A.Ya. NARMANOV

DIFFERENSIAL GEOMETRIYA

O'zbekiston Respublikasi Oliy o'quv yurtlariaro muvofiqlashtiruvchi kengash tomonidan tegishli oliy o'quv yurtlari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

Qayta ishlangan ikkinchi nashri

Toshkent

2010

Bu darslik universitetlarning matematika, mexanika, tadbiqiy matematika va informatika yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, amaldagi yangi bakalavrlar dasturi asosida yozilgan. Darslik to'rtta qismdan iborat bo'lib, unda umumiy topologiya elementlari, chiziqlar va sirtlar nazariyasi, tenzor analiz elementlari yoritilgan. Darslikdan magistr, aspirantlar va oliy o'quv yurtlari o'qituvchilari ham foydalanishlari nazarda tutilgan.

Taqrizchilar:

fizika-matematika fanlari doktori, professor N.N. Ғanixo'jaev,

pedagogika fanlari doktori, professor T. To'laganov,

fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent O'. Ilhomov

Ikkinchi nashrga so'z boshi

S O' Z B O SH I

Bu darslik bakalavrlar uchun tasdiqlangan o'quv rejasi asosida yozilgan bo'lib, matematika, amaliy matematika va mexanika yo'nalishlari uchun mo'ljallangan. Albatta, darslikni yozishda undan magistrlar va aspirantlar foydalanishi ham nazarda tutilgan. Darslik to'rtta bobdan iborat bo'lib, birinchi bob umumiy topologiya elementlariga bag'ishlangan. Ikkinchi, uchinchi boblarda chiziqlar va sirtlar nazariyasi o'rganiladi. Mexanika yo'nalishi rejasida tenzor hisobni o'rganish nazarda tutilganligini hisobga olib to'rtinchi bobda tenzor analiz elementlari yoritilgan. Differensial geometriya kursi bo'yicha o'zbek tilidagi birinchi darslikni M.A. Sobirov va A.Yo. Yusupov birgalikda yozishgan va 1956 yili chop ettirishgan edi. Bu birinchi darslik hajmi jihatdan juda katta bo'lib, chiziqlar va sirtlar nazariyasi bo'yicha juda ko'p ma'lumotlarni o'z ichiga olgan. Undan hozir ham talabalar foydalanib kelishmoqda. Lekin keyingi vaqtda o'quv rejasining o'zgarishi, differensial geometriya fanining tez rivojlanishi hamda mustaqil respublikamizda ta'lim sohasidagi qator qonunlarning qabul qilinishi ko'pgina fanlardan, shu jumladan, differensial geometriyadan ham yangi darslik yozilishini taqozo qilmoqda.

Bu darslik muallifning O'zbekiston Milliy Universiteti mexanika-matematika fakul'tetida o'qigan ma'ruzalari asosida yozildi. Albatta darslikda muallifning differensial geometriya kursini o'qitishga bo'lgan o'z nuqtai nazari ifoda etilgan. Darslik qo'lyozmasini o'qib, o'z fikr-mulohazalarini bildirgan professorlar, T.To'laganov, N.G'anixo'jaevlar va dotsent O'.Ilxomovga o'z minnatdorchiligimni bildiraman.

K i r i sh

Differensial geometriya kursida uch o'lchamli fazodagi chiziqlar va sirtlar matematik analiz yordamida o'rganiladi. Ma'lumki, analitik geometriya kursida chiziqlar va sirtlarni o'rganish ularning tenglamalarini tekshirish yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun algebraik metodlar analitik geometriya kursida asosiy rol' o'ynaydi. Differensial geometriya kursida biz chiziq va sirtlarni tenglamalar yordamida emas, balki fazodagi ma'lum xossalarga ega bo'lgan figuralar sifatida aniqlaymiz va ularni matematik analiz yordamida o'rganish uchun differensialanuvchi funksiyalar yordamida parametrlaymiz. Geometriyada matematik analiz metodlarini tadbiq qilishga Peterburg fanlar akademiyasi a'zosi L.Eyler katta hissa qo'shdi. U chiziqni parametrlash, sirt nuqtasida bosh yo'nalishlar kabi muhim tushunchalarni kiritdi va juda ajoyib teoremalarni isbot qildi. Differentsial geometriyaning asosiy masalalari sistematik ravishda yoritilgan birinchi asarni Gaspar Monj yozdi. Uning «Cheksiz kichiklar analizining geometriyaga tadbiqi» nomli kitobi 1795 yili chop etildi. G. Monjning shogirdlari D'yupen, Men'e ham sirtlar nazariyasiga katta hissa qushdilar.

Geometriya fani XIX asrda juda tez rivojlandi. 1826 yili buyuk matematik N.I. Lobachevskiy Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud ekanligini ko'rsatdi. Bu geometriyada geodezik uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180^o dan kichikdir. 1827 yili Gauss sirtning to'liq egriligi uning ichki geometriyasiga tegishli ekanligini isbotladi. 1854 yili B.Riman Lobachevskiy geometriyasini ham o'z ichiga oluvchi yangi geometriyani asoslab berdi. Bu geometriya Riman geometriyasi deb ataladi. Riman geometriyasida geodezik uchburchaklar ichki burchaklar yig'indisi 180^o dan katta ham, kichik ham bo'lishi mumkin.

XX asrda differensial geometriyaning rivojlanishida chiziqlar va sirtlar o'rniga har xil differensial strukturalar kiritilgan silliq ko'pxilliklarni o'rganish tendensiyasi paydo bo'ldi va rivojlandi. Bu ob'ektlarni (silliq

ko'pxilliklarni) o'rganish qulayligi shundaki, ular chiziqlar va sirtlar kabi Evklid fazosining qism to'plamlari sifatida emas, balki differensial struktura kiritilgan abstrakt topologik fazolar sifatida aniqlanadi. Ko'pxilliklar nazariyasida chiziqlar va sirtlar mos ravishda bir o'lchamli va ikki o'lchamli ko'pxilliklarni tashkil etadi. Hozirgi I vaqtda ko'pxilliklar nazariyasi geometriya kursining asosiy qismlardan biri bo'lib qoldi.

I BOB

U M U M I Y T O P O L O G I YA E L E M E N T L A R I

Bu bob differensial geometriya kursini o'rganishda zarur bo'ladigan umumiy topologiyaning asosiy tushunchalariga bag'ishlangan.

§ 1. Evklid fazosidagi topologiya

Haqiqiy sonlar to'plamini R^1 **bilan belgilaymiz va** $n \geq 1$ **uchun elementlari** n **ta tartiblangan haqiqiy sonlar ketma-ketligidan iborat**

$$R^n = \left\{ \left(x^1, x^2, \ldots, x^n \right) : x^i \in R^1, i = 1,2,\ldots,n \right\}$$

to'plamda $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n \right)$ **va** $y = \left(y^1, y^2, \ldots, y^n \right)$ **nuqtalar orasidagi masofani**

$$d(x,y) = \sqrt{\left(y^1 - x^1 \right)^2 + \left(y^2 - x^2 \right)^2 + \ldots + \left(y^n - x^n \right)^2}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu kiritilgan $d : R^n \times R^n \to R^1$ **funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.**

1) **musbat aniqlangan: ixtiyoriy** $x, y \in R^n$ **juftlik uchun** $d(x,y) \geq 0$ **bo'lib,** $d(x,y) = 0$ **bo'lishi uchun** $x = y$ **munosabatning bajarilishi zarur va etarlidir.**
2) **simmetrik funksiyadir: ixtiyoriy** x, y **juftlik uchun** $d(x,y) = d(y,x)$ **munosabatlar o'rinli.**
3) **uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi: ixtiyoriy** x, y, z **uchta nuqta uchun** $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ **tengsizlik bajariladi.**

Yuqorida $d(x,y)$ funksiyaning 1, 2-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Bu shartlarning uchinchisi sizga matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

itengsizligdan kelib chiqadi. Quyida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb ataluvchi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \qquad (*)$$

tengsizlikni isbotlab, undan yuqoridagi $(*)$ tengsizligni keltirib chiqaramiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi vektor ko'rinishda $(\vec{a},\vec{b})^2 \le \vec{a}^2\vec{b}^2$ yozish mumkin. Bu tengsizlikda $(\vec{a},\vec{b})$ - $\vec{a}=\{a_1,a_2,...,a_k\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,...,b_k\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi bo'lib, $\vec{a}^2=(\vec{a},\vec{a})$, $\vec{b}^2=(\vec{b},\vec{b})$ belgilashlar qabul qilingan. Skalyar ko'paytmadan iborat bo'lgan va haqiqiy sonlar to'lamida aniqlangan $f(t)=(\vec{a}+t\vec{b})^2$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning aniqlanishiga ko'ra $f(t)\ge 0$ munosabat o'rinlidir. Bu tengsizlikni $f(t)=\vec{a}^2+2t(\vec{a},\vec{b})+t^2\vec{b}^2\ge 0$ ko'rinishda yozsak, u kvadrat tengsizlikka aylanadi. Uning diskriminanti uchun

$$(\vec{a},\vec{b})^2-\vec{a}^2\vec{b}^2\le 0$$

tengsizlikni yoza olamiz. Endi Koshi-Bunyokovskiy tengsizligidan foydalanib,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+$$
$$+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz.Bu tengsizlikdan yuqoridagi $(*)$tengsizligi kelib chiqadi.

Endi $(*)$ tengsizligdan foydalanib, d funksiya uchun uchburchak tengsizligini isbotlaylik.Buning uchun $x=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$, $y=(y^1,y^2,\ldots,y^n)$, $z=(z^1,z^2,\ldots,z^n)$ nuqtalar uchun $a^k=x^k-z^k, b^k=z^k-y^k$ belgilashlar kiritsak, $(*)$ tengsizligdan $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ tengsizlik kelib chiqadi. Kiritilgan d funksiya bilan birgalikda R^n metrik fazo bo'ladi.

Evklid fazoda berilgan x nuqta va $r>0$ soni uchun

$$B_r(x)=\{y\in R^n : d(x,y)<r\}$$

to'plam markazi x nuqtada va radiusi r ga teng ochiq shar deb,

$$\overline{B_r}(x)=\{y\in R^n : d(x,y)\le r\}$$

to'plam esa markazi x nuqtada bo'lgan va radiusi r ga teng yopiq shar deb ataladi.

Sonlar o'qida, ya'ni R^1 da $B_r(x)$ ochiq shar $(x-r,\, x+r)$ ochiq interval, yopiq $B_r(x)$ shar esa $[x-r,\, x+r]$ yopiq kesma bo'ladi.

Endi ochiq shar yordamida R^n fazoda ochiq to'plam tushunchasini kiritamiz. Berilgan A to'plam va unga tegishli a nuqta uchun $r>0$ soni mavjud bo'lib $B_r(a)\subset A$ bo'lsa, a nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam ochiq to'plam deb ataladi. Demak, har qanday ochiq shar ochiq to'plam bo'ladi, chunki $x\in B_r(a)$ bo'lsa, $r_x=\min\{d(a,x), r-d(a,x)\}>0$ soni uchun $B_{r_x}\subset B_r(a)$ bo'ladi. Haqiqatan $y\in B_{r_x}(x)$ bo'lsa, $d(a,y)\le d(a,x)+d(y,x)\le d(a,x)+r_x\le d(a,x)+r-d(a,x)=r$ ya'ni $d(a,y)<r,$ demak $B_{r_x}(x)\subset B_r(a)$ bo'ladi. Endi biz bo'sh to'plamni $\varnothing$ bilan belgilab, uni ixtiyoriy to'plam uchun qism to'plam hisoblaymiz, va uni R^n fazoning ochiq qism to'plami deb qabul qilamiz. Ana shunda ochiq qism to'plamlar uchun quyidagi teoremani isbotlay olamiz.

Teorema1. Ochiq qism to'plamlar uchun quyidagilar o'rinlidir.

1. ***Butun fazo, ya'ni R^n ochiq to'plamdir.***
2. ***Bo'sh to'plam ochiq to'plamdir.***
3. ***Chekli sondagi ochiq qism to'plamlarning kesishmasi (umumiy qismi) ochiq to'plamdir.***

4. Har qanday ochiq to'plamlar oilasi uchun bu oiladagi ochiq to'plamlar yig'indisi ochiq to'plamdir.

<u>Isbot.</u> Teoremaning ikkinchi tasdig'i isbot talab qilmaydi, chunki bo'sh to'plamni ochiq to'plam deb e'lon qilganmiz. Agar $a \in R^n$ bo'lsa, ixtiyoriy $r > 0$ soni uchun $B_r(a) \subset R^n$ munosabat har doim o'rinli, shuning uchun ham R^n fazo ochiq to'plamdir.

