту называют *горизонтальной*.

Очевидно, и в случае вертикальной асимптоты, и в случае наклонной асимптоты характерным признаком является неограниченное сближение графика функции и прямой, являющейся асимптотой.

Теорема 3.20. *Для того, чтобы график функции f имел наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l. \tag{3.27}$$

[Доказательство]

Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается теорема 3.20 для случая $x \to -\infty$.

3.4.7. Общая схема исследования поведения функций и построения графиков функций

Для полного исследования поведения функций и построения графиков функций можно рекомендовать следующую схему:

1) найти область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, вертикальные асимптоты (если существуют), точки пересечения с осями координат;
3) определить четность (нечетность), периодичность функции;
4) найти промежутки монотонности функции и точки локального экстремума;
5) определить промежутки выпуклости функции и точки перегиба;
6) выяснить вопрос о существовании наклонных асимптот;
7) на основании полученных данных построить график функции (иногда полученные данные сводят в таблицу).

Приведем пример, иллюстрирующий эту схему.

Пример 3.17. Построить график функции $y = e^{-x^2}$.

Решение. 1) Областью определения данной функции является вся числовая прямая.

2) Функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Вертикальных асимптот не имеет.

График функции ось Ox не пересекает, так как $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) > 0$. Если $x = 0$, то $y = 1$, и ось Oy график функции пересекает в точке $(0; 1)$.

3) Функция является четной, так как $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$. Свойством периодичности функция не обладает.

4) Найдем производную функции: $y' = -2xe^{-x^2}$. Очевидно, $y'(x) > 0$, $x \in (-\infty; 0)$, и $y'(x) < 0$, $x \in (0; +\infty)$.

Следовательно, функция является возрастающей на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающей на $(0; +\infty)$.

Стационарной точкой является только точка $x = 0$. Из теоремы 3.15 следует, что точка $x = 0$ является точкой локального максимума, $y(0) = 1$.

5) Найдем вторую производную:

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Найдем точки, в которых вторая производная обращается в нуль, т.е. точки возможного перегиба:

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0, \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$y''(x) > 0, \quad x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right),$$
$$y''(x) < 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом, функция $y = e^{-x^2}$ является выпуклой вниз на промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ и выпуклой вверх на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значит, точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба.

6) Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ (ось Ox) является горизонтальной асимптотой при $x \to +\infty$. Очевидно, эта прямая является асимптотой и при $x \to -\infty$.

7) Для построения графика полученные результаты сведем в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
y	$+$	$e^{-1/2}$	$+$	1	$+$	$e^{-1/2}$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

На основании полученных данных строим график (рисунок 3.8). Полученная кривая называется *кривой Гаусса*. Заметим также, что в силу четности функции и симметричности графика относительно оси можно было исследовать функцию лишь на промежутке $(0; \infty)$.

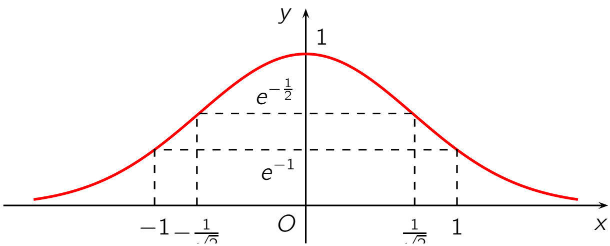

Рисунок 3.8

□

Глава 4

Теория интегрирования

4.1. Неопределенный интеграл

4.1.1. Первообразная

Основной операцией дифференциального исчисления является отыскание производной заданной функции. Однако, естественно, возникает вопрос о существовании операции, обратной дифференцированию. Восстановление функции по известной производной этой функции есть основная задача интегрального исследования.

Определение. Функция F называется *первообразной* для функции f на некотором промежутке X, если $\forall x \in X$: $F'(x) = f(x)$.

Пример 4.1. Найдите первообразную для функции $f(x) = 2x$.

Решение. Используя таблицу производных, легко подобрать функцию $F(x)$ таким образом, что $F'(x) = 2x$. Например, $F(x) = x^2$. Однако, используя то, что производная константы равны нулю, в качестве, первообразной для функции $f(x) = 2x$ можно взять и $F_1(x) = x^2 + 1$, и $F_2(x) = x^2 - 2$. □

Учитывая пример, можно заключить, что задача об отыскании первообразной по данной функции f решается неоднозначно. Если, например, F есть первообразная для функции f, то функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции f. Действительно, $(F(x)+C)' = F'(x)+(C)' = f(x)+0 = f(x)$. В частности, функция (x^2+C), где C — произвольная постоянная, есть первообразная для функции $2x$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 4.1. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то множество всех первообразных задается формулой*

$$F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Доказательство. Вначале покажем, что функция $F(x)+C$ является первообразной для функции $f(x)$, т.е. $(F(x)+C)' = f(x)$. Этот факт непосредственно следует из того, что $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$ и правил дифференцирования:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x).$$

Теперь покажем, что никакая другая функция, кроме указанных, не может являтся первообразной для функции $f(x)$. Действительно, пусть некоторая функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Окончательно, применяя условие постоянства функции, получим

$$\Phi(x) - F(x) = C \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = F(x) + C. \qquad \square$$

Таким образом, если известна хотя бы одна первообразная для данной функции f, то известно и все множество первообразных для этой функции.

4.1.2. Неопределенный интеграл

Определение. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Используя теорему 4.1 заключаем, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Замечание 4.1. Всякая непрерывная функция на множестве X имеет на этом множестве первообразную, а значит и неопределенный интеграл.

Определение. График каждой первообразной называется *интегральной кривой*.

Заметим, что интегральная кривая $F(x)+C$ получается из интегральной кривой $F(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на C единиц (рисунок 4.1).

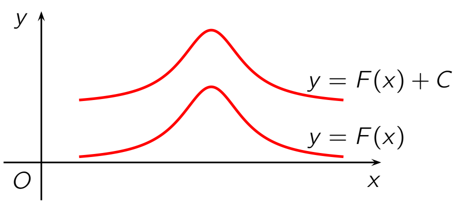

Рисунок 4.1

Геометрический смысл неопределенного интеграла состоит в том, что неопределенный интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, получаемых друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy.

Свойства неопределенного интеграла

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

[Доказательство]

2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.*

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

[Доказательство]

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т.е.*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

[Доказательство]

Из этого свойства, в частности следует, что

$$\int dx = x + C.$$

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если* $k = \mathrm{const} \neq 0$, *то*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

[Доказательство]

5. *Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

[Доказательство]

Замечание 4.2. Из свойств 4 и 5 следует равенство

$$\int (af(x) + bg(x))\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

4.1.3. Таблица интегралов

Приведем таблицу основных интегралов. Часть формул этой таблицы является непосредственным следствием из определения неопределенных интегралов и таблицы производных. Другую часть формул проверим ниже.

1) $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1.$

   Приведем также некоторые наиболее часто встречающиеся частные случаи этой формулы при $a = 0$, $a = 1$, $a = -\frac{1}{2}$ и $a = -2$ соответственно.

   (a) $\displaystyle\int dx = x + C.$

   (b) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

4) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

5) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

6) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0.$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C, \quad a \neq 0.$

Проверим, например, справедливость формул 11 и 12. Покажем, что производная правой части этих формул равна подынтегральной функции левой части (при $a \neq 0$). Для формулы 11 имеем:

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \frac{1}{2a}\frac{1}{\frac{x-a}{x+a}}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2a}\frac{x+a}{x-a}\frac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \frac{1}{2a}\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}.$$

В случае формулы 12 получим

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)' =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Следует отметить существенное различие в операциях дифференцирования и интегрирования. Операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций, а именно, производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Иначе обстоит дело с интегрированием. Существуют элементарные функции, первообразная которых не выражается через элементарные функции. Такими являются, например, интегралы

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx.$$

4.1.4. Простейшие методы интегрирования

Часто под знаком интеграла может оказаться функция, для которой не имеется табличного интеграла и непосредственное интегрирование невозможно. Тогда применяются другие методы интегрирования, в частности, метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)

Теорема 4.2. *Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T и X — множество ее значений. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и имеет на этом промежутке первообразную. Тогда справедлива формула*

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt. \qquad (4.1)$$

[Доказательство]

Пример 4.2. Вычислите интеграл $\displaystyle\int \ln^5 x\,\frac{dx}{x}$.

Решение. В таблице основных интегралов этот интеграл отсутствует. Поэтому в данном случае постараемся подобрать подходящую замену переменной, чтобы прийти к табличному интегралу. Положим $\ln x = t$, т.е. $x = e^t$.

Тогда $dx = d(e^t) = (e^t)'\,dt = e^t\,dt$, и по формуле (4.1) имеем:

$$\int \ln^5 x\,\frac{dx}{x} = \int t^5\,\frac{1}{e^t}\,e^t\,dt = \int t^5\,dt = \frac{t^6}{6} + C.$$

Перейдем обратно к переменной x:

$$\int \ln^5 x \frac{dx}{x} = \frac{\ln^6 x}{6} + C.$$

Отметим, что иногда, как в этом примере, первоначально удобно задавать не x как функцию t, а, наоборот, задавать t как функцию x.

Теперь приведем несколько другой подход к решению этого примера. Заметив, что $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, получим:

$$\int \ln^5 x \frac{dx}{x} = \int \ln^5 x (\ln x)'\, dx = \int \ln^5 x\, d \ln x = \frac{1}{6}(\ln x)^6 + C.$$

На последнем шаге мы неявно воспользовались заменой $\ln x = t$. □

Замечание 4.3. Если F есть первообразная для функции f, то

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \quad a, b \in R, \quad a \neq 0.$$

[Доказательство]

Пример 4.3. Вычислите интеграл $\displaystyle\int \cos(5x-3)\, dx$.

Решение. Обратим внимание на интеграл 6 таблицы основных интегралов:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

Тогда, учитывая замечание 4.3 ($a = 5$, $b = 3$), получим

$$\int \cos(5x-3)\, dx = \frac{1}{5}\sin(5x-3) + C.$$ □

Метод интегрирования по частям

Теорема 4.3. *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на промежутке X и пусть существует $\int v(x)u'(x)\,dx$. Тогда $\int v'(x)u(x)\,dx$ также существует и справедлива формула:*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{4.2}$$

[Доказательство]

Учитывая, что $u'(x)\,dx = du$ и $v'(x)\,dx = dv$, формулу (4.2) можно записать в виде:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{4.3}$$

Пример 4.4. Найдите интеграл $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

Решение. Основная трудность применения интегрирования по частям состоит в правильном выборе функций u и v, т.е. в таком выборе, чтобы интеграл справа в формуле (4.2) или (4.3) оказался проще, чем интеграл слева. Так в данном случае удобно положить $x = u$, а $e^x\,dx = dv$. Найдем функцию v (точнее, одну из функций v):

$$\int dv = \int e^x\,dx, \quad v = e^x.$$

Применяя формулу (4.3), находим:

$$\int xe^x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C. \qquad \square$$

При наличии определенных навыков интегрирования по частям можно не выписывать функции u и v, а только подразумевать их. Например,

$$\int xe^x\,dx = \int x(e^x)'\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение. *Простейшими рациональными дробями* назовем следующие функции

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx, \quad p^2-q<0$;

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx, \quad k>1, \quad k \in \mathbb{N},\ p^2-q<0.$

С помощью приведенных выше методов можно найти интегралы от указанных рациональных дробей.

Интегрирование простейших рациональных дробей

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$

Доказательство. С помощью таблицы интегралов (интеграл 2) получим

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C. \qquad \square$$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Доказательство. С помощью таблицы интегралов (интеграл 1) получим

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = -\frac{A}{k-1}(x-a)^{-k+1} + C =$$
$$= -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \quad k > 1. \quad \square$$

3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+2px+q| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.$

Доказательство. Выделим в трехчлене $x^2 + px + q$ полный квадрат:

$$x^2 + 2px + q = (x+p)^2 + q - p^2 = (x+p)^2 + h^2,$$

где $h^2 = q - p^2 > 0$ (считаем $h > 0$). Теперь сделаем замену $x + p = t$, $x = t - p$, $dx = dt$ и получим:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx = \int \frac{M(t-p)+N}{t^2+h^2}\,dt =$$
$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+h^2} + (N-Mp)\int \frac{dt}{t^2+h^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{(t^2+h^2)'\,dt}{t^2+h^2} + (N-Mp)\frac{1}{h}\int \frac{d\frac{t}{h}}{1+\frac{t^2}{h^2}} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln|t^2+h^2| + (N-Mp)\frac{1}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+2px+q| + \frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C. \quad \square$$

4. *Вычисление интеграла* $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx.$

Доказательство. Выделим полный квадрат в знаменателе и сделаем замену $x+p=t$. Будем иметь

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx = \int \frac{Mx+N}{\left((x+p)^2+h^2\right)^k}\,dx =$$
$$= \int \frac{M(t-p)+N}{\left(t^2+h^2\right)^k}\,dt = M\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+h^2\right)^k} + (N-Mp)\int \frac{dt}{\left(t^2+h^2\right)^k}.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства легко вычисляется:

$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+h^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+h^2\right)^{-k} d\left(t^2+h^2\right) = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+h^2\right)^{k-1}} + C.$$

Для нахождения второго интеграла вначале обозначим

$$J_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+h^2\right)^k}.$$

В силу обозначения

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{1}{h^2}\int \frac{(t^2+h^2)-t^2}{(t^2+h^2)^k}\,dt =$$
$$= \frac{1}{h^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k}\right) =$$
$$= \frac{1}{h^2}\left(J_{k-1} - \int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k}\right). \qquad (4.4)$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям (4.3). При этом $u=t$, $dv=\frac{t\,dt}{(t^2+h^2)^k}$. Тогда $du=dt$,

$$v = \frac{1}{2}\int (t^2+h^2)^{-k}\,d(t^2+h^2) = \frac{1}{2(1-k)\left(t^2+h^2\right)^{k-1}}.$$

Значит,

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+h^2)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dt}{(t^2+h^2)^{k-1}} =$$
$$= \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}.$$

Подставляя последнее соотношение в равенство (4.4), получим

$$J_k = \frac{1}{h^2}\left(J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+h^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}\cdot J_{k-1}\right)$$

или

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+h^2\right)^k} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+h^2)^{k-1}}\right). \qquad (4.5)$$

Полученная формула позволяет найти интеграл J_k для любого натурального числа $k>1$. □

Пример 4.5. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение. Можно воспользоваться результатом пункта 3, положив $M=0$, $N=1$, $p=1$, $q=5$. Однако проще непосредственно интегрировать, используя аналогичные приемы.

Выделив полный квадрат, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$$

Сделаем замену $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t/2)}{1+(t/2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \qquad □$$

Пример 4.6. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2-6x+10}\,dx$.

Решение. Имеем:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-6x+10}\,dx = \int \frac{3x-5}{(x-3)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x-3=t, \\ x=t+3, \\ dx=dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3(t+3)-5}{t^2+1}\,dt = \int \frac{3t+4}{t^2+1}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + 4\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+1) + 4\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-6x+10) + 4\operatorname{arctg}(x-3) + C. \qquad \square$$

Пример 4.7. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Воспользуемся реккурентным соотношением (4.5). При этом $h=1$. Получим

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2} J_1 + \frac{x}{2(2-1)(x^2+1)^{2-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C,$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2} J_2 + \frac{x}{2(3-1)(x^2+1)^{3-1}} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)}\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C. \qquad \square$$

4.2. Интегрирование классов функций

4.2.1. Интегрирование рациональных функций

Познакомимся с методами интегрирования рациональных функций, т.е. функций вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — алгебраические многочлены:

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$
$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Определение. Если $m < n$, то рациональная функция называется *правильной*.

Определение. Если $m \geqslant n$, то рациональная функция называется *неправильной*.

В случае неправильной рациональной функции производят деление и получают

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ — некоторый многочлен и $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная функция.

Например,

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^3 + x) + 2x^2 + 2 - 1}{x^2 + 1} = x + 2 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Поэтому в дальнейшем будем полагать, что $\frac{P(x)}{Q(x)}$ есть правильная рациональная функция.

Можно доказать, что любой многочлен можно преобразовать к произведению простейших многочленов, а именно:

$$Q_n(x) = A(x - x_1)^{l_1}(x - x_2)^{l_2} \ldots (x - x_r)^{l_r}(x^2 + 2p_1x + q_1)^{t_1} \times$$
$$\times (x^2 + 2p_2x + q_2)^{t_2} \ldots (x^2 + 2p_sx + q_s)^{t_s}, \quad (4.6)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$, $l_1, l_2, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$, $l_1, l_2, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$ и $p_i^2 - q_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Последнее означает, что многочлены $x^2 + 2p_i x + q_i$ не имеют действительных корней. Этот факт устанавливается в расширенном курсе высшей математики.

Также примем без доказательства следующее утверждение: если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ есть правильная рациональная функция и многочлен $Q(x)$ имеет вид (4.6), то ее можно единственным образом представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{l_1} \frac{A_k^{(1)}}{(x-x_1)^k} + \sum_{k=1}^{l_2} \frac{A_k^{(2)}}{(x-x_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{l_r} \frac{A_k^{(r)}}{(x-x_r)^k} + \\ + \sum_{k=1}^{t_1} \frac{M_k^{(1)} + N_k^{(1)}}{(x^2+2p_1x+q_1)^k} + \\ + \sum_{k=1}^{t_2} \frac{M_k^{(2)} + N_k^{(2)}}{(x^2+2p_2x+q_2)^k} + \ldots + \sum_{k=1}^{t_s} \frac{M_k^{(s)} + N_k^{(s)}}{(x^2+2p_sx+q_s)^k}, \qquad (4.7)$$

где $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$ — некоторые вещественные числа.

Выражение (4.7) называется *разложением на простейшие рациональные дроби*. Поскольку ранее мы рассмотрели методы интегрирования таких дробей, то, имея разложение (4.7), легко найти неопределенный интеграл от рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Этот интеграл будет также выражаться через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы. Таким образом, главная задача при интегрировании рациональных функций состоит в нахождении разложения (4.7). Если известно представление (4.6), то коэффициенты $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$ ищутся методом неопределенных коэффициентов. Суть его состоит в следующем. Записывается представление (4.7) с неопределенными коэффициентами $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$. Затем выражение в правой части приводим к общему знаменателю и получим в числителе некоторый многочлен. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях у этого многочлена $P(x)$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов $A_k^{(i)}$, $M_k^{(i)}$, $N_k^{(i)}$.

Решив ее, найдем эти коэффициенты.

Проиллюстрируем изложенное на примерах.

Пример 4.8. Найти разложение на простейшие дроби рациональной функции $R(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}$.

Решение. Очевидно, что есть правильная рациональная функция, и ее знаменатель имеет вид (4.6). Поэтому запишем представление (4.7) с неопределенными коэфициентами для данной рациональной функции:

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Правую часть равенства приводим в общему знаменателю и сравниваем многочлены, стоящие в числителях левой и правой частей:

$$x = A(x-2)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Mx+N)(x+1)(x-2) \qquad (4.8)$$

или

$$x = (A+B+M)x^3 + (-2A+B+N-M)x^2 + \\ + (A+B-2M-N)x - 2A + B - 2N.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэфициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая эти коэфициенты, получим систему уравнений для определения чисел A, B, M, N:

$$\begin{aligned} &\text{при } x^3: && A+B+M=0; && (4.9)\\ &\text{при } x^2: && -2A+B+N-M=0; &&\\ &\text{при } x^1: && A+B-2M-N=1; &&\\ &\text{при } x^0: && -2A+B-2N=0. && (4.10)\end{aligned}$$

Решать эту систему из четырех линейных уравнений, находим неизвестные A, B, M, N.

Вместе с тем, используя тождество (4.8), можно найти искомые коэффициенты несколько проще:

а) полагая в (4), $x = -1$, получаем $-1 = A(-3 \cdot 2)$, откуда $A = \frac{1}{6}$;

б) полагая в (4), $x = 2$, получаем $2 = B \cdot 3 \cdot 5$, откуда $B = \frac{2}{15}$;

в) тогда из уравнения (4.9), находим $M = -A - B = -\frac{1}{6} - \frac{2}{15} = -0,3$, а из уравнения (4.10) $N = \frac{B}{2} - A = \frac{1}{15} - \frac{1}{6} = -0{,}1$.

Таким образом,

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{15(x-2)} - 0{,}1\frac{3x+1}{x^2+1}. \qquad \square$$

Пример 4.9. Найти разложение на простейшие дроби рациональной функции $\dfrac{2x+1}{(x^2+5x+6)(x+2)}$.

Решение. Данная рациональная функция является правильной. Нетрудно видеть, что корнями многочлена $x^2 + 5x + 6$ являются числа (-2) и (-3). Поэтому $(x^2 + 5x + 6)(x + 2) = (x + 2)^2(x + 3)$.

Теперь можем записать следующее представление с неопределенными коэффициентами, аналогичное формуле (4.7):

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

Приводя выражение справа к общему знаменателю и сравнивая многочлены, стоящие в числителе, находим:

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+3) + C(x+2)^2.$$

Полагая здесь $x = -2$, находим $-2 = B(-1)$ и $B = -2$.

Если положить $x = -3$, то имеем $-3 = C(-1)^2$ и $C = -3$.

Наконец, если $x = 0$, то получим $6A + 3B + 4C = 0$ и $A = -\frac{1}{6}(3B + 4C) = 3$.

Значит,

$$\frac{x}{(x^2+5x+6)(x+2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{3}{x+3}. \qquad \square$$

4.2.2. Интегрирование иррациональных функций

Простейшие случаи

Через $R(u, v)$ будем обозначать рациональную функцию двух переменных, т.е. функцию, получающуюся из двух переменых u и v и некоторых потостоянных, над которыми производятся операции сложения, вычитания, умножения и деления. Например, функция

$$\frac{u^2v^2 + 3u^2v + uv^2 + uv + 1}{u^2v + u^2 + 2}$$

есть рациональная функция двух переменных u и v.

Пусть имеем интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \tag{4.11}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $ad - bc \neq 0$.

В интегралах такого вида целесообразно сделать следующую замену:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t. \tag{4.12}$$

Из этого равенства получим:

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}, \qquad dx = \frac{m(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n - a)^2} dt.$$

Подставляя соотвветствующие выражения в (4.11), получим:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx =$$
$$= \int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right) \frac{m(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt = \int R_1(t)\, dt,$$

где $R_1(t)$ есть некоторая функция переменной t. Таким образом, интегралы вида (4.11) заменой переменной (4.12) сводятся к интегралам от рациональных функций, методы вычислений которых нам уже известны. В этом случае говорят, что интеграл вида (4.11) рационализируется.

Пример 4.10. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $\sqrt{x+1} = t$. Имеем $x+1 = t^2$, $x = t^2-1$, $dx = 2t\, dt$ и

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{t^2-1-1}{t} 2t\, dt = 2\int (t^2-2)\, dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) + C =$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1}\right) + C = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5) + C. \quad \square$$

По аналогии с интегралом (4.11) рассмотрим более общие случаи интегрирования иррациональных функций.

Интеграл вида

$$\int R\left(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, x^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$$

рационализируется заменой

$$x = t^m,$$

где

$$m = \text{НОК}\,(s_1, s_2, \ldots, s_k).$$

Пример 4.11. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Решение. Так как

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}},$$

то в этом случае $m = \text{НОК}\,(2,3) = 6$. Поэтому, следует сделать замену $x = t^6$. Тогда $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt.$$

Далее воспользуемся методами интегрирования рациональных функций

$$\int \frac{t^8}{1+t^2}\,dt = \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$
$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной x $(t = \sqrt[6]{x})$, окончательно получим

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \qquad \square$$

Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_k}{s_k}}\right) dx$$

рационализируется заменой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m,$$

где

$$m = \text{НОК}\,(s_1, s_2, \ldots, s_k).$$

Пример 4.12. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

Решение. Поступая аналогичным образом, как и в примере 4.11, заметим, что в данном случае следует произвести замену $x+1 = t^6$. Получим

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{t^3 - t^2}{t^3 + t^2}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^6 - t^5}{t+1}\,dt =$$
$$= 6\int \left(t^5 - 2t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{t+1}\right)dt =$$
$$= 6\left(\frac{t^6}{6} - 2\,\frac{t^5}{5} + 2\,\frac{t^4}{4} - 2\,\frac{t^3}{3} + 2\,\frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln|t+1|\right) + C =$$
$$= x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 4\sqrt{x+1} + 6\sqrt[3]{x+1} -$$
$$- 12\sqrt[6]{x+1} + 12\ln(\sqrt[6]{x+1} + 1) + C. \qquad \square$$

Более сложные случаи

1) Тригонометрическая подстановка.

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)\,dx$$

находятся с помощью замены

$$x = a\sin t \quad \text{или} \quad x = \cos t.$$

При вычислении интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\,dx$$

можно воспользоваться подстановкой

$$x = a\,\mathrm{tg}\,t.$$

Для нахождения интеграла вида

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx$$

применяется замена

$$x = \frac{a}{\sin t}.$$

Пример 4.13. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\,dt$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t$. Получим

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = \int \mathrm{ctg}^2\,t\,dt =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)\,dt = \int \frac{1}{\sin^2 t}\,dt - \int dt = -\,\mathrm{ctg}\,t - t + C =$$
$$= -\,\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) - \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

□

2) Подстановки Эйлера
Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$

находятся с помощью так называемых подстановок Эйлера.

Если $a > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$$

(комбинация знаков произвольна).

Если $\ > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$$

(комбинация знаков произвольна).

Если же $a < 0$ и $c < 0$ (в этом случае $b^2 - 4ac > 0$, т.е. квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня), то применяют подстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1),$$

где x_1 — один из корней трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Пример 4.14. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx$.

Решение. Так как $a > 0$, то воспользуемся первой подстановкой Эйлера $\sqrt{x^2 + x + 1} = x - t$. Тогда

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(2t + 1)^2}\,dt.$$

Значит,

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}\,dx = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(2t + 1)^2}\,dt.$$

Получили интеграл от рациональной функции. Применяя метод неопределенных коэффициентов, несложно получить

$$\frac{2t^2 + 2t + 2}{t(2t + 1)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{2t + 1} - \frac{3}{(2t + 1)^2}.$$

Поэтому,

$$\int \frac{2t^2+2t+2}{t(2t+1)^2}\,dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t+1| + \frac{3}{2(2t+1)} + C.$$

Осталось произвести обратную замену $t = x - \sqrt{x^2+x+1}$. □

3) Интегрирование дифференциального бинома.

Определение. Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*.

Для того, чтобы рационализировать интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

применяются следующие подстановки:

1) если $p \in \mathbb{Z}$, то

$$x = t^k,$$

где k — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то

$$a + bx^n = t^s,$$

где s — знаменатель дроби p;

2) если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то

$$a + bx^n = x^n t^s,$$

где s — знаменатель дроби p.

Во всех остальных случаях интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции, т.е. «не берутся».

Пример 4.15. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

В этом случае $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$. Поскольку

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2,$$

то сделаем замену $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$. При этом

$$x=(t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt, \quad t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}.$$

Поэтому,

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{t}{(t^3-1)^2}\,12t^2(t^3-1)^3\,dt = 12\int (t^6-t^3)\,dx =$$
$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \quad \square$$

4.2.3. Тригонометрические интегралы

Пусть имеем интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{4.13}$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных u и v.

В этом случае функцию $R(\sin x, \cos x)$ называют тригонометрической рациональной функцией.

Интеграл (4.13) рационализуется (т.е. приводится к интегралу от алгебраической рациональной функции) с помощью замены переменной

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \tag{4.14}$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{4.15}$$

и

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int R_1(t)\, dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция переменной t.

Пример 4.16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \cos x}$.

Решение. Положим $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда, воспользовавшись формулами (4.15), имеем

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{2(1+t^2)+1-t^2} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \quad \square$$

На практике замена переменной (4.14) приводит часто к громоздким выкладкам. При определенных условиях более удобны другие замены переменной:

а) если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \cos x$;

б) если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \sin x$;

в) если $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то полагают $t = \operatorname{tg} x$.

В частности, рассмотрим вычисление интеграла вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Возможны следующие случаи:

1) если n — нечетное число, то применяется замена $\sin x = t$;

2) если m — нечетное число, то применяется замена $\cos x = t$;

3) если m и n — четные числа, то применяются формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

4) если $m+n$ — четное отрицательное число, то применяется замена $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 4.17. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

Решение. В этом случае $m = 2$, $n = 3$. Сделаем замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x \, dx = dt$. Учитывая то, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получим

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \int t^2(1 - t^2) \, dt =$$
$$= \int (t^2 - t^4) \, dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \qquad \square$$

Пример 4.18. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$.

Решение. В этом случае $m = 2$, $n = -4$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$. При этом $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$. Значит,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \qquad \square$$

4.3. Определенный интеграл

4.3.1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$ (рисунок 4.2). Рассмотрим фигуру $ABCD$, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox. Ее называют *криволинейной трапецией*. Поставим задачу об определении и вычислении площади этой криволинейной трапеции. С этой целью отрезок $[a; b]$ разобьем на n произвольных частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Через точки x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ проведем прямые, параллельные оси Oy. Криволинейная трапеция $ABCD$ разобьется на n частичных криволинейных трапеций. Теперь на каждом из отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$ произвольно выберем по точке ξ_k, $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вычислим значение $f(\xi_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. И каждую частичную криволинейную трапецию заменим прямоугольниками с высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$. Тогда можно полагать, что для площади S криволинейной трапеции $ABCD$ справедливо соотношение

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Естественно предположить, что это равенство будет тем точнее, чем меньше $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1}) = \lambda$. Поэтому площадь криволинейной трапеции S определяют как

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \qquad (4.16)$$

Число S, равное пределу (4.16), называют определенным интегралом

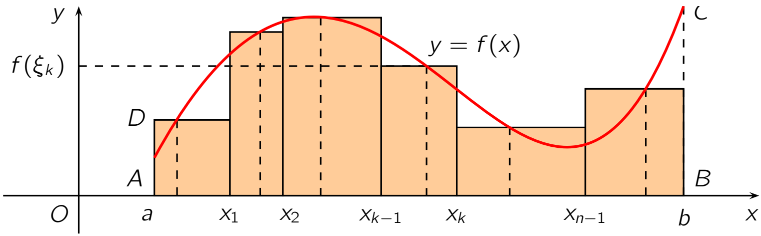

Рисунок 4.2

от функции f по отрезку $[a;b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом, задача о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к введению понятия определенного интеграла.

Теперь более строго определим понятие определенного интеграла.

Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

В каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ произвольно выберем по точке ξ_k, $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим следующую сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{4.17}$$

Определение. Сумма (4.17) называется *интегральной суммой* для функции f на отрезке $[a;b]$.

Определение. Если интегральная сумма (4.17) имеет предел, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4.18}$$

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$, а числа a и b — нижним и верхним пределами интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции (рисунок 4.3).

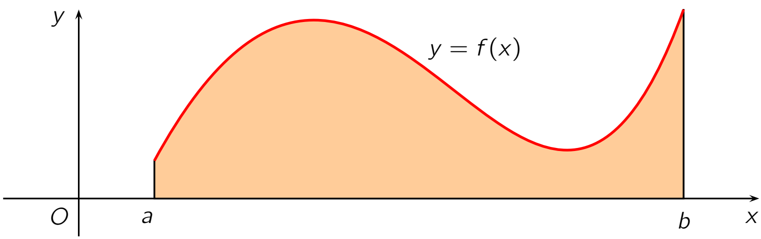

Рисунок 4.3

Из определенния интеграла следует, что значение интеграла (4.18) есть число, зависящее от вида функции f, пределов интегрирования a и b и не зависящее от выбора обозначения переменной интегрирования.

Позже мы установим связи между определенным и неопределенным интегралом функции f.

Пример 4.19. Найти определенный интеграл $\displaystyle\int_a^b 1\,dx$.

Решение. Построим для функции $f(x) = 1$ на отрезке $[a; b]$ интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k.$$

Учитывая, что $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, имеем:

$$\sigma = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = \\ = b - a.$$

Следовательно, $\int\limits_a^b 1\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma = b - a.$ $\square$

4.3.2. Свойства определенного интеграла

При рассмотрении свойств определенных интегралов предполагаем, что интегралы, входящие в доказательство формулы, существуют.

1. *По определению полагаем, что*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Первое равенство обусловливается тем, что при составлении интегральных сумм в данном случае каждое из Δx_k будет равно нулю и $\delta = 0$

Второе равенство объясняется тем, что, когда разбиение производится от b к a, то разности $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ будут отличаться знаком от таких же разностей в случае разбиения отрезка от a к b.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k = \text{const}\,.$$

[Доказательство]

3. *Определенный интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов, т.е.*

$$\int_a^b (g(x) + f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.19}$$

[Доказательство]

4. *Если* $c \in (a; b)$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{4.20}$$

[Доказательство]

4.3.3. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении.

Теперь рассмотрим некоторые свойства определенных интегралов, описываемые с помощью неравенств.

1. *Если* $f(x) \geqslant 0$ *на отрезке* $[a; b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

[Доказательство]

2. *Если для* f *и* g *на отрезке* $[a; b]$ *справедливо неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

[Доказательство]

3. *Для любой интегрируемой на отрезке* $[a; b]$ *функции* f *имеет место неравенство:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (4.21)$$

[Доказательство]

4. *Если* $\forall x \in [a, b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$, *то*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (4.22)$$

[Доказательство]

Теорема 4.4 (о среднем значении определенного интеграла)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$, такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{4.23}$$

[Доказательство]

Выясним *геометрический смысл формулы* (4.23). Если предположить, что $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a; b]$, то интеграл слева в (4.23) есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

В правой части равенства (4.23) стоит площадь прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$, т.е. площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого прямоугольника (рисунок 4.4).

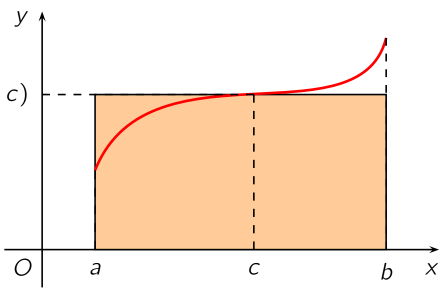

Рисунок 4.4

4.3.4. Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема 4.5. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на $[a; b]$.* [Доказательство]

Указанное необходимое условие не является достаточным.

Пример 4.20. Показать, что *функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррациональное;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \end{cases} \tag{4.24}$$

ограничена, но не интегрируема на любом отрезке $[a; b]$.

Решение. По определению $|D(x)| \leqslant 1$ при любых x, т.е. функция Дирихле ограничена на любом отрезке $[a; b]$. Покажем, что она не является интегрируемой.

Произведем разбиение отрезка $[a; b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\Delta x_k.$$

Покажем, что предел интегральных сумм при $\lambda = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1}) \to 0$ не существует. Действительно, если выбрать все ξ_k иррациональными, то $\sigma = 0$, если же выбрать все ξ_k рациональными, то $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a \neq 0$.

Это означает, что не существует числа A, удовлетворяющего определению определенного интеграла, т.е. функция Дирихле не интегрируема на любом отрезке $[a; b]$. □

4.3.5. Достаточные условия интегрируемости

Теорема 4.6. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.*

Доказательство этой теоремы приводить не будем, так как оно достаточно сложно.

Заметим лишь, что условие непрерывности функции является достаточным условием, но не необходимым.

Можно показать, в частности, справедливость следующих утверждений.

Теорема 4.7. *Если функция f ограничена на отрезке $[a; b]$ и имеет конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$.*

Теорема 4.8. *Если функция f ограничена и монотонна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$.*

Например, функция $f(x) = x\cos^2 x + e^x$ является интегрируемой на любом отрезке $[a; b]$, так как она непрерывна на $\mathbb{R}$.

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ (**??**) является интегрируемой на отрезке $[-1; 1]$, так как только в точке $x = 0$ она имеет точку разрыва 1-го рода.

Функция $f(x) = 1/x$ при $x \in (0; 1]$ и $f(0) = 0$ не является интегрируемой на отрезке, потому что она не ограничена на $[0; 1]$.

4.3.6. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции.

Важную роль в интегральном исчислении имеет связь между определенным и неопределенным интегралами. Перейдем к ее исследованию.

Пусть функция f является интегрируемой на отрезке $[a; b]$. Фиксируем произвольное $x \in [a; b]$.

Функция f будет интегрируемой на отрезке $[a; x]$, т.е. существует интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Теперь каждому $x \in [a; b]$ поставим в соответствие число, равное $\int_a^x f(t)\,dt$. Это означает, что на отрезке $[a; b]$ будет определена фунция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt. \tag{4.25}$$

Определение. Функция $\Phi(x)$, определенная формулой (4.25), называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом состоит в том, что он численно равен площади криволинейной трапеции, расположенной над отрезком $[a; x]$ (рисунок 4.5).

Теорема 4.9. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то функция Φ,*

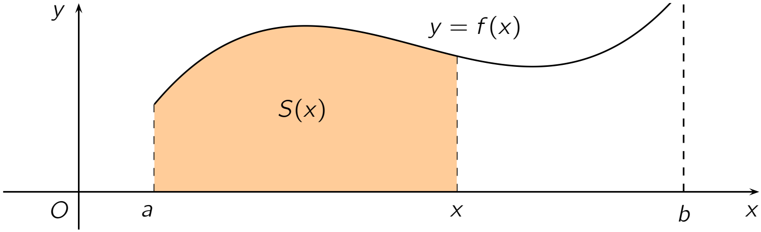

Рисунок 4.5

определяемая формулой (4.25), является дифференцируемой на $[a;b]$*, причем*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x).$$

[Доказательство]

Иначе говоря, теорема 4.9 утверждает, что производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу.

Теорему 4.9 можно переформулировать следующим образом:

если функция f *непрерывна на отрезке* $[a;b]$*, то* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ *является ее первообразной на* $[a;b]$*. Следовательно,*

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

4.3.7. Формула Ньютона—Лейбница.

Названная формула считается основной формулой интегрального исчисления. Она позволяет свести вычисление определенного интеграла от непрерывной функции к вычислению разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Теорема 4.10. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$— какая-либо ее первообразная, то справедлива* формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4.26}$$

[Доказательство]

Разность $F(b) - F(a)$ принято обозначать $F(x)\Big|_a^b$. Поэтому формулу Ньютона—Лейбница можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Пример 4.21. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx$.

Решение. Одной из первообразных для функции $f(x) = \sin 2x$ является функция $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Поэтому, применяя формулу Ньютона—Лейбница, имеем:

$$\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

4.3.8. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 4.11. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем отрезок $[a;b]$ является множеством значений функции $x=\varphi(t)$ и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{4.27}$$

Доказательство. Пусть F — первообразная для функции f, т.е. $F'(x)=f(x)$, $x\in[a;b]$. Тогда имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \tag{4.28}$$

Положим $G(t)=F(\varphi(t))$. По правилу дифференцирования сложной функции получим, что

$$G'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, функция $G(t)$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[a;b]$, и по формуле Ньютона—Лейбница найдем:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(\beta)-G(\alpha) =$$

$$= F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a). \tag{4.29}$$

Правые части равенств (4.28) и (4.29) совпадают. Сравнивая их левые части, получим формулу (4.27). □

Формула (4.27) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Пример 4.22. Найти интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Решение. Воспользуемся формулой замены переменной. Положим $1-x^2 = t$, $-2x\,dx = dt$. Очевидно, $1-0^2 = 1$, $1-1^2 = 0$. По формуле (4.27) получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}\Big|_0^1 = \sqrt{1}-\sqrt{0} = 1.$$

В этом случае можно поступить и по-другому. Положим $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$. Очевидно, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Отрезок $[0;1]$ является множеством значений функции $x = \sin t$, $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. По формуле (4.27) получим:

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \qquad \square$$

Подчеркнем два важных момента. Во-первых, при использовании формулы замены переменной (4.27) в интеграле справа следует найти и поставить новые пределы интегрирования. Во-вторых, в отличие от неопределенного интеграла, здесь нет необходимости возвращаться к старой переменной.

Теорема 4.12. *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{4.30}$$

[Доказательство]

Формулу (4.30) называют *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Пример 4.23. Найти интеграл $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x\,de^x = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$$

$$= e - \int_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1. \quad \square$$

4.4. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

4.4.1. Площадь криволинейной трапеции.

В разделе 4.3 уже отмечалось, что определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от неотрицательной функции f численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$.

Пример 4.24. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью Ox и синусоидой $y = \sin x$, $x \in [0;\pi]$ (рисунок 4.6).

Решение.

$$S = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2. \qquad \square$$

Если фигура не является криволинейной трапецией, то ее площадь стараются представить в виде суммы или разности площадей фигур, являющихся криволинейными трапециями. В частности, справедлива теорема.

Теорема 4.13. *Если фигура ограничена снизу и сверху графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ (не обязательно неотрицательных, (рисунок 4.7), то ее площадь можно найти по формуле*

$$S = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx.$$

Пример 4.25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $xy = 4$ и прямыми $y = x$ и $x = 4$.

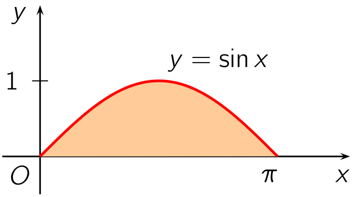

Рисунок 4.6

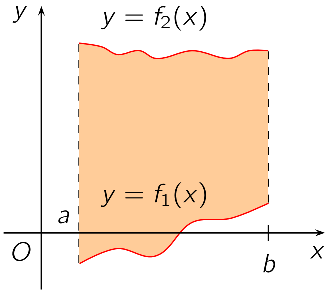

Рисунок 4.7

Решение. Построим фигуру на плоскости (рисунок 4.8). Очевидно, $f_1(x) = \frac{4}{x}$, $f_2(x) = x$,

$$S = \int_2^4 \left(x - \frac{4}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4\ln x\right)\Big|_2^4 = 8 - 4\ln 4 - (2 - 4\ln 2) = 2(3 - 2\ln 2).$$

□

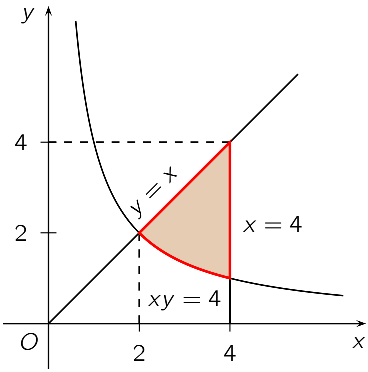

Рисунок 4.8

4.4.2. Длина дуги кривой

Вычисление длин кривых также приводит к интегралам. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Ее график представляет некоторую кривую AB, $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (рисунок 4.9). Кривую AB разобьем точками $C_0 = A, C_1, C_2, \ldots, C_n = B$ на n произвольных частей. Соединим две соседние точки C_{k-1} и C_k хордами, $k = 1, 2, \ldots, n$. Получим n-звенную ломаную, вписанную в кривую AB. Пусть l_k есть длина хорды $C_{k-1}C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\omega = \max_{1\leqslant k\leqslant n} l_k$. Длина ломаной будет выражаться формулой

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} l_k.$$

Естественно определить длину L кривой AB как предельное значение длин ломаных L_n, когда $\omega \to 0$, т.е.

$$L = \lim_{\omega\to 0} L_n = \lim_{\omega\to 0} \sum_{k=1}^{n} l_k\,. \tag{4.31}$$

Пусть x_k есть абсциссы точек C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Тогда координаты точек C_k есть $(x_k; f(x_k))$, и, пользуясь формулой для расстояния между двумя точками, найдем

$$l_n = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\,. \tag{4.32}$$

По формуле конечных приращений имеем:

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in (x_{k-1}; x_k).$$

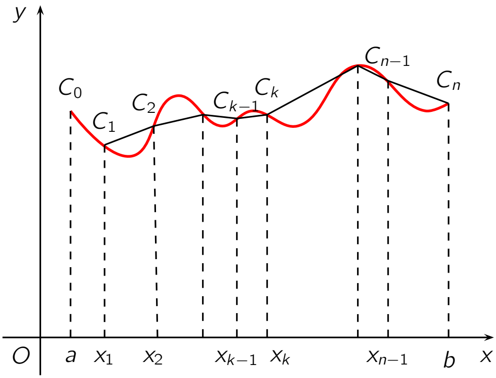

Рисунок 4.9

Подставляя полученное выражение в (4.32), найдем:

$$l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

и

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k.$$

Следовательно, L_n есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$ на отрезке $[a; b]$. Тогда на основании равенств (4.31) имеем:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{4.33}$$

Пример 4.26. Найти длину графика $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между $x = 0$ и $x = 3$.

Решение. Построим график указанной функции (рисунок 4.10).

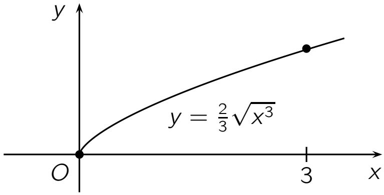

Рисунок 4.10

По формуле (4.33) находим:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx =$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x+1) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}. \quad \square$$

4.4.3. Объем тела вращения

Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Построим соответствующую криволинейную трапецию $ABCD$ (рисунок 4.11).

Если криволинейную трапецию $ABCD$ вращать вокруг оси Ox, то образуется тело, называемое телом вращения (рисунок 4.12). Поставим задачу определения и вычисления объема V этого тела.

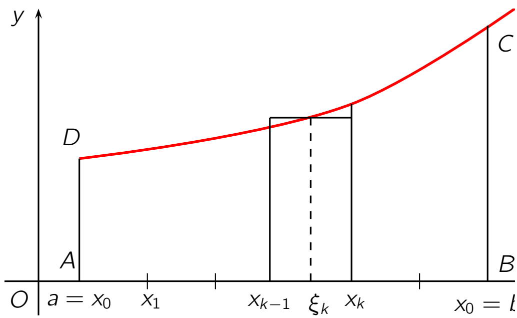

Рисунок 4.11

С этой целью разобьем отрезок $[a; b]$ точками:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta x_k.$$

Произвольно выберем по точке $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, вычислим $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Теперь построим плоскости, проходящие через каждую точку x_k и перпендикулярные оси Ox. Они разобьют тело на n частей (элементарных тел). Каждое элементарное тело заменим цилиндром с радиусом $f(\xi_k)$

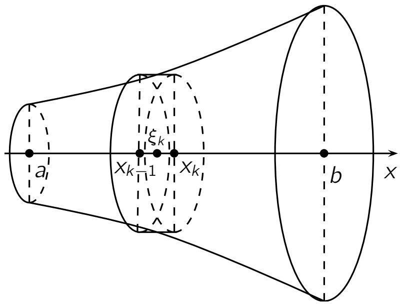

Рисунок 4.12

и высотой Δx_k. Объем такого цилиндра равен $\pi(f(\xi_k))^2\Delta x_k$, и естественно полагать, что объем тела

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(\xi_k))^2\Delta x_k.$$

В правой части этого равенства стоит интегральная сумма для функции $\pi f^2(x)$ на отрезке $[a; b]$. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, найдем

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{4.34}$$

Таким образом, формула (4.34) есть формула для вычисления объемов тел вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Если же криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, равен

$$V = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

Пример 4.27. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области под параболой $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 2$.

Решение. По формуле (4.34) имеем

$$V = \pi \int\limits_0^2 x^4\,dx = \pi \frac{x^5}{5}\bigg|_0^2 = \frac{32}{5}\pi. \qquad \square$$

4.4.4. Использование понятия определенного интеграла в экономике

Рассмотрим сначала экономический смысл определенного интеграла.

Пусть функция $f(t)$ описывает изменение производительности некоторого завода с течением времени. Найдем объем продукции q, произведенной за промежуток времени $[0; T]$.

Если предположить, что производительность не изменяется с течением времени (т.е. $f(t) = \mathrm{const}$), то объем продукции Δq, произведенной за некоторый промежуток времени $[t; t+\Delta t]$, задается формулой $\Delta q = f(t)\Delta t$. Если $f(t)$ не является постоянной функцией, то справедливо приближенное равенство $\Delta q \approx f(\xi)\Delta t$, где $\xi \in [t; t+\Delta t]$, которое оказывается тем точнее, чем меньше Δt.

Поэтому для решения задачи о нахождении объема продукции поступим так же, как при нахождении площади криволинейной трапеции. Разобъем отрезок [0; T] на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Для величины объема продукции Δq_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$, $i = \overline{1, n}$ имеем:

$$\Delta q_i \approx f(\xi_i)\Delta t_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \in [t_{i-1}; t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Тогда

$$q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i.$$

При стремлении $\max_i \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$q = \lim_{\max\limits_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем $q = \int_0^T f(t)\,dt$, т.е. если $f(t)$ — производительность труда в момент времени t, то $\int_0^T f(t)\,dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток $[0; T]$.

Сравнивая данную задачу с задачей нахождения площади криволинейной трапеции, получаем, что величина объема продукции, произведенной за промежуток времени $[0; T]$, численно равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(t)$, описывающей изменения производительности труда с течением времени, отрезком $[0; T]$ и прямыми $t = 0$, $t = T$.

Пример 4.28. Определить объем продукции, произведенной рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3$.

Решение.

$$q = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right) dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+4| + 3t\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3. \quad \square$$

В экономических исследованиях часто используется *производственная функция Кобба—Дугласа*

$$F(K, L) = a_0 L^{\alpha_1} K^{\alpha_2}, \tag{4.35}$$

где L — затраты труда, x_2 — затраты капитала (объем производственных фондов). Подробнее об этой функции будет идти речь в разделе «Функции двух переменных».

Если в (4.35) затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то функцию Кобба—Дугласа можно преобразовать к виду

$$g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}.$$

Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}\, dt. \tag{4.36}$$

Пример 4.29. Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба—Дугласа имеет вид $g(t) = (1+t)e^{3t}$.

Решение. По формуле (4.36) объем Q произведенной продукции равен

$$Q = \int\limits_0^4 (1+t)e^{3t}\, dt = \frac{e^{3t}}{3}(t+1)\Big|_0^4 - \int\limits_0^4 \frac{1}{3}\, e^{3t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}\, e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5.$$

Для вычисления интеграла здесь использован метод интегрирования по частям, при этом $u = t + 1$, $dv = e^{3t}\, dt$, тогда $du = dt$, $v = \frac{1}{3}\, e^{3t}$. □

Часто для решения экономических задач применяют теорему о среднем значении и формулу

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a), \quad \text{где} \quad \xi \in [a; b].$$

Число $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

На практике нередко вычисляют такого рода средние значения, например, средняя производительность труда, средняя мощность электродвигателей и т.д.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время t_{cp}, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то она часто имеет вид:

$$t = Ax^{-B}, \tag{4.37}$$

где A — затраты времени на первое изделие, B — показатель производственного процесса.

Пример 4.30. Найти среднее значение издержек $C(q) = 3q^2 + 4q + 1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции q меняется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Решение. Применяя теорему о среднем значении, имеем:

$$K(\xi) = \frac{1}{3}\int\limits_0^{3-0}(3q^2+4q+1)\,dx = \frac{1}{3}\left(3\frac{q^3}{3}+4\frac{q^2}{2}+q\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}(27+18+3) = 16 \text{ (ден. ед.)},$$

т.е. среднее значение издержек равно 16.

Определим, при каком объеме продукции издержки принимают это среднее значение, т.е. решим уравнение

$$3q^2+4q+1 = 16.$$

Учитывая, что объем продукции не может быть отрицательным, из последнего уравнения имеем $x = \frac{5}{3}$ (ед. продукции). □

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t (лет) при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть K_t — конечная сумма, полученная за t лет, и K — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также современной суммой. Если проценты простые, то $K_t = K(1+it)$, где $i = \frac{p}{100}$ — удельная процентная ставка. Тогда $K = \frac{K_t}{1+it}$. В случае сложных процентов $K_t = K(1+it)^t$ и поэтому $K = \frac{K_t}{(1+it)^t}$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$, и при удельной норме процента, равной i, процент начисляется непрерывно. В этом случае дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}\,dt. \qquad (4.38)$$

Пример 4.31. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 тыс. условных единиц и намечается ежегодное увеличение капиталовложения на 1 тыс. у.е.

Решение. Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда по формуле (4.38) дисконтируемая сумма капиталовложений

$$K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0{,}08t}\,dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим $K = 30{,}5$ тыс. усл. единиц.

Это означает, что для получения одинаковой наращиваемой суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 тыс. у. е. равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 тыс. у. е. при той же начисляемой непрерывно процентной ставке. □

4.5. Несобственные интегралы.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ рассматривался при двух условиях:

а) промежуток $[a; b]$ конечен,
б) функция f ограничена на $[a; b]$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то данное в разделе 4.3 определение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не имеет смысла. Если, например, промежуток интегрирования бесконечный, то его нельзя разбить на n частей конечной длины. Если же функция f неограничена на $[a; b]$, то не существует конечного предела интегральных сумм. Обобщим понятие интеграла и на эти случаи.

4.5.1. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть не выполняется условие а), например, функция f определена на промежутке $[a; +\infty)$. Предположим, что она интегрируема на любом отрезке $[a; A]$, т.е. существует интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$.

Определение. *Несобственным интегралом первого рода* или *несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется предел

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_a^{A} f(x)\,dx, \tag{4.39}$$

т.е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^{A} f(x)\,dx.$$

Определение. Если предел (4.39) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся*.

Чтобы лучше понять идею этого обобщения, рассмотрим его геометрическую интерпретацию. Пусть, например, функция f является неотрицательной и невозрастающей на $[a; +\infty)$ (рисунок 4.13).

Интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$ числено равен площади заштрихованной криволинейной трапеции. При возрастании A эта площадь будет увеличиваться. При

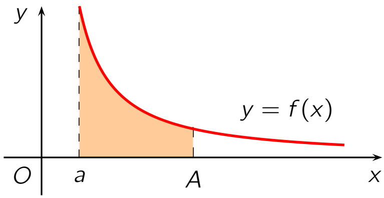

Рисунок 4.13

этом она может неограниченно возрастать либо оставаться ограниченной и стремиться к какому-то пределу. Этот предел и есть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Подчеркнем, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции $y = f(x)$ и осью Ox вправо от точки $x = a$, может быть конечной, не смотря на то, что эта фигура является неограниченной.

Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода состоит в том, что он численно равен площади полубесконечной фигуры, ограниченной графиком неотрицательной функции, прямой $x = 0$ и частью оси Ox $[a; +\infty]$.

Пример 4.32. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx.$$

Решение. По определению (см. (4.39)) имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^A\right) = \\ = \lim_{A\to+\infty}(1 - e^{-A}) = 1. \quad \square$$

Пример 4.33. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Решение.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \left(\ln x \Big|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \ln A = +\infty.$$

Следовательно, этот интеграл расходится. □

Замечание 4.4. Несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \neq 1.$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. [Доказательство]

Этот пример свидетельствует о том, что функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ в случае $\alpha > 1$ достаточно быстро стремиться к нулю при $x \to +\infty$, и это обеспечивает существование несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Если же $\alpha \leqslant 1$, то $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ стремиться к нулю медленно при $x \to +\infty$ или совсем не стремиться к нулю, и поэтому рассматриваемый интеграл расходится.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла по промежутку $(-\infty; b)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to-\infty} \int\limits_B^{b} f(x)\,dx.$$

Пусть функция f определена на всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$. Теперь рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{4.40}$$

Зафиксируем произвольное число $c \in \mathbb{R}$. Разобъем этот интеграл на два

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\, dx, \tag{4.41}$$

где c — произвольное число.

Интеграл (4.40) называют сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства (4.41) сходятся и расходящимся — в противном случае.

4.5.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций.

Пусть теперь не выполняется условие б)(см. начало раздела), т.е. функция f неограничена на $[a;b]$. Построим обобщение интеграла на этот случай.

Пусть функция f определена на промежутке $[a;b)$. В любой окрестности точки $x=b$ функция f может быть неограниченной. Предположим, что функция f интегрируема на любом отрезке $[a;\varepsilon]\subset[a;b)$, т. е. существует интеграл

$$\int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx, \quad c\in[a;b).$$

Определение. *Несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to b-0}\int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{4.42}$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to b-0}\int_a^{\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если предел (4.42) существует и конечен, то рассматриваемый интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода состоит в том, что он численно равен площади полубесконечной фигуры, ограниченной графиком неотрицательной функции, прямыми $x=a$, $x=b$ и частью осью Ox (рисунок 4.14).

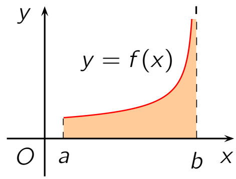

Рисунок 4.14

Если функция f определена на промежутке $(a; b]$ и неограничена в окрестности точки $x = a$, то полагают:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a+0} \int_\varepsilon^b f(x)\,dx.$$

Наконец, пусть функция f определена на интервале $(a; b)$ и неограничена и в окрестности точки a, и в окрестности точки b. Произвольным образом выберем число $c \in (a; b)$. Получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4.43}$$

Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ называют сходящимся, если оба интеграла в правой части равенства (4.43) сходятся и расходящимся — в противном случае.

Пример 4.34. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Это есть несобственный интеграл второго рода, функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ является неограниченной в любой окрестности точки $x = 1$. Поэтому по формуле (4.42) имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 1-0} \left(\arcsin x\Big|_0^c\right) = \lim_{\varepsilon\to 1-0} \arcsin\varepsilon = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

Пример 4.35. Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

Решение. По определению несобственного интеграла второго рода имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to +0} \left(\ln|x|\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to +0} (\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty.$$

Значит, указанный интеграл расходится. $\square$

Замечание 4.5. Несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$. [Доказательство]

Заметим, что несобственный интеграл второго рода также легко интегрируется геометрически.

Мы рассмотрели понятие несобственных интегралов. В расширенном курсе высшей математики подробно рассматриваются условия их сходимости и устанавливаются соответствующие признаки.

Глава 5

Дифференцирование функций двух переменных

5.1. Функция двух переменных. Дифференциал

5.1.1. Определения

Определение. Пусть D — некоторое множество точек $M(x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Правило f, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ единственное число z из множества действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *функцией двух переменных* и обозначается $z = f(x, y)$ либо $f : D \to \mathbb{R}$.

Множество D при этом называется *областью определения функции*. Множество значений, принимаемых функцией в области определения, называется *множеством значений* функции.

Множество значений является подмножеством множества действительных чисел $\mathbb{R}$, а область определения — подмножеством точек плоскости Oxy.

Функцию двух переменных можно изобразить графически. Для этого в каждой точке $(x, y) \in D$ вычисляется значение функции $z = f(x, y)$. Тогда тройка чисел $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ определяет в системе декартовых координат в пространстве некоторую точку P (смотрите рисунок 5.1).

Определение. Совокупность точек $P(x, y, f(x, y))$ (смотрите рисунок 5.1) представляет собой поверхность в трехмерном пространстве, которая называется *графиком* функции $z = f(x, y)$.

Пример 5.1. Графиком линейной функции $z = Ax + By + C$ является плоскость.

Пример 5.2. Для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область определения $D(f)$ есть единичный круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, а множество значений — отрезок $[0; 1]$. График этой функции представляет собой верхнюю полусферу радиуса 1 с центром в начале координат (рисунок 5.2).

Наглядное представление о функции двух или трех переменных может дать картина ее линий уровня.

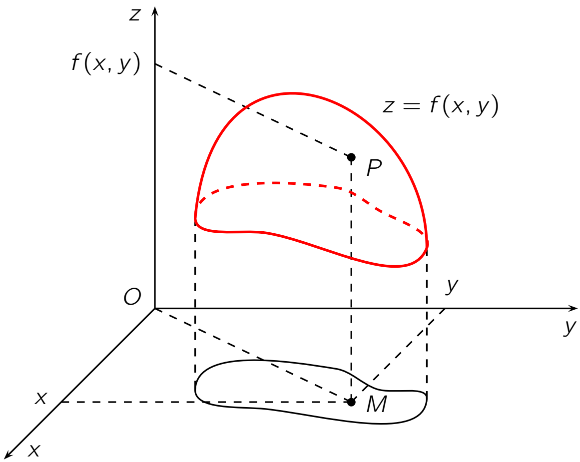

Рисунок 5.1

Определение. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = c$, где c — константа.

Другими словами, линия уровня — это кривая, во всех точках которой функция f принимает одно и то же постоянное значение c. Геометрически линии уровня получаются как проекции на плоскость Oxy линий пересечения графика функции f и горизонтальных плоскостей $z = c$.

Пример 5.3. Построить семейство линий уровня параболоида вращения $z = x^2 + y^2$.

Решение. Придавая постоянной c значения $0, 1, 2, \ldots$ (константа c, очевидно, не может быть отрицательной), получим уравнения некоторых линий уровня. Например,

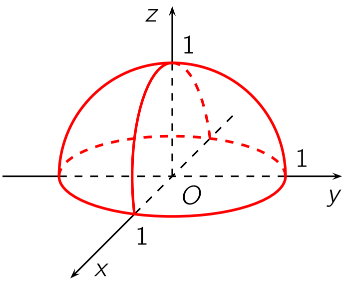

Рисунок 5.2

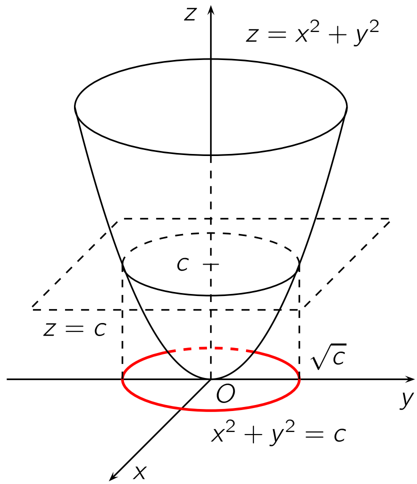

Рисунок 5.3

$x^2+y^2=0$ представляет собой точку $O(0;0)$;

$x^2+y^2=1$ является окружностью радиуса $R=1$ с центром $O(0;0)$;

$x^2+y^2=2$ есть окружность радиуса $R=\sqrt{2}$ с центром $O(0;0)$.

Таким образом, линиями уровня функции $z=x^2+y^2$ являются концентрические окружности с центром в начале координат $x^2+y^2=c$, где $c\geqslant 0$, которые получаются в результате пересечения поверхности параболоида $z=x^2+y^2$ с плоскостями $z=c$ (смотрите рисунок 5.3). $\square$

Линии уровня используются в картографии. Так, например, на топографических картах рисуют линии равной высоты над уровнем моря, на метеорологических картах изображают линии одинакового давления — изобары.

По линиям уровня, построенным для некоторой рассматриваемой функции с одинаковыми промежутками между значениями c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ..., можно получить представление о графике функции (то есть о форме поверхности). В тех местах, где линии располагаются «гуще», функция при переходе от одного значения c к другому меняется быстрее, чем там, где линии распределены реже.

Определение. Пусть множество $D\in\mathbb{R}$ вместе с каждой точкой $(x;y)$ содержит точки $(tx;ty)$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Функция $f:D\to\mathbb{R}$ называется *однородной* степени α, если

$$f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y).$$

Число α называется *степенью однородности*.

Пример 5.4. Так как для функции $f(x,y)=5x+9y$

$$f(tx,ty)=5tx+9ty=t(5x+9y)=tf(x,y),$$

то эта функция является однородной степени $\alpha=1$.

Пример 5.5. Для функции $f(x,y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$

$$f(tx,ty) = \frac{atx+bty}{ctx+dty} = \frac{t(ax+by)}{t(cx+dy)} = \frac{ax+by}{cx+dy} = f(x,y).$$

Значит, функция f однородная степени $\alpha = 0$.

5.1.2. Предел функции двух переменных

Определение. Число A называется *пределом* функции f в точке M_0, если для любой последовательности точек плоскости $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к точке M_0 и такой, что $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к числу A.

Тот факт, что число A является пределом функции двух переменных $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, можно записать одним из следующих способов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A, \qquad \lim_{M\to M_0} f(x,y) = A.$$

Замечание 5.1. Если для некоторых двух последовательностей точек $\{M'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{M''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящихся к M_0, пределы соответствующих последовательностей $\{f(M'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{f(M''_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеют разные значения или хоть один из них не существует, то в точке M_0 функция f предела не имеет.

Пример 5.6. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

Решение. Рассмотрим последовательность точек $M'_n(1/n, 0)$, стремящуюся к началу координат по положительной части оси Ox. Для этой последовательности

$$\lim_{n\to\infty} f(M'_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Возьмем теперь последовательность $M''_n(1/n, 1/n)$, стремящуюся к началу координат по направлению биссектрисы первого координатного угла. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(M_n'') = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, двум разным последовательностям точек, стремящимся к началу координат по разным путям, соответствуют две последовательности значений функции, имеющие разные пределы. Следовательно, данный предел не существует. □

Определение. *Окрестностью* точки M_0 на плоскости называется любой открытый круг, содержащий эту точку.

Определение. Внутренность круга с центром в точке M_0 и радиусом ε, то есть множество

$$U(M_0,\varepsilon) = \left\{(x,y) \;\middle|\; (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\right\}$$

называется *ε-окрестностью* точки M_0 (рисунок 5.4).

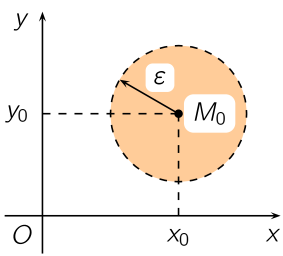

Рисунок 5.4

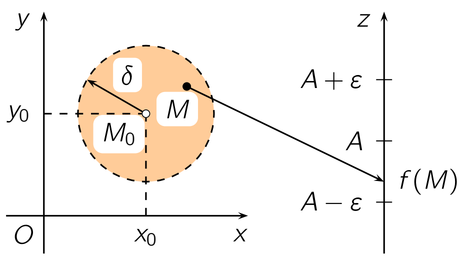

Рисунок 5.5

Как и для функций одной переменной, можно доказать, что данное нами определение предела функции на языке последовательностей эквивалентно приводимому ниже определению на языке ε-δ.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым оно бы ни было, существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Другими словами, число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\colon \forall\, (x, y),\ 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,\ |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

«Переведем» это определение на «язык окрестностей».

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки M_0, что для всех точке $M \neq M_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A.

Это определение выражает *геометрический смысл предела функции двух переменных* (рисунок 5.5).

Все положения теории пределов функции одной переменной можно перенести на функцию нескольких переменных.

Свойства предела функции двух переменных

1. *Если функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 предел, то существует окрестность этой точки, в которой функция f ограничена.*

2. *Если* $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(x,y) = B$, *то*

1) $\lim\limits_{M\to M_0} \Big(f(x,y) \pm g(x,y)\Big) = A \pm B$,

2) $\lim\limits_{M\to M_0} \Big(f(x,y) \cdot g(x,y)\Big) = A \cdot B$,

3) $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{A}{B}$ *при условии, что* $B \neq 0$.

Пример 5.7. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$?

Решение. Так как $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, то

$$\left|\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|x|\dfrac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|x|}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что искомый предел существует и равен нулю. $\square$

5.1.3. Непрерывность функции двух переменных

Определение. Функция $z = f(x, y)$, определенная в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если в этой точке существует предел функции $f(x, y)$, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Другими словами, достаточно малые изменения независимых переменных x и y обеспечивают сколь угодно малые изменения значений функции. Геометрически это означает, что достаточно малые сдвиги точек на плоскости Oxy ведут к сколь угодно малым изменениям аппликаты точек поверхности, представляющей график функции $z = f(x, y)$.

По аналогии с функциями одной переменной можно доказать, что арифметические действия над непрерывными функциями и построение сложных функций из непрерывных функций приводят к непрерывным же функциям. При этом для непрерывности частного, как всегда, требуется, чтобы делитель не обращался в нуль.

Определение. Функция, непрерывная в каждой точке области, называется *непрерывной в этой области*.

Пример 5.8. Функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0) \end{cases}$$

непрерывна в начале координат в силу примера 5.7. В других точках она непрерывна как элементарная функция. Таким образом, она непрерывна во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение. Точка, в которой функция не определена или определена, но не является непрерывной, называется *точкой разрыва* функции.

Пример 5.9. Для функции

$$z = \frac{1}{9x^2 - 4y^2}$$

точки разрыва образуют множество точек плоскости Oxy, определяемое равенством $9x^2 - 4y^2 = 0$, то есть две прямые $y = \pm 3x/2$.

Приведенное выше определение описывает непрерывность функции f по совокупности переменных. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию $\varphi(x) = f(x, y_0)$ одной переменной x.

Определение. Если функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$ непрерывна в точке x_0, то говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке* (x_0, y_0) *по переменной* x. Аналогично вводится понятие *непрерывности функции* f *в точке* (x_0, y_0) *по переменной* y.

Будем придавать переменным x и y такие приращения Δx и Δy, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежала области определения функции $z = f(x, y)$.

Определение. *Частными приращениями* функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Определение. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Перефразируем определение непрерывности функции на «языке приращений».

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение есть *величина бесконечно малая*, когда приращения независимых переменных стремятся к нулю, то есть

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Непрерывность функции $f(x, y)$ по одной из переменных x или y в точке $M_0(x_0, y_0)$ означает справедливость одного из равенств:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0, \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y z = 0.$$

Замечание 5.2. Из непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ следует её непрерывность по каждой из переменных x и y в этой точке. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В этом несложно убедиться на примере функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0), \end{cases}$$

если вспомнить результат примера 5.6.

5.1.4. Частные производные

Геометрический смысл частных производных

Определение. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то есть существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке M_0 и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется *частная производная* по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Замечание 5.3. Из определения следует, что частную производную функции двух переменных следует вычислять как обычную производную функции одной переменной, считая вторую переменную постоянной.

Пример 5.10. Найти частные производные функции

$$z = x^3y^2 + 2x\ln y + x^y.$$

Решение. При нахождении частной производной функции z по x считаем переменную y постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2\ln y + yx^{y-1}.$$

Вычисляя производную z по y, считаем постоянной переменную x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 2\frac{x}{y} + x^y\ln x. \qquad \square$$

Геометрический смысл частных производных

На поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$, выберем точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (смотрите рисунок 5.6). Построим сечение этой поверхности плоскостью $y = y_0$, параллельной координатной плоскости Oyz. Получим плоскую кривую, задаваемую уравнениями

$$y = y_0, \quad z = \varphi(x) = f(x, y_0).$$

Производная $\varphi'(x_0)$ функции одной переменной $\varphi(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к этой кривой. Но по определению частных производных также верно равенство $\varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.

Итак, если α — угол между осью Ox и касательной, проведенной к кривой $z = f(x, y_0)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, то $f_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Аналогично, $f_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta$, где β — угол между осью Oy и касательной, проведенной к кривой $z = f(x_0, y)$ в точке P_0. В этом и заключается *геометрический смысл частных производных*.

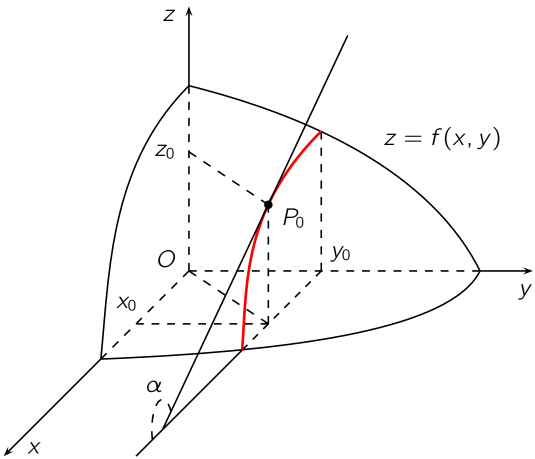

Рисунок 5.6

5.1.5. Частные производные высших порядков

Определение. Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и в некоторой ее окрестности. Если функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ сами могут быть продифференцированы, то их частные производные по переменным x и y называются *частными производными второго порядка* и обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Пример 5.11. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = x^4 + 4x^2y^3 + 10.$$

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка:

$$z'_x = 4x^3 + 8xy^3, \quad z'_y = 12x^2y^2.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_x = 12x^2 + 8y^3, \qquad z''_{yy} = \left(12x^2y^2\right)'_y = 24x^2y,$$

$$z''_{xy} = \left(12x^2y^2\right)'_x = 24xy^2, \qquad z''_{yx} = \left(4x^3 + 8xy^3\right)'_y = 24xy^2. \qquad \square$$

Частные производные третьего и *более высокого порядка* определяются и обозначаются аналогично. Например,

$$z'''_{xyx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right), \quad z^{(7)}_{y^2x^5} = \frac{\partial^7 z}{\partial y^2 \partial x^5} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^6 z}{\partial y \partial x^5}\right).$$

Определение. Частные производные по разным переменным, например, z''_{xy} и z''_{yx}, называются *смешанными*.

В примере 5.11 оказалось, что смешанные производные равны, то есть $z''_{xy} = z''_{yx}$. Приводимая ниже теорема Шварца утверждает, что это не простое совпадение.

Теорема 5.1 (Шварца). *Если частные производные порядка n непрерывны, то смешанные производные того же порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.*

5.1.6. Дифференцируемость и дифференциал

Определение. Функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *дифференцируемой* в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{5.1}$$

где A и B — постоянные, не зависящие от Δx и Δy, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — *бесконечно малые функции* при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Теорема 5.2 (необходимое условие дифференцируемости)**.** *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то есть ее полное приращение может быть записано в виде (5.1), то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = B. \tag{5.2}$$

[Доказательство]

Замечание 5.4. Приводимый ниже пример показывает, что теорему 5.2 нельзя обратить, то есть из непрерывности функции и существования всех ее частных производных, вообще говоря, не следует дифференцируемость.

Пример 5.12. В примере 5.8 мы установили, что функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0) \end{cases}$$

непрерывна во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Во всех точках, кроме начала координат, функция z имеет частные производные, будучи элементарной. В начале координат

$$z'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Аналогично $z'_y(0,0) = 0$. Итак, функция z непрерывна и имеет частные производные во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Если функция z дифференцируема в начале координат, то по формулам (5.1) и (5.2) ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Приняв $\Delta x = \Delta y$ и подсчитав, что при этом

$$\Delta z = \frac{(\Delta x)^2 \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} - 0 = \frac{\Delta x}{2},$$

получим соотношение

$$\frac{\Delta x}{2} = \alpha(\Delta x, \Delta x)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta x)\Delta x.$$

После сокращения на Δx приходим к равенству

$$\alpha(\Delta x, \Delta x) + \beta(\Delta x, \Delta x) = \frac{1}{2},$$

противоречащему тому факту, что α и β — бесконечно малые. Таким образом, функция z не дифференцируема в начале координат.

Теорема 5.3 (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция* $z = f(x, y)$ *имеет частные производные в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$, непрерывные *в точке* M_0, *то эта функция дифференцируема в точке* M_0.

Определение. *Дифференциалом* dz дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения (5.1):

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Из соотношений (5.2) следует, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{5.3}$$

Полагая в формуле (5.3), $z(x, y) = x$, получим:

$$dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x.$$

Таким образом, $dx = \Delta x$. Аналогично $dy = \Delta y$. Эти рассуждения позволяют переписать дифференциал (5.3) в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{5.4}$$

Форма записи дифференциала (5.4) наиболее распространена.

Пример 5.13. Найти дифференциал функции $z = e^{x^3 y}$.

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y} 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y} x^2.$$

По формуле (5.4) искомый дифференциал

$$dz = e^{x^2 y} 2xy\, dx + e^{x^2 y} x^2\, dy = e^{x^2 y}(2xy\, dx + x^2\, dy). \qquad \square$$

5.1.7. Производная сложной функции

Теорема 5.4 (о производной сложной функции)**.** *Если $z = f(x, y)$ — дифференцируемая по переменным x, y функция и $x(t)$, $y(t)$ — функции, дифференцируемые по переменной t, то сложная функция $z(t) = f(x(t), y(t))$ также дифференцируема, и ее производная может быть вычислена по формуле:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{5.5}$$

[Доказательство]

Замечание 5.5. Требование дифференцируемости функции z в теореме 5.4 является существенным. Действительно, формула (5.5) теряет силу, например, для рассмотренной в примере 5.12 функции

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{в точке } O(0, 0). \end{cases}$$

Эта функция непрерывна, имеет равные нулю частные производные, но не дифференцируема в начале координат. Если положить $x = t$ и $y = t$, то по формуле (5.5) окажется, что

$$z'(0) = z'_x(0, 0)x'(0) + z'_y(0, 0)y'(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Но на самом деле $z'(t) = \left(\dfrac{t^2 \cdot t}{t^2 + t^2}\right)' = \left(\dfrac{t}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

5.1.8. Производная по направлению. Градиент

Определение. Выберем на плоскости точку $M_0(x_0, y_0)$. Построим луч l, выходящий из точки M_0. Тем самым мы зададим в точке M_0 *направление* l (рисунок 5.7).

Определение. Луч, задающий направление l, образует с положительными направлениями осей координат Ox и Oy углы α и β. Величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* направления l (рисунок 5.7).

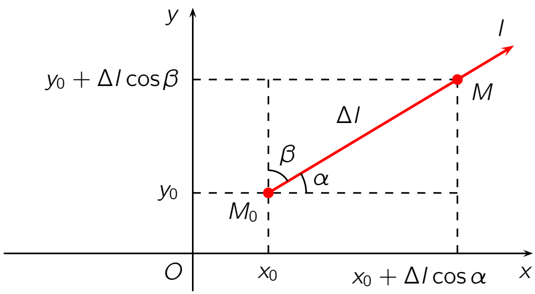

Рисунок 5.7

Так как $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Замечание 5.6. Направляющие косинусы задают единичный вектор $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, однозначно определяющий направление l.

Точка $M(x, y)$, расположенная от M_0 на расстоянии Δl в направлении l, имеет координаты $x = x_0 + \Delta l \cos\alpha$ и $y = y_0 + \Delta l \cos\beta$.

Определение. *Приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению l* называется величина

$$\Delta_l z = f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0), \tag{5.6}$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы, задающие направление l (смотрите рисунок 5.8).

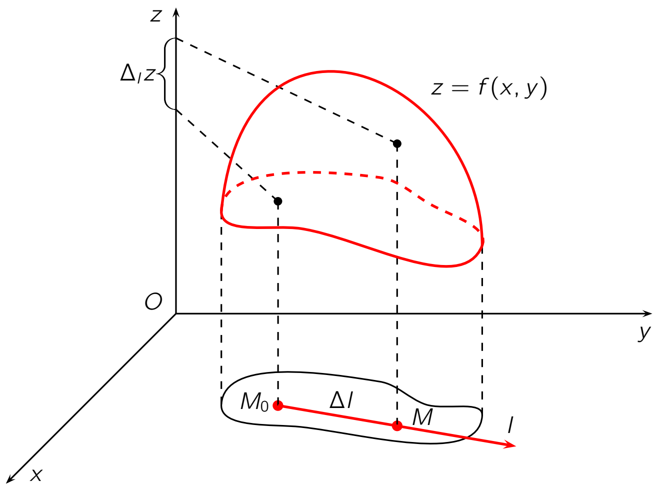

Рисунок 5.8

Определение. *Производной функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению l* называется предел отношения приращения этой функции в точке M_0 по направлению l к величине Δl при стремлении последней к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Замечание 5.7. Величина $\frac{\partial f}{\partial l}$ характеризует быстроту изменения функции $f(x, y)$ в точке M_0 по направлению l.

Если направление l совпадает с положительным направлением оси Ox, то производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}$ совпадает с частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x. Если l совпадает с положительным направлением оси Oy, то $\frac{\partial f}{\partial l}$ есть частная производная функции $f(x, y)$ по y.

Теорема 5.5. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема, то ее производная по направлению l существует и может быть вычислена по формуле*

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{5.7}$$

[Доказательство]

Пример 5.14. Вычислить производную функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $A(1; 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, где $B(3; 0)$.

Решение. Найдем единичный вектор **e**, имеющий заданное направление:

$$\overrightarrow{AB} = (2; -2); \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}; \quad \mathbf{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Выпишем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вычислим частные производнгые функции z в точке $A(1; 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1; 2) = 6, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1; 2) = 4.$$

По формуле (5.7) получим: $\frac{\partial z}{\partial l} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. □

Определение. *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным этой функции:

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Если направление l задано единичным вектором $\mathbf{e}(\cos\alpha, \cos\beta)$, то по формуле (5.7)

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta) = \operatorname{grad} z \cdot \mathbf{e},$$

что свидетельствует о справедливости следующего утверждения.

Теорема 5.6. *Производная по направлению есть скалярное произведение градиента и единичного вектора, задающего направление.*

Замечание 5.8. Как известно, скалярное произведение двух векторов максимально, если они одинаково направлены. Следовательно, градиент характеризует направление и величину максимального роста функции в выбранной точке, причем

$$\max_l \frac{\partial z}{\partial l} = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}.$$

Замечание 5.9. Умея находить градиент, можно с некоторой погрешностью строить линии уровня функции. Вдоль своей линии уровня функция не меняется, а по направлению градиента растет с максимальной скоростью. Это делает понятным с наглядной точки зрения тот факт, что градиент *перпендикулярен* линии уровня. Строгое математическое доказательство данного утверждения мы опускаем.

С учетом сделанного замечания линии уровня можно строить следующим образом. Выбирается, вообще говоря произвольно, некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$. Строится градиент в этой точке. Задается направление, перпендикулярное градиенту. Строится небольшой участок линии уровня. Рассматривается близкая к M_0 точка $M_1(x_1; y_1)$ и строится градиент в ней. Далее построения повторяются.

Пример 5.15. Найти направление и величину максимального роста функции $z = 3x^2 + xy - 2y^2$ в точке $A(2; 1)$.

Решение. Вычислим частные производные функции z в точке A:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(2; 1) = 13, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(2; 1) = -2.$$

Отсюда $\operatorname{grad} z(2; 1) = (13, -2)$. Этот вектор задает искомое направление максимального роста. Величина максимального роста равна

$$\left|\operatorname{grad} z(2; 1)\right| = \left|(13, -2)\right| = \sqrt{13^2 + 2^2} = \sqrt{173}. \qquad \square$$

5.1.9. Производственная функция Кобба — Дугласа

Как мы уже знаем, производственная функциия (ПФ) выражает зависимость объема производства от величины затраченных ресурсов.

Определение. Производственная функция одной переменной называется *одноресурсной*.

В ряде случаев ПФ может быть сведена к зависимости *производительности труда* y, то есть выпуска продукта в расчете на одного работника, от *капиталовооруженности* труда x, то есть величины капитала в расчете на одного работника. Капиталовооруженность x может быть найдена по формуле $x = K/L$, где K — величина капитала, L — затраты труда.

Возникновение теории производственных функций относится к 1928 году. Тогда появилась статья двух американских ученых Д. Кобба и П. Дугласа, в которой впервые была введена функция, ныне известная как *производственная функция Кобба — Дугласа*.

Определение. Функция

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad a > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

выражающая зависимость объема выпускаемой продукции от объема основных фондов K и затрат труда L, называется *производственной функцией Кобба — Дугласа*.

График производственной функциии Кобба — Дугласа в трехмерном пространстве есть коническая поверхность (рисунок 5.9).

Для функции Кобба — Дугласа линии уровня, соответствующие константе $C > 0$, задаются уравнением $aK^{\alpha}L^{1-\alpha} = C$ или

$$L = \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

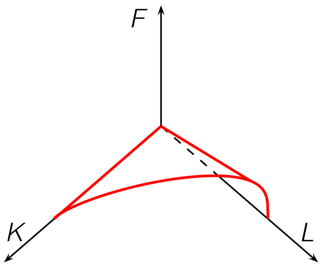

Рисунок 5.9

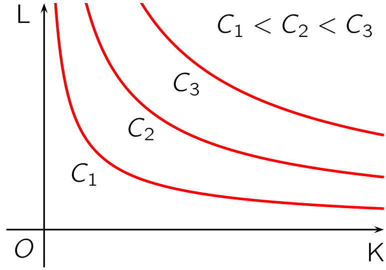

Рисунок 5.10

Линии уровня производственной функциии $F(K, L)$ для различных значений C изображены на рисунке 5.10. Точки (K, L), лежащие на одной линии уровня, соответствуют различным наборам затрат, обеспечивающим один и тот же выпуск продукции.

Определение. Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Отметим, что изокванта, соответствующая значению C_3, расположена «северо-восточнее» изокванты, соответствующей значению C_2 (рисунок 5.10).

Выясним, какую экономическую интерпретацию можно дать частным производным ПФ. Отношение

$$\frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}$$

показывает, какой дополнительный выпуск приходится на одну единицу изменения основных фондов K_0 при постоянных затратах труда L_0. Если существует конечный предел указанного выше отношения при $\Delta K \to 0$, то это есть частная производная функции $F(K, L)$ по переменной K:

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K_0, L_0) = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{F(K_0 + \Delta K, L_0) - F(K_0, L_0)}{\Delta K}.$$

Определение. Частная производная $\partial F/\partial K$ производственной функции F называется *предельной фондоотдачей*.

Определение. Частную производную $\partial F/\partial L$ производственной функции F называют *предельной производительностью труда*.

Для производственной функции Кобба — Дугласа предельные фондоотдача и производительность труда соответственно равны

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(aK^\alpha L^{1-\alpha}\right) = a\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha},$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(aK^\alpha L^{1-\alpha}\right) = a(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.$$

Определение. *Эластичностью* функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменным x и y называются соответственно пределы

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta_x z}{z}}{\dfrac{\Delta x}{x}}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\Delta_y z}{z}}{\dfrac{\Delta y}{y}}.$$

Из определения эластичности следует, что

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Замечание 5.10. Эластичность приближенно показывает на сколько процентов изменится выпуск, если затраты какого-либо одного ресурса увеличатся на 1 % при неизменных объёмах другого ресурса.

Для производственной функции Кобба — Дугласа $F(K, L)$

$$E_{FK}(K_0, L_0) = \frac{K_0}{F(K_0, L_0)} \frac{\partial F}{\partial K}(K_0, L_0) = \frac{K_0}{aK_0^{\alpha} L_0^{1-\alpha}} a\alpha \left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{1-\alpha} = \alpha,$$

$$E_{FL}(K_0, L_0) = \frac{L_0}{F(K_0, L_0)} \frac{\partial F}{\partial L}(K_0, L_0) =$$

$$= \frac{L_0}{aK_0^{\alpha} L_0^{1-\alpha}} \ a(1-\alpha) \left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{\alpha} = 1 - \alpha.$$

Сформулируем экономический смысл параметра α функции Кобба — Дугласа. Эластичность выпуска по основным фондам равна α. Значит, относительное изменение основных фондов на 1 % вызывает изменение выпуска приблизительно на α %.

5.2. Экстремум функции двух переменных

5.2.1. Локальный экстремум

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность M_0, для любой точки $M(x, y)$ которой выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$, и *точкой локального минимума*, если существует окрестность точки M_0, где $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.

Определение. Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

В начале координат верхняя часть полусферы (рисунок 5.2) имеет *гладкий локальный максимум*, параболоид $z = x^2 + y^2$ (рисунок 5.3) — *гладкий локальный минимум*, конус (рисунок 5.11) — *острый локальный минимум*.

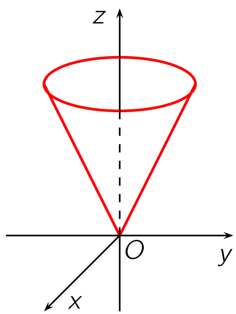

Рисунок 5.11

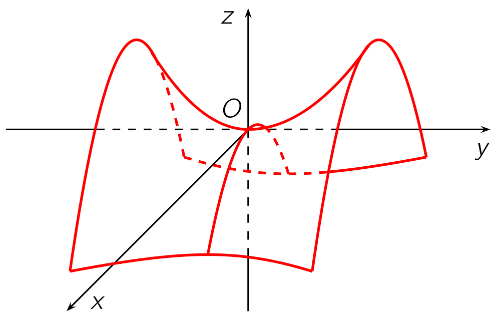

Рисунок 5.12

Теорема 5.7 (необходимое условие локального экстремума)**.** *Если дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет локальный экс-*

тремум в этой точке, то обе ее частные производные в M_0 обращаются в нуль:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{5.8}$$

Замечание 5.11. Необходимое условие экстремума не является достаточным. Например, частные производные функции $z = y^2 - x^2$ равны нулю в точке $M_0(0, 0)$, однако эта функция не имеет экстремума в указанной точке. В самом деле, значение функции z в точке M_0 равно нулю, но в сколь угодно малой окрестности M_0 функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Если, например, $x = 0$, то $z = y^2 > 0$. Если $y = 0$, то $z = -x^2 < 0$.

Графиком функции $z = y^2 - x^2$ является *гиперболический параболоид* (рисунок 5.12), для которого M_0 — это так называемая *седловая точка*.

Определение. Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума (5.8), будем называть *стационарными точками*.

Теорема 5.8 (достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ и некоторой ее окрестности функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка. Положим*

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0), \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0), \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0), \qquad \Delta = AC - B^2.$$

Если в этих обозначениях

1) $\Delta > 0$, *то в точке M_0 функция z имеет экстремум, причем*
   - *при $A < 0$ либо $C < 0$ это локальный максимум;*
   - *при $A > 0$ либо $C > 0$ это локальный минимум;*
2) $\Delta < 0$, *то в точке M_0 экстремума нет;*

3) $\Delta = 0$, *то нужны дополнительные исследования: экстремум может быть, а может и отсутствовать.*

Следующие два примера иллюстрируют третий пункт.

Пример 5.16. Для функции $z = x^4 + y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3.$$

Значит, точка $M_0(0,0)$ является стационарной. Так как

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2,$$

то в точке M_0 имеем: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ и, таким образом, $\Delta = 0$.

При этом M_0 — это точка минимума функции z, поскольку $z(M_0) = 0$ и на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ верно неравенство $z(x,y) \geqslant 0$.

Пример 5.17. Для функции $z = x^3 + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Таким образом $M_0(0,0)$ — стационарная точка, для которой $\Delta = 0$.

В данном случае $z(M_0) = 0$, и в каждой окрестности точки M_0 есть точки вида $M(x,0)$, в которых функция z равна x^3 и потому принимает положительные значения для $x > 0$ и отрицательные для $x < 0$. Итак, в любой окрестности точки M_0 функция z принимает значения, как большие, так и меньшие, чем $z(M_0)$. Значит, в точке M_0 экстремума нет.

Пример 5.18. Найти точки локального экстремума функции

$$z = x^4 + y^4 - xy.$$

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - x.$$

Согласно необходимому условию локального экстремума экстремум возможен только в тех точках, где частные производные равны нулю. Составим и решим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0, \\ 4y^3 - x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x^3, \\ 4(4x^3)^3 - x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x^3, \\ x(256x^8 - 1) = 0. \end{cases}$$

Имеем три стационарные точки: $M_1(0;0)$, $M_2(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$, $M_3(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Отсюда $\Delta = AC - B^2 = 144x^2y^2 - 1$.

Вычислим значение Δ в каждой стационарной точке. Так как

$$\Delta(M_1) = \Delta(0;0) = -1 < 0,$$

то в точке M_1 нет экстремума. Далее,

$$\Delta(M_2) = \Delta\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 8 > 0, \quad A(M_2) = A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) > 0,$$

поэтому M_2 — точка локального минимума. Наконец,

$$\Delta(M_3) = \Delta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8 > 0, \quad A(M_3) = A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Значит, M_3 — точка локального минимума. □

5.2.2. Глобальный экстремум

В прикладных дисциплинах часто встречается задача на отыскание *глобального экстремума*, когда требуется вычислить наибольшее и наименьшее значения функции в некоторой области двумерного пространства, ограниченной заданным набором линий.

Глобальный экстремум может достигаться либо внутри, либо на границе области. В первом случае экстремум окажется также локальным, и для него будет выполнено необходимое условие экстремума (5.8). Из сказанного становится ясно, что для отыскания глобального экстремума следует

1) найти стационарные точки, расположенные внутри области, и вычислить значения функции в них;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;
3) из всех найденных значений выбрать самое большое и самое маленькое.

Пример 5.19. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x + 2y = 8$.

Решение. Прямая $x + 2y = 8$ пересечет ось Oy в точке $A(0; 4)$, а ось Ox — в точке $B(8; 0)$. Таким образом, функцию z мы будем исследовать в треугольнике OAB (смотрите рисунок 5.13).

Находим стационарные точки внутри треугольника OAB:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 2, \\ 4y = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

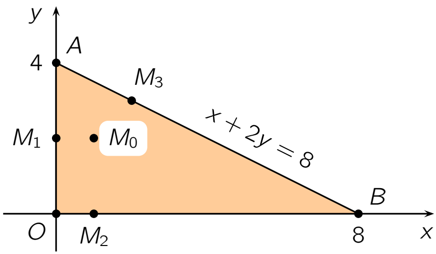

Рисунок 5.13

Имеем единственное решение $M_0(1,2)$. Вычисляем значение функции z в стационарной точке M_0:

$$z(M_0) = z(1,2) = 1^2 + 2\cdot 2^2 - 2\cdot 1 - 8\cdot 2 = 1 + 8 - 2 - 16 = -9.$$

Теперь исследуем функцию z на каждой из сторон треугольника OAB в отдельности. На стороне OA, задаваемой уравнением $x = 0$, функция z принимает вид $z_{OA} = 2y^2 - 8y$, где $y \in [0,4]$. Находим стационарные точки функции одной переменной z_{OA}:

$$z'_{OA}(y) = 0, \quad 4y - 8 = 0, \quad 4y = 8, \quad y = 2.$$

Корню $y = 2$ соответствует точка $M_1(0;2)$ на стороне OA. Вычисляем значения функции z в точке M_1, а также в концах O и A стороны OB:

$$z(M_1) = z_{OA}(2) = 2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 = -8,$$
$$z(O) = z_{OA}(0) = 0, \quad z(A) = z_{OA}(4) = 2\cdot 4^2 - 8\cdot 4 = 0.$$

Сторона OB задается уравнением $y = 0$. На ней функция z принимает вид $z_{OB} = x^2 - 2x$, где $x \in [0,8]$. Находим стационарные точки функции z_{OB}:

$$z'_{OB}(x) = 0, \quad 2x - 2 = 0, \quad 2y = 2, \quad x = 1.$$

Имеем точку $M_2(1;0)$. Так как значение $z(O)$ нам уже известно, осталось вычислить $z(M_2)$ и $z(B)$:

$$z(M_2) = z_{OB}(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1, \quad z(B) = z_{OB}(8) = 8^2 - 2 \cdot 8 = 48.$$

На стороне AB имеем $x = 8 - 2y$, и, следовательно, функция z принимает вид

$$z_{AB} = (8-2y)^2 + 2y^2 - 2(8-2y) - 8y = 6y^2 - 36y + 48, \quad y \in [0,4].$$

Ищем стационарные точки функции z_{AB}:

$$z'_{AB}(y) = 0, \quad 12y - 36 = 0, \quad 12y = 36, \quad y = 3.$$

Получена точка $M_3(2;3)$, для которой

$$z(M_3) = z_{AB}(3) = 6 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 + 48 = -6.$$

Сравнивая найденные значения, приходим к выводу, что

$$z_{\min} = z(M_0) = -9, \quad z_{\max} = z(B) = 48. \qquad \square$$

5.2.3. Условный экстремум

Начнем рассмотрение понятия *условного экстремума* с конкретного примера.

Пример 5.20. Найти минимум и максимум функции $z = x - y$ на единичной окружности, то есть при *условии*, что координаты x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Геометрически эта задача означает, что на эллипсе, полученном при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ плоскостью $z = x - y$, требуется найти максимальное и минимальное значения аппликаты z (рисунок 5.14).

Точками $A(1;0)$ и $B(-1;0)$ разделим окружность $x^2 + y^2 = 1$ на две полуокружности, каждую из которых можно представить в явном виде следующим образом:

$$y_1 = \sqrt{1-x^2}, \quad y_2 = -\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1;1].$$

На первой полуокружности имеем:

$$z_1(x) = x - y_1(x) = x - \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1;1].$$

Ищем стационарные точки функции z_1 на интервале $(-1;1)$:

$$z_1'(x) = 0, \quad 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Отсюда

$$x = -\sqrt{1-x^2}, \quad \begin{cases} x^2 = 1 - x^2, \\ x < 0, \end{cases} \qquad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Этой стационарной точке соответствует точка $M(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ первой полуокружности. Вычисляем значения функции z в точке M и на концах A и B:

$$z(M) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \quad z(A) = 1 - 0 = 1, \quad z(B) = -1 - 0 = -1.$$

Аналогичным образом исследуя вторую полуокружность, приходим к точке $N(1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$, для которой $z(N) = \sqrt{2}$. Сравнивая значения функции z в точках A, B, M и N, находим, что максимум достигается в точке N и равен $\sqrt{2}$, минимум достигается в точке M и равен $-\sqrt{2}$. □

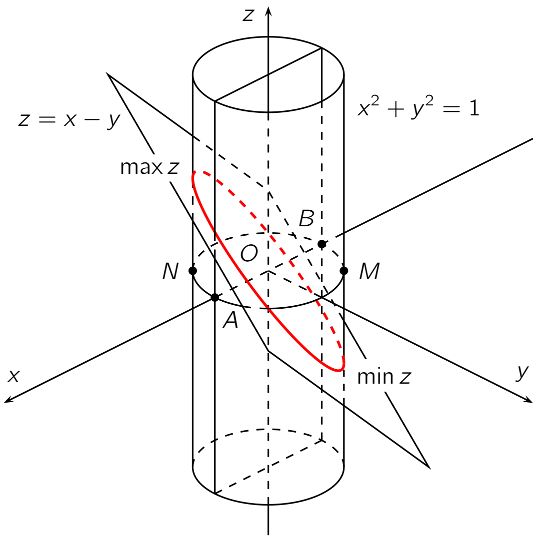

Рисунок 5.14

Определение. Задача отыскания *условного экстремума* — это задача о нахождении экстремума целевой функции $z = f(x, y)$ при условии, что переменные x и y подчиняются ограничению $g(x, y) = 0$, называемому *уравнением связи*.

Определение. Точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению связи $g(x, y) = 0$, называется *точкой локального условного максимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для любых точек M из этой окрестности, удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = 0$, выполнено неравенство $f(M) \leqslant f(M_0)$.

Аналогично при определении *точки локального условного минимума* требуется выполнение неравенства $f(M) \geqslant f(M_0)$.

5.2.4. Метод множителей Лагранжа

На примере 5.20 мы могли убедиться, что задача нахождения условного экстремума может быть сведена к задаче нахождения экстремума функции одной переменной. Такой подход, однако, подвержен следующим недостаткам:

1) из уравнения связи приходится находить явное выражение одной переменной через другую, что может быть весьма сложной, а иногда и неразрешимой, задачей;

2) функцию приходится исследовать в искусственно выбираемых точках, с помощью которых линия, задаваемая уравнением связи, разбивается на части.

Преодолеть эти недостатки позволяет так называемый *метод множителей Лагранжа*.

Определение. Функция переменных x, y и λ

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — уравнение связи, называется *функцией Лагранжа*, а λ — *множителем Лагранжа*.

Метод множителей Лагранжа состоит в применении следующей теоремы.

Теорема 5.9. *Если точка $M_0(x_0; y_0)$ является точкой условного экстремума функции $z = f(x, y)$ на множестве, определяемом уравнением связи $g(x, y) = 0$, то существует такое значение λ_0, при котором точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой безусловного экстремума функции Лагранжа $L(x, y, \lambda)$.*

Согласно теореме 5.9 для нахождения точек, подозрительных на локальный экстремум, следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Пример 5.21. Решить пример 5.20 методом множителей Лагранжа.

Решение. В данном случае уравнение связи имеет вид:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Выпишем и решим систему (5.9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{1}{2\lambda}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Подставим x и y в последнее уравнение:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1, \quad 2\lambda^2 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Корням λ_1 и λ_2 соответствуют точки

$$M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

значения $z(M) = -\sqrt{2}$ и $z(N) = \sqrt{2}$ в которых являются искомыми минимумом и максимумом функции z. $\square$

5.2.5. Экстремум выпуклых функций

Определение. Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками a и b оно целиком содержит соединяющий их отрезок.

На рисунке 5.15 изображены выпуклые множества, а на рисунке 5.16 — множества, не обладающие свойством выпуклости.

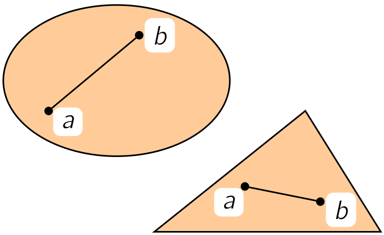

Рисунок 5.15

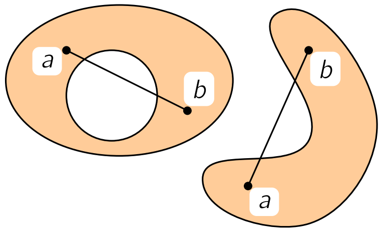

Рисунок 5.16

Определение. Функция, заданная на выпуклом множестве B, называется *выпуклой вниз*, если все точки графика этой функции, соответствующие произвольному отрезку $[a, b]$ из множества B, лежат не выше хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Аналогично функция называется *выпуклой вверх*, если для всякого отрезка из множества B график функции в точках этого отрезка лежит не ниже соответствующей хорды (рисунок 5.17).

Можно доказать, что для выпуклой функции равенство нулю частных производных является не только необходимым условием экстремума, но и достаточным. В частности, выпуклая функция не может иметь седловых точек. Более того, экстремум выпуклой функции является *глобальным*, то есть *наименьшим значением* во всей области определения в случае функции, выпуклой вниз, и *наибольшим* — в случае функции, выпуклой вверх.

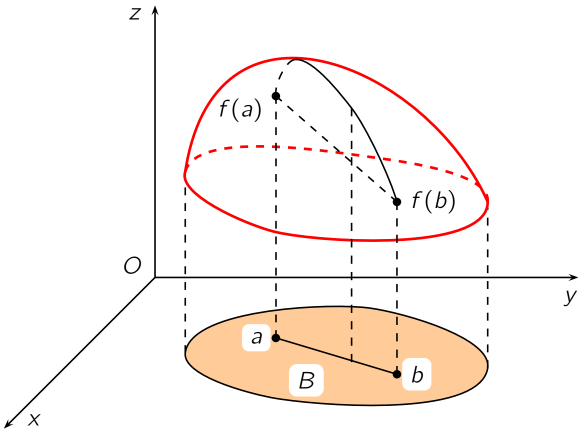

Рисунок 5.17

5.2.6. Функция полезности

В основе модели поведения потребителей лежит гипотеза, что каждый из них, осуществляя выбор наборов благ при заданных ценах и имеющемся доходе, стремится максимизировать уровень удовлетворения своих потребностей.

Пусть на рынке потребителю предлагается n различных благ. Через $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где x_i — количество i-го блага в натуральных единицах, будем обозначать конкретный набор благ. Блага приобретаются по рыночным ценам p_1, p_2, ..., p_n соответственно. Стоимость набора благ есть сумма

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

В распоряжении потребителя имеется ограниченное число денег R (доход), поэтому существует *бюджетное ограничение*

$$\sum_{i=1}^{n} p_ix_i \leqslant R.$$

Полезность блага — это способность удовлетворять ту или иную потребность. Потребитель выбирает наиболее предпочтительный набор среди всех доступных.

В XIX веке была введена функция полезности u для предпочтения одного набора другому. Основное ее свойство в том, что потребитель предпочитает набор X, а не Y, если $u(X) > u(Y)$. Таким образом, функция полезности упорядочивает наборы имеющихся благ по предпочтению.

Определение. *Функция полезности* $u = u(x, y)$, заданная на пространстве двух благ (товаров), — это субъективная числовая оценка полезности набора товаров (x, y).

Определение. Линии уровня функции полезности называют *кривыми безразличия* (рисунок 5.18).

Если $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$, то потребителю безразлично, каким набором обладать, потому что они имеют одинаковую полезность (рисунок 5.18). Чем «северо-восточнее» расположена кривая безразличия, тем большему уровню она соответствует (рис. 4). Кривые безразлтчия являются убывающими.

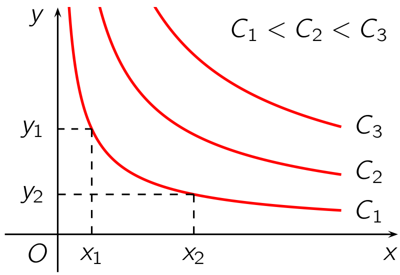

Рисунок 5.18

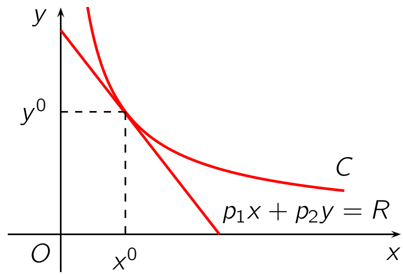

Рисунок 5.19

В теории потребительского выбора большую роль играют *предельные полезности*.

Определение. *Предельные полезности* выражают дополнительное удовлетворение от потребления одной дополнительной единицы блага. Математически это описывается частными производными функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}.$$

Предельные полезности положительны, так как с увеличением потребления блага его полезность возрастает.

Определение. Вектор градиента функции полезности

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

координаты которого есть предельные полезности, называется *вектором предельных полезностей*.

Закон убывающей полезности гласит, что с увеличением потребления блага его предельная полезность убывает, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0.$$

Определение. Если потребитель обладает доходом R, то множество всех наборов товаров стоимостью не более R называется *бюджетным множеством*. *Граница бюджетного множества* — это множество наборов, которые стоят ровно R.

Задача потребительского выбора (ЗПВ), или *задача рационального поведения потребителя на рынке* заключается в выборе такого набора товаров x и y, который максимизирует функцию полезности при заданном бюджетном ограничении, то есть

$$u(x, y) \to \max, \quad p_1 x + p_2 y \leqslant R, \quad x \geqslant 0, \ y \geqslant 0,$$

где p_1 и p_2 — цена первого и второго товаров соответственно.

Таким образом, на бюджетном множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Графически поиск означает последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности до тех пор, пока линии еще имеют общие точки с бюджетным множеством. Следовательно, искомая точка лежит на границе бюджетного множества. В ней кривая безразличия касается линии бюджетного ограничения. Следовательно, ЗПВ можно заменить задачей на условный экстремум

$$u(x, y) \to \max, \quad R - (p_1 x + p_2 y) = 0.$$

Так как функция полезности является выпуклой, то на бюджетном множестве существует единственная точка максимума функции полезности. Значит, у потребителя даже нет выбора в том, как с наибольшей пользой потратить свои деньги, так как существует единственный набор (x^0, y^0), максимизирующий полезность.

Определение. Точка (x^0, y^0) максимума функции полезности называется *точкой спроса* (смотрите рисунок 5.19).

Чтобы решить задачу на условный экстремум, построим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = u(x, y) + \lambda(R - p_1 x - p_2 y),$$

для которой выпишем систему (5.9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda(-p_1) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \lambda(-p_2) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = R - (p_1 x + p_2 y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \lambda p_2, \\ p_1 x + p_2 y = R, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что

1) точка спроса лежит на границе бюджетного множества;
2) в ней вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен.

Определение. Координаты точки спроса есть функции параметров p_1, p_2, R. Они называются *функциями спроса на первый и второй товары* соответственно:

$$x^0 = x^0(p_1, p_2, R), \quad y^0 = y^0(p_1, p_2, R).$$

Это однородные функции нулевой степени относительно цен и дохода, то есть пропорциональное изменение цен и дохода не влечет изменение спроса на товары:

$$x^0(tp_1, tp_2, tR) = t^0 x^0(p_1, p_2, R), \quad y^0(tp_1, tp_2, tR) = t^0 y^0(p_1, p_2, R).$$

Пример 5.22. Найти точку спроса для функции полезности $u(x; y)$ при ценах на товары p_1 и p_2 и доходе R, если

а) $u(x, y) = \min\{x, 2y\}$;

б) $u(x; y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Решение. а) Функция $u(x, y) = \min\{x, 2y\}$ означает, что излишки первого и второго товара сверх отношения $2:1$ не приносят пользы потребителю. Он получает бо́льшую пользу только при увеличении обоих товаров в пределах сохранения пропорции $2:1$. Товары с такой функцией полезности называются *взаимодополнительными*. Составляем и решаем систему для нахождения точки спроса (x^0, y^0):

$$\begin{cases} p_1 x + p_2 y = R, \\ x = 2y, \end{cases} \qquad x^0 = \frac{R}{2p_1 + p_2}, \quad y^0 = \frac{2R}{2p_1 + p_2}.$$

б) Рассмотрим систему уравнений для поиска точки спроса:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1 x + p_2 y = R. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $x^0 = \dfrac{R}{2p_1}$, $y^0 = \dfrac{R}{2p_2}$. $\square$

Глава 6

Дифференциальные уравнения

6.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

6.1.1. Общее дифференциальное уравнение (ДУ) первого порядка.

Определение. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

где x — аргумент, $y(x)$ — искомая функция; F — заданная функция трех переменных x, y, y'; f — заданная функция двух переменных x, y.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \tag{6.1}$$

называется *разрешенным* относительно y'.

Определение. Уравнение

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0,$$

где x и y имеют тот же смысл, что и выше; dx, dy — дифференциалы; $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — заданные функции, называется *уравнением, записанным в дифференциалах*.

Здесь y можно принять за аргумент, $x(y)$ — за функцию; dy, $dx = x'(y)\, d(y)$ — соответственно за дифференциалы.

Определение. *Решением ДУ* называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, например, $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ или $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

Определение. Процесс нахождения всех решений ДУ называется *интегрированием ДУ*.

Определение. График решения $y = y(x)$ ДУ называется *интегральной кривой этого уравнения*.

Пример 6.1. Проинтегрировать простейшее ДУ: $y' = f(x)$.

Решение. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = F(x) + C$$

где $F(x)$ — первообразная (неопределенный интеграл) функции $f(x)$, C — произвольная постоянная. □

Приведенный пример показывает, что решение ДУ представляет целое семейство функций, зависящее от произвольного параметра C.

Определение. *Задачей Коши*, или *начальной задачей*, называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (6.1), удовлетворяющего *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0. \qquad (6.2)$$

Геометрический смысл задачи Коши состоит в том, что ищется интегральная кривая уравнения (6.1), проходящая через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ плоскости Oxy (рисунок 6.1).

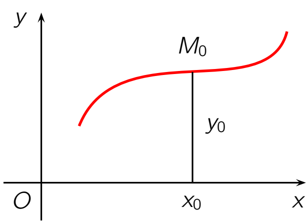

Рисунок 6.1

Для дифференциальных уравнений важное значение имеет вопрос о существовании решения задачи Коши и единственность этого решения.

Теорема 6.1 (Коши). *Если правая часть уравнения (6.1) непрерывна и имеет непрерывную производную* $\frac{df}{dy}$ *в области* D, *то решение ДУ (6.1) с начальным условием (6.2), где* $(x_0; y_0) \in D$, *существует и единственно, т.е. через точку* $(x_0; y_0) \in D$ *проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.*

Определение. Если во всех точках решения $y = \psi(x)$ уравнения (6.1) условие единственности не выполняется, то такое решение называется *особым*.

Через каждую точку $M_0(x_0; y_0)$ особого решения, кроме этого решения, проходит и другое решение уравнения (6.1), которое не совпадает с $y = \psi(x)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Особым решением является огибающая семейства интегральных кривых (если она существует), т.е. линия, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной интегральной кривой.

Для существования особого решения уравнения (6.1) необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши.

Пример 6.2. Исследовать решение уравнения $y = 3y^{2/3}$.

Решение. Правая часть этого уравнения $f(x, y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна во всех точках плоскости Oxy. Частная производная $\frac{df}{dy} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ обращается в бесконечность при $y = 0$, т.е. на оси Ox, так что при $y = 0$ нарушается одно из условий теоремы Коши.

Следовательно, в точках оси Ox возможно нарушение единственности. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $y = (x + C)^3$ (семейство кубических парабол) есть решение уравнения. Кроме того, данное уравнение имеет очевидное решение $y \equiv 0$ (рисунок 6.2).

Таким образом, через каждую точку оси Ox проходит, по крайней мере, две интегральные кривые, и, следовательно, в точках этой оси нарушается единственность, т.е. $y = 0$ — особое решение исходного уравнения. $\square$

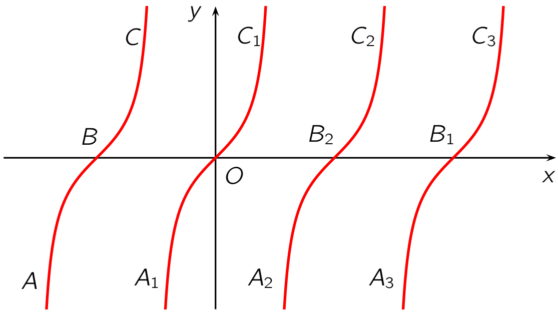

Рисунок 6.2

Определение. *Общим решением* ДУ (6.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C) \tag{6.3}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C, и такая, что выполняются условия:
1) она удовлетворяет уравнению (6.1) при любых допустимых значениях постоянной C;
2) каково бы ни было начальное условие (6.2), можно подобрать значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (6.2).

При этом предполагается, что точка $(x_0; y_0)$ принадлежит области D, где выполняются условия существования и единственности решения задачи Коши (6.1), (6.2).

Определение. *Частным решением* ДУ (6.1) называется решение, получаемое из общего решения (6.3) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C.

Пример 6.3. Проверить, что функция $y = Ce^x$ — общее решение уравнения $y' - y = 0$, и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.

Решение. Имеем $y = Ce^x$ и $y' = Ce^x$. Подставляя в данное уравнение выражения y и y', получаем $Ce^x - Ce^x \equiv 0$, т.е. функция $y = Ce^x$ удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянной C.

Зададим любое начальное условие $y(x_0) = y_0$. Подставляя в функцию $y = Ce^x$, будем иметь $y_0 = Ce^{x_0}$, откуда $C = y_0 e^{-x_0}$. Функция $y = y_0 e^{x-x_0}$ удовлетворяет данному начальному условию. Поэтому функция $y = Ce^x$ — общее решение данного уравнения.

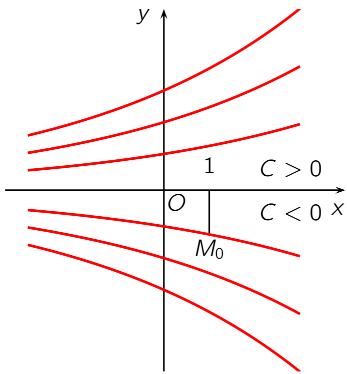

Рисунок 6.3

При $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$ получим частное решение $y = -e^{x-1}$.

С геометрической точки зрения общее решение определяет семейство интегральных кривых, которыми являются графики показательных функций; частное решение есть интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(1; -1)$ (рисунок 6.3). □

Иногда общее решение ДУ в виде (6.3) найти нелегко. В связи с этим введем следующее определение.

Определение. Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* ДУ первого порядка; соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной C, называется *частным интегралом* ДУ.

6.1.2. Составление дифференциальных уравнений.

Если известно однопараметрическое семейство функций, то для него можно построить ДУ, решениями которого будут все функции этого семейства. Может оказаться, что семейство функций задает общее решение или общий интеграл ДУ.

Пример 6.4. Для семейства функций $y = \frac{C}{x-1}$ найти ДУ.

Решение. Продифференцировав исходное соотношение, получим

$$y' = -\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Подставив сюда $C = y(x-1)$, будем иметь

$$y' + \frac{y}{x-1} = 0.$$

Это и есть искомое уравнение; его общее решение $y = \frac{C}{x-1}$. □

Пример 6.5. Для семейства функций $x^2 + y^2 - Cx = 0$ найти ДУ.

Решение. Из условия задачи находим

$$C = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Дифференцируем соотношение $x^2 + y^2 - Cx = 0$ и в полученное уравнение подставляем значение C. Тогда

$$2x^2 + 2xyy' - x^2 - y^2 = 0,$$

т.е. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$ — искомое ДУ; $x^2 + y^2 - Cx = 0$ — его общий интеграл.

□

Отметим, что к составлению и интегрированию ДУ приводят многие задачи математики и других наук — физики, биологии, химии, экономики и т.д.

В экономике ДУ часто может быть составлено исходя из экономического смысла производной. В качестве примера рассмотрим динамику рыночных цен (*макромодель Домара*), где независимой переменной служит время t. Допустим, что для конкретного продукта функции спроса Q_d и предложения Q_s имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta P, \\ Q_s &= -\gamma + \delta P, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где α, β, γ, δ — некоторые положительные постоянные, P — цена продукта.

Цена равновесия $\overline{P}$ находится из условия $Q_d = Q_s$ и будет равна $\overline{P} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ — конкретной положительной постоянной.

Если случится, что начальная цена $P(0)$ точно равна $\overline{P}$, то, очевидно, что рынок будет в положении равновесия и не нужен динамический анализ. В более интересном случае $P(0) \neq \overline{P}$, и тогда, если $\overline{P}$ будет достижимой, то только после соответствующего процесса приспособления, во время которого меняется не только цена, но и Q_d, Q_s как функции P, причем все эти переменные можно трактовать как функции времени. Поставим вопрос, который касается динамики цен, так: пусть есть достаточно времени на то, чтобы произошел процесс приспособления; будет ли цена $P(t)$ со временем приведена до цены равновесия, т.е. будет ли $P(t)$ стремиться к $\overline{P}$, когда $t \to \infty$.

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вначале найти $P(t)$. Последнее, в свою очередь, требует описать структуру изменения цен. Вообще говоря, цены определяются через релятивное воздействие сил спроса и предложения на рынке. Для простоты допустим, что уровень (скорость) изменения цены (относительно времени) в каждый момент времени прямо пропорционален разности $Q_d - Q_s$ в этот момент. Такая структура изменения цены может быть выражена так:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s), \tag{6.5}$$

где j — некоторый установленный положительный множитель (коэффициент) приспособления.

Подставляя (6.4) в (6.5), запишем (6.5) в виде:

$$\frac{dP}{dt} = j(\alpha - \beta P + \gamma - \delta P) = j(\alpha + \gamma) - j(\beta\,\delta)P$$

или

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta + \delta)P = j(\alpha + \gamma). \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) и есть ДУ для цены продукта $P(t)$ в макромодели Домара. Решение уравнения (6.6) и его анализ будут приведены изложения методов интегрирования ДУ первого порядка.

6.1.3. ДУ с разделяющимися переменными.

Рассмотрим ДУ первого порядка, записанное в дифференциалах,

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{6.7}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — заданные функции двух переменных x и y.

Определение. Пусть $P(x,y) = P_1(x)$, а $Q(x,y) = Q_2(y)$, тогда уравнение (6.7) называют *ДУ с разделенными переменными*.

Используя инвариантность формы дифференциала, получаем общее решение

$$\int P_1(x)\,dx + \int Q_2(y)\,dy = C,$$

т.е. ДУ с разделенными переменными решается простым интегрированием.

Определение. Пусть $P(x,y) = P_1(x)P_2(y)$, а $Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y)$, тогда уравнение (6.7) называют *ДУ с разделяющимися переменными*.

Поделив это уравнение на $P_2(y)Q_1(x) \neq 0$, тем самым сведем его к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = C.$$

При таком преобразовании можно потерять решения $x = x_0$, где $Q_1(x_0) = 0$ и $y = y_0$, где $P_2(y_0) = 0$. Эти случаи нужно рассматривать отдельно. А именно: найти x_k и y_m такие, что $Q_1(x_k) = 0$, $P_2(y_m) = 0$, и проверить, являются ли $x = x_k$ или $y = y_m$ решениями исходного уравнения и содержатся ли они в общем интеграле при каком-то значении C_k (соответственно C_m).

Пример 6.6. Решить уравнение $x(1+y^2)\,dx + y(1+x^2)\,dy = 0$.

Решение. Разделим данное уравнение на $(1+x^2)(1+y^2)$. Переменные разделяются:

$$\frac{2x\,dx}{1+x^2} + \frac{2y\,dy}{y^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x^2+1) + \ln(y^2+1) = \ln C.$$

Значит, $(x^2+1)(y^2+1) = C$ — общий интеграл данного уравнения.

Функции $Q_1(x) = 1+x^2$ и $Q_2(y) = y^2+1$ при вещественных x и y в нуль не обращаются. Поэтому полученная формула содержит все решения рассматриваемого уравнения. $\square$

6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка и их решение

6.2.1. Однородные ДУ первого порядка.

Определение. Функция $P(x, y)$ называется *однородной степени m*, если для любых t она удовлетворяет равенству

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y).$$

Пример 6.7. Проверить на однородность следующие функции:

$$P_1(x, y) = 2x^2 + 3y^2, \qquad P_2(x, y) = \frac{x^3}{2y} - 3xy,$$

$$P_3(x, y) = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}, \qquad P_4(x, y) = e^{xy}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $P_1(x, y)$:

$$P_1(tx, ty) = 2(t^2x^2) + 3(t^2y^2) = t^2 P_1(x, y).$$

Аналогично,

$$P_2(tx, ty) = t^2 P_2(x, y),$$

$$P_3(tx, ty) = \frac{txty + t^2y^2 e^{-\frac{tx}{ty}}}{t^2x^2} = P_3(x, y),$$

$$P_4(tx, ty) = e^{txty} = (e^{xy})^{t^2} = (P_4(x, y))^{t^2} \neq t^m P_4(x, y)$$

ни при каком m. Значит, $P_1(x, y), P_2(x, y)$ — однородные функции степени $m = 2$, $P_3(x, y)$ — однородная функция степени $m = 0$, $P_4(x, y)$ — неоднородная функция. $\square$

Определение. ДУ (6.7) называют *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной степени.

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = ux$, где u — новая искомая функция. Действительно, положив $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, будем иметь

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} P(x, y), \quad Q\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} Q(x, y).$$

Получим уравнение

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0 \quad \text{или} \quad P_1\left(\frac{y}{x}\right) dx + Q_1\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

Учитывая $dy = u\,dx + x\,du$, имеем

$$P_1(u)\,dx + Q_1(u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

или

$$(P_1(u) + uQ_1(u))\,dx + xQ_1(u)\,du = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 6.8. Проинтегрировать уравнение $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Решение. Несложно проверить, что данное уравнение является однородным. Положим $y = xu$. Тогда

$$u + xu' = u + u^2 e^{-\frac{1}{u}}$$

или, интегрируя, получим

$$-e^{\frac{1}{u}} = \ln|x| - C,$$

т.е.

$$e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C$$

— общий интеграл этого уравнения. □

Замечание 6.1. К однородным уравнениям сводятся также уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + c_1}{b_1x + b_2y + c_2}\right) \tag{6.8}$$

при $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Для сведения уравнения (6.8) к однородному нужно решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -c_1, \\ b_1x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Если ее решение $(x_0; y_0)$, то, сделав преобразование $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, получим однородное уравнение

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + a_2Y}{b_1X + b_2Y}\right).$$

6.2.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x)$$

или

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y),$$

называются *линейными*, первое — относительно y, $\frac{dy}{dx}$, а второе — относительно x, $\frac{dx}{dy}$.

Если $q(x) \equiv 0$ ($q(y) \equiv 0$), то уравнение называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0 \quad (q(y) \neq 0)$, — *линейным неоднородным*.

Линейное однородное уравнение — это уравнение с разделяющимися переменными.

Решим, например, линейное однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0. \tag{6.9}$$

Имеем

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + p(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int p(x)\,dx = C_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|y| + \int p(x)\,dx = \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)\,dx} = C\overline{y} \tag{6.10}$$

где $\overline{y} = e^{-\int p(x)\,dx}$, $C \neq 0$. Так как $y = 0$ — также решение уравнения (6.9), то формула (6.10) будет давать все решения (в данном случае общее решение) уравнения (6.9), если считать параметр C произвольным.

Решим линейное неоднородное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{6.11}$$

Решение ищем в виде, подобном решению однородного уравнения

$$y = C(x)\overline{y}, \tag{6.12}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция. Подставляя (6.12) в (6.11), имеем

$$C'(x)\overline{y} + \underbrace{C(x)\overline{y}' + C(x)p(x)\overline{y}}_{\substack{\Downarrow \\ C(x)[\overline{y}'+p(x)\overline{y}]=0}} = q(x)$$

Значит,

$$C'(x)\overline{y} = q(x) \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = \frac{q(x)}{\overline{y}} \Rightarrow C(x) = \int \frac{q(x)}{\overline{y}}\,dx + C.$$

Подставляя найденное $C(x)$ в (6.12), получаем

$$y = C\overline{y} + \overline{y}\int \frac{q(x)}{\overline{y}}\,dx.$$

Последняя формула называется *формулой Бернулли*.

Пример 6.9. Решить уравнение $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

Решение. Имеем

$$\overline{y} = e^{-\int \cos x\,dx} = e^{-\sin x},\ C'(x)e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \Rightarrow C'(x) = 1,$$

т.е. $C(x) = x + C$.

Общее решение:

$$y = (x + C)e^{-\sin x}. \qquad \square$$

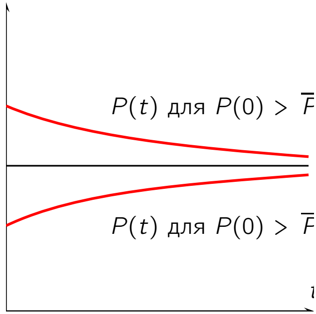

Рисунок 6.4

Пример 6.10. Решить уравнение (6.6):

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta+\delta)P = j(\alpha+\gamma).$$

Решение. Имеем:

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right] e^{-j(\beta+\delta)t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \left[P(0) - \overline{P}\right] e^{-kt} + \overline{P},$$

где $k = j(\beta+\delta), \overline{P} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

Геометрически решение изобразим на рисунке 6.4. □

6.2.3. Уравнение Бернулли.

Определение. *Уравнением Бернулли* называют нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{6.13}$$

где α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$) — произвольное вещественное число.

Подстановка $y = u^{1-a}$ приводит уравнение (6.13) к линейному неоднородному уравнению. Уравнение (6.13) можно решать также подстановкой $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда, записав уравнение (6.13) в виде

$$u'v + (v' + p(x)v)u = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha},$$

решим два уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x)v = 0 \quad \text{(берем только одно решение } v \neq 0\text{) и}$$
$$u' = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha-1} \quad \text{(берем его общее решение).}$$

Подставляя их в соотношение $y(x) = u(x)v(x)$, получим общее решение уравнения Бернулли.

Пример 6.11. Решить уравнение $xy' + y = y^2 \ln x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Полагаем $y = uv$. Тогда уравнение запишется так:

$$xuv' + v(xu' + u) = u^2v^2 \ln x.$$

Из

$$xu' + u = 0$$

имеем $u = \frac{1}{x}$, а из

$$xv' = \frac{v^2 \ln x}{x}$$

или

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

получим

$$v = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}.$$

Таким образом, общее решение

$$y = uv = \frac{1}{1 + Cx + \ln x}. \qquad \square$$

6.3. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Глава 7

Ряды

7.1. Числовые ряды

7.1.1. Понятие числового ряда.

Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7.1}$$

называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а a_n — n-ым или *общим членом* ряда (7.1).

Определение. Сумма первых n членов ряда (7.1) называется *n-ой частичной суммой* данного ряда и обозначается S_n,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Будем иметь

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \ldots$$

Получим последовательность частичных сумм ряда (7.1)

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$$

Определение. Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S, то числовой ряд (7.1) называется *сходящимся* и число S называется *суммой ряда*,

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или бесконечен, то ряд (7.1) называется *расходящимся*.

Пример 7.1. Исследовать на сходимость ряд:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Решение. Составим n-ую частичную сумму

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Легко найти, что

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^n).$$

Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = 1$$

и

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - q},$$

т.е.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

Мы получаем известную формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Если $|q| > 1$ или $q = 1$, то, очевидно, последовательность $\{S_n\}$ является ББП, если же $q = -1$, то предел $\{S_n\}$ не существует. $\square$

Определение. Выражение вида

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k \tag{7.2}$$

также представляет собой ряд, и он называется i-ым *остатком ряда* (7.1) (обозначается r_i).

Теорема 7.1. *Числовой ряд и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.* [Доказательство]

Из этой теоремы следует, что сходимость не нарушается, если изменить конечное число его членов.

Заметим также, что если ряд (7.1) сходится, то

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \text{ или } S = S_n + r_n, \tag{7.3}$$

где S_n — частичная сумма ряда (7.1), r_n — его n-ый остаток.

Теорема 7.2. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n, \quad k = \text{const},$$

причем

$$kS = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n.$$

Если же сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

и их сумма равна S и σ соответственно, то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n),$$

и его сумма равна $S \pm \sigma$. [Доказательство]

Подчеркнем, что утверждение, обратное только что доказанному, вообще говоря, неверно. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-1)$$

сходится, а ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)$$

расходятся.

7.1.2. Необходимое условие сходимости числового ряда.

Исследование сходимости ряда является важнейшей задачей теории числовых рядов.

Теорема 7.3 (необходимое условие сходимости). *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{7.4}$$

[Доказательство]

Итак, если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что если

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Однако подчеркнем, что условие (7.4) не является достаточным, т.е. если оно выполняется, то это не означает, что ряд сходится.

Пример 7.2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \tag{7.5}$$

называемый *гармоническим*.

Решение. Очевидно, необходимое условие сходимости числовых рядов выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Однако этот ряд расходится. Действительно, предположим противное. Пусть ряд (7.5) сходится и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0. \tag{7.6}$$

С другой стороны,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

что противоречит (7.6). Таким образом, гармонический ряд расходится. □

Пример 7.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n}$.

Решение. Проверим выполнение необходимого условия,

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0,$$

т.е. данный ряд расходится. □

7.1.3. Достаточные условия сходимости.

Вначале достаточные условия сходимости будем искать для рядов с неотрицательными членами, т.е. будем рассматривать ряды:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.7}$$

Теорема 7.4. *Для того, чтобы ряд (7.7) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.*

[Доказательство]

Теорема 7.5 (признак сравнения)**.** *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (A) \quad и \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (B)$$

и пусть

$$a_n \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) — расходимость ряда B.

Образно говоря, признак сравнения свидетельствует о том, если сходится некоторый ряд с неотрицательными членами, то ряд с меньшими неотрицательными членами также сходится. Наоборот, если ряд с неотрицательными членами расходится, то ряд с большими неотрицательными членами также расходится.

Пример 7.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $0 < p < 1$.

Решение. Применим признак сравнения, воспользовавшись тем, что гармонический ряд (пример 7.2) расходится. Очевидно,

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < p \leqslant 1,$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Поэтому расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $0 < p < 1$. □

Заметим, что можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p > 1$ сходится. Это объясняется тем, что при $p > 1$ общий член $a_n = \frac{1}{n^p}$ стремится к нулю достаточно быстро.

Теорема 7.6 (признак Даламбера)**.** *Пусть дан ряд с неотрицательными числами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. [Доказательство]

Приведем без доказательства еще один признак.

Теорема 7.7 (признак Коши)**.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с неотрицательными членами и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. Если $q = 1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

В некоторых случаях удобно пользоваться следующим признаком.

Теорема 7.8 (интегральный признак)**.** *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если его члены могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной, монотонно убывающей на промежутке $[1, +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то для сходимости ряда необходимо и достаточно сходимости несобственного интеграла 1-го рода

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Пример 7.5. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n.$$

Решение. а) Применим признак Даламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

б) К данному ряду удобно применить признак Коши:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2 > 1.$$

Ряд расходится. □

Приведенные выше достаточные условия сходимости относятся к рядам с неотрицательными членами. Теперь рассмотрим еще один тип рядов — знакочередующиеся ряды.

Определение. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad (7.8)$$

где $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 7.9 (признак Лейбница)**.** *Если члены ряда (7.8) удовлетворяют условиям:*

$$1)\ a_n \geqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
$$2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд (7.8) сходится и его сумма S не превосходит a_1, т.е. $S \leqslant a_1$.

Пример 7.6. Исследовать сходимость ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся. Он удовлетворяет условиям признака Лейбница, так как

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Значит рассматриваемый ряд сходится. □

7.1.4. Абсолютная и условная сходимость.

Рассмотрим теперь числовые ряды с членами произвольных знаков. Такие ряды называются *знакопеременными*.

Определение. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Теорема 7.10. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Определение. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится.

Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

является условно сходящимся.

Заметим, что исследование знакопеременных рядов на абсолютную сходимость можно провести с помощью признаков Даламбера, Коши и признаков сравнения, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

является рядом с неотрицательными членами.

7.2. Функциональные ряды. Область сходимости

Определение. Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{7.9}$$

где $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ — некоторые функции аргумента x, заданные на множестве X, называется *функциональным рядом*, заданным на множестве X.

Если фиксировать какое-либо $x = x_0 \in X$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \tag{7.10}$$

является числовым рядом.

Определение. Если числовой ряд (7.10) сходится, то говорят, что функциональный ряд (7.9) *сходится в точке* $x = x_0$. В противном случае функциональный ряд (7.9) *расходится в точке* $x = x_0$.

Определение. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*.

Область сходимости может совпадать с множеством X, но может и не совпадать, в частности, может быть пустым множеством.

Пусть D — область сходимости ряда (7.9). Тогда для каждого фиксированного $x \in D$ соответствующий числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится и имеет сумму. Если каждому $x \in D$ поставить в соответствие число, равное этой сумме, то на множестве D будет определена некоторая функция $S = S(x)$, называемая *суммой функционального ряда* (7.9). Тогда записывают:

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \quad x \in D.$$

Пример 7.7. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Решение. В данном случае $f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$ Эти функции определены на $\mathbb{R}$. Из примера 7.1 следует, что этот функциональный ряд сходится в любой точке $x \in \mathbb{R}$, для которой $|x| < 1$. Если же $|x| \geqslant 1$, то соответствующий числовой ряд расходится. Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал $(-1, 1)$.

Очевидно, суммой этого функционального ряда является функция

$$S(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

т.е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

$\square$

Определение. Функциональный ряд (7.9) называется *абсолютно сходящимся* на множестве D_1, если в каждой точке $x \in D_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Так как абсолютно сходящийся ряд сходится, то $D_1 \subset D$.

Образуем n-ую частичную сумму ряда (7.9):

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \; x \in D.$$

Очевидно, если фиксировать $x = x_0$, $x_0 \in D$, то $\{S_n(x_0)\}$ есть числовая последовательность. Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$, то он равен $S(x_0)$. По определению предела это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ существует номер N_0 такой, что $\forall n > N_0$: $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что здесь номер N_0 зависит, вообще говоря, и от ε, и от точки x_0. Особый интерес представляет случай, когда можно указать номер N_0 такой, что он зависит только от ε и не зависит от выбора точки x_0, $x_0 \in D$.

Определение. Если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$, зависящий лишь от ε и не зависящий от x, $x \in D$, такой, что $\forall x \in D$ и $\forall n > N_0$ $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, то говорят, что функциональный ряд (7.1) *равномерно сходится* в области D.

Весьма удобным для исследования ряда на равномерную сходимость является следующий признак Вейерштрасса.

Теорема 7.11 (признак Вейерштрасса). *Если члены ряда удовлетворяют неравенствам*

$$|f_n(x)| \leqslant a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in D,$$

и числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то ряд (7.9) равномерно сходится в D.

Пример 7.8. Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Решение. Очевидно,

$$\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

сходится. Значит, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. □

Если предположить, что члены ряда (7.9) являются функциями непрерывными в его области сходимости D, то возникает вопрос, будет ли непрерывной его сумма $S(x)$ в D? Ответ дает следующая

Теорема 7.12. *Если члены функционального ряда являются непрерывными в области D функциями и ряд (7.9) равномерно сходится в D, то его сумма является функцией, непрерывной в D.*

Например, сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ является функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$.

7.3. Степенные ряды. Формула Тейлора

Определение. Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad (7.11)$$

где $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots, a \in \mathbb{R}$, называется *степенным рядом*. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами степенного ряда* (7.11).

Если $a = 0$, то ряд (7.11) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (7.12)$$

Именно такие степенные ряды будем изучать. Если в (7.11) положить $x - a = y$, то придем к ряду вида (7.12).

Степенной ряд (7.12) всегда сходится в точке $x = 0$. Если $x \neq 0$, то ряд (7.12) может сходиться, а может и расходиться.

Важную роль в теории степенных рядов играет следующая теорема.

Теорема 7.13 (Абеля). *Если степенной ряд (7.12) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке x, $|x| < |x_0|$.* [Доказательство]

Следствие 7.1. *Если в точке $x_1 \neq 0$ степенной ряд (7.12) расходится, то он расходится во всех точках x таких, что $|x| > |x_1|$.* [Доказательство]

Теорема Абеля и ее следствие дают ясное представление об области сходимости степенного ряда. Для наглядности воспользуемся следующим приемом. Окрасим мысленно в зеленый цвет каждую точку сходимости ряда (7.12), а в красный цвет — любую точку расходимости ряда (7.12). Ясно, что точка $x = 0$ всегда будет зеленой. Если степенной ряд сходится всюду на $\mathbb{R}$, то вся числовая ось будет зеленой. Если степенной ряд везде расходится, то вся ось, за исключением точки $x = 0$, будет красной. Если какая-нибудь точка $x_0 \neq 0$ будет зеленой, то зелеными будут и все точки, лежащие ближе к точке $x = 0$ по обе стороны от нее. Если какая-либо точка $x_1 \neq 0$ будет красной, то будут красными все точки, лежащие дальше от точки $x = 0$ по обе стороны от нее.

Так как каждая точка числовой оси является либо зеленой, либо красной, то, идя от точки $x = 0$ вправо по числовой оси, сначала будем встречать только зеленые точки, а затем — только красные точки, причем граничная или разделяющая эти разноцветные участки точка R может быть или зеленого, или красного цвета. То же самое можно сказать, если идти налево от точки $x = 0$, в частности, в точке $x = -R$ ряд может или сходиться, или расходиться (рисунок 7.1).

Рисунок 7.1

Определение. Число R такое, что при всех x, $|x| < R$ ряд (7.12) сходится, а при всех x, $|x| > R$ ряд (7.12) расходится, называется *радиусом сходимости* ряда (7.12).

Определение. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* ряда (7.12).

Если ряд (7.12) сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Подчеркнем, что в каждой точке $x \in (-R, R)$ ряд (7.12) будет сходиться абсолютно, в точках $x = \pm R$ может сходиться, а может и расходиться.

Теорема 7.14. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l,$$

то радиус сходимости R ряда (7.11) равен $\frac{1}{l}$, т.е.

$$R = \frac{1}{l}.$$

[Доказательство]

Теорема 7.15. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l,$$

то радиус сходимости ряда (7.11)

$$R = \frac{1}{l}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7.14.

Пример 7.9. Найти радиус сходимости и интервал сходимости следующих степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n.$$

Решение. а) Для отыскания радиуса сходимости в данном случае применим формулу теоремы 7.15:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n\to\infty} = 2, \quad R = \frac{1}{2}.$$

Данный степенной ряд сходится абсолютно на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

б) Здесь воспользуемся формулой теоремы 7.14:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty, \quad R = 0,$$

т.е. данный степенной ряд сходится только в точке $x = 0$.

в) Поступаем аналогично, как в примере б):

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad R = \infty,$$

т.е. ряд сходится на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

г) Этот ряд имеет вид (7.11). Найдем радиус сходимости по формуле теоремы 7.15:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}} = e^{-1}.$$

Интервалом сходимости является $|x - 1| < e^{-1}$, или $(1 - e^{-1}, 1 + e^{-1})$. $\square$

Пример 7.10. Найти интервал сходимости следующих степенных рядов и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}; \quad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Решение. а) Имеем:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}, \quad R = 3.$$

Значит, интервал сходимости есть $(-3, 3)$. Исследуем поведение ряда в граничных точках. Пусть $x = 3$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, и он расходится.

Пусть теперь $x = -3$. Имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Это знакочередующийся ряд, по признаку Лейбница он сходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится на промежутке $[-3, 3)$.

б) Имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = 1,$$

интервал сходимости: $(-1, 1)$.

Если $x = \pm 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(\pm 1)^n \neq 0.$$

Согласно необходимому условию, данный ряд в точках $x = \pm 1$ расходится. $\square$

Глава 8

Линейная алгебра

8.1. Матрицы и определители

8.1.1. Понятие матрицы. Виды матриц

Определение. Прямоугольная таблица чисел, содержащая *m строк* и *n столбцов*, называется *матрицей размера* $m \times n$. Матрицы, как правило, обозначаются большими латинскими буквами и записываются в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко $A = (a_{ij})$.

Определение. Строки и столбцы матриц объединяют общим названием *ряды*.

Определение. Числа a_{ij}, образующие матрицу $A = (a_{ij})$, называются её *элементами*, причём индекс i обозначает *номер строки*, а j — *номер столбца*, где расположен данный элемент.

Определение. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называются *равными*, если они совпадают поэлементно, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

Определение. Матрица O называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

Определение. Матрица, число строк которой равно числу столбцов и равно n, называется *квадратной матрицей порядка n*.

Определение. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*. Другая диагональ, состоящая из элементов $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$, называется *побочной*.

Определение. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Определение. Диагональная матрица называется *единичной* и обозначается E, если все её элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Пример 8.1. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются квадратной, диагональной и единичной третьего порядка.

Замечание 8.1. В матричном исчислении нулевая матрица O и единичная матрица E играют ту же роль, что числа 0 и 1 в арифметике.

Определение. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором-столбцом* или *вектором-строкой*.

Пример 8.2. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

являются вектором-столбцом и вектором-строкой.

Можно рассматривать матрицы размера 1×1 и вида $A = (a_{11})$, например, $A = (3)$.

Определение. *Ступенчатой* называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}, \qquad (8.1)$$

где элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ отличны от нуля.

Ступенчатыми также считаются матрицы, приводимые к виду (8.1) перестановкой параллельных рядов.

Определение. Квадратная ступенчатая матрица называется *треугольной*.

Пример 8.3. Матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

являются ступенчатыми, причём третья из них треугольная.

8.1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд действий, причём некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые — специфические.

Определение. *Суммой* двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *одинаковых* размеров называется матрица $A + B = C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B, расположенных на соответствующих местах:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Пример 8.4. Для заданных матриц A и B находим сумму $A + B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A + B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определение. *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число k называется матрица $kA = (ka_{ij})$ того же размера, что и матрица A, полученная умножением всех элементов матрицы A на число k.

Пример 8.5. Для заданной матрицы A находим матрицу $3A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad 3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицу $-A = (-1)\cdot A$ будем называть *противоположной* матрице A.

Определение. *Разностью* матриц A и B одинаковых размеров называется сумма матрицы A и матрицы, противоположной к B, то есть $A - B = A + (-B)$.

Несложно доказать, что операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$,
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3) $A + O = A$,
4) $A - A = O$,
5) $1 \cdot A = A$,
6) $k(A + B) = kA + kB$,
7) $(k + l)A = kA + lA$,
8) $k(lA) = (kl)A$.

Рассмотренные действия над матрицами аналогичны соответствующим действиям над числами. Этого нельзя сказать про вводимое ниже произведение матриц, которое возможно только для так называемых *согласованных* матриц.

Определение. Две матрицы называются *согласованными*, если число столбцов первой *равно* числу строк второй.

Определение. *Произведением* согласованных матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ik})$, элемент c_{ik} которой вычисляется как сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}.$$

Вычисление элемента c_{ik} проиллюстрировано на рисунке 8.1.

Замечание 8.2. Из того, что задано произведение AB, не следует существования произведения BA. Дело в том, что согласованность матриц A и B, вообще говоря, не обеспечивает согласованности матриц B и A (рисунок 8.1).

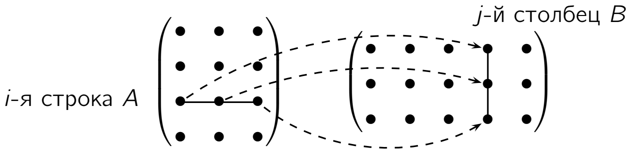

Рисунок 8.1

Пример 8.6. Вычислить произведение матриц A и B, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению произведения матриц

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A(B + C) = AB + AC$,
2) $(A + B)C = AC + BC$,
3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$,
4) $A(BC) = (AB)C$.

Замечание 8.3. Для квадратных матриц A и B одинаковых порядков заданы оба произведения AB и BA. При этом, вообще говоря, $AB \neq BA$, то есть произведение матриц не обладает свойством *перестановочности*.

Пример 8.7. Найти произведения AB и BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 6 & 1\cdot 5 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 0 + 4\cdot 6 & 3\cdot 5 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 47 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 5\cdot 3 & 0\cdot 2 + 5\cdot 4 \\ 6\cdot 1 + 8\cdot 3 & 6\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix}.$$

Итак, в данном случае $AB \neq BA$. □

Определение. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными*.

Любая квадратная матрица A, очевидно, является перестановочной с единичной матрицей E и нулевой матрицей O, причём

$$AE = EA = A, \quad AO = OA = 0.$$

Определение. Если $k \in \mathbb{N}$, то *k-й степенью* квадратной матрицы A называется произведение k матриц A:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$.

Операция возведения в степень обладает следующими привычными свойствами:

1) $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, 2) $(A^m)^k = A^{mk}$.

Определение. *Многочленом степени n* от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа.

Пример 8.8. Найти значение $f(A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3.$$

Решение. Вычисляем A^2 и A^3:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим $f(A)$:

$$f(A) = 2A^3 - 4A^2 + 3E =$$
$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Определение. Матрица A^T, столбцы которой составлены из строк матрицы A с теми же номерами, называется *транспонированной* к матрице A.

Пример 8.9. Найти матрицу, транспонированную к данной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим основные свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T = A$,

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

8.1.3. Определители

Квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие число, называемое *определителем* и обозначаемое $|A|$ или $\det A$.

Определение. *Определитель первого порядка* квадратной матрицы $A = (a_{11})$ равен единственному элементу этой матрицы, а именно $\det A = |A| = a_{11}$.

Замечание 8.4. Следует различать вертикальные линии, обозначающие определитель и модуль числа: они имеют совершенно различный смысл. Определитель, например, может принимать отрицательные значения.

Определение. *Определителем второго порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{8.2}$$

Замечание 8.5. Правило вычисления определителя второго порядка иллюстрируется схемой на рисунке 8.2 и состоит в том, что из произведения элементов главной диагонали вычитается произведение элементов побочной диагонали.

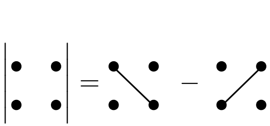

Рисунок 8.2

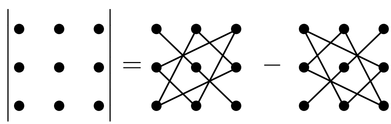

Рисунок 8.3

Пример 8.10. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. По «правилу диагоналей»

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-7) = 15 - 14 = 1. \qquad \square$$

Определение. *Определителем третьего порядка* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (8.3)$$

Замечание 8.6. Облегчить запоминание формулы (8.3) позволяет так называемое *правило треугольников*, представленное схемой на рисунке 8.3. Суть правила треугольников состоит в том, что со знаком «плюс» берётся произведение элементов главной диагонали, а также произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, чьи основания параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» идёт побочная диагональ и соответствующие ей треугольники.

Пример 8.11. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. По правилу треугольников

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 + 2 - 1 - 1 + 4 - 1 = 5. \qquad \square$$

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка n выражается через специальные определители порядка $n-1$, называемые *минорами*.

Такой подход позволяет при вычислении определителя последовательно понижать его порядок до тех пор, пока не будут получены определители третьего или второго порядка, которые могут быть вычислены непосредственно.

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется *определитель квадратной матрицы* $(n-1)$*-го порядка*, получаемой вычёркиванием в матрице A i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Определение. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 8.12. Минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{23} для квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляются по формулам:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}.$$

Определение. *Определителем* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется сумма произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \tag{8.4}$$

Замечание 8.7. Это определение корректно в том смысле, что, как несложно проверить, применительно к определителям второго и третьего порядка формула (8.4) даёт такой же результат, как и рассмотренные ранее формулы (8.2) и (8.3).

Пример 8.13. Вычислить определитель из примера 8.3 с помощью формулы (8.4).

Решение. Имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2-1) + 1 \cdot (4-1) + 1 \cdot (2-1) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Как мы и предполагали, результат оказался тем же. □

Для вычисления определителей четвёртого и более высоких порядков для формулы (8.4) уже нет альтернативы.

Пример 8.14. Вычислить $\det A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Один из элементов первой строки матрицы A равен нулю, что освобождает нас от нахождения соответствующего минора. Для сокращения письма знаки алгебраических дополнений будем вычислять в уме:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{5} & \boxed{-7} \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\Big(6\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot(-3)\cdot 1 - {}$$
$$- 2\cdot 1\cdot 1 - (-3)\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 6\Big) + {}$$
$$+ 5\Big(2\cdot(-3)\cdot 1 + 6\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 - {}$$
$$- 2\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 2\Big) + {}$$
$$+ 7\Big(2\cdot(-3)\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 4 - {}$$
$$- 2\cdot(-3)\cdot 4 - 1\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2\Big) =$$

$$= 1(6 - 16 - 6 - 2 + 12 + 24) + 5(-6 - 24 + 2 + 6 - 6 + 8) + {}$$
$$+ 7(-12 + 12 + 8 + 24 - 12 - 4) =$$
$$= 1\cdot 18 + 5\cdot(-20) + 7\cdot 16 = 18 - 100 + 112 = 30.$$

□

8.1.4. Свойства определителей

1 (равноправность строк и столбцов). *При транспонировании матрицы её определитель не меняется, то есть* $|A^T| = |A|$.

2. *При перестановке двух параллельных рядов знак определителя меняется на противоположный.*

3. *Общий множитель всех элементов любого ряда определителя можно вынести за знак определителя.*

Пример 8.15. Вынесем множитель k из второй строки определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. *Определитель, содержащий нулевой ряд, равен нулю.*

5. *Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

6. *Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то этот определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.*

Пример 8.16. Применим рассмотренное свойство к первой строке следующего определителя третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. *Определитель, два параллельных ряда которого одинаковы или пропорциональны, равен нулю.*

8. *Определитель не изменяется, если к элементам одного из его рядов прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.*

Пример 8.17. В определителе третьего порядка прибавим ко второму столбцу первый, умноженный на некоторое число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:*

$$|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|.$$

10 (теорема Лапласа). *Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.*

Замечание 8.8. Теорема Лапласа является основной теоремой теории определителей. Она утверждает, что для вычисления определителя его можно раскладывать не только по элементам первой строки, но и по элементам любой другой строки или столбца. Результат всегда будет одинаковым.

11 (теорема аннулирования). *Сумма произведений элементов любого ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ряда равна нулю.*

Пример 8.18. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель из примера 8.11, раскладывая его по третьему столбцу.

Решение. Согласно теореме Лапласа

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2-1) - 1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (1+2) = 1 - 2 + 6 = 5.$$

Результат, естественно, оказался в точности таким же, как в примерах 8.11 и 8.13. □

8.1.5. Элементарные преобразования

Как мы уже могли заметить, решая пример 8.14, нахождение определителя 4-го и больших порядков требует значительных вычислительных затрат. Рассмотрим способ существенного сокращения этих затрат.

Определение. Будем называть *элементарными преобразованиями* матриц

1) перестановку местами двух параллельных рядов;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число k, отличное от нуля;
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение. Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. При этом пишут $A \sim B$.

Применяя свойства определителей, проверим, как влияют элементарные преобразования квадратной матрицы на значение её определителя. Итак, элементарное преобразование с номером

1) по свойству 2 изменяет знак определителя;
2) по свойству 3 приводит к умножению значения определителя на число k;
3) по свойству 8 не влияет на значение определителя.

Подвергая квадратную матрицу порядка n элементарным преобразованиям, можно добиться того, чтобы в каком-либо из её рядов все элементы, кроме одного, обратились в нуль. Тогда, разложив определитель преобразованной матрицы по элементам такого ряда, мы сведём вычисление определителя порядка n к вычислению *одного* определителя порядка $n-1$.

Пример 8.19. Применяя элементарные преобразования, вычислить определитель из примера 8.14.

Решение. Применяя элементарное преобразование 3), преобразуем данный определитель так, чтобы все элементы его первой строки, кроме элемента 1, который мы будем называть *разрешающим*, стали равны нулю. Для этого будем брать первый столбец и, домножая его на -5 и 7, добавлять к третьему и четвёртому столбцам соответственно. Выбор элемента 1 в качестве разрешающего обусловлен тем, что на него без остатка делятся остальные элементы первой строки. Данный приём позволит избежать дробей в вычислениях:

$$|A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & -7 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 & 15 \\ 1 & -3 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -8 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 15 \\ -3 & -4 & 5 \\ 2 & -8 & 15 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка вычислим аналогичным способом. Начнём с того, что вынесем за знак определителя множитель 3 из первой строки, а также множители 2 и 5 из второго и третьего столбцов:

$$|A| = 3 \cdot 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & \boxed{1} \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & \boxed{1} \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 30 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -30(5 \cdot 2 - 11 \cdot 1) = -30 \cdot (-1) = 30.$$

Как и следовало ожидать, результат оказался таким же, как и в примере 8.14, причём вычислительные затраты существенно сократились. □

8.1.6. Обратная матрица

Определение. Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется *обратной* для A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица.

Теорема 8.1. *Если для квадратной матрицы A существует обратная, то она единственная.* [Доказательство]

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$. В противном случае, когда $\det A = 0$, матрица называется *вырожденной*.

Определение. Матрица A^*, транспонированная к матрице алгебраических дополнений квадратной матрицы A, называется *присоединённой к матрице A*.

Пример 8.20. Выпишем произвольную квадратную матрицу третьего порядка A и её присоединённую A^*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Теорема 8.2. *Для квадратной матрицы A существует обратная тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. При этом*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*, \tag{8.6}$$

где A^* — присоединённая матрица. [Доказательство]

Невырожденные матрицы обладают следующими свойствами:

1) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$,

2) $(A^{-1})^{-1} = A$,

3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$,

4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Теорема 8.2 позволяет сформулировать следующий *алгоритм нахождения обратной матрицы* для квадратной матрицы A.

1. Вычисляем определитель $|A|$. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и обратная A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то есть матрица A невырожденная, то продолжаем вычисления.
2. Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A.
3. Строим присоединённую матрицу A^*.
4. Выписываем обратную матрицу A^{-1} по формуле (8.6).

Пример 8.21. Найти матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Данная матрица уже рассматривалась в примере 8.3. Там мы нашли, что $|A| = 5 \neq 0$. Значит, матрица A невырожденная, и обратная существует.

2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-1) = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (4-1) = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-1) = 1.$$

Аналогично

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

3. Выписываем присоединённую матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. По формуле (8.6) выписываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Проведём проверку. По определению обратной матрицы, перемножив матрицы A и A^{-1}, мы должны получить единичную матрицу E. Убедимся, что так оно и есть:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+3+1 & 3+(-1)+(-2) & (-2)+(-1)+3 \\ 2+(-3)+1 & 6+1+(-2) & (-4)+1+3 \\ 1+(-3)+2 & 3+1+(-4) & (-2)+1+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad \square$$

Замечание 8.9. Для квадратной матрицы второго порядка присоединённая матрица находится по следующему простому правилу: элементы главной диагонали меняются местами, а элементы побочной диагонали умножаются на -1. Это позволяет для любой невырожденной квадратной матрицы второго порядка A быстро выписывать обратную матрицу A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

8.1.7. Матричные уравнения

Определение. Уравнения, где неизвестной является матрица, называются *матричными уравнениями*.

Матричные уравнения можно решать с помощью обратной матрицы. Различают следующие виды матричных уравнений:

$$AX = B, \quad XA = B, \quad AXC = B. \tag{8.8}$$

Здесь X — неизвестная матрица. Все матрицы в левой части уравнения должны быть согласованными. С обеих сторон от знака равно должны быть матрицы одинаковых размеров.

Теорема 8.3. *Если матрицы A и C квадратные и невырожденные, то матричные уравнения (8.8) имеют единственные решения, которые могут быть найдены по формулам:*

$$X = A^{-1}B, \quad X = BA^{-1}, \quad X = A^{-1}BC^{-1}.$$

[Доказательство]

Пример 8.22. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти A^{-1}, воспользуемся представлением (8.7) обратной матрицы второго порядка:

$$A^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 8.3

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$XA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+6 & 0-2 \\ 15-3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = B$$

убеждает нас в верности полученного результата. $\square$

8.1.8. Ранг матрицы

Определение. Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Для $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ *минорами порядка k матрицы A* называются определители, которые состоят из элементов матрицы A, стоящих на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A.

Определение. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом матрицы* A и обозначается $\operatorname{rank} A$.

Определение. Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным*.

Пример 8.23. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрицы имеет 6 миноров порядка 1 — её элементы. У неё есть три минора порядка 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9. \tag{8.9}$$

Миноров порядка 3 и выше у матрицы A, очевидно, нет.

Матрица A содержит минор второго порядка, отличный от нуля, например, второй из миноров (8.9). Это максимально возможный порядок миноров. Следовательно, $\operatorname{rank} A = 2$. Базисных, то есть отличных от нуля миноров порядка 2, в данном случае два: второй и третий из миноров (8.9).

Свойства ранга матрицы

1. *Для матрицы A размера $m \times n$ её ранг* $\operatorname{rank} A \leqslant \min\{m, n\}$.
2. *Ранг матрицы не меняется при транспонировании.*
3. *Ранг матрицы не меняется при вычёркивании нулевого ряда.*
4. *Ранг матрицы не меняется в результате элементарных преобразований.*
5. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу её строк.*

Доказательства этих утверждений легко выводятся из свойств определителей.

Для нахождения ранга матрицы можно, следуя определению, перебирать миноры матрицы. Существенно более эффективным с вычислительной точки зрения является так называемый *метод элементарных преобразований*, основанный на рассмотренных свойствах ранга матрицы. Суть этого метода в том, что матрица приводится к ступенчатому виду путём проведения элементарных преобразований и вычёркивания нулевых рядов.

Пример 8.24. Найти методом элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выберем в матрице A элемент 1 в качестве разрешающего и занулим с его помощью другие элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & \boxed{1} & 5 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Переписывая третью строку, содержащую разрешающий элемент без изменений, проделаем аналогичную процедуру с первыми двумя строками:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & -7 & 13 \\ -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Приведение матрицы A к ступенчатому виду завершилось вычёркиванием нулевой второй строки.

Полученная ступенчатая матрица имеет две строки, поэтому $\operatorname{rank} A = 2$. Определитель, составленный из двух первых столбцов ступенчатой матрицы не равен нулю. Значит, в качестве базисного минора матрицы A можно взять соответствующий минор

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},$$

стоящий на пересечении строк с номерами 1 и 3 и столбцов с номерами 1 и 2 матрицы A. $\square$

8.2. Системы линейных алгебраических уравнений

8.2.1. Основные понятия

Определение. *Системой m линейных уравнений с n неизвестными* называется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{8.10}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами*, а b_i — *свободными членами* системы.

Определение. Системе линейных уравнений (8.10) ставят в соответствие матрицу и два вектора-столбца

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *основной матрицей*, *вектором неизвестных* и *вектором свободных членов*.

Определение. Система (8.10) может быть переписана в так называемой *матричной форме*

$$AX = B, \tag{8.11}$$

где A, X, B — основная матрица, вектор неизвестных и вектор свободных членов.

Определение. *Расширенной матрицей* системы (8.10) называется матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

получаемая присоединением к основной матрице вектора-столбца свободных членов.

Определение. *Решением* системы (8.10) называется набор значений неизвестных

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \ldots, \quad x_n = c_n,$$

обращающих все уравнения системы в верные равенства. *Решить* систему — значит найти все её решения.

Определение. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

Определение. Каждое отдельное решение неопределённой системы называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Определение. Две системы называются *эквивалентными*, если совокупности их решений совпадают. В частности, любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Не нарушая эквивалентности, можно

1) выполнять элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы;
2) исключать из системы уравнения вида $0 = 0$.

Определение. *Однородной* называется система линейных уравнений, все свободные члены b_i которой равны нулю. В противном случае, то есть когда хотя бы один из свободных членов b_i отличен от нуля, система называется *неоднородной*.

Однородная система всегда совместна, так как имеет по крайней мере одно решение

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0. \tag{8.12}$$

Определение. Решение (8.12) однородной системы линейных уравнений называется *нулевым*, или *тривиальным*.

8.2.2. Матричный метод

Предположим, что основная матрица A системы (8.10) квадратная и невырожденная. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив левую и правую части системы в матричной форме (8.11) слева на A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Единственность найденного решения X гарантируется единственностью обратной матрицы A^{-1}.

Определение. Метод решения системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A по формуле $X = A^{-1}B$ называется *матричным*.

Пример 8.25. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ 2x + y + z = 2, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$

Решение. Выпишем основную матрицу и вектор свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу A мы уже рассматривали в примере 8.21. Там мы убедились, что она невырожденная, и нашли обратную

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим вектор неизвестных X матричным методом:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1\cdot 6 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ (-3)\cdot 6 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 6 + (-2)\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$ — решение системы. Чтобы убедиться в его правильности, проводим *проверку*:

$$x - y + z = 2 - (-3) + 1 = 6,$$
$$2x + y + z = 2\cdot 2 + (-3) + 1 = 2,$$
$$x + y + 2z = 2 + (-3) + 2\cdot 1 = 1.$$

Как это и требуется, все уравнения системы обратились в верные равенства.

$\square$

Замечание 8.10. Матричный способ является весьма трудоёмким с вычислительной точки зрения, так как требует отыскания обратной матрицы, что влечёт за собой вычисление $n^2 + 1$ определителей.

8.2.3. Метод Крамера

Теорема 8.4. *Единственное решение системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ можно получить по формулам*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.13}$$

где $\Delta = \det A$ — определитель основной матрицы и определитель

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8.14}$$

получается из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

[Доказательство]

Определение. Формулы (8.13) называются *формулами Крамера*. Метод решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера называется *методом Крамера*.