Endi $A_1, A_2, ..., A_m$ ochiq to'plamlar berilgan bo'lsa, $A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i$ to'plamning ochiq ekanligini ko'rsataylik. Agar $A = \varnothing$ bo'lsa, ikkinchi punktga ko'ra A ochiq to'plam bo'ladi. Shuning uchun $A \neq \varnothing$ deb faraz qilib, A ga tegishli ixtiyoriy a nuqtaning ichki nuqta ekanligini ko'rsataylik. Agar $a \in A$ bo'lsa, unda $a \in A_i$ munosabat barcha i lar uchun bajariladi. Xar bir A_i ochiq to'plam bo'lganligi uchun shunday $r_i > 0$ soni mavjudki, $B_{r_i}(a) \subset A_i$ munosabat bajariladi. Bu chekli sondagi r_i sonlarining eng kichigini r bilan belgilasak, $B_r(a) \subset B_{r_i}(a) \subset A_i$ munosabat bajariladi. Demak $B_r(a) \subset A,$ va a nuqta A to'plamning ichki nuqtasidir. Endi teoremaning 4-punktini isbotlaylik. Ochiq to'plamlardan iborat $\{A_\alpha\}$ oila berilgan bo'lsin. $A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$ yig'indining ochiq to'plam ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun A to'plamga tegishli ixtiyoriy a nuqta olib, uning ichki nuqta ekanligini ko'rsatamiz. Yig'indiga tegishli a nuqta yig'indida qatnashayotgan A_α to'plamlarning kamida birortasiga tegishli bo'ladi. Faraz qilaylik $a \in A_{\alpha_0}$ bo'lsin. A_{α_0} to'plam ochiq bo'lganligi uchun birorta $r > 0$ mavjud bo'lib, $B_r(a) \subset A_{\alpha_0}$ munosabat bajariladi. Demak $B_r(a) \subset A$ va A to'plam uchun a ichki nuqta bo'ladi. Bundan esa, A ning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi.

Endi ochiq to'plam tushunchasidan foydalanib, yopiq to'plam tushunchasini kiritamiz. Berilgan F to'plamning to'ldiruvchisi

$CF = R^n \setminus F$ **ochiq to'plam bo'lsa,** F **yopiq to'plam deb ataladi. Birinchi teoremadan foydalanib, yopiq to'plamlar uchun quyidagi teoremani isbotlash mumkin.**

Teorema-2. Yopiq qism to'plamlar uchun quyidagilar o'rinlidir.

1. ***Butun fazo, ya'ni*** R^n ***yopiq to'plamdir.***
2. ***Bo'sh to'plam yopiq to'plamdir.***
3. ***Har qanday yopiq qism to'plamlar oilasi uchun shu oiladagi to'plamlar kesishmasi yopiq to'plamdir.***
4. ***Chekli sondagi yopiq to'plamlarning yig'indisi yopiq to'plamdir***

Biz R^n **fazoning** $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ **elementlari uchun**

$$x + y = (x^1 + y^1, x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n), \; \lambda x = (\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n)$$

qoidalar bilan yangi $x + y,\ \lambda x$ **elementlarni aniqlashimiz mumkin. Bu erda** λ **haqiqiy son. Bu kiritilgan amallarga nisbatan** R^n **chiziqli fazo bo'ladi. Bu holda** R^n **fazoni chiziqli fazo sifatida qarasak, uning elementini vektor deb ataymiz. Chiziqli fazo uchun belgilashni o'zgartirmaymiz, chunki har gal tekst mazmunidan** R^n **fazoning metrik fazo yoki chiziqli fazo ekanligi ko'rinib turadi. Metrik** R^n **fazo nuqtalarining har bir** x, y **juftiga boshi** x **nuqtada, oxiri esa** y **nuqtada bo'lgan** $\overline{xy}$ **vektorni mos qo'ysak, bu vektor chiziqli** R^n **fazoning elementi bo'ladi. Chiziqli** R^n **fazoda skalyar ko'paytma kiritilgandan keyin metrik** R^n **fazoni Evklid fazosi deb ataymiz. Demak,** R^n **fazoni Evklid fazosi deganimizda, unda** d **funksiya yordamida metrika kiritilib, unga tegishli nuqtalarning har bir juftiga mos qo'yilgan vektorlar fazosida skalyar qo'paytma kiritilgandir.**

Evklid fazosida

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x^j + a_i, i = 1,2,\dots,n,$$

ko'rinishdagi almashtirishda $\{a_{ij}\}$ **matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u affin almashtirish deb ataladi. Bu erda**

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}),$$

belgilashlarni hisobga olib affin almashtirishni $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{a}$ **ko'rinishda yozishimiz mumkin. Agar** A **matritsa ortogonal matritsa bo'lsa,** F **akslantirish harakat (ortogonal akslantirish) deb ataladi. Ma'lumki,** A **ortogonal matritsa bo'lsa,** $\bar{x}, \bar{y}$ **vektorlar uchun**

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

tenglik o'rinlidir, ya'ni harakatda skalyar ko'paytma saqlanadi. Haqiqatan, A **ortogonal matritsa bo'lsa**

$$A^T A = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bu erda A^T **transponirlangan matritsa,** E **esa birlik matritsadir. Shuning uchun**

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, A^T A\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak ortogonal akslantirishda skalyr ko'paytma saqlanishini ko'rsatish uchun $(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, A^T A\bar{y})$ **tenglikni isbotlash yetarlidir. Buning uchun** R^n **fazoda birorta ortonormal** $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ **bazisni tanlab,** $\bar{x}$ **va** $A\bar{y}$ **vektorlarni bazis elementlari orqali ifodalaymiz:**

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \cdots + x_n\bar{e}_n, \quad \bar{z} = A\bar{y} = z_1\bar{e}_1 + z_2\bar{e}_2 + \cdots + z_n\bar{e}_n.$$

Endi $(A\bar{x}, A\bar{y})$ **skalyar ko'paytmani**

$$\begin{aligned}(A\bar{x}, A\bar{y}) &= x_1 z_1 a_{11} + x_1 z_2 a_{21} + \cdots + x_1 z_n a_{n1} + \\ &+ x_2 z_1 a_{12} + x_2 z_2 a_{22} + \cdots + x_2 z_n a_{n2} + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &+ x_n z_1 a_{1n} + x_n z_2 a_{2n} + \cdots x_n z_n a_{nn}\end{aligned}$$

ko'rinishda yozib,undagi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ o'zgaruvchilarni guruhpalasak

$$\begin{aligned}(A\bar{x}, A\bar{y}) = x_1(z_1a_{11} + z_2a_{21} + \cdots + z_na_{n1}) + \\ + x_2(z_1a_{12} + z_2a_{22} + \cdots + z_na_{n2}) + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ + x_n(z_1a_{1n} + z_2a_{2n} + \cdots + z_na_{nn})\end{aligned}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu ifodadan

$$(A\bar{x}, A\bar{y}) = (\bar{x}, A^T\bar{z})$$

tenglik kelib chiaqdi.Demak bizga analitik geometriya kursidan ma'lumki harakat ikki nuqta orasidagi masofani saqlaydi. Agar $\det A > 0$ **bo'lsa, ma'lumki** F **harakat fazoda orientatsiyani ham saqlaydi.Haqiqatan bizga ortogonal** A **matritsa va birorta** $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ **bazis berilgan bo'lsa,** $\det A > 0$ **bo'lganligi uchun** $\{A\bar{e}_1, A\bar{e}_2, \cdots, A\bar{e}_n\}$ **bazis berilgan** $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n\}$ **bazis bilan bir xil orientatsiyani aniqlaydi.**

§ 2.Topologik fazolar

Birorta X to'plam va uning ba'zi qism to'plamlaridan iborat $\tau=\{G_\alpha\}$ oila berilgan bo'lsin. Bu oila chekli sondagi elementlardan iborat bo'lishi yoki uning elementlari cheksiz ko'p bo'lishi mumkin. Berilgan τ oilaga X to'plamning hamma qism to'plamlari tegishli bo'lishi ham mumkin. Shuning uchun biz indeks o'zgaruvchisi α ning qanday to'plamga tegishli ekanligini ko'rsata olmaymiz. Biz X to'plamning ba'zi qism to'plamlaridan iborat τ oiladan quyidagi shartlarining bajarilishini talab qilamiz:

1) X to'plam τ ga tegishli bo'lsin (ma'lumki, hap qanday to'plam o'zining qism to'plami bo'ladi. Shuning uchun u τ oilaga tegishli bo'lishi ham mumkin, bo'lmasligi ham mumkin);

2) Bo'sh to'plam τ oilaga tegishli bo'lsin (bo'sh to'plam har qanday to'plamga qism to'plamdir, shuning uchun u X to'plamning qism to'plami sifatida τ oilaga tegishli bo'lishi mumkin yoki bo'lmasligi mumkin);

3) τ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) τ oilaga tegishlidir.

4) τ oilaga tegishli qism to'plamlardan iborat ixtiyoriy $\{G_{\alpha_\beta}\}$ oila uchun yig'indi $\bigcup_\beta G_{\alpha_\beta}$ ham τ ga tegishli bo'lsin. Bu erda $\{G_{\alpha_\beta}\}$ oila chekli sondagi elementlardan iborat yoki cheksiz ko'p elementlardan iborat bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu erda ham biz indeksdagi o'zgaruvchi β tegishli to'plamni ko'rsata olmaymiz. Shu jumladan, $\{G_{\alpha_\beta}\}$ oila τ oila bilan ustma-ust tushishi ham mumkin. Yuqoridagi talab qilingan 4 ta shartlar bajarilgan taqdirda (X,τ) juftlik topologik fazo deb ataladi, τ oila esa X to'plamdagi topologiya deb ataladi. Demak, birorta to'plamni topologik fazoga aylantirish uchun uning yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi qism to'plamlaridan iborat birorta oilani ko'rsatish etarlidir. Agar (X,τ) topologik fazo bo'lsa, X to'plamning elementlari nuqtalar deb, τ oilaga tegishli X to'plamning qism to'plamlari ochiq to'plamlar deb ataladi. Yuqoridagi keltirilgan 1) - 4) shartlarni topologik fazo aksiomalari deb ataymiz.Shunday qilib, biz hozir umumiy topologiyaning asosiy

tushunchasi - topologik fazo tushunchasini kiritdik. Endi bir nechta misollar keltiraylik.

1 - misol. Agar $X = R^n$ bo'lsa, τ bilan birinchi paragrafda kiritilgan R^n fazodagi ochiq to'plamlar oilasini belgilaymiz. Birinchi teoremaga ko'ra, τ topologiya bo'ladi. Bu topologiya evklid topologiyasi deb ataladi.

2 - misol. X - ixtiyoriy to'plam, τ oila bo'sh to'plam va X dan iborat bo'lsa, (X,τ) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu topologik fazoda faqat ikkita ochiq qism to'plam mavjud.

3 - misol. X - ixtiyoriy to'plam, τ oila X to'plamning hamma qism to'plamlaridan iborat oila bo'lsin. Bu topologik fazoda ixtiyoriy qism to'plam ochiq to'plamdir.

Bizga (X,τ) - topologik fazoda $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lib, uning to'ldiruvchisi $X \setminus A$ ochiq to'plam bo'lsa, A to'plam yopiq to'plam deb ataladi. Topologik fazo aksiomalaridan foydalanib yopiq to'plamlar uchun quyidagi xulosalarni isbotlash mumkin:

1) X yopiq to'plamdir;

2) bo'sh to'plam yopiq to'plamdir;

3) chekli sondagi yopiq to'plamlarning yig'indisi yopiq to'plamdir;

4) ixtiyoriy yopiq to'plamlar oilasi uchun bu to'plamlar kesishmasi (umumiy qismi) yopiq to'plamdir;

Bu xossalarni isbotlash o'quvchilarga havola qilinadi.

Bizga (X,τ) - topologik fazoda $x \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar U ochiq to'plam bo'lib, $x \in U$ bo'lsa, U to'plam $x$nuqtaning atrofi deyiladi. Shunday qilib, x nuqta tegishli bo'lgan ixtiyoriy ochiq to'plam shu nuqtaning atrofi deyilar ekan. Bizga $A \subset X$ qism to'plam va $x \in X$ nuqta berilgan bo'lib, x nuqtaning birorta atrofi U uchun $U \subset A$ munosabat bajarilsa, x nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. A to'plamning ichki nuqtalari to'plamini $\operatorname{int} A$ bilan belgilaymiz. Agar x nuqtaning ixtiyoriy atrofi U uchun $A \cap U \neq \varnothing$ ва $(X \setminus A) \cap U \neq \varnothing$ munosabatlar bajarilsa x nuqta A to'plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi. Chegaraviy nuqtalar to'plamini ∂A ko'rinishda belgilaymiz.

4 – Misol. $X = R^1$, $A = (a,b)$ **bo'lsin. Bu yerda** a,b**- haqiqiy sonlar va** $a < b$**. Bu misolimizda** $\operatorname{int} A = (a,b)$, $\partial A = \{a,b\}$**.**

5 - Misol. $X = R^1$**,** A **- hamma ratsional sonlar to'plami bo'lsin. Бu misolimizda** $\partial A = X$ **, chunki ixtiyoriy haqiqiy son uchun unga yaqinlashuvchi ratsional sonlar ketma-ketligi mavjud.**

Bizga $A \subset X$ **qism to'plam va** $x \in X$ **nuqta berilgan bo'lsin. Agar** x **nuqtaning ixtiyoriy atrofida** A **to'plamga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa,** x **nuqta** A **to'plamning urinиш nuqtasi deyiladi. Berilgan** A **to'plamning hamma urinish nuqtalari to'plami** $\overline{A}$ **bilan belgilanadi va** A **ning yopig'i deb ataladi.**

Berilgan $A \subset X$ **to'plam va** $\operatorname{int} A,\ \partial A$ **va** $\overline{A}$ **to'plamlar uchun quyidagi teoremalar o'rinlidir.**

Teorema-3. ***Har qanday*** A ***to'plam uchun*** $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ ***munosabat o'rinlidir.***

Teorema-4. A ***to'plam ochiq to'plam bo'lishi uchun*** $\operatorname{int} A = A$ ***munosabatning bajarilishi zarur va etarlidir.***

Teorema-5. ***Har qanday*** A ***to'plam uchun*** $\overline{A}$ ***yopiq to'plamdir.***

Uchinchi teoremaning isboti. Sizlarga ma'lumki $A = B$ **munosabat** $A \subset B,\ B \subset A$ **munosabatlarga teng kuchlidir. Дemak** $\overline{A} \subset \operatorname{int} A \cup A$ **va** $\overline{A} \supset \operatorname{int} A \cup A$ **munosabatlarni isbotlashimiz kerak.**

Agar $x \in \overline{A}$ **bo'lsa,** x **nuqtaning ixtiyoriy atrofida** A **to'plamga tegishli nuqtalar mavjud. Agar** x **nuqtaning ixtiyoriy atrofida** $X \setminus A$ **to'plamga tegishli nuqtalar ham bo'lsa, unda** $x \in \partial A$ **munosabat o'rinli , ya'ni** x **chegaraviy nuqta bo'ladi. Agar** x **nuqtaning birorta** U **atrofida** $X \setminus A$ **to'plamga tegishli nuqtalar bo'lmasa, unda** $x \in U \subset A$ **munosabat o'rinli ,ya'ni** x **ichki nuqta bo'ladi, demak** $x \in \operatorname{int} A$ **. Bu mulohazalarimizdan,** $\overline{A} \subset \operatorname{int} A \cup \partial A$ **ekanligi kelib chiqadi. Endi** $x \in \operatorname{int} A \cup \partial A$ **bo'lsin. Demak,** $x \in \operatorname{int} A$ **yoki** $x \in \partial A$ **munosabat bajariladi. Ikkala holda ham** x **nuqtaning ixtiyoriy atrofida** A **to'plamga tegishli nuqtalar mavjud va demak** $x \in \overline{A}$**.**

To'rtinchi teoremaning isboti o'quvchilarimizra havola etiladi.

Beshinchi teoremaning isboti. Biz $\overline{A}$ **to'plamning yopiq to'plam ekanligini isbotlash uchun** $X\setminus\overline{A}$ **to'plamning ochiq to'plam ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun** $X\setminus\overline{A}$ **ga tegishli ixtiyoriy** x **nuqtani qaraylik. Demak,** x **nuqta** $\overline{A}$ **ga tegishli emas va shuning uchun uning shunday** U **atrofi mavjudki, bu atrofda** A **ga tegishli nuqtalar yo'q, ya'ni** $U\cap A=\varnothing$**. Shuning uchun** $x\in U\subset X\setminus\overline{A}$**, ya'ni** x **nuqta** $X\setminus\overline{A}$ **to'plamning ichki nuqtasidir. To'rtinchi teoremaga ko'ra** $X\setminus\overline{A}$ **ochiq to'plamdir.**

Teorema-6. Ixtiyoriy yopiq A ***to'plam uchun*** $\overline{A}=A$ ***munosabat o'rinlidir.***

Isbot. Har doim $A\subset\overline{A}$ **bo'lganligi uchun yopiq** A **to'plam uchun** $A\supset\overline{A}$ **munosabatni isbotlash etarli. Buning uchun** $\overline{A}$ **ga tegishli ixtiyoriy** x **nuqtani qaraylik. Agar** $x\in X\setminus A$ **bo'lsa,** $X\setminus A$ **ochiq то'плам bo'lganligi ва** x **urinish nuqtasi ekanligidan** $(X\setminus A)\cap A\neq\varnothing$ **munosabat kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik** $x\in A$ **ekanligini ko'rsatadi.**

Endi (X,τ) **topologik fazo va birorta** $A\subset X$ **qism to'plam berilgan bo'lsin. Berilgan** A **to'plamni ham** τ **topologiya yordamida topologik fazoga aylantirish mumkin. Buning uchun** A **to'plamda** $\tau_A=\{A\cap G_\alpha : G_\alpha\in\tau\}$ **oila topologiya ekanligini ko'rsatamiz:**

1) $X\in\tau$ **bo'lganligi va** $X\cap A=A$ **tenglikdan** $A\in\tau_A$ **kelib chiqadi.**

2) $\varnothing\in\tau$ **bo'lganligi va** $\varnothing\cap A=\varnothing$ **tenglikdan** $\varnothing\in\tau_A$ **kelib chiqadi.**

3) $A_1, A_2\in\tau_A$ **bo'lsa,** $G_1, G_2\in\tau_A$ **to'plamlar mavjud bo'lib,** $A_1\cap A_2=(A\cap G_1)\bigcap(A\cap G_2)=A\bigcap(G_1\bigcap G_2)$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda** $G_1\bigcap G_2\in\tau$ **bo'lganligi uchun** $A_1\bigcap A_2\in\tau_A$ **bo'ladi.**

4) τ_A **oilaga tegishli** $\{A_\beta\}$ **to'plamlar oilasi berilgan bo'lsa,** τ **ga tegishli** G_β **to'plamlar mavjud bo'lib,** $\bigcup_\beta A_\beta=\bigcup_\beta(A\bigcap G_\beta)=A\bigcap\left(\bigcup_\beta G_\beta\right)$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda** $\bigcup_\beta G_\beta\in\tau$ **bo'lganligi uchun** $\bigcup_\beta A_\beta$ **yig'indi** τ_A **oilaga tegishli bo'ladi.**

Demak (A, τ_A) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu holda τ_A topologiyani A to'plamda X topologik fazodagi τ topologiya yordamida aniqlangan yoki keltirilgan topologiya deb ataladi.

§ 3. Metrik fazolar

Metrik fazolar topologik fazolarning juda muhim sinfini tashkil etadi. Bu fazolarda ixtiyoriy ikki nuqta uchun ular orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi. Metrik fazolarning muhim turlari bilan siz birinchi kursda tanishgansiz.

Berilgan X **- ixtiyoriy to'plam uchun to'g'ri** $X \times X$ **ko'paytmada** $\rho : X \times X \to R^1$ **funksiya aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:**

1) $\rho(x, y) \geq 0, \quad \forall\, x, y \in X$

2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall\, x, y \in X$

3) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall\, x, y \in X$

4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad \forall\, x, y, z \in X$

Yuqoridagi shartlar metrik fazo aksiomalari deyiladi. Bu shartlar bajarilsa (X, ρ) **juftlik metrik fazo deyiladi.** (X, ρ) **- metrik fazo,** $x \in X,\ r > 0$ **bo'lsa markazi** x **nuqtada va radiusi** r **ga teng ochiq shar** $U_r(x)$ **quyidagicha aniqlanadi:**

$$U_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Ochiq shar yordamida metrik fazoda ochiq to'plam tushunchasini kiritish mumkin. Bizga $A \subset X$ **- qism to'plam,** $x \in A$ **nuqta berilgan bo'lib, birorta** $r > 0$ **son uchun** $U_r(x) \subset A$ **munosabat bajarilsa** x **nuqta** A **to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam ochiq to'plam deyiladi. Agar** τ **oila sifatida** (X, ρ) **metrik fazoning hamma ochiq qism to'plamlari va bo'sh to'plamdan iborat oilani olsak, natijada** (X, τ) **juftlik topologik fazoga aylanadi. Bu topologiya** (X, ρ) **fazoda** ρ **metrika yordamida kiritilgan topologiya deb ataladi. Endi** τ **oilaning topologik fazo aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiraylik.**

1) $x \in X$ **va** r **ixtiyoriy son bo'lsa,** $U_r(x) \subset X$ **bo'lganligi uchun X to'plam** τ **oilasiga tegishlidir;**

2) **Bo'sh to'plam** τ **oilaga uning aniqlanishiga ko'ra tegishlidir;**

3) **Ikkita to'plam** τ **oilaga tegishli bo'lsa,ularning kesishmasi ham bu oilaga tegishli ekanligini ko'rsataylik. Agar** $A_1,\ A_2 \in \tau$ **va** $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ **bo'lsa, ikkinchi**

shartga ko'ra $A_1 \cap A_2 \in \tau$ **munosabat o'rinlidir Faraz qilaylik,** $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ **va** $x \in A = A_1 \cap A_2$ **bo'lsin. Qaralayotgan** A_1 **ва** A_2 **to'plamlar ochiq bo'lganligi uchun shunday** r_1 **va** r_2 **musbat sonlar mavjudki,** $U_{r_1}(x) \subset A_1$, $U_{r_2}(x) \subset A_2$ **munosabatlar bajariladi. Agar** $0 < r < \min\{r_1, r_2\}$ **bo'lsa,** $U_r(x) \subset A = A_1 \cap A_2$ **munosabat bajariladi. Demak,** $A = A_1 \cap A_2$ **to'plam** τ **oilaga tegishlidir;**

4) Faraz qilaylik $\{A_\alpha\}$ **-** τ **oilaga tegishli to'plamlar oilasi bo'lsin.**

Biz $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$ **ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun** $x \in A = \bigcup A_\alpha$ **nuqtani qaraylik.** Qaralayotgan x **nuqta yig'indiga tegishli bo'lganligi uchun shunday indeks** α_0 **mavjudki,** $x \in A_{\alpha_0}$ **munosabat bajariladi. Bu** A_{α_0} **to'plam ochiq bo'lganligi uchun shunday** $r > 0$ **son mavjudki,** $U_r(x) \subset A_{\alpha_0} \subset A$ **munosabat bajariladi.Demak,** $A \in \tau$ **va** τ **oila topologik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi.**

Misollar

6 - Misol. $X = R^1, \quad \rho(x,y) = |x - y|$

7-Misol. $X = R^n, \quad \rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}$, $\qquad x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, $y = (y^1, y^2, ..., y^n)$.

8-Misol. $X = C[a,b]$ **bilan** $[a,b]$ **segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu to'plamda** $x(t),\ y(t)$ **funksiyalar uchun** $r(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |y(t) - x(t)|$ **formula bo'yicha metrikani aniqlaymiz. Bu holda** r **uchun metrik fazo aksiomalarini tekshirish yengil, shuning uchun bu ishni o'quvchilarga havola etamiz.**

Endi metrik fazo uchun ichki, chegaraviy va urinish nuqtalarini kiritaylik.