Пример 8.26. Решить систему линейных уравнений из примера 8.25 методом Крамера.

Решение. Определитель основной матрицы системы в данном случае совпадает с определителем, рассмотренным в примере 8.11. Там мы нашли, что $\Delta = 5$. Вычисляем определители Δ_i:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - \\ - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 6 = \\ = 12 - 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - \\ - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 2 = \\ = 4 + 6 + 2 - 2 - 1 - 24 = -15,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 6 - \\ - 1 \cdot 1 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 = \\ = 1 - 2 + 12 - 6 - 2 + 2 = 5.$$

По формулам Крамера (8.13) находим, что

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1. \qquad \square$$

Замечание 8.11. Метод Крамера требует отыскания определителя системы Δ и n определителей Δ_i. Это делает его, как и матричный метод, весьма трудоёмким и не очень оправданным для практического применения.

8.2.4. Метод Гаусса

Определение. *Методом Гаусса* решения системы линейных уравнений называется метод последовательного исключения неизвестных с помощью элементарных преобразований строк системы.

Будучи универсальным и вычислительно эффективным, метод Гаусса чаще всего применяется на практике. Метод Гаусса принято представлять в виде двух этапов: *прямого* и *обратного хода*.

Прямой ход состоит в последовательном исключении неизвестных. Предположим, что в системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \boxed{a_{21}x_1} + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \boxed{a_{31}x_1} + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boxed{a_{m1}x_1} + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если бы это было не так, мы бы выбрали из коэффициентов a_{i1} при переменной x_1 какой-нибудь ненулевой и поменяли местами содержащую его строку с первой. Теперь исключим переменную x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого будем умножать первое уравнение поочерёдно на

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad \dots, \quad -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$$

и прибавлять результат к остальным уравнениям системы.

В результате получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \boxed{a_{22}^{(2)}x_2} + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \boxed{a_{32}^{(2)}x_2} + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boxed{a_{m2}^{(2)}x_2} + a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}. \end{cases}$$

На этом этапе первое уравнение уже сыграло свою роль и в дальнейшем просто переписывается. Теперь посредством второго уравнения из всех уравнений, начиная с третьего, по тому же принципу исключается переменная x_2.

Далее последовательно исключаем остальные неизвестные. Встречая уравнения $0 = 0$, отбрасываем их как заведомо верные. В связи с этим количество уравнений системы может уменьшиться. Если получилось хотя бы одно заведомо неверное уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$, то система несовместна и решение заканчивается.

В результате выполнения прямого хода приводим систему к *ступенчатому виду*, то есть к такой эквивалентной системе, основная матрица которой имеет ступенчатый вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2k}^{(2)}x_k + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3k}^{(3)}x_k + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kk}^{(k)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)}. \end{cases} \tag{8.15}$$

Завершающий этап метода Гаусса, когда решается ступенчатая система (8.15), называется *обратным ходом* и происходит с низу в верх. Из последнего уравнения неизвестная x_k выражается через $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Затем найденное значение x_k подставляется в предпоследнее уравнение системы, что позволяет выразить x_{k-1} через всё те же $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Продолжая этот процесс, мы выразим неизвестные $x_1, \ldots, x_k$, называемые *базисными* через неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$, называемые *свободными*. Если в системе есть свободные неизвестные, то им можно придавать любые действительные значения и потому система имеет бесконечно много решений.

Ступенчатая система (8.15), в которой число уравнений k равно числу неизвестных n, называется *треугольной*, поскольку её основная матрица имеет треугольный вид. Треугольная система имеет единственное решение, так как не содержит свободных неизвестных.

Замечание 8.12. В результате проведённых выкладок мы убедились, что совместная система уравнений имеет либо единственное решение, либо бесконечно много решений.

Замечание 8.13. При записи систем линейных уравнений, решаемых методом Гаусса, для удобства восприятия переменные с одинаковыми номерами, как правило, выравнивают, располагая их на одной вертикальной линии.

Пример 8.27. Решить систему линейных уравнений из примера 8.25 методом Гаусса.

Решение. Выполняем прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} \boxed{x} - y + z = 6, \\ \boxed{2x} + y + z = 2, \\ \boxed{x} + y + 2z = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ 3y - \boxed{z} = -10, \\ 2y + \boxed{z} = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + z = 6, \\ 5y = -15, \\ 2y + z = -5. \end{cases}$$

Обратите внимание, что, приводя систему к ступенчатому виду, можно выбирать разрешающие уравнения и исключать неизвестные в любом порядке.

Полученная ступенчатая система имеет треугольный вид, что гарантирует единственное решение.

Выполняем обратный ход:

$$y = \frac{-15}{5} = -3, \quad z = 5 - 2y = -5 - 2 \cdot (-3) = 1,$$
$$x = 6 + y - z = 6 + (-3) - 1 = 2.$$

Итак, $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$. □

Замечание 8.14. Для сокращения записи и увеличения наглядности преобразования прямого хода метода Гаусса часто выполняют с расширенной матрицей системы.

Пример 8.28. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 = -21, \\ -3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 12, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -11, \\ 5x_1 - 11x_2 + 14x_3 = -23. \end{cases}$

Решение. Будем оперировать с расширенной матрицей системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & -9 & 10 & -21 \\ -3 & 6 & -8 & 12 \\ 2 & -5 & 6 & -11 \\ 5 & -11 & 14 & -23 \end{array}\right).$$

Ни в одном столбце этой матрицы нет элемента, на который делились бы нацело остальные элементы столбца. Именно такие элементы мы делали разрешающими. Чтобы справиться с этой проблемой, домножим третью и четвёртую строки на 3. Тогда все элементы первого столбца окажутся кратными его первому элементу, который мы и выберем разрешающим.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{3} & -9 & 10 & -21 \\ -3 & 6 & -8 & 12 \\ 6 & -15 & 18 & -33 \\ 15 & -33 & 42 & -69 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & 12 & -8 & 36 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & \boxed{-3} & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \\ 0 & 3 & -2 & 9 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -9 & 10 & -21 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{2}{3}x_3 + 3,$$

$$x_1 = 3x_2 - \frac{10}{3}x_3 - 7 = 3\left(\frac{2}{3}x_3 + 3\right) - \frac{10}{3}x_3 - 7 = -\frac{4}{3}x_3 + 2.$$

В данном случае неизвестные x_1 и x_2 — базисные, неизвестная x_3 — свободная. Положив $x_3 = 3\alpha$, где α — произвольное действительное число, получим общее решение

$$x_1 = -4\alpha + 2, \quad x_2 = 2\alpha + 3, \quad x_3 = 3\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Придавая α произвольное значение, можно получить любое решение системы. Например, при $\alpha = 0$ получим частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$. $\square$

8.2.5. Критерий Кронекера — Капелли

Подытоживая изложенные выше результаты, сформулируем общий критерий разрешимости произвольной системы линейных уравнений.

Теорема 8.5 (Кронекера — Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:*

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \bar{A} = r.$$

Если при этом ранг r равен числу неизвестных n, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, определяемых $n - r$ свободными неизвестными.

Применим критерий Кронекера — Капелли к однородным системам линейных уравнений.

Теорема 8.6. *Однородная система линейных уравнений с n неизвестными и основной матрицей A имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы меньше числа неизвестных, то есть $\operatorname{rank} A < n$.*

[Доказательство]

Следствие 8.1. *Если число уравнений однородной системы меньше числа её переменных, то система имеет ненулевое решение.*

Следствие 8.2. *Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.*

Пример 8.29. Решить систему $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 1x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

Решение. Данная система однородная, поэтому для её решения будет достаточно привести с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому виду основную, а не расширенную, матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Это уже было сделано нами в задаче 8.24 при нахождении ранга матрицы A. Там мы пришли к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 & 13 \\ 4 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что

$$x_1 = -7x_3 + 13x_4$$
$$x_2 = -4x_1 - 5x_3 + 5x_4 = -4(-7x_3 + 13x_4) - 5x_3 + 5x_4 = 23x_3 - 47x_4.$$

Переменные x_3 и x_4 свободные. Положив $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, получим общее решение

$$x_1 = -7\alpha + 13\beta,\ x_2 = 23\alpha - 47\beta,\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

8.2.6. Экономическая модель Леонтьева

Предположим, что экономика страны насчитывает n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного личного и общественного потребления, лежащего вне сферы материального производства.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени, например, год. Введём следующие обозначения.

Определение. *Вектором валового выпуска* назовём вектор-столбец $X = (x_i)$, где x_i — общий, или валовый, объём продукции i-й отрасли.

Определение. *Вектором конечного продукта* назовём вектор-столбец $Y = (y_i)$, где y_i — объём конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

Определение. *Матрицей прямых затрат* назовём квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — это *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Так как валовый объём продукции i-й отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{8.16}$$

Определение. Уравнения (8.16) называются *соотношениями баланса* и задают *модель Леонтьева многоотраслевой экономики*.

Перепишем соотношения баланса (8.16) в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right) = y_1, \\ x_2 - \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right) = y_n. \end{cases}$$

Полученную систему преобразуем к матричному виду:

$$X - AX = Y, \quad EX - AX = Y, \quad (E - A)X = Y, \tag{8.17}$$

где E — единичная матрица.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт. Для её решения достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений (8.17).

Пример 8.30. Определите вектор X валового выпуска продукции трёх отраслей, если известны матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}14 \\ 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 510 \\ 405 \\ 482 \end{pmatrix}.$$

Решение. Будем приводить к ступенчатому виду расширенную матрицу $(E-A|Y)$ системы (8.17):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0{,}92 & -0{,}10 & -0{,}14 & 510 \\ -0{,}03 & 0{,}96 & -0{,}09 & 405 \\ -0{,}06 & -0{,}08 & 0{,}94 & 482 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 46 & -5 & -7 & 25500 \\ \boxed{-1} & 32 & -3 & 13500 \\ -3 & -4 & 47 & 24100 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1467 & -145 & 646500 \\ -1 & 32 & -3 & 13500 \\ 0 & \boxed{-100} & 56 & -16400 \end{array}\right).$$

Домножим первую строку на 100, чтобы сделать её второй элемент кратным выбранному нами разрешающему элементу:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 146700 & -14500 & 64650000 \\ -1 & 32 & -3 & 13500 \\ 0 & \boxed{-100} & 56 & -16400 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 67652 & 40591200 \\ -1 & 32 & -3 & 13500 \\ 0 & -100 & 56 & -16400 \end{array}\right).$$

Отсюда

$$x_3 = 600, \qquad x_2 = \frac{56x_3 + 16400}{100} = 500, \qquad x_1 = 32x_2 - 3x_3 - 13500 = 700.$$

Итак, чтобы обеспечить конечный продукт Y, необходимо выпустить 700 единиц продукции первой отрасли, 500 — второй отрасли и 600 — третьей отрасли. □

8.3. Векторная алгебра

8.3.1. Векторы в пространстве

8.3.2. Скалярное произведение векторов

8.3.3. n-мерное векторное пространство

8.3.4. Линейная зависимость векторов

8.3.5. Базис и ранг системы векторов

8.3.6. Ортогональные системы векторов

8.3.7. Фундаментальные системы решений

8.3.8. Собственные векторы и значения

Предметный указатель

Другие

А

Б

В

Г

Д

Е

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

Э

Н

П

Определения

Абсолютно сходящийся ряд

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

[Перейти к основному тексту]

Абсолютно сходящийся функциональный ряд

Функциональный ряд (7.9) называется *абсолютно сходящимся* на множестве D_1, если в каждой точке $x \in D_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

[Перейти к основному тексту]

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

[Перейти к основному тексту]

Арифметические операции с последовательностями

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$ называются соответственно *суммой, разностью, произведением и частным* двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

[Перейти к основному тексту]

Асимптоты гиперболы

Две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рисунок 1.12) называются *асимптотами* гиперболы.

[Перейти к основному тексту]

Базисный минор

Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным*.

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно большая последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой (ББП)*, если для всякого $A > 0$, сколь большим оно бы ни было, существует номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n > N_0$ верно неравенство $|x_n| > A$, т.е.

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n| > A.$$

В таком случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если дополнительно известно, что последовательность $\{x_n\}$ для достаточно больших n сохраняет знак, то есть

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad x_n > A \quad \big(x_n < -A\big),$$

то к символу бесконечности «∞» добавляют соответствующий знак:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Big(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\Big).$$

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при $x \to a$ (ББФ)*, если для любого числа $A > 0$, сколь большим оно бы ни было, существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x)| > A$, т.е.

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x)| > A.$$

В этом случае применяется обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Если известно, что при $0 < |x - a| < \delta$ функция $f(x)$ принимает только *положительные* (*отрицательные*) значения, данное обозначение может быть дополнено путем указания знака бесконечности:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right).$$

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно малая последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой (БМП)*, если для любого положительного числа ε, сколь бы малым оно бы ни было, существует номер N_0 такой, что для любого $n > N_0$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to a$ (БМФ)*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, \; 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Бюджетное множество

Если потребитель обладает доходом R, то множество всех наборов товаров стоимостью не более R называется *бюджетным множеством*. *Граница бюджетного множества* — это множество наборов, которые стоят ровно R.

[Перейти к основному тексту]

Вектор валового выпуска

Вектором валового выпуска назовём вектор-столбец $X = (x_i)$, где x_i — общий, или валовый, объём продукции i-й отрасли.

[Перейти к основному тексту]

Вектор конечного продукта

Вектором конечного продукта назовём вектор-столбец $Y = (y_i)$, где y_i — объём конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления. [Перейти к основному тексту]

Вектор предельных полезностей

Вектор градиента функции полезности

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

координаты которого есть предельные полезности, называется *вектором предельных полезностей*.

[Перейти к основному тексту]

Вектор-столбец и вектор-строка

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором-столбцом* или *вектором-строкой*. [Перейти к основному тексту]

Вертикальная асимптота

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$. [Перейти к основному тексту]

Вершина параболы

Начало координат $O(0,0)$ называется *вершиной* параболы.

[Перейти к основному тексту]

Вершины гиперболы

Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ (рисунок 1.12) лежат на гиперболе и называются *вершинами* гиперболы.

[Перейти к основному тексту]

Вершины эллипса

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ (рисунок 1.10), очевидно, принадлежащие эллипсу, называются *вершинами* эллипса.

[Перейти к основному тексту]

Возрастающая и убывающая последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant x_{n+1}$, *убывающей*, если $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} \leqslant x_n$. [Перейти к основному тексту]

Возрастающая и убывающая функции

Функция $f : X \to Y$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве $A \subset X$, если $\forall\, x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$. [Перейти к основному тексту]

Второй замечательный предел

Равенство (2.6), представляющее собой обобщение уже известного предела (2.2), называется *вторым замечательным пределом*.

[Перейти к основному тексту]

Выпуклая вверх (выпуклая) функция

Функция f называется *выпуклой вверх (выпуклой)* на интервале $(a; b)$, если ее график расположен ниже любой касательной на $(a; b)$ (рисунок 3.7).

[Перейти к основному тексту]

Выпуклая вниз (вогнутая) функция

Функция f называется *выпуклой вниз (вогнутой)* на интервале $(a; b)$, если ее график расположен выше любой касательной на $(a; b)$ (рисунок 3.7).

[Перейти к основному тексту]

Выпуклое множество

Множество $B \subset \mathbb{R}^2$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми своими точками a и b оно целиком содержит соединяющий их отрезок.

[Перейти к основному тексту]

Выпуклые функции

Функция, заданная на выпуклом множестве B, называется *выпуклой вниз*, если все точки графика этой функции, соответствующие произвольному отрезку $[a, b]$ из множества B, лежат не выше хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Аналогично функция называется *выпуклой вверх*, если для всякого отрезка из множества B график функции в точках этого отрезка лежит не ниже соответствующей хорды (рисунок 5.17). [Перейти к основному тексту]

Гаусса метод

Методом Гаусса решения системы линейных уравнений называется метод последовательного исключения неизвестных с помощью элементарных преобразований строк системы. [Перейти к основному тексту]

Гипербола

Гипербола (смотрите рисунок 1.12) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0,$$

называемому *каноническим уравнением гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Градиент

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным этой функции:

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

[Перейти к основному тексту]

График функции двух переменных

Совокупность точек $P(x, y, f(x, y))$ (смотрите рисунок 5.1) представляет собой поверхность в трехмерном пространстве, которая называется *графиком функции* $z = f(x, y)$. [Перейти к основному тексту]

График функции

Графиком функции называется множество всех точек плоскости с координатами $\big(x; f(x)\big)$, т.е. координаты x и y точек графика связаны соотношением $y = f(x)$.

[Перейти к основному тексту]

Диагонали матрицы

Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют её *главную диагональ*. Другая диагональ, состоящая из элементов $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$, называется *побочной*.

[Перейти к основному тексту]

Диагональная матрица

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

[Перейти к основному тексту]

Директриса параболы

Прямая L, задаваемая уравнением $x = -\frac{p}{2}$ (рисунок 1.14), называется *директрисой* параболы. [Перейти к основному тексту]

Дифференциал функции двух переменных

Дифференциалом dz дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения (5.1):

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

[Перейти к основному тексту]

Дифференциал

Главная линейная относительно Δx часть приращения функции

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

в точке x называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в этой точке.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называют нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$) — произвольное вещественное число.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0$$

где x — аргумент, $y(x)$ — искомая функция; F — заданная функция трех переменных x, y, y'; f — заданная функция двух переменных x, y.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение с разделенными переменными

Пусть $P(x, y) = P_1(x)$, а $Q(x, y) = Q_2(y)$, тогда уравнение (6.7) называют *ДУ с разделенными переменными*. [Перейти к основному тексту]

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Пусть $P(x, y) = P_1(x)P_2(y)$, а $Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y)$, тогда уравнение (6.7) называют *ДУ с разделяющимися переменными*.

[Перейти к основному тексту]

Дифференциальный бином

Выражение $x^m(a + bx^n)^p\,dx$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ называется *дифференциальным биномом*.

[Перейти к основному тексту]

Дифференцирование

Операцию нахождения производной называют *дифференцированием*.

[Перейти к основному тексту]

Дифференцируемая функция

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x, если ее приращение y в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ — БМФ при $\Delta x \to 0$.

[Перейти к основному тексту]

Дифференцируемость функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, называется *дифференцируемой* в точке M_0, если ее полное приращение в этой точке

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где A и B — постоянные, не зависящие от Δx и Δy, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — *бесконечно малые функции* при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

[Перейти к основному тексту]

Единичная матрица

Диагональная матрица называется *единичной* и обозначается E, если все её элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

[Перейти к основному тексту]

Задача Коши

Задачей Коши, или *начальной задачей*, называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (6.1), удовлетворяющего *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0.$$

[Перейти к основному тексту]

Знакочередующийся ряд

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

где $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

[Перейти к основному тексту]

Изокванты

Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

[Перейти к основному тексту]

Интеграл с переменным верхним пределом

Функция $\Phi(x)$, определенная формулой (4.25), называется *интегралом с переменным верхним пределом*. [Перейти к основному тексту]

Интегральная кривая дифференциального уравнения

График решения $y = y(x)$ ДУ называется *интегральной кривой этого уравнения*.

[Перейти к основному тексту]

Интегральная кривая

График каждой первообразной называется *интегральной кривой*.

[Перейти к основному тексту]

Интегральная сумма

Сумма (4.17) называется *интегральной суммой* для функции f на отрезке $[a; b]$.

[Перейти к основному тексту]

Интегрирование дифференциального уравнения

Процесс нахождения всех решений ДУ называется *интегрированием ДУ*.

[Перейти к основному тексту]

Интервал монотонности

Интервалы, на которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности* этой функции. [Перейти к основному тексту]

Интервал сходимости

Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* ряда (7.12).

[Перейти к основному тексту]

Касательная

Касательной к кривой в точке M называется предельное положение (если оно существует) секущей MP, когда точка P неограниченно приближается к точке M. [Перейти к основному тексту]

Квадратная матрица

Матрица, число строк которой равно числу столбцов и равно n, называется *квадратной матрицей порядка n*. [Перейти к основному тексту]

Классификация точек разрыва

Точка разрыва a функции $f(x)$ называется

1) *точкой разрыва первого рода*, если в ней существуют конечные левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$, причём, если они

   а) равны, то есть

   $$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x),$$

   то a называется *точкой устранимого разрыва*,

   б) различны, то есть

   $$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

   то a называется *точкой конечного разрыва*, а модуль разности левостороннего и правостороннего предела

   $$h = \left| \lim_{x\to a-0} f(x) - \lim_{x\to a+0} f(x) \right|$$

   — *скачком функции* $f(x)$ в точке a;

2) *точкой разрыва второго рода* в противном случае, то есть если в ней не существует либо равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов.

[Перейти к основному тексту]

Крамера метод и формулы

Формулы (8.13) называются *формулами Крамера*. Метод решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей по формулам Крамера называется *методом Крамера*. [Перейти к основному тексту]

Кривые безразличия

Линии уровня функции полезности называют *кривыми безразличия* (рисунок 5.18). [Перейти к основному тексту]

Критическая точка

Значение аргумента x, при которых производная $f'(x)$ равна нулю, бесконечности или не существует, называется *критической точкой* функции.

[Перейти к основному тексту]

Левый предел

Число b называется *левым пределом* функции f в точке $x = a$, если (смотрите рисунок 2.43)

$$\forall\,\{x_n\},\ x_n < a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

В этом случае применяется обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b.$

[Перейти к основному тексту]

Линейное дифференциальное уравнение

Уравнения, которые можно записать в виде

$$y' + p(x)y = q(x)$$

или

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y),$$

называются *линейными*, первое — относительно y, $\frac{dy}{dx}$, а второе — относительно x, $\frac{dx}{dy}$.

Если $q(x) \equiv 0$ $(q(y) \equiv 0)$, то уравнение называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0 \quad (q(y) \neq 0)$, — *линейным неоднородным*.

[Перейти к основному тексту]

Линии первого порядка

Линии вида (1.9) называются *линиями первого порядка*.

[Перейти к основному тексту]

Линии уровня

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, удовлетворяющих равенству $f(x, y) = c$, где c — константа.

[Перейти к основному тексту]

Линия на плоскости

Линией на плоскости называется множество точек плоскости, обладающих каким-то характерным свойством. [Перейти к основному тексту]

Логарифмическая производная

Производная от логарифма функции называется *логарифмической производной* этой функции, а последовательное применение операции логарифмирования, а затем дифференцирования называется *логарифмическим дифференцированием*.

[Перейти к основному тексту]

Локальные минимум и максимум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность M_0, для любой точки $M(x, y)$ которой выполняется неравенство $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$, и *точкой локального минимума*, если существует окрестность точки M_0, где $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.

[Перейти к основному тексту]

Локальный максимум

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_a + \delta) : \quad f(x) < f(x_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Локальный минимум

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если существует δ-окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такая, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta; x_a + \delta) : \quad f(x) > f(x_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Локальный экстремум функции двух переменных

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума*.

[Перейти к основному тексту]

Локальный экстремум

Локальные максимумы и локальные минимумы функции называются *локальными экстремумами*. [Перейти к основному тексту]

Матрица прямых затрат

Матрицей прямых затрат назовём квадратную матрицу $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — это *коэффициенты прямых затрат*, показывающие затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

[Перейти к основному тексту]

Матрицы

Прямоугольная таблица чисел, содержащая *m строк* и *n столбцов*, называется *матрицей размера* $m \times n$. Матрицы, как правило, обозначаются большими латинскими буквами и записываются в виде

$$A = \begin{pmatrix} ////a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или коротко $A = (a_{ij})$.

[Перейти к основному тексту]

Матричная форма системы линейных уравнений

Система (8.10) может быть переписана в так называемой *матричной форме*

$$AX = B,$$

где A, X, B — основная матрица, вектор неизвестных и вектор свободных членов.

[Перейти к основному тексту]

Матричные уравнения

Уравнения, где неизвестной является матрица, называются *матричными уравнениями*. [Перейти к основному тексту]

Матричный метод решения системы линейных уравнений

Метод решения системы линейных уравнений $AX = B$ с невырожденной квадратной матрицей A по формуле $X = A^{-1}B$ называется *матричным*.

[Перейти к основному тексту]

Минор матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Для $1 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ *минорами порядка k матрицы A* называются определители, которые состоят из элементов матрицы A, стоящих на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A.

[Перейти к основному тексту]

Минор элемента матрицы

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется *определитель квадратной матрицы* $(n-1)$*-го порядка*, получаемой вычёркиванием в матрице A i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. [Перейти к основному тексту]

Многочлен Тейлора

Многочлен $P_n(x)$, определяемый формулой (3.23), называется *многочленом Тейлора* для функции $y = f(x)$ в точке x_0. [Перейти к основному тексту]

Многочлен от квадратной матрицы

Многочленом степени n от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где a_0, a_1, ..., a_n — произвольные числа. [Перейти к основному тексту]

Монотонная последовательность

Возрастающая и убывающая последовательности называются *монотонными*. [Перейти к основному тексту]

Монотонная функция

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

[Перейти к основному тексту]

Наклонная асимптота

Прямая $y = kx + l$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция f представима в виде

$$f(x) = kx + l + \alpha(x).$$

где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$. При $k = 0$ эту асимптоту называют *горизонтальной*.

[Перейти к основному тексту]

Направление

Выберем на плоскости точку $M_0(x_0, y_0)$. Построим луч l, выходящий из точки M_0. Тем самым мы зададим в точке M_0 *направление* l (рисунок 5.7).

[Перейти к основному тексту]

Направляющие косинусы

Луч, задающий направление l, образует с положительными направлениями осей координат Ox и Oy углы α и β. Величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* направления l (рисунок 5.7).

[Перейти к основному тексту]

Невырожденная и вырожденные матрицы

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю: $\det A \neq 0$. В противном случае, когда $\det A = 0$, матрица называется *вырожденной*.

[Перейти к основному тексту]

Неограниченная последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если она не является ограниченной. Это значит что для любого $M > 0$, каким бы большим оно ни было, найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, для которого будет $|x_n| > M$. На языке кванторов это определение будет выглядеть следующим образом:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad |x_n| > M.$$

[Перейти к основному тексту]

Неограниченная функция

Функция $f : X \to Y$ называется *неограниченной*, если

$$\forall M > 0 \quad \exists x \in X : \quad |f(x)| > M.$$

[Перейти к основному тексту]

Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Неправильная рациональная функция

Если $m \geqslant n$, то рациональная функция называется *неправильной*.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывная в области функция

Функция, непрерывная в каждой точке области, называется *непрерывной в этой области*. [Перейти к основному тексту]

Непрерывная на отрезке функция

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, непрерывна справа в точке $x = a$ и непрерывна слева в точке $x = b$.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции двух переменных по одной из переменных

Если функция $\varphi(x) = f(x, y_0)$ непрерывна в точке x_0, то говорят, что функция $f(x, y)$ *непрерывна в точке (x_0, y_0) по переменной x*. Аналогично вводится понятие *непрерывности функции f в точке (x_0, y_0) по переменной y*.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x, y)$, определенная в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности, называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если в этой точке существует предел функции $f(x, y)$, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции на языке приращений

Функция f называется *непрерывной в точке a*, если ее приращение в этой точке есть БМФ, когда приращение аргумента стремится к нулю.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функции

Функция f, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, включая саму точку a, называется *непрерывной в точке a*, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

т.е. предел функции и ее значение в точке a равны.

[Перейти к основному тексту]

Непрерывность функций двух переменных на языке приращений

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если ее полное приращение есть *величина бесконечно малая*, когда приращения независимых переменных стремятся к нулю, то есть

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Непрерывные справа и слева функции

Функция f называется *непрерывной справа в точке a* (рисунок 2.46), если

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a),$$

и *непрерывной слева в точке a* (рисунок 2.47), если

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a).$$

[Перейти к основному тексту]

Несобственный интеграл второго рода

Несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to b-0}\int\limits_a^{\varepsilon} f(x)\,dx,$$

т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to b-0}\int\limits_a^{\varepsilon} f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Несобственный интеграл первого рода

Несобственным интегралом первого рода или *несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

называется предел

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)\,dx,$$

т.е.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Неэлементарные функции

Функции, не являющиеся элементарными, называются *неэлементарными*.

[Перейти к основному тексту]

Неявная функция

Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, называется *неявной*. [Перейти к основному тексту]

Нормаль

Прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и перпендикулярная касательной, называется *нормалью* к графику в этой точке.

[Перейти к основному тексту]

Нулевая матрица

Матрица O называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

[Перейти к основному тексту]

Нулевое решение однородной системы линейных уравнений

Решение (8.12) однородной системы линейных уравнений называется *нулевым*, или *тривиальным*. [Перейти к основному тексту]

Область сходимости

Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*. [Перейти к основному тексту]

Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется *обратной* для A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица. [Перейти к основному тексту]

Обратная функция

Пусть дана функция $f : X \to Y$. Если каждому $y \in Y$ соответствует единственное значение $x \in X$, для которого $y = f(x)$ (смотрите рисунок 2.8), то задана функция $\varphi : Y \to X$ такая, что $x = \varphi(y)$. Эта функция называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается в виде

$$x = \varphi(y) = f^{-1}(y).$$

Поскольку функция $f(x)$ является обратной к $f^{-1}(x)$, то функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ еще называют *взаимно обратными*. [Перейти к основному тексту]

Общее решение дифференциального уравнения

Общим решением ДУ (6.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C)$$

зависящая от одной произвольной постоянной C, и такая, что выполняются условия:
1) она удовлетворяет уравнению (6.1) при любых допустимых значениях постоянной C;
2) каково бы ни было начальное условие (6.2), можно подобрать значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному начальному условию (6.2).

[Перейти к основному тексту]

Общее уравнение прямой

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой*, или *полным уравнением прямой*. При различных значениях A, B, C оно определяет всевозможные прямые. [Перейти к основному тексту]

Общий интеграл

Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* ДУ первого порядка; соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном значении постоянной C, называется *частным интегралом* ДУ.

[Перейти к основному тексту]

Ограниченная последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant M$.

[Перейти к основному тексту]

Ограниченная функция

Функция $f : X \to Y$ называется *ограниченной*, если

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in X \quad |f(x)| \leqslant M.$$

[Перейти к основному тексту]

Одноресурсная производственная функция

Производственная функция одной переменной называется *одноресурсной*.

[Перейти к основному тексту]

Однородная функция

Функция $P(x, y)$ называется *однородной степени m*, если для любых t она удовлетворяет равенству

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y).$$

[Перейти к основному тексту]

Однородное дифференциальное уравнение

ДУ (6.7) называют *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной степени.

[Перейти к основному тексту]

Однородные и неоднородные системы линейных уравнений

Однородной называется система линейных уравнений, все свободные члены b_i которой равны нулю. В противном случае, то есть когда хотя бы один из свободных членов b_i отличен от нуля, система называется *неоднородной*.

[Перейти к основному тексту]

Однородные функции

Пусть множество $D \in \mathbb{R}$ вместе с каждой точкой $(x; y)$ содержит точки $(tx; ty)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *однородной* степени α, если

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y).$$

Число α называется *степенью однородности*.

[Перейти к основному тексту]

Односторонние пределы на бесконечности

Число b называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*, если для любой такой ББП $\{x_n\}$, что $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Аналогично определяется *предел функции при $x \to -\infty$*. Для записи таких пределов применяются обозначения:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

[Перейти к основному тексту]

Односторонние пределы

Правый и левый пределы функции в точке называются *односторонними*.

[Перейти к основному тексту]

Окрестность точки на плоскости

Окрестностью точки M_0 на плоскости называется любой открытый круг, содержащий эту точку. [Перейти к основному тексту]

Окрестность точки

Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку. *ε-окрестностью* точки $x = a$ называется интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

[Перейти к основному тексту]

Окружность

Окружность — это множество точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии r, называемом *радиусом* окружности, от точки $C(x_0, y_0)$ — *центра* (смотрите рисунок 1.9). [Перейти к основному тексту]

Определённая и неопределённая системы

Совместная система называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения.

[Перейти к основному тексту]

Определенный интеграл

Если интегральная сумма (4.17) имеет предел, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Определители второго порядка

Определителем второго порядка квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} //a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

[Перейти к основному тексту]

Определители первого порядка

Определитель первого порядка квадратной матрицы $A = (a_{11})$ равен единственному элементу этой матрицы, а именно $\det A = |A| = a_{11}$.

[Перейти к основному тексту]

Определители третьего порядка

Определителем третьего порядка квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} lll a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (9.1)$$

[Перейти к основному тексту]

Определитель произвольного порядка

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется сумма произведений элементов первой строки матрицы A на их алгебраические дополнения:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}.$$

[Перейти к основному тексту]

Оси гиперболы

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, где $B_1 = (0, -b)$ и $B_2 = (0, b)$ (рисунок 1.12), а также их длины $2a$ и $2b$, называют *действительной* и *мнимой осями* гиперболы.

[Перейти к основному тексту]

Оси эллипса

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 (рисунок 1.10), а также их длины $2a$ и $2b$, называют *большой* и *малой осями* эллипса.

[Перейти к основному тексту]

Основная матрица системы

Системе линейных уравнений (8.10) ставят в соответствие матрицу и два вектора-столбца

$$A = \begin{pmatrix} llll a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} c x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

называемые соответственно *основной матрицей*, *вектором неизвестных* и *вектором свободных членов*.

[Перейти к основному тексту]

Основной прямоугольник гиперболы

Прямоугольник, образованный прямыми $x = -a$, $x = a$, $y = -b$ и $y = b$ (рисунок 1.12), называется *основным прямоугольником* гиперболы.

[Перейти к основному тексту]

Особое решение дифференциального уравнения

Если во всех точках решения $y = \psi(x)$ уравнения (6.1) условие единственности не выполняется, то такое решение называется *особым*.

[Перейти к основному тексту]

Остаток числового ряда

Выражение вида

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k$$

также представляет собой ряд, и он называется i-ым *остатком ряда* (7.1) (обозначается r_i). [Перейти к основному тексту]

Остаточный член в форме Лагранжа

Функция $R_n(x)$, определяемая формулой (3.24), называется *остаточным членом в форме Лагранжа*. [Перейти к основному тексту]

Ось параболы

Ось абсцисс, которая является осью симметрии параболы, называется *осью параболы*. [Перейти к основному тексту]

Парабола

Парабола (смотрите рисунок 1.14) — это геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px, \quad p > 0,$$

называемому *каноническим уравнением параболы*.

[Перейти к основному тексту]

Параметр параболы

Расстояние от фокуса до директрисы, равное p, называется *параметром* параболы.

[Перейти к основному тексту]

Первообразная

Функция F называется *первообразной* для функции f на некотором промежутке X, если $\forall x \in X$: $F'(x) = f(x)$.

[Перейти к основному тексту]

Первый замечательный предел

Равенство (2.5) называется *первым замечательным пределом*.

[Перейти к основному тексту]

Перестановочные матрицы

Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными*.

[Перейти к основному тексту]

Периодическая функция

Функция $f : X \to Y$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для всякого $x \in X$ значение $x + T$ также принадлежит области определения X и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называют *периодом функции*. Наименьший положительный период называют *основным периодом*.

[Перейти к основному тексту]

Полное приращение функции

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Полуоси гиперболы

Отрезки OA_2 и OB_2 (рисунок 1.12), представляющие собой половины действительной и мнимой осей, и их длины a и b называют *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

[Перейти к основному тексту]

Полуоси эллипса

Отрезки OA_2 и OB_2 (рисунок 1.10), представляющие собой половины большой и малой осей, и их длины a и b называют *большой* и *малой полуосями* эллипса.

[Перейти к основному тексту]

Последовательность числовая

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена *числовая последовательность*. Числа x_n, $n \in \mathbb{N}$, называют *элементами*, или *членами последовательности*. Для числовой последовательности мы будем использовать следующие обозначения:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots; \quad \{x_n\}; \quad x_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

[Перейти к основному тексту]

Постоянная последовательность

Последовательность x_n называется *постоянной*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R} : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n = a,$$

то есть все элементы последовательности равны некоторому числу a.

[Перейти к основному тексту]

Постоянная функция

Функция, все значения которой равны между собой, называется *постоянной*. Постоянную функцию часто обозначают буквой C.

[Перейти к основному тексту]

Правильная рациональная функция

Если $m < n$, то рациональная функция называется *правильной*.

[Перейти к основному тексту]

Правый предел

Число c называется *правым пределом* функции f в точке $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{y_n\}$, члены которой больше a, соответствующая последовательность $\{f(y_n)\}$ сходится к c (смотрите рисунок 2.43). Символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = c.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел последовательности

Число a называется *предлом* последовательности $\{x_n\}$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым оно бы ни было, существует номер $N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > N_0$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. На языке кванторов это звучит так:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела используется выражение

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции двух переменных на языке окрестностей

Число A называется *пределом* функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, если для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки M_0, что для всех точке $M \neq M_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A.

Это определение выражает *геометрический смысл предела функции двух переменных* (рисунок 5.5). [Перейти к основному тексту]

Предел функции двух переменных по Гейне

Число A называется *пределом* функции f в точке M_0, если для любой последовательности точек плоскости $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к точке M_0 и такой, что $M_n \neq M_0$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к числу A.

Тот факт, что число A является пределом функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, можно записать одним из следующих способов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A, \qquad \lim_{M\to M_0} f(x, y) = A.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции двух переменных по Коши

Число A называется *пределом* функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым оно бы ни было, существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что для всех точек $M(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,$$

выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Другими словами, число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall (x, y),\ 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2,\ |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции на бесконечности

Число b называется *пределом функции f при $x \to \infty$*, или *на бесконечности*, если для любой ББП $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b. Для обозначения предела функции на бесконечности применяется запись:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции на языке окрестностей

Число b называется *пределом* функции f в точке $x = a$, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки b.

Это определение называется *определением предела функции на языке окрестностей* и выражает *геометрический смысл предела функции* (смотрите рисунок 2.42). [Перейти к основному тексту]

Предел функции по Гейне

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x = a$ за исключением, быть может, самой точки a. Возьмем последовательность точек $\{x_n\}$ из этой окрестности, сходящуюся к точке a. Значения функции в точках последовательности, в свою очередь, образуют последовательность $f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots$ (см. рисунок 2.40).

Число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a и такой, что $x_n \neq a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Другими словами, число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$, если

$$\forall\{x_n\},\ x_n \neq a\ (n \in \mathbb{N}),\ \lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Данное определение называется определением *предела функции по Гейне*, или *на языке последовательностей*.

Предел функции f в точке $x = a$ обозначается следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

[Перейти к основному тексту]

Предел функции по Коши

Число b называется *пределом* функции f в точке $x = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым оно бы ни было, существует положительное число δ такое, что для всякого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, число b называется *пределом функции* f в точке $x = a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, \; 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Это определение называется определением *предела функции по Коши*, или *на языке* ε-δ. [Перейти к основному тексту]

Предельная производительность труда

Частную производную $\partial F/\partial L$ производственной функции F называют *предельной производительностью труда*. [Перейти к основному тексту]

Предельная фондоотдача

Частная производная $\partial F/\partial K$ производственной функции F называется *предельной фондоотдачей*. [Перейти к основному тексту]

Предельные полезности

Предельные полезности выражают дополнительное удовлетворение от потребления одной дополнительной единицы блага. Математически это описывается частными производными функции полезности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}.$$

[Перейти к основному тексту]

Приращение аргумента и функции

Разность $x - a$ называют *приращением аргумента* x в точке a и обозначают через Δx, а разность $f(x) - f(a)$ — *приращением функции* f в точке a и обозначают Δy:

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a),$$

или, другими словами, $x = a + \Delta x$, $y = f(a) + \Delta y$.

[Перейти к основному тексту]

Приращение функции по направлению

Приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению l называется величина

$$\Delta_l z = f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0),$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы, задающие направление l (смотрите рисунок 5.8). [Перейти к основному тексту]

Присоединённая матрица

Матрица A^*, транспонированная к матрице алгебраических дополнений квадратной матрицы A, называется *присоединённой к матрице A*.

[Перейти к основному тексту]

Произведение матриц

Произведением согласованных матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ik})$, элемент c_{ik} которой вычисляется как сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sk}.$$

Вычисление элемента c_{ik} проиллюстрировано на рисунке 8.1.

[Перейти к основному тексту]

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число k называется матрица $kA = (ka_{ij})$ того же размера, что и матрица A, полученная умножением всех элементов матрицы A на число k. [Перейти к основному тексту]

Производная n-го порядка

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует.

[Перейти к основному тексту]

Производная второго порядка

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$, если она существует. [Перейти к основному тексту]

Производная по направлению

Производной функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению l называется предел отношения приращения этой функции в точке M_0 по направлению l к величине Δl при стремлении последней к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

[Перейти к основному тексту]

Производная

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. [Перейти к основному тексту]

Производственная функция Кобба — Дугласа

Функция

$$F(K, L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad a > 0,\ 0 < \alpha < 1,$$

выражающая зависимость объема выпускаемой продукции от объема основных фондов K и затрат труда L, называется *производственной функцией Кобба — Дугласа*. [Перейти к основному тексту]

Производственная функция

Производственная функция выражает зависимость результатов производства от обуславливающих его факторов.

[Перейти к основному тексту]

Простейшие рациональные дроби

Простейшими рациональными дробями назовем следуюшие функции

1) $\dfrac{A}{x-a}$;
2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}$;
3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+2px+q}\,dx, \quad p^2 - q < 0$;
4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^k}\,dx, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N},\ p^2 - q < 0$.

[Перейти к основному тексту]

Противоположная матрица

Матрицу $-A = (-1) \cdot A$ будем называть *противоположной* матрице A.

[Перейти к основному тексту]

Равенство матриц

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковых размеров называются *равными*, если они совпадают поэлементно, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ для $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

[Перейти к основному тексту]

Равнобочная гипербола

Если $a = b$, то есть действительная и мнимая полуоси равны, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной*. Её асимптоты образуют прямой угол и являются биссектрисами координатных углов.

[Перейти к основному тексту]

Равномерно сходящийся функциональный ряд

Если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_0$, $N_0 \in \mathbb{N}$, зависящий лишь от ε и не зависящий от x, $x \in D$, такой, что $\forall x \in D$ и $\forall n > N_0$ $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, то говорят, что функциональный ряд (7.1) *равномерно сходится* в области D.

[Перейти к основному тексту]

Радиус сходимости

Число R такое, что при всех x, $|x| < R$ ряд (7.12) сходится, а при всех x, $|x| > R$ ряд (7.12) расходится, называется *радиусом сходимости* ряда (7.12).

[Перейти к основному тексту]

Разность матриц

Разностью матриц A и B одинаковых размеров называется сумма матрицы A и матрицы, противоположной к B, то есть $A - B = A + (-B)$.

[Перейти к основному тексту]

Ранг матрицы

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется *рангом матрицы* A и обозначается $\operatorname{rank} A$. [Перейти к основному тексту]

Расширенная матрица системы

Расширенной матрицей системы (8.10) называется матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} ||||\,|\,|a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

получаемая присоединением к основной матрице вектора-столбца свободных членов.

[Перейти к основному тексту]

Рациональные функции

Простейшими элементарными функциями являются *целая рациональная функция*, или *алгебраический многочлен*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а также *дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество целых и дробных рациональных функций образует класс *рациональных функций*. [Перейти к основному тексту]

Решение дифференциального уравнения

Решением ДУ называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, например, $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ или $y'(x) \equiv f(x, y(x))$. [Перейти к основному тексту]

Решение системы уравнений

Решением системы (8.10) называется набор значений неизвестных

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \ldots, \quad x_n = c_n,$$

обращающих все уравнения системы в верные равенства. *Решить* систему — значит найти все её решения. [Перейти к основному тексту]

Ряд матрицы

Строки и столбцы матриц объединяют общим названием *ряды*.

[Перейти к основному тексту]

Система линейных уравнений

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами*, а b_i — *свободными членами* системы.

[Перейти к основному тексту]

Сложная функция

Пусть заданы функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ (смотрите рисунок 2.11). Функция $\varphi : X \to Z$, определяемая по формуле $\varphi(x) = g(f(x))$, называется *сложной функцией*, или *суперпозицией* функций $y = f(x)$ и $z = g(y)$.

[Перейти к основному тексту]

Смешанные производные

Частные производные по разным переменным, например, z''_{xy} и z''_{yx}, называются *смешанными*.

[Перейти к основному тексту]

Совместные и несовместные системы уравнений

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

[Перейти к основному тексту]

Согласованные матрицы

Две матрицы называются *согласованными*, если число столбцов первой *равно* числу строк второй.

[Перейти к основному тексту]

Соотношения баланса

Уравнения (8.16) называются *соотношениями баланса* и задают *модель Леонтьева многоотраслевой экономики*. [Перейти к основному тексту]

Сопряженные гиперболы

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

задаёт гиперболу, действительной и мнимой осями которой служат соответственно мнимая и действительная оси гиперболы (1.19). Гиперболы (1.19) и (1.21) имеют общие полуоси, асимптоты и основной прямоугольник и называются *сопряженными*. [Перейти к основному тексту]

Стационарная точка

Стационарной точкой функции называется критическая точка, в которой производная $f'(x)$ равна нулю. [Перейти к основному тексту]

Стационарные точки функции двух переменных

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума (5.8), будем называть *стационарными точками*. [Перейти к основному тексту]

Степенной ряд

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

где $c_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots, a \in \mathbb{R}$, называется *степенным рядом*. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$ называются *коэффициентами степенного ряда* (7.11).

[Перейти к основному тексту]

Степень квадратной матрицы

Если $k \in \mathbb{N}$, то *k-й степенью* квадратной матрицы A называется произведение k матриц A:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

По определению считают, что $A^0 = E$.

[Перейти к основному тексту]

Строго возрастающая и строго убывающая последовательности

Если $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей*, если же $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} < x_n$, то *строго убывающей*.

[Перейти к основному тексту]

Строго возрастающие и строго убывающие функции

Функция $f : X \to Y$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) на множестве $A \subset X$, если $\forall\, x_1, x_2 \in A$ из того, что $x_1 < x_2$, следует *строгое* неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. [Перейти к основному тексту]

Строго монотонная последовательность

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*. [Перейти к основному тексту]

Строго монотонная функция

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными*.

[Перейти к основному тексту]

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} cccccccca_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ отличны от нуля.

Ступенчатыми также считаются матрицы, приводимые к виду (8.1) перестановкой параллельных рядов. [Перейти к основному тексту]

Сумма матриц

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *одинаковых* размеров называется матрица $A + B = C_{m\times n} = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме элементов матриц A и B, расположенных на соответствующих местах:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

[Перейти к основному тексту]

Сходимость в точке

Если числовой ряд (7.10) сходится, то говорят, что функциональный ряд (7.9) *сходится в точке* $x = x_0$. В противном случае функциональный ряд (7.9) *расходится в точке* $x = x_0$.

[Перейти к основному тексту]

Сходящаяся и расходящаяся последовательности

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*. Если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

где a — конечное число или бесконечность, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a. [Перейти к основному тексту]

Сходящийся несобственный интеграл

Если предел (4.39) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется *расходящимся*.

[Перейти к основному тексту]

Сходящийся числовой ряд

Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел S, то числовой ряд (7.1) называется *сходящимся* и число S называется *суммой ряда*,

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если же предел последовательности $\{S_n\}$ не существует или бесконечен, то ряд (7.1) называется *расходящимся*. [Перейти к основному тексту]

Таблица эквивалентностей

Таблицей эквивалентностей называется следующий список часто встречаемых пар эквивалентных БМФ. Если $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то при $x \to a$

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x), \qquad \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\log_a\Big(1+\alpha(x)\Big) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}, \qquad \ln\Big(1+\alpha(x)\Big) \sim \alpha(x),$$

$$a^{\alpha(x)-1} \sim \alpha(x)\ln a, \qquad e^{\alpha(x)-1} \sim \alpha(x),$$

$$\Big(1+\alpha(x)\Big)^k \sim k\alpha(x), \qquad \sqrt{1+\alpha(x)} \sim \frac{\alpha(x)}{2}.$$

[Перейти к основному тексту]

Точка безубыточности

Точка безубыточности — это такой такой объем выпуска q, при котором издержки равны выручке: $C(q) = R(q)$. [Перейти к основному тексту]

Точка перегиба

Точка $(x_0; f(x_0))$, $x_0 \in (a; b)$ называется *точкой перегиба* непрерывной функции f, если слева и справа от этой точки функция f имеет разные направления выпуклости. [Перейти к основному тексту]

Точка разрыва функции двух переменных

Точка, в которой функция не определена или определена, но не является непрерывной, называется *точкой разрыва* функции.

[Перейти к основному тексту]

Точка рыночного равновесия

Точка рыночного равновесия $(p_0; Q_0)$ — это точка пересечения линий спроса и предложения (смотрите рисунок 2.39). При этом цена p_0 называется *равновесной ценой*, объем продаж Q_0 называется *равновесным объемом продаж*. [Перейти к основному тексту]

Точка спроса

Точка (x^0, y^0) максимума функции полезности называется *точкой спроса* (смотрите рисунок 5.19). [Перейти к основному тексту]

Точки локального условного максимума и минимума

Точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению связи $g(x, y) = 0$, называется *точкой локального условного максимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для любых точек M из этой окрестности, удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = 0$, выполнено неравенство $f(M) \leqslant f(M_0)$.

Аналогично при определении *точки локального условного минимума* требуется выполнение неравенства $f(M) \geqslant f(M_0)$.

[Перейти к основному тексту]

Точки разрыва

Точками разрыва функции f называются те точки, в которых функция f не является непрерывной. [Перейти к основному тексту]

Транспонированная матрица

Матрица A^T, столбцы которой составлены из строк матрицы A с теми же номерами, называется *транспонированной* к матрице A.

[Перейти к основному тексту]

Треугольная матрица

Квадратная ступенчатая матрица называется *треугольной*.

[Перейти к основному тексту]

Угловой коэффициент прямой

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называют *угловым коэффициентом этой прямой* и обозначают буквой k:

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

[Перейти к основному тексту]

Угол между прямыми

Углом между прямыми L_1 и L_2 называется угол, на который надо повернуть прямую L_1 против часовой стрелки до ее совпадения с прямой L_2.

[Перейти к основному тексту]

Угол наклона прямой

Назовем *углом наклона данной прямой к оси Ox* угол α, на который нужно повернуть ось Ox против часовой стрелки до совпадения с прямой.

[Перейти к основному тексту]

Уравнение линии

Уравнение с двумя неизвестными x и y называется *уравнением линии L*, если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки $M(x, y)$, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никаких точек, не лежащих на этой линии. В таком случае говорят, что уравнение *определяет*, или *задает* линию L.

[Перейти к основному тексту]

Уравнение прямой в отрезках

Уравнение (1.10) называется *уравнением прямой «в отрезках»*. Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат. Эта форма уравнения удобна для геометрического построения прямой.

[Перейти к основному тексту]

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение (1.5) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

[Перейти к основному тексту]

Уравнение, записанное в дифференциалах

Уравнение
$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$
где x и y имеют тот же смысл, что и выше; dx, dy — дифференциалы; $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — заданные функции, называется *уравнением, записанным в дифференциалах*.

[Перейти к основному тексту]

Уравнение, разрешенное относительно производной

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y),$$

называется *разрешенным* относительно y'. [Перейти к основному тексту]

Условно сходящийся ряд

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

расходится.

[Перейти к основному тексту]

Условный экстремум

Задача отыскания *условного экстремума* — это задача о нахождении экстремума целевой функции $z = f(x, y)$ при условии, что переменные x и y подчиняются ограничению $g(x, y) = 0$, называемому *уравнением связи*.

[Перейти к основному тексту]

Фокальные радиусы гиперболы

Расстояния r_1 и r_2 (рисунок 1.12) от точки M гиперболы до ее фокусов F_1 и F_2 называются левым и правым *фокальными радиусами* этой точки.

[Перейти к основному тексту]

Фокальные радиусы эллипса

Расстояния r_1 и r_2 (рисунок 1.10) от точки M эллипса до его фокусов F_1 и F_2 называются левым и правым *фокальными радиусами* этой точки.

[Перейти к основному тексту]

Фокальный радиус параболы

Для любой точки $M(x, y)$ параболы отрезок $r = MF$ (рисунок 1.14) именуется *фокальным радиусом параболы*. [Перейти к основному тексту]

Фокус параболы

Точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ (рисунок 1.14) называется *фокусом* параболы.

[Перейти к основному тексту]

Фокусы гиперболы

Положим

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ (рисунок 1.12) называют *фокусами* гиперболы. Ясно, что $a < c$, т. е. расстояние между фокусами больше действительной оси гиперболы. [Перейти к основному тексту]

Фокусы эллипса

Положим

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

Из (1.17) следует, что $a \geqslant b > 0$, поэтому $0 \leqslant c < a$. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ (рисунок 1.10) называют *фокусами* эллипса.

[Перейти к основному тексту]

Формула Маклорена

Формула (3.25) называется *формулой Маклорена*.

[Перейти к основному тексту]

Формула Тейлора

Формула (3.22) называется *формулой Тейлора* с остаточным членом в форме Лагранжа.

[Перейти к основному тексту]

Функции спроса и предложения

Функции спроса и предложения $D = D(p)$ и $S = S(p)$ задают зависимость спроса и предложения от цены товара p (смотрите рисунок 2.39).

[Перейти к основному тексту]

Функциональный ряд

Ряд вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

где $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ — некоторые функции аргумента x, заданные на множестве X, называется *функциональным рядом*, заданным на множестве X.

[Перейти к основному тексту]

Функция Лагранжа

Функция переменных x, y и λ

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

где $g(x, y)$ — уравнение связи, называется *функцией Лагранжа*, а λ — *множителем Лагранжа*.

[Перейти к основному тексту]

Функция выручки

Функция выручки $R = R(q)$ задает зависимость выручки R от объема выпуска q.

[Перейти к основному тексту]

Функция двух переменных

Пусть D — некоторое множество точек $M(x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Правило f, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x, y) \in D$ единственное число z из множества действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *функцией двух переменных* и обозначается $z = f(x, y)$ либо $f : D \to \mathbb{R}$.

Множество D при этом называется *областью определения функции*. Множество значений, принимаемых функцией в области определения, называется *множеством значений* функции. [Перейти к основному тексту]

Функция издержек

Функция издержек $C = C(q)$ выражает зависимость издержек производства C от объема выпуска q. [Перейти к основному тексту]

Функция полезности двух товаров

Функция полезности $u = u(x, y)$, заданная на пространстве двух благ (товаров), — это субъективная числовая оценка полезности набора товаров (x, y).

[Перейти к основному тексту]

Функция полезности

Функция полезности $u(x)$ дает субъективную числовую оценку полезности некоторого действия. [Перейти к основному тексту]

Функция прибыли

Функция прибыли $P = P(q)$ — это зависимость прибыли P от объема выпуска q. [Перейти к основному тексту]

Функция спроса на товары

Координаты точки спроса есть функции параметров p_1, p_2, R. Они называются *функциями спроса на первый и второй товары* соответственно:

$$x^0 = x^0(p_1, p_2, R), \quad y^0 = y^0(p_1, p_2, R).$$

[Перейти к основному тексту]

Функция

Пусть X и Y — два произвольных множества. Если *каждому* элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие *единственный* элемент y из множества Y, то говорят, что задана *функция* f (смотрите рисунок 2.4). Функцию f, как правило, обозначают одним из следующих способов:

$$y = f(x), \quad f : X \to Y.$$

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом функции*, переменная y — *зависимой переменной*, или *значением функции*. Множество X называют *областью определения*, или *областью существования* функции f и обозначают $D(f)$. Множество всех значений, принимаемых функцией f, когда аргумент x пробегает всю область определения X, называется *множеством значений* функции f обозначается $E(f)$:

$$E(f) = \left\{ y \in Y \;\middle|\; y = f(x), x \in X \right\}.$$

[Перейти к основному тексту]

Центр гиперболы

Начало координат $O(0,0)$ (рисунок 1.12), выступающее в роли центра симметрии гиперболы, называют *центром гиперболы*.

[Перейти к основному тексту]

Центр эллипса

Начало координат $O(0,0)$ (рисунок 1.10), играющее роль центра симметрии эллипса, называют *центром эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Частичная сумма ряда

Сумма первых n членов ряда (7.1) называется *n-ой частичной суммой* данного ряда и обозначается S_n,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

[Перейти к основному тексту]

Частное и общее решения системы уравнений

Каждое отдельное решение неопределённой системы называется *частным*. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

[Перейти к основному тексту]

Частное приращение функции

Частными приращениями функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y в точке $M_0(x_0, y_0)$ называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

[Перейти к основному тексту]

Частное решение дифференциального уравнения

Частным решением ДУ (6.1) называется решение, получаемое из общего решения (6.3) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C. [Перейти к основному тексту]

Частные производные второго порядка

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $M(x, y)$ и в некоторой ее окрестности. Если функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ сами могут быть продифференцированы, то их частные производные по переменным x и y называются *частными производными второго порядка* и обозначаются следующим образом:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

[Перейти к основному тексту]

Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафиксировав переменную $y = y_0$, получим функцию одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то есть существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется *частной производной* функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке M_0 и обозначается как

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad z'_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0).$$

Аналогично определяется *частная производная* по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

[Перейти к основному тексту]

Четные и нечетные функции

Функция $f : X \to Y$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве X, называется *четной*, если $\forall x \in X$ верно, что $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $\forall x \in X$ имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$. [Перейти к основному тексту]

Число e

Предел последовательности (2.1), существующий в силу теоремы 2.5, обозначается буквой e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

[Перейти к основному тексту]

Числовая функция

Если $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$, то есть X и Y являются числовыми множествами, то функция $f : X \to Y$ называется *числовой*. [Перейти к основному тексту]

Числовой ряд

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом*. Числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называются *членами ряда*, а a_n — n-ым или *общим членом* ряда (7.1).

[Перейти к основному тексту]

Эквивалентные бесконечно малые функции

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* в окрестности точки a, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В этом случае пишут, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *при* $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Эквивалентные матрицы

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. При этом пишут $A \sim B$.

[Перейти к основному тексту]

Эквивалентные системы уравнений

Две системы называются *эквивалентными*, если совокупности их решений совпадают. В частности, любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

[Перейти к основному тексту]

Эксцентриситет гиперболы

Эксцентриситетом гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

характеризующее её форму. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

[Перейти к основному тексту]

Эксцентриситет эллипса

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется *эксцентриситетом*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

[Перейти к основному тексту]

Эластичность функции двух переменных

Эластичностью функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по переменным x и y называются соответственно пределы

$$E_{zx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta_x z}{z}}{\dfrac{\Delta x}{x}}, \quad E_{zy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\Delta_y z}{z}}{\dfrac{\Delta y}{y}}.$$

[Перейти к основному тексту]

Эластичность

Эластичностью функции $y = f(x)$ относительно переменной x называется величина

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)} f'(x).$$

[Перейти к основному тексту]

Элементарные преобразования

Будем называть *элементарными преобразованиями* матриц

1) перестановку местами двух параллельных рядов;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число k, отличное от нуля;
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

[Перейти к основному тексту]

Элементарные функции

Функция, составленная из основных элементарных функций с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и супепозиции, называется *элементарной функцией*. [Перейти к основному тексту]

Элементы матрицы

Числа a_{ij}, образующие матрицу $A = (a_{ij})$, называются её *элементами*, причём индекс i обозначает *номер строки*, а j — *номер столбца*, где расположен данный элемент. [Перейти к основному тексту]

Эллипс

Эллипс (смотрите рисунок 1.10) — это геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geqslant b > 0,$$

называемому *каноническим уравнением эллипса*.

[Перейти к основному тексту]

Эпсилон-окрестность на плоскости

Внутренность круга с центром в точке M_0 и радиусом ε, то есть множество

$$U(M_0, \varepsilon) = \left\{ (x, y) \,\middle|\, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

называется *ε-окрестностью* точки M_0 (рисунок 5.4).

[Перейти к основному тексту]

Доказательства теорем

Теорема 1.1

Докажем вначале первое утверждение. Если прямая не перпендикулярна оси Ox, то, как было показано в пункте 1.1.2, она определяется уравнением первой степени $y = kx + b$, т.е. уравнением вида (1.9), где $A = k$, $B = -1$ и $C = b$. Если прямая перпендикулярна оси Ox, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине a отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рисунок Д.1). Уравнение такой прямой $x = a$. Оно также имеет вид (1.9), где $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Первое утверждение доказано.

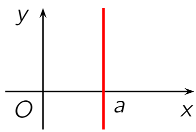

Рисунок Д.1

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение (1.9), где хотя бы один из коэффициентов A или B не равен нулю. Если $B \neq 0$, то (1.9) можно записать в виде

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Полагая $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем уравнение $y = kx + b$, т.е. уравнение вида (1.5), которое определяет прямую. Если $B = 0$, то $A \neq 0$, и (1.9) принимает вид $x = -\frac{C}{A}$. Обозначая $a = -\frac{C}{A}$, получаем $x = a$, т.е. уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox. [Перейти к основному тексту]

Теорема 1.3

Для обоснования *необходимости* докажем, что если точка M принадлежит эллипсу, то сумма ее фокальных радиусов равна $2a$.

Из рисунка 1.10 видно что фокальные радиусы могут быть вычислены по формулам:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{Д.1}$$

Если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1.17), откуда

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \qquad y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + \left(a^2 - x^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2\right)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают соотношение для r_2:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$$

Так как $|x| \leqslant a$, и $0 < c < a$, то $|\frac{c}{a}x| \leqslant a$. Следовательно, выражения под знаками модуля неотрицательны, и

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x. \tag{Д.2}$$

Складывая r_1 и r_2, убеждаемся в справедливости равенства (1.18).

Для доказательства *достаточности* убедимся, что всякая точка M, сумма фокальных радиусов которой равна $2a$, принадлежит эллипсу.

В самом деле, согласно (Д.1)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем левую и правую части в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Полученное равенство снова возведем в квадрат:

$$a^2\Big((x-c)^2+y^2\Big)=(a^2-cx)^2,$$
$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Поскольку $c^2=a^2-b^2$, то $a^2-c^2=b^2$, и преобразуемое равенство принимает вид:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Деля его левую и правую части на a^2b^2, приходим к каноническому уравнению эллипса (1.17). Таким образом, точка M принадлежит эллипсу.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.4

Докажем *необходимость*. Для этого убедимся, что для всякой точки M гиперболы абсолютная величина разности фокальных радиусов этой точки равна $2a$.

Из рисунка 1.12 видно, что фокальные радиусы гиперболы могут быть вычислены по формулам:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{Д.3}$$

Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболы, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1.19), откуда

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \qquad y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Вычисление r_1 проводим тем же способом, что и при доказательстве теоремы 1.3:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \\ &= \sqrt{\left(x^2 + 2cx + c^2\right) + \left(\frac{c^2}{a^2}x^2 - c^2 - x^2 + a^2\right)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|. \end{aligned}$$

Аналогично находим:

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Так как для гиперболы $|x| \geqslant a$ и $c > a$, то $|\frac{c}{a}x| > a$. Значит, при раскрытии модулей надо смотреть знак выражения $\frac{c}{a}x$, определяемый зна́ком аргумента x. Имеем два случая:

1) для правой ветви гиперболы $x \geqslant a$, и поэтому

$$r_1 = \frac{c}{a}x + a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x - a, \qquad r_1 - r_2 = 2a; \tag{Д.4}$$

2) для левой ветви $x \leqslant -a$,

$$r_1 = -\frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = -\frac{c}{a}x + a, \qquad r_2 - r_1 = 2a. \tag{Д.5}$$

В каждом из этих случаев верно доказываемое равенство (1.20).

Чтобы обосновать *достаточность*, покажем, что всякая точка M, абсолютная величина разности фокальных радиусов которой равна $2a$, принадлежит гиперболе.

В этих условиях согласно (Д.3)

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1.3, возведем левую и правую части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$
$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2.$$

Полученное равенство снова возведем в квадрат:

$$a^2\Big((x-c)^2 + y^2\Big) = (cx - a^2)^2,$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

В данном случае $c^2 = a^2 + b^2$, и после замены $a^2 - c^2 = -b^2$ получим:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Деля левую и правую части на $-a^2b^2$, приходим к каноническому уравнению гиперболы (1.19). Этим доказано, что точка M принадлежит гиперболе.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 1.5

Заметим, что для всякой точки $M(x, y)$ плоскости фокальный радиус r и расстояние до директрисы d вычисляются по формулам (смотрите рисунок 1.14):

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \left|x + \frac{p}{2}\right|, \tag{Д.6}$$

Обоснуем *необходимость*, т. е. докажем, что для всякой точки параболы M фокальный радиус r равен расстоянию до директрисы d.

Если точка $M(x, y)$ принадлежит параболе, то координаты x и y удовлетворяют каноническому уравнению (1.22). Тогда согласно (Д.6)

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \sqrt{\left(x^2 - px + \frac{p^2}{4}\right) + 2px} =$$
$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = d.$$

Для обоснования *достаточности* предположим, что точка M равноудалена от фокуса и директрисы, и докажем, что эта точка принадлежит параболе.

В соответствии с предположением для точки $M(x, y)$ имеет место равенство $r = d$. По формулам (Д.6) это означает, что

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Преобразуем это уравнение, возводя обе части в квадрат:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \quad y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Применяя к правой части последнего равенство формулу разности квадратов, получаем уравнение $y^2 = 2px$, которое представляет собой каноническое уравнение параболы (1.22). [Перейти к основному тексту]

Свойства бесконечно малых последовательностей

Свойство 1

Достаточно получить свойство для суммы двух БМП. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть БМП. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. В соответствии с определением БМП для всякого положительного числа, в том числе и для $\frac{\varepsilon}{2}$, существуют номера N_1 и N_2 такие, что

$$\forall\, n > N_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad \forall\, n > N_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагаем $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall\, n > N_0$ будем иметь, что

$$|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n + y_n| < \varepsilon.$$

По определению это означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ есть БМП.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Пусть последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая. Докажем ее ограниченность. По определению БМП для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 1$, существует такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_0$ имеет место неравенство $|x_n| < 1$. Положим теперь

$$M = \max\Big\{1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_0}|\Big\}.$$

Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ будет $|x_n| \leqslant M$. Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. [Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно малая и ограниченная последовательности. Докажем, что последовательность $\{x_n y_n\}$ бесконечно малая. Для этого зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такое число $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_0$ будет $|x_n y_n| < \varepsilon$.

По определению ограниченной последовательности

$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leqslant M.$$

По определению БМП для всякого положительного числа, в том числе и для ε/M, существует такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всякого $n > N_0$ верно неравенство $|x_n| < \varepsilon/M$.

Но тогда при $n > N_0$ будет также верна оценка

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

доказывающая свойство. [Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Справедливость этого свойства следует из того, что всякая БМП является ограниченной последовательностью, а произведение ограниченной на БМП есть БМП. [Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Из определения БМП следует, что каким бы малым мы не выбрали число $\varepsilon > 0$, имеет место неравенство $|a| < \varepsilon$. А это возможно только в том случае, когда $a = 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.1

Пусть $\{x_n\}$ — ББП, все члены которой отличны от нуля. Докажем, что последовательность $\{1/x_n\}$ есть БМП. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению ББП для всякого $A > 0$, в том числе для $A = 1/\varepsilon$,

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В этих условиях $|1/x_n| < 1/A = \varepsilon$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ мы смогли подобрать такой номер $N_0 \in \mathbb{N}$, что при $n > N_0$ верно неравенство $|1/x_n| < \varepsilon$. В соответствии с определением это и означает, что последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно малая.

Пусть теперь $\{x_n\}$ — БМП, все члены которой отличны от нуля. Зафиксируем $A > 0$. По определению БМП для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = 1/A$,

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n| < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

В этих условиях $|1/x_n| > 1/\varepsilon = A$. Таким образом, последовательность $\{1/x_n\}$ бесконечно большая. [Перейти к основному тексту]

Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1

Необходимость. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n - a\}$ есть БМП.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n - a\}$ есть БМП. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Предположим противное. Пусть

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad a \neq b.$$

Тогда последовательности $\{x_n - a\}$ и $\{x_n - b\}$ есть БМП. Обозначим $x_n - a = \alpha_n$, $x_n - b = \beta_n$. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — БМП. Имеем $x_n = a+\alpha_n$, $x_n = b+\beta_n$. Отсюда получим, что $a+\alpha_n = b+\beta_n$ и $a-b = \beta_n-\alpha_n$. Так как $\{\beta_n - \alpha_n\}$ есть БМП, то в соответствии со свойством 5 БМП имеем $b - a = 0$, т. е. $b = a$. [Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Действительно, сходящаяся к a последовательность $\{x_n\}$ представима в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — БМП. По свойству 2 ограниченности БМП

$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_n| \leqslant M.$$

В этих условиях

$$|x_n| = |a + \alpha_n| \leqslant |a| + |\alpha_n| \leqslant |a| + M,$$

что и доказывает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Докажем пункты а) и в). По свойству 1

$$x_n - a = \alpha_n, \quad y_n - b = \beta_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — БМП.

Для доказательства пункта а) покажем, что $\{(x_n+y_n)-(a+b)\}$ является БМП. В самом деле,

$$(x_n + y_n) - (a + b) = (x_n - a) + (y_n - b) = \alpha_n + \beta_n.$$

По свойству 1 БМП сумма двух БМП $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ сама является бесконечно малой, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать пункт в), покажем что бесконечно малой является последовательность $\{x_n y_n - ab\}$:

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a) = x_n\beta_n + b\alpha_n.$$

В силу свойства 3 сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Таким образом, каждое из слагаемых в правой части по свойству 3 БМП ограничено как произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую. Сумма же двух БМП есть БМП по свойству 1 БМП.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.2

Предположим противное, пусть $a < b$. По определению предела последовательности для всякого положительного числа, в том числе и для $\varepsilon = b - a$,

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n > N_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon = b - a,$$

или

$$-(b - a) < x_n - a < b - a.$$

Из правого неравенства получаем: $\forall\, n > N_0$ имеет место неравенство $x_n < b$, что противоречит условию теоремы. [Перейти к основному тексту]

Следствие 2.1

Действительно, начиная с некоторого номера, будем иметь, что $y_n - x_n \geqslant 0$. Следовательно, по теореме 2.2

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) \geqslant 0,$$

и по свойству 4 сходящихся последовательностей

$$\lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant 0.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.5

Покажем, что последовательность (2.1) возрастает. Действительно, с помощью формулы бинома Ньютона можно записать:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \ldots \\ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (Д.7)$$

Теперь запишем по этой же формуле $(n+1)$-й член:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Сравним члены последовательности x_n и x_{n+1}. Очевидно, что

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Поэтому первые n слагаемых x_{n+1} не меньше соответствующих слагаемых x_n. Учитывая, что x_{n+1} содержит еще одно дополнительное неотрицательное слагаемое, получим, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $x_n < x_{n+1}$, то есть последовательность x_n возрастает.

Далее докажем, что рассматриваемая последовательность (2.1) ограничена. Снова воспользуемся формулой (Д.7), откуда следует, что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Так как для $n = 3, 4, \ldots$ имеет место неравенство $n! \geqslant 2^{n-1}$, то

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Применим формулу суммы геометрической прогрессии:

$$x_n < 1 + \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{Д.8}$$

Ограниченность последовательности x_n доказана.

Будучи монотонной и ограниченной, последовательность (2.1) сходится по теореме 2.4. [Перейти к основному тексту]

Свойства БМФ

Свойство 1

Достаточно доказать данное свойство для суммы двух БМФ. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$. Докажем, что $\alpha(x)+\beta(x)$ — тоже БМФ при $x \to a$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то

$$\exists\,\delta_1 > 0 : \quad \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta_1, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для $\beta(x)$

$$\exists\,\delta_2 > 0 : \quad \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta_2, \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всякого x, удовлетворяющего условию $0 < |x-a| < \delta$, выполнены менее обременительные условия $0 < |x-a| < \delta_1$ и $0 < |x-a| < \delta_2$ и поэтому

$$\Big|\alpha(x)+\beta(x)\Big| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, мы доказали, что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \quad \forall\, x,\ 0 < |x-a| < \delta, \quad \Big|\alpha(x)+\beta(x)\Big| < \varepsilon.$$

Это и означает, что сумма $\alpha(x)+\beta(x)$ является БМФ при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Пусть функция $\alpha(x)$ бесконечно малая. Согласно определению для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе и для $\varepsilon = 1$,

$$\exists\,\delta > 0: \quad \forall\,x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = 1.$$

Итак, $\alpha(x)$ ограничена числом 1 в δ-окрестности точки a.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Пусть $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, $f(x)$ — ограниченная в некоторой окрестности точки a функция. Докажем, что произведение $\alpha(x)f(x)$ есть БМФ.

По условию существует $\delta_1 > 0$, что функция $f(x)$ ограничена в δ_1-окрестности точки a. Отсюда следует, что

$$\exists M > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f(x)| < M.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, то для всякого положительного числа, в том числе и для ε/M,

$$\exists \delta_2 > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Положим теперь $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ окажется, что

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

откуда и следует, что $\alpha(x)f(x)$ есть БМФ. [Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Справедливость этого свойства следует из свойств 2 и 3.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Заметим, что постоянная функция, очевидно, ограничена, и применим свойство 3.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.7

Пусть $\alpha(x)$ — такая БМФ, что $\alpha(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Зафиксируем $A > 0$. По определению БМФ для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = 1/A$,

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{A}.$$

При этом $|1/\alpha(x)| > 1/\varepsilon = A$. Значит, функция $1/\alpha(x)$ бесконечно большая.

Пусть $f(x)$ есть ББФ. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению ББФ для всякого $A > 0$, в том числе для $A = 1/\varepsilon$,

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x)| > A = \frac{1}{\varepsilon}.$$

В таких условиях $|1/f(x)| < 1/A = \varepsilon$, т.е. функция $1/f(x)$ бесконечно малая.

[Перейти к основному тексту]

Свойства предела функции

Свойство 1

По определению функция $f(x)$ имеет предел b в точке a тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

А это равносильно тому, что функция $\alpha(x) = f(x) - b$ бесконечно малая при $x \to a$. [Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Предположим противное. Пусть

$$b = \lim_{x\to a} f(x), \quad c = \lim_{x\to a} f(x), \quad b \neq c.$$

Тогда по свойству 1

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad f(x) = c + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$. Приравняем правые части:

$$b + \alpha(x) = c + \beta(x), \quad b - c = \beta(x) - \alpha(x).$$

По свойству 1 БМФ сумма $\beta(x) - \alpha(x)$ двух БМФ является БМФ:

$$\lim_{x\to a}\Big(\beta(x) - \alpha(x)\Big) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$b - c = \lim_{x\to a}(b - c) = \lim_{x\to a}\Big(\beta(x) - \alpha(x)\Big) = 0.$$

Значит $b = c$, что и доказывает единственность предела.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

По свойству 1 имеющая предел b в точке a функция f представима в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$. По свойству 2 БМФ $\alpha(x)$ ограничена в некоторой δ-окрестности точки a, т.е.

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| \leqslant M.$$

Тогда в той же окрестности

$$|f(x)| = |b + \alpha(x)| \leqslant |b| + |\alpha(x)| \leqslant |b| + M,$$

Таким образом, функция f в δ-окрестности точки a ограничена числом $M_1 = |b| + M$. [Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Функция, имеющая предел при $x \to a$, по свойству 3 ограничена в некоторой окрестности точки a. Значит, по свойству 3 БМФ ее произведение на БМФ при $x \to a$ является БМФ при $x \to a$. [Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad b \neq 0.$$

По свойству 1 имеет место представление $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$. По определению БМФ для всякого $\varepsilon > 0$, в том числе для $\varepsilon = |b|/2$,

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}.$$

Тогда для тех же x

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|b + \alpha(x)|} \leqslant \frac{1}{|b| - |\alpha(x)|} \leqslant \frac{1}{|b| - \dfrac{|b|}{2}} = \frac{1}{\dfrac{|b|}{2}} = \frac{2}{|b|}.$$

Следовательно, в δ-окрестности точки a функция $1/f(x)$ ограничена числом $M = 2/|b|$. [Перейти к основному тексту]

Свойство 6

Пусть $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to a$, $f(x)$ имеет отличный от нуля предел при $x \to a$. Тогда функция

$$\frac{\alpha(x)}{f(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}.$$

является бесконечно малой при $x \to a$ как произведение БМФ на ограниченную в силу свойства 5 функцию. [Перейти к основному тексту]

Свойство 7

По свойству 1

$$f(x) - b = \alpha(x), \quad g(x) - c = \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — БМФ при $x \to a$.

Для доказательства пункта а) по свойству 1 достаточно показать, что разность $\big(f(x) + g(x)\big) - (b + c)$ является БМФ при $x \to a$. В самом деле,

$$\big(f(x) + g(x)\big) - (b + c) = \big(f(x) - b\big) + \big(g(x) - c\big) = \alpha(x) + \beta(x).$$

По свойству 1 суммы БМФ $\alpha(x) + \beta(x)$ является БМФ при $x \to a$. Доказательство пункта б) проводится аналогично.

Переходя к пункту в), заметим, что

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - bc &= f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc = \\ &= f(x)\big(g(x) - b\big) + c\big(f(x) - b\big) = f(x)\beta(x) + c\alpha(x). \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства есть БМФ при $x \to a$ как сумма двух БМФ. Действительно функция $f(x)\beta(x)$ бесконечно малая по свойству 4, а функция $c\alpha(x)$ бесконечно малая по свойству 5 БМФ.

Пункт г) доказываем по аналогичной схеме:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} &= \frac{cf(x) - bg(x)}{cg(x)} = \frac{cf(x) - bc + bc - bg(x)}{cg(x)} = \\ &= \frac{c\big(f(x) - b\big) - b\big(g(x) - c\big)}{cg(x)} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{cg(x)}. \end{aligned}$$

Согласно пункту в) предел знаменателя равен $c^2 \neq 0$. Числитель является БМФ. Тогда по свойству 6 вся дробь — БМФ при $x \to a$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.8 (о пределе промежуточной функции)

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то

$$\exists\,\delta_1 > 0: \quad \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta_1, \quad |f(x) - b| < \varepsilon,$$

или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Поскольку также $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то

$$\exists\,\delta_2 > 0: \quad \forall\,x,\ 0 < |x-a| < \delta_2, \quad |g(x) - b| < \varepsilon,$$

или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для $0 < |x-a| < \delta$

$$b - \varepsilon < f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x) < b + \varepsilon,$$

или $|\varphi(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.9

Заметим, что здесь имеем *неопределенность* вида $\frac{0}{0}$. Построим окружность радиуса $r = 1$. Возьмем центральный угол с радианной мерой, равной x, где $x \in (0; \pi/2)$. Выполним соответствующие построения (рисунок Д.2). Очевидно, $AB < BC < BD$. Но $AB = \sin x$, $BC = x$, $BD = \operatorname{tg} x$, поэтому $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Преобразуем данное соотношение:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

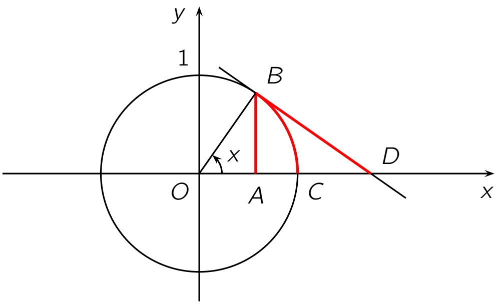

Рисунок Д.2

В силу четности входящих в эти неравенства функций они справедливы и при $x \in (-\pi/2; 0)$. Замечая, что

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

и применяя теорему о двух милиционерах, получим требуемое равенство (2.5).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.14

Действительно, пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a).$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.15 (о непрерывности сложной функции)

Возьмем произвольную последовательность точек $\{x_n\}$, для которой

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x_0.$$

Тогда из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 и определения предела функции по Гейне следует, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Обозначив $f(x_n)$ через y_n для $n \in \mathbb{N}$, получим, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Так как функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0), \quad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0).$$

Итак, доказано, что для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{g(f(x_n))\}$ сходится к $g(f(x_0))$. Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)),$$

что и доказывает теорему.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.17

Рассмотрим, например, функцию $\sin x$. Тогда $\forall a \in \mathbb{R}$ будем иметь:

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a = 2\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} =$$

$$= 2\cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\frac{\Delta x}{2} = \cos\left(a + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\Delta x.$$

Итак, приращение функции Δy представимо в виде произведения трех функций: первая ограничена, вторая согласно формуле (2.5) имеет предел при $\Delta x \to 0$ и третья бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда по свойству 4 предела функции и свойству 3 БМФ приращение Δy является БМФ при $\Delta x \to 0$. Согласно определению непрерывности на языке приращений это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в точке a.