Faraz qilaylik $A \subset X$ **- qism to'plam,** $x \in X$ **nuqta berilgan bo'lib, ixtiyoriy** $r > 0$ **uchun** $U_r(x) \cap A \neq \varnothing,\ U_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$ **munosabatlar bajarilsa,** x **nuqta** A **to'plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi. Agar ixtiyoriy** $r > 0$ **uchun faqat** $U_r(x) \cap A \neq \varnothing$ **munosabat bajarilsa,** x **nuqta** A **to'plamning urinish**

nuqtasi deyiladi. Birorta $r>0$ soni uchun $U_r(x)\subset A$ munosabat bajarilsa, $x$nuqta A to'plam uchun ichki nuqta deyiladi.

Teorema-7.Haqiqiy sonlar to'plamining har qanday ochiq qism to'plami chekli yoki sanoqli sondagi ochiq intervallar yig'indisidan iboratdir.

Isbot. Faraz qilaylik $A\subset R^1$ ochiq to'plam bo'lsin. Ochiq to'plam ta'rifiga ko'ra $x\in A$ nuqta uchun $r>0$ soni mavjud bo'lib, $(x-r,x+r)\subset A$ munosabat bajariladi. Biz $x\in I\subset A$ munosabatni qanoatlantiruvchi intervallar yig'indisini I_x bilan belgilab, $a=\inf\{y:y\in I_x\}$, $b=\sup\{y:y\in I_x\}$ sonlarni kiritamiz. Bu erda $a=-\infty$ yoki $b=+\infty$ bo'lishi ham mumkin. Yuqoridagi a va b sonlari aniqlanishiga ko'ra $I_x\subset(a,b)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Agar $y\in(a,b)$ va $y\neq x$ bo'lsa, mumiylikni chegaralamas-dan $a<x<y$ deb faraz qilamiz. $a=\inf\{y:y\in I_x\}$ bo'lgani uchun $y'\in I_x$ mavjud bo'lib, $a<y'\leq y$ munosabat bajariladi. I_x intervalning aniqlanishiga ko'ra y' va x nuqtalarni o'z ichiga oluvchi interval mavjud bo'ladi va Bu interval $y$nuqtani ham o'z ichiga oladi. Demak, $y\in I_x$ ya'ni $I_x=(a,b)\subset A$. Agar $x,y\in A, x\neq y$ bo'lsa, I_x va I_y to'plamlar yoki kesishmaydi yoki ustma-ust tushadi. Bu I_x, $x\in A$, intervallarning har biridan bittadan ratsional son olib, ularni nomerlab chiqish mumki. Demak, bu intervallar oilasi va ratsional sonlar to'plamining birorta qism to'plami orasida bir qiymatli moslik mavjud. Shuning uchun ularning soni chekli yoki sanoqli bo'ladi.

Yopiq to'plam ochiq to'plamning to'ldiruvchisi bo'lgani uchun, bu teoremadan har qanday yopiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi ochiq intervallarni chiqarib tashlash $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$ natijasida hosil bo'lishi kelib chiqadi.

Metrik fazoda $x_n\in X$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, birorta $x_0\in X$ nuqta uchun $n\to\infty$ bo'lganda $\rho(x_n,x_0)\to 0$ bo'lsa, x_n ketma-ketlik x_0 limitga ega deyiladi, ya'ni x_n ketma-ketlik x_0 limitga ega do'lishi uchun.

$\forall \quad \varepsilon > 0$ **uchun** N **nomer mavjud bo'lib,** $n \geq N$ **bo'lganda** $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ **tengsizlik bajarilishi kerak.**

Agar $\forall \quad \varepsilon > 0$ **uchun** N **mavjud bo'lib,** $n, m \geq N$ **bo'lganda** $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ **munosabat bajarilsa,** x_n **ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deb ataladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'ladi. Lekin, fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.**

Ta'rif. Berilgan (X, ρ) ***metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, bu fazo to'liq metrik fazo deyiladi.***

Misollar.

1. Haqiqiy sonlar to'plami R^1 **evklid metrikasi bilan birgalikda to'liq metrik fazo ekanligi matematik analiz kursidan isbotlanadi.**

2. Biz yqorida ko'rib o'tgan R^n **evklid fazosining to'liqligi** R^1**ning to'liq fazo ekanligidan bevosita kelib chiqadi.Bizga** R^n **fazoda** $\{x^{(p)}\}$ **fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin.Demak berilgan** $\varepsilon > 0$ **son uchun** $N = N_\varepsilon$ **soni mavjud bo'lib,** $p, \; q$ **sonlari** N **dan katta bo'lganda** $\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)^2 < \varepsilon^2$ **tengsizlik bajariladi. Bu yerda** $x^{(p)} = \left(x_1^{(p)}, ..., x_n^{(p)}\right)$**. Har bir** $k = 1, ..., n$ **uchun** $x_k^{(p)}$**kootdinatalar** $p, q > N$ **bo'lganda** $\left|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right| < \varepsilon$ **tengsizlik bajariladi, ya'ni** $\{x_k^{(p)}\}$**ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Demak** $\{x_k^{(p)}\}$ **ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikdir. Agar** $x_k = \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)}$ **va** $x = (x_1, ..., x_n)$ **bo'lsa,** $\lim_{p \to \infty} x^p = x$ **munosabat o'rinli bo'ladi.**

3. Endi $[a, b]$ **segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami** $X = C[a, b]$ **to'liq metrik fazo ekanligini isbotlaylik. Bu to'plamda** $x(t), \;\; y(t)$ **funksiyalar uchun** $r(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |y(t) - x(t)|$ **formula bo'yicha metrika aniqlanadi. Agar** $C_{[a,b]}$ **fazoda** $\{x_n(t)\}$ **fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsa,har qanday** $\varepsilon > 0$ **soni uchun** $N = N_\varepsilon$ **soni mavjud bo'lib,** $n, m > N$ **bo'lganda**

$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$ **tengsizlik** $a\le t\le b$ **oraliqdagi hamma** t **lar uchun bajariladi.Bundan** $\{x_n(t)\}$ **ketma-ketlik birorta** $x(t)$ **funksiyaga tekis yaqinlashadi.Yuqoridagi tengsizlikda** $m\to\infty$ **da limitga o'tsak** $n>N$ **bo'lganda** $|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon$ **munosabat hamma** t **lar uchun bajarilishini ko'ramiz. Demak** $\{x_n(t)\}$ **ketma-ketlik uzluksiz** $x(t)$ **funksiyaga** $C_{[a,b]}$ **fazo metrikasida yaqinlashadi.**

4. Biz l_2 **bilan** $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ **shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar** $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ **ketma-ketliklaridan iborat to'plamni belgilaymiz. Bu fazoda** $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ **va** $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$ **elementlar orasidagi masofa** $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2}$ **formula bilan aniqlanadi.Berilgan** $x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ **va** $y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots\}$ **elementlar uchun** $\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2<\infty$ **va** $\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2<\infty$ **tengsizliklar o'rinli bo'ganligi uchun** $(x_k-y_k)^2\le 2(x_k^2+y_k^2)$ **munosabatdan** $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_k)^2$ **qatorning yaqinlashuvchanligi kelib chiqadi., Biz isbotlagan** $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}$ **tengsizlikda** $n\to\infty$ **da limitga o'tsak quyidagi** $\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-z_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(z_k-y_k)^2}$ **tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik** l_2 **fazodagi kiritilgan masofa uchburchak tengsizligini qanoatlantirishi kelib chiqadi.**

Endi biz l_2 **fazoning to'liq metrik fazo ekanligini isbotlaylik.Agar** $\{x^{(n)}\}$ **fundamental ketma-ketlik bo'lsa** $\forall\ \varepsilon>0$ **uchun shunday** N **soni topilib, ushbu** $\rho^2(x^{(n)},x^{(m)})=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right)^2<\varepsilon$ **tengsizlik barcha** $n,m>N$ **lar uchun bajariladi. Bu yerda** $x^{(n)}=\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)},...,x_k^{(n)},...\right)$ **bo'lib, ixtiyoriy** k **uchun** $\left(x_k^{(n)}-x_k^{(m)}\right)^2<\varepsilon$ **tengsizlik bajariladi. Bundan har bir** k **uchun** $\{x_k^{(n)}\}$ **haqiqiy sonlar ketma-ketligi fundamental ekanligi kelib chiqadi. Demak** $\{x_k^{(n)}\}$

yaqinlashuvchi , ketma-ketlidir.Agar $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ **bo'lsa,** $x = (x_{1,}\ x_2, ..., x_k, ...)$ **belgilash kiritib,**

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon, \quad x \in l_2\ ;\ b)\quad \lim_{n\to\infty} \rho\left(x^{(n)}, x\right) = 0$$

munosabatlarni ko'rsatamiz.

Yuoqoridagi $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon$ **tengsizlikdan chekli** M **soni uchun** $\sum_{k=1}^{M}\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon$ **tengsizlik kelib chiqadi.Bu tengsizlikda** $m \to \infty$ **limitga o'tsak** $\sum_{k=1}^{M}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \le \varepsilon$ **tengsizlik kelib chiqadi. Endi** $M \to \infty$ **da limitga o'tsak** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \le \varepsilon$ **munosabat kelib chiqadi. Demak** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2$ **qator yaqinlashadi. Berilgan** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)}\right)^2$ **qatorning yaqinlashishini hisobga olsak,** $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\ 2}$ **qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. Yuqoridagi keltirilgan** $\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2 \le \varepsilon$ **tengsizlikda** ε **soni ixtiyoriy kichik bo'ganligidan** $\lim_{n\to\infty} \rho\left(x^{(n)}, x\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k^{(n)} - x_k\right)^2} = 0$ **munosabat kelib chiqadi. Demak** l_2 **fazoda** $n \to \infty$ **da** $x^{(n)} \to x$ **bo'ladi.**

4.Endi $[-1,+1]$ **segmentda aniqlangan va uzluksiz funksiyalar to'plamida boshqa**

$$\rho(x, y) = \left(\int_{-1}^{1}\left(x(t) - y(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ko'rinishda metrika kiritib, uni $C^2{}_{[-1,+1]}$ **bilan belgilaymiz.Bu fazoning to'liq metrik fazo emasligini isbotlaylik. Buning uchun**

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1, \ agar \ \ -1\le t\le -\dfrac{1}{n}\\ nt, \ agar \ \ -\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{1}{n}\\ 1, \ agar \ \ \dfrac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$$

ko'rinishda uzluksiz funksiyalar ketma-ketligini olamiz. Bu funksiyalar uchun

$$\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt\le \frac{2}{\min(n,m)}$$

tengsizlik o'rinli bo'lib,uning fundamental ketma-ketlik ekanligini ko'rsatadi. Bu funksiyalar $C^2_{[-1,1]}$ fazodagi birorta funksiyaga ham yaqinlashmaydi. Buni ko'rsatish uchun, $C^2_{[-1,1]}$ fazoga tegishli f funksiya o'lsak, $t<0$ bo'lsa -1ga teng , $t\ge 0$ bo'lsa $+1$ga teng bo'lgan ψ funksiya uchuin

$$\int_{-1}^{1}\left((f(t)-\psi(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_{-1}^{1}\left(f(t)-\varphi_n(t)^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{-1}^{1}\left(\varphi_n(t)-\psi\ (t)\right)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.Bu tengsizlikning chap tomomidagi integral f funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun noldan farqli bo'ladi.Lekin $\varphi_n(t)$ funksiyalar aniqlanishiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\,dt=0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.Shuning uchun

$$\int_{-1}^{1}(f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt$$

ifoda $n\to\infty$ da nolga intila olmaydi.Biz bu misolda

$$\int_{-1}^{1}(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt\le \frac{2}{\min(n,m)}$$

tengsizlikdan foydalandik.Uni isbotlash uchun Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining
quyidagi integral ko’rinishidan

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int_b^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt$$

foydalanish mumkin.Bu tengsizlikni isbotlashni va uning yordamida

$$\rho(x,y) = (\int_{-1}^{1}(x(t)-y(t))^2\,dt)^{\frac{1}{2}}$$

Metrika uchburchak tengsizligini qanoatlantirishini tekshirish yo’quvchilarga havola etiladi.

Endi to'liq metrik fazolarni xarakterlovchi quyidagi muhim teoremani isbotlaylik.