Непрерывность косинуса доказывается аналогично.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.19 (об устойчивости знака непрерывной функции)

Пусть, например, $f(a) > 0$. Тогда по определению непрерывности

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Возьмем $\varepsilon = f(a)$. По определению предела для выбранного нами ε

$$\exists \delta > 0 : \quad \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon = f(a).$$

Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$-f(a) < f(x) - f(a) < f(a), \quad 0 < f(x) < 2f(a).$$

Таким образом, $\forall x \in (a - \delta; a + \delta)$ имеем имеем неравенство $f(x) > 0$, доказывающее теорему.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 2.21 (Больцано—Коши, вторая)

Пусть, например, $f(a) < C < f(b)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, $\varphi(a) = f(a) - C < 0$ и $\varphi(b) = f(b) - C > 0$. Следовательно, к функции φ можно применить первую теорему Больцано—Коши. В соответствии с ней существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $\varphi(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$, или $f(c) = C$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.1

Действительно, обозначим $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Это означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.12

Необходимость следует немедленно, если $f(x) = C$, то

$$f'(x) = (C)' = 0, \quad \forall x \in X.$$

Достаточность. Пусть, $f'(x) = 0$, $\forall x \in X$. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in X$ и возьмем произвольное $x \in X$. К разности $f(x) - f(x_0)$ можно применить формулу конечных приращений (3.19):

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где c — некоторая точка, находящаяся между x и x_0. Но по условию $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in X$. Теорема доказана.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.13

Пусть, например, $f'(x) > 0$ внутри промежутка X. Тогда возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1; x_2]$ к функции f применима формула конечных приращений (3.19):

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1; x_2)$. Так как $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция f на промежутке X является возрастающей. [Перейти к основному тексту]

Теорема 3.15 (первое достаточное условие экстремума)

Пусть производная меняет знак при переходе через точку x_0 с «$+$» на «$-$», т.е. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$: $f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$: $f'(x) < 0$.

Тогда, учитывая достаточное условие монотонности, получаем, что функция f возрастает на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, т.е.

$$f(x_0) > f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0),$$

и убывает на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, т.е.

$$f(x_0) < f(x), \quad \forall x \in (x_0; x_0 + \delta).$$

Из последних двух неравенств и определения 8 следует, что x_0 — точка локального максимума функции f.

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через точку x_0.

Пусть теперь производная не меняет знак при переходе через точку x_0. Предположим, например, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $f'(x) > 0$. Тогда по теореме 3.13 функция f возрастает на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Будем иметь: $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)$, $f(x) < f(x_0)$ и $\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)$, $f(x) > f(x_0)$. Следовательно, точка x_0 не является точкой локального экстремума.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.16 (второе достаточное условие экстремума)

Используя определение второй производной, можем записать

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как точка x_0 является стационарной, то по определению 8 $f'(x_0) = 0$. Значит,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 будет выполняться и следующее неравенство:

$$\frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} > 0.$$

Поэтому, если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) < 0$, если же $\Delta x > 0$, то $f'(x_0 + \Delta x) > 0$. Т.е. при переходе через точку x_0 прозводная меняет знак с «$-$» на «$+$». А это означает , что x_0 — точка локального минимума (см. теорему 3.15).

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x_0) < 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.17 (достаточное условие выпуклости)

Пусть $\forall x \in (a;b)$: $f''(x) > 0$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;b)$. Запишем уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0; f(x_0))$ (см. формулу (3.2)):

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{Д.9}$$

Теперь запишем формулу Тейлора для функции f в точке x_0 с остаточным членом в форме Лагранжа (3.22), $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\theta)(x - x_0)^2,$$

где точка θ находится между x и x_0.

По условию теоремы $\frac{1}{2} f''(\theta)(x - x_0)^2 > 0$. Отсюда можно получить, что

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{Д.10}$$

Так как правые части соотношений (Д.9) и (Д.10) совпадают, то из сравнения их левых частей следует, что значение y ординаты касательной меньше значения функции в точке x. Значит, график функции f находится выше касательной, и функция f является выпуклой вниз.

Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x) < 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 3.20

Необходимость. Пусть график функции f имеет асимптоту $y = kx + l$ при $x \to +\infty$, т.е. справедливо соотношение (3.26). Тогда из этого соотношения имеем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + l + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{l}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (l + \alpha(x)) = l.$$

Достаточность. Пусть существуют пределы (3.27). Из второго равенства имеем, что $f(x) - kx = l + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — БМФ при $x \to +\infty$. Это означает, что равенство (3.26) имеет место.

Теорема доказана. [Перейти к основному тексту]

Свойства неопределенного интеграла

Свойство 1

В силу определения неопределенного интеграла, производной суммы имеет место:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x).$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Используя то, что дифференциал функции $y = f(x)$ находится по формуле $dy = f'(x)\,dx$, получим:

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Применяя свойства дифференциала и определение первообразной, будем иметь

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Пусть F есть первообразная для функции f, т.е. $F'(x) = f(x)$. Так как

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x),$$

то функция kF будет первообразной для функции kf. Значит,

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C = k(F(x) + C_1) = k\int f(x)\,dx.$$

(здесь $C_1 = \frac{1}{k}C$ — некоторая постоянная). [Перейти к основному тексту]

Свойство 5

Пусть F и G — первообразные для функций f и g, т.е.

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x).$$

Так как

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

то функция $F+G$ является первообразной для функции $f+g$. Следовательно,

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 =$$

$$= (F(x) + G(x)) + (C_1 + C_2) = \int (f(x) + g(x))\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.2

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда имеем:

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = (F(x)+C)\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \qquad (Д.11)$$

С другой стороны, рассмотрим на промежутке T сложную функцию $F(\varphi(t))$. По теореме 3.4

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t),$$

т.е. функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(x)\varphi'(t)$ и

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (Д.12)$$

Сравнивая правые части формул (Д.11) и (Д.12), получаем требуемую формулу.

[Перейти к основному тексту]

Замечание 4.3

В рассматриваемом интеграле сделаем замену: $ax + b = t$, $x = \frac{1}{a}t - b$, $dx = \frac{1}{a}\,dt$ и

$$\int f(ax+b)\,dx = \int f(t)\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.3

По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Отсюда получим:

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x). \tag{Д.13}$$

Первообразной для функции $(u(x)v(x))'$ является функция $u(x)v(x)$. По условию теоремы функция также имеет первообразную. Тогда и левая часть равенства (Д.13), функция $u(x)v'(x)$, имеет первообразную, причем,

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int \Big[(u(x)v(x))' - u'(x)v(x)\Big]\,dx =$$
$$= \int (u(x)v(x))'\,dx - \int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойства определенного интеграла

Свойство 2

Построим интегральную сумму для функции $kf(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k.$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k = k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_x)\Delta x_k.$$

Тогда, пользуясь определением определенного интеграла, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} kf(\xi_x)\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Действительно, построив интегральную сумму для $f + g$ на отрезке $[a; b]$, имеем

$$\sigma_{f+g} = \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k) + g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f + \sigma_g.$$

Остается перейти у пределу при $\lambda \to 0$ и получить равенство (4.19).

[Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a; b]$, такое, чтобы точка c была точкой разбиения, например, $c = x_m$. Будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, получим соотношение (4.20).

[Перейти к основному тексту]

Оценки интегралов

Свойство 1

Действительно, интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

такой функции является неотрицательной, так как $f(\xi_k) \geqslant 0$, $\Delta x_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, т.е. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, также будет неотрицательным.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 2

Рассмотрим функцию $g(x) - f(x)$. Очевидно, $\forall x \in [a; b]$: $g(x) - f(x) \geqslant 0$ и в соответствии с предыдущим свойством

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geqslant 0.$$

Остается применить свойство 3 из предыдущего пункта.

[Перейти к основному тексту]

Свойство 3

Действительно,

$$\forall x \in [a, b] : \quad -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

Следовательно,

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

т.е. справедливо неравенство (4.21). [Перейти к основному тексту]

Свойство 4

Воспользовавшись свойством 2 этого пункта, имеем:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx,$$

или

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx.$$

Так как $\int_a^b dx = b - a$, то получим неравенства (4.22).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.4 (о среднем значении определенного интеграла)

Так как функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает своего наименьшего и наибольшего значений, т.е. $\forall x \in [a; b]$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

где $m = \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Тогда в соответствии с предыдущим свойством

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Отсюда имеем

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Теперь, воспользовавшись второй теоремой Больцано—Коши, получим, что существует точка $c \in [a; b]$ такая, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

т.е. справедлива формула (4.23). [Перейти к основному тексту]

Теорема 4.5

Действительно, предположим, что f неограничена на отрезке $[a; b]$. Тогда при любом разбиении отрезка $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ функция будет неограниченной хотя бы на одном отрезке, например, $[x_{j-1}; x_j]$. Следовательно, можно выбрать точку $\xi_j \in [x_{j-1}; x_j]$ и точки $\xi_k \in [x_{k-1};\ x_k]$, $k = 1, 2, \ldots,\ j-1,\ j+1, \ldots, n$ так, чтобы величина $f(\xi_j)\Delta x_j$, а с ней и вся сума $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, были сколь угодно большими. Таким образом, не будет существовать конечного предела интегральных сумм, т.е. функция f не является интегрируемой на отрезке $[a; b]$.

Следовательно, интегрируемая функция ограничена на $[a, b]$. Теорема 4.5 доказана. [Перейти к основному тексту]

Теорема 4.9

Достаточно доказать, что существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x),\quad x\in[a;b].$$

Из определения функции $\Phi(x)$ и свойства определенного интеграла следует:

$$\Phi(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x}f(t)\,dt=\int\limits_a^{x}f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt.$$

Значит,

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x}f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)\,dt-\int\limits_a^{x+\Delta x}f(t)\,dt=\int\limits_a^{x+\Delta x}f(t)\,dt.$$

К полученному интегралу применим теорему о среднем значении. Будем иметь

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\Delta x,$$

где c — некоторая точка, заключенная между x и $x+\Delta x$.

Тогда

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(c)$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(c)=f(x),$$

так как при $\Delta x\to 0$ имеем $c\to x$ и функция f непрерывна в точке $x\in[a;b]$.

Теорема доказана. [Перейти к основному тексту]

Теорема 4.10

Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для непрерывной функции f на $[a; b]$. По теореме 4.9 фунция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной для f на $[a; b]$. В силу того, что две любые первообразные для функции f могут отличаться лишь на постоянную (теорема 4.1):

$$\Phi(x) = F(x) + C, \qquad C = \text{const}, \qquad x \in [a; b]. \tag{Д.14}$$

Положив в (Д.14) $x = a$, получим

$$\Phi(a) = F(a) + C.$$

Но, очевидно, $\Phi(a) = 0$. Значит, $C = -F(a)$.

Поэтому равенство (Д.14) можно записать в виде

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Теперь положим здесь $x = b$ и получим формулу Ньютона—Лейбница (4.26).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 4.12

Очевидно, функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$, так как

$$(u(x)v(x))' = v(x)u'(x) + u(x)v'(x).$$

Следовательно,

$$\int_a^b (v(x)u'(x) + u(x)v'(x))\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b,$$

или

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b (v(x)u'(x).$$

В силу того, что $u'(x)\,dx = du$, $v'(x)\,dx = dv$, эту формулу можно записать в виде (4.30). [Перейти к основному тексту]

Замечание 4.4

По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x_\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A x^{-\alpha}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^A \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1), \quad \alpha \neq 1.$$

Предположим, что $1 - \alpha < 0$, т.е. $\alpha > 1$. Тогда имеем, что $\lim\limits_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1) = -1$ и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha}$, т.е. несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и его значение равно $(\alpha - 1)^{-1}$.

Пусть теперь $1 - \alpha > 0$, т.е. $\alpha < 1$. Тогда $\lim\limits_{A\to+\infty} (A^{1-\alpha} - 1) = +\infty$ и интеграл расходится. Учитывая пример 4.33, заключаем, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha \leqslant 1$.

[Перейти к основному тексту]

Замечание 4.5

В этом интеграле функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ может быть неограниченной в окрестности точки $x = 0$.

По определнию имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 4.35. Этот интеграл расходится. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \bigg|_\varepsilon^1 \right) = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to +0} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

Рассмотрим два случая: $\alpha < 1$, $\alpha > 1$. Если $\alpha < 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = 1$$

и

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Если же $\alpha > 1$, то

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha - 1}} \right) = -\infty.$$

Следовательно, интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \geqslant 1$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.2 (необходимое условие дифференцируемости)

Непрерывность функции z следует из того, что согласно равенству (5.1)

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} A\Delta x + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} B\Delta y + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + {} + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y = A\cdot 0 + B\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0.$$

Чтобы исследовать существование частной производной по x функции z, зафиксируем переменную y. Тогда $\Delta y = 0$, и на основании формулы (5.1) частное приращение

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x.$$

По определению частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Big(A + \alpha(\Delta x, 0)\Big) = A + 0 = A.$$

Аналогично доказывается вторая из формул (5.2).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.4 (о производной сложной функции)

Придадим переменной t приращение Δt. Тогда переменные $x = x(t)$ и $y = y(t)$ получат приращения Δx и Δy, которые, в свою очередь, вызовут приращение Δz функции $z = f(x, y)$. Так как функция z дифференцируема, то по формулам (5.1) и (5.2) ее полное приращение

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

Функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и потому непрерывны, поэтому их приращения Δx и Δx стремятся к нулю, когда Δt стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} +& \\ + \lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x, \Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\beta(\Delta x, \Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \\ = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0\frac{dx}{dt} + 0\frac{dy}{dt}&,\end{aligned}$$

откуда и следует справедливость доказываемой формулы (5.5).

[Перейти к основному тексту]

Теорема 5.5

Для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеют место формулы (5.1) и (5.2), позволяющие представить приращение по направлению (5.6) в виде:

$$\Delta_l z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \gamma(\Delta l)\Delta l,$$

где $\gamma(\Delta l)$ — бесконечно малая функция при $\Delta l \to 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \gamma(\Delta l)\right) =$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.1

По определению n-ая частичная сумма ряда (7.1)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

а m-ая частичная сумма ряда (7.2)

$$\sigma_m = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+m}.$$

Следовательно, $\sigma_m = S_{i+m} - S_i$.

Так как i фиксировано, то предел $\{\sigma_m\}$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_{i+m}$, т.е. имеет предел последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. Теорема доказана. [Перейти к основному тексту]

Теорема 7.2

Докажем, например, второе утверждение. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{и} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty}\sigma_n = S + \sigma.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.3 (необходимое условие сходимости)

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Очевидно, $S_n - S_{n-1} = a_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.4

Докажем, например, достаточность. Пусть последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Заметим, что $S_{n+1} = S_n + a_n \geqslant S_n$, $n \in \mathbb{N}$, так как $a_n \geqslant 0$, т.е. $\{S_n\}$ — возрастающая и ограниченная. Тогда по теореме 2.4 она имеет предел.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.6 (признак Даламбера)

Пусть $q < 1$. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Тогда по определению предела последовательности $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N_0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$$

или

$$q - \varepsilon < \frac{a_n + 1}{a_n} < q + \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall n > N_0$ имеем $a_{n+1} < (q + \varepsilon)a_n$. Отсюда получим:

$$\begin{aligned}
&a_{N_0+2} < (q+\varepsilon)a_{N_0+1},\\
&a_{N_0+3} < (q+\varepsilon)a_{N_0+2} < (q+\varepsilon)^2 a_{N_0+1},\\
&a_{N_0+4} < (q+\varepsilon)a_{N_0+3} < (q+\varepsilon)^3 a_{N_0+1},
\end{aligned}$$

и так далее. Ряд

$$(q+\varepsilon)a_{N_0+1} + (q+\varepsilon)^2 a_{N_0+1} + (q+\varepsilon)^3 a_{N_0+1} + \ldots$$

сходится, так как $q + \varepsilon \in (0, 1)$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=N_0+2}^{\infty} a_n$, а с ним и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (применим теорему 7.1).

Случай $q > 1$ рассматривается аналогично. Если же $q = 1$, то можно привести примеры и сходящихся, и расходящихся рядов.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.13 (Абеля)

По условию теоремы числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$$

сходится. Согласно необходимому условию,

$$\lim_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0.$$

Следовательно, последовательность $\{c_n x_0^n\}$ является ограниченной, т.е. $\exists M > 0$ такое, что, $n = 0, 1, \ldots$ Пусть x такое, что $|x| < |x_0|$. Тогда

$$|c_n x_0^n| \leqslant |c_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant Mq^n, \quad n = 0, 1 \ldots,$$

где $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$$

при таких q сходится. Тогда по признаку сравнения сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|.$$

Теорема доказана. [Перейти к основному тексту]

Следствие 7.1

Действительно, если бы ряд (7.12) сходился в точке x, $|x| > |x_1|$, то по теореме Абеля он сходился бы в точке x_1, что противоречит условию.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 7.14

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| .$$

Применим к нему признак Даламбера. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x| = l|x|.$$

Отсюда следует, что если $l|x| < 1$, $|x| < \frac{1}{l}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ сходится, и ряд (7.12) сходится абсолютно.

Если $l|x| > 1$, то ряд (7.12) расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = l|x| > 1$$

и, следовательно, общий член ряда $c_n x^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Заметим, что если $l = 0$, то $R = \infty$, если же $l = \infty$, то $R = 0$.

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.1

Предположим, что для матрицы A существуют две обратные матрицы: A_1^{-1} и A_2^{-1}. Тогда по определению обратной матрицы

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}E = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Итак, все обратные матрицы совпадают, то есть обратная матрица единственна. [Перейти к основному тексту]

Теорема 8.2

Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная A^{-1}. Тогда $AA^{-1} = E$, и по свойствам 9 и 5 определителей

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$$

Итак, произведение *чисел* $|A|$ и $|A^{-1}|$ не равно нулю. Значит каждое из этих чисел не равно нулю, причём $|A^{-1}| = 1/|A|$.

Достаточность. Ограничимся случаем квадратной невырожденной матрицы A третьего порядка. Пользуясь представлением (8.5), найдём произведение матрицы A на её присоединённую A^*:

$$AA^* = \begin{pmatrix} ccca_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cccA_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}.$$

К элементам, стоящим на главной диагонали полученной матрицы применим теорему Лапласа, а ко всем остальным — теорему аннулирования. Тогда имеем:

$$AA^* = \begin{pmatrix} ccc|A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} ccc1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|E.$$

Аналогично доказывается, что и $A^*A = |A|E$. Итак,

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|}(AA^*) = \frac{1}{|A|}(|A|E) = E, \quad \frac{A^*}{|A|}A = \frac{1}{|A|}(A^*A) = E.$$

Отсюда в силу определения обратной матрицы следует её существование и справедливость представления (8.6). [Перейти к основному тексту]

Теорема 8.3

Домножая левую и правую части первого из уравнений слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Домножая второе уравнение справа на матрицу A^{-1}, аналогично находим, что $X = BA^{-1}$.

Третье уравнение домножим слева на A^{-1} и справа на C^{-1}:

$$A^{-1}AXCC^{-1} = A^{-1}BC^{-1}, \; EXE = A^{-1}BC^{-1}, \; X = A^{-1}BC^{-1}.$$

[Перейти к основному тексту]

Теорема 8.4

Воспользуемся матричной формой записи решения $X = A^{-1}B$, представлением обратной матрицы (8.6) и определением присоединённой матрицы:

$$\begin{pmatrix} /x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} ////A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} /b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} /A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Но выражение $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$ представляет собой разложение определителя (8.14) по элементам i-го столбца, откуда и следует справедливость формул (8.13). [Перейти к основному тексту]

Теорема 8.6

Необходимость. Пусть система имеет ненулевое решение. Предположим от противного, что неравенство $\operatorname{rank} A < n$ неверно. Тогда $\operatorname{rank} A \geqslant n$. Но по свойству 1 ранга матрицы $\operatorname{rank} A \leqslant n$. Отсюда следует, что $\operatorname{rank} A = n$. В этом случае согласно критерию Кронекера — Капелли система имеет единственное решение. Это решение может быть только нулевым, поскольку любая однородная система имеет нулевое решение. Полученный вывод приводит к противоречию.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rank} A < n$. Тогда на основании критерия Кронекера — Капелли система имеет бесконечно много решений, а, значит, и хоть одно ненулевое. [Перейти к основному тексту]

Часть II

Задачи

Глава 1

Аналитическая геометрия

1.1. Прямая на плоскости

1.1.1. Общие задачи

1. Даны точки $M_1(-2;3)$ и $M_2(5;4)$. Найти расстояние d между ними. [Ответ]

2. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки $A(3;-8)$ на расстоянии 5 единиц. [Решение] [Ответ]

3. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(1;4)$ равно 5. [Ответ]

4. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-2;-1)$, $B(6;1)$, $C(3;4)$ прямоугольный.

5. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(0;2)$ и $C(2;-1)$ тупой угол. [Ответ]

6. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках $A(3;5)$ и $C(1;-3)$. Найти его площадь. [Ответ]

7. Даны вершины треугольника $A(-3;6)$, $B(9;-10)$, $C(-5;4)$. Найти координаты центра и радиус описанной окружности. [Ответ]

8. Даны точки $M_1(1;1)$ и $M_2(7;4)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x;y)$, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2. [Ответ]

9. Отрезок с концами $A(1;-5)$ и $B(4;3)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления. [Ответ]

10. Точки $A(2;4)$, $B(-3;7)$ и $C(-6;6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину. [Решение] [Ответ]

11. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2; 6)$, $B(2; 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2; 2)$. Найти координаты двух других вершин. [Ответ]

12. Даны середины сторон треугольника $M(-1; 5)$, $N(1; 1)$, $P(4; 3)$. Найти координаты его вершин. [Ответ]

13. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. [Указание] [Ответ]

14. Даны вершины треугольника: $A(7; 2)$, $B(1; 9)$ и $C(-8; -11)$. Найти расстояние от точки O пересечения медиан треугольника до вершины B. [Ответ]

15. В треугольнике с вершинами $A(2; 3)$, $B(6; 3)$, $C(6; -5)$ найти длину биссектрисы BM. [Указание] [Ответ]

16. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(0; 6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD. [Ответ]

17. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 4)$, $B(-6; 8)$, $C(5; -6)$. Найти площадь этого треугольника. [Ответ]

18. Доказать, что точки $(2; 3)$, $(5; 7)$, $(11; 15)$ лежат на одной прямой. [Решение]

19. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого — точки $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$, $C(-3; 1)$. [Ответ]

20. Найти площадь четырехугольника с вершинами $A(-3; 2)$, $B(3; 4)$, $C(6; 1)$, $D(5; -2)$. [Ответ]

21. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(4; 4)$. На оси Ox найти точку C так, чтобы площадь треугольника ABC была равна 5. [Ответ]

22. Найти уравнение прямой:

1) образующей с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось Oy в точке $(0, -6)$; [Ответ]

2) параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2; [Ответ]

3) параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный -2; [Решение] [Ответ]

4) параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3. [Ответ]

23. Определить, при каком значении α прямая

$$(\alpha^2 - \alpha)x + (2 + \alpha)y - 3\alpha + 1 = 0$$

1) параллельна оси Ox; [Ответ]

2) проходит через начало координат; [Ответ]

24. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; \frac{2}{5})$ и образующей с осью Ox угол, равный $\operatorname{arctg} 3$. [Решение] [Ответ]

25. Равнобедренная трапеция с основаниями 10 и 4 имеет острый угол $\pi/4$. Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание, за ось Oy — ось симметрии трапеции. [Ответ]

26. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -1)$ и параллельной биссектрисе второго координатного угла. [Ответ]

27. Найти уравнение прямой, содержащей биссектрису острого угла, образованного прямыми $y = \sqrt{3}x + 4$ и $y = 4$. [Ответ]

28. Написать уравнение прямой, проходящей через точки:

1) $A(7,4),\ \ B(4,-8)$ [Решение] [Ответ]

2) $A(7,-2),\ \ B(-3,0);$ [Ответ]

3) $A(5,4),\ \ B(14,-8);$ [Ответ]

4) $A(5,-4),\ \ B(0,-8);$ [Ответ]

5) $A(-3,-2),\ \ B(-6,-14);$ [Ответ]

6) $A(5,-4),\ \ B(-4,-16);$ [Ответ]

7) $A(7,-4),\ \ B(10,-8);$ [Ответ]

8) $A(7,-4),\ \ B(-3,4);$ [Ответ]

9) $A(-3,4),\ \ B(-2,8);$ [Ответ]

10) $A(7,-2),\ \ B(5,-10);$ [Ответ]

11) $A(5,-4),\ \ B(2,-1);$ [Ответ]

12) $A(-3,-4),\ \ B(-6,-2);$ [Ответ]

13) $A(7,4),\ \ B(17,12);$ [Ответ]

14) $A(-3,-4),\ \ B(-8,-2);$ [Ответ]

15) $A(7,4),\ \ B(16,-2).$ [Ответ]

29. Дан треугольник с вершинами A, B, C. Написать уравнения сторон треугольника:

1) $A(3,2),\ B(3,8),\ C(6,2);$ [Ответ]

2) $A(1,2),\ B(-2,4),\ C(4,8).$ [Ответ]

30. Найти угловой коэффициент к прямой и ординату точки пересечения ее с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1,1)$ и $B(-2,3)$. [Ответ]

31. Прямая проходит через точки $A(2,3)$ и $B(-4,-1)$ и пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C. [Ответ]

32. Какую абсциссу имеет точка M, лежащая на прямой, проходящей через точки $A(-2,-2)$ и $B(-1,6)$, и имеющая ординату, равную 22? [Ответ]

33. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ так, чтобы расстояния от этой прямой до точек $M_1(2,3)$ и $M_2(4,-5)$ были бы равны. [Ответ]

34. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $D(1,3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-1,4)$, $B(2,3)$, $C(5,8)$? [Ответ]

35. Привести к уравнению прямой с угловым коэффициентом общее уравнение прямой $12x-5y-65=0$. [Ответ]

36. Определить параметры k и b для следующих прямых:

1) $2x+5y-1=0$; [Решение] [Ответ]

2) $7x+2y=0$; [Ответ]

3) $2y-5=0$. [Ответ]

37. При каком значении C прямая $2x-3y+C=0$ пересекает ось Oy в точках с ординатами $b_1=2$; $b_2=-3$? [Ответ]

38. На прямой $2x + y - 4 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3;5)$ и $B(7;1)$. [Ответ]

39. Найти уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3 и 4. [Ответ]

40. Построить прямые, заданные уравнениями:

1) $2x - y - 4 = 0$; [Решение]
2) $2x - 5y + 20 = 0$;
3) $2x + 3y + 8 = 0$;
4) $2x - 3y = 0$;
5) $y + 4 = 0$.

41. Привести к уравнениям в отрезках данные уравнения прямых и построить их:

1) $y = 2x - 3$; [Ответ]
2) $3x - 4y - 12 = 0$; [Ответ]
3) $5x + 2y - 10 = 0$; [Ответ]
4) $3x - 2y - 1 = 0$. [Ответ]

42. Составить уравнение прямой, если точка $M(4,2)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат. [Ответ]

43. Составить уравнение прямой, отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки, если длина отрезка, заключенного между осями координат, равна $7\sqrt{2}$. [Ответ]

44. При каких значениях α и β прямая

$$(\alpha-\beta)x+(2\alpha+\beta)y-1=0$$

отсекает на оси Ox отрезок, равный $1/7$, а на оси Oy — отрезок, равный $1/2$. [Ответ]

45. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,4)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью $S=4$. [Ответ]

46. Через середину отрезка AB, где $A(4,0)$, $B(0,6)$, провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, вдвое больший, чем на оси Oy, и написать ее уравнение. [Ответ]

47. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(2,-6)$ и отсекает на осях Ox и Oy отрезки одинаковой длины, считая каждый отрезок направленным от начала координат. [Ответ]

48. Через точку $M(4,3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Найти точки пересечения этой прямой с осями координат. [Ответ]

49. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $2x-5y+10=0$. [Ответ]

50. При каких значениях C площадь, ограниченная координатными осями и прямой $3x+10y+C=0$, равна 135 квадратных единиц? [Ответ]

51. Найти угол между прямыми:

1) $2x-3y+10=0,\ 5x-y+4=0;$ [Решение] [Ответ]

2) $x-3y-14=0,\ -x+2y-17=0;$ [Ответ]

3) $x - 3y - 9 = 0,\ 3x - y - 6 = 0;$ [Ответ]

4) $x + 3y + 15 = 0,\ -3x - 2y + 15 = 0;$ [Ответ]

5) $2x - 3y - 16 = 0,\ x + y - 1 = 0;$ [Ответ]

6) $-2x - y + 7 = 0,\ -3x - 2y - 3 = 0;$ [Ответ]

7) $-2x + 5y + 24 = 0,\ x - y + 5 = 0;$ [Ответ]

8) $x + y - 5 = 0,\ x + 2y - 13 = 0;$ [Ответ]

9) $2x + 2y + 7 = 0,\ x + y + 2 = 0;$ [Ответ]

10) $-2x - 3y + 3 = 0,\ -x - y + 1 = 0;$ [Ответ]

11) $x - y + 6 = 0,\ -x - y - 8 = 0;$ [Ответ]

12) $2x - 3y + 5 = 0,\ 3x + 2y + 21 = 0;$ [Ответ]

13) $-2x - 5y + 9 = 0,\ 5x - 2y + 19 = 0;$ [Ответ]

14) $x - 5y - 22 = 0,\ 5x - 2y + 37 = 0;$ [Ответ]

15) $x - 5y - 22 = 0,\ -3x - 2y - 3 = 0;$ [Ответ]

16) $2x + 3y + 8 = 0,\ -x - 2y - 5 = 0.$ [Ответ]

52. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(2;1)$, $B(3;1)$, $C(1;2)$. [Ответ]

53. Написать уравнение прямой l_2, проходящей через точку $A(0,2)$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой l_1: $x - 2y + 3 = 0$. [Ответ]

54. Точка $(2;0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x + y - 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон. [Ответ]

55. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 5 = 0$ перпендикулярны.

56. Показать, что прямые $x + y - 1 = 0$ и $2x + 2y - 3 = 0$ параллельны.

57. При каких значениях α следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны?

1) $2x - 3y + 4 = 0$, $\alpha x - 6y + 7 = 0$; [Ответ]

2) $\alpha x - 4y + 1 = 0$, $-2x + y + 2 = 0$; [Ответ]

3) $4x + y - 6 = 0$, $3x + \alpha y - 2 = 0$; [Ответ]

4) $x - \alpha y + 5 = 0$, $2x + 3y + 3 = 0$. [Ответ]

58. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1, 2)$:

1) параллельно прямой $y = 2x - 7$; [Ответ]

2) перпендикулярно прямой $x + 3y - 2 = 0$. [Ответ]

59. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой, соединяющей точки M и N:

1) $A(3, 1)$, $M(5, -2)$, $N(4, -1)$; [Решение] [Ответ]

2) $A(-1, -3)$, $M(5, 4)$, $N(2, 5)$; [Ответ]

3) $A(3, -3)$, $M(-3, -4)$, $N(-6, -10)$; [Ответ]

4) $A(-1, 1)$, $M(-3, -2)$, $N(0, 2)$; [Ответ]

5) $A(2, 1)$, $M(5, -4)$, $N(0, -2)$; [Ответ]

6) $A(-1, -3)$, $M(5, 4)$, $N(20, 16)$; [Ответ]

7) $A(-1, -3)$, $M(-3, 4)$, $N(0, 6)$. [Ответ]

60. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой, соединяющей точки M и N:

1) $A(-1,1)$, $M(-3,-4)$, $N(-4,-5)$; [Решение] [Ответ]

2) $A(2,-3)$, $M(-3,4)$, $N(-9,6)$; [Ответ]

3) $A(3,1)$, $M(7,-4)$, $N(6,-8)$; [Ответ]

4) $A(-1,1)$, $M(5,-2)$, $N(8,0)$; [Ответ]

5) $A(3,2)$, $M(5,-2)$, $N(7,2)$; [Ответ]

6) $A(-1,-3)$, $M(-3,-2)$, $N(-8,-1)$; [Ответ]

7) $A(2,-3)$, $M(-3,-2)$, $N(7,2)$. [Ответ]

61. Даны вершины треугольника $A(6;-6)$, $B(2;-3)$, $C(8;5)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины B. [Решение] [Ответ]

62. При каком значении α прямые

$$(\alpha+1)x+(3-\alpha)y-8=0, \quad (\alpha-3)x+(2\alpha-3)y=0$$

взаимно перпендикулярны? [Ответ]

63. Даны стороны треугольника: $x+3y-8=0$ (AB), $y-x=0$ (BC), $7x+5y-8=0$ (AC). Найти уравнение высоты этого треугольника, проведенной из вершины B. [Ответ]

64. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. [Ответ]

65. Даны вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(-6,2)$ и точка $O(1,2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C. [Ответ]

66. Найти расстояние от точки $(2;1)$ до прямой $3x+4y-5=0$. [Ответ]

67. В треугольнике ABC найти длину высоты AD:

1) $A(-8,-5)$, $B(-2,5)$, $C(-5,2)$; [Решение] [Ответ]
2) $A(-6,6)$, $B(-2,-4)$, $C(-5,-1)$; [Ответ]
3) $A(-4,15)$, $B(-2,5)$, $C(-6,9)$; [Ответ]
4) $A(-6,11)$, $B(3,-4)$, $C(7,-7)$; [Ответ]
5) $A(-8,-19)$, $B(-2,-4)$, $C(-10,-12)$; [Ответ]
6) $A(-3,15)$, $B(3,5)$, $C(5,1)$; [Ответ]
7) $A(9,11)$, $B(3,-4)$, $C(7,-3)$; [Ответ]
8) $A(9,11)$, $B(3,-4)$, $C(0,-1)$; [Ответ]
9) $A(9,-5)$, $B(3,5)$, $C(9,11)$; [Ответ]
10) $A(7,-10)$, $B(-2,5)$, $C(-11,17)$; [Ответ]
11) $A(4,20)$, $B(-2,5)$, $C(-6,1)$; [Ответ]
12) $A(-3,-10)$, $B(3,5)$, $C(5,1)$; [Ответ]
13) $A(-3,15)$, $B(3,5)$, $C(-3,2)$; [Ответ]
14) $A(-11,-10)$, $B(-2,5)$, $C(-8,11)$; [Ответ]
15) $A(6,20)$, $B(3,5)$, $C(6,6)$. [Ответ]

68. Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Найти площадь этого квадрата. [Ответ]

69. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 20 = 0$ и $6x + 8y + 5 = 0$ [Ответ]

70. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x - 12y - 65 = 0$ и $5x - 12y + 26 = 0$. Найти площадь квадрата. [Ответ]

71. Даны уравнения оснований трапеции: $3x - 4y - 15 = 0$, $3x - 4y - 35 = 0$. Найти длину ее высоты. [Ответ]

72. Через точку $M(1; 2)$ проведена прямая так, что расстояние от нее до точки $P(6; 2)$ равно 4. Найти угловой коэффициент этой прямой. [Ответ]

73. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от нее до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, и осью Ox равен $\frac{3}{4}\pi$. [Ответ]

74. Найти координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3, 4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$. [Ответ]

75. Найти координаты точки, симметричной точке $A(-2, -2)$ относительно прямой $x + y - 4 = 0$. [Ответ]

76. Составить уравнения биссектрис углов, образованных пересекающимися прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $5x + 12y - 2 = 0$. [Решение] [Ответ]

77. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. [Указание] [Ответ]

78. Исследовать взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x + 5y - 9 = 0,\ 10x - 6y + 4 = 0;$ [Ответ]

2) $2x + 5y - 2 = 0,\ x + y + 4 = 0;$ [Ответ]

3) $2y = x - 1,\ 4y - 2x + 2 = 0;$ [Ответ]

4) $x + 8 = 0,\ 2x - 3 = 0;$ [Ответ]

5) $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} = 1,\ y = \dfrac{1}{2}x + 2;$ [Ответ]

6) $x + y = 0,\ x - y = 0;$ [Ответ]

7) $y + 3 = 0,\ 2x + y - 1 = 0;$ [Ответ]

8) $y = 3 - 6x,\ 12x + 2y - 5 = 0;$ [Ответ]

9) $2x + 3y = 8,\ x + y - 3 = 0;$ [Ответ]

10) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{3}{4}y - 1 = 0,\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{2}{3}y + 2 = 0.$ [Ответ]

79. Найти точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$:

1) $A(-10, -16),\ B(-15, -2),\ C(-3, 12),\ D(20, 19);$ [Решение] [Ответ]

2) $A(-4, -6),\ B(14, 3),\ C(1, 14),\ D(-26, 11);$ [Ответ]

3) $A(-4, 16),\ B(-11, 0),\ C(1, -4),\ D(4, 6);$ [Ответ]

4) $A(-2, -4),\ B(18, 3),\ C(7, 14),\ D(-22, 11);$ [Ответ]

5) $A(-6, 18),\ B(18, 12),\ C(15, -10),\ D(-22, -4);$ [Ответ]

6) $A(-6, -14),\ B(13, -10),\ C(15, 14),\ D(-22, 18);$ [Ответ]

7) $A(-2, -2),\ B(-15, 8),\ C(-7, 8),\ D(0, 2);$ [Ответ]

8) $A(14, -4),\ B(14, -6),\ C(-13, 14),\ D(-26, 26);$ [Ответ]

9) $A(-4,-8)$, $B(-11,-6)$, $C(1,2)$, $D(24,8)$; [Ответ]

10) $A(4,-16)$, $B(-16,7)$, $C(-3,12)$, $D(24,-1)$. [Ответ]

80. При каких значениях a прямые $ax-4y=6$ и $x-ay=3$

1) пересекаются; [Ответ]

2) параллельны; [Ответ]

3) совпадают. [Ответ]

81. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x-2y+3=0$ и $2x+y+5=0$ и параллельную оси ординат и написать ее уравнение. [Ответ]

82. Через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$, $x+2y-9=0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x+y+6=0$. Составить ее уравнение. [Ответ]

83. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y-1=0$ и $3x-y-2=0$ и перпендикулярной прямой $y=x+1$. [Ответ]

84. Через точку пересечения прямых $x+y-6=0$ и $2x+y-13=0$ провести прямую, не совпадающую с данными и отсекающую на осях равные отрезки, и написать ее уравнение. [Ответ]

85. Найти координаты проекции точки $A(1,3)$ на прямую $2x-y+5=0$. [Ответ]

86. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,-1)$ так, что середина ее отрезка между прямыми $2x-3y-6=0$ и $2x-3y+6=0$ лежала бы на прямой $2x+15y-42=0$. [Ответ]

87. Дан треугольник с вершинами $A(4,6)$, $B(-3,0)$, $C(2,-3)$. Найти уравнения прямых, на которых лежит биссектриса AD и высота CE, и величину острого угла между ними. [Ответ]

88. При каком значении α прямая $x+y-\alpha=0$ касается окружности $x^2+y^2=1$? [Ответ]

89. Найти площадь треугольника, образованного прямыми: $2x+y+4=0$, $x+7y-11=0$ и $3x-5y-7=0$. [Ответ]

90. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника ABC, если задана его вершина $A(1,3)$ и уравнения медиан $x-2y+1=0$, $y-1=0$. [Ответ]

91. Известны уравнения прямых, на которых лежат две стороны ромба: $x+2y-4=0$, $x+2y-10=0$ и уравнение одной из его диагоналей $x-y+2=0$. Найти координаты вершин ромба. [Ответ]

92. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1,-2)$, $B(0,5)$, $C(-6,5)$. Найти координаты центра описанной около треугольника окружности. [Ответ]

93. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная уравнения двух высот: $7x-2y-1=0$ и $2x-7y-6=0$ и вершину $A(3,-4)$. [Ответ]

94. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника: $x+y-2=0$ и $7x-y+4=0$ и точка $(3,5)$ на его основании. Найти уравнение прямой, на которой лежит основание. [Ответ]

95. Даны координаты середин сторон треугольника: $A(1,2)$, $B(7,4)$, $C(3,-4)$. Найти уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника. [Ответ]

96. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, зная одну его вершину $A(2,-7)$, а также уравнения прямых, на которых лежат высота $3x+y+11=0$ и медиана $x+2y+7=0$, проведенные из различных вершин. [Ответ]

97. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x+5y-13=0$ и $x-4y+7=0$ и делящей отрезок AB между точками $A(1;0)$ и $B(7;3)$ в отношении $2:1$. [Ответ]

98. Составить уравнение прямой, симметричной прямой $y+2x+4=0$ относительно прямой $y-x-2=0$. [Ответ]

99. Даны вершины треугольника $A(4;4)$, $B(0;1)$, $C(-2;-4)$. Найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A. [Ответ]

100. Даны две вершины $A(-1;0)$ и $B(7;9)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(8;6)$ пересечения его диагоналей. Найти координаты вершин C и D. [Ответ]

101. Даны уравнения сторон треугольника $x+y-1=0$ (AB), $y+1=0$ (BC) и точка $M(-1;0)$ пересечения его медиан. Найти уравнение третьей стороны AC. [Ответ]

1.1.2. Экономика

102. Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. у. е. Ежегодная норма амортизации составляет 10 % от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t. Найти стоимость автомобиля:

1) через 5 лет; [Решение] [Ответ]

2) через 6 лет и 3 месяца. [Ответ]

103. Фирма купила четыре одинаковых компьютера. Первоначальная стоимость каждого компьютера составляет 3000 у. е., остаточная — 200 у. е. Срок службы компьютера по норме — 4 года. Через 2 года компьютеры были проданы по цене 1800 у. е. каждый. Построить график функции, определяющей стоимость четырех компьютеров в зависимости от времени t. Какую прибыль получило предприятие после продажи? [Ответ]

104. Цена телевизора — 1000 у. е., остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 100 у. е? [Ответ]

105. Станок куплен за 12 тыс. у. е. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 8 лет. Написать уравнение, определяющее стоимость станка в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость станка через 7 лет и 3 месяца эксплуатации. [Ответ]

106. Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями $y = 20x + 100$ и $y = 25x + 70$, где x — это дальность перевозки в сотнях километров, а y — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство. [Решение] [Ответ]

107. Стоимость y перевозки груза на расстояние x автотранспортом задается формулой $y = 0{,}5x + 2$, а водным транспортом — $y = 0{,}25x + 3$. Каким видом транспорта выгоднее осуществлять перевозки? [Ответ]

108. Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 64 тыс. руб. При этом издержки составляют 635 тыс. руб. за 8 стульев и 750 тыс. руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная. [Решение]

109. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. у. е. в месяц, переменные издержки — 30 у. е., выручка — 50 у. е. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить ее график. Найти точку безубыточности. [Ответ]

110. Функция издержек производства шин имеет вид $C(q) = 30q + 2100$. Цена одной шины 60 у. е. Найти точку безубыточности. Построить графики. [Ответ]

111. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс. у. е. в месяц, а переменные — 300 у. е. за одни часы. Цена часов 500 у. е. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности. [Ответ]

112. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$$D = -2p + 12, \quad S = p + 3,$$

где p — цена товара.

1) Найти точку рыночного равновесия. [Решение] [Ответ]

2) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж. [Решение] [Ответ]

3) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы? [Указание] [Ответ]

4) Вводится пропорциональный налог, равный 20 %. Найти новую точку равновесия и доход правительства. [Указание] [Ответ]

113. Спрос на некоторый товар равен 10 единицам при цене 300 у. е. за штуку и 20 единицам при цене 280 у. е. Поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 у. е. и 5 единиц при цене 60 у. е. Найти точку рыночного равновесия. [Ответ]

114. При цене 100 у. е. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 у. е. — только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара при цене 150 у. е. и 15 единиц при цене 255 у. е. Найти точку рыночного равновесия и построить графики. [Ответ]

115. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$S = p + 100, \qquad D = -2p + 250,$$

где p — цена товара.

1) Найти точку рыночного равновесия. [Ответ]

2) Был введен налог, равный 10 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога. [Ответ]

3) Налог был удвоен. Найти доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог? [Ответ]

4) Правительство предоставило субсидию, равную 5 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия. [Ответ]

116. По одному вкладу банк выплачивает 15 % годовых, а по другому, более рискованному — 20 % годовых. Вкладчик хочет вложить 3 тыс. у. е. и получать ровно 500 у. е. в год. Какие суммы нужно вложить по каждому виду вклада? [Ответ]

117. Петров взял кредит для строительства дома под 10 % годовых в одном банке и под 12 % в другом банке. Общая сумма займа составляет 10 тыс. у. е., а сумма выплат по процентам — 1 120 у. е. Сколько было взято в кредит в каждом банке? [Ответ]

118. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные — на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1,6)$, а боковых — точками $A(5,9)$ и $B(3,0)$. Составить уравнения прямых, изображающих границы участка. [Ответ]

1.2. Кривые второго порядка

1.2.1. Общие задачи

1.2.1. Общие задачи

119. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$; [Ответ]
2) $x^2+y^2-4x+8y-16=0$; [Решение] [Ответ]
3) $9x^2+9y^2+42x-54y-95=0$; [Ответ]
4) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; [Ответ]
5) $3x^2+3y^2+6x-4y-2=0$. [Ответ]

120. Составить уравнения окружностей для следующих случаев:

1) центром окружности является начало координат, а ее радиус $r=4$; [Ответ]
2) центром окружности является точка $A(3,-2)$, а ее радиус $r=5$; [Ответ]
3) окружность проходит через точку $A(3,7)$, а ее центр совпадает с точкой $B(0,3)$; [Ответ]
4) точки $A(4,3)$ и $B(0,7)$ являются концами одного диаметра; [Ответ]
5) окружность проходит через точки $A_1(4,4)$, $A_2(-2,4)$, $A_3(-3,-3)$; [Ответ]
6) окружность касается прямой $5x-12y+17=0$, а центром окружности является точка $A(2,-1)$; [Ответ]
7) окружность касается двух параллельных прямых: $2x+y-15=0$, $2x+y+5=0$, и проходит через точку $A(1,3)$; [Ответ]
8) окружность касается осей координат и проходит через точку $M(2;1)$. [Ответ]

121. Составить уравнение хорды окружности $x^2 + y^2 = 25$, делящейся в точке $(-1; 4)$ пополам. [Ответ]

122. Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ в точке $M(5; 1)$. [Ответ]

123. Вывести условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = R^2$. [Ответ]

124. Составить уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 + 2x - 19$, проведенных из точки $(1; 6)$. [Ответ]

125. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$ равна 10. [Ответ]

126. Составить каноническое уравнения эллипса для следующих случаев:

1) известны полуости эллипса $a = 9$, $b = 5$; [Ответ]

2) малая ось равна 12, а расстояние между фокусами $2c = 5$; [Решение] [Ответ]

3) известны эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$ и расстояние между фокусами $2c = 12$; [Ответ]

4) большая ось равна 5, а расстояние между фокусами $2c = 4$. [Ответ]

127. Определить полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого из следующих эллипсов:

1) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; [Ответ]

2) $4x^2 + y^2 = 16$; [Ответ]

3) $x^2 + 4y^2 = 36$; [Ответ]

4) $24x^2 + 49y^2 = 1176$; [Решение] [Ответ]

5) $16x^2 + 25y^2 = 400$. [Ответ]

128. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, расстояние от которых до левого фокуса равно 7. [Ответ]

129. Определить, как расположены точки

$$A\left(4, \frac{1}{5}\right), \quad B(1, 1), \quad C(-2, -5), \quad D(-1, -2)$$

относительно эллипса $16x^2 + 25y^2 = 65$. [Ответ]

130. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, две другие совпадают с концами его малой оси. [Ответ]

131. Определить эксцентриситет эллипса, если известно, что малая ось его видна из фокуса под прямым углом. [Ответ]

132. Установить, что каждое из данных уравнений определяет эллипс, найти его центр симметрии и полуоси:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x + 16y - 5 = 0$; [Ответ]

2) $5x^2 + 2y^2 - 50x - 8y - 27 = 0$. [Ответ]

133. Составить уравнение эллипса, длина большой оси которого равна 20, а фокусами служат точки $F_1(-1; 0)$ и $F_2(5; 0)$. [Ответ]

134. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями, и изобразить их на чертеже:

1) $y = \frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$; [Ответ]

2) $y = -\frac{5}{4}\sqrt{16 - x^2}$; [Ответ]

3) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{7 - y^2}$; [Ответ]

4) $y = \frac{1}{9}\sqrt{6 - x^2}$. [Ответ]

135. Найти точки пересечения данных прямой и эллипса:

1) $x + 2y - 6 = 0$ и $x^2 + 4y^2 + 2x - 24 = 0$; [Ответ]

2) $4x - 3y + 40 = 0$ и $9x^2 + 16y^2 = 144$. [Ответ]

136. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Определить при каких значениях m прямая $y = -x + m$:

1) пересекает данный эллипс; [Ответ]

2) касается его; [Указание] [Ответ]

3) проходит вне эллипса. [Ответ]

137. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$:

1) параллельных прямой $3x + 2y - 1 = 0$; [Ответ]

2) перпендикулярных к этой прямой. [Ответ]

138. Составить уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в его точке $M(x_1; y_1)$. [Ответ]

139. Составить каноническое уравнение гиперболы для следующих случаев:

1) известны ее оси $2a = 12$, $2b = 10$; [Ответ]

2) расстояние между фокусами $2c = 12$ и эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$; [Ответ]

3) расстояние между фокусами $2c = 20$ и ось $2b = 16$; [Ответ]

4) даны уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{5}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 2\sqrt{34}$; [Ответ]

5) расстояние между вершинами равно 20 и уравнение асимптоты $y = 2{,}4x$. [Ответ]

140. Для каждой из следующих гипербол найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот:

1) $16x^2 - 9y^2 = 144$; [Ответ]

2) $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1$; [Ответ]

3) $64x^2 - 9y^2 = 1$; [Ответ]

4) $25x^2 - 16y^2 = 1$; [Ответ]

5) $x^2 - y^2 = 1$; [Ответ]

6) $4x^2 - y^2 = 16$. [Ответ]

141. Установить, какие линии определяются уравнениями:

1) $y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 9}$; [Ответ]

2) $y = -4\sqrt{x^2 + 1}$; [Ответ]

3) $x = -\frac{3}{2}\sqrt{y^2 + 9}$; [Ответ]

4) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}$; [Ответ]

5) $y = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 4x + 9}$; [Ответ]

6) $x = 10 - 3\sqrt{y^2 + 4y + 16}$. [Ответ]

142. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр симметрии и полуоси:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y - 16 = 0$; [Ответ]

3) $3x^2 - 9y^2 - 30x + 30y + 15 = 0$. [Ответ]

143. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 24 и фокусы находятся в точках $F_1(-10; 2)$ и $F_2(16; 2)$. [Ответ]

144. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-5; 2)$ параллельно асимптотам гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$. [Ответ]

145. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ точки с абсциссой $x = 6$ и фокальные радиусы этих точек. [Ответ]

146. На гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ найти точки, фокальные радиусы которых равны 5. [Ответ]

147. Найти точки пересечения гиперболы $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ и прямой $x - 2y + 2 = 0$. [Ответ]

148. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$. [Ответ]

149. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox, для следующих случаев:

1) парабола проходит через точку $\left(2, 2\sqrt{2}\right)$; [Ответ]
2) расстояние от фокуса до директрисы равно 4; [Ответ]
3) фокус параболы находится в точке $F(-2, 0)$; [Ответ]
4) расстояние между фокусом и вершиной равно 3. [Ответ]

150. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $(1; 1)$, если ее вершина находится в начале координат. [Ответ]

151. Найти координаты фокуса и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2 = 12x$; [Ответ]
2) $y^2 = -8x$; [Ответ]
3) $x^2 = -8y$. [Ответ]

152. Определить, какие линии задаются уравнениями:

1) $y = 3\sqrt{x}$; [Решение] [Ответ]

2) $y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$; [Ответ]

3) $y = \sqrt{-2x}$; [Ответ]

4) $4x + 3y^2 - 6y - 9 = 0$; [Ответ]

5) $x = 5\sqrt{y}$; [Ответ]

6) $9x^2 - 18x + 3y + 12 = 0$; [Ответ]

7) $x = -5\sqrt{-y}$. [Ответ]

153. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(4; -1)$, а фокус — в точке $(4; 2)$. [Ответ]

154. На параболе $y^2 = 64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x + 3y + 44 = 0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой. [Решение] [Ответ]

155. Составить уравнения касательных к параболе $x^2 = 16y$ для следующих случаев:

1) касательная проходит через точку $A(-4, 1)$; [Ответ]

2) касательная параллельна прямой $x - 2y + 1 = 0$; [Ответ]

3) касательная перпендикулярна прямой $x - 2y + 2 = 0$. [Ответ]

156. Определить точки пересечения параболы $x^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ и прямой $x + y - 2 = 0$. [Ответ]

157. Вычислить фокальный радиус точки параболы $y^2 = 40x$, если абсцисса этой точки равна 14. [Ответ]

158. Вершина параболы, проходящей через точку $(3;5)$, совпадает с центром окружности $x^2+y^2-4x-6y-3=0$. Составить уравнение этой параболы, если ее ось параллельна оси Ox. [Ответ]

159. Установить, какую линию определяет уравнение:

1) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$; [Решение] [Ответ]
2) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$; [Ответ]
3) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$; [Ответ]
4) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$; [Ответ]
5) $x^2+4y^2-4x-8y+8=0$; [Ответ]
6) $x^2+4y^2+8y+5=0$; [Ответ]
7) $x^2-y^2-6x+10=0$; [Ответ]
8) $2x^2-4x+2y-3=0$; [Ответ]
9) $x^2-6x+8=0$; [Ответ]
10) $x^2+2x+5=0$. [Ответ]

160. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке $C(x_0;y_0)$; сделать рисунок:

1) правый фокус гиперболы $57x^2-64y^2=3648$, $C(2;8)$; [Решение] [Ответ]
2) левый фокус эллипса $13x^2+49y^2=637$, $C(1;8)$; [Ответ]
3) $B(3;4)$, C — вершины параболы $y^2=\frac{x+7}{4}$; [Ответ]
4) фокусы гиперболы $4x^2-5y^2=20$, $C(0;-6)$; [Ответ]

5) правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $C(-5;-2)$; [Ответ]

6) фокусы эллипса $x^2 + 9y^2 = 9$, C — его нижняя вершина; [Ответ]

7) правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $C(-2;5)$; [Ответ]

8) правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $C(2;-7)$; [Ответ]

9) $B(2;-5)$, C — вершина параболы $x^2 = -2(y+1)$; [Ответ]

10) левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $C(-1;-2)$; [Ответ]

11) правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, $C(1;3)$; [Ответ]

12) фокусы эллипса $25x^2+26y^2 = 650$, C — его верхняя вершина; [Ответ]

13) левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $C(0;-6)$; [Ответ]

14) левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $C(-1;-3)$; [Ответ]

15) $B(1;4)$, C — вершина параболы $y^2 = \dfrac{x-4}{3}$. [Ответ]

161. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям; привести к каноническому виду и сделать рисунок:

1) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1;2)$ и $B(3;-1)$ равна 18,5; [Ответ]

2) точка M отстоит от точки $A(1;5)$ на расстоянии в четыре раза меньшем, чем от прямой $x = -1$; [Решение] [Ответ]

3) отношение расстояний от точки M до точек $A(3;-5)$ и $B(4;1)$ равно $\dfrac{1}{4}$; [Ответ]

4) точка M отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3;1)$; [Ответ]

5) точка M отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4; -3)$; [Ответ]

6) точка M отстоит от точки $A(5; 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2; 1)$; [Ответ]

7) точка M отстоит от точки $A(-3; -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = 5$; [Ответ]

8) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5; 3)$ и $B(2; -4)$ равна 65; [Ответ]

9) отношение расстояний от точки M до точек $A(3; -2)$ и $B(4; 6)$ равно $\dfrac{3}{5}$; [Ответ]

10) точка M отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2; 3)$; [Ответ]

11) точка M отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1; 4)$; [Ответ]

12) точка M отстоит от точки $A(4; -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $B(1; 6)$; [Ответ]

13) точка M отстоит от точки $A(0; -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$; [Ответ]

14) сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3; 3)$ и $B(4; 1)$ равно 31; [Ответ]

15) отношение расстояний от точки M до точек $A(2; -4)$ и $B(3; 5)$ равно $\dfrac{2}{3}$. [Ответ]

Глава 2

Теория пределов

2.1. Последовательность. Предел числовой последовательности

162. Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = 1$; [Ответ]

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; [Решение] [Ответ]

3) $x_n = 2^{n+1}$; [Ответ]

4) $x_n = (-1)^n + 1$; [Ответ]

5) $x_n = n^2 + 2n + 3$; [Ответ]

6) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$; [Ответ]

7) $x_n = \dfrac{4^n}{n^2}$; [Ответ]

8) $x_n = n!$ (произносится *эн-факториал*); [Решение] [Ответ]

9) $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$; [Ответ]

10) $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$ (целая часть корня квадратного из n); [Ответ]

11) $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2$; [Решение] [Ответ]

12) $x_1 = -1$, $x_n = -n \cdot x_{n-1}$; [Ответ]

13) $x_1 = 2$, $x_n = |x_{n-1} - 2|$. [Ответ]

163. Зная несколько первых членов последовательности $\{x_n\}$, написать формулу её общего члена:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots;$ [Ответ]

2) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots;$ [Ответ]

3) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \ldots;$ [Ответ]

4) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots;$ [Ответ]

5) $2, 5, 10, 17, 26, \ldots$ [Ответ]

164. Исследовать последовательности на ограниченность, ограниченность сверху и ограниченность снизу:

1) $x_n = (-1)^n;$ [Ответ]

2) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n};$ [Ответ]

3) $x_n = \sin n;$ [Ответ]

4) $x_n = \ln n;$ [Ответ]

5) $x_n = n;$ [Ответ]

6) $x_n = n^3 + 2n;$ [Ответ]

7) $x_n = -2^n;$ [Ответ]

8) $x_n = \frac{n+1}{n};$ [Решение] [Ответ]

9) $x_n = (-1)^n \cdot n.$ [Ответ]

165. Исследовать данные последовательности на монотонность и строгую монотонность:

1) $x_n = 2n + 1$; [Решение] [Ответ]

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; [Решение] [Ответ]

3) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; [Решение] [Ответ]

4) $x_n = -\sqrt{n}$; [Ответ]

5) $x_n = \left[\sqrt{n}\right]$; [Решение] [Ответ]

6) $-1, -1, -2, -2, -3, -3, \ldots$; [Ответ]

7) $x_n = n - \dfrac{1}{n}$; [Ответ]

8) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; [Ответ]

9) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{2}$; [Ответ]

10) $2, 2, 2, 2, \ldots$ [Ответ]

166. Найти первые семь членов последовательности Фибоначчи, определяемой рекуррентной формулой

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-2} + x_{n-1}\ (n \geqslant 3).$$ [Ответ]

167. Привести пример двух ограниченных последовательностей, частное которых является неограниченной последовательностью.

168. Показать на примере, что произведение двух возрастающих последовательностей может не быть даже монотонной последовательностью.

169. Доказать по определению, что следующие последовательности бесконечно малые:

1) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$; [Решение]

2) $\alpha_n = \dfrac{2}{n+1}$;

3) $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$;

4) $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$;

5) $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

6) $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$.

170. Доказать, что последовательность $\alpha_n = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ — бесконечно малая, и для данных значений ε найти такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ справедливо равенство $|\alpha_n| < \varepsilon$:

1) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; [Ответ]

2) $\varepsilon = 0{,}1$; [Ответ]

3) $\varepsilon = 0{,}015$. [Ответ]

171. По определению предела доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$; [Решение]

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{n+1} = 3;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{5n+2} = \dfrac{4}{5};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2} = 2;$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}-1}{3^n} = 3.$

172. Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-5}{n};$ [Ответ]

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-n^2}{3-n^2};$ [Ответ]

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n+4}{7-9n};$ [Ответ]

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2};$ [Решение] [Ответ]

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(n+2)}{n^2+n+1};$ [Ответ]

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2n+2}{2n+1+2n^2};$ [Ответ]

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2+n};$ [Ответ]

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};$ [Ответ]

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 - 5n^2 + 10n}{21n^3 + 7n - 8}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n + 4n^3}{1 - n + 2n^3}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 5n^2 - 1}{10n^3 - 3n + 2}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 - 1}{5n^3 + 4n^2 - 2n + 1}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n^3 + 100n}{2n^4}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!}$; [Решение] [Ответ]

15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5(n+1)!}{4n! + (n-1)!}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)n!}{(n+2)! + (n+1)!}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n-1)! + (4n+1)n!}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(7n+1)n!}{9(n+1)! + 7n!}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)! + 7n!}{(n+2)!}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! - (n+2)!}{(n+3)n! + (n+1)!}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n-3)! + (n-2)!}{(n-1)! - (n-2)!}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+3n!}{(n+1)(n-1)!-(n-2)!}$; [Ответ]

23) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$; [Ответ]

24) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)!-(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{(2n^2+1)(n-3)!+(n-2)!}$; [Ответ]

26) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+n!\,(n+3)!}{(n+2)!+(n+1)!}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(2n^2+3)(n+1)!-(n+2)!}$; [Ответ]

28) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n!+(n+1)!}{(3n+1)n!}$; [Ответ]

29) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)(n-1)!-3(n+1)!}{7(n+1)!+4n!}$; [Ответ]

30) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+1}$; [Ответ]

31) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$; [Решение] [Ответ]

32) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; [Ответ]

33) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; [Ответ]

34) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)$; [Указание] [Ответ]

35) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)$; [Ответ]

36) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$; [Ответ]

37) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$; [Ответ]

38) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}$; [Решение] [Ответ]

39) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n+2}$; [Ответ]

40) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt[3]{n^2+n+4}}$; [Ответ]

41) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{9n^2+2n}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{8n^3+2}}$; [Ответ]

42) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n^2-3}}$; [Ответ]

43) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n+2}-\dfrac{5}{2n+1}\right)$; [Ответ]

44) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$; [Ответ]

45) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+3n}{2n+4}-\dfrac{n}{2n-3}\right)$; [Ответ]

46) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{4n+1}-\dfrac{n^2+4}{2n+3}\right)$; [Указание] [Ответ]

47) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$; [Ответ]

48) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+2}-\dfrac{n^2-1}{n+3}\right)$; [Ответ]

49) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-1}{5^n+1}$; [Ответ]

50) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; [Ответ]

51) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\dots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; [Решение] [Ответ]

52) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}$; [Ответ]

53) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)$; [Ответ]

54) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\dots+n}{1+4+9+\dots+n^2}$; [Указание] [Ответ]

55) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+9+\dots+n^2}{n^3}$; [Ответ]

56) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\dots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$; [Ответ]

57) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; [Ответ]

58) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dots+\dfrac{1}{3^n}}$; [Указание] [Ответ]

59) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\dots+\dfrac{(-1)^n}{5^n}\right)$. [Ответ]

173. Показать на примерах, что частное двух бесконечно малых последовательностей может быть бесконечно малым и бесконечно большим.

174. Доказать, что следующие последовательности не имеют предела:

1) $x_n = (-1)^n$;

2) $x_n = \sin \dfrac{\pi n}{2}$.

175. Привести пример расходящейся последовательности x_n, для которой последовательность $|x_n|$ сходится.

176. На примере показать, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

177. На примере показать, что не всякая ограниченная последовательность является сходящейся.

178. Следует ли из сходимости суммы последовательностей x_n и y_n сходимость каждой из последовательностей x_n и y_n? [Ответ]

179. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k},$$

сходится. [Решение]

180. Доказать сходимость и найти предел последовательности x_n, где

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \quad x_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \quad \ldots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\ \text{корней}},$$

если известно, что $a > 0$. [Решение] [Ответ]

181. Найти предел последовательности x_n, заданной рекуррентно:

$$x_1 \in (0, 1); \qquad x_{n+1} = x_n(2 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

[Ответ]

182. Найти предел последовательности x_n, если

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ a < b; \quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2},\ n \geqslant 3.$$

[Ответ]

183. Доказать, что неограниченная монотонная последовательность является бесконечно большой.

2.2. Функциональная зависимость

2.2.1. Общие задачи

184. Для функции $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ найти:

1) $f(0)$; [Решение] [Ответ]

2) $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$; [Ответ]

3) $f(-x)$; [Ответ]

4) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; [Ответ]

5) $\dfrac{1}{f(x)}$. [Ответ]

185. Для функции $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}$ найти:

1) $f(0)$; [Ответ]

2) $f(-2)$; [Ответ]

3) $f(\sqrt{2})$; [Ответ]

4) $f(-x)$; [Ответ]

5) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; [Решение] [Ответ]

6) $f(a+1)$; [Ответ]

7) $f(a)+1$; [Ответ]

8) $f(2x)$. [Ответ]

186. Для функции $f(x) = x^3 \cdot 2^x$ найти:

1) $f(1)$; [Ответ]

2) $f(-3)$; [Ответ]

3) $f(-\sqrt[3]{5})$; [Ответ]

4) $f(-x)$; [Ответ]

5) $f(3x)$; [Решение] [Ответ]

6) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; [Ответ]

7) $\dfrac{1}{f(x)}$; [Ответ]

8) $f(b-2)$. [Ответ]

187. Определить область существования функций:

1) $y = \sqrt{x+1}$; [Ответ]

2) $y = \lg \dfrac{2+x}{2-x}$; [Решение] [Ответ]

3) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2+x}}$; [Ответ]

4) $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x}$; [Ответ]

5) $y = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$; [Ответ]

6) $y = \dfrac{x^2+4}{x^3+1}$; [Ответ]

7) $y = \sin\dfrac{1}{|x|-2}$; [Ответ]

8) $y = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 10}$; [Ответ]

9) $y = x^2 + \operatorname{tg} x$; [Ответ]

10) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{|x^2 - 2|}}$. [Ответ]

188. Найти множества значений функций:

1) $y = x^2 + 4x + 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = 2^{x^2}$; [Ответ]

3) $y = 3 - 5\cos x$; [Ответ]

4) $y = x^2 - 8x + 20$; [Ответ]

5) $y = 3^{-x^2}$; [Ответ]

6) $y = 2\sin x - 7$; [Ответ]

7) $y = \dfrac{1}{x} + 4$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; [Ответ]

9) $y = \sqrt{5 - x} + 2$; [Ответ]

10) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; [Ответ]

11) $y = \arcsin\dfrac{x^2 + 1}{2x}$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{|x|}{|x| + 1}$. [Ответ]

189. Выяснить, является ли функция $f(x)$ четной, нечетной или имеет общий вид:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; [Решение] [Ответ]
2) $f(x) = x^4 - 5|x|$; [Ответ]
3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$; [Решение] [Ответ]
4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$; [Ответ]
5) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; [Ответ]
6) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x$; [Ответ]
7) $f(x) = \sqrt{x}$; [Ответ]
8) $f(x) = \arcsin x$; [Ответ]
9) $f(x) = \sin x + \cos x$; [Ответ]
10) $f(x) = |x| - 2$; [Ответ]
11) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$; [Ответ]
12) $f(x) = x \cdot e^x$. [Ответ]

190. Выяснить, является ли функция $f(x)$ периодической; если да, то найти основной период:

1) $f(x) = \sin 4x$; [Решение] [Ответ]
2) $f(x) = \cos^2 5x$; [Решение] [Ответ]
3) $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; [Ответ]

4) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; [Указание] [Ответ]

5) $f(x) = x^2$; [Ответ]

6) $f(x) = \cos \dfrac{x}{4}$; [Ответ]

7) $f(x) = |x|$; [Ответ]

8) $f(x) = \operatorname{tg}(2x - 1)$; [Ответ]

9) $f(x) = \sin \dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$; [Ответ]

10) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 3x$. [Ответ]

191. Для функции $y = f(x)$ найти обратную, если:

1) $f(x) = 3x + 2$; [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$; [Ответ]

3) $f(x) = \sqrt{x}$; [Ответ]

4) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$; [Решение] [Ответ]

5) $f(x) = 2e^{3x}$; [Ответ]

6) $f(x) = x^3 - 2$; [Ответ]

7) $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$. [Ответ]

192. Найти сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x - 1$; [Ответ]

3) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$; [Ответ]

4) $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = 2x - 5;$ [Ответ]

5) $f(x) = |x|,\ g(x) = \cos x.$ [Ответ]

193. Представить сложную функцию $y = f(x)$ в виде суперпозиции соответствующих функций, если:

1) $f(x) = (2x - 3)^{99};$ [Ответ]

2) $f(x) = \lg \operatorname{tg} \dfrac{x}{3};$ [Решение] [Ответ]

3) $f(x) = \arcsin 3^{-x^2};$ [Ответ]

4) $f(x) = \sqrt{\sin^3(5x + 3)};$ [Ответ]

5) $f(x) = \ln^2 \dfrac{1 - x}{1 + x}.$ [Ответ]

194. Построить графики следующих функций:

1) $y = x^3 - 2;$

2) $y = x^2 + 4x + 3;$

3) $y = x^2 - 6x + 11;$

4) $y = \dfrac{1}{x - 1};$

5) $y = -\dfrac{2}{x} + 1;$

6) $y = \dfrac{x + 4}{x + 2};$

7) $y = \lg(x + 2);$

8) $y = \log_3(-x);$

9) $y = 1 - 0{,}5^x$;

10) $y = 2^{x-1} + 3$;

11) $y = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; [Решение]

12) $y = -2\sin 3x$;

13) $y = 3\cos 2x$;

14) $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$;

15) $y = |x - 3|$;

16) $y = |x^2 - 2x + 3|$; [Указание]

17) $y = \operatorname{tg}|x|$;

18) $y = |1 + \ln x|$;

19) $y = [x]$; [Указание]

20) $y = \{x\}$; [Решение]

21) $y = \left|\{x\} - \dfrac{1}{2}\right|$;

22) $y = \cos^2 x$; [Указание]

23) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; [Указание]

24) $y = \arcsin\sin x$;

25) $y = \operatorname{sign}\cos x$;

26) $y = |x| + |x + 1| + |x + 2|$. [Указание]

195. Выяснить, какие из следующих функций являются монотонными, какие строго монотонными, какие ограниченными:

1) $f(x) = c$; [Ответ]

2) $f(x) = \sin^2 x$; [Ответ]

3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

4) $f(x) = -x^2 + 2x$; [Ответ]

5) $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$; [Ответ]

6) $f(x) = [x]$. [Указание] [Ответ]

2.2.2. Экономика

196. Опытным путем установлены функции спроса и предложения

$$D(p) = \frac{25p + 4p^2}{1 + 10p}, \quad S(p) = \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p},$$

где p — цена товара. Найти точку рыночного равновесия.

[Решение] [Ответ]

197. Для функций спроса и предложения

$$p = 29 - 3q^2, \quad p = \frac{5}{4}q^3 + 7,$$

где q — число единиц товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. [Ответ]

198. Для функций спроса и предложения

$$D(p) = \frac{20 + p^2}{1 + 10p}, \quad S(p) = \frac{2,5 - p + 4p^2}{1 + 10p},$$

где p — цена товара, найти точку рыночного равновесия.

2.3. Предел функции. Два замечательных предела

199. Используя определению предела функции по Коши, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5;$ [Решение]

2) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)=-1;$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(-x+5)=4;$

4) $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9;$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5};$

6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x}{x+3}=-2;$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0;$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1;$

9) $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0;$

10) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2)=10;$

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2;$ [Указание]

12) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{5x+4}=3;$

13) $\lim\limits_{x\to 1}x^3=1.$

200. Используя определению предела функции по Гейне, найти предел:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2x-1)$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3-2x+1}{3x^2+2}$; [Ответ]

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+3}$. [Ответ]

201. Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке x_0:

1) $f(x)=\cos x$, $x_0=\infty$; [Решение]

2) $f(x)=\sin x$, $x_0=\infty$;

3) $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x_0=0$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$;

5) $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$, $x_0=0$;

6) $f(x)=\begin{cases} x, & x<2, \\ x^2, & x\geqslant 2, \end{cases}$ $x_0=2$;

7) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ $x_0=0$.

202. Используя свойства предела функции, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\left(5x^2+2x-1\right)$; [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$; [Решение] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x^3-2x+3}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin x+2\operatorname{ctg} x}{(\pi-x)\sin\frac{x}{2}}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x+1}$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+5}{x-3}$; [Решение] [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2}{x^2-2x-3}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3}{x^3-8}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-5x}{e^{1/x^2}}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x+\operatorname{tg}(\pi-x)}{2x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$; [Решение] [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{-x^2+x+20}{x^3+64}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{-8x^2-19x-6}{5x^2+9x-2}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-8x^2+33x+35}{x^3-125}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{4x^2+23x+15}{-7x^2-36x-5}$; [Решение] [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-5x-14}{x^3+8}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{4x^2+23x+28}{x^3+64}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{8x^2-27x+9}{7x^2-18x-9}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-8x^2-11x+10}{x^3+8}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x^2-13x+3}{-7x^2+20x+3}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{-2x^2-11x-5}{-5x^2-22x+15}$; [Ответ]

23) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x^2-5x+7}{x^3-1}$; [Ответ]

24) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{-8x^2-43x-15}{5x^2+26x+5}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{8x^2+9x+1}{7x^2+10x+3}$; [Ответ]

26) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$; [Ответ]

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2 - x}$; [Ответ]

29) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 25}$; [Ответ]

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3 - 3x^2 + x}{2x}$; [Ответ]

31) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$; [Решение] [Ответ]

32) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1}$; [Ответ]

33) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{-6x^2 + 5x + 4}$; [Ответ]

34) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{2x^3 - 2x^2 + x - 1}$; [Ответ]

35) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{x^2 + 7x + 6}{x^3 + 6x^2 + 3x + 18}$; [Ответ]

36) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$; [Ответ]

37) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$; [Ответ]

38) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^3}$; [Ответ]

39) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$; [Решение] [Ответ]

40) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; [Ответ]

41) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$; [Ответ]

42) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6x}-4}$; [Ответ]

43) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{2-x^2}}{2x^2-5x+3}$; [Ответ]

44) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{x+4}}{2x^2-3x+1}$; [Ответ]

45) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+10}-4}{x^2-5x+6}$; [Ответ]

46) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}$; [Ответ]

47) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+6}-2\sqrt{2}}{2x^2-5x+3}$; [Ответ]

48) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+18}-4}{2x^2+9x+10}$; [Ответ]

49) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{-4x-6}-\sqrt{2}}{x^2+5x+6}$; [Ответ]

50) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+15}-4}{x^2-x}$; [Ответ]

51) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6}$; [Решение] [Ответ]

52) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{-3x+11}-\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6}$; [Ответ]

53) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; [Ответ]

54) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$; [Ответ]

55) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; [Ответ]

56) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; [Ответ]

57) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x(1+\sqrt{x})}$; [Ответ]

58) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$; [Ответ]

59) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; [Указание] [Ответ]

60) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$; [Указание] [Ответ]

61) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{x-3}}$; [Ответ]

62) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$; [Решение] [Ответ]

63) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-x+3}{x^3-8x+5}$; [Ответ]

64) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+5x^2-x^3}{2x^3-x^2+7x}$; [Ответ]

65) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1-3x^2}{x^2+7x-2}$; [Ответ]

66) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; [Ответ]

67) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 - 2x}{2x^3 + x^2 + 1}$; [Ответ]

68) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^2(3-4x)^2}{(2x-1)^4}$; [Ответ]

69) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10 + x\sqrt{x}}{x^2}$; [Ответ]

70) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + 10x}{2x + \sqrt[3]{x^2}}$; [Ответ]

71) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$; [Ответ]

72) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$; [Ответ]

73) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x - 3}{2 + |x|}$; [Ответ]

74) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + \sqrt{9x^2 + 1}}{2x + \sqrt{x^2 - 1}}$; [Ответ]

75) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$; [Решение] [Ответ]

76) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)$; [Ответ]

77) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - x\right)$; [Ответ]

78) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}\right)$; [Ответ]

79) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 3} - x\right)$; [Ответ]

80) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right);$ [Ответ]

81) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right);$ [Ответ]

82) $\lim\limits_{x\to-7}\left(\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{14}{x^2-49}\right);$ [Ответ]

83) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right);$ [Ответ]

84) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{27}{x^3-27}\right).$ [Ответ]

203. Найти пределы, используя первый замечательный предел (2.5) и его следствия:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x};$ [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x};$ [Решение] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x};$ [Решение] [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x};$ [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x};$ [Указание] [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2};$ [Указание] [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2};$ [Решение] [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$; [Решение] [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x \operatorname{tg} 3x}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} 2x}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1 - \sqrt{x+1}\right)}{\cos x - \cos^3 x}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$; [Решение] [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2 - \operatorname{tg} x} - \sqrt{2 - \sin 3x}}{\sin 2x}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 - \sqrt{9 + x}}{\arcsin 2x}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + 7 \operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x - 3 \operatorname{arctg} 4x}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x - \pi}$; [Решение] [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$; [Ответ]

23) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; [Ответ]

24) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right)$; [Указание] [Ответ]

26) $\lim\limits_{x\to2} (2-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. [Ответ]

204. Найти пределы, используя второй замечательный предел (2.6):

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x, \quad k\in\mathbb{R}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}, \quad k\in\mathbb{R}$; [Указание] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+5x}$; [Решение] [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[2x]{1+3x}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to0} 1-3x^{\frac{2}{x}}$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x}$; [Решение] [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-5}{x+4}\right)^{x}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3+5x}{3+2x}\right)^{x}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{6-x}\right)^{x+2}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{2x-1}\right)^{x^2}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7}$; [Решение] [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x-2}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+6}{2x+4}\right)^{x+5}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{3x-1}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{x+4}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x+6}{-x+4}\right)^{3x-1}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+10}{4x+5}\right)^{4x-2}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x-2}\right)^{-3x-1}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-2}{4x-3}\right)^{3x-1}$; [Ответ]

22) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; [Указание] [Ответ]

23) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; [Указание] [Ответ]

24) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; [Ответ]

25) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} 3x}}$; [Ответ]

26) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; [Ответ]

27) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$. [Ответ]

205. Найти пределы, используя следствия (2.8) второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; [Решение] [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2-1}-1}{x-1}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{5x}-e^{x}}$; [Указание] [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{ctg} x}{e^{\cos x}-1}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x-x^2}{x-2}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2}{x-1}$; [Решение] [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{x}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x \sin x}$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)}{x}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\ln(1+x)}{2x-\ln(1+x)}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+kx)^m-1}{x}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$; [Решение] [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[7]{x^2-3x-9}-1}{x^3-125}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x^2}}{x}$. [Указание] [Ответ]

206. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = 2\operatorname{sign} x - 1$, $x_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = [x]$, $x_0 = 3$; [Ответ]

3) $f(x) = \{x\}$, $x_0 = 1$; [Ответ]

4) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2}$, $x_0 = 2$; [Ответ]

5) $f(x) = \dfrac{x-1+|x-1|}{x^2-1}$, $x_0 = 1$; [Ответ]

6) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{при } x < 1, \\ \ln x & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; [Решение] [Ответ]

7) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{3} & \text{при } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$; [Ответ]

8) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 3x+2 & \text{при } x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$. [Ответ]

207. Доказать эквивалентность БМФ при $x \to 0$:

1) $1 - \cos x$ и $\dfrac{x^2}{2}$; [Решение]

2) $\ln(1+5x)$ и $e^{5x} - 1$;

3) $\ln(1+4x)$ и $\sin 4x$;

4) $\dfrac{3^{\sin x} - 1}{\ln 3}$ и $\arcsin x$;

5) $\sqrt{1+x} - 1$ и $e^{\frac{x}{2}} - 1$.

208. Найти пределы, используя свойства эквивалентных БМФ и таблицу эквивалентностей:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$; [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1-6x)}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{3^x - 1}$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+7x} - 1}{x}$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 2x}{x^2}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} 4x}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{1 - \cos x}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$; [Решение] [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x^3 - 3}{x - e}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{tg}(4 - x^2)}$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x - 2)}{x^2 - 2x}$; [Указание] [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x \ln(2x + 1)}{1 - \cos 2x}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^{x^2} - 1)}{2\sin x - \sin 2x}$. [Решение] [Ответ]

209. Привести пример, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют предела в точке x_0, а функция $f(x) + g(x)$ имеет.

210. На примерах показать, что частное бесконечно малых функций может быть бесконечно малым, иметь любой конечный предел, быть бесконечно большим, не иметь предела вообще.

211. Привести пример, когда сумма двух бесконечно больших является бесконечно малой.

2.4. Непрерывные функции

212. Используя теорему о непрерывности элементарных функций, выяснить в каких точках непрерывны данные функции:

1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x}$; [Решение] [Ответ]

3) $f(x) = \sqrt{-x^2} + \sin 3x$; [Ответ]

4) $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2} + e^x \sqrt{x^2 + x - 6}$; [Ответ]

5) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{3 - x}{x^2 - 4}$; [Ответ]

6) $f(x) = \arcsin(1 - x) + \lg \lg x$; [Ответ]

7) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x}$; [Ответ]

8) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg \dfrac{x + 1}{x - 2}$. [Ответ]

213. Доказать, что функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0. Исследовать её на одностороннюю непрерывность.

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 1, \\ 2 & \text{при } x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1$; [Ответ]

3) $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{при } x < -2, \\ x^2-4 & \text{при } x \geqslant -2, \end{cases}$ $x_0 = -2;$ [Ответ]

214. Установить характер разрыва функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x < 0, \\ (x+1)^2, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0;$ [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

3) $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1), & 1 < x \leqslant 2, \\ \sin\pi x, & x > 2, \end{cases}$ $x_0 = 2;$ [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $x_0 = 2;$ [Ответ]

5) $f(x) = \sin\ln|x|$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

6) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4;$ [Ответ]

7) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2};$ [Ответ]

8) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$, $x_0 = 3;$ [Ответ]

9) $f(x) = \ln|x|$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

10) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0;$ [Ответ]

11) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$, $x_0 = \pi;$ [Ответ]

12) $f(x) = x - [x]$, $x_0 = 1$; [Указание] [Ответ]

13) $f(x) = \dfrac{1}{x - [x]}$, $x_0 = 1$; [Ответ]

14) $f(x) = \operatorname{tg} x - [\operatorname{tg} x]$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

215. Показать, что функция $y = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

216. Показать, что функции $[x]$ (рисунок 2.48) и $\{x\}$ (рисунок Р.10) непрерывны во всех точках $x_0 \notin \mathbb{Z}$, а во всех точках $x_0 \in \mathbb{Z}$ только непрерывны справа.

217. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность. Построить график. Найти скачок в точках конечного разрыва:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } |x| \leqslant \pi/2, \\ 1/2 & \text{при } |x| > \pi/2; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x - 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$ [Ответ]

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 2 & \text{при } |x| \geqslant 1; \end{cases}$ [Ответ]

4) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \in [0; 1), \\ 3x + 2 & \text{при } x \in (1; 2]; \end{cases}$ [Ответ]

5) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x \in (-\infty; 0], \\ x & \text{при } x \in (0; +\infty); \end{cases}$ [Ответ]

6) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \in (-\infty; 0], \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при } x \in (0;1) \cup (1;+\infty); \end{cases}$ [Ответ]

7) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ [Ответ]

8) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < -2, \\ \sqrt{4-x^2} & \text{при } -2 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ [Ответ]

9) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{при } x < 1, \\ 2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 3x & \text{при } x > 2; \end{cases}$ [Ответ]

10) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{1-x} & \text{при } x > 1; \end{cases}$ [Ответ]

11) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } x > \pi/2; \end{cases}$ [Ответ]

12) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n};$ [Решение] [Ответ]

13) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx;$ [Ответ]

14) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x^{2n}}{1+x^{4n}};$ [Ответ]

15) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+e^{-nx}}{2+e^{-2nx}};$ [Ответ]

16) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}};$ [Ответ]

17) $f(x) = \dfrac{|x| - x}{x^2};$ [Ответ]

18) $f(x) = \log_2 |x-2|;$ [Ответ]

19) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2};$ [Ответ]

20) $f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 + x}.$ [Ответ]

218. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность:

1) $f(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1};$ [Ответ]

3) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x};$ [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3};$ [Ответ]

5) $f(x) = \ln|\cos x|;$ [Ответ]

6) $f(x) = (1+x) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x^2}.$ [Ответ]

219. Выяснить, существует ли значение A, при котором данные функции непрерывны в точке x_0, и если существует, то найти его:

1) $x_0 = -2,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{при } x \neq -2, \\ A & \text{при } x = -2; \end{cases}$ [Ответ]

2) $x_0 = 3,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{при } x \neq 3, \\ A & \text{при } x = 3; \end{cases}$ [Ответ]

3) $x_0 = 0,\ f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leqslant 0, \\ A(x-1) & \text{при } x > 0. \end{cases}$ [Ответ]

220. Является ли функция $f(x)$ непрерывной на заданном отрезке?

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$, $[-1, 2]$ [Ответ]

2) $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)(x+1)}$, $[4, 7]$ [Ответ]

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$, $[-4, -3]$ [Ответ]

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$, $[0, 1]$ [Ответ]

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$, $[-2, 0]$ [Ответ]

221. Имеет ли уравнение $x^4 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ хотя бы один корень на отрезке $[1; 2]$? [Решение] [Ответ]

222. Доказать, что всякий многочлен третьей степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.

223. Доказать, что из непрерывности функции $f(x)$ следует непрерывность $|f(x)|$. На примере показать, что обратное утверждение не верно.

224. Привести пример двух функций, разрывных в точке $x = 1$, сумма которых непрерывна в этой точке.

225. Существует ли на отрезке $[1; 2]$ такая точка, в которой функция $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ имеет значение, равное нулю? [Ответ]

226. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ имеет корень на интервале $(1; 2)$.

227. Доказать, что уравнение $8^x - 3 \cdot 2^x - 16 = 0$ имеет корень на отрезке $[0; 2]$.

228. Имеет ли хотя бы один корень уравнение $\sin x - x + 1 = 0$? [Ответ]

Глава 3

Теория дифференцирования

3.1. Производная. Вывод таблицы

229. Найдите производные функций:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 4;$ [Решение] [Ответ]

2) $y = 2x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - 4x + 5;$ [Ответ]

3) $y = \dfrac{x^4}{4} - 5\sqrt{x} + \dfrac{8}{x^2} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}};$ [Ответ]

4) $y = 3x^5 - 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{10}{\sqrt[5]{x^4}};$ [Ответ]

5) $y = \sin x \cdot e^x;$ [Ответ]

6) $y = x \cdot \operatorname{arcctg} x;$ [Ответ]

7) $y = \sqrt[4]{x} \cdot \ln x;$ [Ответ]

8) $y = x^2 \operatorname{tg} x;$ [Ответ]

9) $y = \dfrac{\cos x}{\ln x};$ [Ответ]

10) $y = \dfrac{3^x}{2x+1};$ [Ответ]

11) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1};$ [Ответ]

12) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x};$ [Ответ]

13) $y = \dfrac{\ln x}{\sin x} + x \operatorname{ctg} x;$ [Ответ]

14) $y = \sin 2x;$ [Ответ]

15) $y = \arcsin 4x;$ [Ответ]

16) $y = \log_3(2x - 5);$ [Ответ]

17) $y = \operatorname{tg}(5x + 1);$ [Ответ]

18) $y = (3x - 8)^7;$ [Ответ]

19) $y = \ln\sqrt{x};$ [Ответ]

20) $y = \sin^2 x;$ [Ответ]

21) $y = \cos^3 x;$ [Ответ]

22) $y = \arcsin\dfrac{x}{5};$ [Ответ]

23) $y = \ln 3x;$ [Ответ]

24) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2};$ [Ответ]

25) $y = \operatorname{arctg} e^x;$ [Ответ]

26) $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1};$ [Ответ]

27) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$ [Ответ]

28) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$ [Ответ]

29) $y = \ln\sin x;$ [Ответ]

30) $y = \ln\cos x;$ [Ответ]

31) $y = \sqrt{1 - x^2};$ [Ответ]

32) $y = \sqrt{1 + 5\cos x};$ [Ответ]

33) $y = \dfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$; [Ответ]

34) $y = \ln \ln x$; [Ответ]

35) $y = \arcsin \sqrt{x}$. [Ответ]

230. Найдите производные функций:

1) $y = \operatorname{tg}^2 3x$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \sqrt{\arcsin(5x+1)}$; [Ответ]

3) $y = 3^{4x^2-5x+1}$; [Ответ]

4) $y = \sin^2 x \cdot e^{4x+1}$; [Ответ]

5) $y = \arccos^3 \left(\dfrac{x^2}{2} + 1 \right)$; [Ответ]

6) $y = \ln \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x + 4}$; [Ответ]

7) $y = \cos \left(2^{x^3} \right)$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{e^{4x+1}}{\operatorname{ctg} \frac{x}{3}}$; [Ответ]

9) $y = \sqrt[3]{\sin^2 3x + \cos^2 3x}$; [Ответ]

10) $y = \dfrac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a}$; [Ответ]

11) $y = \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \dfrac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$; [Ответ]

13) $y = (2^x + 3x^2)^4;$ [Ответ]

14) $y = x \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x;$ [Ответ]

15) $y = \sqrt[5]{\cos(1 - x^2)};$ [Ответ]

16) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 7x}{(x^2 + 1)^3};$ [Ответ]

17) $y = \dfrac{1}{4(1 + 3\cos x)^7};$ [Ответ]

18) $y = \dfrac{1}{4(1 + 3\cos x)^7};$ [Ответ]

19) $y = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1};$ [Ответ]

20) $y = \sqrt{xe^x + 1};$ [Ответ]

21) $y = 2^{\arccos 3x} + (1 - \arcsin 3x)^2;$ [Ответ]

22) $y = \sqrt[3]{3e^x + 2^x - 1} + \ln^7 x;$ [Ответ]

23) $y = \sqrt{1 - 9x^2} \arccos 3x;$ [Ответ]

24) $y = \sin(x^3 + 4^x);$ [Ответ]

25) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}};$ [Ответ]

26) $y = e^{\sin^3 x};$ [Ответ]

27) $y = \ln\left(\sqrt{1 + e^x} + 1\right);$ [Ответ]

28) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x};$ [Ответ]

29) $y = \sqrt{\cos(4^x + 4^{-x})};$ [Ответ]

30) $y = 4^{\sqrt{x^2+2x+2}}$; [Ответ]

31) $y = \left(5^{\arccos x} - \operatorname{tg}^8 x\right)^3$; [Ответ]

32) $y = \sin^3\left(\sqrt{x} + \lg x\right)^4$; [Ответ]

33) $y = \ln\sqrt{\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^3}}$; [Ответ]

34) $y = \operatorname{tg}^6 5x + 7^{\frac{2x}{3x-1}}$; [Ответ]

35) $y = \ln^5(x - 2^{-x})$; [Ответ]

231. Применяя логарифмическое дифференцирование, найдите производные следующих функций:

1) $y = (\sin x)^x$; [Решение] [Ответ]

2) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{x^2}$; [Ответ]

3) $y = (x^2 + 3x)^{x-2}$; [Ответ]

4) $y = x^{2^x}$; [Ответ]

5) $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$; [Ответ]

6) $y = \sqrt[5]{\dfrac{(x^2+1)(x+3)}{(x-3)^3}}$; [Ответ]

7) $y = \dfrac{\cos 2x\sqrt[4]{(2x-3)^3}}{(x+1)^2 \operatorname{ctg} x}$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{2^{x^2-3x}\cdot(1-5x)^3\cdot\sqrt{3x+1}}{(6x+5)^{10}\cdot\sqrt[3]{2x+x^2}}$; [Ответ]

9) $y = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; [Ответ]

10) $y = (3x+1)^{\frac{1}{x}}$; [Ответ]

11) $y = x + x^x + x^{x^x}$; [Ответ]

12) $y = \left(\operatorname{ctg}(4x-1)^3\right)^{\cos 6x}$; [Ответ]

13) $y = (\operatorname{tg} 7x)^{\lg(3x+1)}$; [Ответ]

14) $y = (\sin 5x)^{\cos 5x} + x^{\cos 5x}$; [Ответ]

15) $y = x^{a^x} + x^{x^a} + a^{x^x}$; [Ответ]

16) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}$; [Ответ]

17) $y = (\sin(5x-1))^{\operatorname{ctg} x}$; [Ответ]

18) $y = (6x-9)^{x^2}$; [Ответ]

19) $y = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg}(3x-8)}$; [Ответ]

20) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin(3x+7)}$. [Ответ]

232. Найдите значение производной функции в указанной точке:

1) $y = \sqrt[5]{4-3x^5} + 4^x \dfrac{2}{\ln 4}$, $y'(1)-?$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \ln(\sin 5x) - \dfrac{4x^2}{\pi} + \dfrac{4}{5}$, $y'\left(\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right)-?$; [Ответ]

3) $y = \ln\sqrt{(x-4)^3} + (x-4)^3$, $y'(5)-?$; [Ответ]

4) $y = e^{x+1}\cdot(4x-5)$, $y'(\ln 2)-?$; [Ответ]

5) $y = (x+1)\operatorname{arctg} e^{-2x}$, $y'(0)-?$; [Ответ]

6) $y = \ln\dfrac{2+\operatorname{tg} x}{2-\operatorname{tg} x}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-?$; [Ответ]

7) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{x}$, $y'(5)-?$; [Ответ]

8) $y = (4x^2 - 3x + 1)^3$, $y''(0)$–?; [Ответ]

9) $y = \sin(7x^2 + x)$, $y''(0)$–?; [Ответ]

10) $y = e^{4x^2-5x}$, $y''(0)$–?; [Ответ]

11) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$, $y''(2)$–?; [Ответ]

12) $y = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4}\cos^2 x$, $y'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$–?; [Ответ]

13) $y = \cos(x^2 + 3x)$, $y'''(0)$–?; [Ответ]

14) $y = \sin(2x^2 + 5x)$, $y'''(0)$–?; [Ответ]

15) $y = e^{4x^2-x}$, $y'''(0)$–?; [Ответ]

16) $6x^2 - xy - y^2 + 18x - 8y = -12$, y' в точке $(-2, 0)$–?; [Ответ]

17) $e^y = e - xy$, y' в точке $(0, 1)$–?; [Ответ]

18) $x^4 - xy + y^4 = 1$, y'' в точке $(0, 1)$–?; [Ответ]

19) $e^y + y - x = 0$, y'' в точке $(1, 0)$–?; [Ответ]

233. Найдите производные второго порядка от функций:

1) $y = 3x^2 - x + 5$; [Решение] [Ответ]

2) $y = e^{x^2}$; [Ответ]

3) $y = \operatorname{ctg} x$; [Ответ]

4) $y = \sqrt{1 + x^3}$; [Ответ]

5) $y = \arcsin 2x$; [Ответ]

6) $y = \cos^2 x$. [Ответ]

234. Найдите производные третьего порядка от функций:

1) $y = 5x^2 - 104x - 3$; [Решение] [Ответ]

2) $y = e^x \sin x$; [Ответ]

3) $y = 2x^2 \cos x$; [Ответ]

4) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}$; [Ответ]

5) $y = xe^{-x}$; [Ответ]

6) $y = x \ln x$. [Ответ]

235. Найдите производные n-го порядка от функций:

1) $y = e^{-x}$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \sin 2x$; [Ответ]

3) $y = \cos \dfrac{x}{3}$; [Ответ]

4) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$; [Ответ]

5) $y = 2^{3x-5}$; [Ответ]

6) $y = x^2 \ln x$. [Ответ]

236. Применяя формулу Лейбница, найдите производные указанного порядка порядка от функций:

1) $y = x \sin x$, $y^{(100)}$ — ? [Решение] [Ответ]

2) $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(20)}$ — ? [Ответ]

3) $y = x^2 \sin 2x$, $y^{(50)}$ — ? [Ответ]

4) $y = e^x \cos x$, $y^{(4)}$ — ? [Ответ]

5) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $y^{(5)} - ?$ [Ответ]

6) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, $y^{(8)} - ?$ [Ответ]

237. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Найдите угол наклона этой касательной к оси Ox. Постройте грацик функции, искомую касательную и нормаль.

1) $y = \ln x$, $x_0 = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^2 - 2x$, $x_0 = -1$; [Ответ]

3) $y = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

4) $y = e^x$, $x_0 = 0$; [Ответ]

5) $y = x^3$, $x_0 = 2$; [Ответ]

6) $y = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$; [Ответ]

7) $y = x^2 - 7x + 3$, $x_0 = 1$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{4}{x}$, $x_0 = -1$; [Ответ]

9) $y = \sqrt{x+4}$, $x_0 = 5$. [Ответ]

238. Выяснить, в каких точках кривой $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$. [Ответ]

239. Найти точки на кривой $y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7$, в которых касательная составляет параллельна оси Ox. [Ответ]

240. Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x + 7$, касательная в которой перпендикулярна прямой $x - 20y + 5 = 0$. [Ответ]

241. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$. [Ответ]

242. На кривой $y = x^3$ найти точки, в которых касательные параллельны биссектрисе I и III координатных углов. Сделать рисунок. [Ответ]

243. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = 4x - x^3$ в точках ее пересечения с осью Ox.

244. Составить уравнения касательных к графику функции $y = \frac{x-3}{x+5}$ в точках его пересечения с прямой $y + 2x + 3 = 0$. Сделать рисунок.

245. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $M(3; 2)$.

246. Найти точки на кривых, в которых касательные к графикам функций $f(x) = x^3 - x - 1$ и $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

247. Записать уравнения касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = -4$ и найти угол между этими касательными. Сделать рисунок.

248. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{2x - 5}$, проходящей через точку $A(-1; -3)$. Сделать рисунок.

249. Найти точку на кривой $y = \ln x$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A(1; 0)$ и $B(e; 1)$ этой кривой.

250. Найти угол наклона касательной к графику функции, проходящей через точку A.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 0,5,\ A(1; 2)$;

2) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 6,\ A(2; 4)$.

251. Найти расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до касательной, проведенной в точке пересечения параболы с осью Oy.

252. В какой точке параболы $y = x^2 - 2x + 5$ надо провести касательную, чтобы она была перпендикулярна биссектрисе первого координатного угла.

253. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c, если парабола касается прямой $y = x$ в точке $x_0 = 2$.

254. Найти уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$ и $g(x) = 2x^2 - x - 6$. [Ответ]

255. Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 3x + 5$, проведенными в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

256. Найти угол между двумя касательными, проведенными из точки $(0; -1)$ к графику функции $f(x) = x^2$.

257. Найти координаты центра окружности, описанной около треугольника, образованного осями координат и касатеьной к гиперболе $xy = 7$ в точке $M(7; 1)$. [Ответ]

258. Найти угол, под которым пересекаются кривые. Сделать рисунок.

1) $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$; [Решение] [Ответ]

2) $x^2 = 2y$ и $y = 4 - \dfrac{1}{2}x^2$;

3) $y = 0,5$ и $y = \cos x$;

4) $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \sqrt{x}$;

5) $xy = 8$ и $x^2 - y^2 = 12$.

259. Пусть функция $C = C(q)$ характеризует зависимость издержек производства от количества выпускаемой продукции. Определите средние и предельные издержки при объеме продукции $q = q_0$ ед.

1) $C(q) = 50q - 0,05q^3$, $q_0 = 10$; [Решение] [Ответ]

2) $C(q) = \dfrac{q^2+2q}{q^2+4}$, $q_0 = 4$; [Ответ]

3) $C(q) = qe^{2q+1}$, $q_0 = 1$; [Ответ]

4) $C(q) = \ln(q^3+3q+1)$, $q_0 = 10$. [Ответ]

260. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс.руб.) и выпуском продукции x (млн.руб.) выражается функцией $y = y(x)$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном $x = x_0$ млн.руб.

1) $y(x) = -0,5x + 80$, $x_0 = 60$; [Решение] [Ответ]

2) $y(x) = \sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$; [Ответ]

3) $y(x) = x^3 + x + 1$, $x_0 = 2$; [Ответ]

4) $y(x) = 4\ln x$, $x_0 = e^2$. [Ответ]

261. Объем продукции q, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $q = q(t)$ (ед.), $1 \leqslant t \leqslant 8$, где t — рабочее время в часах. Вычислите производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

1) $q(t) = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$; [Решение] [Ответ]

2) $q(t) = \ln(2t+5)$; [Ответ]

3) $q(t) = -t^3 + 7t^2 + 100t + 25$; [Ответ]

4) $q(t) = e^{-t} + t$. [Ответ]

262. Опытным путем установлены функции спроса $q = q(p)$ и предложения $s = s(p)$, где q и s — количество товара, покупаемого и предлагаемого на продажу соответственно, p — цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены.

1) $q(p) = \dfrac{p+8}{p+2}$, $s(p) = p + 0,5$; [Решение] [Ответ]

2) $q(p) = \dfrac{4}{p+3}$, $s(p) = 2p - 1$; [Ответ]

3) $q(p) = \dfrac{12}{p+1}$, $s(p) = \log_2(p+5)$; [Ответ]

4) $q(p) = \sin\dfrac{\pi p}{2}$, $s(p) = (p-1)^2 + 1$. [Ответ]

3.2. Дифференцируемость функции. Основные теоремы дифференциального исчисления

263. Найдите дифференциалы первого порядка следующих функций:

1) $y = \arcsin 2x$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; [Ответ]

3) $y = \sqrt{\arccos 2x}$; [Ответ]

4) $y = x^2 \operatorname{tg} 3x$; [Ответ]

5) $y = e^{x^2}$; [Ответ]

6) $y = \ln\left(2x^2 - \dfrac{x}{3} + 1\right)$. [Ответ]

264. Используя дифференциал первого порядка, вычислите приближенно:

1) $\sqrt{26}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sqrt{1,2}$; [Решение] [Ответ]

3) $\log_2 1,9$; [Решение] [Ответ]

4) $\operatorname{arctg} 1,01$; [Ответ]

5) $5,99^3$; [Ответ]

6) $\operatorname{arcctg} 0,99$; [Ответ]

7) $\sqrt[4]{80}$; [Ответ]

8) $\sqrt[3]{28}$; [Ответ]

9) $\operatorname{arctg}\dfrac{51}{50}$; [Ответ]

10) $\arcsin\dfrac{3}{100}$; [Ответ]

11) $\sin 29^\circ$; [Ответ]

12) $(3,01)^4$; [Ответ]

13) $\lg\dfrac{51}{5}$; [Ответ]

14) $\sin 31^\circ$; [Ответ]

15) $\sqrt{24}$; [Ответ]

16) $\sqrt[3]{126}$; [Ответ]

17) $\sqrt[5]{33}$; [Ответ]

18) $\sqrt[4]{82}$; [Ответ]

19) $\cos 91^\circ$; [Ответ]

20) $\operatorname{tg} 44^\circ$; [Ответ]

21) $\ln(e+1)$; [Ответ]

22) $\operatorname{arctg} 0,98$; [Ответ]

23) $(3,03)^4$; [Ответ]

24) $\ln 0,96$. [Ответ]

265. Найти приближенные значения функций:

1) $y = x^3 + x^2$ при $x = 2,01$; [Ответ]

2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ при $x = 2,9$; [Ответ]

3) $y = \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{1+x}}$ при $x = 3,02$; [Ответ]

4) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1,3$. [Ответ]

3.3. Правила Лопиталя. Формула Тейлора

266. Используя правило Лопиталя, найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x - 3x}{x}$; [Ответ]

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{e^{2x}}$; [Ответ]

4) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$; [Ответ]

5) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \ln x$; [Ответ]

6) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\operatorname{tg} 2x)^{\pi - 2x}$; [Ответ]

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$; [Ответ]

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$; [Ответ]

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$; [Ответ]

10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 7x}{x \sin 7x}$; [Ответ]

11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}}{x - 2}$; [Ответ]

12) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; [Ответ]

13) $\lim\limits_{x\to a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$; [Ответ]

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$; [Ответ]

15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)x$; [Ответ]

16) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$; [Ответ]

17) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{3}{x}$; [Ответ]

18) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; [Ответ]

19) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; [Ответ]

20) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; [Ответ]

21) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$. [Ответ]

3.4. Исследование функции с помощью производной

267. Найдите экстремумы и промежутки монотонности функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x - 7;$ [Решение] [Ответ]

2) $y = e^{x^2-2x};$ [Ответ]

3) $y = \ln(3x^2 + 2x + 1);$ [Ответ]

4) $y = x^2 e^{-x};$ [Ответ]

5) $y = \sqrt{12x - 3x^3};$ [Ответ]

6) $y = x + \operatorname{arcctg} x;$ [Ответ]

7) $y = x^4 - 2x^2 + 5;$ [Ответ]

8) $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16};$ [Ответ]

9) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7;$ [Ответ]

10) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2};$ [Ответ]

11) $y = x - \ln(1 + x);$ [Ответ]

12) $y = x \ln^2 x;$ [Ответ]

13) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2};$ [Ответ]

14) $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 5;$ [Ответ]

15) $y = e^{3-6x-x^2};$ [Ответ]

16) $y = x^{\frac{2}{3}} - x$; [Ответ]

17) $y = x^3 - 6x^2 + 12x$; [Ответ]

18) $y = \sqrt{3x - 7}$; [Ответ]

19) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; [Ответ]

20) $y = \dfrac{4x + 1}{4x^2 + x + 8}$; [Ответ]

21) $y = \dfrac{1}{10x^2 + x + 20}$; [Ответ]

22) $y = \sqrt{3x^2 + 4x + 6}$. [Ответ]

268. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости функции:

1) $y = x^4 - 4x^3 + x - 1$; [Решение] [Ответ]

2) $y = 2x^2 + \ln x$; [Ответ]

3) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$; [Ответ]

4) $y = \ln(1 + x^2)$; [Ответ]

5) $y = x \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

6) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$; [Ответ]

7) $y = \operatorname{arctg} x - x$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$; [Ответ]

9) $y = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$; [Ответ]

10) $y = (3x+6)e^{\frac{x}{3}}$; [Ответ]

11) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; [Ответ]

12) $y = xe^x$; [Ответ]

13) $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$; [Ответ]

14) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$; [Ответ]

15) $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$; [Ответ]

16) $y = \dfrac{e^x}{x}$; [Ответ]

17) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. [Ответ]

269. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на указанном отрезке:

1) $y = x^3 - 3x$, $[0; 2]$; [Решение] [Ответ]

2) $y = x^4 - 8x^2$, $[1; 3]$; [Ответ]

3) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $[-2; 0]$; [Ответ]

4) $y = x - \sqrt{x}$, $[0; 1]$; [Ответ]

5) $y = x - \ln x$, $\left[\dfrac{1}{e}; e\right]$; [Ответ]

6) $y = (x^2 + 3x + 3)e^{-x}$, $[-4; 0]$; [Ответ]

7) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1; 5]$; [Ответ]

8) $y = x + \sqrt[3]{x}$, $[-1; 1]$; [Ответ]

9) $y = 2x - \sqrt{x}$, $[0; 4]$; [Ответ]

10) $y = x^2 - 4x + 1$, $[-3; 3]$; [Ответ]

11) $y = \operatorname{tg} x - x$, $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$; [Ответ]

12) $y = x^4 - 8x^2 + 3$, $[-2; 2]$. [Ответ]

270. Найдите асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \dfrac{2x^2 - 9}{x - 1}$; [Ответ]

3) $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$; [Ответ]

4) $y = e^{-\frac{1}{x}}$; [Ответ]

5) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$; [Ответ]

6) $y = x \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

7) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{2x}{x - 1}$; [Ответ]

9) $y = \operatorname{arctg} x$; [Ответ]

10) $y = \dfrac{2x - 1}{3x}$; [Ответ]

11) $y = \ln(x - 1)$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$; [Ответ]

13) $y = \dfrac{3x^2}{x^2+5}$; [Ответ]

14) $y = \dfrac{1}{x-3}$. [Ответ]

271. Проведите полное исследование и постройте график функции:

1) $y = \dfrac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)$; [Решение]

2) $y = \ln(x^2+4)$;

3) $y = xe^{-x}$;

4) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-3}$;

5) $y = 4x^2 + \dfrac{25}{x-1}$;

6) $y = x\ln x$;

7) $y = x^3 - 3x^2$;

8) $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$;

9) $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$;

10) $y = \ln(x^2+2x+2)$;

11) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$;

12) $y = -\ln(x^2-4x+5)$;

13) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

14) $y = \dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}$;

15) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x$;

16) $y = \dfrac{1}{5}(x^3 - 6x^2 + 25)$;

17) $y = \dfrac{2}{x^2 + x + 1}$;

18) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

19) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

20) $y = e^{2x - x^2}$;

21) $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$.

272. Предприятие производит q единиц продукции в месяц, а суммарные издержки производства составляют $C = C(q)$. Зависимость между удельной ценой p и количеством единиц продукции q, которое можно продать по этой цене, описывается формулой $p = p(q)$. Рассчитайте, при каких условиях прибыль будем максимальной, найдите эту прибыль.

1) $C(q) = \dfrac{q}{50} + 15q + 800,\ p(q) = 50 - \dfrac{q}{10}$; [Решение] [Ответ]

2) $C(q) = q^2 - 2q + 3,\ p(q) = 20$; [Ответ]

3) $C(q) = 10\ln(q+5),\ p(q) = 10$; [Ответ]

4) $C(q) = 10\ln(q+1) - 5,\ p(q) = 4 + \dfrac{1}{q+1}$, x — целое. [Ответ]

273. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B на a км (считается по кратчайшему расстоянию). Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза 1 т груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути p ден. ед., по железной дороге q ден. ед. и город B расположен на b км севернее завода A? Какова стоимость транспортировки в этом случае?

1) $a = 8$, $p = 4$, $q = 2$, $b = 15$; [Решение] [Ответ]

2) $a = 6$, $p = 8$, $q = 4$, $b = 17$; [Ответ]

3) $a = 7$, $p = 10$, $q = 8$, $b = 18$; [Ответ]

4) $a = 8$, $p = 5$, $q = 5\sqrt{3}$, $b = 16$. [Ответ]

274. Капитал в 1 млрд. рублей может быть размещен в банке под p_1% годовых или инвестирован в производство, причем эффективность вложения ожидается в размере p_2%, а издержки задаются квадратичной зависимостью с коэффициентом a. Кроме того, прибыль при вложении средств в производство облагается налогом в p_3%. Сколько денег следует вложить в производство и сколько в банк, чтобы максимизировать прибыль?

1) $p_1 = 50$, $p_2 = 100$, $p_3 = 10$, $a = 3$; [Решение] [Ответ]

2) $p_1 = 40$, $p_2 = 150$, $p_3 = 20$, $a = 2$; [Ответ]

3) $p_1 = 60$, $p_2 = 200$, $p_3 = 10$, $a = 1$; [Ответ]

4) $p_1 = 30$, $p_2 = 100$, $p_3 = 5$, $a = 0,5$. [Ответ]

275. Функция издержек производства имеет вид: $C(q) = 100 + 3q + q^2$, где q — количество товара. Цена за единицу товара составляет 20 денежных единиц. Найти функцию прибыли и функцию предельной прибыли. Вычислить и объяснить экономический смысл $\pi'(30)$, а также вычислить и объяснить смысл величины $\pi(31) - \pi(30)$.

276. Функция предельных издержек имеет вид: $MC(q) = 60 - 0,04q + 0,003q^2$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если издержки производства 100 единиц продукции составляют 7000 денежных единиц в месяц; б) фиксированные издержки; в) издержки производства 250 единиц продукции; г) максимальное значение прибыли, если продукция продается по цене 65, 5 денежных единиц.

277. Функция средних издержек имеет вид: $AC(q) = 120 + q$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек; б) издержки производства 100 единиц продукции; в) максимальное значение прибыли, если продукция продается по цене 250 денежных единиц.

278. Пусть спрос на некоторый товар зависит от цены следующим образом $D(p) = \frac{25000}{p^2} - \frac{1}{5}$. Найти: а) скорость изменения спроса, при цене 10 денежных единиц и 25 денежных единиц; б) эластичность спроса относительно указанных цен. Сделать вывод. При каком значении цены спрос будет эластичным?

279. Пусть зависимость издержек производства от объема выпускаемой продукции выражается формулой $C(q) = 40q - 0,03q^3$. Определить средние и предельные издержки при объёме продукции $q = 15$ ден.ед. Объяснить экономический смысл полученных величин.

280. Для следующих функций спроса $D(p) = 6 - p$ и предложения $S(p) = p + 2$, где p — цена товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. Вычислить эластичность спроса и предложения относительно равновесной цены. Сделать вывод.

281. Найти эластичность спроса по цене и найти значение эластичности при указанных значениях цены а) $D(p) = \frac{p^3}{2p^2+7}$, $p = 10$; б) $D(p) = 14p^2 + 7p - \frac{8}{\sqrt{p}}$, $p = 25$.

282. Для следующих функций спроса $p = -2q + 150$ и предложения $p = 4q+30$, где q — число единиц товара, найти аналитически и графически точку рыночного равновесия. Вычислить эластичность спроса и предложения относительно равновесного объема продаж. Сделать вывод.

283. Уравнение спроса имеет вид $p = 100 - 10q$. Известна функция издержек $C(q) = 50 + 3q$, где p — цена товара, а q — число единиц товара. Найти максимальное значение прибыли. При какой цене прибыль будет максимальной?

284. Функция предельных издержек имеет вид: $MC(q) = 50+0,02q$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 25 000 денежных единиц в месяц; б) максимальное значение прибыли, если продукция продается по цене 75 денежных единиц.

285. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой $C(q) = q^3 + 15q - 6q^2$. Найти функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. При каком объеме производства q средние издержки минимальны?

286. Функция средних издержек имеет вид: $AC(q) = \frac{320000}{q^2} + \frac{8000}{q} + 0,5$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек; б) функцию предельных издержек. При каком объеме производства полные издержки минимальны?

287. Уравнение спроса имеет вид $D(p) = 100\sqrt{4-p}$. Найти эластичность спроса и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составит а) 150 единиц, б) 50 единиц.

288. Издержки производства некоторой продукции имеют вид $C(q) = 150 + 10q + 0,01q^2$. Цена на товар составляет 36 ден.ед. Найти функцию предельной прибыли и ее значение в точке $q = 15$ ден.ед. Объяснить экономический смысл $\pi'(15)$, а также вычислить и объяснить смысл величины $\pi(16) - \pi(15)$.

289. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой $C(q) = 2000 + 100q + 0,1q^2$. Найти функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. При каком объеме производства q скорость изменения средних издержек равна нулю?

290. Функция совокупных издержек монополии и уравнение спроса на этот товар имеют вид $C(q) = 400+30q+q^2$; $p = -\frac{1}{3}q^2 - 3q + 50$, где p — цена товара, а q — число единиц товара. При каком объеме производства достигается максимальное значение прибыли?

291. Для следующих функций спроса найти эластичность и найти значение эластичности при указанных значениях цены а) $D(p) = \frac{p^3+7}{p}$, $p = 21$; б) $D(p) = \frac{p}{p^2+7p-3}$, $p = 17$.

292. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой $C(q) = 1000+2q+0,04q^2$. Найти фиксированные издержки, функцию предельных издержек, функцию средних издержек и функцию скорости изменения средних издержек. При каком объеме производства q средние издержки минимальны?

293. Функция совокупных издержек монополии и уравнение спроса на этот товар имеют вид $C(q) = 900 + 40q + 5q^2$; $p = -2q^2 - 4q + 280$, где p — цена товара, а q — число единиц товара. При каком объеме производства достигается максимальное значение прибыли?

294. Функция издержек производства некоторой продукции определяется формулой $C(q) = 96 - 2q^2 + q^3$. При каком объеме производства предельные и средние издержки совпадают? Найти эластичность полных и средних издержек при этом объеме.

295. Функция предельной прибыли имеет вид: $M\pi(q) = 25 - 0,004q$, где q — количество единиц продукции. Прибыль предприятия составляет $35,8$ тысяч денежных единиц, если продано $1\,200$ изделий. Найти функцию прибыли. При каком значении q прибыль будет максимальной?

296. Пусть зависимость издержек производства от объёма выпускаемой продукции выражается формулой $C(q) = 15q - 6q^3$. Определить средние и предельные издержки при объёме продукции $q = 15$ ден.ед.

297. Пусть производственная функция задается следующей эмпирической формулой: $F(L) = 300\sqrt{L} - 4L$, где L — численность персонала. Вычислить предельную производительность при $L = 1$; $L = 9$; $L = 100$; $L = 2500$; $L = 225\,000$. Сделать вывод, как изменяется предельная производительность с ростом численности персонала.

298. Пусть зависимость между себестоимостью продукции и объёмом производства задается формулой $C(Q) = 50 - 0,4Q$. Определить эластичность себестоимости при выпуске продукции а) $Q = 15$ единиц и б) $Q = 150$ единиц. Сделать вывод.

299. Издержки производства некоторой продукции имеют вид $C(q) = 100 + 3q^2$. Цена на товар изменяется по закону: $p(q) = 400 - \frac{2q}{5}$. Определить, при каком объеме производства q прибыль π будет максимальной.

300. Функция предельных издержек имеет вид: $MC(q) = 30qe^{0,001q^2}$, где q — количество единиц продукции. Найти: а) функцию полных издержек, если фиксированные издержки составляют 20 000 денежных единиц в месяц; б) функцию средних издержек; при каком объеме производства средние издержки будут минимальны?

301. Для следующих функций спроса найти эластичность и найти значение эластичности при указанных значениях цены а) $D(p) = 154 - \frac{2p^3}{p+1}$, $p = 7$; б) $D(p) = p^3 + 7p - 3$, $p = 4$.

Глава 4

Теория интегрирования

4.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Простейшие методы интегрирования

302. Найдите интегралы:

1) $\int (2x+1)^2 dx;$ [Решение] [Ответ]

2) $\int \frac{x^2-1}{x}\, dx;$ [Ответ]

3) $\int \left(x + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx;$ [Ответ]

4) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx;$ [Ответ]

5) $\int \frac{2x - 3\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x^3}}{x}\, dx;$ [Ответ]

6) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\, dx;$ [Ответ]

7) $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx;$ [Ответ]

8) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx;$ [Ответ]

9) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx;$ [Ответ]

10) $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx;$ [Ответ]

11) $\displaystyle\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\,dx;$ [Ответ]

12) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx;$ [Ответ]

13) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx;$ [Ответ]

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 2x};$ [Ответ]

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos 2x};$ [Ответ]

16) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx;$ [Ответ]

17) $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\,dx;$ [Ответ]

18) $\displaystyle\int e^x\left(3+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)\,dx;$ [Ответ]

19) $\displaystyle\int 4^x\left(3+\frac{4^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\,dx;$ [Ответ]

20) $\displaystyle\int \left(2^{x+1}-5^{x-1}\right)\,dx;$ [Ответ]

21) $\displaystyle\int \left(2^x+3^x\right)^2\,dx;$ [Ответ]

22) $\displaystyle\int \frac{2^x+5^x}{10^x}\,dx;$ [Ответ]

23) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2};$ [Ответ]

24) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; [Ответ]

25) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x - 4}{\sin^2 x}\,dx$; [Ответ]

26) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$; [Ответ]

27) $\displaystyle\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx$; [Ответ]

28) $\displaystyle\int \frac{x^5-x+1}{x^2+1}\,dx$; [Ответ]

29) $\displaystyle\int \frac{-2x^4+4x^2-1}{1-x^2}\,dx$; [Ответ]

30) $\displaystyle\int \frac{dx}{16-x^2}$; [Ответ]

31) $\displaystyle\int \left(\frac{2-x}{x}\right)^3 dx$; [Ответ]

303. Найдите интегралы, применив подходящие подстановки:

1) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx$; [Решение] [Ответ]

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$; [Решение] [Ответ]

5) $\displaystyle\int e^{5-2x^2} x\,dx;$ [Решение] [Ответ]

6) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx;$ [Решение] [Ответ]

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+9x^2};$ [Ответ]

8) $\displaystyle\int (2+5x)^9\,dx;$ [Ответ]

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-1};$ [Ответ]

10) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx;$ [Ответ]

11) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx;$ [Ответ]

12) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1};$ [Ответ]

13) $\displaystyle\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ [Ответ]

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\arcsin^4 x\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ [Ответ]

15) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx;$ [Ответ]

16) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx;$ [Ответ]

17) $\displaystyle\int 4^{\cos 5x}\sin 5x\,dx;$ [Ответ]

18) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx;$ [Ответ]

19) $\int \sqrt[3]{3+5\cos x}\,\sin x\,dx;$ [Ответ]

20) $\int \frac{x^3\,dx}{(8x^4+125)^{\frac{3}{4}}}\,dx;$ [Ответ]

21) $\int \frac{x\,dx}{9+x^4}\,dx;$ [Ответ]

22) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^{12}+3}}\,dx;$ [Ответ]

23) $\int \frac{dx}{x\ln x};$ [Ответ]

24) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx;$ [Ответ]

25) $\int \cos\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^2};$ [Ответ]

26) $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ [Ответ]

27) $\int \frac{2x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx;$ [Ответ]

28) $\int \frac{e^{3x}\,dx}{e^x-1};$ [Ответ]

29) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{e^x}\right)}{e^x}\,dx;$ [Ответ]

30) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}};$ [Ответ]

31) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-1}$; [Ответ]

32) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$; [Ответ]

33) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; [Ответ]

34) $\int \cos^4 x \sin x\,dx$; [Ответ]

35) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; [Ответ]

36) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}\,dx$; [Ответ]

37) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos 2x}}$. [Ответ]

304. Найдите интегралы, применив метод интегрирования по частям:

1) $\int \ln(x+8)\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\int (3x-2)\ln^2 x\,dx$; [Решение] [Ответ]

4) $\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$; [Решение] [Ответ]

5) $\int (x+8)\sin 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

6) $\displaystyle\int (x^2 - 3)\cos x\,dx;$ [Решение] [Ответ]

7) $\displaystyle\int x\cos(x-4)\,dx;$ [Решение] [Ответ]

8) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx;$ [Ответ]

9) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 2x\,dx;$ [Ответ]

10) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx;$ [Ответ]

11) $\displaystyle\int (5x-1)e^{2x}\,dx;$ [Ответ]

12) $\displaystyle\int x^2\sin 3x\,dx;$ [Ответ]

13) $\displaystyle\int (2x+3)\cos 5x\,dx;$ [Ответ]

14) $\displaystyle\int e^x\sin 2x\,dx;$ [Ответ]

15) $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,dx;$ [Ответ]

16) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx;$ [Ответ]

17) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx;$ [Ответ]

18) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx;$ [Ответ]

19) $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx;$ [Ответ]

20) $\displaystyle\int \sqrt{25-x^2}\,dx;$ [Ответ]

21) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+7}\,dx;$ [Ответ]

22) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx;$ [Ответ]

23) $\displaystyle\int \ln(x^2+4)\,dx;$ [Ответ]

24) $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\,dx;$ [Ответ]

25) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,dx;$ [Ответ]

26) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx;$ [Ответ]

27) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx;$ [Ответ]

28) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx;$ [Ответ]

29) $\displaystyle\int (e^x+2x)^2\,dx;$ [Ответ]

30) $\displaystyle\int (e^x-\sin x)^2\,dx;$ [Ответ]

31) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx;$ [Ответ]

32) $\int \sqrt[3]{x} \ln^2 x \, dx;$ [Ответ]

33) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, dx;$ [Ответ]

34) $\int x \cos^2 x \, dx;$ [Ответ]

35) $\int x \sin \sqrt{x} \, dx;$ [Ответ]

36) $\int x^2 e^{3x} \, dx;$ [Ответ]

37) $\int x e^{-2x} \, dx;$ [Ответ]

38) $\int (x^2 + 1) \sin 2x \, dx.$ [Ответ]

4.2. Интегрирование классов функций

305. Найдите интегралы от рациональных функций:

1) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2+2x+2}\,dx;$ [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx;$ [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5};$ [Ответ]

4) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10};$ [Ответ]

5) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2\,dx}{x^2+4x+5};$ [Ответ]

6) $\displaystyle\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}\,dx;$ [Ответ]

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x};$ [Ответ]

8) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx;$ [Ответ]

9) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)^3}\,dx;$ [Ответ]

10) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{(x+4)^2}\,dx;$ [Ответ]

11) $\displaystyle\int \frac{x^2-14x+52}{(x-4)(x+2)(x-5)}\,dx;$ [Ответ]

12) $\displaystyle\int \frac{5x^2-14x+3}{(2x+1)(x-1)(x-2)}\,dx;$ [Ответ]

13) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2(x+2)}\,dx;$ [Ответ]

14) $\displaystyle\int \frac{3x^2-10x+19}{(x-1)^2(x+5)}\,dx;$ [Ответ]

15) $\displaystyle\int \frac{x^2-7x-17}{(x^2+4x+8)(x-3)}\,dx;$ [Ответ]

16) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-5x^2-11x-10}{(x^2+2x+2)(x-3)}\,dx;$ [Ответ]

17) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+5x+6)(x+2)}\,dx;$ [Ответ]

18) $\displaystyle\int \frac{2x^3+25x^2+61x-82}{(x^2+6x-7)(x+5)}\,dx;$ [Ответ]

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1};$ [Ответ]

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1};$ [Ответ]

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1};$ [Ответ]

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+2x^2-3};$ [Ответ]

23) $\displaystyle\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}\,dx;$ [Ответ]

24) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x-2}\,dx;$ [Ответ]

25) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+7}\,dx;$ [Ответ]

26) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx;$ [Ответ]

27) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx;$ [Ответ]

28) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx;$ [Ответ]

29) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^3-3x-2}\,dx;$ [Ответ]

30) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-9)(x^2+2)};$ [Ответ]

31) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2};$ [Ответ]

32) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx.$ [Ответ]

306. Найдите интегралы от иррациональных функций:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}};$ [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}\,dx;$ [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}};$ [Ответ]

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; [Ответ]

5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; [Ответ]

6) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$; [Ответ]

7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$; [Ответ]

8) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$; [Ответ]

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; [Ответ]

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; [Ответ]

11) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; [Ответ]

12) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; [Ответ]

13) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$; [Ответ]

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$; [Ответ]

15) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt[3]{x-3}}{1+\sqrt{x-3}}\,dx$; [Ответ]

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; [Ответ]

17) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$; [Ответ]

18) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1-\sqrt[3]{x})}\,dx$; [Ответ]

19) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$; [Ответ]

20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}\,dx$; [Ответ]

21) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}\,dx$; [Ответ]

22) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}\,dx$; [Ответ]

23) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\,dx$; [Ответ]

24) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; [Ответ]

25) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$; [Ответ]

26) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$; [Ответ]

27) $\displaystyle\int \frac{5x+6}{\sqrt{1-3x}}\,dx$; [Ответ]

28) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$; [Ответ]

29) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; [Ответ]

30) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$; [Ответ]

31) $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; [Ответ]

32) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. [Ответ]

307. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

1) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x\,dx$; [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\,dx$; [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\int \sin 5x \sin 2x\,dx$; [Ответ]

4) $\displaystyle\int \cos 3x \cos 4x\,dx$; [Ответ]

5) $\displaystyle\int \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx$; [Ответ]

6) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x\,dx$; [Ответ]

7) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$; [Ответ]

8) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$; [Ответ]

9) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx;$ [Ответ]

10) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx;$ [Ответ]

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x};$ [Ответ]

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x};$ [Ответ]

13) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx;$ [Ответ]

14) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\, dx;$ [Ответ]

15) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\, dx;$ [Ответ]

16) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\, dx;$ [Ответ]

17) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx;$ [Ответ]

18) $\displaystyle\int \cos^6 3x\, dx;$ [Ответ]

19) $\displaystyle\int \sin^4 2x\, dx;$ [Ответ]

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x};$ [Ответ]

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x};$ [Ответ]

22) $\int \mathrm{tg}^4\, x\, dx$; [Ответ]

23) $\int \mathrm{tg}^5\, x\, dx$; [Ответ]

24) $\int \dfrac{dx}{2+\cos x}$; [Решение] [Ответ]

25) $\int \dfrac{dx}{1+\sin x}$; [Ответ]

26) $\int \dfrac{\sin x}{1-\sin x}\, dx$; [Ответ]

27) $\int \dfrac{dx}{\sin x+\cos x}$; [Ответ]

28) $\int \dfrac{dx}{\sin x-\cos x}$; [Ответ]

29) $\int \dfrac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$; [Ответ]

30) $\int \dfrac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$; [Ответ]

31) $\int \dfrac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; [Ответ]

32) $\int \dfrac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}\, dx$; [Ответ]

33) $\int \dfrac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}\, dx$; [Ответ]

34) $\int \dfrac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$; [Ответ]

4.3. Определенный интеграл

308. Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^2 (6x^2-5)\,dx;$ [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+2};$ [Ответ]

3) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$ [Ответ]

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x};$ [Ответ]

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^2\frac{x}{2}\,dx;$ [Ответ]

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx;$ [Ответ]

7) $\displaystyle\int_1^2 \left(5x^2-\frac{3}{x^2}\right)\,dx;$ [Ответ]

8) $\int\limits_0^{\pi} \sin 3x \cos 2x \, dx;$ [Ответ]

9) $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \operatorname{tg}^2 x \, dx.$ [Ответ]

309. Воспользовавшись подходящим методом, найдите интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x e^{x^2} \, dx;$ [Решение] [Ответ]

2) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx;$ [Решение] [Ответ]

3) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}};$ [Решение] [Ответ]

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y \, dy}{4+\sqrt{\sin y}};$ [Решение] [Ответ]

5) $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4} \, dx;$ [Решение] [Ответ]

6) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x \, dx}{x^3-1};$ [Решение] [Ответ]

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx$; [Решение] [Ответ]

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$; [Ответ]

9) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; [Ответ]

10) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$; [Решение] [Ответ]

11) $\displaystyle\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}\,dx$; [Решение] [Ответ]

12) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)\,dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2}$; [Решение] [Ответ]

13) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; [Ответ]

14) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$; [Ответ]

15) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}}\,dx$; [Ответ]

16) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; [Ответ]

17) $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$; [Ответ]

18) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx$; [Ответ]

19) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; [Ответ]

20) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x+x^2}$; [Ответ]

21) $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$; [Ответ]

22) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; [Ответ]

23) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$; [Ответ]

24) $\int\limits_0^2 \sqrt{x}\ln x\,dx$; [Ответ]

25) $\int\limits_0^{\pi} \sin x \cos^2 x \, dx$; [Ответ]

26) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$; [Ответ]

27) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}/2} \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$; [Ответ]

28) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx$; [Ответ]

29) $\int\limits_1^{2} \frac{e^x}{e^x-1} \, dx$; [Ответ]

30) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$; [Ответ]

31) $\int\limits_1^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$; [Ответ]

32) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; [Ответ]

33) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; [Ответ]

34) $\displaystyle\int\limits_1^3 \ln x\,dx;$ [Ответ]

35) $\displaystyle\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}};$ [Ответ]

36) $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln x\,dx;$ [Ответ]

37) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x};$ [Ответ]

38) $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x+1}};$ [Ответ]

39) $\displaystyle\int\limits_{e^{-3}}^{e^{-2}} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}};$ [Ответ]

40) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx;$ [Ответ]

41) $\displaystyle\int\limits_{e^3}^{e^8} \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$ [Ответ]

42) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$; [Ответ]

43) $\displaystyle\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$. [Ответ]

4.4. Приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы

310. Найдите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

1) $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi;$ [Решение] [Ответ]
2) $y = 4 - x^2,\ y = 0;$ [Ответ]
3) $y = x^2 + 4,\ y = 5;$ [Ответ]
4) $y = 5 - x^2,\ y = 4;$ [Ответ]
5) $y = (x + 4)(-x - 3)$ и осью абсцисс; [Ответ]
6) $y = x^2 - 1,\ y = 0,\ x = 2;$ [Ответ]
7) $y = 2x - x^2,\ y = x;$ [Ответ]
8) $y = x^2,\ y = 2x + 3;$ [Ответ]
9) $y = x^2 - 3,\ y = 6 - 2x^2;$ [Ответ]
10) $y = 9^x,\ y = 9,\ x = 0;$ [Ответ]
11) $4y = x^2,\ y^2 = 4x;$ [Ответ]
12) $y = x^3,\ y = \sqrt{x};$ [Ответ]
13) $y = x^2 - 2,\ y = -x;$ [Ответ]
14) $y = x - \dfrac{\pi}{2},\ y = \cos x,\ x = 0;$ [Ответ]
15) $y = x + 1,\ y = \cos x,\ y = 0;$ [Ответ]
16) $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e;$ [Ответ]

17) $y = (1-x)(x-5)$, $y = 4$, $x = 5$; [Ответ]

18) $y = x^2 - 3x$, $y = -2$, $y = 0$; [Ответ]

19) $y^2 + x = 4$, $y^2 - 3x = 12$; [Ответ]

20) $y = x^2$, $y = 2 - |x|$; [Ответ]

21) $y = |x| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$; [Ответ]

22) $y = |x^2 - 1| + 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$; [Ответ]

23) $y = |\log_a x|$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{a}$, $x = a$, $(a > 1)$; [Ответ]

24) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$; [Ответ]

25) $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$, $x = 3$, $x = 5$; [Ответ]

26) $y = x^3$, $y = (x-2)^2$ и осью абсцисс; [Ответ]

27) $y = x^3$, $y = x^2 - x + 1$ и осью ординат; [Ответ]

28) $x^2 + y^2 = 8$, $y = \dfrac{x^2}{2}$; [Ответ]

29) $x^2 + y^2 = 9$, $y = 3 - x$, расположеную в первой четверти; [Ответ]

30) $x^2 + y^2 = 16$, $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; [Ответ]

31) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. [Ответ]

311. Найдите длину дуги кривой:

1) $y = \sqrt{x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; [Решение] [Ответ]

2) $y = \dfrac{4}{5}\sqrt[5]{x^4}$, $0 \leqslant x \leqslant 9$; [Ответ]

3) $y = \dfrac{x^2}{4}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$; [Ответ]

4) $y = 4 - \dfrac{x^2}{2}$, $y \geqslant 0$; [Ответ]

5) $y = \ln x$, $2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{6}$; [Ответ]

6) $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$; [Ответ]

7) $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant \ln 7$; [Ответ]

8) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$; [Ответ]

9) $y = 1 - x^2$, отсеченной осью Ox; [Ответ]

10) $y = 2\ln \dfrac{4}{4 - x^2}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; [Ответ]

11) $y = \sqrt{2x - x^2} - 1$, $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$; [Ответ]

12) $y = \dfrac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; [Ответ]

13) $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; [Ответ]

14) $y = \arcsin e^x$, $-\ln 7 \leqslant x \leqslant -\ln 2$; [Ответ]

15) $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{9}{16}$; [Ответ]

16) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$, $\dfrac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$. [Ответ]

312. Найдите объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми:

1) $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$ вокруг оси Ox; [Решение] [Ответ]

2) $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=1$ вокруг оси Ox; [Ответ]

3) $y^2=6x$, $y=0$, $x=3$ вокруг оси Ox; [Ответ]

4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ вокруг оси Ox; [Ответ]

5) $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ вокруг оси Ox; [Ответ]

6) $y=3\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ вокруг оси Ox; [Ответ]

7) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$ вокруг оси Ox; [Ответ]

8) $y=\sqrt{x+1}$, $x+y=1$, $y=0$, вокруг оси Ox; [Ответ]

9) $y=\cos x$, $y=1-x$, $y=0$, вокруг оси Ox; [Ответ]

10) $y=\sqrt{x}e^x$, $x=1$, $y=0$, вокруг оси Ox; [Ответ]

11) $y=4-x^2$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси Oy; [Ответ]

12) $y=x^2$, $8x=y^2$ вокруг оси Oy; [Ответ]

13) $y=\arcsin x$ вокруг оси Oy; [Ответ]

14) $y^2=4x$, $y=x$ вокруг оси Oy; [Ответ]

15) $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ вокруг оси Oy; [Ответ]

16) $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ вокруг оси Oy; [Ответ]

17) $y=\arccos\dfrac{x}{5}$, $y=\arccos\dfrac{x}{3}$, $y=0$ вокруг оси Oy; [Ответ]

18) $y=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$ вокруг оси Oy; [Ответ]

19) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=\dfrac{x}{2}$, $x=0$ вокруг оси Oy; [Ответ]

20) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy. [Ответ]

313. Найдите среднее значение издержек $K = K(x)$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от x_1 до x_2 единиц. Укажите объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

1) $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; [Решение] [Ответ]

2) $K(x) = 6x^2 + 4x + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; [Ответ]

3) $K(x) = \log_2(x + 1)$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; [Ответ]

4) $K(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2}$, $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$. [Ответ]

314. Определите объем продукции, произведенной рабочим за k-й час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $z = z(t)$.

1) $z(t) = \dfrac{2}{3t + 4} + 3$, $k = 2$; [Решение] [Ответ]

2) $z(t) = \dfrac{3}{3t + 2} + 5$, $k = 5$; [Ответ]

3) $z(t) = xe^{-x}$, $k = 3$; [Ответ]

4) $z(t) = \cos \dfrac{x}{4} + 1$, $k = 1$. [Ответ]

315. Определите дисконтированный доход за T лет при процентной ставке $p\%$, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили m млн руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на n млн руб.

1) $T = 3$, $p = 8$, $m = 10$, $n = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $T = 5$, $p = 10$, $m = 5$, $n = 2$; [Ответ]

3) $T = 10,\ p = 5,\ m = 20,\ n = 1;$ [Ответ]

4) $T = 4,\ p = 10,\ m = 7,\ n = 3.$ [Ответ]

316. Определите запас товаров на складе, образуемый за k дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t)$.

1) $f(t) = 3t^2 + 3t + 4,\ k = 2;$ [Решение] [Ответ]

2) $f(t) = 5t - t^2 + 6,\ k = 4;$ [Ответ]

3) $f(t) = te^{-t^2},\ k = 1;$ [Ответ]

4) $f(t) = te^{-t},\ k = 3;$ [Ответ]

317. Вычислите интегралы или установите их расходимость:

1) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3};$ [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx;$ [Ответ]

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\,dx;$ [Решение] [Ответ]

4) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\,\mathrm{arctg}^2\,3x};$ [Решение] [Ответ]

5) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4};$ [Ответ]

6) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$; [Ответ]

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$; [Ответ]

8) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}\,dx$; [Ответ]

9) $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$; [Ответ]

10) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. [Ответ]

11) $\displaystyle\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. [Ответ]

318. Вычислите интегралы или установите их расходимость:

1) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; [Ответ]

4) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; [Ответ]

5) $\displaystyle\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$; [Решение] [Ответ]

6) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; [Ответ]

7) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$; [Ответ]

8) $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; [Ответ]

9) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}\,dx$; [Ответ]

10) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$. [Ответ]

11) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^2\ln x\,dx$. [Ответ]

12) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; [Ответ]

13) $\displaystyle\int_0^e \sin(\ln x)\,dx$; [Ответ]

Глава 5

Дифференцирование функций двух переменных

5.1. Функция двух переменных. Дифференциал

5.1.1. Общие задачи

319. Вычислить частные значения функций:

1) $z = x^2 \cos y$ в точке $M(2; \pi/3)$; [Решение] [Ответ]

2) $z = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$ при $x = 3$ и $y = 1$, а также при $x = 1$ и $y = 3$; [Ответ]

3) $z = \sqrt{xy^2 + x + 1}$ в точках $M(1/2; 1)$ и $P(2; -1)$. [Ответ]

320. Найти области определения следующих функций:

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $z = \arcsin(x + y)$; [Решение] [Ответ]

3) $z = \dfrac{1}{y - 3x}$; [Ответ]

4) $z = \ln(x + y)$; [Ответ]

5) $z = \sqrt{y^2 - 2x + 4}$; [Ответ]

6) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 16}}$; [Ответ]

7) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x + y}} + \sqrt{x - y}$; [Ответ]

8) $z = \sqrt{xy}$; [Ответ]

9) $z = \arccos(2 - x^2 - y^2)$; [Ответ]

10) $z = a^2 - x^2 - 2y^2$; [Ответ]

11) $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$; [Ответ]

12) $z = y + \sqrt{x}$. [Ответ]

321. Найти множества точек разрыва данных функций:

1) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + 3x - y^2 + 2}{x^2 + y^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$; [Ответ]

3) $f(x, y) = e^{\frac{2}{x^2+y^2}}$; [Ответ]

4) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{(x-y)^4}$; [Ответ]

5) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$; [Ответ]

6) $f(x, y) = \dfrac{8}{4 - x^2 - y^2}$; [Ответ]

7) $f(x, y) = \dfrac{x + 3y}{2y - x}$; [Ответ]

8) $f(x, y) = \dfrac{1}{y - x^2}$. [Ответ]

322. Найти частные производные функции:

1) $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 2x^3 - 6x^2y + y^3$; [Решение] [Ответ]

3) $u = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$; [Ответ]

4) $z = x^3 + 6xy^2 - 4y^3 - 2xy$; [Ответ]

5) $z = \dfrac{y - 2x}{x + 2y}$; [Ответ]

6) $z = y^x$; [Ответ]

7) $z = \dfrac{x}{y}$; [Ответ]

8) $z = x^2 \cos(x + 3y)$; [Ответ]

9) $z = \ln(3x^2 - y^4)$; [Ответ]

10) $z = \sin\sqrt{x - y^3}$; [Ответ]

11) $z = \arcsin 2x^3y$; [Ответ]

12) $z = e^{2x^2 - y^5}$; [Ответ]

13) $z = \operatorname{tg}\dfrac{3x - y^2}{x}$; [Ответ]

14) $r = \rho^2 \sin^4\theta$; [Ответ]

15) $u = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y}$; [Ответ]

16) $z = e^{xy(x^2+y^2)}$; [Ответ]

17) $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$; [Ответ]

18) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1 + x^2}$; [Ответ]

19) $u = z^{xy^2}$; [Решение] [Ответ]

20) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{-\frac{z}{y}}$; [Ответ]

21) $u = (x - y)(x - z)(y - z)$. [Ответ]

323. Для функции $f(x, y) = x^2\sin^2 y$ вычислить f'_x и f'_y в точке $(-1; \pi/4)$. [Ответ]

324. Для функции $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{x - y}$ вычислить $f'_x(3, -4)$ и $f'_y(-12, 5)$. [Ответ]

325. Для функции $f(x, y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ вычислить f'_x и f'_y в точке $(3; 2)$. [Ответ]

326. Проверить выполнение теоремы Шварца на примере смешанных частных производных второго порядка:

1) $z = \dfrac{x^2}{y^2}$;

2) $z = \ln(x - 2y)$;

3) $z = \dfrac{x^2}{1 - y}$;

4) $z = x^2 \sin\sqrt{y}$;

5) $z = y^{x^2}$;

6) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

327. Найти частные производные второго порядка функции z:

1) $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^4 - 5x^2y - 2y^3$; [Ответ]

3) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$; [Ответ]

4) $z = \sin(x^2 + y^3)$; [Ответ]

5) $z = \sin y \ln x + e^x \ln y$; [Ответ]

6) $z = \sqrt{2xy + y^2}$; [Ответ]

7) $z = xy + \dfrac{y}{x}$; [Ответ]

8) $z = \operatorname{tg} xy^2$; [Ответ]

9) $z = \dfrac{x^2}{1-2y}$; [Ответ]

10) $z = \sin x \cos y$; [Ответ]

11) $z = x + y + \dfrac{xy}{x-y}$; [Ответ]

12) $z = xe^y$; [Ответ]

13) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x}$; [Ответ]

14) $z = \ln(x + e^{xy})$; [Ответ]

15) $z = x^{2y}$; [Ответ]

16) $z = e^x(\cos y + x \sin y)$. [Ответ]

328. Показать, что функция z удовлетворяет данному дифференциальному уравнению:

1) $z = y\ln(x^2 - y^2)$, $\quad \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$; [Решение]

2) $z = y^{\frac{y}{x}} \sin \dfrac{y}{x}$, $\quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz$;

3) $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $\quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$;

4) $z = e^{\frac{x}{y}}$, $\quad y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x}$;

5) $z = \dfrac{xy}{x-y}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}$.

329. Показать, что уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $z = e^x \cos y$;

2) $z = \ln(x^2 + y^2)$.

330. Показать, что уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $u(x, t) = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$;

2) $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, где φ и ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

331. Найти полный дифференциал данной функции:

1) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 y^3 + 5xy$; [Ответ]

3) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$; [Ответ]

4) $z = yx^y$; [Ответ]

5) $z = e^{y^2 - xy}$; [Ответ]

6) $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$; [Ответ]

7) $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$; [Ответ]

8) $z = \operatorname{ctg} \dfrac{y}{x}$; [Ответ]

9) $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; [Ответ]

10) $z = \cos \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$; [Ответ]

11) $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$; [Ответ]

12) $v = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{t}$; [Ответ]

13) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; [Ответ]

14) $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$; [Ответ]

15) $z = \sqrt{u + \sqrt{u^2 + v^2}}$; [Ответ]

16) $z = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$; [Ответ]

17) $z = (x^2 + y^2)\dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$; [Ответ]

18) $u = \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$; [Решение] [Ответ]

19) $u = x^2yz^4$; [Ответ]

20) $u = \dfrac{y}{xz}$; [Ответ]

21) $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$; [Ответ]

22) $u = x^{\frac{y}{z}}$; [Ответ]

23) $u = x^{y^z}$. [Ответ]

332. Найти полный дифференциал функции:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, при $x = 2$, $y = 3$, $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$; [Ответ]

2) $z = e^{xy}$, при $x = 1$, $y = 2$, $dx = -0{,}1$, $dy = 0{,}1$. [Ответ]

333. Вычислить приближенно, заменяя приращение функции её дифференциалом:

1) $1{,}07^{3{,}97}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sqrt{(4{,}03)^2 + (3{,}05)^2}$; [Ответ]

3) $1{,}03 \cdot 9{,}98$; [Ответ]

4) $1{,}94e^{0{,}12}$; [Ответ]

5) $1{,}04^{2{,}03}$; [Ответ]

6) $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$; [Указание] [Ответ]

7) $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$; [Ответ]

8) $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$; [Ответ]

9) $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$; [Указание] [Ответ]

10) $\cos 2{,}36 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}97 \cdot 3^{2{,}05}$; [Ответ]

11) $1{,}002 \cdot 2{,}003^2 \cdot 3{,}004^3$. [Ответ]

334. Найти производную $\frac{dz}{dt}$, если известно, что

1) $z = e^{x^2+y^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = a\sin t$, $y = a\cos t$; [Ответ]

3) $z = e^{xy}\ln(x+y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$; [Ответ]

4) $z = x^5 + 2xy - y^3$, $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$; [Решение] [Ответ]

5) $z = xy \operatorname{arctg} xy$, $x = t^2 + 1$, $y = t^3$; [Ответ]

6) $z = e^{2x-3y}$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - t$; [Ответ]

7) $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$; [Ответ]

8) $z = xy + xyu$, $x = \sin t$, $y = \ln t$, $u = e^t$; [Решение] [Ответ]

9) $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$; [Ответ]

10) $z = x^2y^3u$, $x = t$, $y = t^2$, $u = \sin t$. [Ответ]

335. Найти производную по направлению функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;1)$. Рассмотреть случаи, когда направление составляет с осью Ox угол:

1) $\dfrac{\pi}{3}$; [Решение] [Ответ]

2) $\dfrac{\pi}{6}$; [Ответ]

3) $\dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

336. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла в точке $M(1;1)$ функции $z = x^3y - 5xy^2 + 8$. [Ответ]

337. Найти производную по направлению биссектрисы первого координатного угла функции $z = \ln(e^x + e^y)$. [Ответ]

338. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 — точка с координатами $(2;4;-3)$. [Ответ]

339. Найти производную функции $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2$ в точке $M(2;3;1)$ по направлению

1) радиус-вектора точки M; [Ответ]

2) вектора $a = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. [Ответ]

340. Найти градиент функции z в точке M:

1) $z = x^2 + 2y^2 - 5,\ M(2;-1)$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 4 - x^2 - y^2,\ M(1;2)$; [Ответ]

3) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1},\ M(0;3)$; [Ответ]

4) $z = (x-y)^2,\ M(1;1)$; [Ответ]

5) $z = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}},\ M(1;1)$. [Ответ]

341. Найти градиент функции u:

1) $u = x^2yz^3$; [Решение] [Ответ]

2) $u = x^2 + y^2 - z^2$; [Ответ]

3) $u = e^{xy} - yz^2$; [Ответ]

4) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. [Ответ]

342. Найти $\operatorname{grad} u$ и $|\operatorname{grad} u|$ в точке M:

1) $u = x^2 - y^2 + yz - x,\ M(1,0,-1)$. [Решение] [Ответ]

2) $u = 3x^2 - xy^3 + xz - z^2,\ M(1,2,3)$; [Ответ]

3) $u = x^2 + y^2 - z^2,\ M(1;-1;2)$; [Ответ]

4) $u = 4 - x^2 - y^2 + z^2,\ M(3;2;1);$ [Ответ]

5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ M(-1;2;0);$ [Ответ]

6) $u = xyz,\ M(3;-1;2).$ [Ответ]

7) $u = z\sin(x-y),\ M\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 1\right);$ [Ответ]

8) $u = \dfrac{x+y}{z},\ M(2,0,1);$ [Ответ]

9) $u = \operatorname{arctg}(x + 2y + z^2),\ M(1,1,0).$ [Ответ]

5.1.2. Экономический профиль

343. Найти значение производственной функции Кобба — Дугласа

$$F(K, L) = 0{,}85K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{3}},$$

если величина капитала $K = 625$, а затраты труда $L = 216$. [Ответ]

344. Поток пассажиров z выражается функцией $z = x^2/y$, где x — число жителей, y — расстояние между городами. Найти частные производные и пояснить их смысл. [Решение]

345. Найти предельные полезности для следующих функций полезности:

1) логарифмической функции $u(x, y) = a_1 \ln(x - c_1) + a_2 \ln(y - c_2)$; [Ответ]

2) функции постоянной эластичности

$$u(x, y) = \frac{a_1}{1 - b_1}(x - c_1)^{1-b_1} + \frac{a_2}{1 - b_2}(y - c_2)^{1-b_2}.$$ [Решение] [Ответ]

346. Пусть $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$ — производственная функция, где x — затраты живого труда, y — затраты овеществленного труда. Найти эластичности E_{zx} и E_{zy} в точке $(1; 1)$. [Ответ]

347. Найти эластичности функции Кобба — Дугласа $z = ax^{\alpha}y^{\beta}$. [Ответ]

348. Для функции $z = f(x, y)$ *коэффициентом эластичности замещения* называется величина

$$\sigma_{xy} = -\frac{d \ln \frac{x}{y}}{d \ln \dfrac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}}.$$

Найти коэффициент эластичности замещения:

1) для функции Кобба — Дугласа $z = ax^{\alpha}y^{\beta}$; [Решение] [Ответ]

2) функции с постоянной эластичностью замещения

$$z = e_0\left(e_1x^{-\beta} + e_2y^{-\beta}\right)^{-\frac{k}{\beta}}.$$ [Ответ]

5.2. Экстремум функции двух переменных

5.2.1. Общие задачи

349. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y;$ [Решение] [Ответ]

2) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y;$ [Ответ]

3) $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y;$ [Ответ]

4) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2;$ [Ответ]

5) $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6;$ [Ответ]

6) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y;$ [Ответ]

7) $z = 2xy - 4x - 2y;$ [Ответ]

8) $z = xy(1 - x - y);$ [Ответ]

9) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$ [Ответ]

10) $z = x^3 - y^3 - 3xy;$ [Ответ]

11) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$ [Ответ]

12) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$ [Ответ]

13) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$ [Ответ]

14) $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2};$ [Ответ]

15) $z = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{y} + y;$ [Ответ]

16) $z = \dfrac{1 + 2x - 2y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}};$ [Ответ]

17) $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$; [Ответ]

18) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$; [Ответ]

19) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$; [Ответ]

20) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

21) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. [Ответ]

350. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в области D.

1) $z = x^2y(2 - x - y)$, D: треугольник ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, D: замкнутый треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y = -5$; [Ответ]

3) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D: треугольник $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$; [Ответ]

4) $z = 3x + y - xy$, D: треугольник $y = x$, $y = 4$, $x = 0$; [Ответ]

5) $z = xy - x - 2y$, D: треугольник $x = 3$, $y = x$, $y = 0$; [Ответ]

6) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, D: треугольник $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$; [Ответ]

7) $z = xy + x + y$, D: квадрат $1 \leqslant x \leqslant 2$, $2 \leqslant y \leqslant 3$; [Ответ]

8) $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, D: квадрат $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$; [Ответ]

9) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$, D: прямоугольник $ABCD$ с вершинами $A(4; -3)$, $B(4; 2)$, $C(1; 2)$, $D(1; -3)$; [Ответ]

10) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D: прямоугольник $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$; [Ответ]

11) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$, D: прямоугольник $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 6$; [Ответ]

12) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D: прямоугольник $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$; [Ответ]

13) $z = x^2 + y^2$, D: ромб $3|x| + 4|y| \leqslant 12$; [Ответ]

14) $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$, D: ромб $\dfrac{|x|}{7} + \dfrac{|y|}{2} \leqslant 1$; [Ответ]

15) $z = x^2 + 2xy - 10$, D: парабола $y = 0$, $y = x^2 - 4$; [Ответ]

16) $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$, D: парабола $y = 8$, $y = 2x^2$; [Ответ]

17) $z = \sin x + \sin y + \sin x + y$, D: прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; [Ответ]

18) $z = \sin x + \sin y + \sin x + y$, D: прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$; [Ответ]

19) $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$, D: прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$. [Ответ]

351. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в области D. На границе подозрительные на условный экстремум точки искать с помощью функции Лагранжа.

1) $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 45$; [Решение] [Ответ]

2) $z = x + y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 4$; [Ответ]

3) $z = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 18$; [Ответ]

4) $z = xy$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$; [Ответ]

5) $z = 3xy$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 2$; [Ответ]

6) $z = -x^2 - y^2 + 4x - 4y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 72$; [Ответ]

7) $z = 1 - x^2 - y^2$, D: $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$; [Ответ]

8) $z = -x^2 - y^2 - 4x + 4y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 32$; [Ответ]

9) $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 20$; [Ответ]

10) $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 18$; [Ответ]

11) $z = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$, D: $x^2 + y^2 \leqslant 32$. [Ответ]

352. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 6 - 4x - 3y$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$. [Ответ]

353. Найти расстояние между кривой и прямой:

1) $y = x^2$, $x - y - 5 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $x^2 - y^2 = 3$, $y - 2x = 0$; [Ответ]

3) $9x^2 + 4y^2 = 36$, $3x + y - 9 = 0$; [Ответ]

4) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$, $9x - 7y + 16 = 0$. [Ответ]

354. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1, 2, 3)$ до прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}.$$

[Ответ]

5.2.2. Экономический профиль

355. На производстве изготавливается два вида продукции в количестве x и y единиц. Цены каждого вида продукции составляют $P_1 = 8$ и $P_2 = 10$ денежных единиц на единицу продукции. Функция издержек имеет вид $C = x^2 + xy + y^2$. Найти максимум прибыли. [Решение] [Ответ]

356. Цены двух видов товаров равны $P_1 = 32$ и $P_2 = 24$ денежные единицы. Определить, при каких количествах x и y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек имеет вид

$$C = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2.$$

[Ответ]

357. Какие линейные размеры должен иметь открытый прямоугольный бассейн объёмом $V = 32\,\text{м}^2$, чтобы на облицовку его поверхности плиткой было затрачено минимальное количество средств. [Решение] [Ответ]

358. Определить наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок δ и внутренней емкостью V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала. [Ответ]

359. Завод должен изготовить партию закрытых цилиндрических железных бочек заданного объема V. Какими выбрать радиус основания R и высоту H бочек, чтобы минимизировать затраты железа? [Ответ]

360. Вычислить при каких радиусе основания R и высоте H на производство открытого цилиндрического стакана заданного объема V будет уходить минимальное количество стекла. [Ответ]

361. Золотой кулон имеет форму полого кругового конуса и должен иметь заданный объем V. Как выбрать радиус основания R и высоту H кулона, чтобы затрачивать на его производство минимальное количество золота? [Ответ]

362. Молочный завод выпускает мороженое в вафельных стаканчиках, имеющих форму открытого кругового конуса. Какими должны быть радиус основания R и высота H стаканчика, чтобы на производство порций заданного объема V уходило как можно меньше ва́фли? [Ответ]

363. Палатка имеет форму цилиндра с насаженной на него конической верхушкой. При каких соотношениях между линейными размерами палатки для ее изготовления потребуется наименьшее количество материала при заданном объеме? [Ответ]

364. Требуется отгородить участок земли площади S в форме равнобокой трапеции так, чтобы боковые стороны и одно из оснований были огорожены проволочной сеткой, а второе основание примыкало к длинной каменной стене. Какой выбрать форму участка, чтобы минимизировать затраты на покупку сетки? [Ответ]

365. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом. Указать начальный и конечный пункты канала так, чтобы минимизировать стоимость его строительства, которая тем больше, чем длиннее канал. [Указание] [Ответ]

Глава 6

Дифференциальные уравнения

6.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

366. Составьте дифференциальные уравнения семейства линий:

1) $y = Cx$; [Решение] [Ответ]
2) $y = x^2 + Cx$; [Ответ]
3) $Cy = x^2 + y^2$; [Ответ]
4) $y = Ce^{2x}$; [Ответ]
5) $y^2 = 2Cx$; [Решение] [Ответ]
6) $y = \sqrt{1-x^2} + C$; [Ответ]
7) $y = \sin(Cx)$; [Ответ]
8) $\ln \dfrac{x}{y} = 1 + Cy$; [Ответ]
9) $\ln y = C \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; [Ответ]
10) $(1+x^2)(1+y^2) = Cy^2$; [Ответ]
11) $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C$; [Ответ]
12) $y = Ce^{1-x^2}$; [Ответ]
13) $\arcsin \dfrac{y}{x} + x = C$. [Ответ]

367. Найдите общее решение дифференциальных уравнений. В соответствующих случаях укажите частное решение:

1) $y''' = \dfrac{6}{x^3}$; [Решение] [Ответ]

2) $y''' = e^{3x} + \sin^2 \dfrac{x}{2}$; [Ответ]

3) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; [Ответ]

4) $y'' = 3\sin^2 x \cos x,\ y(0) = \dfrac{1}{3},\ y'(0) = 0$; [Решение] [Ответ]

5) $y^{(4)} = e^x - 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 1$; [Ответ]

6) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$; [Ответ]

7) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$; [Ответ]

8) $\dfrac{y'''}{x} = \sin 3x$; [Ответ]

9) $y'' = \operatorname{arctg} x$. [Ответ]

368. Найдите общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях укажите частное решение:

1) $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $(x^2 - 1)y' = 2xy^2$; [Ответ]

3) $x^2 y' = 1 + \cos 2y$; [Ответ]

4) $y' = e^{x-y}$; [Ответ]

5) $dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$; [Ответ]

6) $y' - 2xy - y = 0,\ y(0) = 1;$ [Решение] [Ответ]

7) $y' \sin x = y \ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1;$ [Ответ]

8) $2\sqrt{y}dx = dy,\ y(0) = 1;$ [Ответ]

9) $y' = \dfrac{\sin y}{1 + x^2},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0;$ [Ответ]

10) $y' = y \ln y;$ [Ответ]

11) $3x^2 y dx + 2\sqrt{4 - x^3} dy = 0;$ [Ответ]

12) $e^{x+y} dx + y dy = 0;$ [Ответ]

13) $xy' = \dfrac{y}{\ln x},\ y(e) = 1;$ [Ответ]

14) $e^y (1 + x^2) dy - 2x(1 + e^y) dx = 0;$ [Ответ]

15) $(2x + 1) dy + y^2 dx = 0,\ y(4) = 1.$ [Ответ]

6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка и их решение

369. Найдите общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях укажите частное решение:

1) $x dy - (x+y)dx = 0, \ y(1) = 2;$ [Решение] [Ответ]

2) $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}, \ y(1) = 1;$ [Решение] [Ответ]

3) $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right) dx + x\cos\dfrac{y}{x} dy = 0;$ [Ответ]

4) $(x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0;$ [Ответ]

5) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x);$ [Ответ]

6) $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0;$ [Ответ]

7) $xy' = y - 2x - 2\sqrt{xy - x^2};$ [Ответ]

8) $y' = \dfrac{x-y}{x-2y};$ [Ответ]

9) $y' = e^{-y/x} + \dfrac{y}{x}, \ y(1) = 0;$ [Ответ]

10) $(\sqrt{xy} - x)dy + y dx = 0;$ [Ответ]

11) $y' = \dfrac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2};$ [Ответ]

12) $(x + 2y + 1)dx + (3 - 2x)dy = 0;$ [Решение] [Ответ]

13) $(x-2)dx + (y - 2x + 1)dy = 0;$ [Ответ]

14) $(6x+y-1)dx+(4x+y-2)dy=0;$ [Ответ]

15) $(3x-7y-3)y'+7x-3y-7=0;$ [Ответ]

16) $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$ [Ответ]

370. Найдите общее решение дифференциального уравнения. В соответствующих случаях укажите частное решение:

1) $y'-y=e^x;$ [Решение] [Ответ]

2) $y'=x+y;$ [Ответ]

3) $y'+x^2y=x^2;$ [Ответ]

4) $xy'+y=3;$ [Ответ]

5) $x^2y'=y^2+xy;$ [Решение] [Ответ]

6) $y'+\dfrac{3}{x}y=\dfrac{2}{x^3},\ \ y(1)=1;$ [Ответ]

7) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x},\ \ y(1)=0;$ [Ответ]

8) $x^2y'+2xy=\ln x,\ \ y(1)=2;$ [Ответ]

9) $xy'-3y=x^4e^x,\ \ y(1)=e;$ [Ответ]

10) $y'+y=x\sqrt{y};$ [Ответ]

11) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x;$ [Ответ]

12) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x};$ [Ответ]

13) $(x+y^2)dy+dx=0;$ [Решение] [Ответ]

14) $y'=\dfrac{y}{x+y^2};$ [Ответ]

15) $y' \sin x - y \cos x = 1,\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; [Ответ]

16) $y\,dx + (4\ln y - 2x - y)\,dy = 0$; [Ответ]

17) $(y' + y)(x^2 + 1) = e^{-x},\; y(0) = 1$; [Ответ]

18) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2\sqrt[4]{y^3},\; y(1) = 1$; [Ответ]

19) $xy' - y^2 \ln x = -y$; [Ответ]

20) $xy' + y = xy^2$. [Ответ]

371. Модель роста в условиях конкурентного рынка имеет вид

$$y' = mlp(y)y,$$

где $y(t)$ — объем продукции некоторой отрасли, реализованной к моменту времени t, $p(y)$ — цена реализованной продукции, m — норма инвестиций, l — норма аселерации. Найдите выражение для объема реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, $l = 2$, $m = 0,5$, $y(0) = 0,5$.