Teorema-8 (ichma-ich joylashgan sharlar prinsipi).Metrik fazo to'liq metrik fazo bo'lishi uchun undagi har qanday ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi sharlar ketma-ketligi umumiy nuqtaga ega bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot.1)Bizga to'liq (X,ρ)**metrik fazo va unda radiuslari nolga intiluvchii, ichma-ich joylashgan** $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ **yopiq sharlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, ya'ni** $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$, $n \to \infty$ **da** $r_n \to 0$, B_n **sharning radiusi** r_n. **Biz bu sharlarning markazlaridan tuzilgan** $\{x_n\}$ **ketma-ketlikni qaraymiz va uning fundamental ketma-ketlik ekanligini ko'rsatamiz.Sharlarga qo'yilgan shartlarga muvofiq** $m > n$ **bo'lganda** $\rho(x_n, x_m) < r_n$ **tengsizlik o'rinli bo'ladi. Lekin** $n \to \infty$ **da** $r_n \to 0$ **bo'lganlidan** $\{x_n\}$ **ketma-ketlikning fundamental ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.** (X,ρ)**metrik fazo to'liq bo'lganligi uchun** $\{x_n\}$ **ketma-ketlik** x **limitga ega. Sharlar uchun** $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ **munosabatdan** x **nuqta har bir** B_n **shar uchun urinish nuqtasi bo'ladi va sharlarning yopiqligidan** $x \in \bigcap B_n$ **munosabat kelib chiqadi.**

2).Endi (X,ρ)**metrik fazoda ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi har qanday sharlar ketma-ketligi umumiy nuqtaga ega bo'lsin.Bu fazoda fundamental** $\{x_n\}$ **ketma-ketlikning limitga ega ekanligini ko'rsataylik. Qaralayotgan** $\{x_n\}$ **ketma-ketlik fundamental bo'lganligi uchun shunday** n_1 **soni mavjudki** $n > n_1$ **da** $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ **tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi** x_{n_1} **nuqtada va radiusi birga teng sharni** B_1 **bilan belgilaymiz. Keyin** n_2 **sonini shunday tanlaymizki, uning uchun** $n_2 > n_1$ **va** $n > n_2$ **da** $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ **tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi** x_{n_2} **nuqtada va radiusi** $\frac{1}{2}$ **teng sharni** B_2 **bilan belgilaymiz. Bu jarayonni davom ettirib,** $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k}$ **nuqtalarni**

tanlaganimizdan keyin n_{k+1} sonini shunday tanlaymizki, uning uchun $n_{k+1} > n_k$ va $n > n_{k+1}$da $\rho\left(x_n, x_{n_{k+1}}\right) < \frac{1}{2^{k+1}}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi $x_{n_{k+1}}$ nuqtada va radiusi $\frac{1}{2^k}$ teng sharni B_{k+1}bilan belgilaymiz. Bu jarayonni davom ettirib, radiuslari nolga intiluvchii, ichma-ich joylashgan $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$- yopiq sharlar hosil qilamiz.Teorema shartiga ko'ra bu sharlar umumiy x nuqtaga ega bo'ladi.Bu x nuqta $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$- yopiq sharlarning markazlaridan iborat $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k}, \cdots$ ketma-ketlik uchun limit nuqta bo'ladi. Qaralayotgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lganligi uchun u yaqinlashuvchi qismiy $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots x_{n_k}, \cdots$ ketma-ketlik limitiga yaqinlashadi.

Metrik fazolar shunday bir ajoyib xususiyatga egaki, bu xususiyat Xausdorf aksiomasi deb ataladi.Agar (X, ρ) metrik fazoda $x, y \in X$ nuqtalar berilgan bo'lib, $x \neq y$ bo'lsa, $0 < r < \frac{d}{2}$ shartni qanoatlantiruvch r soni uchun $U_r(x),\ U_r(y)$ sharlar o'zaro kesishmaydi, bu erda $d = \rho(x, y)$. Biz topologik fazolar uchun ham Xausdorf aksiomasining bajarilishini talab qilamiz. Bu aksioma quyidagicha ta'riflanadi.

Xausdorf aksiomasi. ***Berilgan (X, τ) topologik fazoda ixtiyoriy o'zaro farqli $x, y \in X$ nuqtalar uchun ularning o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud bo'lsa,bu fazoda Xausdorf aksiomasi bajarilgan deyiladi.***

Xausdorf aksiomasi bajarilgan topologik fazolar Xausdorf fazolari deyiladi. Biz bu haqda alohida ta'kidlamasdan kurs davomida hamma topologik fazolar uchun Xausdorf aksiomasi bajarilgan deb faraz qilamiz. Yuqorida ta'kidlaganimizdek, metrik fazolarda bu aksioma har doim bajarilgan.

Endi topologik fazolarga qaytaylik. Bizga (X, τ) topologik fazoda $\{x_n\} \in X, \quad n = 1,2,...$ ketma-ketlik va $x \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar x nuqtaning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday son $N > 0$ mavjud bo'lib, $n > N$ da

$x_n \in U$ **munosabat bajarilsa,** $\{x_n\}$ **- ketma-ketlik** x **nuqtaga yaqinlashadi deyiladi va** $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ **(yoki** $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$**) ko'rinishda yoziladi.**

Teorema-9. Xausdorf fazosida har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga egadir.

Isbot. Faraz qilaylik $\{x_n\}$ **yaqinlashuvchi ketma-ketlik uchun** $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ **munosabat o'rinli bo'lsin. Agar** $x_n \to y$ **va** $y \neq x$ **bo'lsa,** U_1 **va** U_2 **bilan mos ravishda** x **va** y **nuqtalarning o'zaro kesishmaydigan atroflarini belgilaymiz (Xausdorf aksiomasi). Berilgan** $\{x_n\}$ **- ketma-ketlik** x **va** y **nuqtalarga yaqinlashganligi uchun shunday** N_1, N_2 **sonlar mavjudki,** $n \geq N_1$ **да** $x_n \in U_1$ **va** $n \geq N_2$ **bo'lganda** $x_n \in U_2$ **munosabat bajariladi. Agar** $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ **bo'lsa,** $x_n \in U_1 \cap U_2$ **munosabatni olamiz. Demak,** $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. **Bu ziddiyatdan** $y = x$ **bo'lishi kelib chiqadi.**

§ 4. Bog'lanishli va kompakt to'plamlar

I. Bog'lanishli to'plamlar.

Faraz qilaylik (X,τ) **topologik fazo,** $A \subset X$ **- qism to'plam berilgan bo'lsin. Ikkita ochiq** G_1 **va** G_2 **qism to'plamlar mavjud bo'lib,**

1) $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$
2) $(A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \varnothing$
3) $(A \cap G_1) \neq \varnothing, \quad (A \cap G_2) \neq \varnothing$

munosabatlar bajarilsa, A to'plam bog'lanishsiz to'plam deyiladi. Agar bu shartlarni qanoatlantiruvchi G_1 **va** G_2 **ochiq to'plamlar mavjud bo'lmasa,** A **to'plam bog'lanishli to'plam deyiladi.**

Berilgan A **to'plam uchun** $A = X$ **holni qaraylik. Bu holda** $X \cap G_1 = G_1, \quad X \cap G_2 = G_2$ **bo'lganligi uchun yuqoridagi shartlar quyidagi ko'rinishda yoziladi.**

$1^1)\qquad X = G_1 \cup G_2$

$2^1)\qquad G_1 \cap G_2 = \varnothing$

$3^1)\qquad G_1 \neq \varnothing, \quad G_2 \neq \varnothing$

Demak, agar $1^1)$, $2^1)$, $3^1)$ shartlarni qanoatlantiruvchi ochiq G_1 va G_2 qism to'plamlar mavjud bo'lsa, X fazoni bog'lanishsiz topologik fazo deb ataymiz. Aks holda, ya'ni bu $1^1)$, $2^1)$, $3^1)$ shartlarni qanoatlantiruvchi G_1, G_2 to'plamlar mavjud bo'lmasa, X fazoni bog'lanishli topologik fazo deb ataymiz.

Teorema-10. ***Bog'lanishli to'plamning yopig'i ham bog'lanishli to'plamdir*.**

Isbot. Faraz qilaylik (X,τ) - topologik fazoda bog'lanishli $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. Agar $\overline{A}$ bog'lanishsiz to'plam bo'lsa, ochiq G_1 va G_2 qism to'plamlar mavjud bo'lib, quyidagi

$$\overline{A} = (G_1 \cap \overline{A}) \cup (G_2 \cap \overline{A})$$
$$(G_1 \cap \overline{A}) \cap (G_2 \cap \overline{A}) = \varnothing$$
$$G_1 \cap \overline{A} \neq \varnothing, \quad G_2 \cap \overline{A} \neq \varnothing$$

munosabatlar bajariladi. To'plam yopig'i aniqlanishiga ko'ra $A \subset \overline{A}$ munosabat o'rinli bo'lganligi uchun

$(G_1 \cap \overline{A}) \cap A = G_1 \cap A, \quad (G_2 \cap \overline{A}) \cap A = G_2 \cap A, \quad A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$ **tengliklar o'rinlidir.**

Bu erda G_1 va G_2 ochiq to'plamlar, $G_1 \cap \overline{A} \neq \varnothing$, $G_2 \cap \overline{A} \neq \varnothing$ bo'lganligidan, $G_1 \cap A \neq \varnothing$ va $G_2 \cap A \neq \varnothing$ munosabatlar kelib chiqadi va nihoyat $(G_1 \cap \overline{A}) \cap (G_2 \cap \overline{A}) = \varnothing$ tenglikdan $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \varnothing$ tenglik kelib chiqadi. Bu munosabatlar birgalikda A to'plamning bog'lanishsiz to'plam ekanligini ko'rsatadi. Bu ziddiyatdan $\overline{A}$ to'plamning bog'lanishli ekanligi kelib chiqadi.

Teorema-11. Bizga $\{A_\alpha\}$ bog'lanishli to'plamlar oilasi berilgan bo'lib, ularning umumiy qismi bo'sh bo'lmasa, ya'ni $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ bo'lsa, $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ to'plam ham bog'lanishli to'plamdir.

Isbot. Faraz qilaylik A to'plam bog'lanishsiz bo'lsin. Bog'lanishsiz to'plam ta'rifiga ko'ra shunday ochiq G_1 va G_2 to'plamlar mavjudki,

$$A = (G_1 \cap A) \cup (G_1 \cap A)$$

$$(A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \varnothing$$

$$A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing$$

munosabatlar o'rinlidir.

Birinchi munosabatdan ixtiyoriy α **uchun** $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ **tenglik kelib chiqadi. Undan tashqari, ikkinchi munosabatdan va** $A_\alpha \subset A$ **ekanligidan** $(A_\alpha \cap G_1) \cap (A_\alpha \cap G_2) = \varnothing$ **tenglik kelib chiqadi.**

Demak, $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$ **va** A_α **bog'lanishli bo'lganligi uchun** $A \cap G_1 = \varnothing, \quad A \cap G_2 = \varnothing$ **tengliklardan birortasi o'rinlidir.**

Agar birorta α_0 **uchun** $A_{\alpha_0} \cap G_1 = \varnothing$ **bo'lsa unda** $A_{\alpha_0} \subset G_2$ **bo'ladi. Lekin** $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ **munosabatdan hamma** α **lar uchun** $A_\alpha \subset G_2$ **ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa** $A \cap G_1 = \varnothing$ **tenglikni hosil qilamiz. Bu qarama-qarshilik teorema isbotini yakunlaydi.**

Endi agar $x \in X$ **bo'lsa,** H **bilan** x **nuqta tegishli bo'lgan hamma bog'lanishli to'plamlar yig'indisini belgilaylik. Bu to'plamlarning hammasiga** x **tegishli bo'lganligi uchun 9-teorema sharti bajariladi. Demak,** H **bog'lanishli to'plamdir. Bu** H **to'plamni** x **tegishli bo'lgan bog'lanishlilik komponentasi deb ataymiz. Aniqlanishiga ko'ra** H **to'plam** x **tegishli bo'lgan bog'lanishli to'plamlarning eng kattasidir.**

Teorema-12. Har xil ikki nuqtalar uchun ular tegishli bo'lgan bog'lanishlilik komponentalari yoki kesishmaydi yoki ustma-ust tushadi.