[Решение] [Ответ]

372. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, т.е.

$$Y(t) = I(t) + C(t).$$

Пусть скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, т.е.

$$bY'(t) = I(t),$$

где b — коэффициент капиталоемкости прироста дохода. Найдите функцию дохода $Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$, $b = \frac{1}{2}$, $Y(0) = 2$. [Решение] [Ответ]

373. Пусть сумма A руб. положена в банк под $r\%$ годовых. Если начисление процентов осуществляется непрерывно, то закон изменения суммы $P(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$P' = \frac{r}{100}P.$$

Через какое время сумма вклада удвоится, если $r = 10$?

[Решение] [Ответ]

6.3. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

374. Найдите общее решение однородных дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0;$ [Решение] [Ответ]

2) $y'' - 6y' + 9y = 0;$ [Решение] [Ответ]

3) $y'' + 8y' + 25y = 0;$ [Решение] [Ответ]

4) $y'' - 3y' - 4y = 0;$ [Ответ]

5) $y'' + 4y' + 4y = 0;$ [Ответ]

6) $y'' - 2y' + 2y = 0;$ [Ответ]

7) $y'' - 5y' + 6y = 0;$ [Ответ]

8) $y'' - 9y = 0;$ [Ответ]

9) $y'' + 4y' = 0;$ [Ответ]

10) $y'' + 2y' + 5y = 0;$ [Ответ]

11) $y'' - y = 0;$ [Ответ]

12) $y'' + y = 0;$ [Ответ]

13) $y'' - 7y' + 10y = 0;$ [Ответ]

14) $y'' + 10y' + 25y = 0;$ [Ответ]

15) $y'' + 6y' + 10y = 0;$ [Ответ]

16) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0;$ [Ответ]

17) $y''' - 8y = 0;$ [Ответ]

18) $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0;$ [Ответ]

19) $y^{(4)} - 16y = 0.$ [Ответ]

375. Решите уравнение Эйлера:

1) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;$ [Решение] [Ответ]

2) $x^2y'' + 3xy' + y = 0;$ [Ответ]

3) $xy'' + y' = 0;$ [Ответ]

4) $xy'' + 4xy' + 2y = 0;$ [Ответ]

5) $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0;$ [Решение] [Ответ]

6) $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0.$ [Ответ]

376. Проинтегрируйте уравнения методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x};$ [Решение] [Ответ]

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3};$ [Ответ]

3) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}};$ [Ответ]

4) $y'' + y = \operatorname{tg} x;$ [Ответ]

5) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x};$ [Ответ]

6) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x};$ [Ответ]

7) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$; [Ответ]

8) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$; [Ответ]

9) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$; [Ответ]

10) $y''' + y' = \operatorname{tg} x$. [Ответ]

377. Проинтегрируйте уравнения со специальной правой частью:

1) $y'' + 2y' + y = e^x$; [Решение] [Ответ]

2) $y'' + y' - 2y = 6x^2$; [Ответ]

3) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$; [Ответ]

4) $y'' + 4y' - 5y = 1$; [Ответ]

5) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$; [Ответ]

6) $y'' + 3y' - 4y = (x + 1)e^x$; [Решение] [Ответ]

7) $y'' + 2y' + y = (x + 3)e^{-x}$; [Ответ]

8) $2y'' + 3y' + y = (1 - 2x)e^{-x}$; [Ответ]

9) $y'' + 4y' + 4y = (1 - 4x)e^{-2x}$; [Ответ]

10) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$; [Решение] [Ответ]

11) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$; [Ответ]

12) $y'' + 4y = 3\sin 2x$; [Ответ]

13) $y'' + y = x\cos x$; [Ответ]

14) $y'' + 9y = \dfrac{5}{4}\sin 3x + x\cos 3x$; [Ответ]

15) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$; [Ответ]

16) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \dfrac{4}{5}x$; [Ответ]

17) $y'' - y' = x^2 - e^{3x}$; [Ответ]

18) $y'' + y = e^x + \sin x$; [Ответ]

19) $y'' - 3y' + 2y = \sin x \sin 2x$; [Ответ]

20) $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2 + \dfrac{1}{2}$. [Ответ]

378. Решите задачу Коши:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$; [Решение] [Ответ]

2) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$; [Ответ]

3) $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 7,\ y'(0) = 8$; [Ответ]

4) $4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$; [Ответ]

5) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$; [Ответ]

6) $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \dfrac{4}{3},\ y'(0) = \dfrac{1}{27}$; [Ответ]

7) $y'' + 4y = 4(\cos 2x + \sin 2x),\ y(\pi) = \pi,\ y'(\pi) = 2\pi$; [Ответ]

8) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$; [Ответ]

9) $y'' + y = x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; [Ответ]

10) $y'' - 3y' + 2y = x^2 e^{3x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. [Ответ]

379. Рассмотрим экономическую модель паутинообразного типа с запасами товаров, в которой скорость изменения цены P зависит от величины запаса. Если спрос и предложение являются линейными функциями цены, т.е.

$$D = \alpha + aP, \quad S = \beta + bP,$$

а λ есть постоянная, определяющая скорость реакции (т.е. изменения цены при изменении запасов товара), то процесс изменения цены описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^P}{dt^2} + \lambda(b - a)P = \lambda(\alpha - \beta).$$

Найдите закон изменения цены во времени, при условии $a < 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$. [Решение] [Ответ]

Глава 7

Ряды

7.1. Числовые ряды

380. Напишите формулу общего члена ряда:

1) $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots;$ [Решение] [Ответ]

2) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}\cdots;$ [Ответ]

3) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots;$ [Ответ]

4) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\cdots;$ [Ответ]

5) $1-1+1-1+\cdots;$ [Ответ]

6) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots;$ [Ответ]

7) $\frac{1}{2+3}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{8+3}+\frac{1}{16+3}+\cdots;$ [Ответ]

8) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\cdots;$ [Ответ]

9) $1+2\frac{1}{4}+2\frac{7}{9}+3\frac{1}{16}+3\frac{6}{25}+\cdots.$ [Ответ]

381. Найдите сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n};$ [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n};$ [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$; [Решение] [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-2}{(n+1)!}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$. [Ответ]

382. Проверьте, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда. В соответствующем случае сделайте вывод о сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3$; [Ответ]

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$; [Ответ]

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$; [Ответ]

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; [Ответ]

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$. [Ответ]

383. Пользуясь признаками сравнения, исследуйте сходимость ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$; [Решение] [Ответ]

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$; [Ответ]

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; [Ответ]

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n}$; [Ответ]

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^3+4n^2-1}$; [Решение] [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n(n+2)}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+2^n}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(3^n+1)}$; [Ответ]

11) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots$; [Ответ]

12) $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \cdots$; [Ответ]

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$; [Ответ]

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$; [Ответ]

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$; [Ответ]

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{\pi}{n^2}$. [Ответ]

384. Пользуясь признаком Даламбера, исследуйте сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n!}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n^5}$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n(3n-1)}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n\sqrt{2n+3}}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n(2n+1)}{3^n}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\,2^n}{n^n}$; [Ответ]

9) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{6}{27} + \dfrac{8}{81} + \cdots$; [Ответ]

10) $1 + \dfrac{3}{2\cdot 3} + \dfrac{3^2}{2^2\cdot 5} + \dfrac{3^3}{2^3\cdot 7} + \cdots$. [Ответ]

385. Пользуясь признаком Коши, исследуйте сходимость ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+1}\right)^{n/2}$; [Ответ]

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; [Ответ]

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$; [Ответ]

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$; [Ответ]

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$; [Ответ]

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^{n}$; [Ответ]

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{3n-1}{2n+10}\right)^{n}$; [Ответ]

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; [Ответ]

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n}$. [Ответ]

386. Пользуясь интегральным признаком, исследуйте сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4-1}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$. [Ответ]

387. Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$; [Ответ]

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{n}$; [Ответ]

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+2}{n^2+4}$; [Ответ]

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{5n-1}{n!}$; [Ответ]

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n+2^n}{n!}$; [Ответ]

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{2^n}$; [Ответ]

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{\ln n+2}}$; [Ответ]

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; [Ответ]

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$; [Ответ]

12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$; [Ответ]

13) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots$; [Ответ]

14) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n(n^2+1)}$; [Ответ]

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+7)}{3n^2+7n+1}$; [Ответ]

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$; [Ответ]

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n^3}$. [Ответ]

7.2. Функциональные ряды. Область сходимости

388. Найдите область сходимости функционального ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3}{x^{2n+1}}$; [Решение] [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{n^2 x^n}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lg^n x}{n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n \dfrac{\pi x}{4}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{x^n}$; [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n;$ [Ответ]

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n;$ [Ответ]

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}};$ [Ответ]

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3-x^2)^n;$ [Ответ]

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n \operatorname{arctg}\frac{x}{2^n};$ [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{x^n}.$ [Ответ]

7.3. Степенные ряды. Формула Тейлора

389. Найдите область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-3)^n$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 5^n}$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$; [Решение] [Ответ]

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+3)^n}{n!}$; [Ответ]

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n(5^n+1)}$; [Ответ]

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^n}{4^{n-1}}$; [Ответ]

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n(x-2)^{2n+1}$; [Ответ]

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$; [Ответ]

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}x^n$; [Ответ]

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3-x)^{2n-1}}{3^{2n}(3n+2)}$; [Ответ]

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}x^{2n-1}}{4n-3}$; [Ответ]

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^2(x+4)^n}{2n^2-3}$; [Ответ]

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+3x)^n$; [Ответ]

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; [Ответ]

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(5-2x)^n}{2n+1}$; [Ответ]

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x+1)^n$; [Ответ]

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}(2-x)^n$. [Ответ]

Решения и указания

Глава 1. Аналитическая геометрия

Решение задачи 2

Искомая точка M имеет координаты $(0; y)$. Применяя формулу (1.1) для нахождения расстояния между двумя точками, получаем и решаем уравнение для нахождения y:

$$5 = \sqrt{(3-0)^2 + (-8-y)^2}, \quad 25 = 9 + (8+y)^2, \quad (8+y)^2 = 16, \quad |8+y| = 4.$$

Имеем два решения: $y_1 = -4$ и $y_2 = -12$. Итак, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(0; -4)$ и $M_2(0; -12)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 10

Как известно, диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Тогда точка $O(x;y)$ пересечения диагоналей может быть найдена как середина отрезка AC по формулам (1.3):

$$x = \frac{2+(-6)}{2} = -2, \quad y = \frac{4+6}{2} = 5.$$

Обозначим через $D(x;y)$ четвертую вершину параллелограмма. Тогда найденная точка $O(-2;5)$ делит пополам диагональ BD. Применяя формулы середины отрезка (1.3), составляем и решаем уравнения для определения координат точки D:

$$\frac{-3+x}{2} = -2, \quad -3+x=-4, \quad x=-1; \quad \frac{7+y}{2} = 5, \quad 7+y=10, \quad y=3.$$

Итак, четвертая вершина $D(-1;3)$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 13

Воспользуйтесь тем, что точка пересечения медиан делит медианы в отношении 2 : 1. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 15

Воспользуйтесь тем, что по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{BA}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 18

Воспользуемся формулой (1.4) и найдем площадь треугольника с вершинами в данных точках:

$$S = \frac{1}{2}\Big|(5-2)(15-3)-(11-2)(7-3)\Big| = \frac{1}{2}\Big|3\cdot 12 - 9\cdot 4\Big| = 0.$$

Площадь треугольника S равна нулю. Это и означает, что его вершины лежат на одной прямой.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 22.3

Угол наклона данной прямой к оси Ox равен $\frac{\pi}{4}$. Значит угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. В уравнение прямой с угловым коэффициентом (1.5) подставляем значения $k = 1$ и $b = -2$:

$$y = 1 \cdot x + (-2), \quad y = x - 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 24

Угловой коэффициент данной прямой $k = \operatorname{tg} \operatorname{arctg} 3 = 3$. Подставляем значение k и координаты точки A в уравнение (1.6):

$$y - \frac{2}{5} = 3(x+2), \quad 5y - 2 = 15x + 30, \quad 15x - 5y + 32 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 28.1

Подставляем координаты точек A и B в уравнение (1.8):

$$\frac{x-7}{4-7} = \frac{y-4}{-8-4}, \quad \frac{x-7}{-3} = \frac{y-4}{-12}, \quad \frac{x-7}{1} = \frac{y-4}{4},$$
$$4(x-7) = y-4, \quad 4x - y - 24 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 36.1

Приведём данное уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом:

$$5y = -2x + 1, \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}.$$

Из (1.5) следует, что

$$k = -\frac{2}{5}, \quad b = \frac{1}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 40.1

Чтобы построить прямую, достаточно знать координаты любых ее двух точек. Полагая $x = 0$, получаем $y = -4$, полагая $x = 1$, получаем $y = -2$. Имеем две точки $A(0, -4)$ и $B(1, -2)$. Проводим через них прямую (рисунок Р.1).

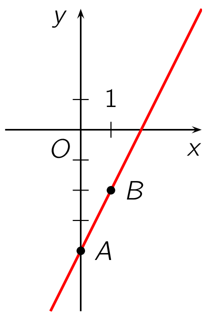

Рисунок Р.1

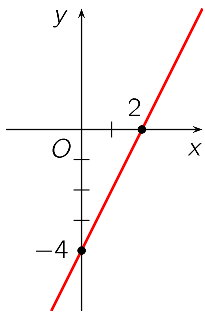

Рисунок Р.2

Задачу можно решить иначе, преобразуя данное уравнение к уравнению прямой в отрезках:

$$2x - y - 4 = 0, \quad 2x - y = 4, \quad \frac{2x}{4} - \frac{y}{4} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Теперь на оси Ox отложим 2 единицы вправо, а на оси Oy — 4 единицы вниз. Получаем две точки на осях координат, через которые проводим прямую (рисунок Р.2). [Вернуться к условию]

Решение задачи 51.1

Преобразуем данные уравнения прямых к уравнениям с угловым коэффициентом:

$$2x - 3y + 10 = 0, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}; \qquad 5x - y + 4 = 0, \quad y = 5x + 4.$$

Выписываем угловые коэффициенты: $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = 5$. Тогда по формуле (1.11)

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cdot 5}\right| = \frac{13}{13} = 1.$$

Значит, угол между прямыми $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 59.1

В силу параллельности искомая прямая и прямая MN имеют общий угловой коэффициент k, который может быть вычислен по координатам точек M и N из формулы (1.7):

$$k = \frac{-1-(-2)}{4-5} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Итак, нам известны угловой коэффициент k и точка A искомой прямой. Выписываем ее уравнение по формуле (1.6):

$$y - 1 = -1(x-3), \quad x + y - 4 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 60.1

По формуле (1.7) вычисляем угловой коэффициент прямой MN:

$$k_{MN} = \frac{-5-(-4)}{-4-(-3)} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Согласно условию перпендикулярности двух прямых (1.13) угловой коэффициент искомого перпендикуляра

$$k_{\perp} = -\frac{1}{k_{MN}} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Знаяточку и угловой коэффициент, выписываем искомое уравнение по формуле (1.6):

$$y-1=-1(x+1), \quad x+y=0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 61

По формуле (1.7) находим угловой коэффициент стороны AC:

$$k_{AC} = \frac{5-(-6)}{8-6} = \frac{11}{2}.$$

Тогда угловой коэффициент искомой высоты

$$k = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{2}{11}.$$

Зная угловой коэффициент k и точку B высоты, по формуле (1.6) выписываем ее уравнение:

$$y-(-3) = -\frac{2}{11}(x-2), \quad 11y+33=-2x+4, \quad 2x+11y+29=0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 67.1

Найдем уравнение стороны BC по формуле (1.8):

$$\frac{x-(-2)}{-5-(-2)}=\frac{y-5}{2-5}, \quad \frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{-3}, \quad x+2=y-5, \quad x-y+7=0.$$

По формуле (1.14) вычислим высоту AD как расстояние от точки A до прямой BC:

$$AD=\left|\frac{-8-(-5)+7}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 76

Обозначим первую из данных прямых через L_1, а вторую — через L_2. Пусть точка $M(x; y)$ лежит на одной из искомых биссектрис. Тогда по свойству биссектрисы расстояние d_1 от точки M до прямой L_1 равно расстоянию d_2 от точки M до прямой L_2. По формуле (1.14) расстояния от точки до прямой

$$d_1 = \frac{|3x + 4y - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 1|}{5},$$

$$d_2 = \frac{|5x + 12y - 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5x + 12y - 2|}{13}.$$

Тогда условие $d_1 = d_2$ порождает уравнение

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{5} = \frac{|5x + 12y - 2|}{13}.$$

Решаем его:

$$13|3x + 4y - 1| = 5|5x + 12y - 2|,$$

$$\left[\begin{aligned} &13(3x + 4y - 1) = 5(5x + 12y - 2), \\ &13(3x + 4y - 1) = -5(5x + 12y - 2), \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &14x - 8y - 3 = 0, \\ &64x + 112y - 23 = 0. \end{aligned}\right.$$

Итак, мы нашли две биссектрисы:

$$14x - 8y - 3 = 0, \quad 64x + 112y - 23 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 77

Найдите обе биссектрисы углов, образованных прямыми AB и AC. Затем выберите ту, от которой точки B и C находятся по разные стороны.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 79.1

Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой (1.8), проходящей через две точки:

$$\frac{x-(-10)}{-3-(-10)}=\frac{y-(-16)}{12-(-16)},\quad \frac{x+10}{7}=\frac{y+16}{28},\quad \frac{x+10}{1}=\frac{y+16}{4},$$
$$4(x+10)=y+16,\quad 4x-y+24=0.$$

Аналогично найдем уравнение диагонали BD:

$$\frac{x-(-15)}{20-(-15)}=\frac{y-(-2)}{19-(-2)},\quad \frac{x+15}{35}=\frac{y+2}{21},\ \frac{x+15}{5}=\frac{y+2}{3},$$
$$3(x+15)=5(y+2),\quad 3x-5y+35=0.$$

Для нахождения общей точки диагоналей составим из полученных уравнений систему, а затем решим ее:

$$\begin{cases}4x-y+24=0,\\ 3x-5y+35=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}4x-y+24=0,\\ -17x-85=0.\end{cases}$$

Отсюда
$$x=-5,\quad y=4x+24=4\cdot(-5)+24=4.$$

Итак, точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ имеет координаты $(-5,4)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 102.1

По условию ежегодная амортизация составляет 2,4 тыс. у. е. Тогда стоимость автомобиля через t лет

$$p(t) = 24 - \frac{12}{5}t.$$

Соответственно через 5 лет стоимость автомобиля будет равна

$$p(5) = 24 - \frac{12}{5} \cdot 5 = 12 \text{ тыс. у. е.}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 106

Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы:

$$20x + 100 = 25x + 70, \quad 5x = 30, \quad x = 6.$$

Итак, при перевозке на $x = 6$ сотен километров транспортные расходы совпадают и составляют $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$ денежных единиц. Поэтому, начиная с 600 км, более экономичным становится первый вид транспорта.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 108

По формуле (1.8) построим функцию издержек $C(q)$, где q — количество произведенной продукции, как прямую, проходящую через точки $M_1(8, 635)$ и $M_2(13, 750)$:

$$\frac{C(q)-635}{750-635}=\frac{q-8}{13-8}, \quad \frac{C(q)-635}{115}=\frac{q-8}{5}, \quad \frac{C(q)-635}{23}=\frac{q-8}{1},$$
$$C(q)-635=23(q-8), \quad C(q)=23q-184+635=23q+451.$$

Функция выручки по условию имеет вид $R(q) = 64q$. Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки:

$$23q+451=64q, \quad 41q=451, \quad q=11.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 112.1

Равновесие на рынке определяется равенством спроса и предложения. С геометрической точки зрения точка рыночного равновесия — это точка пересечения линий спроса и предложения (смотрите рисунок Р.3):

$$p + 3 = -2p + 12, \quad 3p = 9, \quad p = 3.$$

Таким образом, равновесная цена $p_0 = 3$ денежные единицы, равновесный объем продаж $Q_0 = 6$ единиц.

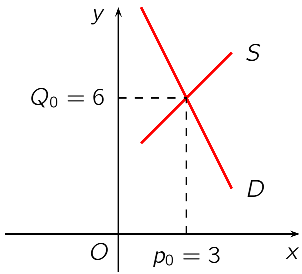

Рисунок Р.3

[Вернуться к условию]

Решение задачи 112.2

Закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид:

$$S_1 = S + 3 = p + 6.$$

Находим точку рыночного равновесия в новых условиях:

$$p + 6 = -2p + 12, \quad 3p = 6, \quad p = 2.$$

Получена новая точка равновесия $M'(2, 8)$. Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличится на 2 единицы, а равновесный объем уменьшится на 1 единицу.

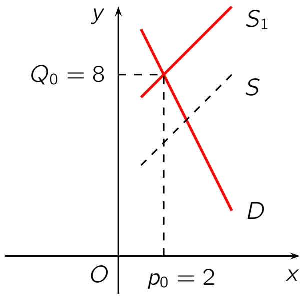

Рисунок Р.4

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 112.3

После введения субсидии s закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид:

$$S = p + 3 - s.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 112.4

Если налог составляет 20 %, то вся рыночная цена составляет 120 %, из них 100 % получают поставщики товара, 20 % — государство. После введения данного налога закон спроса не изменится, а закон предложения примет вид:

$$S = \frac{120}{100}(p + 3).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 119.2

Выделяем полные квадраты в левой части уравнения:

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+8y+16)-16-16=0, \quad (x-2)^2+(y+4)^2-36=0.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке $(2,-4)$, ее радиус равен 6.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 126.2

Найдем квадрат большой полуоси a:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4} = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 6{,}5^2.$$

Следовательно, уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{6{,}5^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 127.4

Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{24x^2}{1176}+\frac{49y^2}{1176}=1,\quad \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1,\quad \frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{\left(2\sqrt{6}\right)^2}=1.$$

Отсюда следует, что

$$a=7,\quad b=2\sqrt{6},\quad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5,\quad \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}.$$

Координаты фокусов: $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 136.2

Касательной к эллипсу называется прямая, пересекающая эллипс в единственной точке. [Вернуться к условию]

Решение задачи 142.1

Выделим полный квадрат по переменным x и y:

$$16(x^2-4x+4)-64-9(y^2+6y+9)+81-161=0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+3)^2=144, \quad \frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Отсюда следует, что центр гиперболы находится в точке $(2;-3)$, действительная полуось $a=\sqrt{9}=3$, мнимая полуось $b=\sqrt{16}=4$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 152.1

Преобразуем данное уравнение к равносильному виду:

$$y = 3\sqrt{x}, \quad \begin{cases} y^2 = 9x, \\ y > 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений определяет часть параболы $y^2 = 9x$, лежащую в верхней полуплоскости, а точнее в первом квадранте.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 154

Проверим, нет ли у данных параболы и прямой общих точек. Для точек прямой имеет место равенство $4x = -3y - 44$. Подставляя его в уравнение параболы, получим:

$$y^2 = 16 \cdot (4x), \quad y^2 = 16(-3y - 44), \quad y^2 + 48y + 704 = 0.$$

Дискриминант данного квадратного уравнения, очевидно, отрицательный. Таким образом, данные парабола и прямая не пересекаются. В таком случае ближайшая к прямой точка параболы является общей точкой этой параболы и ее касательной, параллельной данной прямой. Такая касательная имеет уравнение

$$4x + 3y + C = 0,$$

где константа C подлежит определению. *Касательная* — это прямая пересекающая параболу в единственной точке, называемой *точкой касания*. Чтобы найти касательную, подберем число C так, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 64x, \\ 4x + 3y + C = 0 \end{cases}$$

имела единственное решение. Из второго уравнения находим: $4x = -3y - C$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим:

$$y^2 = 16(-3y - C), \quad y^2 + 48y + 16C = 0.$$

Данное квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю. На этом основании вычисляем C:

$$24^2 - 16C = 0, \quad C = \frac{24^2}{16} = \frac{4^2 \cdot 6^2}{16} = 36.$$

Подставляя полученное значение C обратно в квадратное уравнение, находим его решение:

$$y^2 + 48y + 16 \cdot 36 = 0, \quad (y + 24)^2 = 0, \quad y = -24.$$

Подставляя найденное значение y в уравнение параболы, находим x:

$$(-24)^2 = 64x, \quad 8^2 \cdot 3^2 = 64x, \quad x = 9.$$

Итак, ближайшей к прямой $4x + 3y + 44 = 0$ точкой параболы $y^2 = 64x$ является точка $M_0(9, -24)$. Вычисляем расстояние от точки M_0 до данной прямой:

$$d = \frac{|4 \cdot 9 + 3 \cdot (-24) + 44|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 159.1

Выделяем полные квадраты и проводим преобразования:

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 9(y^2 - 4y + 4) + 36 - 44 = 0,$$

$$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 9, \quad \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(-1; 2)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 160.1

Приведем данное уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{\frac{3648}{57}} - \frac{y^2}{\frac{3648}{64}} = 1, \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{57} = 1.$$

Таким образом, для данной гиперболы

$$a^2 = 64, \quad b^2 = 57, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 57} = \sqrt{121} = 11.$$

Значит, правый фокус гиперболы $F_2 = (11; 0)$ (смотрите рисунок Р.5).

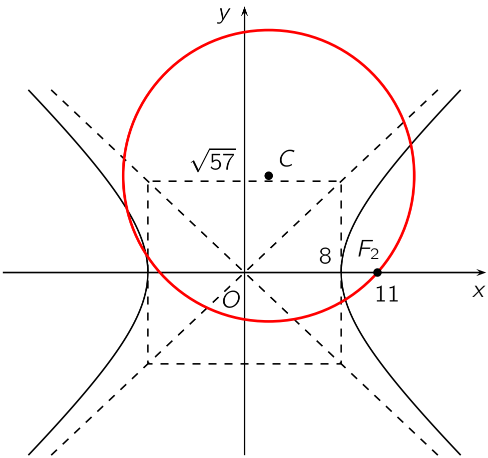

Рисунок Р.5

Окружность с центром в точке $C(2; 8)$ имеет уравнение:

$$(x-2)^2 + (y-8)^2 = R^2,$$

где радиус R подлежит определению. Подставим в это уравнение координаты найденной ранее точки F_2 по условию принадлежащей окружности:

$$(11-2)^2+(0-8)^2=R^2, \quad 81+64=R^2, \quad R^2=145.$$

Итак, искомое уравнение окружности $(x-2)^2+(y-8)^2=145$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 161.2

расстояние r между точками $M(x;y)$ и A, а также расстояние d от точки M до прямой $x=-1$ могут быть вычислены по формулам:

$$r=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}, \quad d=|x+1|.$$

Так как по условию $4r=d$, то

$$4\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}=|x+1|, \quad 16\left((x-1)^2+(y-5)^2\right)=(x+1)^2,$$

$$16\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2+2x+1\right)+16(y-5)^2=0,$$

$$15x^2-34x+15+16(y-5)^2=0,$$

$$15\left(x^2-2\cdot\frac{17}{15}+\left(\frac{17}{15}\right)^2\right)-\frac{17^2}{15}+15+16(y-5)^2=0,$$

$$15\left(x-\frac{17}{15}\right)^2+16(y-5)^2=\frac{64}{15}, \quad \frac{\left(x-\frac{17}{15}\right)^2}{\left(\frac{8}{15}\right)^2}+\frac{(y-5)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2}=1.$$

Получено каноническое уравнение эллипса со следующими полуосями и центром:

$$a=\frac{8}{15}, \quad b=\frac{2}{\sqrt{15}}, \quad O\left(\frac{17}{15};5\right).$$

Чертеж полученного эллипса изображен на рисунке Р.6.

[Вернуться к условию]

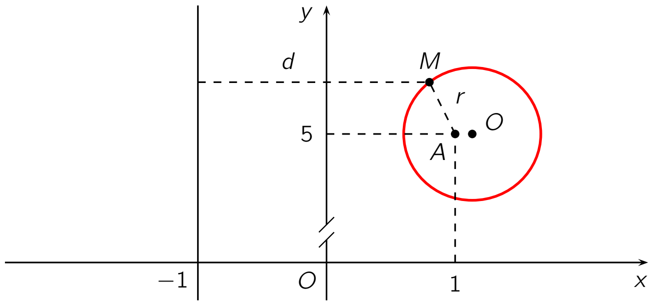

Рисунок Р.6

Глава 2. Теория пределов

Решение задачи 162.2

Подставляя в формулу общего члена значения $n = 1, 2, 3, 4$, последовательно находим

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1, \qquad x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2},$$
$$x_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}, \qquad x_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 162.8

Общий член последовательности $x_n = n!$ представляет собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Поэтому

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \cdot 2 = 2, \quad x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad x_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 162.11

Данная последовательность задана рекуррентно: каждый последующий член последовательности вычисляется через предыдущий. Имеем:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$
$$x_3 = x_2 + 2 = 3 + 2 = 5, \qquad x_4 = x_3 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 164.8

Так как для всякого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n > 0$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Так как, кроме того,

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + 1 = 2,$$

то $\{x_n\}$ также ограничена сверху и, следовательно, ограничена.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 165.1

В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = x_n.$$

Поэтому последовательность x_n строго возрастающая.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 165.2

Найдём три первые элемента:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда видно, что с одной стороны $x_1 < x_2$, а с другой — $x_2 > x_3$. Значит, данная последовательность не является монотонной.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 165.3

Так как

$$x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = x_n,$$

то данная последовательнось строго убывает. [Вернуться к условию]

Решение задачи 165.5

В данном случае для всех натуральных n

$$x_{n+1} = \left[\sqrt{n+1}\right] \geqslant \left[\sqrt{n}\right] = x_n.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Отсутствие строгого возрастания следует из того, что $x_1 = x_2 = 1$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 169.1

Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда требование $|\alpha_n| < \varepsilon$ влечёт за собой неравенства

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как номер N должен быть натуральным числом, положим

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

При $n \geqslant N$ будем иметь

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Это и означает, что последовательность α_n бесконечно малая.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 171.1

Зададимся произвольным положительным числом ε и обозначим $x_n = \frac{n}{n-1}$. Тогда

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n-1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n-1)}{n-1}\right| = \frac{1}{n-1},$$

и

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \quad \frac{1}{n-1} < \varepsilon, \quad n - 1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если теперь положить

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2,$$

то при всех $n \geqslant N$ окажется, что $|x_n - 1| < \varepsilon$. А это и доказывает, что последовательность x_n сходится к единице. [Вернуться к условию]

Решение задачи 172.4

Вынесем из числителя и знаменателя n в старшей, в данном случае второй, степени:

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\frac{n^2}{n^2}\,\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}.$$

Теперь мы можем применить свойство 4 сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

Мы воспользовались тем, что предел константы — константа, а последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ — бесконечно малые. [Вернуться к условию]

Решение задачи 172.14

Используя определение факториала из задачи 162.8, разделим числитель и знаменатель на $(n+1)!$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+2)}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{0+0}{1+0+0}=0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 172.31

Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряжённое к нему, после чего применим к числителю формулу разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=0\cdot\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=0\cdot\frac{2}{2}=0.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 172.34

Дополнить данное выражение до разности кубов, умножив и разделив его на сопряжённое ему выражение. [Вернуться к условию]

Решение задачи 172.38

Вынесем, как всегда, из числителя и знаменателя n в старшей степени:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}}{n^{1/2}}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\infty\cdot 1=\infty.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 172.46

Привести дроби к общему знаменателю. [Вернуться к условию]

Решение задачи 172.51

Применив формулу суммы арифметичекой прогрессии

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{n(n+2)}{2(n+2)}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}=\frac{-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 172.54

Воспользуйтесь формулой

$$1+4+9+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 172.58

Примените формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 179

Выясним, является ли эта последовательность монотонной. Действительно, запишем $(n+1)$-й член:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}.$$

Сравним члены x_n и x_{n+1}. С этой целью преобразуем их следующим образом:

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+(1+k)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2},$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+(1+k)}.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность возрастающая.

Покажем, что она ограничена. Во-первых, очевидно, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\ x_n > 0$. Во-вторых, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} n = 1.$$

Значит, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ 0 < x_n < 1$.

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей, ограниченной и имеет предел. [Вернуться к условию]

Решение задачи 180

Поскольку

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{0}}}}}_{n+1\text{ корней}} < \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}}_{n+1\text{ корней}} = x_{n+1},$$

то последовательность x_n возрастает.

Докажем что x_n ограничена сверху, например, числом $\sqrt{a}+1$. В самом деле, для первого элемента это верно:

$$x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a}+1.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ имеет место представление

$$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}, \tag{P.1}$$

и, если предположить, что $x_n \leqslant \sqrt{a}+1$, то

$$x_{n+1} \leqslant \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2} = \sqrt{a}+1,$$

что и доказывает ограниченность всех элементов последовательности.

По теореме 2.4 возрастающая и ограниченная последовательность x_n сходится. Обозначим ее предел через x. Факт существования предела последовательности x_n делает возможным предельный переход при $n \to \infty$ в рекуррентном равенстве (P.1). В результате получаем и решаем уравнение относительно x:

$$x = \sqrt{a+x}, \quad x^2 = a+x, \quad x^2 - x - a = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Итак, предел x необходимо равен одному из двух полученных значений. Так как отрицательное значение не подходит, то

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 184.1

Подставим значение $x = 0$ в аналитическое выражение данной функции:

$$f(0) = \sqrt{1 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 185.5

В выражении функции f заменяем x на $\dfrac{1}{x}$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + 3}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1} = \frac{x + 3x^2}{1 - x^2} = \frac{3x^2 + x}{1 - x^2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 186.5

Заменяем x на $3x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(3x) = (3x)^3 \cdot 2^{3x} = 3^3 \cdot x^3 \cdot (2^3)^x = 27x^3 \cdot 8^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 187.2

Так как логарифм задан для положительных значений аргумента, то область определения находится из условия:

$$\frac{2+x}{2-x} > 0.$$

Этому условию удовлетворяет интервал $(-2, 2)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 188.1

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 4x + 4 - 3 = (x+2)^2 - 3.$$

Множеством значений функции $z = (x+2)^2$ является промежуток $[0, +\infty)$. Так как $y(x) = z(x) - 3$, то для функции y множество значений $E = [-3, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 189.1

Область определения $D(f) = (-\infty, +\infty)$ симметрична относительно начала координат, и

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1} = -f(x).$$

Следовательно, функция $f(x)$ нечетная. [Вернуться к условию]

Решение задачи 189.3

Здесь $D(f) = (-\infty, \infty)$, и

$$f(-x) = e^{-x} - 2e^{x} \neq \pm f(x).$$

Значит, функция $f(x)$ не является как четной, так и нечетной, то есть имеет общий вид. [Вернуться к условию]

Решение задачи 190.1

Основной период функции $\sin x$ равен 2π. Функция $f(x) = \sin 4x$ получается из нее путем сжатия в 4 раза вдоль оси Ox. Следовательно, функция $f(x)$ периодическая, и ее основной период $T = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 190.2

Так как

$$\cos^2 5x = \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 10x,$$

то функция f периодическая и ее период $T = \dfrac{1}{10} \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{5}$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 190.4

Убедитесь, период суммы двух периодических функций равен наименьшему общему кратному их периодов. [Вернуться к условию]

Решение задачи 191.4

Функции $f(x)$ определена на всей вещественной оси. Её областью значений является интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Выразим аргумент x через значение функции y:

$$y = \operatorname{arctg} 3x, \quad \operatorname{tg} y = 3x, \quad x = \frac{1}{3} \operatorname{tg} y.$$

Таким образом, $x = \dfrac{1}{3} \operatorname{tg} y$ является искомой обратной функцией.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 192.1

Вычисляем искомые суперпозиции:

$$f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad g(f(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \ x \geqslant 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 193.2

Данная функция является суперпозицией линейной функции $v = \frac{x}{3}$, тригонометрической функции $u = \operatorname{tg} v$ и логарифмической функции $y = \lg u$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 194.11

В качестве исходного возьмем график функции $y = \cos x$ (см. рисунок Р.7).

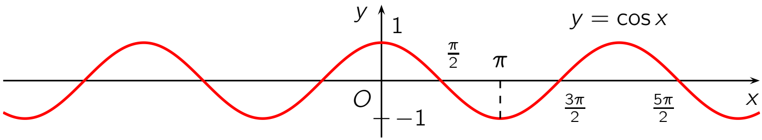

Рисунок Р.7

С помощью сдвига вправо на величину $a = \frac{\pi}{4}$ получаем график функции $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ (см. рисунок Р.8).

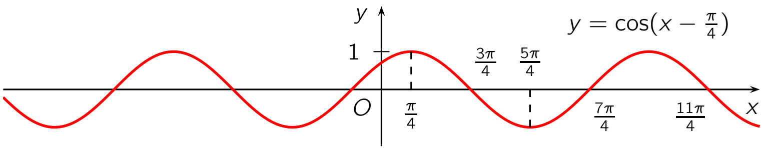

Рисунок Р.8

Растягивая полученный график в 2 раза вдоль оси Oy, получаем требуемый график функции $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$ (см. рисунок Р.9).

[Вернуться к условию]

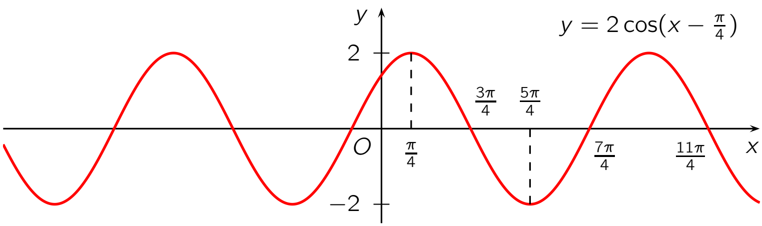
$y = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$
y
x
O
2
−2
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{4}$

Рисунок Р.9

Указание к задаче 194.16

Выделить полный квадрат в выражении под знаком модуля.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 194.19

Через $[x]$ обозначают целую часть числа x. Для $x \in [n, n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}$, целая часть $[x] = n$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 194.20

Дробная часть числа x определяется как разность самого числа x и его целой части:

$$\{x\} = x - [x].$$

Так как значение дробной части не изменяется при изменении числа x на любое целое значение, то достаточно построить часть графика функции $y = \{x\}$ на полуинтервале $[0, 1)$, а затем путём сдвигов влево и вправо на целочисленные значения аргумента получить весь график. Если $x \in [0, 1)$, то $[x] = 0$ и потому $\{x\} = x$. На рисунке Р.10 изображён получающийся в итоге график. [Вернуться к условию]

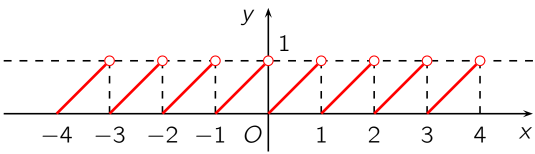

Рисунок Р.10

Указание к задаче 194.22

Воспользуйтесь тем, что $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 194.23

Воспользуйтесь тем, что

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 194.26

Проведите построение графика отдельно для промежутков $(-\infty, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ и $[0, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 195.6

См. задачу 194.19. [Вернуться к условию]

Решение задачи 196

Находим равновесную цену:

$$D(p_0) = S(p_0), \quad \frac{25p_0 + 4p_0^2}{1 + 10p_0} = \frac{20 + 4p_0^2}{1 + 10p_0},$$

$$25p_0 + 4p_0^2 = 20 + 4p_0^2, \quad 25p_0 = 20, \quad p_0 = \frac{4}{5}.$$

Находим равновесный объем продаж:

$$Q_0 = S(p_0) = \frac{20 + 4\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 + 10 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{500 + 64}{25 + 200} = \frac{564}{225} = \frac{188}{75}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 199.1

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполнялось бы неравенство

$$\big|(2x+1) - 5\big| < \varepsilon.$$

Решая последнее неравенство, получаем, что

$$\big|2x - 4\big| < \varepsilon, \quad \big|2(x-2)\big| < \varepsilon, \quad \big|x - 2\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для завершения доказательства достаточно принять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 199.11

Воспользуйтесь тем, что по определению предела, стремясь к числу $a = 1$, переменная x не принимает этого значения. [Вернуться к условию]

Решение задачи 200.1

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Выберем произвольным образом последовательность $\{x_n\}$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2, \quad x_n \neq 2 \ (n \in \mathbb{N}).$$

Найдем предел последовательности $f(x_n)$, пользуясь свойством 4 сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (3x_n^2 + 2x_n - 1) =$$
$$= 3\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 + 2\lim_{n\to\infty} x_n - 1 = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 15.$$

В силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$ искомый предел равен 15.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 201.1

Рассмотрим последовательности $x_n = 2\pi n$ и $y_n = \pi + 2\pi n$, сходящиеся к $x_0 = \infty$. Для них

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\Big(\pi + 2\pi n\Big) = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1.$$

Пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ оказались различными. Это значит, что предел функции не существует. [Вернуться к условию]

Решение задачи 202.2

По свойствам предела арифметических операций

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(4x^2+5x+2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-1}3x^2-\lim\limits_{x\to-1}1}{\lim\limits_{x\to-1}4x^2+\lim\limits_{x\to-1}5x+\lim\limits_{x\to-1}2}=\frac{3\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\lim\limits_{x\to-1}x-1}{4\lim\limits_{x\to-1}x\cdot\lim\limits_{x\to-1}x+5\lim\limits_{x\to-1}x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot(-1)\cdot(-1)-1}{4\cdot(-1)\cdot(-1)+5\cdot(-1)+2}=\frac{3-1}{4-5+2}=2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.6

Свойство предела частного здесь неприменимо, поскольку в точке $a = 3$ знаменатель обращается в нуль. Числитель не обращается в нуль в этой точке, что позволяет найти предел «перевернутой дроби»:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{2x+5} = \frac{0-3}{2\cdot 3+5} = 0.$$

Итак, мы доказали, что функция $\alpha(x) = \frac{x-3}{2x+5}$ бесконечно малая. Тогда по теореме 2.7 функция $1/\alpha(x)$, то есть функция под знаком предела, является бесконечно большой, и ее предел равен ∞.

Вышесказанное позволяет при решении примеров для сокращения записи проводить формальное деление ненулевой константы на нуль, получая в результате бесконечность:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x+5}{x-3} = \frac{2\cdot 3+5}{3-3} = \frac{11}{0} = \infty.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.11

В точке $x = 2$ как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль. Это значит, что мы имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители, а затем сократим их общий множитель:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}.$$

Знаменатель последней дроби теперь не обращается в нуль, что позволяет применить свойства предела арифметических операций:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)} = \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.15

Здесь, очевидно, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to-5}\frac{4x^2+23x+15}{-7x^2-36x-5}=\lim_{x\to-5}\frac{(x+5)(4x+3)}{(x+5)(-7x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to-5}\frac{4x+3}{-7x-1}=\frac{4\cdot(-5)+3}{-7\cdot(-5)-1}=\frac{-17}{34}=-\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.31

В точке $x = 1$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращаются в нуль, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как число $x = 1$ является корнем многочленов в числителе и знаменателе, то последние делятся без остатка на $x - 1$. Выполним деление «уголком»:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 - x - 2 & x - 1 \\
-\underline{3x^2 - 3x} & \overline{3x + 2} \\
2x - 2 & \\
-\underline{2x - 2} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 + 4x - 4 & x - 1 \\
-\underline{x^3 - x^2 } & \overline{x^2 + 4} \\
4x - 4 & \\
-\underline{4x - 4} & \\
0 &
\end{array}
$$

Тогда

$$
\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 + 4x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x^2+4)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{x^2+4} = \frac{3\cdot 1 + 2}{1^2 + 4} = 1.
$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.39

Подставляя значение $x = 1$ в числитель и знаменатель, убеждаемся, что имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия избавимся от иррациональности в числителе, домножая числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.51

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе, разложим на множители знаменатель и сократим общий множитель:

$$\frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6} = \frac{\left(\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} =$$

$$= \frac{(2x+9)-(x+7)}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} =$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)} = \frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{2x+9}+\sqrt{x+7}\right)}$$

Полученная дробь не содержит неопределенности, так что нахождение предела сводится к простой подстановке значения $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+7}}{x^2+5x+6} =$$

$$= \frac{1}{(-2+3)\left(\sqrt{2\cdot(-2)+9}+\sqrt{-2+7}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 202.59

Положить $x = t^{12}$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 202.60

Пользуясь формулой

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

дополнить числитель до разности кубов.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.62

В данном случае имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для её раскрытия применим стандартный приём. Вынесем из числителя и знаменателя x в старшей степени, а затем воспользуемся тем, что функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ бесконечно малые при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2}\,\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{0+0-1}{2+3\cdot 0} = -\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 202.75

Выражение в скобках представляет собой неопределенность вида $\infty - \infty$. Умножим и разделим функцию под знаком предела на выражение, сопряженное разности в скобках:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.1

Приведём данный предел к первому замечательному:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin 2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}.$$

Так как при $x\to 0$ функция $2x$ является бесконечно малой, то последний предел является первым замечательным и, таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1.$$

Значит, искомый предел равен 2.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.2

Воспользуемся первым замечательным пределом и свойствами пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x\,\dfrac{\sin 6x}{6x}}{2x\,\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\lim_{x\to 0}3\frac{\dfrac{\sin 6x}{6x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}=3\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=3\frac{1}{1}=3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.3

Сделаем замену $y = \arcsin x$. Так как $x = \sin y$ и $y \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 203.5

Представить тангенс как отношение синуса и косинуса и воспользоваться тем, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 203.6

Воспользоваться формулой $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.7

Данное выражение содержит неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Преобразуем его к виду, содержащему первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos^3 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x(1-\cos^2 5x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x\sin^2 5x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\cdot\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}=\lim_{x\to 0}25\cos 5x\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2=$$

$$=25\cos 0\cdot 1^2=25.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.11

Воспользуемся формулой

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 4x\sin x}{x^2} = -8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\frac{\sin x}{x} = -8.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.15

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(\sqrt{\cos x}+1\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}=-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+1}=-\frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 203.19

Выполним замену переменной $y = x - \frac{\pi}{2}$. Новая переменная y, как того и требует первый замечательный предел, будет стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 203.25

Положить $t = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 204.1

Имеем неопределённость 1^∞. Чтобы привести данный предел ко второму замечательному (2.7), выполним замену $y = \frac{k}{x}$. Ясно, что $y \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^k = e^k.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 204.2

Обозначить $y = kx$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 204.3

Приводим данный предел ко втором замечательному:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} = \left(\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right)^5.$$

Так как функция $\alpha(x) = 5x$ бесконечно малая при $x \to 0$, то по формуле (2.7)

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}} = e.$$

А это значит, что искомый предел равен e^5.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 204.6

Приведём данный предел к отношению двух вторых замечательных, поделив числитель и знаменатель на x, и воспользуемся задачей 204.1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 204.12

Имеем неопределенность вида 1^∞. Выражение в скобках преобразуем к сумме единицы и БМФ, что позволит нам воспользоваться вторым замечательным пределом в форме (2.7):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+5}{x-3}-1\right)^{2x+7} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{8}\cdot\frac{8}{x-3}\cdot(2x+7)} =$$
$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{8}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x+56}{x-3}}.$$

Так как функция $\alpha(x) = \frac{8}{x-3}$ является бесконечно малой при $x \to \infty$, то по формуле (2.7) предел в основании степени равен e. Предел в показателе степени, очевидно, равен 16. Значит, искомый предел равен e^{16}.

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 204.22

Сделать замену $y = \sin x$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 204.23

Воспользоваться формулой

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 205.1

Так как функция $\alpha(x) = kx$ является бесконечно малой при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{x} = \lim_{x\to 0} k \cdot \frac{e^{kx}-1}{kx} = k \lim_{x\to 0} \frac{e^{kx}-1}{kx} = k \cdot 1 = k.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 205.2

Воспользуемся следствиями первого и второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 6\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 6\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = 6\cdot 1\cdot 1 = 6.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 205.5

В знаменателе вынести за скобки e^x. [Вернуться к условию]

Решение задачи 205.10

Преобразуем данное выражение:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-1+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\Big((x^2-1)+1\Big)}{x^2-1}\,\frac{x^2-1}{x-1}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\Big((x^2-1)+1\Big)}{x^2-1}\,\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Так как функция $\alpha(x)=x^2-1$ является бесконечно малой при $x\to 1$, то искомый предел

$$L=1\cdot\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 205.17

Воспользуемся тем, что $\alpha(x) = x - 1$ — БМФ при $x \to 1$:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)+1} - 1}{x - 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)+1} - 1}{x - 1} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 205.19

В числителе вынести за скобку $\sqrt[4]{1+x^2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 206.1

Так как $\operatorname{sign} x = 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sign} x = -1$ при $x < 0$, то

$$\lim_{x\to+0}\left(2\operatorname{sign} x - 1\right) = \lim_{x\to+0}\left(2\cdot 1 - 1\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to-0}\left(2\operatorname{sign} x - 1\right) = \lim_{x\to-0}\left(2\cdot(-1) - 1\right) = -3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 206.6

Для данной функции

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(x-2) = 1-2 = -1,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\ln x = \ln 1 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 207.1

Находим предел отношения данных функций, используя первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=1.$$

Так как предел равен 1, то $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 208.1

Так как функции $4x$ и $3x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, то $\sin 4x \sim 4x$ и $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 208.12

Так как $1 = \ln e$, то

$$\ln x - 1 = \ln x - \ln e = \ln \frac{x}{e} = \ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right).$$

Функция $\alpha(x) = \dfrac{x}{e} - 1$ бесконечно малая при $x \to e$, поэтому

$$\ln\left(1 + \frac{x}{e} - 1\right) \sim \frac{x}{e} - 1, \quad x \to e.$$

Значит,

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\dfrac{x}{e} - 1}{x - e} = \frac{1}{e}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 208.16

Воспользоваться тем, что $\operatorname{arctg}(x-2) \sim x-2$ при $x \to 2$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 208.18

Воспользуемся таблицей эквивалентностей и задачей 207.1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{x^2}-1)}{2\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^2}{2\sin x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2\cdot x\cdot\dfrac{x^2}{2}}=1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 212.1

Будучи элементарной, данная функция непрерывна во всех точках своей области определения, т.е. в точке $x = 0$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 212.2

Область определения данной функции $D(f) = \mathbb{R}$. Поскольку функция $f(x)$ является элементарной, то она непрерывна для всех $x \in D(f) = \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 213.1

Найдём односторонние пределы в точке x_0 и сравним их со значением $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} 0 = 0 \neq f(0), \quad \lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} 1 = 1 = f(0).$$

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0. В силу различия значений односторонних пределов она не является непрерывной в этой точке. [Вернуться к условию]

Решение задачи 214.1

Находим односторонние пределы в точке x_0:

$$f(x_0-0)=f(-0)=\frac{1}{0-1}=-1,\quad f(x_0+0)=f(+0)=(0+1)^2=1.$$

Оба предела существуют и конечны, но различны. Следовательно x_0 является точкой конечного скачка, причём скачёк равен

$$f(+0)-f(-0)=2.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 214.12

Символом $[x]$ обозначается целая часть числа x. [Вернуться к условию]

Решение задачи 217.1

Если $|x| < \frac{\pi}{2}$, то $f(x)$ совпадает с элементарной функцией $y = \sin x$ и потому непрерывна. Для $|x| > \frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ также непрерывна, поскольку совпадает с элементарной функцией $y = 1/2$. Таким образом, исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ следует в точках $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

В точке $x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = 1, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, односторонние пределы в точке $x = \frac{\pi}{2}$ существуют, конечны и не равны между собой. Следовательно функция $f(x)$ в этой точке терпит конечный разрыв со скачком

$$h = \left| f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что в точке $x = -\frac{\pi}{2}$ функция $f(x)$ также имеет конечный разрыв со скачком $h = 1/2$. Строим график (рисунок Р.11).

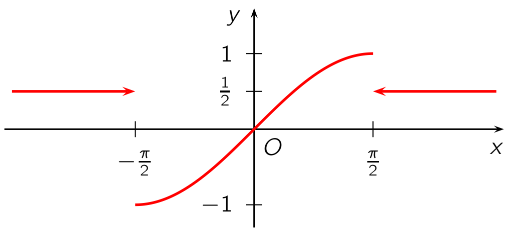

Рисунок Р.11

[Вернуться к условию]

Решение задачи 217.12

Если $|x| < 1$, то

$$f(x) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x^n}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} x^n} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Если $|x| > 1$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/x^n + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

При $x = 1$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

При $x = -1$ знаменатель задающей функцию $f(x)$ дроби для нечетных n обращается в нуль. Значит, в этой точке предел не существует, и функция $f(x)$ не определена.

Итак, мы доказали, что

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < 1, \\ 1/2 & \text{при } x = 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Так как

$$f(1-0) = 0, \quad f(1+0) = 1, \quad f(-1-0) = 1, \quad f(-1+0) = 0,$$

то эта функция в точках $x = \pm 1$ терпит конечный разрыв со скачком $h = 1$. В остальных точках функция $f(x)$ совпадает с постоянной функцией и потому непрерывна. Строим чертеж (рисунок Р.12).

[Вернуться к условию]

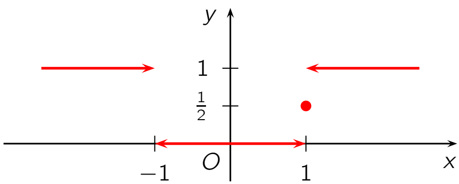

Рисунок Р.12

Решение задачи 218.1

При $x \neq 0$ функция $f(x)$ совпадает с элементарной функцией $2^{-1/x^2}$ и потому непрерывна. Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 2^{-\frac{1}{x^2}} = 2^{-\infty} = 0 \neq 2 = f(0).$$

Итак, предел функции $f(x)$ в точке $x = 0$ существует, но не равен значению функции в этой точке. Таким образом, в точке $x = 0$ данная функция имеет устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 221

Функция $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ является многочленом и потому непрерывна на отрезке $[1; 2]$. Найдем ее значения на концах этого отрезка:

$$f(1) = 1 - 3 + 2 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 16 - 12 + 4 - 1 = 7 > 0.$$

Полученные значения имеют разные знаки, поэтому по первой теореме Больцано—Коши существует точка $c \in (1; 2)$, в которой $f(c) = 0$. Число c и есть корень данного уравнения. [Вернуться к условию]

Глава 3. Теория дифференцирования

Решение задачи 229.1

Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы и разности, производной степенной функции, получим

$$y' = (x^3 + 3x^2 - 4)' = (x^3)' + (3x^2)' - (4)' = 3x^2 + 3(x^2)' - 0 = \\ = 3x^2 + 3 \cdot 2x = 3x^2 + 6x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 230.1

Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции и таблицей производных. Получим

$$y' = (\operatorname{tg}^2 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' =$$
$$= 2\operatorname{tg} 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{6\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 231.1

Применим формулу

$$y' = y \cdot (\ln y)'.$$

Найдем логарифмическую производную. При этом воспользуемся свойством логарифма.

$$\ln y = \ln(\sin x)^x = x \cdot \ln \sin x;$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln \sin x)' = x' \cdot \ln \sin x + x \cdot (\ln \sin x)' = \ln \sin x + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Подставим в исходную формулу

$$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 232.1

Пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных, найдем:

$$y' = \left((4-3x^5)^{\frac{1}{5}} + 4^x \frac{2}{\ln 4}\right)' = \frac{1}{5}(4-3x^5)^{-\frac{4}{5}} \cdot (-15x^4) + 4^x \ln 4 \cdot \frac{2}{\ln 4} =$$

$$= -\frac{3x^4}{\sqrt[5]{(4-3x^5)^4}} + 2 \cdot 4^x.$$

Теперь вместо x подставим 1:

$$y'(1) = -\frac{3 \cdot 1^4}{\sqrt[5]{(4-3 \cdot 1^5)^4}} + 2 \cdot 4^1 = -3 + 8 = 5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 233.1

Найдем производную первого порядка:

$$y' = (3x^2 - x + 5)' = 6x - 1.$$

Производную второго порядка найдем по определению

$$y'' = (y')' = (6x - 1)' = 6.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 234.1

Используя определение, находим последовательно производные:

$$y' = (5x^2 - 104x - 3)' = 10x - 104,$$
$$y'' = (y')' = (10x - 104)' = 10,$$
$$y''' = (y'')' = (10)' = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 235.1

Найдем первую и вторую производные указанной функции:

$$y' = (e^{-x})' = -e^{-x},$$
$$y'' = (-e^{-x})' = e^{-x}.$$

Несложно сделать предположение, что

$$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

Проверим справедливость этой формулы методом математической индукции.

При $n = 1$ формула очевидно верна.

Пусть это равенство выполняется при $n = k$, т.е.

$$y^{(k)} = (-1)^k e^{-x}.$$

Проверим его при $n = k + 1$, т.е. покажем, что

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1} e^{-x}.$$

Действительно,

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left((-1)^k e^{-x}\right)' = (-1)^k \cdot (-1)e^{-x} = (-1)^{k+1} e^{-x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 236.1

Прежде всего заметим, что

$$x' = 1, \quad (x)^{(k)} = 0, \;\; k = 2, 3, \ldots,$$
$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right).$$

Тогда, применяя формулу Лейбница, получим

$$(x \sin x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{n} C_{100}^{k} (x)^{(k)} (\sin x)^{(100-k)} =$$
$$= C_{100}^{0} x (\sin x)^{(100)} + C_{100}^{1} x' (\sin x)^{(99)} =$$
$$= x \sin(x + 50\pi) + 100 \sin\left(x + \frac{99\pi}{2}\right) = x \sin x - 100 \cos x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 237.1

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

В нашем случае

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$
$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$
$$f(x_0) = f(1) = \ln 1 = 0.$$

Подставив полученные результаты в уравнение касательной, получим

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 0, \quad \text{т.е.} \quad y = x - 1.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Значит, в нашем случае уравнение нормали

$$y = -\frac{1}{1}(x - 1) + 0, \quad \text{т.е.} \quad y = -x + 1.$$

Определим угол наклона касательной

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Сделаем рисунок.

[Вернуться к условию]

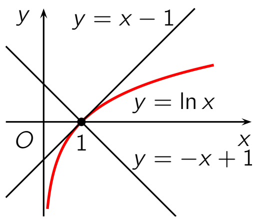

Рисунок Р.13

Решение задачи 258.1

Углом между кривыми в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым в указанной точке.

Вначале определим точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$$

откуда получим точки $(2; 2)$, $(2; -2)$.

Рассмотрим вначале точку $(2; 2)$. Для того, чтобы найти угол между касательными, достаточно знать их угловые коэффеценты в этой точке. Для кривой $y^2 = 2x$ получим

$$2y \cdot y' = 2, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad k_1 = y'(2; 2) = \frac{1}{2}.$$

Для кривой $x^2 + y^2 = 8$ имеем

$$2x + 2y \cdot y' = 0, \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad k_2 = y'(2; 2) = -1.$$

Значит для искомого угла

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 k_2} = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = -1,$$

т.е. острый угол между данными кривыми в точке $(2; 2)$ равен $\frac{\pi}{4}$.

Поступая аналогично для точки $(2; -2)$, будем иметь

$$k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = 1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 259.1

Функция средних издержек выражается соотношением:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

В данном случае

$$AC(q) = \frac{50q - 0,05q^3}{q} = 50 - 0,05q^2.$$

При $q = 10$ средние издержки равны

$$AC(q) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45.$$

Функция предельных издержек выражается производной:

$$MC(q) = C'(q).$$

В данном случае

$$MC(q) = (50q - 0,05q^3)' = 50q - 0,15q^2.$$

При $q = 10$ предельные издержки равны

$$MC(q) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.1

Эластичность определяется с помощью следующей формулы:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'.$$

Значит, в данном случае

$$E_x(y) = \frac{x}{-0,5x + 80}(-0,5x + 80)' = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ эластичность себестоимости равна

$$E_{60}(y) = \frac{60}{60 - 160} = -0,6.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 261.1

Производительность труда определяется производной от объема продукции:

$$z(t) = q'(t).$$

Скорость изменения производительности выражается производной от производительности труда:

$$v(t) = z'(t).$$

Темп изменения производительности равен логарифмической производной от производительности труда:

$$T_z(t) = (\ln z(t))' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

Значит, в данном случае

$$z(t) = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\right)' = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100,$$

$$v(t) = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100\right)' = -5t + 15,$$

$$T_z(t) = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}.$$

Через час после начала работы, т.е. при $t = 1$, указанные параметры равны

$$z(1) = -\frac{5}{2} + 15 + 100 = 112,5,$$

$$v(1) = -5 + 15 = 10,$$

$$T_z(1) = \frac{2 - 6}{1 - 6 - 40} = \frac{4}{45}.$$

За час до окончания работы, т.е. при $t = 8 - 1 = 7$, указанные параметры равны

$$z(7) = -\frac{5}{2} \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82,5,$$
$$v(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20,$$
$$T_z(7) = \frac{2 \cdot 7 - 6}{7^2 - 6 \cdot 7 - 40} = -\frac{8}{33}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 262.1

Равновесная цена определяется из условия $q = s$. Поэтому, решив уравнение

$$\frac{p+8}{p+2} = p + 0,5,$$

получим $p = 2$, т.е. равновесная цена равна 2.

Эластичность спроса определяется формулой

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'(p) = \frac{p}{q} \left(\frac{p+8}{p+2} \right)' = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}.$$

Эластичность предложения определяется формулой

$$E_p(s) = \frac{p}{s} s'(p) = \frac{p}{s} (p + 0,5)' = \frac{p}{p + 0,5} = \frac{2p}{2p+1}.$$

Значит, эластичность спроса и предложения для равновесной цены $p = 2$ равна

$$E_2(q) = -\frac{6 \cdot 2}{(2+2)(2+8)} = -0,3; \quad E_2(s) = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = 0,8.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 263.1

Найдем производную:

$$y' = (\arcsin 2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot (2x)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Значит, дифференциал функции будет равен

$$dy = y'dx = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 264.1

Воспользуемся формулой

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot \Delta x.$$

В этом случае $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. При применении указанной формулы важно правильно выбрать точку x и Δx. Легко вычислить $\sqrt{25} = 5$. Поэтому, в качестве x положим 25, т.е.

$$x = 25, \quad \Delta x = 26 - 25 = 1.$$

Подставив их в формулу, получим

$$\sqrt{25+1} - \sqrt{25} \approx \frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 1.$$

Тогда

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} \approx \frac{1}{10} + 5 = 5,1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 264.2

Воспользуемся формулой

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x.$$

В этом случае $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. При применении указанной формулы важно правильно выбрать точку x и Δx. Легко вычислить $\sqrt{1}=1$. Поэтому, в качестве x положим 1, т.е.

$$x=1,\quad \Delta x=1,2-1=0,2.$$

Подставив их в формулу, получим

$$\sqrt{1+0,2}-\sqrt{1}\approx\frac{1}{2\sqrt{1}}\cdot 0,2.$$

Тогда

$$\sqrt{1,2}\approx 0,1+1=1,1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 264.3

Воспользуемся формулой

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

В этом случае $f(x) = \log_2 x$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$. При применении указанной формулы важно правильно выбрать точку x и Δx. Легко вычислить $\log_2 2 = 1$. Поэтому, в качестве x положим 2, т.е.

$$x = 2, \quad \Delta x = 1,9 - 2 = -0,1.$$

Подставив их в формулу, получим

$$\log_2(2 - 0,1) - \log_2 2 \approx \frac{1}{2 \ln 2} \cdot (-0,1).$$

Тогда

$$\log_2 1,9 \approx 1 - \frac{1}{20 \ln 2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 266.1

Так как $\sin 2 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 0 = 0$, то применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)'}{(3x)'} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3} = \frac{2\cos 0}{3} = \frac{2}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 267.1

Область определения данной функции $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Найдем производную

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 7\right)' = x^2 - 5x + 6.$$

Область определения производной $D(y') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв производную к нулю

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$
y	$\nearrow$	$-\frac{7}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит,
$x_1 = 2$ — точка максимума, $y_{\max} = -\frac{7}{3}$;
$x_2 = 3$ — точка минимума, $y_{\min} = -\frac{5}{2}$;
функция возрастает при $x \in (-\infty; 2]$, $[3; +\infty)$;
функция убывает при $x \in [2; 3]$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 268.1

Область определения данной функции $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

Найдем производную вторую производную

$$y' = (x^4 - 4x^3 + x - 1)' = 4x^3 - 12x^2 + 1,$$
$$y'' = (4x^3 - 12x^2 + 1)' = 12x^2 - 24x.$$

Область определения второй производной $D(y'') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв y'' к нулю

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 24x = 0,$$

найдем точки

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y	$\bigcup$	-1	$\bigcap$	-15	$\bigcup$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит,
$(0; -1)$, $(2; -15)$ — точки перегиба;
функция выпукла (выпукла вверх) при $x \in [0; 2]$;
функция вогнута (выпукла вниз) при $x \in (-\infty 0], [2 + \infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 269.1

Функция $y = x^3 - 3x$ непрерывна на отрезке $[0; 2]$.

Найдем производную

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3.$$

Производная y' непрерывна на отрезке $[0; 2]$.

Приравняв производную к нулю

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Точка $x_1 = -1 \notin [0; 2]$, а $x_2 = 1 \in [0; 2]$.

Вычислим значения функции в полученной точке и на концах отрезка:

$$y(1) = -2, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 2.$$

Значит, наибольшее значение функции

$$y_{\text{наиб}} = y(2) = 2;$$

наименьшее значение функции

$$y_{\text{наим}} = y(1) = -2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 270.1

Найдем вертикальные асимптоты.

Область определения функции $D(y) = (\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Поскольку

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

то $x = -1$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$. При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - 2x}{(x+1)^2} = -2.$$

Значит, $y = x - 2$ — наклонная асимптота.

Аналогичным образом можно получить, что при $x \to -\infty$ прямая $y = x - 2$ также является наклонной асимптотой. [Вернуться к условию]

Решение задачи 271.1

Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Найдем пределы при x, стремящимся к концам промежутков области определения

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) = -\infty.$$

Так как $D(y) = (-\infty; +\infty)$, то вертикальных асимптот нет.

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.

$$y(-x) = \frac{1}{4}\big((-x)^3 + 3(-x)^2 - 9(-x) + 1\big) = \frac{1}{4}\big(-x^3 + 3x^2 + 9x + 1\big).$$

Функция не является периодической.

Точки пересечения с осями координат. С осью Ox: $y = 0$. Получим уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = 0.$$

Это уравнение достаточно сложное для решения, поэтому пропустим этот пункт.

С осью Oy: $x = 0$. Тогда

$$y = \frac{1}{4}(0^3 + 3\cdot 0^2 - 9\cdot 0 + 1) = \frac{1}{4}.$$

Получили точку $(0; 1)$.

Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Найдем производную

$$y' = \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)' = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}.$$

Область определения производной $D(y') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв производную к нулю

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1.$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Значит,
$x_1 = -3$ — точка максимума, $y_{\max} = 7$;
$x_2 = 1$ — точка минимума, $y_{\min} = -1$;
функция возрастает при $x \in (-\infty; -3], [1; +\infty)$;
функция убывает при $x \in [-3; 1]$.

Определим интервалы выпуклости и точки перегиба. Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{1}{4}(3x^2 + 6x - 9)' = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Область определения y'': $D(y'') = (-\infty, +\infty)$.

Приравняв вторую производную к нулю

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0,$$

найдем точку $x = -1$. Составим таблицу

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y	$\bigcap$	3	$\bigcup$
y''	$-$	0	$+$

Значит,
$(-1;3)$ — точка перегиба;
функция выпукла при $x \in (-\infty; -1]$;
функция вогнута при $x \in [-1 + \infty)$.

Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$. При $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 1}{x} = \infty.$$

Значит, наклонных асимптот нет.

Множество значений функции $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

Построим график.

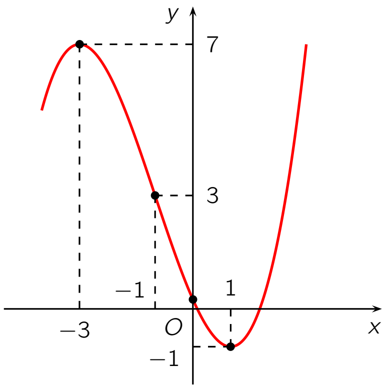

Рисунок Р.14

[Вернуться к условию]

Решение задачи 272.1

Доход, который можно получить, продав q единиц продукции по цене $p(q)$ равен $R(q) = qp(q)$. Поэтому функция прибыли будет иметь вид

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = qp(q) - C(q) =$$
$$= q\left(50 - \frac{q}{10}\right) - \frac{q}{50} - 15q - 800 = \frac{1749}{50}q - \frac{1}{10}q^2 - 800.$$

Исследуем функцию прибыли на максимальное значение при $q \geqslant 0$. Найдем производную

$$\Pi'(q) = \left(\frac{1749}{50}q - \frac{1}{10}q^2 - 800\right)' = \frac{1749}{50} - \frac{1}{5}q.$$

Приравняем $\Pi'(q)$ к нулю:

$$\Pi'(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1749}{50} - \frac{1}{5}q = 0.$$

Отсюда $q = 174,9$. Составим таблицу

q	0	$(0; 174,9)$	$174,9$	$(174,9; +\infty)$
Π	-800	$\nearrow$	$2259,001$	$\searrow$
Π'		$+$	0	$-$

Значит, прибыль максимальна при продаже $q_{\max} = 174,9$ единиц продукции и составляет $\Pi_{\max} = 2259,001$.

Отметим, что если по смыслу задачи q — целое, то для нахождения решения задачи дополнительно нужно вычислить значение функции $\Pi(q)$ в ближайших к полученному $q_{\max}$ целых числах. В нашем случае

$$\Pi(174) = 2258,92; \quad \Pi(175) = 2259.$$

Поэтому при условии целочисленности q, прибыль максимальна при продаже $q_{\max} = 175$ единиц продукции и составляет $\Pi_{\max} = 2259$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 273.1

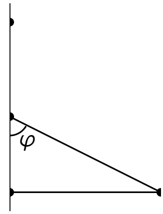

Рисунок Р.15

Обозначим через C — точку железной дороги, ближайшую к A, D — точку между C и B, где подъездной путь будет пересекать железную дорогу (см. рисунок Р.15). Пусть $CD = x$, тогда по теореме Пифагора $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{64 + x^2}$ — длина подъездного пути к железной дороге. Кроме того, $BD = BC - x = 15 - x$ — длина пути по железной дороге. Учитывая стоимость провоза груза по подъездному пути и по железной дороге, найдем общую стоимость транспортировки:

$$s = s(x) = AD \cdot p + BD \cdot q = 4\sqrt{64 + x^2} + 2(15 - x).$$

По смыслу задачи $x \in [0; 15]$. Исследуем функцию $s(x)$ на наименьшее значение на этом отрезке. Найдем производную

$$s'(x) = \left(4\sqrt{64 + x^2} + 2(15 - x)\right)' = \frac{4x}{\sqrt{64 + x^2}} - 2.$$

Приравняв производную к нулю, найдем критические точки:

$$s'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x}{\sqrt{64 + 4^2}} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \in [0; 15].$$

Найдем значения функции $s(x)$ в найденной точке и на концах отрезка $[0; 15]$:

$$s\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \approx 57,7; \quad s(0) = 62; \quad s(15) = 68.$$

Значит, $s_{\text{наим}} = s\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \approx 57,7$, а для нахождения угла φ поступим так:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AC}{CD} = \frac{8}{\frac{8\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Поэтому, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 274.1

Пусть x млрд. руб. инвестируется в производство, тогда $1-x$ млрд. руб. размещается в банк. Размещенный в банк капитал через год будет равен

$$K_{\text{б}}(x)=(1-x)\left(1+\frac{p_1}{100}\right)=(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x,$$

а капитал, вложенный в производство

$$K_{\text{пр}}(x)=x\left(1+\frac{p_2}{100}\right)=x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x.$$

По условию задачи издержки составят $C(x)=ax^2=3x^2$, т.е. прибыль от вложения в производство $\Pi_1(x)=u(x)-K(x)=2x-3x^2$. Налоги составят

$$N(x)=\Pi_1(x)\frac{p_3}{100}=(2x-3x^2)\cdot 0,1.$$

Таким образом, чистая прибыль от вложения средств в производство составит

$$\Pi_{\text{пр}}(x)=\Pi_1(x)-N(x)=2x-3x^2-(2x-3x^2)\cdot 0,1=0,9(2x-3x^2).$$

Значит суммарная прибыль составит

$$\Pi(x)=K_{\text{б}}(x)+\Pi_{\text{пр}}(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+0,9(2x-3x^2)=0,3x-2,7x^2+1,5.$$

Исследуем функцию $\Pi(x)$ на наибольшее значение при $x\in[0;1]$. Найдем производную

$$\Pi'(x)=(0,3x-2,7x^2+1,5)'=0,3-5,4x.$$

Приравняв производную к нулю, отыщем критические точки

$$\Pi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0,3 - 5,4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{18}.$$

Найденная точка принадлежит отрезку исследования. Осталось вычислить значения данной функции в критических точках и на концах отрезка

$$\Pi(0) = 1,5;$$
$$\Pi\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{181}{120} \approx 1,508;$$
$$\Pi(1) = 0,3 - 2,7 + 1,5 = -0,9.$$

Значит, наибольшее значение функции $\Pi_{\text{наиб}} = \Pi\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{181}{120}$. Таким образом, для получения максимальной прибыли в производство следует вложить $x_1 = \frac{1}{18}$ млрд. рублей, а в банк — $x_2 = \frac{17}{18}$ млрд. рублей.

[Вернуться к условию]

Глава 4. Теория интегрирования

Решение задачи 302.1

Воспользуемся формулой возведения в квадрат, свойством линейности неопределенного интеграла и таблицей интегралов:

$$\int (2x+1)^2 dx = \int (4x^2+4x+1)dx = \int 4x^2 dx + \int 4x dx + \int dx =$$

$$= 4\int x^2 dx + 4\int x dx + \int dx = 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 303.1

Выполнив замену $3x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \cos 3x\,dx = \left|\begin{array}{l} 3x = t, \\ 3\,dx = dt, \\ dx = \frac{1}{3}\,dt \end{array}\right| = \int \cos t\,\frac{1}{3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 303.2

Выполнив замену $\sin 5x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\sin^3 5x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin 5x = t, \\ 5\cos 5x\,dx = dt, \\ \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t^3}}\frac{1}{5}\,dt = \frac{1}{5}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{5\sqrt{\sin 5x}} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 303.3

Выполнив замену $\operatorname{ctg} 4x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\sin^2 4x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} 4x = t, \\ -\frac{4}{\sin^2 4x}\,dx = dt, \\ \frac{dx}{\sin^2 4x} = -\frac{1}{4}\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\left(-\frac{1}{4}\right)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\sqrt{t^3} + C = -\frac{1}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 4x} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 303.4

Выполнив замену $\operatorname{arctg} x = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t, \\ \frac{1}{1+x^2}\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\operatorname{arctg} x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 303.5

Выполнив замену $5 - 2x^2 = t$, сведем интеграл к табличному:

$$\int e^{5-2x^2} x\,dx = \left| \begin{array}{l} 5 - 2x^2 = t, \\ -4x\,dx = dt, \\ x\,dx = -\frac{1}{4}\,dt \end{array} \right| = \int e^t \left(-\frac{1}{4}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{4} e^t + C = -\frac{1}{4} e^{5-2x^2} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 303.6

Разобъем интеграл на два

$$\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+16}\,dx - \int \frac{4}{x^2+16}\,dx.$$

Второй интеграл в правой части является табличным:

$$\int \frac{4}{x^2+16}\,dx = 4\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C = \operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$$

В первом интеграле выполним замену $x^2+16=t$:

$$\int \frac{2x}{x^2+16}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^2+16=t, \\ 2x\,dx=dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln(x^2+16) + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{2x-4}{x^2+16}\,dx = \ln(x^2+16) - \operatorname{arctg}\frac{x}{4} + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.1

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Получим

$$\int \ln(x+8)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+8), \\ dv = dx, \\ du = \frac{1}{x+8}\,dx, \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x}{x+8}\,dx = x\ln(x+8) - \int \frac{x+8-8}{x+8}\,dx =$$

$$= x\ln(x+8) - \int \frac{x+8}{x+8}\,dx + \int \frac{8}{x+8}\,dx =$$

$$= x\ln(x+8) - x + 8\ln|x+8| + C = (x+8)\ln(x+8) - x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.2

Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int (x^2 - x + 1) \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = (x^2 - x + 1)\, dx, \\ du = \frac{1}{x}\, dx, \\ v = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) - \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 1 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.3

Воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$:

$$\int (3x-2)\ln^2 x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \\ dv = (3x-2)\, dx, \\ du = \frac{2\ln x}{x}\, dx, \\ v = \frac{3x^2}{2} - 2x \end{array} \right| =$$

$$= \ln^2 x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right) \frac{2\ln x}{x}\, dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - 2\int \left(\frac{3x}{2} - 2\right)\ln x\, dx.$$

Последний интеграл также возмем по частям:

$$\int \left(\frac{3x}{2} - 2\right)\ln x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = \left(\frac{3x}{2} - 2\right)\, dx, \\ du = \frac{1}{x}\, dx, \\ v = \frac{3x^2}{4} - 2x \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right)\frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{3x}{4} - 2\right)\, dx = \left(\frac{3x^2}{4} - 2x\right)\ln x - \frac{3x^2}{8} + 2x + C.$$

Окончательно получим

$$\int (3x-2)\ln^2 x\, dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\ln x + \frac{3x^2}{4} + 4x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.4

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Положим $u = \arcsin 2x$, $dv = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. Тогда $du = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$,

$$v = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1-4x^2 = t, \\ -8x\,dx = dt, \\ x\,dx = -\frac{1}{8}\,dt, \end{array} \right| = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ = -\frac{1}{4}\sqrt{t} + C = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.$$

Поэтому,

$$\int \frac{x \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \\ = \arcsin 2x \cdot \left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right) - \int \left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right)\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \\ = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.5

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. В этом случае

$$\int (x+8)\sin 3x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x+8, \\ dv = \sin 3x\,dx, \\ du = dx, \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx = -\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.6

Воспользуемся формулой интегрирования по частям дважды. Имеем

$$\int (x^2-3)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2-3, \\ dv = \cos x\,dx, \\ du = 2x\,dx, \\ v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2-3)\sin x - 2\int x\sin x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x\,dx, \\ du = dx, \\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2-3)\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= (x^2-3)\sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C = (x^2-5)\sin x + 2x\cos x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 304.7

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. В этом случае

$$\int x\cos(x-4)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ dv = \cos(x-4)\,dx, \\ du = dx, \\ v = \sin(x-4) \end{array} \right| =$$

$$= x\sin(x-4) - \int \sin(x-4)\,dx = x\sin(x-4) + \cos(x-4) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 305.1

Выпишем знаменатель и выделим в нем полный квадрат:

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1.$$

Подставим в исходный интеграл и сделаем замену:

$$\int\frac{2x-3}{(x+1)^2+1}\,dx=\left|\begin{array}{l}x+1=t,\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{2(t-1)-3}{t^2+1}dt=\int\frac{2t-5}{t^2+1}\,dt.$$

Далее разобъем подынтегральную дробь на две и воспользуемся известными методами:

$$\int\frac{2t-5}{t^2+1}\,dt=\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt-5\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=\ln(t^2+1)-5\operatorname{arctg}t+C=$$
$$=\ln(x^2+2x+2)-5\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 305.2

Так как степень числителя подынтегральной функции равна степени знаменателя, то, разделив числитель на знаменатель, получим

$$\frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}=1+\frac{3x^2-x+6}{x^3-x^2+3x-3}.$$

Значит,

$$\int\frac{x^3+2x^2+2x+3}{x^3-x^2+3x-3}\,dx=x+\int\frac{3x^2-x+6}{x^3-x^2+3x-3}\,dx.$$

Для вычисления интеграла в правой части, вначале разложим на множители знаменатель:

$$x^3-x^2+3x-3=x^2(x-1)+3(x-1)=(x^2+3)(x-1).$$

Теперь разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби, воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов. Имеем,

$$\frac{3x^2-x+6}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{C}{x-1}=$$
$$=\frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+3C}{(x^2+3)(x-1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в конечном и начальном числителе, получим систему

$$\begin{cases}A+C=3,\\-A+B=-1,\\-B+3C=6,\end{cases}$$

решая которую, найдем

$$\begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 2. \end{cases}$$

Возвращаясь к вычислению интеграла, будем иметь

$$\int \frac{3x^2 - x + 6}{(x^2+3)(x-1)}\,dx = \int \frac{x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln|x-1| + C.$$

Окончательно,

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln|x-1| + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 306.1

Сделаем замену:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{2x-1}=t, \\ 2x-1=t^4, \\ x=\frac{1}{2}(t^4-1), \\ dx=2t^3\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t^3\,dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1}.$$

Получили интеграл от рациональной функции. Для вычисления отнимем и добавим в числителе единицу, разобъем интеграл на сумму интегралов и воспользуемся таблицей интегралов:

$$\begin{aligned} 2\int \frac{t^2\,dt}{t-1} &= 2\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\,dt = \\ &= 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C = \\ &= \sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 306.2

Сделаем замену:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}+2 = t, \\ x = (t-2)^2, \\ dx = 2(t-2)dt \end{array} \right| = \int \frac{(t-2)^2-1}{t} \cdot 2(t-2)\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^3-6t^2+11t-6}{t}\,dt.$$

Разобъем на сумму интегралов:

$$2\int \frac{t^3-6t^2+11t-6}{t}\,dt = 2\int \left(\frac{t^3}{t} - 6\frac{t^2}{t} + 11\frac{t}{t} - 6\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= 2\int t^2\,dt - 12\int t\,dt + 22\int dt - 12\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 22t - 12\ln|t| + C =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x}+2)^3 - 6(\sqrt{x}+2)^2 + 22(\sqrt{x}+2) - 12\ln(\sqrt{x}+2) + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + 6\sqrt{x} - 12\ln(\sqrt{x}+2) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 307.1

Для вычисления интеграла применим формулу $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta))$. Тогда

$$\int \sin 2x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 307.2

Произведем замену:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 307.24

При помощи универсальной тригонометрической подстановки сведем данную задачу к интегрированию рациональной функции. Имеем,

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3+t^2}.$$

Вычисляя последний интеграл с помощью таблицы интегралов,

$$\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C,$$

и производя обратную замену, окончательно получим

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 308.1

Воспользуемся свойством линейности определенного интеграла и применим формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_0^2 (6x^2 - 5)\,dx = 6\int_0^2 x^2\,dx - 5\int_0^2 dx = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - 5x\Big|_0^2 =$$

$$= 6\left(\frac{8}{3} - 0\right) - 5(2 - 0) = 16 - 10 = 6.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.1

Вычислим этот интеграл, произведя подходящую замену. При этом дополнительно следует проконтролировать, как изменятся границы интегрирования. Именно,

$$\int\limits_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^2 = t, \\ 2xdx = dt, \\ xdx = \frac{1}{2}\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_0^1 e^t \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.2

Выполним замену $\ln x = t$. Получим

$$\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \left|\begin{array}{l} \ln x = t, \\ \frac{1}{x}\,dx = dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline e & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{array}\right| = \int\limits_0^1 \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^1 =$$

$$= -\cos 1 + \cos 0 = 1 - \cos 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.3

Воспользуемся свойством четности подынтегральной функции. Имеем

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Теперь выполним замену $x = \sin t$. Получим

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{\pi}{6} \\ 0 & 0 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t\,dt}{(1-\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 t} = 2\operatorname{tg} t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} 0\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.4

Выполним замену $4+\sqrt{\sin y}=t$. Получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y\,dy}{4+\sqrt{\sin y}} = \left| \begin{array}{l} 4+\sqrt{\sin y}=t, \\ \sin y=(t-4)^2, \\ \cos y\,dy = 2(t-4)\,dt, \\ \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline \frac{\pi}{2} & 5 \\ 0 & 4 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_4^5 \frac{2(t-4)\,dt}{t} =$$

$$= 2\left(\int\limits_4^5 dt - 4\int\limits_4^5 \frac{dt}{t}\right) = 2\left(t\Big|_4^5 - 4\ln|t|\Big|_4^5\right) = 2 - 8\ln\frac{5}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.5

Преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+4}\,dx =$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{(x^2+3x+4)-(5x+3)}{x^2+3x+4}\,dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{2} dx - \int_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{5x+3}{x^2+3x+4}\,dx.$$

Первый из полученных интегралов вычисляется элементарно:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{2} dx = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

В знаменателе подынтегральной функции второго интеграла выделим полный квадрат:

$$x^2+3x+4 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 4 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{5x+3}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{3}{2}=t, \\ dx = dt, \\ \begin{array}{r|c} x & t \\ \hline 2 & \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{7}{2}} \frac{5\left(t-\frac{3}{2}\right)+3}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt = \int\limits_{0}^{\frac{7}{2}} \frac{5t-\frac{9}{2}}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt = 5\int\limits_{0}^{\frac{7}{2}} \frac{t\,dt}{t^2+\frac{7}{4}} - \frac{9}{2}\int\limits_{0}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_{0}^{\frac{7}{2}} \frac{d\left(t^2+\frac{7}{4}\right)}{t^2+\frac{7}{4}} - \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(t^2+\frac{7}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{7}{2}} - \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\ln 14 - \ln\frac{7}{4}\right) - \frac{9}{\sqrt{7}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{7} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{5}{2}\ln 8 - \frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

Окончательно,

$$\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx = \frac{7}{2} - \frac{15}{2}\ln 2 + \frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.6

Воспользуемся методом интегрирования рациональных функций. Для этого разложим знаменатель на множители. Получим

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1).$$

Разобъем подынтегральную дробь на простейшие. Имеем

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \\ = \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты в последнем и первом числителе, составим и решим систему:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=1, \\ A-C=0; \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A, \\ C=A, \\ A+A+A=1; \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{3}, \\ B=-\frac{1}{3}, \\ C=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Вычислим каждый из интегралов в правой части последнего равенства. Имеем

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_{-1}^{0} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2,$$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t, \\ dx=dt, \\ \begin{array}{r|c} x & t \\ \hline 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{3}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= 0 - 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{3}\operatorname{arctg}1\sqrt{3} = -2\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Заметим, что при вычислении использовалось свойство четности подынтегральной функции. Окончательно,

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(-\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}\ln 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.7

Воспользуемся формулой понижения степени для тригонометрических функций. Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x\,dx\right).$$

Вычислим каждый из полученных интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x \cdot \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2x)\,d(\sin 2x) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Окончательно получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 3\cdot\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{5\pi}{32}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.10

Воспользуемся формулой интегрирования по частям для определенного интеграла. Получим

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \sin x dx, \\ du = dx, \\ v = -\cos x \end{array}\right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx =$$

$$= -(\pi\cdot(-1) - 0) + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi + 0 = \pi.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.11

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Получим

$$\int_{-3}^{0}(x-2)e^{-\frac{x}{3}}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x-2,\\ dv=e^{-\frac{x}{3}}\,dx,\\ du=dx,\\ v=-3e^{-\frac{x}{3}} \end{array}\right|=-3(x-2)e^{-\frac{x}{3}}\Big|_{-3}^{0}+3\int_{-3}^{0}e^{-\frac{x}{3}}\,dx=$$

$$=6-15e-9e^{-\frac{x}{3}}\Big|_{0}^{\pi}=6-15e-9+9e=-6e-3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 309.12

Разделим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\sqrt{3x+2}$. Получим

$$\int_0^2 \frac{\left(4\sqrt{2-x}-\sqrt{3x+2}\right)\,dx}{\left(\sqrt{3x+2}+4\sqrt{2-x}\right)(3x+2)^2} = \int_0^2 \frac{4\sqrt{\frac{2-x}{3x+2}}-1}{1+4\sqrt{\frac{2-x}{3x+2}}}\frac{dx}{(3x+2)^2}.$$

Выполним замену:

$$\int_0^2 \frac{4\sqrt{\frac{2-x}{3x+2}}-1}{1+4\sqrt{\frac{2-x}{3x+2}}}\frac{dx}{(3x+2)^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{2-x}{3x+2}} = t, \\ 2-x = 3xt^2+2t^2, \\ x = \frac{2-2t^2}{3t^2+1}, \\ dx = \frac{-16t}{(3t^2+1)^2}\,dt, \\ 3x+2 = \frac{8}{3t^2+1}, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^0 \frac{4t-1}{1+4t}\frac{(3t^2+1)^2}{64}\frac{-16t}{(3t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4t^2-t}{4t+1}\,dt.$$

Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{4t^2-t}{4t+1}\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(t-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{4t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\ln|4t+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\ln 5\right) = \frac{\ln 5}{32}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 310.1

Сделаем рисунок.

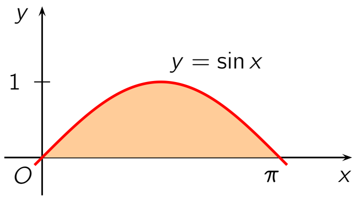

Рисунок Р.16

Воспользуемся формулой для вычисления площади криволинейной трапеции

$$S = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 311.1

Сделаем рисунок.

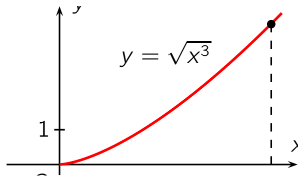

Рисунок Р.17

Для нахождения длины дуги кривой OA воспользуемся формулой (**??**). При этом $y' = \left(x^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Тогда

$$L = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{9}{4}x = t, \\ \frac{9}{4}\,dx = dt, \\ dx = \frac{4}{9}\,dt, \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 4 & 10 \\ 0 & 1 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_1^{10} \sqrt{t}\,\frac{4}{9}\,dt =$$

$$= \frac{4}{9}\int\limits_1^{10} t^{1/2}\,dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 312.1

Сделаем рисунок.

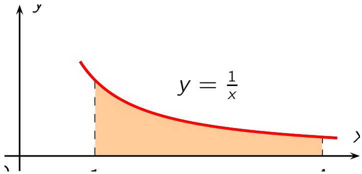

Рисунок Р.18

Для вычисления объема тела, полученного вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Ox, применим формулу (**??**):

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\pi \left.\frac{1}{x}\right|_1^4 = -\pi \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 313.1

Среднее значение издержек можно вычислить по формуле

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} K(x)\, dx.$$

Подставляя исходные значения в указанную формулу, получим

$$K_{\text{ср}} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 (3x^2 + 4x + 2)\, dx = (x^3 + 2x^2 + 2x)\Big|_0^3 = \\ = \frac{1}{3}(27 + 12 + 6 - 0) = 15.$$

Для того, чтобы найти объем продукции, при котором издержки принимают значение, равное 15, следует решить уравнение:

$$K(x) = 15 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4x + 2 = 15.$$

Корнями этого уравнения являются числа $x_1 = \dfrac{5}{3}$ и $x_2 = -3$. По смыслу задачи искомый объем равен $\dfrac{5}{3}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 314.1

Объем продукции V, произведенной рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 выражается формулой

$$V = \int\limits_{t_1}^{t_2} z(t)\,dt.$$

В данном случае

$$V = \int\limits_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right)\,dt = \left(\frac{2}{3}\ln|3t+3| + 3t\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 315.1

Несложно вычислить, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = m + nt = 10 + t$. В силу того, что дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-\frac{p}{100}t}\,dt,$$

в данном случае получим

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}\,dt = \left|\begin{array}{l} u = 10 + t, \\ dv = e^{-0,08t}\,dt, \\ du = dt, \\ v = -12,5e^{-0,08t} \end{array}\right| =$$

$$= -12,5(10+t)e^{-0,08t}\Big|_0^3 + 12,5\int_0^3 e^{-0,08t}\,dt =$$

$$= -162,5e^{-0,24} + 125 - 156,25e^{-0,08t}\Big|_0^3 =$$

$$= -162,5e^{-0,24} + 125 - 156,25e^{-0,24} + 156,25 \approx 30,5.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 316.1

Рапас товаров на складе, образуемый за k дней, можно вычислить с помощью формулы

$$V = \int\limits_0^k f(t)\,dt.$$

В данном случае

$$V = \int\limits_0^2 (3t^2 + 3t + 4)\,dt = \left(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 4t\right)\Big|_0^2 = 22.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 317.1

По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^{-3}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{-2A^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 317.3

По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} \cos 3x\,dx =$$
$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{3} \sin 3x \Big|_1^A \right) = \frac{1}{3} \lim_{A\to+\infty} (\sin 3A - \sin 3).$$

Так как $\lim\limits_{A\to+\infty} \sin 3A$ не существует, то данный несобственный интеграл расходится. [Вернуться к условию]

Решение задачи 317.4

По определению несобственного интеграла с бесконечным пределом интегрирования имеем:

$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{\frac{1}{3}}^{A} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}.$$

Выполним замену $\operatorname{arctg} 3x = t$. Тогда

$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^{A} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{l}{\operatorname{arctg} 3x = t,} \\ \multicolumn{2}{l}{\frac{3\,dx}{1+9x^2} = dt,} \\ x & t \\ \hline A & \operatorname{arctg} 3A \\ \frac{1}{3} & \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \frac{\pi}{3} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3A} \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{t} \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3A} = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 3A} - \frac{4}{\pi} \right).$$

Значит, исходный интеграл равен

$$\int\limits_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x} = -\frac{\pi}{3} \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} 3A} - \frac{4}{\pi} \right) = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \right) = \frac{2}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 318.1

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ является неограниченной в любой окрестности точки $x = 0$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 318.2

Найдим область определения подынтегральной функции. Для этого приравняем знаменатель к нулю:

$$9x^2 - 9x + 2, \quad D = 81 - 72 - 9, \quad x_1 = \frac{9-3}{18} = \frac{1}{3}, \; x_2 = \frac{9+3}{18} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом заключаем, что подынтегральная функция является неограниченной в любой окрестности точки $x = \frac{1}{3}$. Тогда, по определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2} = \frac{1}{9} \lim_{\varepsilon \to \frac{1}{3}^-} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}.$$

Разложим подынтегральную дробь на простейшие:

$$\frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)} = \frac{A}{x - \frac{1}{3}} + \frac{B}{x - \frac{2}{3}} = \frac{Ax - \frac{2}{3}A + Bx - \frac{1}{3}B}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)}.$$

Сравнивая коэффициенты в последнем и исходном числителе, составим и решим систему:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -\frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A, \\ -\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -3, \\ B = 3; \end{cases}$$

Тогда,

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)} = 3\left(-\int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x - \frac{1}{3}} + \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x - \frac{2}{3}}\right) =$$

$$= 3\left(-\ln\left|x - \frac{1}{3}\right|\Bigg|_0^{\varepsilon} + \ln\left|x - \frac{2}{3}\right|\Bigg|_0^{\varepsilon}\right) = 3\left(-\ln\left|\varepsilon - \frac{1}{3}\right| + \ln\frac{1}{3} + \ln\left|\varepsilon - \frac{2}{3}\right| - \ln\frac{2}{3}\right).$$

Окончательно, для исходного интеграла будем иметь

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2} = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \to \frac{1}{3}^-} \left(-\ln\left|\varepsilon - \frac{1}{3}\right| + \ln\frac{1}{3} + \ln\left|\varepsilon - \frac{2}{3}\right| - \ln\frac{2}{3} \right) = \infty,$$

т.е. исходный интеграл расходится. [Вернуться к условию]

Решение задачи 318.5

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ является неограниченной в любой окрестности точки $x = 3$. По определению несобственного интеграла от неограниченной функции имеем:

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{\varepsilon\to 3-0} \int\limits_0^\varepsilon \frac{dx}{(x-3)^2} = \\ = \lim_{\varepsilon\to 3-0} \left(-\frac{1}{x-3}\Big|_0^\varepsilon \right) = \lim_{\varepsilon\to 3-0} \left(-\frac{1}{\varepsilon-3} - \frac{1}{3} \right) = \infty.$$

Значит, данный интеграл расходится.

[Вернуться к условию]

Глава 5. Дифференцирование функций двух переменных

Решение задачи 319.1

Подставляем в функцию z абсциссу точки M вместо x, и ординату — вместо y:

$$z\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 2^2 \cos\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 320.1

Область определения функции z состоит из всех точек плоскости, для которых

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

и потому представляет собой круг с центром в начале координат и единичным радиусом, включающий свою границу — окружность.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 320.2

Координаты точек области определения удовлетворяют условию

$$-1 \leqslant x+y \leqslant 1, \quad \begin{cases} x+y \geqslant 1, \\ x+y \leqslant 1. \end{cases}$$

Эта область представляет собой полосу, ограниченную параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 321.1

Являясь элементарной, данная функция непрерывна на всей своей области определения. Единственная точка разрыва — это нуль знаменателя, расположенный в начале координат $O(0;0)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 322.1

Дифференцируем функцию ρ по каждой из её переменных, считая другую переменную постоянной:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \cdot 2\cos\varphi(-\sin\varphi) = -u^4 \sin 2\varphi.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 322.2

Дифференцируем функцию z по переменной x, считая y постоянной, а затем по переменной y, считая x постоянной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 12xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2 + 3y^2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 322.19

При нахождении частных производных по каждой из трех переменных считаем остальные две переменные постоянными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^{xy^2} \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^{xy^2} \ln z, \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^{xy^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 327.1

Сначала находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x.$$

Затем находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 328.1

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставляем найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x}\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\left(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right) =$$
$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{y\ln(x^2 - y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Получили, что левая часть уравнения тождественно равна правой. А это и значит, что функция z удовлетворяет данному уравнению.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 331.1

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Выписываем полный дифференциал в виде (5.4):

$$dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 331.18

Находим частные производные:

$$u'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad u'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}, \quad u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

Выписываем полный дифференциал (5.4):

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 333.1

Число $1{,}07^{3{,}97}$ представляет собой значение функции $f(x, y) = x^y$ при $x = 1{,}07$ и $y = 3{,}97$. Легко вычислить, что при $x_0 = 1$ и $y_0 = 4$

$$f(x_0; y_0) = 1^4 = 1.$$

Находим приращения переменных:

$$\Delta x = x - x_0 = 1{,}07 - 1 = 0{,}07, \quad \Delta y = y - y_0 = 3{,}97 - 4 = -0{,}03.$$

Вычисляем частные производные в точке $(x_0; y_0)$:

$$\begin{aligned} f'_x &= yx^{y-1}, & f'_x(x_0, y_0) &= 4 \cdot 1^{4-1} = 4, \\ f'_y &= x^y \ln x, & f'_y(x_0, y_0) &= 1^4 \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Находим приближённое значение $f(x, y)$, заменяя приращение функции полным дифференциалом:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \Delta f \approx f(x_0, y_0) + df = \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = \\ &= 1 + 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot (-0{,}03) = 1 + 0{,}28 = 1{,}28. \end{aligned}$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 333.6

Принять $\pi = 3{,}14$. [Вернуться к условию]

Указание к задаче 333.9

Выразить приращения аргументов в радианах, считая, что $\pi = 3{,}14$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 334.1

Не прибегая к формуле (5.5) производной сложной функции, просто подставим x и y в z:

$$z(t) = e^{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = e^{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = e^{a^2}.$$

Так как производная постоянной равна нулю, то окончательно получаем: $\frac{dz}{dt} = 0$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 334.4

Здесь непосредственная подстановка приводит к усложнению выкладок и результата. Применяем формулу (5.5) для производной сложной функции:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (5x^4 + 2y)(-2\sin 2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2} =$$

$$= -2(5x^4 + 2y)\sin 2t + \frac{2x - 3y^2}{1+t^2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 334.8

По формуле (5.5) производной сложной функции

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} = (y + yu)\cos t + (x + xu)\frac{1}{t} + (xy)e^t =$$

$$= (1+u)\left(y\cos t + \frac{x}{t}\right) + xye^t.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 335.1

Выписываем направляющие косинусы заданного направления:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Находим частные производные функции z в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1;1) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1;1) = 2.$$

Тогда по формуле (5.7) $\dfrac{\partial z}{\partial l} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}+1.$ [Вернуться к условию]

Решение задачи 340.1

Находим частные производные функции z и их значения в точке M:

$$z'_x = 2x, \quad z'_x(2;-1) = 4, \qquad z'_y = 4y, \quad z'_y(2;-1) = -4.$$

Тогда $\operatorname{grad} z = \left(z'_x(M); z'_y(M)\right) = (4;-4)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 341.1

По определению

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = \left(2xyz, x^2z^3, 3x^2yz^2\right).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 342.1

По определению градиента

$$\operatorname{grad} u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) = (2x - 1, -2y + z, y)\,.$$

Подставим координаты точки M:

$$\operatorname{grad} u(M) = (2 \cdot 1 - 1, -2 \cdot 0 + (-1), 0) = (1, -1, 0)\,.$$

Находим модуль градиента, определяющий значение максимального роста функции u:

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 344

Производная

$$z'_x = \frac{2x}{y}$$

показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей. Производная

$$z'_y = -\frac{x^2}{y^2}$$

показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами. [Вернуться к условию]

Решение задачи 345.2

Выполняем дифференцирование:

$$u'_x = \frac{a_1}{1-b_1}(1-b_1)(x-c_1)^{-b_1} = a_1 x^{-b_1},$$
$$u'_y = \frac{a_2}{1-b_2}(1-b_2)(x-c_2)^{-b_2} = a_2 x^{-b_2}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 348.1

В данном случае

$$\sigma_{xy} = -\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{a\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{a\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}} = -\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{\alpha y}{\beta x}} = -\frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\left(\ln\dfrac{\alpha}{\beta} - \ln\dfrac{x}{y}\right)} = \frac{d\ln\dfrac{x}{y}}{d\ln\dfrac{x}{y}} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 349.1

Находим частные производные:

$$z'_x = 2x + y - 2, \quad z'_y = x + 2y - 3.$$

Находим подозрительные на экстремум, то есть стационарные, точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ -3x + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = 2 - 2x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, единственной стационарной точкой функции z является точка $M_0(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{xy} = 1, \quad z''_{yy} = 2.$$

Отсюда имеем, что в точке M_0

$$A = z''_{xx}(M_0) = 2, \quad B = z''_{xy}(M_0) = 1, \quad C = z''_{yy}(M_0) = 2,$$
$$\Delta = AC - B^2 = 3.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то согласно теореме 5.8 в точке M_0 данная функция имеет минимум, причём

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{2}{3} - 4 = \frac{5}{3} - 4 = -\frac{7}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 350.1

Находим частные производные функции z:

$$z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2, \quad z'_x = 4xy - 3x^2y - 2xy^2, \quad z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2y.$$

Ищем стационарные точки внутри треугольника D:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 2x^2 - x^3 - 2x^2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} xy(4 - 3x - 2y) = 0, \\ x^2(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Внутри треугольника D, где $x > 0$ и $y > 0$, полученная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0, \\ 2 - x - 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ 4 - 3(2 - 2y) - 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ 4y = 2. \end{cases}$$

Отсюда имеем стационарную точку $M_0(1; 1/2)$, очевидно, лежащую внутри треугольника D (рисунок Р.19). Для этой точки

$$z(M_0) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Исследуем функцию z на границе области. На сторонах $x = 0$ и $y = 0$ треугольника D функция z принимает нулевые значения. На стороне $x + y = 6$, воспользовавшись тем, что $y = 6 - x$, представим функцию z как функцию $z_1(x)$ одной переменной x, заданную на отрезке $[0; 6]$:

$$z_1(x) = x^2(6 - x)\big(2 - x - (6 - x)\big) = (6x^2 - x^3) \cdot (-4) = 4x^3 - 24x^2.$$

Ищем стационарные точки функции $z_1(x)$:

$$z_1'(x) = 0, \quad 12x^2 - 48x = 0, \quad x(x - 4) = 0.$$

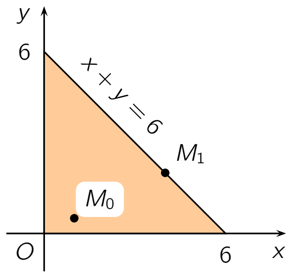

Рисунок Р.19

Имеем два корня: $x = 0$ и $x = 4$. Из них только $x = 4$ лежит внутри интервала $(0;6)$. Ему соответствуют точка $M_1(4;2)$, в которой

$$z(M_1) = z_1(4) = 4 \cdot 4^3 - 24 \cdot 4^2 = 16(16 - 24) = -128.$$

На концах отрезка $[0;6]$, соответствующих вершинам $(6;0)$ и $(0;6)$ треугольника D, функция $z_1(x)$, очевидно, обращается в нуль.

Мы доказали, что наименьшее и наибольшее значения функции z в треугольнике D может достигаться либо на сторонах $x = 0$ и $y = 0$, где она обращается в нуль, либо в точках M_0 и M_1. Следовательно,

$$z_{\min} = z(M_1) = -128, \quad z_{\max} = z(M_0) = \frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 351.1

Найдем стационарные точки функции z:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $M_0(2, -1)$, которая принадлежит области D. Вычисляем значение функции в этой точке:

$$z(M_0) = 4 + 1 - 8 - 2 = -5.$$

Для поиска максимума и минимума на границе применим метод множителей Лагранжа. Строим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 45).$$

Находим стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 4 + 2\lambda x = 0, \\ 2y + 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2}{1+\lambda}, \\ y = -\frac{1}{1+\lambda}, \\ x^2 + y^2 - 45 = 0, \end{cases}$$

Подставляем значения x и y из двух первых уравнений в третье:

$$\frac{4}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} = 45, \qquad \frac{5}{(1+\lambda)^2} = 45, \qquad (1+\lambda)^2 = \frac{1}{9}.$$

Отсюда имеем:

$$1 + \lambda_1 = \frac{1}{3}, \qquad 1 + \lambda_2 = -\frac{1}{3},$$

$$x_1 = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6, \ \ y_1 = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3, \qquad x_2 = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6, \ \ y_1 = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3.$$

Итак, на границе обнаружены две стационарные точки функции Лагранжа: $M_1(6, -3)$ и $M_2(-6, 3)$. В этих точках

$$z(M_1) = 36 + 9 - 24 - 6 = 15, \quad z(M_2) = 36 + 9 + 24 + 6 = 75.$$

Сравнивая значения функции z в точках M_0, M_1 и M_2, приходим к выводу, что

$$z_{\min} = z(2, -1) = -5, \quad z_{\max} = z(-6, 3) = 75.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 353.1

Приравнивая ординаты данных двух линий, приходим квадратному уравнению

$$x^2 = x - 5, \quad x^2 - x + 5 = 0,$$

не имеющему решений. Это значит, что данные парабола и прямая не имеют общих точек, что также видно из рисунка P.20.

Возьмем произвольную точку $M(x; x^2)$ параболы и $N(y; y-5)$ прямой. Тогда квадрат расстояния между этими точками, который мы будем обозначать через $f(x,y)$, может быть вычислен по формуле

$$f(x,y) = (x-y)^2 + (x^2 - y + 5)^2.$$

Для решения поставленной задачи достаточно найти минимум функции $f(x,y)$.

Находим стационарные точки функции f:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(x-y) + 4x(x^2 - y + 5) = 0, \\ -2(x-y) - 2(x^2 - y + 5) = 0. \end{cases}$$

Сложим оба уравнения:

$$(4x - 2)(x^2 - y + 5) = 0.$$

Если бы выполнялось равенство $x^2 - y + 5 = 0$, то из второго уравнения системы следовало бы, что и $x - y = 0$. А это бы значило, что парабола и прямая имеют общую точку, что, как мы уже знаем, неверно. Таким образом,

$$4x - 2 = 0, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Подставим полученное значение x во второе уравнение системы:

$$-2\left(\frac{1}{2}-y\right)-2\left(\frac{1}{4}-y+5\right)=0, \quad 4y=\frac{23}{2}, \quad y=\frac{23}{8}.$$

Делаем вывод, что единственной стационарной точкой функции $f(x,y)$ является точка $M_0(1/2;23/8)$.

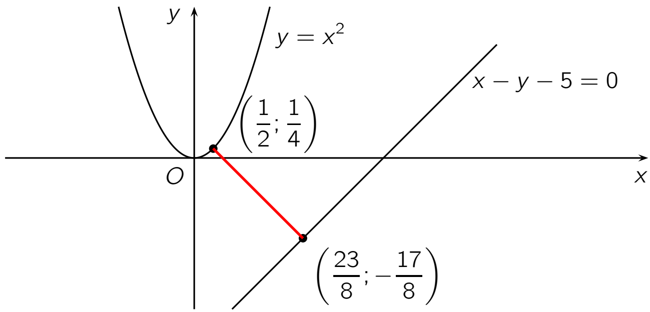

Рисунок Р.20

Из геометрических соображений (рисунок Р.20) ясно, минимум функции $f(x,y)$ достигается в некоторой точке, которая согласно необходимому условию локального экстремума является стационарной точкой функции $f(x,y)$. Этой точкой будет M_0, поскольку других стационарных точке функция $f(x,y)$ не имеет. Итак, расстояние между данными параболой и прямой совпадает с расстоянием между их точками $(1/2; 1/4)$ и $(23/8; -17/8)$ и равно

$$\sqrt{f(M_0)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{23}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{23}{8} + 5\right)^2} = \\ = \sqrt{\left(\frac{19}{8}\right)^2 + \left(\frac{19}{8}\right)^2} = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 355

Прибыль равна разности выручки и издержек:

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Ищем стационарные точки функции прибыли:

$$\begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ -6 + 3x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = 8 - 2 \cdot 2 = 4. \end{cases}$$

Имеем стационарную точку $M_0(2, 4)$. Вычисляем вторые производные функции $P(x, y)$:

$$A = P''_{xx} = -2, \quad B = P''_{xy} = -1, \quad C = P''_{yy} = -2.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$ и $A < 0$, то по теореме 5.8 точка M_0 является точкой локального максимума прибыли, причем

$$P_{\max} = P(M_0) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 2^2 - 2 \cdot 4 - 4^2 = 28.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 357

Обозначим через x м, y м и h м длину, ширину и глубину бассейна. По условию

$$h = \frac{V}{xy} = \frac{32}{xy}\ \text{м}.$$

Определим, при каких значениях x и y площадь бассейна

$$S = xy + 2xh + 2yh = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

будет минимальной. Находим частные производные площади $S = S(x, y)$:

$$S'_x = y - \frac{64}{x^2}, \quad S'_y = x - \frac{64}{y^2}.$$

Находим стационарные точки функции $S(x, y)$ при $x > 0$ и $y > 0$:

$$\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y - \frac{64}{x^2} = 0, \\ x - \frac{64}{y^2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 y = 64, \\ xy^2 = 64, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(x - y) = 0, \\ xy^2 = 64, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y, \\ x^3 = 64, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases}$$

Имеем единственную стационарную точку $M_0(4, 4)$. Из практических соображений ясно, что функция $S(x, y)$ достигает своего минимума в некоторой конечной точке, лежащей внутри первой координатной четверти (попытайтесь доказать это строго математически). Эта точка является стационарной и, следовательно, совпадает с M_0.

Таким образом бассейн должен иметь длину и ширину, равные 4 метра. Его глубина

$$h = \frac{32}{xy} = \frac{32}{4 \cdot 4} = 2\ \text{м}.$$

[Вернуться к условию]

Указание к задаче 365

Смотри задачу 353.1. [Вернуться к условию]

Глава 6. Дифференциальные уравнения

Решение задачи 366.1

Продифференцируем по x данное равенство:

$$y' = C.$$

Подставим вместо C в исходное равенство:

$$y = y'x \quad \text{или} \quad y'x - y = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 366.5

Продифференцируем по x данное равенство:

$$2yy' = 2C \quad \text{или} \quad C = yy'.$$

Подставим вместо C в исходное равенство:

$$y^2 = 2yy'x \quad \text{или} \quad y = 2y'x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 367.1

Это уравнение вида $y''' = f(x)$. Интегрируя, получим

$$y'' = \int \frac{6}{x^3}\,dx = -3x^{-2} + C_1,$$

$$y' = \int (-3x^{-2} + C_1)\,dx = \frac{3}{x} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + C_1 x + C_2\right)\,dx = 3\ln|x| + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

или

$$y = 3\ln|x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 367.4

Это уравнение вида $y'' = f(x)$. Интегрируя, получим

$$y' = \int 3\sin^2 x \cos x\, dx = 3\int \sin^2 x\, d(\sin x) = \sin^3 x + C_1,$$

$$y = \int (\sin^3 x + C_1)\, dx = C_1 x - \int (1-\cos^2 x) d(\cos x) =$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C_1 x + C_2.$$

Для нахождения частного решения, воспользуемся начальными условиями

$$\frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} + C_2,$$
$$0 = 0 + C_1.$$

Отсюда, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Окончательно,

$$y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 368.1

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому,

$$xydx + (x+1)dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)dy = -xydx.$$

Разделим переменные. Получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения. Имеем

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|.$$

Преобразуем полученное равенство, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y = C(x+1)e^{-x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 368.6

Это уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому,

$$\frac{dy}{dx} = y(2x+1).$$

Разделим переменные. Получим

$$\frac{dy}{y} = (2x+1)dx.$$

Проинтегрируем обе части уравнения. Имеем

$$\int \frac{dy}{y} = \int (2x+1)dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = x^2 + x + \ln|C|.$$

Преобразуем полученное равенство, воспользовавшись свойствами логарифмов:

$$y = Ce^{x^2+x}.$$

Найтем частное решение, удовлетворяющее данному начальному условию:

$$1 = Ce^0.$$

Откуда $C = 1$. Осталось подставить найденное значение в общее решение:

$$y = e^{x^2+x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 369.1

Это однородное уравнение. Сделаем замену: $y = ux$, $dy = udx + xdu$. Подставим в исходное уравнение:

$$x(udx + xdu) - x(1 + u)dx = 0,$$
$$udx + xdu - (1 + u)dx = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Перенесем слагаемые, содержащие dx вправо:

$$xdu = (1 + u)dx - udx,$$
$$xdu = dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$du = \frac{dx}{x},$$
$$\int du = \int \frac{dx}{x}.$$

Откуда $u = \ln|x| + C$. Учитывая замену, получим общее решение уравнения:

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие:

$$2 = 1 \cdot (\ln 1 + C).$$

Значит, $C = 2$. Тогда частное решение имеет вид:

$$y = x(\ln|x| + 2).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 369.2

Это однородное уравнение. Сделаем замену: $y = ux$, $y' = u'x + u$. Подставим в исходное уравнение:

$$u'x + u = \frac{ux}{x} \ln \frac{ux}{x},$$
$$u'x + u = u \ln u.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Произведем необходимые преобразования:

$$x\frac{du}{dx} = u \ln u - u,$$
$$x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1).$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Откуда

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C|,$$
$$\ln u = Cx + 1, \quad u = e^{Cx+1}.$$

Учитывая замену, получим общее решение уравнения:

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Для нахождения частного решения используем начальное условие:

$$1 = 1 \cdot e^{C+1}.$$

Значит, $C = -1$. Тогда частное решение имеет вид:

$$y = xe^{1-x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 369.12

Представим уравнение в виде:

$$y' = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3}.$$

Это уравнение можно привести к однородному. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0, \\ 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = -\frac{5}{4}$. Сделаем замену

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

т.е.

$$x = X + \frac{3}{2}, \quad y = Y - \frac{5}{4}.$$

Получим

$$Y' = \frac{X + \frac{3}{2} + 2\left(Y - \frac{5}{4}\right) + 1}{2\left(X + \frac{3}{2}\right) - 3},$$

$$Y' = \frac{X + 2Y}{2X}.$$

Получили однородное уравнение. Решим его стандартным образом. Пусть $Y = uX$, $Y' = u'X + u$. Тогда

$$u'X + u = \frac{X + 2uX}{2X},$$

$$u'X + u = \frac{1 + 2u}{2},$$

$$X\frac{du}{dX} = \frac{1}{2}.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$du = \frac{dX}{2x},$$
$$\int du = \int \frac{dX}{2x}.$$

Откуда

$$u = \frac{1}{2}\ln|X| + C.$$

Произведем обратные замены:

$$Y = X\left(\frac{1}{2}\ln|X| + C\right),$$

и окончательно,

$$y + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right),$$
$$4y + 5 = (2x - 3)\left(\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 370.1

Это линейное уравнение. Решим его двумя способами.

1 способ (метод Лагранжа). Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dy}{y} = dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx.$$

Откуда $\ln|y| = x + \ln|C|$ или $y = Ce^x$. Общее решение заданного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^x,$$

где $C(x)$ — некоторая функция. Найдем

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Подставим в исходное уравнение

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = e^x.$$

Отсюда, $C'(x) = 1$ или $C(x) = x+C$. Следовательно, общее решение данного уравнения

$$y = (x + C)e^x.$$

2 способ (метод Бернулли). Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x, тогда $y' = u'v+v'u$. Подставим в данное уравнение

$$u'v + v'u - uv = e^x, \quad u'v + u(v' - v) = e^x.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражене в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными

$$v' - v = 0, \quad \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = dx.$$

Откуда $\ln|v| = x + \ln|C|$ или $v = Ce^x$. Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = e^x$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в последнее уравнение

$$u'e^x = e^x, \quad u' = 1.$$

Значит, $u = x + C$. Производя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения

$$y = (x + C)e^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 370.5

Запишем уравнение в виде

$$x^2y' - xy = y^2.$$

Это уравнение Бернулли. С помощью замены $y = \frac{1}{u}$ его можно свести к линейному, однако удобнее сразу решать его методом Бернулли.

Полагаем $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые функции от x, тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим в данное уравнение

$$x^2(u'v + v'u) - xuv = u^2v^2, \quad x^2u'v + xu(xv' - v) = u^2v^2.$$

Подберем функцию $v = v(x)$ так, чтобы выражене в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными

$$xv' - v = 0, \quad x\frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Откуда $\ln|v| = \ln|x| + \ln|C|$ или $v = Cx$. Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = x$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в последнее уравнение

$$x^3u' = u^2x^2, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Значит,

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| - C, \quad u = \frac{1}{C - \ln|x|}.$$

Производя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{x}{C - \ln x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 370.13

Данное уравнение не является линейным относительно y и y', но является таковым относительно x и x'. Поэтому преобразуем его следующим образом

$$x + y^2 + x' = 0, \quad x' + x = -y^2.$$

Решим это уравнение методом Бернулли. Полагаем $x = uv$, где $u = u(y)$, $v = v(y)$ — некоторые функции от y, тогда $x' = u'v + v'u$. Подставим в данное уравнение

$$u'v + v'u + uv = -y^2, \quad u'v + u(v' + v) = -y^2.$$

Подберем функцию $v = v(y)$ так, чтобы выражене в скобках равнялось нулю, т.е. решим уравнение с разделяющимися переменными

$$v' + v = 0, \quad \frac{dv}{dy} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -dy.$$

Откуда $\ln|v| = -y + \ln|C|$ или $v = Ce^{-y}$. Поскольку нам достаточно какого-нибудь одного ненулевого решения уравнения, то возьмем $v = e^{-y}$ (положили $C = 1$). Подставим найденное v в последнее уравнение

$$u'e^{-y} = -y^2, \quad du = -y^2e^y\,dy.$$

Значит,

$$u = -y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + C.$$

Производя обратную замену, получим общее решение исходного уравнения

$$x = (-y^2e^y + 2ye^y - 2e^y + C)e^{-y} = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 371

Модель роста в условиях конкурентного рынка в данном случае задается уравнением

$$y' = (2 - y)y.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dy}{y(y-2)} = dt, \quad \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + \ln|C|.$$

Откуда

$$\frac{y-2}{y} = Ce^{-2t}$$

или

$$y = \frac{2}{1 - Ce^{-2t}}.$$

Принимая во внимание начальное условие, найдем константу C:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{1 - Ce^{0}} \quad \Rightarrow \quad C = -3.$$

Таким образом, объем реализованной продукции описывается равенством

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 372

В данном случае функция дохода удовлетворяет уравнению

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t$$

или

$$Y'(t) - 2Y(t) = -4t.$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением первого порядка. Положим $Y = uv$, $Y' = u'v + uv'$. Тогда

$$u'v + uv' - 2uv = -4t, \quad u'v + u(v' - 2v) = -4t.$$

Определим функцию v:

$$\frac{dv}{dt} = 2v, \quad \frac{dv}{v} = 2dt, \quad \ln|v| = 2t,$$

откуда $v = e^{2t}$. Осталось определить функцию u:

$$u'e^{2t} = -4t, \quad u' = -4te^{-2t}.$$

Интегрируя, получим

$$u = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C.$$

Значит,

$$Y = uv = (2te^{-2t} + e^{-2t} + C)e^{2t} = 2t + 1 + Ce^{2t}.$$

Используя начальное условие $Y(0) = 2$, найдем постоянную C:

$$2 = 1 + C,$$

откуда $C = 1$. Окончательно, функция дохода имеет вид

$$Y = 2t + 1 + e^{2t}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 373

Решим уравнение

$$P' = \frac{1}{10}P.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{10}dt, \quad \ln|P| = \frac{1}{10}t + \ln|C|,$$

откуда $P = Ce^{\frac{t}{10}}$. Так как первоначальная сумма равна A, то

$$A = Ce^0, \quad C = A,$$

т.е. $P = Ae^{\frac{t}{10}}$. Теперь найдем момент времени, когда сумма вклада удвоится, т.е. станет равной $2A$:

$$2A = Ae^{\frac{t}{10}}, \quad e^{\frac{t}{10}} = 2.$$

Значит,

$$t = 10 \cdot \ln 2 \approx 6,93.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 374.1

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$
$$D = 25 - 16 = 9,$$
$$\lambda_1 = \frac{5-3}{2} = 1,\ \ \lambda_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 374.2

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$
$$D = 36 - 36 = 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{6}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 374.3

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0,$$
$$D = 64 - 100 = -36,$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 375.1

Выполним подстановку $x = e^t$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Значит исходное уравнение примет вид

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2e^te^{-t}\frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$
$$D = 1 + 24 = 25,$$
$$\lambda_1 = \frac{-1-5}{2} = -3, \ \lambda_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{4t}.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 375.5

Выполним подстановку $2x+1=e^t$, $x=\frac{1}{2}(e^t-1)$. Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=2e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)2e^{-t}}{\frac{1}{2}e^t}=4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

Значит исходное уравнение примет вид

$$e^{2t}4e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-4e^te^{-t}\frac{dy}{dt}+4y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

$$D=4-4=0,$$

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\frac{-2}{2}=1.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y=C_1e^t+C_2te^t.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 376.1

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$
$$\lambda^2 = -4,$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

а фундаментальными решениями будут

$$y_1 = \cos 2x, \quad y_2 = \sin 2x.$$

Вычислим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2,$$

и дополнительные определители ($f(x)$ — правая часть исходного уравнения)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0 - \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 2x,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Определим функции

$$C_1(x) = \int \frac{\Delta_1}{W}\,dx = \int \frac{-\operatorname{tg} 2x}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\Delta_2}{W}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + C_2.$$

Значит, общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x =$$
$$= \left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + C_2\right)\sin 2x =$$
$$= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 377.1

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$
$$D = 4 - 4 = 0,$$
$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $P_0(x)e^{\alpha x}$, где $P_0 = 1$ — многочлен нулевой степени, а $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = Ae^x.$$

Найдем производные

$$\varphi'(x) = Ae^x, \quad \varphi''(x) = Ae^x.$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y и найдем A

$$Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = e^x, \quad 4A = 1, \quad A = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\varphi(x) = \frac{1}{4}e^x$, а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{4}e^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 377.6

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$
$$D = 9 + 16 = 25,$$
$$\lambda_1 = \frac{-3-5}{2} = -4, \quad \lambda_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^{-4x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1 = x + 1$ — многочлен первой степени, а $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения кратноти 1. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = (Ax + B)e^x \cdot x^1 = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Найдем производные

$$\varphi'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$

$$\varphi''(x) = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x(2Ax + B + 2A) = \\ = e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B).$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y

$$e^x(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)+3e^x(Ax^2+Bx+2Ax+B)-4(Ax^2+Bx)e^x = (x+1)e^x.$$

Сократим это уравнение на e^x и приведем подобные слагаемые

$$10Ax + 2A + 5B = x + 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} 10A = 1, \\ 2A + 5B = 1. \end{cases}$$

Откуда $A = \frac{1}{10}$, $B = \frac{4}{25}$.

Значит, $\varphi(x) = \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right) e^x$, а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right) e^x.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 377.10

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 24 = 1,$$
$$\lambda_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad \lambda_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Значит, общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{3x}.$$

Правая часть исходного уравнения имеет специальный вид $P_0(x)\sin\alpha x$, где $P_0 = 13$ — многочлен нулевой степени, а $i\alpha = 3i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\varphi(x) = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Найдем производные

$$\varphi'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$
$$\varphi''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставим φ в исходное уравнение вместо y

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 5(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 6(A\cos 3x + B\sin 3x) = 13\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$, получим систему

$$\begin{cases} -9A - 15B + 6A = 0, \\ -9B + 15A + 6B = 13; \end{cases} \qquad \begin{cases} A + 5B = 0, \\ 15A - 3B = 13; \end{cases}$$

Откуда $A = \frac{5}{6}$, $B = -\frac{1}{6}$.

Значит, $\varphi(x) = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$, а общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = y_0 + \varphi = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 378.1

Найдем общее решение уравнения. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

$$D = 16 - 12 = 4,$$

$$\lambda_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \ \lambda_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Значит, общее решение запишется в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Чтобы найти частное решение, воспользуемся начальными условиями. Из условия $y(0) = 6$ следует уравнение

$$6 = C_1 + C_2.$$

Чтобы воспользоваться условием $y'(0) = 10$ найдем производную

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x},$$

т.е.

$$10 = C_1 + 3C_2.$$

Получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Значит, частным решением исходного уравнения будет

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 379

Решим указанное уравнение. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид
$$k^2+\omega^2=0,$$
где $\omega^2=\lambda(b-a)$. Учитавая условие задачи $\omega>0$. Значит характеристическое уравнение имеет корни $k_{1,2}=\pm i\omega$. Поэтому общее решение однородного уравнения
$$P_0=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$
или после несложных преобразований
$$P_0=C\cos(\omega t-\varepsilon).$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения. Учитывая вид правой части, его следует искать в виде $\varphi=A$. Подставив φ в исходное уравнение, получим
$$\lambda(b-a)A=\lambda(\alpha-\beta)$$
откуда
$$A=\frac{\alpha-\beta}{b-a}.$$
Окончательно, закон изменения цены описывается функцией
$$P=P_0+\varphi=C\cos(\omega t-\varepsilon)+\frac{\alpha-\beta}{b-a},$$
где C и ε — некоторые постоянные. [Вернуться к условию]

Глава 7. Ряды

Решение задачи 380.1

Каждый член данного ряда, начиная со второго, представляет собой дробь, числитель которой равен 1, а знаменатель — третья степень числа n. Первый член $1 = \frac{1}{1^3}$. Таким образом, $a_n = \frac{1}{n^3}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 381.1

Члены этого ряда $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ представляют собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Воспользуемся формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 381.3

Общий член этого ряда $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Тогда частичная сумма ряда равна

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 382.1

Так как общий член ряда $a_n = \frac{1}{2n-1}$, то получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда выполняется, о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 382.2

Так как общий член ряда $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$, то получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Значит, необходимое условие сходимости ряда не выполняется, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 383.1

Общий член ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$. Данный ряд является обобщенным гармоническим рядом. В силу того, что $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, ряд расходится.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 383.2

Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Так как

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$, то и исходный ряд сходится по признаку сравнения.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 383.6

Общий член ряда $a_n = \frac{n^2-1}{3n^3+4n^2-1}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ при этом $b_n = \frac{1}{n}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{3n^3+4n^2-1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{3n^3+4n^2-1} = \frac{1}{3}.$$

Значит, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^3+4n^2-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходятся или расходятся одновременно. В силу того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то и исходный ряд также расходится по признаку сравнения в предельной форме. [Вернуться к условию]

Решение задачи 384.1

Общий член ряда $a_n = \frac{n+1}{n!}$. Найдем

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!}.$$

Поскольку,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

исходный ряд сходится по признаку Даламбера. [Вернуться к условию]

Решение задачи 385.1

Общий член ряда $a_n = \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$. Поскольку,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \frac{2}{3} < 1,$$

исходный ряд сходится по признаку Коши.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 386.1

Так как $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, то $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Очевидно, функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке $(2; +\infty)$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_2^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A \to +\infty} \left(\ln|\ln x| \Big|_2^A \right) =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 2) = \infty.$$

Значит, исходный ряд расходится по интегральному признаку.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 387.1

Данный ряд является знакопеременным. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}.$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Так как $|\cos n| \leqslant 1$, то и

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический рад при $\alpha = 2$. Значит, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2}$$

сходится по признаку сравнения, а исходный ряд сходится абсолютно.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 387.2

Данный ряд является знакочередующимся. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Сравним его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1,$$

а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = \frac{1}{2}$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ расходится по признаку сравнения, а исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Применим признак Лейбница при этом $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. В силу того, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \ldots,$$

данный ряд сходится по признаку Лейбница, причем условно.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 388.1

Зафиксируем x и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^x} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

При каждом фиксированном x данный ряд является обобщенным гармоническим рядом, который сходится при всех $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$. Таким образом, область сходимости данного ряда $(1; +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 388.2

Зафиксируем x и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2+3}{x^{2n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{|x|^{2n+1}}.$$

Применим признак Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2+3}{|x|^{2n+1}}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3}{|x|^{2(n+1)+1}} = \frac{n^2+2n+4}{|x|^{2n+3}}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+4}{|x|^{2n+3}}\cdot\frac{|x|^{2n+1}}{n^2+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{(n^2+3)|x|^{2n}} =$$
$$= \frac{1}{|x|^{2n}}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^2+3} = \frac{1}{|x|^{2n}}.$$

Для того, чтобы этот ряд сходился, достаточно выполнения условия:

$$\frac{1}{|x|^{2n}} < 1,$$

которое выполняется при $x \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Заметим, что при $x\in(-1,1)$ вычисленный выше предел будет больше 1, т.е. при $x\in(-1,1)$ исходный ряд расходится.

Осталось выяснить поведение ряда при $x=\pm1$. Подмтавим эти значения в данный ряд. Если $x=1$, то получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{1^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3),$$

который расходится по следствию из необходимого условия сходимости числового ряда. Аналогично, если $x = -1$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(-1)^{2n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3),$$

также расходится.

Значит, областью сходимости исходного ряда является $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 389.1

Данный ряд является степенным, причем $a_n = \frac{1}{n}$, $x_0 = 0$.

Вначале найдем радиус сходимости по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Имеем,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Значит, интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R) = (-1; 1)$.

Осталось исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

Если $x = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Этот ряд расходится (он является гармоническим рядом).

Если $x = -1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница (причем условно).

Значит, область сходимости исходного ряда $[-1; 1)$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 389.6

Данный ряд является степенным, причем $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $x_0 = 0$.

Вначале найдем радиус сходимости по формуле:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Получим,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Значит, $R = 1$ и интервал сходимости $(x_0 - R; x_0 + R) = (-1; 1)$.

Осталось исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

Если $x = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Этот ряд расходится по следствию из необходимого условия сходимости, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Если $x = -1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Этот ряд также расходится (аналогично).

Значит, область сходимости исходного ряда $(-1; 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответы к задачам

Глава 1. Аналитическая геометрия

Ответ к задаче 1

$5\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2

$(0; -4)$, $(0; -12)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3

$(4; 0)$, $(-2; 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5

Да, $\angle A$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 6

34.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7

$(3; -2)$, 10.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 8

$(3; 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 9

$\left(2; -\dfrac{7}{3}\right)$, $\left(3; \dfrac{1}{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 10

$(-1;3)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 11

$(6; -2)$ и $(2; -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 12

$(-4; 3)$, $(2; 7)$, $(6; -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 13

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 14

$\sqrt{82}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 15

$$\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 16

$OC = 5$, $OD = \dfrac{24\sqrt{2}}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 17

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 19

20. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 20

26. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 21

$(3;0)$ и $(-7;0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.1

$y = \sqrt{3}x - 6.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.2

$y = 2.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.3

$y = x - 2.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 22.4

$y = -x + 3.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.1

$\alpha = 0$, $\alpha = 1$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 23.2

$\alpha = \dfrac{1}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 24

$15x - 5y + 32 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 25

$y = 0$, $y = 3$, $x + y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 26

$x + y - 1 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 27

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.1

$4x - y - 24 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.2

$-x - 5y - 3 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.3

$-4x - 3y + 32 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.4

$-4x + 5y + 40 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.5

$-4x + y - 10 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.6

$-4x + 3y + 32 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.7

$-4x - 3y + 16 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.8

$-4x - 5y + 8 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.9

$4x - y + 16 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.10

$4x - y - 30 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.11

$x + y - 1 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.12

$-2x - 3y - 18 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.13

$-4x + 5y + 8 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.14

$-2x - 5y - 26 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 28.15

$-2x - 3y + 26 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.1

$x = 3$, $y = 2$, $2x + y - 14 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.2

$2x + 3y - 8 = 0$, $2x - y = 0$, $2x - 3y + 16 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30

$k = -\dfrac{2}{3}$, $b = \dfrac{5}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 31

$\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33

$4x + y - 6 = 0$ или $3x + 2y - 7 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 34

$\operatorname{arctg} 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 35

$$y = \frac{12}{5}x - 13.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.1

$k = -\dfrac{2}{5}$, $b = \dfrac{1}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.2

$k = -\dfrac{7}{2}$, $b = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 36.3

$k = 0,\ b = \dfrac{5}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 37

$6, -9.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 38

$(2; 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 39

$4x + 3y - 12 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.1

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-3} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.2

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.3

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 41.4

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 42

$x + 2y - 8 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 43

$x + y - 7 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 44

$\alpha = 3$, $\beta = -4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 45

$2x - y - 4 = 0$, или $x - 2y + 4 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 46

$x + 2y - 8 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 47

$x + y + 4 = 0$ и $x - y - 8 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 48

$(2, 0)$; $(0, -3)$ или $(-4, 0)$; $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 49

5. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 50

$C = \pm 90.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.1

$\dfrac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.2

$\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.3

$\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.4

$\operatorname{arctg} \frac{7}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.5

$\operatorname{arctg} 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.6

$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.7

$\operatorname{arctg} \frac{3}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.8

$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.9

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.10

$\operatorname{arctg} \dfrac{1}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.11

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.12

$\dfrac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.13

$\frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.14

$\operatorname{arctg} \dfrac{23}{15}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.15

$\operatorname{arctg}\frac{17}{7}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.16

$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 52

$\angle A = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle B = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\angle C = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53

$x + 3y - 6 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54

$x = 2 + y\left(2 \pm \sqrt{3}\right).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.1

а) 4, б) -9. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.2

а) 8, б) -2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.3

а) $\dfrac{3}{4}$, б) -12.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.4

а) $-\dfrac{3}{2}$, б) $\dfrac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.1

$2x - y + 4 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.2

$3x - y + 5 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.1

$x + y - 4 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.2

$x + 3y + 10 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.3

$2x - y - 9 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.4

$4x - 3y + 7 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.5

$2x + 5y - 9 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.6

$4x - 5y - 11 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 59.7

$2x - 3y - 7 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.1

$x + y = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.2

$3x - y - 9 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.3

$x + 4y - 7 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.4

$3x + 2y + 1 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.5

$x + 2y - 7 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.6

$5x - y + 2 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 60.7

$5x + 2y - 4 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 61

$2x + 11y + 29 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 62

3; 4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 63

$7y - 5x - 4 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 64

$3x - 4y - 25 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 65

$(2, 4)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 66

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.1

$2\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.2

$3\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.3

$4\sqrt{2}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.4

$$\frac{33}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.5

$\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.6

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.7

$$\frac{54\sqrt{17}}{17}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.8

$$\frac{21\sqrt{2}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.9

$8\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.10

$\frac{9}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.11

$$\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.12

$$\frac{27\sqrt{5}}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.13

$$\frac{26\sqrt{5}}{5}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.14

$12\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 67.15

$\dfrac{21\sqrt{10}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 68

5. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 69

$\dfrac{9}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 70

49. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 71

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 72

$\pm\frac{4}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 73

$x - y + 2 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 74

$(5, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 75

$(6, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76

$14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77

$5x + y - 3 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.1

Перпендикулярны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.2

Пересекаются. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.3

Совпадают.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.4

Параллельны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.5

Совпадают.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.6

Перпендикулярны. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.7

Пересекаются.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.8

Параллельны.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.9

Пересекаются. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.10

Перпендикулярны. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.1

$(-5, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.2

$(-1, 6)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.3

$(-1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.4

$(3, 6)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.5

$(3, 6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.6

$(3, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.7

$(-5, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.8

$(-1, 6)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.9

$(-1, -2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.10

$(-1, 4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.1

$a \neq \pm 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.2

$a = -2.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.3

$a = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81

$5x + 13 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 82

$2x + y - 6 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 83

$7x + 7y - 6 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 84

$x - y - 8 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 85

$(-3, -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 86

$4x - 3y - 7 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 87

$5x - 3y - 2 = 0$, $7x + 6y + 4 = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 88

$\pm\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 89

13.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 90

$x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 91

$(0,2)$, $(4,0)$, $(2,4)$, $(-2,6)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 92

$(-3, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 93

$2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 94

$3x + y - 14 = 0$, $x - 3y + 12 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95

$y = 2x$, $x - 3y = 15$, $3x + y = 25$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96

$x - 3y - 23 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$, $4x + 3y + 13 = 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97

$y - 2 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98

$x + 2y + 2 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99

$5y + 2x - 28 = 0$, $11x - 10y - 4 = 0$, $y = x$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100

$C(17;12)$, $D(9;3)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 101

$y = x + 3.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 102.1

12 тыс. у. е.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 102.2

9 тыс. у. е. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 103

800 у. е.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 104

400 у. е.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 105

1125 у. е.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106

600 км.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 107

Если $x < 4$, то выгоднее осуществлять перевозки автотранспортом, если $x > 4$ — водным. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 109

$P(q) = 20q - 10\,000$, $q = 500$ — точка безубыточности.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 110

70.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 111

60. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 112.1

$(3, 6)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 112.2

$(2, 8)$, увеличение цены на 2 единицы, уменьшение объема на 1 единицу.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 112.3

3 единицы.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 112.4

$\left(\dfrac{21}{8}, \dfrac{27}{4}\right)$, доход правительства $R = 2\dfrac{61}{64}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 113

$(30, 260)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 114

(10,180). [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 115.1

$(50, 150)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 115.2

$\left(\frac{140}{3}, \frac{470}{3}\right), \frac{1400}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 115.3

$\dfrac{2600}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 115.4

$$\left(\frac{155}{3}, \frac{440}{3}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116

2000, 1000. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 117

4000, 6000.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 118

$x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.1

$(1; -3)$, $R = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.2

$(2, -4)$, $R = 6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.3

$\left(-\frac{7}{3}, 3\right)$, $R = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.4

$(2, -3)$, $R = 4$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.5

$$\left(-1, \frac{2}{3}\right), \; R = \frac{\sqrt{19}}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.1

$x^2 + y^2 = 16.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.2

$(x-3)^2+(y+2)^2=25.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.3

$x^2 + (y-3)^2 = 25.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.4

$(x-2)^2+(y-5)^2=8.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.5

$(x-1)^2 + y^2 = 25.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.6

$(x-2)^2+(y+1)^2=9.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.7

$(x+1)^2+(y-7)^2=20$, $(x-3)^2+(y+1)^2=20$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.8

$(x-5)^2+(y-5)^2=25.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121

$4y - x - 17 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122

$3y + 4x - 23 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123

$$\frac{b^2}{1+k^2} = R^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 124

$2x + y = 8$, $2y - x = 11$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 125

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 126.1

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 126.2

$$\frac{x^2}{6{,}5^2}+\frac{y^2}{6^2}=1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 126.3

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 126.4

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 127.1

4, 3, $\left(-\sqrt{7};0\right)$, $\left(\sqrt{7};0\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 127.2

2, 4, $\left(0; -2\sqrt{3}\right)$, $\left(0; 2\sqrt{3}\right)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 127.3

6, 3, $\left(-3\sqrt{3};0\right)$, $\left(3\sqrt{3};0\right)$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 127.4

$7,\ 2\sqrt{6},\ (-5,0),\ (5,0),\ \varepsilon=\dfrac{5}{7}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 127.5

5, 4, $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $\varepsilon = 0{,}6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 128

$$\left(\frac{5}{2}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 129

Точки A, C, D лежат внутри эллипса, а точка B — вне его.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 130

16.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 131

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 132.1

$(-1, -2)$, $\sqrt{22}$, $\sqrt{5{,}5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 132.2

$(5, 2)$, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 133

$$\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 134.1

Половина эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

расположенная в верхней полуплоскости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 134.2

Половина эллипса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

расположенная в нижней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 134.3

Половина эллипса

$$\frac{x^2}{\frac{203}{9}} + \frac{y^2}{7} = 1,$$

расположенная в левой полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 134.4

Половина эллипса

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{\frac{2}{27}} = 1,$$

расположенная в верхней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 135.1

$(2, 2)$, $\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 135.2

Прямая проходит вне эллипса. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 136.1

$|m| < 5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 136.2

$m = \pm 5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 136.3

$|m| > 5.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 137.1

$3x + 2y - 10\sqrt{10} = 0$, $3x + 2y + 10\sqrt{10} = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 137.2

$2x - 3y + 25 = 0$, $2x - 3y - 25 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 138

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.1

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.2

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.3

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.4

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 139.5

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{576} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.1

$3,\ 4,\ (-5,0),\ (5,0),\ \dfrac{5}{3},\ y=\pm\dfrac{4}{3}x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.2

1, 4, $\left(-\sqrt{17}, 0\right)$, $\left(\sqrt{17}, 0\right)$, $\sqrt{17}$, $y = \pm 4x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.3

$$\frac{1}{8},\ \frac{1}{3},\ \left(-\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{24}},0\right),\ \left(\frac{\sqrt{73}}{\sqrt{24}},0\right),\ \frac{\sqrt{73}}{3},\ y=\pm\frac{8}{3}x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.4

$$\frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \left(-\frac{\sqrt{41}}{20},0\right),\ \left(\frac{\sqrt{41}}{20},0\right),\ \frac{\sqrt{41}}{4},\ y=\pm\frac{5}{4}x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.5

1, 1, $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$, $\sqrt{2}$, $y = \pm x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.6

$2,\ 4,\ \left(-2\sqrt{5}, 0\right),\ \left(2\sqrt{5}, 0\right),\ \sqrt{5},\ y = \pm 2x.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.1

Часть гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{81}{4}} = 1,$$

расположенная в верхней полуплоскости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.2

Ветвь гиперболы

$$x^2 - \frac{y^2}{16} = -1,$$

расположенная в нижней полуплоскости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.3

Ветвь гиперболы

$$\frac{x^2}{\frac{81}{4}} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

расположенная в левой полуплоскости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.4

Ветвь гиперболы

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{4} = -1,$$

расположенная в верхней полуплоскости.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.5

Ветвь гиперболы

$$-\frac{(x+2)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{\frac{4}{45}}=1,$$

расположенная над прямой $y-1=0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.6

Ветвь гиперболы

$$\frac{(x-10)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{12} = 1,$$

расположенная влево от прямой $x - 10 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.1

$(2;-3)$, 3, 4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.2

$(2, -2)$, 2, 3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.3

$(5, 3)$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143

$$\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144

$3x - 2y + 19 = 0$, $3x + 2y + 11 = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 145

$\left(6, \pm 6\sqrt{2}\right)$, $r_1 = 2 + \dfrac{\sqrt{8}}{2}$, $r_2 = -2 + \dfrac{\sqrt{8}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 146

$\left(6, 12\sqrt{7}\right)$, $\left(6, -12\sqrt{7}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 147

$(2, 2)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 148

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 149.1

$y^2 = 4x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 149.2

$y^2 = 8x$, $y^2 = -8x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 149.3

$y^2 = -8x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 149.4

$y^2 = 12x.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 150

$x^2 = y$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 151.1

$(3;0)$, $x = -3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 151.2

$(-2; 0)$, $x = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 151.3

$(0; -2)$, $y = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.1

Часть параболы $y^2 = 9x$, расположенная в первом квадранте.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.2

Парабола $(y-3)^2 = -5(x-1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.3

Часть параболы $y^2 = -2x$, расположенная во втором квадранте.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.4

Парабола $3(y-1)^2 = -4(x-3)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.5

Часть параболы $x^2 = 25y$, расположенная в первом квадранте.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.6

Парабола $(x-1)^2 = -\dfrac{1}{3}(y+1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 152.7

Часть параболы $x^2 = -25y$, расположенная в третьем квадранте.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 153

$(x-4)^2 = 12(y+1).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 154

$M_0(9, -24)$, $d = \dfrac{8}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.1

$x + 2y + 2 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.2

$x - 2y - 2 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 155.3

$2x - y - 16 = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 156

$(1, 1)$, $(-7, 9)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 157

4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 158

$y^2 - 6y - 4x + 17 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.1

Гипербола $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.2

Окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.3

Эллипс $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.4

Гипербола $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.5

Точка $(2; 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.6

Мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{-1} + \dfrac{(y+1)^2}{-\frac{1}{4}} = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.7

Гипербола $y^2 - (x-3)^2 = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.8

Парабола $(x-1)^2 = -\left(y - \frac{5}{2}\right)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.9

Прямые $x = 2$ и $x = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.10

Мнимые прямые. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.1

$(x-2)^2+(y-8)^2=145.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.2

$(x-1)^2 + (y-8)^2 = 113.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.3

$(x+7)^2 + y^2 = 116.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.4

$x^2 + (y + 6)^2 = 45.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.5

$(x+5)^2+(y+2)^2=116.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.6

$x^2 + (y+1)^2 = 9.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.7

$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 146.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.8

$(x-2)^2+(y+7)^2=50.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.9

$x^2 + (y+1)^2 = 20.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.10

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.11

$(x-1)^2+(y-3)^2=18.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.12

$x^2 + (y-5)^2 = 26.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.13

$x^2 + (y + 6)^2 = 45.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.14

$(x+1)^2+(y+3)^2=10.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.15

$(x-4)^2 + y^2 = 25.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.1

Окружность $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.2

Эллипс $\dfrac{\left(x-\frac{17}{15}\right)^2}{\left(\frac{8}{15}\right)^2}+\dfrac{(y-5)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2}=1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.3

Окружность $\left(x - \dfrac{44}{15}\right)^2 + \left(y + \dfrac{81}{15}\right)^2 = \left(\dfrac{23}{15}\right)^2.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.4

Гипербола $\dfrac{\left(x+\frac{33}{4}\right)^2}{\left(\frac{15}{4}\right)^2}-\dfrac{(y-1)^2}{\left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.5

Эллипс $\dfrac{\left(x-\frac{49}{12}\right)^2}{\left(\frac{5}{12}\right)^2}+\dfrac{(y+3)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}=1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.6

Окружность $\left(x+\frac{37}{15}\right)^2+\left(y-\frac{9}{15}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1198}}{15}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.7

Гипербола $\dfrac{(x-6)^2}{(\sqrt{13})^2} - \dfrac{(y+4)^2}{(2\sqrt{26})^2} = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.8

Окружность $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.9

Окружность $\left(x - \frac{39}{16}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{12}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{21489}}{16}\right)^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.10

Гипербола $\dfrac{(x-18)^2}{8^2} - \dfrac{(y-3)^2}{\left(8\sqrt{3}\right)^2} = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.11

Гипербола $\dfrac{(y-4)^2}{\left(2\sqrt{10}\right)^2} - \dfrac{(x+8)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.12

$$(x-5)^2+\left(y+\frac{14}{3}\right)^2=\left(2\sqrt{19}\right)^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.13

Эллипс $\dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{(y+5)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.14

Окружность $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.15

Окружность $\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y+\frac{56}{5}\right)^2=\left(\frac{6\sqrt{82}}{5}\right)^2$. [Вернуться к условию]

Глава 2. Теория пределов

Ответ к задаче 162.1

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.2

$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = -\frac{1}{3},\ x_4 = \frac{1}{4}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.3

$x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ x_3 = 16,\ x_4 = 32.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.4

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.5

$x_1 = 6$, $x_2 = 11$, $x_3 = 18$, $x_4 = 27$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.6

$x_1 = 2,\ x_2 = \dfrac{3}{4},\ x_3 = \dfrac{4}{9},\ x_4 = \dfrac{5}{16}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.7

$x_1 = 4,\ x_2 = 4,\ x_3 = \dfrac{64}{9},\ x_4 = 16.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.8

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 24$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.9

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.10

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.11

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.12

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -6$, $x_4 = 24$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.13

$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.1

$$x_n = \frac{1}{2n-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.2

$x_n = \dfrac{1}{n^2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.3

$x_n = \dfrac{n+1}{n}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.4

$x_n = (-1)^n \cdot n.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.5

$x_n = n^2 + 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.1

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.2

Ограниченная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.3

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.4

Ограниченная снизу, неограниченная сверху. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.5

Ограниченная снизу, неограниченная сверху. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.6

Ограниченная снизу, неограниченная сверху.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.7

Ограниченная сверху, неограниченная снизу. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.8

Ограниченная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 164.9

Неограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.1

Строго возрастающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.2

Не монотонная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.3

Строго убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.4

Строго убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.5

Возрастающая. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.6

Убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.7

Строго возрастающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.8

Строго убывающая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.9

Не монотонная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 165.10

Монотонная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 166

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 8$, $x_7 = 13$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.1

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.2

6. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.3

34.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.1

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.2

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.3

$-\dfrac{2}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.4

$\frac{3}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.5

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.6

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.7

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.8

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.9

$\frac{4}{21}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.11

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.12

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.13

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.14

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.15

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.16

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.17

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.18

$\frac{7}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.19

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.20

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.21

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.22

3. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.23

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.24

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.25

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.26

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.27

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.28

$\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.29

$-\frac{3}{7}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.30

6. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.31

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.32

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.33

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.34

$\dfrac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.35

$\dfrac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.36

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.37

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.38

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.39

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.40

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.41

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.42

$-1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.43

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.44

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.45

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.46

$\dfrac{5}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.47

$\dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.48

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.49

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.50

3. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.51

$-\dfrac{1}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.52

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.53

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.54

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.55

$\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.56

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.57

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.58

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 172.59

$\frac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 178

Нет. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 180

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 181

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 182

$$\frac{a+2b}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 184.1

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 184.2

$\frac{5}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 184.3

$\sqrt{1+x^2}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 184.4

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 184.5

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.1

-3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.2

$\dfrac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.3

$\sqrt{2} + 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.4

$$\frac{3-x}{x^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.5

$$\frac{3x^2+x}{1-x^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.6

$$\frac{a+4}{a^2+2a}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.7

$$\frac{a^2+a+2}{a^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 185.8

$$\frac{2x+3}{4x^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.1

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.2

$-\dfrac{27}{8}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.3

$$\frac{-5}{2\sqrt[3]{5}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.4

$$\frac{-x^3}{2^x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.5

$27x^3 \cdot 8^x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.6

$$\frac{2^{1/x}}{x^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.7

$$\frac{1}{x^3 \cdot 2^x}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 186.8

$(b-2)^3 \cdot 2^{b-2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.1

$D = [-1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.2

$D = (-2, 2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.3

$D = (-2, 0]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.4

$D = \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.5

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.6

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.7

$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.8

$D = (-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.9

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 187.10

$D = \left(0, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right).$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.1

$E = [-3, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.2

$E = [1, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.3

$E = [-2, 8]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.4

$E = [4, +\infty).$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.5

$E = (0, 1]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.6

$E = [-9, -5]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.7

$E = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.8

$E = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.9

$E = [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.10

$E = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.11

$E = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 188.12

$E = [0, 1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.1

Нечетная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.2

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.3

Общего вида. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.4

Нечетная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.5

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.6

Нечетная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.7

Общего вида. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.8

Нечетная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.9

Общего вида. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.10

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.11

Четная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 189.12

Общего вида.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.1

Периодическая, $T = \dfrac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.2

Периодическая, $T = \dfrac{\pi}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.3

Периодическая, $T = 3\pi$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.4

Периодическая, $T = 2\pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.5

Непериодическая.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.6

Периодическая, $T = 8\pi$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.7

Непериодическая. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.8

Периодическая, $T = \dfrac{\pi}{2}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.9

Периодическая, $T = 4\pi$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 190.10

Периодическая, $T = \dfrac{\pi}{3}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.1

$x = \dfrac{y-2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.2

$x = \dfrac{2}{y} - 3.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.3

$x = y^2$, $y \in [0, +\infty)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.4

$x = \frac{1}{3} \operatorname{tg} y.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.5

$x = \frac{1}{3} \ln \frac{y}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.6

$x = \sqrt[3]{y+2}.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 191.7

$$x = \frac{2}{1 - y}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 192.1

$f(g(x)) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$; $g(f(x)) = x$, $x \geqslant 0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 192.2

$f(g(x)) = (2x - 1)^3$, $g(f(x)) = 2x^3 - 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 192.3

$f(g(x)) = x$, $x > 0$; $g(f(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 192.4

$f(g(x)) = 6x - 14$, $g(f(x)) = 6x - 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 192.5

$f(g(x)) = |\cos x|$, $g(f(x)) = \cos |x|$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 193.1

$u = 2x - 3,\ y = u^{99}.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 193.2

$v = \dfrac{x}{3}$, $u = \operatorname{tg} v$, $y = \lg u$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 193.3

$v = -x^2$, $u = 3^v$, $y = \arcsin u$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 193.4

$w = 5x + 3$, $v = \sin w$, $u = v^3$, $y = \sqrt{u}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 193.5

$v = \dfrac{1-x}{1+x}$, $u = \ln v$, $y = u^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195.1

Монотонная, ограниченная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195.2

Ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195.3

Строго монотонная ограниченная.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195.4

Функция не обладает свойствами монотонности и ограниченности.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195.5

Функция не обладает свойствами монотонности и ограниченности.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 195.6

Монотонная. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 196

$p_0 = \frac{4}{5}$, $Q_0 = \frac{188}{75}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197

$q_0 = 2$, $p_0 = 17$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.1

15.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.2

$\frac{4}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 200.3

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.1

15.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.2

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.3

3. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.4

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.5

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.6

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.7

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.8

∞. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.9

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.10

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.11

$-4.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.12

$$\frac{3}{16}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.13

$-\dfrac{13}{11}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.14

$-\frac{47}{75}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.15

$-\dfrac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.16

$-\frac{3}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.17

$-\dfrac{3}{16}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.18

$\frac{7}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.19

$\frac{7}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.20

$-\dfrac{2}{27}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.21

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.22

$\dfrac{9}{28}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.23

$-3.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.24

$-\dfrac{37}{24}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.25

$\frac{7}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.26

-2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.27

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.28

-1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.29

$\dfrac{2}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.30

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.31

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.32

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.33

$-\frac{3}{11}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.34

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.35

$-\frac{5}{39}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.36

-8. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.37

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.38

$-\dfrac{4}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.39

$\dfrac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.40

$-\dfrac{1}{56}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.41

$\dfrac{1}{20}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.42

$\frac{8}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.43

$-1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.44

$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.45

$\dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.46

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.47

$-\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.48

$\frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.49

$-\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.50

$\frac{1}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.51

$\frac{\sqrt{5}}{10}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.52

$-\sqrt{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.53

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.54

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.55

$-\frac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.56

$-2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.57

$\dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.58

$\frac{4}{9}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.59

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.60

$-\frac{1}{12}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.61

$-12.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.62

$-\frac{1}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.63

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.64

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.65

$-3.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.66

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.67

∞. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.68

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.69

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.70

5. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.71

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.72

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.73

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.74

-2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.75

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.76

0. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.77

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.78

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.79

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.80

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.81

$-\dfrac{1}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.82

$-\dfrac{1}{14}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.83

$-\frac{1}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 202.84

$\dfrac{1}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.1

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.2

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.3

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.4

$\dfrac{9}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.5

$\frac{2}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.6

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.7

25.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.8

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.9

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.11

-8. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.12

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.13

$\frac{9}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.14

$-\dfrac{1}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.15

$-\frac{1}{4}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.16

1. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.17

$-\frac{1}{12}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.18

-4.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.19

$-\dfrac{1}{2}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.20

$-6.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.21

$-\dfrac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.22

$-4.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.23

$\dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.24

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.25

$-1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.26

$\dfrac{4}{\pi}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 203.27

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.1

e^k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.2

e^k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.3

e^5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.4

$e^{\frac{3}{2}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.5

e^{-6}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.6

e^5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.7

e^{-9}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.8

e. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.9

e.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.10

∞.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.11

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.12

e^{16}. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.13

e^2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.14

e^2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.15

e.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.16

$e^{\frac{9}{2}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.17

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.18

e^{-6}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.19

e^5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.20

$e^{\frac{3}{5}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.21

$e^{\frac{3}{4}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.22

e^{-1}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.23

e^{-2}.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.24

e. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.25

$e^{\frac{2}{3}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.26

$$\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 204.27

$$\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.1

k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.2

6.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.3

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.4

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.5

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.6

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.7

$4\ln 2 - 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.8

$-2.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.9

k.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.10

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.11

3.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.12

$-\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.13

$\sqrt{3}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.14

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.15

km.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.16

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.17

$\dfrac{1}{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.18

$\dfrac{1}{75}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 205.19

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.1

$f(0-0) = -3, \ f(0+0) = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.2

$f(3-0)=2$, $f(3+0)=3$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.3

$f(1-0)=1$, $f(1+0)=0$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.4

$f(2-0) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(2+0) = \dfrac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.5

$f(1-0)=0,\ f(1+0)=1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.6

$f(1-0) = -1$, $f(1+0) = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.7

$f(1-0) = -2,\ f(1+0) = \dfrac{1}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 206.8

$f(-0) = 1$, $f(+0) = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.1

$\frac{4}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.2

$\frac{2}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.3

$-\dfrac{1}{3}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.4

$\log_3 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.5

$\frac{7}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.6

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.7

$-6.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.8

$\frac{\ln 2}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.9

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.10

$-1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.11

4. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.12

$\dfrac{1}{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.13

$\frac{3}{e}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.14

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.15

$\frac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.16

$\frac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.17

5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 208.18

1.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.1

$x = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.2

$x \in \mathbb{R}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.3

$x = 0.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.4

$x = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.5

$x \neq \pm 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.6

$x \in (1; 2]$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.7

$x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right].$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 212.8

$x \in [-3; -1) \cup (2; 3]$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 213.1

Непрерывна справа.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 213.2

Непрерывна слева.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 213.3

Непрерывна справа.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.1

Точка конечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.2

Точка неопределённости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.3

Точка устранимого разрыва. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.4

Точка бесконечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.5

Точка неопределённости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.6

Точка устранимого разрыва. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.7

Точка бесконечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.8

Точка конечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.9

Точка бесконечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.10

Точка устранимого разрыва.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.11

Точка бесконечного разрыва. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.12

Точка конечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.13

Точка бесконечного скачка. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 214.14

Точка неопределённости. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.1

В точках $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв со скачком $h = \dfrac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.2

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.3

В точках $x = \pm 1$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.4

В точке $x = 1$ конечный разрыв со скачком $h = 3$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.5

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 1$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.6

В точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = 1$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.7

В точке $x_1 = -\pi$ скачок $h = \pi$, в точке $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.8

В точке $x_1 = -2$ скачок $h = 2$, в точке $x_2 = 2$ устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.9

В точке $x_1 = 1$ устранимый разрыв, в точке $x_2 = 2$ скачок $h = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.10

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 1$, в точке $x = 1$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.11

В точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.12

В точках $x = \pm 1$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.13

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = \pi$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.14

В точках $x = \pm 1$ конечный разрыв со скачком $h = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.15

В точке $x = 0$ устранимый разрыв.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.16

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.17

В точке $x = 0$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.18

В точке $x = 2$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.19

В точке $x = -2$ разрыв второго рода. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.20

В точке $x = 0$ конечный разрыв со скачком $h = 2$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.1

В точке $x = 0$ устранимый разрыв. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.2

В точке $x = -1$ устранимый разрыв. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.3

В точке $x = 0$ разрыв первого рода со скачком $h = \pi$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.4

В точке $x = 3$ разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.5

В точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, разрыв второго рода.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.6

В точке $x = -1$ устранимый разрыв, в точке $x = 1$ конечный разрыв со скачком $h = 2\pi$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.1

$A = -4.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.2

Не существует. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.3

$A = -1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.1

Да

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.2

Нет

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.3

Нет

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.4

Нет

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 220.5

Да

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 221

Имеет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 225

Существует. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 228

Имеет. [Вернуться к условию]

Глава 3. Теория дифференцирования

Ответ к задаче 229.1

$y' = 3x^2 + 6x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.2

$y' = 8x^3 - 2x^2 - 4$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.3

$$y' = x^3 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{16}{x^3} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.4

$$y' = 15x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{2x^4} - \frac{8}{\sqrt[5]{x^9}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.5

$y' = e^x(\sin x + \cos x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.6

$$y' = \operatorname{arcctg} x - \frac{x}{1+x^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.7

$$y' = \frac{\ln x}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.8

$$y' = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.9

$$y' = -\frac{x \sin x \ln x + \cos x}{x \ln^2 x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.10

$$y' = \frac{(2x+1)3^x \ln 3 - 2 \cdot 3^x}{(2x+1)^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.11

$$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.12

$$y' = \frac{2e^x}{(1 - e^x)^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.13

$$y' = \frac{\sin x - x \ln x \cos x}{x \sin^2 x} + \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.14

$y' = 2\cos 2x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.15

$$y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.16

$$y' = \frac{2}{(2x-5)\ln 3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.17

$$y' = \frac{5}{\cos^2(5x+1)}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.18

$y' = 21(3x - 8)^6$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.19

$$y' = \frac{1}{2x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.20

$y' = \sin 2x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.21

$y' = -3 \sin x \cos^2 x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.22

$$y' = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.23

$$y' = \frac{1}{x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.24

$$y' = \frac{1}{4 + x^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.25

$$y' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.26

$$y' = \frac{1}{x^2 - 1}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.27

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.28

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.29

$y' = -\operatorname{ctg} x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.30