Isbot. Berilgan $x, y \in$ **X nuqtalar uchun** $x \neq y$ **bo'lsa, ular tegishli bo'lgan bog'lanishlilik komponentalarini** H_x **va** H_y **bilan belgilaylik. Agar** $H_x \cap H_y \neq \varnothing$ **bo'lsa, 9-teoremaga ko'ra** $H = H_x \cup H_y$ **to'plam bog'lanishli bo'ladi va bog'lanishlilik komponentasining ta'rifiga ko'ra** $H = H_x = H_y$ **tenglik kelib chiqadi.**

Teorema-13. Bog'lanishlilik komponentasi yopiq to'plamdir.

Isbot. Faraz qilaylik H **to'plam** x **nuqta tegishli bo'lgan bog'lanishlilik komponentasi bo'lsin.Yuqoridagi 8-teoremaga ko'ra** $\overline{H}$ **bog'lanishli**

to'plamdir. Komponenta ta'rifiga ko'ra $x \in \overline{H}$ **munosabatdan** $H = \overline{H}$ **tenglik kelib chiqadi. Demak,** H **yopiq to'plamdir.**

II. Kompakt to'plamlar

Bizga $(X,\ \tau)$ **- topologik fazo,** $A \subset X$ **qism to'plam va ochiq to'plamlardan iborat birorta** $\{A_\alpha\}$ **oila berilgan bo'lsin. Berilgan oila uchun** $\bigcup_\alpha A_\alpha \supset A$ **munosabat bajarilsa** $\{A_\alpha\}$ **oila A to'plamning ochiq qobig'i deb ataladi. Agar qobiq chekli sondagi to'plamlardan iborat bo'lsa, u chekli qobiq deb ataladi.**

Ta'rif. ***Berilgan A to'plamning ixtiyoriy ochiq qobig'idan chekli qobiq ajratish mumkin bo'lsa, A to'plam kompakt to'plam deb ataladi.***

Tabiiyki , bu ta'rifda agar $A = X$ **bo'lsa , unda biz kompakt fazo ta'rifini olamiz. Faqat bu erda** $\{A_\alpha\}$ **oila X uchun qobiq bo'lsa, unda** $\bigcup_\alpha A_\alpha \supset A$ **munosabat** $\bigcup_\alpha A_\alpha = X$ **munosabatga teng kuchlidir.**

Teorema - 14. ***Berilgan X topologik fazo kompakt va*** $A \subset X$ ***yopiq qism to'plam bo'lsa, A kompakt to'plamdir.***

Isbot. Faraz qilaylik $\{A_\alpha\}$ **оила A to'plam uchun ochiq qobiq bo'lsin. Berilgan A to'plam yopiq bo'lganligi uchun** $X \setminus A$ **очiq to'plam va** $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ **oila X uchun qobiq bo'ladi. . Berilgan X kompakt fazo bo'lganligi uchun** $\{A_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ **oiladan X uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiqqa tegishli qism to'plamlar** $F_1, F_2, ..., F_k$ **bo'lsin. Agar** $\{F_i\}_1^k$ **oilada** $X \setminus A$ **to'plam bo'lmasa,** $\{F_i\}$ **oila** $\{A_\alpha\}$ **dan ajratilgan A ning chekli qobig'i bo'ladi. Agar** $\{F_i\}$ **oilada** $X \setminus A$ **bo'lsa , unda bu oiladan** $X \setminus A$ **ni chiqarib,** A **uchun chekli qobiq hosil qilamiz. Demak,** A **kompakt to'plamdir. Teorema isbotlandi.**

Teorema - 15. ***Berilgan X topologik fazo xausdorf fazosi,*** $A \subset X$ ***- kompakt to'plam va*** $x \in X \setminus A$ ***bo'lsa,*** A ***to'plamni va*** x ***nuqtani ochiq to'plamlar***

yordamida ajratish mumkin,ya'ni kesishmaydigan ochiq G_1 ***va*** G_2 ***to'plamlar mavjud bo'lib,*** $A \subset G_1$, $x \in G_2$ ***munosabatlar o'rinli bo'ladi.***

Isbot. Biz A **to'plamga tegishli ixtiyoriy** y **nuqtani olsak, Xausdorf aksiomasiga ko'ra ochiq kesishmaydigan** G_x, G_y **to'plamlar mavjud bo'lib** $x \in G_x$, $y \in G_y$ **munosabatlar bajariladi.Har bir** y **nuqta uchun olingan** G_y **ochiq to'plam mavjudligidan** $\{G_y : y \in A\}$ **oila hosil bo'ladi. Bundan tashqari** $\{G_y : y \in A\}$**oila** A **to'plam uchun ochiq qobiq bo'ladi va** A**to'plam kompakt bo'lganligi uchun bu oiladan** A **uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiqqa tegishli ochiq to'plamlar** G_{y_1}, $G_{y_2}, \dots, G_{y_m}$ **to'plamlardan iborat bo'lsa,bu ochiq to'plamlar bilan kesishmaydigan x nuqtaning atroflarini mos ravishda** $G_x(y_1),\ G_x(y_2), \dots,\ G_x(y_m)$ **ko'rinishda belgilaymiz. Agar** $G_1 = \bigcup_{i=1}^{m} G_{y_i}$ **,** $G_2 = \bigcap_{i=1}^{m} G_x(y_i)$ **bo'lsa, ravshanki** $A \subset G_1$**,** $x \in G_2$ **va** $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ **munosabatlar bajariladi.**

Teorema - 16. ***Topologik*** X ***fazo Xausdorf fazosi va*** $A \subset X$ ***- kompakt to'plam bo'lsa,*** A ***yopiq to'plamdir.***

Isbot. Berilgan$A$ **to'plamning yopiq ekanligini ko'rsatish uchun** $X \setminus A$ **to'plamning ochiq ekanligini ko'rsatamiz. Agar ixtiyoriy** $x \in X \setminus A$ **nuqta bo'lsa, 15-teoremaga ko'ra shunday ochiq** G **to'plam mavjudki,** $x \in G \subset X \setminus A$ **munosabat bajariladi. Demak**x **nuqta** $X \setminus A$ **to'plam uchun ichki nuqta va** x **nuqtaning ixtiyoriy ekanligidan** $X \setminus A$ **to'plamning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi.**

Teorema - 17. ***Evklid fazosida berilgan*** A ***to'plamning kompakt to'plam bo'lishi uchun uning yopiq va chegaralangan to'plam bo'lishi zarur va etarli .***

Isbot. Zarurligi. Metrik fazoda to'plam birorta shar ichida yotsa, u chegaralangan to'plam deyiladi. Berilgan$A$ **to'plam kompakt bo'lsa, evklid fazosi** R^n **ning Xausdorf fazo ekanligidan** A **to'plamning yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi (teorema-16). Endi** A **to'plamning chegaralanganligini ko'rsataylik. Buning uchun birorta** $x \in A$ **nuqtani olib, markazi shu nuqtada bo'lgan** $\{B_n(x)\}$ **sharlar oilasini qaraymiz, bu erda** $n = 1, 2, \dots$ **. Bu sharlar oilasi**

A uchun ochiq qobiq bo'ladi va A kompakt to'plam bo'lganligi uchun bu oiladan chekli qobiq ajratish mumkin. Agar chekli qobiq $B_{n_1}(x_0), B_{n_2}(x_0), \ldots, B_{n_k}(x_0)$ sharlardan iborat bo'lsa, N bilan $n_1, n_2, \cdots n_k$ sonlarning eng kattasini belgilaymiz. Bu yerda $B_n(x)$ markazi x nuqtada, radiusi n bo'lgan ochiq shardir. Bu holda $A \subset B_N(x)$ munosabatdan A to'plamning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Teoremaning yetarliligini isbotlash uchun, R^n da $Q_r = \{x \in R : |x| \le r\}$ kubning kompaktligini isbotlaymiz. Buning uchun esa ishni yopiq kesmaning kompaktligini isbotlashdan boshlaymiz.

Lemma 1. *Haqiqiy sonlar fazosida ixtiyoriy yopiq kesma kompakt to'plamdir.*

Isbot. Biz $[a,b]$ yopiq kesma uchun uning $\{U_\alpha\}$ ochiq qobig'ini qaraylik. Agar $x \in [a,b]$ va $[a,x]$ segment uchun chekli qobiq mavjud bo'lsa , bunday x nuqtalar to'plamini A bilan belgilaymiz. Ravshanki , A bo'sh emas,chunki $a \in A$. Bundan tashqari, birorta α_0 uchun $a \in U_{\alpha_0}$ bo'lsa, a nuqta o'zining birorta atrofi bilan U_{α_0} to'plamda yotadi. Shuning uchun A to'plamga a nuqtadan boshqa nuqtalar ham tegishli. Demak, agar $c = \sup\{x : x \in A\}$ bo'lsa, $c > a$ ekanligi ravshan.Bu erda $c = \sup\{x : x \in A\}$ bo'lganligi uchun ixtiyoriy yetarli kichik $\varepsilon > 0$ учун $[a, c-\varepsilon]$ kesma uchun $\{U_\alpha\}$oiladan tegishli chekli qobiq ajratish mumkin. Biz $c$nuqta tegishli bo'lgan ochiq to'plamni U_{α_1} bilan belgilasak, $U_{\alpha_1}$to'plam ochiq bo'lganligi uchun birorta yetarli kichik $\varepsilon > 0$ uchun $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_1}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Агар $\varepsilon > 0$ sonni tanlashda $[a, c-\varepsilon]$ segment uchun chekli qobiq mavjud va $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_1}$ munosabat o'rinli bo'lsa, $[a, c-\varepsilon]$ segmentning chekli qobig'iga U_{α_1} to'plamni qo'shsak, $[a,c]$ segment uchun chekli qobiq hosil bo'ladi. Demak, $c \in A$ munosabat o'rinli bo'ladi. Endi $c = b$ tenglik o'rinli ekanligini isbotlaylik. Agar $c < b$ bo'lsa, ε sonni shunday kichik qilib olamizki, $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset U_{\alpha_1}$ munosabat bajarilsin. Bu holda $[a,c]$ segmentning chekli qobig'i $[a, c+\varepsilon]$ uchun haм chekli

qobiq bo'ladi. Bu esa c nuqtaning aniqlanishiga ziddir. Demak, $c=b$ tenglik o'rinlidir. Lemma isbotlandi.

Evklid fazosida berilgan $Q_r=\{x=(x_1,x_2,\cdots x_n)\in R^n,\ |x_i|\le r, i=1,2,\cdots,n\}$ to'plam yopiq kub deyiladi.

Lemma-2. ***Evklid fazosida berilgan yopiq kub kompakt to'plamdir.***

Isbot. Yopiq Q_r kubni n ta $[-r,r]$ segmentning to'g'ri ko'paytmasi sifatida yozamiz. Shunda lemma-2 ikkita kompakt to'plamning to'g'ri ko'paytmasi kompakt to'plam ekanligidan kelib chiqadi. Bu fakt quyidagi teorema ko'rinishda yozib,keyinchalik isbotlaymiz.

Teorema-18. ***Bizga X,Y topologik fazolarda $A\subset X, B\subset Y$ - компакт to'plamlar berilgan bo'lsa, $A\times B$ to'g'ri ko'paytma ham $X\times Y$ topologik fazoda kompakt to'plamdir.***

Endi bevosita 17-teorema isbotiga qaytaylik. Biz qarayotgan A to'plam chegaralangan bo'lganligi uchun uni o'z ichiga oluvchi Q_r kub mavjud. Berilgan A to'plam yopiq bo'lganligi uchun uning to'ldiruvchisi $R^n\setminus A$ ochiq to'plamdir. Endi $\{U_a\}$ oila A to'plamning ochiq qobig'i bo'lsa, $\{U_a\}\cup\{R^n\setminus A\}$ oila Q_r kubning ochiq qobig'i bo'ladi. Biz qarayotgan Q_r kub kompakt to'plam bo'lganligi uchun bu oiladan Q_r kub uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ҳosil bo'lgan qopiqdan $R^n\setminus A$ to'plamni chiqarib A to'plam uchun $\{U_a\}$ oiladan ajratilgan chekli qobiq hosil qilamiz. Teorema isboti tugadi.

III.Topologik fazo bazasi

Bizga (X,τ) - topologik fazo va $B=\{U_a\}$ - ochiq to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin, ya'ni har bir α uchun $U_a\in\tau$ munosabat o'rinlidir. Agar (X,τ) topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qism to'p-lamini B oilaga tegishli to'plamlar yig'indisi sifatida yozish mumkin bo'lsa, B oila (X,τ) topologik fazoning bazasi deb ataladi.

Misol. Biz evklid fazosini qaraylik, ya'ni $X = R^n$ va τ esa evklid topologiyasi bo'lsin. Bizga ma'lumki, ixtiyoriy $x \in A$ uchun shunday $r_x > 0$ mavjud bo'lib, $B_{r_x}(x) \subset A$ bo'lsa A to'plam ochiq deyiladi. Demak, A ochiq to'plam bo'lsa, $A = \bigcup_x B_{r_x}(x)$, ya'ni A to'plamni ochiq sharlar yig'indisi sifatida yozish mumkin. Bundan kelib chiqadiki, R^n fazoda hamma ochiq sharlardan va bo'sh to'plamdan iborat oila Evklid topologiyasi uchun baza xosil qiladi. Umuman olganda bu fakт ixtiyoriy (X, ρ) metrik fazo uchun o'rinlidir, ya'ni ochiq sharlar va bo'sh to'plamdan iborat oila metrik fazo uchun bazani tashkil qiladi. Endi topologik fazo bazasining asosiy xossalarini o'rganamiz.

Teorema - 19. Berilgan $B = \{U_a\}$ ***oila*** (X, τ) ***topologik fazoning bazasi bo'lishi uchun ixtiyoriy*** $x \in X$ ***nuqta va uning ixtiyoriy*** U ***atrofi uchun B ga oilaga tegishli va*** $x \in U_{\alpha_0} \subset U$ ***munosabatni qanoatlantiruvchi*** U_{α_0} ***to'plamning mavjudligi zarur va etarlidir.***

Isbot. ***Zarurligi.*** **Faraz qilaylik** $B = \{U_a\}$ **oila baza,** $x \in X$ **va** U **to'plam** x **nuqtaning atrofi bo'lsin. Berilgan** U **to'plam ochiq bo'lganligi uchun u B oilaga tegishli ochiq to'plamlar yig'indisidan iborat va ulardan birortasi albatta** x **nuqtani o'z ichiga oladi.**

Yetarliligi. **Berilgan** $B = \{U_a\}$ **oila teorema shartlarini qanoatlantirsa, uning baza ekanligini ko'rsataylik. Ixtiyoriy ochiq A to'plamni qaraylik. Agar** $a \in A$ **bo'lsa, teorema shartiga kura** $U_a \in B$ **mavjud bo'lib,** $a \in U_a \subset A$ **munosabat bajariladi. Shuning uchun** $A = \bigcup_{a \in A} U_a$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema isbotlandi.**

Teorema -20. Bizga (X, τ) ***topologik fazo va uning*** $B = \{U_a\}$ ***oiladan iborat bazasi berilgan bo'lsa, quyidagi munosabatlar o'rinlidir:***

1) $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$

2) ***Ixtiyoriy*** U_{α_1}, U_{α_2} ***to'plamlar va ixtiyoriy*** $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ ***nuqta uchun*** $U_{\alpha_3} \in B$ ***mavjud bo'lib,*** $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ ***munosabat bajariladi.***

Isbot. Bu erda 1) munosabat bazaning ta'rifiga ko'ra ravshan bo'lganligi uchun 2) munosabatni ko'rsatamiz. Agar $a \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ **bo'lsa,** $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ **ochiq to'plam ekanligidan 1-teoremaga ko'ra** U_{α_3} **mavjud bo'lib ,** $a \in U_{\alpha_3} \subset U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ **munosabatlar bajariladi.**

Teorema-21. ***Berilgan X to'plam va uning qism to'plamlaridan iborat*** $B = \{U_\beta\}$ ***oila uchun quyidagi uchta shartlar bajarilsa, ya'ni:***

1) Berilgan oilaga teshili to'plamlar yiғindisi berilgan X to'plamni qoplasa: $\bigcup_\beta U_\beta = X$ ***;***

2) Bo'sh to'plam berilgan oilaga tegishli bo'lsa: $\varnothing \in B$***;***

3) Berilgan oilaga tegishli ixtiyoriy U_{β_1}, U_{β_2} ***to'plamlar va ixtiyoriy*** $a \in U_{\beta_1} \cap U_{\beta_2}$ ***нуqma uchun*** $U_{\beta_3} \in B$ ***mavjud bo'lib,*** $a \in U_{\beta_3} \subset U_{\beta_2} \cap U_{\beta_2}$ ***munosabat o'rinli bo'lsa,***

X to'plamda shunday yagona τ ***topologiya mavjudki*** (X,τ) ***topologik fazo uchun B oila baza bo'ladi.***

Isbot. Berilgan X to'plamda τ **oilani quyidagicha aniqlaymiz.Biz** B **oilaga tegishli to'plamlarni va ularning yig'indisidan iborat hamma qism to'plamlardan iborat oilani** τ **bilan belgilaymiz. Teoremaning 1) va 2) shartlariga ko'ra X va bo'sh to'plam** τ **oilaga tegishli bo'ladi. Bundan tashqari** τ **oilaning aniqlanishiga ko'ra unga tegishli to'plamlarning yig'indisi** τ **ga tegishli. Demak,** $A_1, A_2 \in \tau$ **bo'lsa,** $A_1 \cap A_2 \in \tau$ **ni ko'rsatishimiz kerak. Agar** $a \in A_1 \cap A_2$ **bo'lsa, teoremaning 3-shartiga ko'ra** $U_a \in B$ **mavjud va** $a \in U_a \subset A_1 \cap A_2$ **bo'ladi. Demak,** $A_1 \cap A_2 = \bigcup_{a \in A_1 \cap A_2} U_a$ **. Bu esa** $A_1 \cap A_2 \in \tau$ **ekanligini bildiradi.Demak** τ **oila topolgiya aksiomalarini qanoatlantiradi.Bu topologiyaning aniqlanishiga ko'ra** B **oila uning uchun baza bo'ladi.**

§ 5. Uzluksiz akslantirishlar

Bizga X, U - ixtiyoriy to'plamlar berilgan bo'lib , X to'plamning har bir, elementiga U to'plamning bitta elementi mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamni U to'plamga akslantiruvchi moslik yoki akslantirish berilgan deyiladi va $f: X \to Y$ **ko'rinishda yoziladi.**

Agar $f: X \to Y$ **akslantirish berilgan bo'lsa,** $x \in X$ **uchun** $y = f(x)$ **element** x **nuqtaning aksi (yoki obrazi),** $y \in Y$ **uchun** $f^{-1}(y) = \{x \in X: \ f(x) = y\}$ **to'plam** y **nuqtaning asli (yoki proobrazi) deyiladi. Berilgan** $A \subset X$ **qism to'plam uchun uning obrazi** $f(A) = \{f(x): \ x \in A\}$**,** $B \subset Y$ **qism to'plam uchun uning proobrazi** $f^{-1}(B) = \{x :\text{Ba}x \in A \qquad f(x) \in B\}$ **ko'rinishda aniqlanadi. Agar** $f(X) = Y$ **bo'lsa,** f **akslantirishni "ustiga" akslantirish,** $f(X) \neq Y$ **bo'lganda esa "ichiga" akslantirish deb ataymiz.**

Berilgan "ustiga" akslantirish f **uchun** $x_1, x_2 \in X$ **va** $x_1 \neq x_2$ **munosabatlardan** $f(x_1) \neq f(x_2)$ **munosabat kelib chiqsa,** f **o'zaro bir qiymatli akslantirish deyiladi.**

Ta'rif. ***Bizga*** $X, \ Y$ ***topologik fazolar,*** $f: X \to Y$ ***akslantirish va*** $x \in X$ ***nuqta berilgan bo'lsin.Agar*** $y = f(x)$ ***nuqtaning ixtiyoriy*** V ***atrofi uchun*** x ***nuqtaning*** U ***atrofi mavjud bo'lib,*** $U \subset f^{-1}(V)$ ***munosabat bajarilsa*** f ***akslantirish*** x ***nuqtada uzluksiz deyiladi.***

Agar f **akslantirish biror** A **to'plamga tegishli hamma nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u** A **to'plamda uzluksiz deyiladi. Agar** f **akslantirish X fazoning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u uzluksiz akslantirish deyiladi.**

Teorema-22. ***Berilgan*** f ***akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun ixtiyoriy*** $G \subset Y$ ***ochiq to'plamning to'liq proobrazi*** $f^{-1}(G)$ ***ochiq bo'lishi zarur va etarlidir.***

Isbot. ***Zarurligi.*** **Faraz qilaylik** f **uzluksiz akslantirish,** $G \subset Y$ **ochiq to'plam bo'lsin.** $f^{-1}(G)$ **ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Agar** $x \in f^{-1}(G)$ **bo'lsa,** $f(x) \in G$ **bo'ladi.** f **akslantirish** x **nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun** x **ning shunday** U **atrofi mavjudki,** $U \subset f^{-1}(G)$ **bo'ladi. Bundan esa** $x \in U \subset f^{-1}(G)$ **kelib chiqadi. Demak,** $f^{-1}(G)$ **ochiq to'plamdir.**

Yetarlilik. **Endi ixtiyoriy** $G \subset Y$ **ochiq to'plam uchun** $f^{-1}(G)$ **ochiq to'plam,** $x \in X$ **bo'lsin.** $y = f(x)$ **nuqtaning ixtiyoriy atrofi** V **ni qarasak, u ochiq bo'lganligi uchun** $U = f^{-1}(V)$ **ochiq to'plam bo'ladi. Undan tashqari** $x \in f^{-1}(U)$ **va** $U \subset f^{-1}(V)$**. Demak** f **akslantirish** X **nuqtada uzluksizdir. Bu erda** X **ixtiyoriy nuqta bo'lganligi uchun** f **uzluksiz akslantirish bo'ladi.**

Umuman olganda, uzluksiz akslantirishda ochiq to'plamning obrazi очиқ bo'lishi shart emas. Misol uchun, $X = R^2(x,y)$ **va** $Y = R^2(u,v)$ **fazolar uchun** f **akslantirish** $f(x,y) = (\sin x,\ \cos x)$ **qoida bilan aniqlansa,** $\{(x,y) \in R^2 :\ x^2 + y^2 < 1\}$ **doiraning obrazi** R^2 **da ochiq to'plam emas. Agar** f **akslantirish** $f(x,y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$ **qoida bilan berilsa,** $\{(x,y) = (x \le 0, \quad y = 0)\}$ **yopiq to'plam obrazi yopiq emas.**

Teorema-23. ***Bizga*** $X,\ Y, Z$ ***- topologik fazolar, uzluksiz ikkita*** $f: X \to Y$***,*** $g: Y \to Z$ ***- akslantirishlar berilgan bo'lsa, ularning kompozitsiyasi,ya'ni*** $f \circ g: X \to Z$ ***akslantirish ham uzluksizdir.***

Isbot. Bu teoremani isbotlash uchun yuqoridagi 22-teoremadan foydalanamiz.Faraz qilaylik $G \subset Z$ **ochiq to'plam bo'lsin.Biz** $h^{-1}(G)$ **to'plamning ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak,bu erda** $h = f \circ g$**. Proobraz uchun uning aniqlanishiga ko'ra** $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$ **tenglik o'rinlidir. Teorema shartiga ko'ra** $g: Y \to Z$ **akslantirish uzluksiz bo'lganligi uchun 22-teoremaga ko'ra** $g^{-1}(G)$ **to'plam ochiq to'plamdir.Bundan tashqari** $f: X \to Y$ **akslantirish ham uzluksiz bo'lganligi uchun shu teoremaga ko'ra** $h^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G))$ **to'plam ham ochiq to'plamdir.Demak yuqoridagi 20-teoremaga ko'ra** $f \circ g: X \to Z$ **akslantirish ham uzluksizdir.**

Teorema - 24. ***Bizga*** $X,\ Y$ ***- topologik fazolar,*** $f: X \to Y$ ***uzluksiz akslan-tirish,*** $A \subset X$ ***- kompakt to'plam berilgan bo'lsa,*** $f(A)$ ***to'plam ham kompakt to'plamdir.***