$y' = \operatorname{tg} x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.31

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.32

$$y' = \frac{-5\sin x}{2\sqrt{1+5\cos x}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.33

$y' = e^x \cos x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.34

$$y' = \frac{1}{x \ln x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 229.35

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.1

$$y' = \frac{6\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.2

$$y' = \frac{5}{2\sqrt{(-25x^2 - 10x)\arcsin(5x+1)}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.3

$y' = (8x - 5)3^{4x^2 - 5x + 1} \ln 3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.4

$y' = e^{4x+1}(\sin 2x + 4\sin^2 x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.5

$$y' = -\frac{3x\arccos^2\left(\frac{x^2}{2}+1\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.6

$$y' = \frac{2x^3 + 6x^2 - 5}{(x^3 - 2x + 1)(x + 2)}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.7

$y' = -3x^2 \cdot 2^{x^3} \cdot \sin\left(2^{x^3}\right) \cdot \ln 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.8

$$y' = \frac{1}{3}\,\frac{e^{4x+1}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3} + 12\operatorname{ctg}\frac{x}{3} + 1\right)}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.9

$y' = 0$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.10

$y' = \sqrt{a^2 - x^2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.11

$y' = \sqrt{x^2 + a^2}$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.12

$$y' = \frac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.13

$y' = 4(2^x + 3x^2)^3(2^x \ln 2 + 6x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.14

$$y' = \operatorname{tg} x + \frac{x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.15

$$y' = \frac{2x\sin(1-x^2)}{5\sqrt[5]{\cos^4(1-x^2)}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.16

$$y' = -\frac{7(x^2+1) + 3x\sin 14x}{(x^2+1)^2 \sin^2 7x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.17

$$y' = \frac{21\sin x}{4(1+3\cos x)^8}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.18

$$y' = \frac{21\sin x}{4(1+3\cos x)^8}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.19

$$y' = \frac{2}{3}\frac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.20

$$y' = \frac{e^x + xe^x}{2\sqrt{xe^x + 1}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.21

$$y' = -\frac{3 \cdot 2^{\arccos 3x} \ln 2 + 6(1 - \arcsin 3x)}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.22

$$y' = \frac{3e^x + 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(3e^x + 2^x - 1)^2}} + \frac{7\ln^6 x}{x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.23

$$y' = -\frac{9x\arccos 3x + 3\sqrt{1-9x^2}}{\sqrt{1-9x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.24

$y' = (3x^2 + 4^x \ln 4)\cos(x^3 + 4^x)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.25

$$y' = \frac{x+2}{2\sqrt{(x^2+x+1)^3}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.26

$y' = 3\sin^2 x \cos x\, e^{\sin^3 x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.27

$$y' = \frac{e^x}{2\left(1 + e^x + \sqrt{1 + e^x}\right)}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.28

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.29

$$y' = -\frac{\sin(4^x + 4^{-x})(4^x \ln 4 - 4^{-x} \ln 4)}{2\sqrt{\cos(4^x + 4^{-x})}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.30

$$y' = 4^{\sqrt{x^2+2x+2}} \ln 4 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.31

$$y' = 3\left(5^{\arccos x} - \operatorname{tg}^8 x\right)^2 \left(-\frac{5^{\arccos x}\ln 5}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{8\operatorname{tg}^7 x}{\cos^2 x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.32

$$y' = 12\sin^2\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^4\cos\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^4\left(\sqrt{x}+\lg x\right)^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x\ln 10}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.33

$$y' = -\frac{2x(x^2-2)}{x^4-1}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.34

$$y' = \frac{30\,\mathrm{tg}^5\,5x}{\cos^2 5x} - 7^{\frac{2x}{3x-1}}\,\frac{2\ln 7}{(3x-1)^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 230.35

$$y' = 5\ln^4(x - 2^{-x})\frac{1 + 2^{-x}\ln 2}{x - 2^{-x}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.1

$y' = (\sin x)^x(\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.2

$$y' = (\operatorname{tg} 2x)^{x^2}\left(2x \ln \operatorname{tg} 2x + \frac{2x^2}{\operatorname{tg} 2x \cos^2 2x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.3

$$y' = (x^2+3x)^{x-2}\left(\ln(x^2+3x) + \frac{(x-2)(2x+3)}{x^2+3x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.4

$$y' = x^{2^x}\left(2^x \ln 2 \ln x + \frac{2^x}{x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.5

$$y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3 + 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.6

$$y' = \sqrt[5]{\frac{(x^2+1)(x+3)}{5(x-3)^3}}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x-3}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.7

$$y' = \frac{\cos 2x \sqrt[4]{(2x-3)^3}}{(x+1)^2 \operatorname{ctg} x} \left(-2 \operatorname{tg} 2x + \frac{3}{2(2x-3)} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{\sin 2x} \right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.8

$$y' = \frac{2^{x^2-3x} \cdot (1-5x)^3 \cdot \sqrt{3x+1}}{(6x+5)^{10} \cdot \sqrt[3]{2x+x^2}} \Bigg((2x-3)\ln 2 - \frac{15}{1-5x} + \frac{3}{2(3x+1)} - \frac{60}{6x+5} - \frac{2}{3(}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.9

$$y' = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(\arcsin 5x)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} + \frac{5\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x} \right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.10

$$y' = (3x+1)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{3}{x(3x+1)} - \frac{\ln(3x+1)}{x^2} \right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.11

$$y' = 1 + x^x(\ln x + 1) + x^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.12

$$y' = \left(\operatorname{ctg}(4x-1)^3\right)^{\cos 6x}\left(-6\sin 6x \ln \operatorname{ctg}(4x-1)^3 - \frac{24(4x-1)^2\cos 6x}{\sin\left(2(4x-1)^3\right)}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.13

$$y' = (\operatorname{tg} 7x)^{\lg(3x+1)} \left(\frac{3 \ln \operatorname{tg} 7x}{(3x+1)\ln 10} + \frac{14 \lg(3x+1)}{\sin 14x} \right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.14

$$y' = (\sin 5x)^{\cos 5x}(5\cos 5x \operatorname{ctg} 5x - 5\sin 5x \ln \sin 5x) + x^{\cos 5x}\left(\frac{\cos 5x}{x} - 5\sin 5x \ln x\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.15

$$y' = x^{a^x} a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right) + x^{x^a + a - 1} (a \ln x + 1) + a^{x^x} x^x (\ln x + 1) \ln a$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.16

$$y' = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3-1}\left(3x^2 \ln \operatorname{ctg} 5x - \frac{10(x^3-1)}{\sin 10x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.17

$$y' = (\sin(5x-1))^{\operatorname{ctg} x}\left(5\operatorname{ctg}(5x-1)\operatorname{ctg} x - \frac{\ln\sin(5x-1)}{\sin^2 x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.18

$$y' = (6x-9)^{x^2}\left(2x\ln(6x-9) + \frac{2x^2}{2x-3}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.19

$$y' = (\arcsin 8x)^{\operatorname{tg}(3x-8)} \left(\frac{3 \ln \arcsin 8x}{\cos^2(3x-8)} + \frac{8 \operatorname{tg}(3x-8)}{\sqrt{1-64x^2} \arcsin 8x} \right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 231.20

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin(3x+7)} \left(3\cos(3x+7) + \frac{2\sin(3x+7)}{\sin 2x} \right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.1

5

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.2

$$-\frac{4}{5}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.3

$$\frac{9}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.4

$2e(4\ln 2 - 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.5

$$\frac{\pi - 4}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.6

16 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.7

$$\frac{1}{15}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.8

6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.9

14

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.10

33 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.11

$$\frac{7\sqrt{3}}{36}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.12

-1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.13

-18 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.14

-125 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.15

-25

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.16

-1 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.17

-1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.18

$$\frac{1}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 232.19

$-\frac{1}{8}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233.1

$y'' = 6$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233.2

$y'' = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233.3

$$y'' = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233.4

$$y'' = \frac{3}{4}\frac{x^4 + 4x}{(1 + x^3)\sqrt{1 + x^3}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233.5

$$y'' = \frac{8x}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 233.6

$y'' = -2\cos 2x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.1

$y''' = 0$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.2

$y''' = 2e^x(\cos x - \sin x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.3

$y''' = 2x^2 \sin x - 12 \sin x - 12x \cos x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.4

$$y''' = 18\frac{x^2-3}{(9+x^2)^3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.5

$y''' = e^{-x}(3 - x)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.6

$y''' = -\frac{1}{x^2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235.1

$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235.2

$$y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235.3

$$y^{(n)} = \frac{1}{3^n}\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi n}{2}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235.4

$y' = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 1$, $y'' = 12x^2 - 18x + 2$, $y''' = 24x - 18$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(n)} = 0$, $n = 5, 6, \ldots$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235.5

$y^{(n)} = (3\ln 2)^n 2^{3x-5}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 235.6

$$y' = 2x\ln x + 1,\ y'' = 2\ln x + 3,\ y^{(n)} = (-1)^{n+1}2(n-3)!\frac{1}{x^{n-2}},\ n = 3, 4, \ldots$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 236.1

$y^{(100)} = x \sin x - 100 \cos x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 236.2

$y^{(20)} = 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 236.3

$$y^{(50)} = 2^{50}\left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 236.4

$y^{(4)} = -4e^x \cos x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 236.5

$$y^{(5)} = \frac{274}{x^6} - \frac{120}{x^6}\ln x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 236.6

$$y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.1

$y = x - 1,\ y = -x + 1,\ \dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.2

$y = -4x - 1,\ y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4},\ \pi - \operatorname{arctg} 4$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.3

$y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}, 0$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.4

$y = x + 1,\ y = -x + 1,\ \dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.5

$y = 12x - 16$, $y = -\dfrac{1}{12}x + \dfrac{49}{6}$, $\operatorname{arctg} 12$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.6

$y = x$, $y = -x$, $\dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.7

$y = -5x + 2,\ y = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{16}{5},\ \pi - \operatorname{arctg} 5$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.8

$y = -4x - 8,\ y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{15}{4},\ \pi - \operatorname{arctg} 4$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.9

$y = \frac{1}{6}x + \frac{9}{5}$, $y = -6x + 33$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{6}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238

$\left(2, \dfrac{32}{3}\right), \left(3, \dfrac{23}{2}\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239

$$\left(4, \frac{67}{3}\right), \left(5, \frac{133}{6}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240

$(4, -25)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241

$(2, 10)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 242

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{9}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 254

$y = 7x - 14$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 257

$(7; 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.1

$\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.1

$AC(10) = 45$, $MC(10) = 35$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.2

$AC(4) = 0,3;\ MC(4) = 0,02$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.3

$AC(1) = e^3$, $MC(1) = 3e^3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.4

$AC(5) \approx 4,95,\ MC(5) \approx 0,55$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.1

$E_{60}(y) = -0,6$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.2

$$E_{\pi/3}(y) = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.3

$E_2(y) = \frac{26}{11}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.4

$$E_{e^2}(y) = \frac{1}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 261.1

$z(1) = 112,5$; $v(1) = 10$; $T_z(1) = \dfrac{4}{45}$; $z(7) = 82,5$; $v(7) = -20$; $T_z(7) = \dfrac{8}{33}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 261.2

$$z(1) = \frac{2}{7};\ v(1) = -\frac{4}{49};\ T_z(1) = -\frac{2}{7};\ z(7) = \frac{2}{19};\ v(7) = -\frac{4}{361};\ T_z(7) = -\frac{2}{19}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 261.3

$z(1) = 111,5$; $v(1) = 8$; $T_z(1) = \dfrac{8}{111}$; $z(7) = 51$; $v(7) = -28$; $T_z(7) = \dfrac{28}{51}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 261.4

$z(1) \approx 0,63$; $v(1) \approx 0,368$; $T_z(1) \approx 0,582$; $z(7) \approx 0,999$; $v(7) \approx 0,001$; $T_z(1) \approx 0,001$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 262.1

$p = 2$; $E_2(q) = -0,3$; $E_2(s) = 0,8$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 262.2

$p = 1$; $E_1(q) = -0,25$; $E_1(s) = 2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 262.3

$p = 3$; $E_3(q) = -0,75$; $E_3(s) \approx 0,18$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 262.4

$p = 1$; $E_1(q) = 0$; $E_1(s) = 0$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 263.1

$$dy = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 263.2

$$dy = -\frac{2}{(x-1)^2}dx$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 263.3

$$dy = -\frac{1}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}dx$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 263.4

$$dy = \left(2x \operatorname{tg} 3x + \frac{3x^2}{\cos^2 3x}\right) dx$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 263.5

$dy = 2xe^{x^2}\,dx$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 263.6

$$dy = \frac{12x-1}{6x^2-x+3}dx$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.1

$5, 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.2

$1, 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.3

$$1 - \frac{1}{20 \ln 2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.4

$\frac{\pi}{4} + 0,005$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.5

$214,92$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.6

$$\frac{\pi}{4} + 0,005$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.7

$2\frac{107}{108}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.8

$3\frac{1}{27}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.9

$\frac{\pi}{4} + 0,01$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.10

$$\frac{3}{100}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.11

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.12

$82\dfrac{2}{25}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.13

$$1 + \frac{1}{500 \ln 10}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.14

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.15

$4, 9$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.16

$5,013$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.17

$2,012$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.18

$3,009$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.19

$-0,017$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.20

$0,966$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.21

$1,037$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.22

$\dfrac{\pi}{4} - 0,01$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.23

$85, 32$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 264.24

$-0,04$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 265.1

$12, 16$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 265.2

$0,587$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 265.3

$0,494$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 265.4

$1,925$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.1

$$\frac{2}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.2

-1 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.3

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.4

1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.5

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.6

1 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.7

$3, 5$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.8

$-\frac{1}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.9

$\frac{7}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.10

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.11

$-\dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.12

$0,5$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.13

$$\frac{2}{\pi}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.14

1 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.15

1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.16

e^{-2}

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.17

3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.18

e^{-1}

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.19

e^{-1}

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.20

e^{-1}

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 266.21

e^3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.1

$y_{\max} = -\frac{7}{3}$ при $x = 2$, $y_{\min} = -\frac{5}{2}$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty; 2], [3; +\infty)$, убывает при $x \in [2; 3]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.2

$y_{\min} = e^{-1}$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [1; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 1]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.3

$y_{\min} = \ln \frac{2}{3}$ при $x = -\frac{1}{3}$, возрастает при $x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.4

$y_{\max} = \dfrac{4}{e^2}$ при $x = 2$, $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, возрастает при $x \in [0; 2]$, убывает при $x \in (-\infty; 0], [2; +\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.5

$y_{\max} = \dfrac{4}{3}3^{3/4}$ при $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, возрастает при $x \in \left[0; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, убывает при $x \in (-\infty; -2]$, $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; 2\right]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.6

точек экстремума нет, возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.7

$y_{\min} = 4$ при $x = -1$, $y_{\max} = 5$ при $x = 0$, $y_{\min} = 4$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [-1, 0], [1, +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; -1], [0, 1]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.8

точек экстремума нет, убывает при $x \in (-\infty; -2), (-2; 8), (8; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.9

$y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -20$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty, -1], [3, +\infty)$, убывает при $x \in [-1; 3]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.10

$y_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$ при $x = 3$, $y_{\min} = 0$ при $x = 5$, возрастает при $x \in [1; 3], [5; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 1], [3; 5]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.11

$y_{\min} = 0$ при $x = 0$, возрастает при $x \in [0, +\infty)$, убывает при $x \in (-1; 0]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.12

$y_{\max} = \dfrac{4}{e^2}$ при $x = \dfrac{1}{e^2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, возрастает при $x \in \left(-0; \dfrac{1}{e^2}\right]$, $[0; +\infty)$, убывает при $x \in \left[\dfrac{1}{e^2}; 1\right]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.13

$y_{\min} = 0$ при $x = -1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 1$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [0; 1], [1; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; -1], [0; 1]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.14

$y_{\min} = -4$ при $x = -3$, $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -4$ при $x = 1$, возрастает при $x \in [-3; -1], [1; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; -3], [-1; 1]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.15

$y_{\max} = e^{12}$ при $x = -3$, возрастает при $x \in (-\infty; -3]$, убывает при $x \in [-3; +\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.16

$y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = \dfrac{4}{27}$ при $x = \dfrac{8}{27}$, возрастает при $x \in \left[0; \dfrac{8}{27}\right]$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$, $\left[\dfrac{8}{27}; +\infty\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.17

точек экстремума нет, возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.18

точек экстремума нет, возрастает при $x \in \left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.19

$y_{\max} = 17$ при $x = -1$, $y_{\min} = -47$ при $x = 3$, возрастает при $x \in (-\infty; -1], [3; +\infty)$, убывает при $x \in [-1; 3]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.20

$y_{\min} = -\dfrac{4\sqrt{2}}{16+\sqrt{2}}$ при $x = -\dfrac{1}{4} - \sqrt{2}$, $y_{\max} = \dfrac{4\sqrt{2}}{16-\sqrt{2}}$ при $x = -\dfrac{1}{4} + \sqrt{2}$, возрастает при $x \in \left[-\dfrac{1}{4} - \sqrt{2}; -\dfrac{1}{4} + \sqrt{2}\right]$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4} - \sqrt{2}\right], \left[-\dfrac{1}{4} + \sqrt{2}; +\infty\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.21

$y_{\max} = \dfrac{40}{799}$ при $x = -\dfrac{1}{20}$, возрастает при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{20}\right]$, убывает при $x \in \left[-\dfrac{1}{20}; +\infty\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.22

$y_{\min} = \dfrac{\sqrt{42}}{3}$ при $x = -\dfrac{2}{3}$, возрастает при $x \in \left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.1

$(0;-1)$, $(2;-15)$ — точки перегиба, выпукла при $x \in [0;2]$, вогнута при $x \in (-\infty 0], [2+\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.2

$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2\right)$ — точка перегиба, выпукла при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, вогнута при $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.3

$\left(-1; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(1; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба, выпуклa при $x \in [-1; 1]$, вогнута при $x \in (-\infty; -1], [1; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.4

$(-1;\ln 2)$, $(1;\ln 2)$ — точки перегиба, выпукла при $x \in (-\infty;-1], [1;+\infty)$, вогнута при $x \in [-1;1]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.5

точек перегиба нет, вогнута при $x \in (-\infty; +\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.6

точек перегиба нет, выпукла при $x \in (-2; 2)$, вогнута при $x \in (-\infty; -2), (2; +\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.7

$(0;0)$ — точка перегиба, выпукла при $x \in [0;+\infty]$, вогнута при $x \in (-\infty;0]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.8

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ — точки перегиба, выпукла при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$, $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$, вогнута при $x\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.9

точек перегиба нет, выпукла при $x \in (-\infty; -1), (1; +\infty)$, вогнута при $x \in (-1; 1)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.10

$\left(-8; -18e^{-\frac{8}{3}}\right)$ — точка перегиба, выпукла при $x \in (-\infty; -8]$, вогнута при $x \in [-8; +\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.11

точек перегиба нет, выпукла при $x \in (-\infty; 2]$, вогнута при $x \in [2; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.12

$\left(-2; -\dfrac{2}{e^2}\right)$ — точка перегиба, выпукла при $x \in (-\infty; -2]$, вогнута при $x \in [-2; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.13

$\left(-6;-\dfrac{9}{2}\right)$, $(0;0)$, $\left(6;\dfrac{9}{2}\right)$ — точки перегиба, выпукла при $x\in[-6;0]$, $[6;+\infty)$, вогнута при $x\in(-\infty;-6]$, $[0;6]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.14

$(1;-2)$ — точка перегиба, выпукла при $x \in (-\infty;1]$, вогнута при $x \in [1;+\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.15

$(1; \ln 2)$, $(3; \ln 2)$ — точки перегиба, выпукла при $x \in (-\infty; 1]$, $[3; +\infty)$, вогнута при $x \in [1; 3]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.16

точек перегиба нет, выпукла при $x \in (-\infty; 0)$, вогнута при $x \in (0; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 268.17

$\left(\frac{1}{2}; e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\right)$ — точка перегиба, выпукла при $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, вогнута при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.1

$y_{\text{наиб}} = y(2) = 2$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.2

$y_{\text{наиб}} = y(3) = 9$, $y_{\text{наим}} = y(2) = -16$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.3

$y_{\text{наиб}} = y(-1) = 3$, $y_{\text{наим}} = y(-2) = -19$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.4

$y_{\text{наиб}} = y(0) = y(1) = 0$, $y_{\text{наим}} = y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.5

$y_{\text{наиб}} = y(e) = e - 1$, $y_{\text{наим}} = y(1) = 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.6

$y_{\text{наиб}} = y(-4) = 7e^4$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = e$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.7

$y_{\text{наиб}} = y(-1) = 8$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -12$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.8

$y_{\text{наиб}} = y(1) = 4$, $y_{\text{наим}} = y(-1) = -4$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.9

$y_{\text{наиб}} = y(4) = 6$, $y_{\text{наим}} = y\left(\dfrac{1}{16}\right) = -\dfrac{1}{8}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.10

$y_{\text{наиб}} = y(-3) = 22$, $y_{\text{наим}} = y(2) = -3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.11

$$y_{\text{наиб}} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-\pi}{4},\ y_{\text{наим}} = y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-4}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 269.12

$y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$, $y_{\text{наим}} = y(-2) = y(2) = -13$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.1

$x = -1$, $y = x - 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.2

$x = 1$, $y = 2x + 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.3

$x = 1$, $y = x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.4

$x = 0,\ y = 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.5

$y = x - \dfrac{1}{2}$, $y = -x + \dfrac{1}{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.6

$y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$, $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.7

$x = -1$, $x = 1$, $y = x$, $y = -x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.8

$x = 1$, $y = 2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.9

$y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = -\dfrac{\pi}{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.10

$x = 0,\ y = \dfrac{2}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.11

$x = 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.12

$x = 2$, $x = -2$, $y = 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.13

$y = 3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 270.14

$x = 3,\ y = 0$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.1

$q_{\max} = 174,9$; $\Pi_{\max} = 2259,001$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.2

$q_{\max} = 9$; $\Pi_{\max} = 78$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.3

$q_{\max} = 4$; $\Pi_{\max} \approx 18$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 272.4

$q_{\max} = 2$; $\Pi_{\max} \approx 2,68$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.1

$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $s \approx 57,7$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.2

$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $s \approx 109,6$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.3

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, $s = 186$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.4

$\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2},\ s = 89,4$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.1

$x_1 = \dfrac{1}{18}, x_2 = \dfrac{17}{18}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.2

$x_1 = \dfrac{3}{16}, x_2 = \dfrac{13}{16}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.3

$x_1 = \frac{11}{18}, x_2 = \frac{7}{18}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.4

$x_1 = \dfrac{12}{19}, x_2 = \dfrac{7}{19}$

[Вернуться к условию]

Глава 4. Теория интегрирования

Ответ к задаче 302.1

$\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.2

$$\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.3

$$\frac{x^2}{2} + 3\sqrt[3]{x^2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.4

$$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.5

$2x - 6\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x^3} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.6

$\ln|x| - \dfrac{1}{4x^4} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.7

$\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.8

$$\frac{1}{2}(x + \sin x) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.9

$x - \cos x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.10

$x + \cos x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.11

$-\sin x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.12

$\operatorname{tg} x - x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.13

$-x - \operatorname{ctg} x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.14

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.15

$-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.16

$-\frac{1}{2}\cos x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.17

$$\frac{1}{8}(x-\sin x)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.18

$3e^x + \operatorname{tg} x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.19

$$\frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} + 3\sqrt[3]{x} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.20

$$\frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{5^{x-1}}{\ln 5} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.21

$$\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2 \cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.22

$$-\frac{1}{5^x \ln 5} - \frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.23

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.24

$$\arcsin \frac{x\sqrt{2}}{4} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.25

$\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.26

$$x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.27

$x^3 + \operatorname{arctg} x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.28

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.29

$$\frac{2}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.30

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 302.31

$$-x - \frac{4}{x^2} + \frac{12}{x} + 6\ln|x| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.1

$$\frac{1}{3}\sin 3x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.2

$$-\frac{2}{5\sqrt{\sin 5x}} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.3

$$-\frac{1}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^3 4x}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.4

$2\operatorname{arctg} x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.5

$$-\frac{1}{4}e^{5-2x^2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.6

$\ln(x^2 + 16) - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.7

$$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.8

$$\frac{(2+5x)^{10}}{50} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.9

$$\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.10

$-\ln|\cos x| + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.11

$\ln|\sin x| + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.12

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.13

$$-\frac{1}{2}\arccos^2 x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.14

$$-\frac{1}{3\arcsin^3 x}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.15

$$\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.16

$e^{\sin x} + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.17

$$-\frac{4^{\cos 5x}}{5\ln 4}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.18

$$\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.19

$$-\frac{3}{20}\sqrt[3]{(3+5\cos x)^4}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.20

$$\frac{1}{8}\sqrt[4]{8x^4+125}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.21

$$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.22

$$\frac{1}{6}\ln\left|x^6+\sqrt{x^{12}+3}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.23

$\ln|\ln x| + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.24

$$\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.25

$-\sin\frac{1}{x}+C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.26

$\frac{1}{2}\arcsin^2 x - \sqrt{1-x^2} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.27

$\ln(1+x^2)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.28

$$\frac{1}{2}e^{2x} + e^{x} + \ln|e^{x} - 1| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.29

$$\cos\left(\frac{1}{e^x}\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.30

$$\arcsin \frac{e^x}{2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.31

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.32

$$\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6-1}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.33

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.34

$$-\frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.35

$2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.36

$$\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 303.37

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.1

$(x+8)\ln(x+8) - x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.2

$$\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}-x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.3

$$\left(\frac{3x^2}{2} - 2x\right)\ln^2 x - \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\ln x + \frac{3x^2}{4} + 4x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.4

$$-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x+\frac{1}{2}x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.5

$$-\frac{1}{3}(x+8)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.6

$(x^2 - 5)\sin x + 2x\cos x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.7

$x \sin(x-4) + \cos(x-4) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.8

$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.9

$$x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.10

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.11

$$\frac{5x}{2}e^{2x} - \frac{7}{4}e^{2x} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.12

$$-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+\frac{2}{9}x\sin 3x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.13

$$\frac{2}{25}\cos 5x + \frac{2}{5}x\sin 5x + \frac{3}{5}\sin 5x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.14

$$-\frac{2}{5}e^x\cos 2x + \frac{1}{5}e^x\sin 2x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.15

$$\frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.16

$$\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.17

$$-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+\frac{1}{2}x\sin(\ln x)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.18

$x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.19

$-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.20

$$\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.21

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+7}+\frac{7}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.22

$x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.23

$$x\ln(x^2+4)-2x+4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.24

$$x \ln \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arcsin x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.25

$x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.26

$2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.27

$x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.28

$2\sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \ln|x+1| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.29

$$\frac{1}{2}e^{2x} + 4xe^{x} - 4e^{x} + \frac{4}{3}x^{3} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.30

$$\frac{1}{2}e^{2x} + e^{x}(\cos x - \sin x) - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.31

$$-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.32

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\ln^2 x-\frac{9}{8}\sqrt[3]{x^4}\ln x+\frac{27}{32}\sqrt[3]{x^4}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.33

$-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.34

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.35

$$-2\sqrt{x^3}\cos\sqrt{x}+6x\sin\sqrt{x}-12\sin\sqrt{x}+12\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.36

$$\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.37

$$-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 304.38

$$-\frac{1}{2}x^2\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.1

$\ln(x^2 + 2x + 2) - 5 \operatorname{arctg}(x + 1) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.2

$x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + 2\ln|x-1| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.3

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.4

$x + 3\ln(x^2 - 6x + 10) + 8\,\mathrm{arctg}(x - 3) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.5

$x - 3\ln(x^2 + 4x + 5) + 8\,\mathrm{arctg}(x + 2) + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.6

$2\ln|x-2| - \ln|x-3| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.7

$\ln|x| - \ln|x+1| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.8

$\ln|(x-2)(x+5)|+C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.9

$$-\frac{7}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.10

$$\frac{17}{x+4} + +3\ln|x+4| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.11

$$2\ln\left|\frac{x+2}{x-4}\right| + \ln|x-5| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.12

$$2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|2x+1| - \ln|x-2| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.13

$$-\frac{2}{x+3}+2\ln|x+3|-\ln|x+2|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.14

$$4\ln|x+5| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.15

$$\ln(x^2+4x+8)-\ln|x-3|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.16

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arctg}(x+1)-2\ln|x-3|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.17

$$\frac{3}{x+2} + 5\ln|x+2| - 5\ln|x+3| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.18

$$2x + \frac{15}{8}\ln|x+7|\frac{1}{8}\ln|x-1| + \ln|x+5| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.19

$$\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.20

$$\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.21

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.22

$$\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{3} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.23

$$-3\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2 - 2x + 5) + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.24

$$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + 32\ln|x-2| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.25

$$\frac{1}{3}x^3 - 7x + 7\sqrt{7}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}x\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.26

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}\ln|x^3 - 1| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.27

$$\frac{1}{2}x^2 + 4x - \ln|x| + 8\ln|x-1| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.28

$\frac{1}{x} - \ln|x| + \ln|x-2| + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.29

$$\ln|x-2| - \frac{2}{x+1} - \ln|x+1| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.30

$$\frac{1}{66}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \frac{\sqrt{2}}{22}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.31

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 305.32

$$-\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.1

$\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.2

$$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2x + 6\sqrt{x} - 12\ln(\sqrt{x} + 2) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.3

$$-2\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right| + \ln|x-1| - 4\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.4

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.5

$\ln x - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.6

$$-\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+3\ln|\sqrt[3]{x+$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.7

$$\frac{1}{15}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.8

$$\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{x}{2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.9

$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.10

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{3x+1}+\ln\left|\sqrt[3]{3x+1}-1\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.11

$$2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.12

$$\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.13

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.14

$$\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.15

$$-\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-3)^5}+2\sqrt{x-3}+3\sqrt[3]{x-3}-3\ln\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[6]{x-3}+1\right)-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt[6]{\right.\right.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.16

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.17

$$\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3} + 1) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.18

$$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} - 9\ln|\sqrt[6]{x} - 1| - 3\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.19

$$\frac{1}{6}\sqrt{(2x-1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.20

$$2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.21

$$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln(\sqrt[3]{x+1}+1)-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.22

$$x-\frac{2}{5}\sqrt[6]{(3x+1)^5}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\frac{4}{3}\sqrt{3x+1}+3\sqrt[3]{3x+1}-4\sqrt[6]{3x+1}+4\ln(\sqrt[6]{3x+1}+1)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.23

$$-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.24

$$\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.25

$$2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.26

$x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1} - 1) + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.27

$$\frac{10}{27}\sqrt{(1-3x)^3}-\frac{46}{9}\sqrt{1-3x}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.28

$$\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.29

$-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.30

$2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.31

$$\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x+1)^8}-\frac{6}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 306.32

$6\sqrt[6]{x} - 12\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt[6]{x}}{2} + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.1

$$-\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.2

$$\frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.3

$$\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.4

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.5

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{7}\sin 7x+\sin x+\frac{1}{9}\sin 9x\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.6

$-\dfrac{1}{4}\cos^4 x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.7

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.8

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.9

$$-\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x+\frac{1}{15}\sin x\cos^2 x+\frac{2}{15}\sin x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.10

$$-\frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{1}{8}\sin x\cos^3 x + \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{16}x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.11

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.12

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.13

$$-\frac{\cos^4 x}{\sin x} - \cos^2 x \sin x - 2\sin x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.14

$$\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.15

$$\frac{\sin^5 x}{\cos x} - \sin^3 x \cos x + \frac{3}{2} \cos x \sin x - \frac{3}{2} x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.16

$$\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.17

$$\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.18

$$\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{64}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.19

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin^3 2x \cos 2x - \frac{3}{32}\sin 4x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.20

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}x\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.21

$$\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg}x\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.22

$x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.23

$$\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.24

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.25

$$-\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.26

$$\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.27

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.28

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.29

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.30

$$\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.31

$$\frac{1}{5}\ln\left|2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\right|+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.32

$$12\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 6\ln\left(\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2} + 1\right) - 5x + C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.33

$$-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)+3x+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 307.34

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4\right)\right)+C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.1

6

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.2

$$\frac{\pi}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.3

$$\frac{\pi}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.4

1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.5

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.6

$1 - \dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.7

$$\frac{61}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.8

$$\frac{6}{5}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 308.9

$1 - \dfrac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.1

$$\frac{e-1}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.2

$1 - \cos 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.3

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.4

$2 - 8\ln\frac{5}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.5

$$\frac{7}{2}-\frac{15}{2}\ln 2+\frac{9\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\sqrt{7}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.6

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{3}\ln 2$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.7

$$\frac{5\pi}{32}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.8

$e - \sqrt{e}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.9

$2\sqrt{2} - 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.10

π

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.11

$-6e-3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.12

$$\frac{\ln 5}{32}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.13

$$\frac{\pi^2}{32}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.14

$$\frac{2e^3+1}{9}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.15

$\sqrt{65} - 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.16

$2 - \ln 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.17

$1 - \dfrac{2}{e}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.18

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.19

$2\operatorname{arctg} e - \dfrac{\pi}{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.20

$3\ln 2-\ln 5$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.21

1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.22

π

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.23

$4 - \pi$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.24

$\frac{8}{9}e^3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.25

$$\frac{2}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.26

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.27

$$\frac{1}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.28

$2\ln 2 - 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.29

$\ln(e+1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.30

$\frac{3}{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.31

$\sin 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.32

$$\frac{\pi}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.33

$4 - 2\ln 3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.34

$3\ln 3 - 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.35

$$\frac{32}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.36

$2\ln 2 - \frac{3}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.37

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.38

$2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.39

$2 - \sqrt{5} + 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{5}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.40

$$\frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.41

$$\frac{32}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.42

$2 - \ln 2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 309.43

$$\frac{17}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.1

2 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.2

$$\frac{32}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.3

$$\frac{4}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.4

12

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.5

$$\frac{1}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.6

$$\frac{4}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.7

$$\frac{1}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.8

$$\frac{32}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.9

$12\sqrt{3}$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.10

$9 - \dfrac{8}{\ln 9}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.11

$$\frac{16}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.12

$$\frac{5}{12}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.13

$$\frac{9}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.14

$$\frac{\pi^2}{8} + 1$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.15

$$\frac{3}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.16

1 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.17

$$\frac{8}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.18

$$\frac{13}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.19

$$\frac{32\sqrt{6}}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.20

$$\frac{7}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.21

$$\frac{11}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.22

$$\frac{23}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.23

$$a + \frac{1}{a} - \frac{a-1}{\ln a} - \frac{a-1}{a \ln a}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.24

$$\frac{35}{2} - 6\ln 6$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.25

3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.26

$$\frac{7}{12}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.27

$$\frac{17}{12}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.28

$$\frac{4}{3} + 2\pi$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.29

$$\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.30

$4\pi - \frac{32}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 310.31

6π

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.1

$$\frac{80\sqrt{10}}{27} - \frac{8}{27}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.2

$$\frac{232}{15}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.3

$\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.4

$6\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.5

$2 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.6

$\ln(1+\sqrt{2})$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.7

$$4\sqrt{2} + \ln\left(\frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.8

$\frac{1}{4}(e^2+1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.9

$\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.10

$4\ln 3 - 2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.11

$\arcsin \frac{3}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.12

$$\frac{\pi + 1}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.13

$1 + \ln 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.14

$\ln(2+\sqrt{3})$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.15

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 311.16

$$\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.1

$$\frac{3\pi}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.2

$$\frac{\pi}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.3

27π

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.4

$$\frac{80\pi}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.5

$$\frac{3\pi}{10}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.6

$$\frac{65\pi}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.7

$$\pi\left(\frac{e^2+e^{-2}}{4}+1\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.8

$$\frac{5\pi}{6}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.9

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.10

$\frac{\pi}{4}(e^2+1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.11

6π

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.12

$$\frac{24\pi}{5}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.13

$\frac{\pi}{2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.14

$$\frac{128\pi}{15}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.15

$$\frac{96\pi}{5}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.16

$$\frac{64\pi}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.17

$4\pi^2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.18

$$\pi\left(2\ln 2-\frac{1}{2}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.19

$\pi\left(\ln 2 - \dfrac{1}{6}\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 312.20

$$\frac{4a^2 b\pi}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 313.1

$K_{\text{ср}} = 15$, $x = \dfrac{5}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 313.2

$K_{\text{ср}} = 61$, $x = \dfrac{-1+\sqrt{91}}{3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 313.3

$K_{\text{ср}} = 3 - \log_2 e,\ x = \dfrac{8}{e} - 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 313.4

$K_{\text{ср}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$, $x \approx 2,26$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 314.1

$$V = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 314.2

$V = \ln \frac{17}{14} + 5$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 314.3

$$V = \frac{3}{e^2} - \frac{4}{e^3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 314.4

$V = 4\sin\frac{1}{4} + 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 315.1

$K \approx 30,5$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 315.2

$K \approx 37,7$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 315.3

$K \approx 193,5$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 315.4

$K \approx 41,5$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 316.1

22

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 316.2

$$\frac{128}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 316.3

$\approx 0,32$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 316.4

$\approx 0,8$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.1

$$\frac{1}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.2

1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.3

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.4

$$\frac{2}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.5

$\frac{\pi}{4}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.6

-1

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.7

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.8

$$\frac{\pi^2}{8}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.9

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.10

π

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 317.11

$$\frac{\pi}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.1

2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.2

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.3

$$\frac{\pi}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.4

$$\frac{1}{\ln 2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.5

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.6

0

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.7

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.8

$$\frac{3\pi^2}{8}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.9

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.10

расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.11

$$-\frac{1}{9}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.12

$$\frac{\pi}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 318.13

$$\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{2}$$

[Вернуться к условию]

Глава 5. Дифференцирование функций двух переменных

Ответ к задаче 319.1

2. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.2

$5;\ \dfrac{1}{5}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 319.3

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.1

Круг с центром в начале координат и единичным радиусом, включающий границу. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.2

Полоса, ограниченная параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.3

Вся плоскость Oxy, исключая прямую $y = 3x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.4

Часть плоскости Oxy, лежащая выше прямой $y = -x$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.5

Внешняя по отношению к параболе $y^2 = 2x - 4$ часть плоскости Oxy без границы.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.6

Внешняя часть круга $x^2 + y^2 = 16$ (без границы круга).

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.7

Расположенная в правой полуплоскости между прямыми $y = -x$ и $y = x$ (без прямой $y = -x$) часть плоскости Oxy. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.8

Точки первого и третьего координатных углов, включая оси координат.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.9

Кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$, включая их границы.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.10

Вся плоскость Oxy. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.11

Плоскость Oxy без прямых $y = x$ и $y = -x$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 320.12

Правая полуплоскость, включая ось Oy. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.1

$(0; 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.2

$(1; -1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.3

$(0; 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.4

Линия $x - y = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.5

Линии разрыва — прямые $x = k\pi$ и $y = m\pi$, где $k, m \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.6

Окружность $x^2 + y^2 = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.7

Прямая $y = \dfrac{x}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 321.8

Линия $y = x^2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.1

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = 4u^3\cos^2\varphi,\ \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = -u^4\sin 2\varphi.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.2

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 12xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2 + 3y^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.3

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 4,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3x + 2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.4

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y^2 - 2y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 12xy - 12y^2 - 2x.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.5

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{5y}{(x+2y)^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{5x}{(x+2y)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.6

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.8

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos(x+3y) - x^2\sin(x+3y),\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2\sin(x+3y).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.9

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6x}{3x^2 - y^4}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y^3}{3x^2 - y^4}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.10

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos\sqrt{x-y^3}}{2\sqrt{x-y^3}}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -3\frac{y^2\cos\sqrt{x-y^3}}{2\sqrt{x-y^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.11

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{6xy}{\sqrt{1-4x^6y^2}}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^6y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.12

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xe^{2x^2-y^5}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -5y^4e^{2x^2-y^5}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.13

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2 \cos^2 \frac{3x-y^2}{x}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x \cos^2 \frac{3x-y^2}{x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.14

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho \sin^4 \theta, \ \frac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2 \sin^3 \theta \cos \theta.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.15

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.16

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)}(3x^2y + y^3), \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)}(x^3 + 3xy^2).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.17

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.18

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.19

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^{xy^2} \ln z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^{xy^2} \ln z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy^2 z^{xy^2-1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.20

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{z}{y^2} e^{-\frac{z}{y}}, \ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{y} e^{-\frac{z}{y}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 322.21

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)(2x-y-z),\ \frac{\partial u}{\partial y} = (x-z)(x-2y+z),\ \frac{\partial u}{\partial z} = (x-y)(-y+2z-x).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 323

$f'_x(-1, \pi/4) = -1$, $f'_x(-1, \pi/4) = 1$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 324

$f'_x(3, -4) = \dfrac{4}{25}$, $f'_y(-12, 5) = -\dfrac{12}{169}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 325

$f'_x(3,2) = 56$, $f'_y(3,2) = 42$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 327.1

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3,$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2 y.$$

Ответ к задаче 327.2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y,$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y.$$

Ответ к задаче 327.3

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{x-y}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 327.4

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^3) - 4x^2\sin(x^2+y^3),$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6xy^2\sin(x^2+y^3),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y\cos(x^2+y^3) - 9y^4\sin(x^2+y^3).$$

Ответ к задаче 327.5

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin\frac{y}{x^2} + e^x \ln y,$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\cos y}{x} + \frac{e^x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y \ln x - \frac{e^x}{y^2}.$$

Ответ к задаче 327.6

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{\sqrt{(2xy+y^2)^3}}.$$

Ответ к задаче 327.7

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - 1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 327.8

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^4 \sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y \cos^2 xy^2 + xy^2 \sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x \cos^2 xy^2 + 2x^2 y^2 \sin 2xy^2}{\cos^4 xy^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 327.9

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}.$$

Ответ к задаче 327.10

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \cos y.$$

Ответ к задаче 327.11

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}.$$

Ответ к задаче 327.12

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y.$$

Ответ к задаче 327.13

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4xy + 2y^2}{(2x^2 + 2xy + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - 2x^2}{(2x^2 + 2xy + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x^2 + 2xy}{(2x^2 + 2xy + y^2)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 327.14

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{ye^{xy}(xy-2)-1}{(x+e^{xy})^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x^2y+e^{xy})e^{xy}}{(x+e^{xy})^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^3e^{xy}}{(x+e^{xy})^2}.$$

Ответ к задаче 327.15

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2},$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x^{2y-1}(1+2y\ln x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^{2y}\ln^2 x.$$

Ответ к задаче 327.16

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(\cos y + x\sin y + 2\sin y),$$

[Вернуться к условию]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x(\cos y + x\cos y - \sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x(x\sin y + \cos y).$$

Ответ к задаче 331.1

$$dz = \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.2

$dz = (8x^3 - 2xy^3 + 5y)\,dx + (4y^3 - 3x^2y^2 + 5x)\,dy.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.3

$dz = \sin 2x\,dx - \sin 2y\,dy.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.4

$dz = y^2 x^{y-1}\,dx + x^y(1 + y\ln x)\,dy.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.5

$$dz = e^{y^2-xy}\Big((2y-x)\,dy - y\,dx\Big).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.6

$$dz = \frac{(6x+1)\,dx - 2y\,dy}{2\sqrt{3x^2 - y^2 + x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.7

$$dz = \frac{2\,dx - dy}{1 + (2x - y)^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.8

$$dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 \sin^2 \frac{y}{x}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.9

$$dz = (5y^4 + 4xy^7)\,dx + (20xy^3 + 14x^2y^6)\,dy.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.10

$$dz = \frac{1}{(x^3+y^3)^2}\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\Big(x(x^3+3xy^2-2y^3)dx + y(y^3+3x^2y-2x^3)dy\Big).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.11

$$dz = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2\,dx + 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)\,dy.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.12

$$dv = \frac{t}{u^2 + t^2}\,du - \frac{u}{u^2 + t^2}\,dt.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.13

$$dz = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dy.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.14

$$dz = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}\, dx - \frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}\, dy.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.15

$$dz = \frac{\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}}{2\sqrt{u^2+v^2}}\,du + \frac{v\,dv}{2\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{u^2+v^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.16

$$dz = -\frac{2\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2x\,dy}{y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.17

$$dz = 2\frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}{\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}(x\,dx + y\,dy).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.18

$$du = \frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{xy\,dy + xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.19

$du = 2xyz^4\,dx + x^2z^4\,dy + 4x^2yz^3\,dz.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.20

$$du = -\frac{y}{x^2 z}\,dx + \frac{dy}{xz} - \frac{y\,dz}{xz^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.21

$du = (3x^2 + 3y - 1)\,dx + (z^2 + 3x)\,dy + (2yz + 1)\,dz.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.22

$$du = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}\,dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x\,dz.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 331.23

$du = y^z x^{y^z-1}\,dx + z y^{z-1} x^{y^z} \ln x\,dy + y^z x^{y^z} \ln x \ln y\,dz.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 332.1

$-\dfrac{7}{130} \approx -0{,}054.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 332.2

$-0{,}1e^2 \approx -0{,}74.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.1

1,28.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.2

5,05.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.3

10,28. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.4

2,18. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.5

1,08. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.6

0,82. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.7

3,037. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.8

$-0{,}03.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.9

0,227.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.10

$-5{,}37.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 333.11

108,972. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.1

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.2

$a \cos 2t$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.3

0.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.4

$$-2(5x^4 + 2y)\sin 2t + \frac{2x - 3y^2}{1 + t^2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.5

$$\left(y \operatorname{arctg} xy + \frac{xy^2}{1+x^2y^2}\right) 2t + \left(x \operatorname{arctg} xy + \frac{x^2y}{1+x^2y^2}\right) 3t^2.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.6

$$2e^{2x-3y}\frac{1}{\cos^2 t} - 3e^{2x-3y}(2t-1).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.7

$yx^{y-1}\frac{1}{t} + x^y \ln x \cos t.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.8

$(1+u)\left(y\cos t + \dfrac{x}{t}\right) + xye^{t}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.9

$$-\sin\left(2t+\frac{4}{t^2}-\frac{\sqrt{t}}{\ln t}\right)\left(2-\frac{8}{t^3}-\frac{\ln t-2}{2\sqrt{t}\ln^2 t}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 334.10

$t^7(8\sin t + t\cos t)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 335.1

$\sqrt{3}+1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 335.2

$1 + \sqrt{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 335.3

2.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 336

$$-\frac{11\sqrt{2}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 337

$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 338

$\frac{16}{3}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 339.1

$$\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 339.2

$\frac{2}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 340.1

$(4; -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 340.2

$(-2; -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 340.3

$(3; 0)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 340.4

$(-4; -4)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 340.5

$(0; -e)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 341.1

$(2xyz, x^2z^3, 3x^2yz^2)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 341.2

$(2x, 2y, -2z)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 341.3

$(ye^{xy}, xe^{xy} - z^2, -2yz)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 341.4

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.1

$\operatorname{grad} u = (1, -1, 0)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{2}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.2

$\operatorname{grad} u = (1, -12, -5)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{170}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.3

$\operatorname{grad} u = (2; -2; -4)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{6}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.4

$\operatorname{grad} u = (-6; -4; 2)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{14}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.5

$\operatorname{grad} u = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right)$, $|\operatorname{grad} u| = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.6

$\operatorname{grad} u = (-2; 6; -3)$, $|\operatorname{grad} u| = 7$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.7

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ |\operatorname{grad} u| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.8

$\operatorname{grad} u = (1, 1, -2)$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{6}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 342.9

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0\right), \ |\operatorname{grad} u| = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 343

637,5.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 345.1

$$u'_x = \frac{a_1}{x - c_1}, \; u'_y = \frac{a_2}{y - c_2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 345.2

$u'_x = a_1 x^{-b_1}$, $u'_y = a_2 x^{-b_2}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 346

$E_{zx}(1,1) \approx 0{,}67$, $E_{zy} \approx 1{,}33$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 347

$E_{zx} = \alpha$, $E_{zy} = \beta$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 348.1

$\sigma_{xy} = 1.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 348.2

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\beta + 1}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.1

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.2

$z_{\min} = z\,(1, 2) = -7.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.3

Экстремума нет. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.4

Экстремума нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.5

$z_{\min} = z(-1; -2) = -11.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.6

$z_{\min} = z(1;4) = -21.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.7

Экстремума нет.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.8

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.9

$$z_{\min} = z\left(1, -\frac{1}{2}\right) = 0.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.10

$z_{\text{max}} = z(-1, 1) = 1.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.11

$z_{\min} = z\,(0, 0) = 0.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.12

В точках $M_1(-1;-2)$ и $M_2(1;2)$ нет экстремума; $z_{\max} = z(-2;-1) = 28$, $z_{\min} = z(2;1) = -28$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.13

$z_{\max} = z\,(4,4) = 12.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.14

$z_{\max} = z(0;0) = 2.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.15

$z_{\min} = z(1;1) = 4$, $z_{\max} = z(2;1) = -28$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.16

$z_{\max} = z(2; -2) = 3.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.17

$z_{\min} = z(1;3) = 10 - 18\ln 3.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.18

$z_{\min} = z(-2; 0) = -\dfrac{2}{e}.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.19

$$z_{\min} = z(-2, 0) = -\frac{2}{e}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.20

$$z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 349.21

$$z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.1

$z_{\text{min}} = -128$, $z_{\text{max}} = \dfrac{1}{4}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.2

$z_{\text{min}} = -3$, $z_{\text{max}} = 41$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.3

$z_{\min} = -\dfrac{1}{3}$, $z_{\max} = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.4

$z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 4$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.5

$z_{\min} = -3$, $z_{\max} = 0$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.6

$z_{\min} = -4$, $z_{\max} = 6$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.7

$z_{\min} = 5$, $z_{\max} = 12$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.8

$z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 5$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.9

$z_{\text{min}} = -11$, $z_{\text{max}} = 9$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.10

$z_{\min} = -3$, $z_{\max} = 17$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.11

$z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 36$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.12

$z_{\text{min}} = -1$, $z_{\text{max}} = 13$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.13

$z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 16$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.14

$z_{\min} = -24$, $z_{\max} = 120$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.15

$z_{\min} = -15$, $z_{\max} = -\dfrac{62}{27}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.16

$z_{\min} = -14$, $z_{\max} = 18$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.17

$z_{\text{min}} = 0$, $z_{\text{max}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.18

$z_{\min} = -3$, $z_{\max} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 350.19

$z_{\min} = -\dfrac{1}{8}$, $z_{\max} = 1$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.1

$z_{\text{min}} = -5$, $z_{\text{max}} = 75$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.2

$z_{\min} = -2\sqrt{2}$, $z_{\max} = 2\sqrt{2}$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.3

$z_{\min} = -30$, $z_{\max} = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.4

$z_{\min} = -\dfrac{1}{2}$, $z_{\max} = \dfrac{1}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.5

$z_{\text{min}} = -3$, $z_{\text{max}} = 3$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.6

$z_{\min} = -120$, $z_{\max} = 8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.7

$z_{\text{min}} = -2(\sqrt{2}+1)$, $z_{\text{max}} = 2(\sqrt{2}-1)$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.8

$z_{\min} = -64$, $z_{\max} = 8$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.9

$z_{\min} = -40$, $z_{\max} = 5$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.10

$z_{\min} = -2$, $z_{\max} = 30$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 351.11

$z_{\text{min}} = -48$, $z_{\text{max}} = z(1, -1) = 2$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 352

$z_{\max} = 11$, $z_{\min} = 1$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.1

$\dfrac{19\sqrt{2}}{8}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.2

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.3

$$\frac{9\sqrt{5}-15}{\sqrt{50}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 353.4

$$\frac{8}{\sqrt{130}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 354

$\frac{1}{14}\sqrt{2730}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 355

Максимум прибыли равен 28 при $x = 2$ и $y = 4$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 356

Максимум прибыли равен 176 при $x = 8$, $y = 4$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 357

Длина и ширина равны 4 метра, глубина равна 2 метра.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 358

Длина и ширина равны $2\delta + \sqrt[3]{2V}$, высота равна $\delta + \dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 359

$R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $H = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 360

$R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$, $H = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 361

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}},\ H = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 362

$R = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$, $H = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 363

Если R — радиус основания палатки, H — высота цилиндрической части, h — высота конической верхушки, то должны иметь место следующие соотношения:

$$R = \frac{h\sqrt{5}}{2}, \quad H = \frac{h}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 364

Проволочная сетка должна отходить под углом $\frac{\pi}{3}$ к стене, участок должен захватывать отрезок каменной стены длиной

$$\frac{4\sqrt[4]{3}\sqrt{S}}{3},$$

его боковые стороны должны быть равны

$$\frac{2\sqrt[4]{3}\sqrt{S}}{3}.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 365

Канал должен соединять точку параболы $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ с точкой прямой $\left(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8}\right)$, его длина равна $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. [Вернуться к условию]

Глава 6. Дифференциальные уравнения

Ответ к задаче 366.1

$y'x - y = 0$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.2

$y'x - y = x^2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.3

$y'(x^2 - y^2) = 2xy$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.4

$y' = 2y$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.5

$y = 2y'x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.6

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.7

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \arcsin y$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.8

$$y = xy' \ln \frac{x}{y}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.9

$y' \sin x = y \ln y$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.10

$(1+x^2)y' = xy(1+y^2)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.11

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.12

$y' = -2xy$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 366.13

$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.1

$y = 3\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.2

$$y = \frac{1}{27}e^{3x} + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}\sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.3

$y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.4

$$y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C_1 x + C_2,\ y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + 1$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.5

$y = e^x - \frac{x^4}{24} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$, $y = e^x - \frac{x^4}{24} + 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.6

$$y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_1 x + C_2$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.7

$y = \ln|\sin x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.8

$$y = -\frac{1}{27}\sin 3x + \frac{1}{27}x\cos 3x + C_1x^2 + C_2x + C_3$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 367.9

$$y = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \ln(x^2+1) + C_1 x + C_2$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.1

$y = C(x+1)e^{-x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.2

$$y = -\frac{1}{\ln C(x^2-1)}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.3

$$y = \operatorname{arctg}\left(C - \frac{2}{x}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.4

$y = \ln(e^x + C)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.5

$y = \arcsin x + C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.6

$y = Ce^{x^2+x}$, $y = e^{x^2+x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.7

$y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $y = 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.8

$y = (x + C)^2$, $y = (x + 1)^2$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.9

$\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{arctg} x + C$, $y = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{arctg} x - 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.10

$y = e^{Ce^{x}}$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.11

$y = Ce^{\sqrt{4-x^3}}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.12

$e^x - (y+1)e^{-y} = C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.13

$y = C \ln x$, $y = \ln x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.14

$1 + e^y = C(1 + x^2)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 368.15

$$y = \frac{2}{\ln|2x+1| + C},\ y = \frac{2}{\ln\frac{|2x+1|}{9} + 2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.1

$y = x(\ln|x| + C)$, $y = x(\ln|x| + 2)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.2

$y = xe^{Cx+1}$, $y = xe^{1-x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.3

$y = x \arcsin(C - \ln|x|)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.4

$y = x\,\mathrm{tg}(\ln|x| + C)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.5

$y = xe^{Cx}$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.6

$y^3 - 3x^2y - x^3 = C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.7

$y = x + x(Cx + 1)^2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.8

$2y^2 - 2xy + x^2 = C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.9

$y = x\ln(C + \ln|x|)$, $y = x\ln(1 + \ln|x|)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.10

$y = Ce^{-2\sqrt{y/x}}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.11

$e^{x/y} + \ln|x| = C$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.12

$$4y + 5 = (2x - 3)\left(\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.13

$$\ln|y - x - 1| = C - \frac{x-2}{y-x-1}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.14

$(y + 2x - 3)^2 = C(6x + 2y - 5)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.15

$(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 369.16

$$\ln \frac{y+2}{(x-3)^2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{x-3} = C$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.1

$y = (x + C)e^x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.2

$y = Ce^x - x - 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.3

$y = 1 + Ce^{-x^3/3}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.4

$$y = 3 + \frac{C}{x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.5

$$y = \frac{x}{C - \ln x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.6

$x^3y = 2x + C$, $x^3y = 2x - 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.7

$xe^x y = x^3 + C$, $xe^x y = x^3 - 1$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.8

$y = (x \ln x - x + C)x^{-2}$, $y = (x \ln x - x + 3)x^{-2}$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.9

$y = x^3(e^x + C)$, $y = x^3 e^x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.10

$$y = \left(e^{x/2}(x-1)+C\right)^2 e^{-x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.11

$y = -2\cos^2 x + C\cos x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.12

$$y = \left(\operatorname{tg} x + \frac{\ln|\cos x| + C}{x} \right)^2$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.13

$x = Ce^{-y} - y^2 + 2y - 2$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.14

$x = y^2 + Cy$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.15

$y = C\sin x - \cos x$, $y = 2\sin x - \cos x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.16

$x = Cy^2 + 2\ln|y| - y + 1$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.17

$y = (\operatorname{arctg} x + C)e^{-x}$, $y = (\operatorname{arctg} x + 1)e^{-x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.18

$$y = \left(\frac{3}{14}x^{7/2} + C\right)^4 x^{-2}, \; y = \left(\frac{3}{14}x^{7/2} + \frac{11}{14}\right)^4 x^{-2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.19

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 370.20

$$y = \frac{1}{x(C - \ln x)}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 371

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 372

$Y = 2t + 1 + e^{2t}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 373

$\approx 6,93$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.1

$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.2

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.3

$y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.4

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.5

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.6

$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.7

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.8

$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.9

$y = C_1 + C_2 e^{-4x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.10

$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.11

$y = C_1 + C_2 e^x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.12

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.13

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.14

$y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.15

$y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.16

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.17

$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.18

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 4x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 374.19

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 e^{-2x} + C_4 e^{2x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375.1

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2 x^2$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375.2

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2 \ln x}{x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375.3

$y = C_1 + C_2 \ln x$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375.4

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375.5

$y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 375.6

$$y = \frac{C_1}{(x+2)^3} + C_2(x+2)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.1

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln|\cos 2x|$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.2

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.3

$y = C_1 + C_2 e^x - 4\sqrt{x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.4

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.5

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln |x|$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.6

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.7

$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x} + e^{x^2}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.8

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.9

$y = C_1 + C_2x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \arcsin e^x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 376.10

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.1

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{4} e^{x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.2

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 3x^2 - 3x - \frac{9}{2}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.3

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.4

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} - \frac{1}{5}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.5

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right) e^{2x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.6

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x\right) e^x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.7

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) e^{-x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.8

$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.9

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-2x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.10

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.11

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.12

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{3}{4} x \cos 2x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.13

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x^2 \sin x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.14

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{13}{72} x \cos 3x + \frac{1}{12} x^2 \sin 3x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.15

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4} x e^x \sin 2x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.16

$$y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x + C_2\sin\frac{4}{5}x\right) - \frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.17

$$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{6} e^{3x} - frac13x^3 - x^2 - 2x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.18

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} e^x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.19

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x + \frac{7}{260}\cos 3x + \frac{9}{260}\sin 3x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 377.20

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.1

$y = 4e^{x} + 2e^{3x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.2

$y = xe^{3x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.3

$y = 9 - 2e^{-4x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.4

$y = 2e^{-\frac{1}{2}x} + xe^{-\frac{1}{2}x}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.5

$y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2 e^x$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.6

$$y = (1 - 3x)e^{3x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{27} + \frac{1}{3}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.7

$$y = 3\pi \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.8

$$y = \frac{3}{2}x^2 e^{-2x}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.9

$$y = \cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \sin x + x$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 378.10

$$y = \frac{1}{4}e^{x} - 2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}(2x^2 - 6x + 7)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 379

$$P = C\cos(\omega t - \varepsilon) + \frac{\alpha - \beta}{b - a}$$

[Вернуться к условию]

Глава 7. Ряды

Ответ к задаче 380.1

$a_n = \dfrac{1}{n^3}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.2

$a_n = \dfrac{1}{\ln n}, \;\; n = 2, 3, 4, \ldots$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.3

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.4

$a_n = \dfrac{n^2}{n!}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.5

$(-1)^{n+1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.6

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{2n}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.7

$$a_n = \frac{1}{2^n + 3}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.8

$a_n = \dfrac{1}{n!}, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 380.9

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.1

2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.2

$$\frac{3}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.3

$$\frac{3}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.4

$$\frac{23}{90}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.5

$$\frac{1}{4}$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.6

1 [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.7

2

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 381.8

3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.1

выполняется

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.2

не выполняется, ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.3

не выполняется, ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.4

не выполняется, ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.5

не выполняется, ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.6

выполняется

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.7

не выполняется, ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 382.8

не выполняется, ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.1

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.2

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.3

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.4

ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.5

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.6

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.7

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.8

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.9

ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.10

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.11

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.12

ряд сходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.13

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.14

ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.15

ряд сходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.16

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 383.17

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.1

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.2

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.3

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.4

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.5

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.6

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.7

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.8

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.9

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 384.10

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.1

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.2

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.3

ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.4

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.5

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.6

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.7

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.8

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.9

ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 385.10

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.1

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.2

ряд сходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.3

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.4

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.5

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.6

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 386.7

ряд сходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.1

ряд сходится абсолютно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.2

ряд сходится условно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.3

ряд сходится абсолютно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.4

ряд расходится [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.5

ряд сходится условно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.6

ряд сходится абсолютно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.7

ряд сходится абсолютно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.8

ряд сходится абсолютно [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.9

ряд сходится условно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.10

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.11

ряд сходится условно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.12

ряд сходится условно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.13

ряд сходится абсолютно [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.14

ряд сходится абсолютно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.15

ряд расходится

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.16

ряд сходится условно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.17

ряд сходится абсолютно [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 387.18

ряд сходится абсолютно

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.1

$(1; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.2

$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.3

$(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.4

$\left[\dfrac{1}{10}; 10\right)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.5

$\mathbb{R} \setminus \{2 + 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.6

$\emptyset$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.7

$(-\infty; \infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.8

$[0; \infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.9

$(0; \infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.10

$(-1; 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.11

$$(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{3}; \infty\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.12

$(-\infty; \infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.13

$(-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.14

$(-2; 2)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 388.15

$\emptyset$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.1

$[-1; 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.2

3

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.3

$[-1, 1]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.4

$[-4, 6)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.5

$[-1, 1]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.6

$(-1, 1)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.7

$(-\infty, +\infty)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.8

$[-7, 3)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.9

$(-1, 7)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.10

$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.11

$(-4; 4)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.12

$$\left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.13

$(-2, 4]$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.14

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.15

$(-5; -3)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.16

$$\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.17

$(1;3]$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.18

$[2;3)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.19

$(-2; 0)$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 389.20

$(0; 4)$

[Вернуться к условию]

Часть III

Тесты

Глава 1

Аналитическая геометрия

1.1. Прямая на плоскости

Начало теста.

1. Уравнение

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

является:

- ☐ уравнением прямой с угловым коэффициентом;
- ☐ уравнением прямой в отрезках;
- ☐ уравнением другого типа.

2. Уравнение

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 7 = 0$$

является:

- ☐ уравнением прямой с угловым коэффициентом;
- ☐ уравнением прямой в отрезках;
- ☐ уравнением другого типа.

3. Уравнение

$$y = 3x + 4$$

является:

- ☐ уравнением прямой с угловым коэффициентом;
- ☐ уравнением прямой в отрезках;
- ☐ уравнением другого типа.

4. Прямая $2x + 3y = 6$ отсекает на оси абсцисс отрезок $a =$ ☐ *, а на оси ординат — отрезок $b =$ ☐ *.

5. Через точки $A(3,2)$ и $B(4,-1)$ проходит прямая

$$\boxed{}\,{*}\;x + y + \boxed{}\,{*} = 0.$$

6. Прямая, проходящая через точки $A(-1,-3)$ и $B(3,5)$, имеет угловой коэффициент $k = \boxed{}\,{*}$ и пересекает ось Oy в точке с ординатой $b = \boxed{}\,{*}$.

7. Уравнение прямой, для которой точка $M(1,3)$ является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат, следующее:

$$y = \boxed{}\,{*}\;x + \boxed{}\,{*}.$$

8. В треугольнике ABC, где $A(0,0)$, $B(2,6)$, $C(3,1)$,

а) уравнение медианы AM имеет вид $y = \boxed{}\,{*}\;x$;

б) уравнение высоты AD имеет вид $y = \boxed{}\,{*}\;x$;

в) уравнение биссектрисы AE имеет вид $y = \boxed{}\,{*}\;x$.

9. Найти тангенс угла α между прямыми $2x+3y-7=0$ и $-x+4y-1=0$.

Решение. Последовательно вычисляем угловые коэффициенты первой и второй прямой k_1 и k_2, а затем $\operatorname{tg}\alpha$:

$$k_1 = \boxed{}\,{*}, \quad k_2 = \boxed{}\,{*}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \boxed{}\,{*}.$$

10. Прямые $2x+3y+4$ и $6x-4y+5$:

☐ параллельны, но не совпадают;

☐ совпадают;

☐ пересекаются под острым углом;

☐ пересекаются под прямым углом.

11. Прямые $4x - 5y + 2$ и $-8x + 10y - 4$:

☐ параллельны, но не совпадают;

☐ совпадают;

☐ пересекаются под острым углом;

☐ пересекаются под прямым углом.

12. Прямые $-x + 2y - 3$ и $-3x + 6y + 1$:

☐ параллельны, но не совпадают;

☐ совпадают;

☐ пересекаются под острым углом;

☐ пересекаются под прямым углом.

13. Прямые $2x + y - 4$ и $-x + 3y + 5$:

☐ параллельны, но не совпадают;

☐ совпадают;

☐ пересекаются под острым углом;

☐ пересекаются под прямым углом.

14. Уравнение прямой, проходящей через точку $(-1, -1)$ и параллельной прямой, соединяющей точки $(3, -2)$ и $(5, 4)$, следующее:

$$y = \boxed{}\,*\,x + \boxed{}\,*.$$

15. Прямые $3x - 2y + 5 = 0$ и $-6x + \alpha y - 1 = 0$ параллельны при $\alpha = \boxed{}$ * и перпендикулярны при $\alpha = \boxed{}$ *.

16. Найти точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с вершинами $A(14, 9)$, $B(14, -8)$, $C(-7, 2)$, $D(-6, 8)$.

Решение. Уравнения диагоналей записываем как общее уравнение прямой с целыми коэффициентами, наибольший общий делитель которых равен единице; коэффициент при x выбираем неотрицательным:

$$AC : \boxed{*}\,x + \boxed{*}\,y + \boxed{*} = 0,$$
$$BD : \boxed{*}\,x + \boxed{*}\,y + \boxed{*} = 0.$$

Тогда точка пересечения диагоналей $O\left(\boxed{*}, \boxed{*}\right)$.

17. В треугольнике с вершинами $A(7,3)$, $B(3,5)$, $C(-3,13)$ найти длину высоты AD.

Решение. Составляем уравнение стороны BC как общее уравнение прямой с целыми коэффициентами, наибольший общий делитель которых равен единице; коэффициент при x выбираем неотрицательным:

$$\boxed{*}\,x + \boxed{*}\,y + \boxed{*} = 0.$$

Отсюда вычисляем высоту $AD = \boxed{*}$.

18. Симметрично точке $M_1(-2,1)$ относительно прямой $3x+2y-9=0$ располагается точка

$$M_2\left(\boxed{*}, \boxed{*}\right).$$

19. Если стороны квадрата лежат на параллельных прямых

$$3x-4y-12=0, \quad 3x-4y+3=0,$$

то его площадь $S = \boxed{*}$.

20. Найти координаты центра описанной около треугольника ABC с вершинами $A(6, -1)$, $B(-1, -8)$, $C(6, -9)$ окружности.

Решение. Находим середину D отрезка AB, угловой коэффициент прямой AB и уравнение срединного перпендикуляра к стороне AB:

$$D\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right), \quad k_{AB} = \boxed{}\boxed{*}, \quad y = \boxed{}\boxed{*}x + \boxed{}\boxed{*}.$$

Находим середину E отрезка AC и уравнение срединного перпендикуляра к стороне AC:

$$E\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right), \quad y = \boxed{}\boxed{*}x + \boxed{}\boxed{*}.$$

Приходим к выводу, что центр описанной окружности $O\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right)$.

Clear

1.2. Кривые второго порядка

Начало теста.

1. Для окружности $x^2 + y^2 + 12x - 14y + 4 = 0$ координаты центра O и радиус R следующие:

$$O\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right), \quad R = \boxed{}\boxed{*}.$$

2. Через точки $A(-2, 3)$, $B(-2, 7)$, $C(4, 3)$ проходит окружность

$$x^2 + y^2 + \boxed{}\boxed{*}x + \boxed{}\boxed{*}y + \boxed{}\boxed{*} = 0.$$

3. Эллипс с большой полуосью $a = 5$ и эксцентриситетом $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{\boxed{}\boxed{*}} + \frac{y^2}{\boxed{}\boxed{*}} = 1.$$

4. Эллипс $x^2 + 9y^2 - 4x - 5 = 0$ имеет центр в точке

$$O\left(\boxed{}\boxed{*}, \boxed{}\boxed{*}\right).$$

Его большая полуось $a = \boxed{}\boxed{*}$, малая полуось $b = \boxed{}\boxed{*}$, расстояние между фокусами $2c = \boxed{}\boxed{*}\sqrt{2}$.

5. Гипербола, уравнения асимптот которой имеют вид $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ и расстояние между фокусами, лежащими на оси абсцисс, $2c = 6\sqrt{5}$, имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{\boxed{}\boxed{*}} - \frac{y^2}{\boxed{}\boxed{*}} = 1.$$

6. На части гиперболы

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1,$$

лежащей в первой четверти, точка M, меньший фокальный радиус которой $r_2 = \sqrt{6}$, имеет координаты

$$M\left(\boxed{}\,\boxed{*},\ \sqrt{\boxed{}\,\boxed{*}}\right).$$

7. Уравнение симметричной относительно оси Ox и лежащей в правой полуплоскости параболы с вершиной в начале координат и расстоянием между фокусом и директрисой, равным 3, следующее:

$$y^2 = \boxed{}\,\boxed{*}\,x.$$

8. Уравнение касательной к параболе $y^2 = 2x$ в точке $A(8, -4)$ следующее:

$$y = \boxed{}\,\boxed{*}\,x + \boxed{}\,\boxed{*}.$$

Clear

Глава 2

Теория пределов

2.1. Последовательности

Начало теста.

1. Первые пять элементов последовательности $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ следующие:

$$x_1 = \square\ *, \quad x_2 = \square\ *, \quad x_3 = \square\ *,$$
$$x_4 = \square\ *, \quad x_5 = \square\ *.$$

2. Последовательность x_n задана рекуррентно формулами $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 3$. Ее первые пять элементов следующие:

$$x_1 = \square\ *, \quad x_2 = \square\ *, \quad x_3 = \square\ *,$$
$$x_4 = \square\ *, \quad x_5 = \square\ *.$$

3. Является ли ограниченными последовательности: $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

☐ Да ☐ Нет

4. $x_n = \ln n$;

☐ Да ☐ Нет

5. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$?

☐ Да ☐ Нет

6. Последовательность $x_n = \dfrac{n+1}{n}$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

7. Последовательность $x_n = (-1)^n$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

8. Последовательность $x_n = \sin n$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

9. Последовательность $x_n = \ln n$

☐ возрастает; ☐ убывает; ☐ не является монотонной.

10. Последовательность $x_n = \ln n$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

11. Последовательность $x_n = 2^{(-1)^n}$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

12. Последовательность $x_n = (-1)^n n$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

13. Последовательность $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

☐ бесконечно малая; ☐ бесконечно большая; ☐ не принадлежит к указанным типам.

14. Найти пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1} = \square$ *.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{n^2+1} = \square$ *.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4}{n^2+5} = \square\,*$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{n^2+1} - \dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$.

Решение. Приводим дроби к общему знаменателю и вычитаем:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{3n^2}{3n-1}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\square\,* n^4 + \square\,* n^3 + \square\,* n^2 + \square\,* n + \square\,*}{(n^2+1)(3n-1)} =$$
$$= \square\,*.$$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{5n+11} - \dfrac{\cos n}{10n}\right) = \square\,*$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \square\,*$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2} = \square\,*$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!} = \square\,*$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n!}{n^2+1} = \square\,*$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \square\,*$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}) = \square\,*$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \square\,*$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e^{\square}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{n} = e^{\square}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n} = e^{\square}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\ln(n+3)-\ln n\Big) = \square$.

Clear

2.2. Предел, непрерывность точки разрыва функции одной переменной

Начало теста.

1. Для функции $y = \sqrt{4 - x^2}$
   - ☐ область определения $X = (-\infty, +\infty)$, множество значений $Y = (-\infty, +\infty)$;
   - ☐ область определения $X = (-2, 2)$, множество значений $Y = (0, 2)$;
   - ☐ область определения $X = [-2, 2]$, множество значений $Y = [0, 2]$;
   - ☐ область определения $X = (-2, 2)$, множество значений $Y = (-\infty, +\infty)$.
2. Для функции $y = \arccos(x + 2)$
   - ☐ область определения $X = [-3, -1]$, множество значений $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
   - ☐ область определения $X = [-1, 1]$, множество значений $Y = [0, \pi]$;
   - ☐ область определения $X = (-3, -1)$, множество значений $Y = (0, \pi)$;
   - ☐ область определения $X = [-3, -1]$, множество значений $Y = [0, \pi]$.
3. Функция $f(x) = x^5 - x^3 - x$
   - ☐ четная;
   - ☐ нечетная;
   - ☐ не является ни четной, ни нечетной.
4. Функция $f(x) = \cos x + x \sin x$
   - ☐ четная;
   - ☐ нечетная;
   - ☐ не является ни четной, ни нечетной.

5. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + x^2)$

☐ четная; ☐ нечетная; ☐ не является ни четной, ни нечетной.

6. Период функции $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ равен ☐ * π.

7. Период функции $y = \sin 3x + \sin 2x$ равен ☐ * π.

8. Период функции $y = |\sin x|$ равен ☐ * π.

9. Найти следующие пределы. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 7x + 4 =$ ☐ *.

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4} =$ ☐ *.

11. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\sin x - \cos 2x) =$ ☐ *.

12. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{3 + \sqrt[4]{2x^3}} = \sqrt{\square}$ *.

13. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^3 + 8} =$ ☐ *.

14. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x - 4}{x - 2} =$ ☐ *.

15. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} =$ ☐ *.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} =$ ☐ *.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 5x} =$ ☐ *.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2} =$ ☐ *.

19. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \boxed{}$ *.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^{10}(x^2+1)}{(3x+1)^2(x+5)^5(x-1)^5} = \boxed{}$ *.

21. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \boxed{}$ *.

22. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1} = \boxed{}$ *.

23. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right) = \boxed{}$ *.

24. $\lim\limits_{x\to0} x\operatorname{ctg} x = \boxed{}$ *.

25. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x} = \boxed{}$ *.

26. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \boxed{}$ *.

27. $\lim\limits_{x\to1/2} \dfrac{\operatorname{arctg}(2x-1)}{4x^2-1} = \boxed{}$ *.

28. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x} = \boxed{}$ *.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = e^{\boxed{}}$ *.

30. $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{\boxed{}}$ *.

31. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{при } x \neq 3, \\ A, & \text{при } x = 3 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x = 3$ при $A =$ ☐ *.

32. Функция $y = \dfrac{3x+3}{2x+4}$ имеет в точке $x = -2$:

☐ устранимый разрыв; ☐ скачок; ☐ разрыв второго рода.

33. Функция $y = \begin{cases} x^2+1, & \text{при } x < 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x - \dfrac{\pi}{2} + 1, & \text{при } x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ имеет:

☐ в точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв;

☐ в точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ скачок;

☐ в точке $x = 0$ устранимый разрыв, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода;

☐ в точке $x = 0$ скачок, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв;

☐ в точке $x = 0$ скачок, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ скачок;

☐ в точке $x = 0$ скачок, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода;

- [ ] в точке $x = 0$ разрыв второго рода, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ устранимый разрыв;
- [ ] в точке $x = 0$ разрыв второго рода, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ скачок;
- [ ] в точке $x = 0$ разрыв второго рода, в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ разрыв второго рода.

Clear

Глава 3

Теория дифференцирования

3.1. Дифференцирование функций одной переменной

3.2. Исследование функции одной переменной

Глава 4

Теория интегрирования

4.1. Неопределённый интеграл

4.2. Определённый интеграл с приложениями

Глава 5

Функции двух переменных

Начало теста.

1. Область определения X функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$ следующая:

- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \geqslant a^2\right\}$;
- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 > a^2\right\}$;
- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant a^2\right\}$;
- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < a^2\right\}$.

2. Область определения X функции $z = \arcsin \dfrac{y}{x^2}$ следующая:

- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| \leqslant x^2\right\}$;
- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| < x^2\right\}$;
- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| < x^2, x \neq 0\right\}$;
- $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| \leqslant x^2, x \neq 0\right\}$.

3. Что можно сказать о пределе $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

- ☐ Существует и равен 0.
- ☐ Существует и равен 1.
- ☐ Не существует.
- ☐ Существует и равен ∞.

4. Все точки разрыва функции $z = \sin\dfrac{1}{x-y}$ лежат на

- ☐ прямых $x = 0$ и $y = 0$;
- ☐ прямой $y = x$;
- ☐ прямых $y = x + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;
- ☐ прямых $y = x + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

5. Частные производные функции $z = \dfrac{y}{x}$ следующие:

- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$.

6. Частные производные функции $z = xe^{-xy}$ следующие:

- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -xye^{-xy}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy}(1-xy)$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x^2e^{-xy}$;
- ☐ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{-xy}(x+1)$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{-xy}$.

7. Для функции $z = x\sin\dfrac{x}{y}$, где $x = 1 + 3t$ и $y = \sqrt{1+t^2}$, верно, что:

- [ ] $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\left(\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{3t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- [ ] $\dfrac{dz}{dt} = 3\left(\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- [ ] $\dfrac{dz}{dt} = 3\left(\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;
- [ ] $\dfrac{dz}{dt} = 3\left(\sin\dfrac{x}{y} + x\cos\dfrac{1}{y}\right) - x\cos\dfrac{x}{y^2}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

8. Для функции $z = y^x$:

- [ ] $dz = y^x \ln y\,(dx + dy)$;
- [ ] $dz = xy^{x-1}\,(dx + dy)$;
- [ ] $dz = y^x \ln y\, dx\, dy$;
- [ ] $dz = xy^{x-1}\, dx\, dy$;
- [ ] $dz = y^x\left(\ln y\, dx + \dfrac{x}{y}\, dy\right)$;
- [ ] $dz = y^x\left(\dfrac{x}{y}\, dx + \ln y\, dy\right)$;

9. Пусть $u = x^2 - 2xz + y^2$, и единичный вектор $\mathbf{l}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{MN}$, где $M(1, 2, -1)$, $N(2, 4, -3)$. Найти производную функции u по направлению $\mathbf{l}$ в точке M.

Решение. Находим векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\mathbf{l}$:

$$\overrightarrow{MN} = (\square\ *, \square\ *, \square\ *),$$

$$\mathbf{l} = (\square\ *, \square\ *, \square\ *).$$

Вычисляем частные производные функции u в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \square\ *, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M) = \square\ *, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M) = \square\ *.$$

Выписываем искомую производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = \square\ *.$$

10. Для функции $u = xyz$ в точке $M(3, -1, 2)$

$$\operatorname{grad} u = \left(\square *, \square *, \square *\right), \quad |\operatorname{grad} u| = \square *.$$

11. Для функции $z = xe^y$:

- [ ] $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xe^{2y}$;
- [ ] $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^y$;
- [ ] $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^y y''(x)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xe^y \left(y'(x)\right)^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xe^y y''(x)$.

12. Найти экстремумы функции $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Решение. Имеем две стационарные точки:

$$M_1(0, 0), \quad M_2\left(\square *, \square *\right).$$

Вычисляем вторые производные функции z в точке M_1:

$$A = z''_{xx}(M_1) = \square *, \quad B = z''_{xy}(M_1) = \square *,$$
$$C = z''_{yy}(M_1) = \square *.$$

Для точки M_1 находим, что

$$\Delta = AC - B^2 = \square *.$$

Вычисляем вторые производные функции z в точке M_2:

$$A = z''_{xx}(M_2) = \square *, \quad B = z''_{xy}(M_2) = \square *,$$
$$C = z''_{yy}(M_2) = \square *.$$

Для точки M_2 находим, что

$$\Delta = AC - B^2 = \square\ * .$$

Итак, функция z имеет экстремум в точке номер (введите 1 для M_1 или 2 для M_2) $\square$ *. Тип экстремума:

$\square$ минимум, причем $z_{\min} = \square$ *;

$\square$ максимум, причем $z_{\max} = \square$ *.

Clear

Глава 6

Дифференциальные уравнения

6.1. Элементарные дифференциальные уравнения

6.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Глава 7

Ряды

7.1. Числовые ряды

7.2. Функциональные и степенные ряды

Глава 8

Линейная алгебра

8.1. Матрицы, определители, обратная матрица, системы уравнений

8.2. Векторная алгебра