Isbot. Ochiq to'plamlardan iborat $\{U_a\}$ **oila** $f(A)$ **to'plamning ochiq qobig'i bo'lsin.Teorema shartiga ko'ra** f **uzluksiz akslantirish bo'lganligi**

uchun $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ **to'plam hamma** α **lar учун ochiq to'plam bo'ladi.** $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset f(A)$ **munosabatdan** $\bigcup_\alpha V_\alpha \supset A$ **munosabat kelib chiqadi. Demak,** $\{V_\alpha\}$ **oila** A **uchun ochiq qobiq bo'ladi.** A **kompakt to'plam bo'lganligi uchun bu qobiqdan chekli qoplama ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qoplama elementlari** $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, ..., V_{\alpha_m}$ **to'plamlar bo'lsin. Shunda ularning obrazlari** $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_m}$ **to'plamlar** $f(A)$ **to'plam uchun** $\{U_a\}$ **oiladan ajratilgan chekli qobiqni tashkil etadi.**

Teorema-25. ***Bizga*** X, Y ***- topologik fazolar,*** $f: X \to Y$ ***uzluksiz akslantirish,*** $A \subset X$ ***- bog'lanishli to'plam berilgan bo'lsa,*** $f(A)$ ***to'plam ham bog'lanishli to'plamdir.***

Isbot. Agar $f(A)$ **bog'lanishsiz to'plam bo'lsa, bo'sh bo'lmagan ochiq** G_1 **va** G_2 **to'plamlar mavjud bo'lib,** $f(A) = (f(A) \cap G_1) \cup (f(A) \cap G_2)$, $(f(A) \cap G_1) \cap (f(A) \cap G_2) = \varnothing$ **va** $f(A) \cap G_1 \neq \varnothing$, $f(A) \cap G_2 \neq \varnothing$ **munosabatlar bajariladi. Akslantirish** f **uzluksiz bo'lganligi uchun** $A_1 = f^{-1}(G_1)$ **va** $A_2 = f^{-1}(G_2)$ **to'plamlar** X **ning ochiq qism to'plamlari bo'ladi.**

Bundan tashqari $f(A) \cap G_1 \neq \varnothing$, **va** $f(A) \cap G_2 \neq \varnothing$ **munosabatlardan** $A_1 \cap A \neq \varnothing$ **va** $A_2 \cap A \neq \varnothing$ **kelib chiqadi. Bundan tashqari** $A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$ **munosabat ham o'rinlidir. Demak** A **bog'lanishsiz. Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.**

Teorema - 26. ***Yopiq kesma*** $I = [a,b]$ ***bog'lanishli to'plamdir.***

Isbot. Faraz qilaylik $[a,b]$ **bog'lanishsiz bo'lsin. U holda ochiq va bo'sh bo'lmagan** U_1 **va** U_2 **to'plamlar mavjud bo'lib,** $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2)$, $I \cap U_1 \neq \varnothing$, $I \cap U_2 \neq \varnothing$ **va** $(I \cap U_1) \cap (I \cap U_2) = \varnothing$ **munosabatlar o'rinli bo'ladi.**

Endi I **ni topologik fazoga aylantiramiz. Buning uchun** I **ning qism to'plami** A **uchun** R^1 **da ochiq** G **to'plam mavjud bo'lib,** $A = I \cap G$ **bo'lsa,** A **ni ochiq to'plam deb e'lon qilamiz. Hosil bo'lgan** I **ning ochiq qism to'plamlari oilasi** I **da topologiyani hosil qiladi va topologik fazoga aylanadi. Bu topologiyada** I **va** $\varnothing$ **ham ochiq to'plamdir. Agar** I **bog'lanishsiz bo'lsa** I **da**

ochiq va bo'sh bo'lmagan $U_1,\ U_2$ to'plamlar mavjud bo'lib $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ va $I = U_1 \cup U_2$ munosabatlar bajariladi. Endi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_1 \\ 1, & x \in U_2 \end{cases}$$

qoida bilan berilgan akslantirishni qaraylik. Agar $G \subset R^1$ - ochiq to'plam bo'lsa

$$f^{-1}(G) = \begin{cases} \mathrm{I}, & 0, 1 \in \mathrm{G} \\ \varnothing, & 0 \notin \mathrm{G},\ 1 \notin \mathrm{G} \\ U_1 & 0 \in \mathrm{G},\ 1 \notin \mathrm{G} \\ U_2 & 0 \notin \mathrm{G},\ 1 \in \mathrm{G} \end{cases}$$

tenglik o'rinlidir. $\varnothing,\ U_1,\ U_2,\ I$ to'plamlar ochiq bo'lganligi uchun 22 - teoremaga ko'ra f uzluksiz funksiyadir. Koshi teoremasiga ko'ra funksiya 0 va 1 oralig'idagi hamma qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bu ziddiyat teoremani isbotlaydi.

Bizga X - topologik fazo va $f:[0, 1] \to X$ - uzluksiz akslantirish bo'lsin. Bu erda $I = [0, 1]$ kesmadagi topologiya yuqoridagi 25 - teorema isbotidagi кабu evklid topologiya yordamida aniqlanadi. Agar $x = f(0)$, $y = f(1)$ bo'lsa, biz x va y nuqtalar f yo'l yordamida tutashtirilgan deb ataymiz. Agar $A \subset X$ - qism to'plamning har qanday ikki nuqtasini shu to'plamda yotuvchi yo'l yordamida tutashtirish mumkin bo'lsa, A to'plam chiziqli bog'lanishli to'plam deyiladi.

Teorema-27. ***Chiziqli bog'lanishli to'plam bog'lanishli to'plamdir.***

Isbot. X - topologik fazo, $A \subset X$ - chiziqli bog'lanishli to'plam bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, A ga tegishli ixtiyoriy x, y nuqtalar uchun uzluksiz $f: I \to X$ - akslantirish mavjud bo'lib, $f(0) = x$, $f(1) = y$ va $f(I) \subset A$ bo'ladi. Agar A bog'lanishsiz to'plam bo'lsa, ochiq bo'sh bo'lmagan G_1 va G_2 to'plamlar mavjud bo'лib $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$, $A \cap G_1 \neq \varnothing$, $A \cap G_2 \neq \varnothing$ munosabatlar bajariladi. $A \cap G_1$ to'plamdan x nuqtani, $A \cap G_2$ to'plamdan y nuqtani olaylik. A chiziqli bog'lanishli bo'lganligi uchun $f: I \to X$ yo'l mavjud bo'lib, $f(0) = x$, $f(1) = y$ va $I = [0, 1]$ uchun $f(I) \subset A$ bo'ladi. Yuqorida isbot qilingan teoremalarga ko'ra $f(I) = f([0, 1])$ bog'lanishli to'plamdir. Lekin $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$ tenglikdan $f(I) = (f(I) \cap G_1) \cup (f(I) \cap G_2)$, tenglik olamiz.

$x \in f(I) \cap G_1$, $y \in f(I) \cap G_2$ **bo'lganligidan** $f(I) \cap G_1 \neq \varnothing$, $f(I) \cap G_2 \neq \varnothing$ **kelib chiqadi. Bundan** $f(I)$ **bog'lanishsiz to'plam ekanligi kelib chiqadi. Bu ziddiyat** A **bog'lanishli to'plam ekanligini ko'rsatadi.**

Umuman, bog'lanishli to'plam chiziqli bog'lanishli bo'lmasligi mumkinligini quyidagi misol ko'rsatadi.

Misol.

$$X = R^2, \quad A = \{(x, y) \in R^2 : \quad y = \sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0\} \cup \{(x, y) : x = 0, \ -1 < y < 1\}$$

bo'lsin. Ravshanki, A **bog'lanishli, lekin chiziqli bog'lanishli emas.**

Teorema-28. ***Faraz qilaylik*** X ***- topologik fazoda chiziqli bog'lanishli*** $\{A_\alpha\}$ ***to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar ular umumiy nuqtaga ega ,ya'ni*** $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ ***bo'lsa.ularning yiɛindisi*** $\bigcup_\alpha A_\alpha$ ***to'plam ham chiziqli bog'lanishli bo'ladi.***

Isbot. Berilgan to'plamlar yig'indisi bo'lgan $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ **to'plamga tegishli** ***x, u*** **nuqtalarni yo'l bilan tutashtirish mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun** $a \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ **nuqtani olamiz, va** $x \in A_{\alpha_1}$, $y \in A_{\alpha_2}$ **bo'lsin deb faraz qilayliq. Shunda** $a \in A_{\alpha_1}$, $a \in A_{\alpha_2}$ **munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun** x **va** y **larni** a **bilan mos ravishda** f_1, f_2 **yo'llar yordamida tutashtiramiz. Shunda**

$$g(t) = \begin{cases} f_1(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f_2(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

formula bilan aniqlangan g **yul uchun** $g(0) = x$, $g(1) = y$ **tengliklar o'rinli bo'ladi.**

Endi bu teoremadan foydalanib, X **topologik fazoning** a **nuqtasi uchun uning chiziqli bog'lanishlilik komponentasi tushunchasini kiritamiz. Berilgan** a **nuqta tegishli bo'lgan hamma chiziqli bog'lanishli to'plamlar yig'indisi yuqoridagi teoremaga ko'ra chiziqli bog'lanishli to'plam bo'ladi. Ana shu to'plamni** a **nuqtaning chiziqli bog'lanishlilik komponentasi deb ataymiz va** $L(a)$ **bilan belgilaymiz.**

Teorema-29. ***Bog'lanishli X topologik fazoning har bir nuqtasi chiziqli bog'lanishli atrofga ega bo'lsa, X chiziqli bog'lanishli fazo bo'ladi.***

Isbot. Topologik X fazoning a nuqtasi uchun $L(a)$ to'plamni qaraylik. Bu to'plamning ochiq to'plam ekanligini ko'rsataylik. Agar $b \in L(a)$ bo'lsa, $V(b)$ bilan b nuqtaning chiziqli bog'lanishli atrofini belgilaymiz. Shunda $V(b) \subset L(a)$ bo'ladi. Demak $L(a)$ ochiq to'plamdir. Endi $L(a)$ to'plam uchun $L(a) = \overline{L}(a)$ tenglikni isbotlaylik. Buning uchun $b \in \overline{L}(a)$ nuqta olib, uni a nuqta bilan yo'l orqali tutashtirish mumkinligini ko'rsatamiz. Urinma nuqta ta'rifiga ko'ra, b nuqtaning har bir atrofida $L(a)$ to'plamga tegishli nuqtalar bor. Agar $V(b)$ to'plam b nuqtaning birorta chiziqli bog'lanishli atrofi bo'lsa, bu atrofda $L(a)$ to'plamga tegishli nuqtalar bor. Demak *a* nuqta b bilan yo'l orqali tutashtirish mumkin. Bundan $b \in L(a)$ kelib chiqadi. Bundan $L(a)$ to'plamning yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. Berilgan X topologik fazo bog'lanishli bo'lganligi uchun har qanday bo'sh bo'lmagan bir vaqtda ochiq va yopiq bo'lgan to'plam X bilan ustma-ust tushadi. Demak $X = L(a)$, va X chiziqli bog'lanishdir.

Topologik akslantirishlar
(Gomeomorfizmlar)

Uzluksiz akslantirishlar ichida bizning kursimiz uchun muhim akslantirishlardan biri topologik akslantirishdir. Topologik akslantirish goмeomorfizm deb ham ataladi. Bu paragrafda topologik akslantirish tushunchasini kiritib, misollar keltiramiz вa uning biz uchun zarur asosiy xossalarini keltiramiz. Bizga X, Y - topologik fazolar, $f: X \to Y$ - akslantirish berilgan bo'lsin. Agar f akslantirishga teskari f^{-1}akslantirish mavjud va f, f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, f topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi.

Topologik akslantirishga eng sodda misol qilib $f(x) = x$ qoida bilan aniqlangan ayniy $f: X \to X$ akslantirishni olishimiz mumkin.

Topologik akslantirish ta'rifidan bevosita kelib chiqadiki, agar f topologik akslantirish bo'lsa, unga teskari akslantirish f^{-1} ham topologik akslantirish bo'ladi. Endi f uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun zarur va etarli shartlarga e'tibor beraylik. Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga X ning bitta nuqtasini mos qo'yadi. Demak, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun birorta $x \in X$ mavjud bo'lib, $f(x) = y$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Buning uchun esa $f(X) = Y$ bo'lishi, ya'ni f ustlama akslantirish bo'lishi kerak. Bundan tashqari f^{-1} teskari akslantirish $y \in Y$ nuqtaga bitta $x \in X$ nuqtani mos qo'yganligidan $x_1 \neq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lishi, ya'ni o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarurdir.

Shunday qilib, f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo'lishi uchun f ning ustlama va o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarur va etarli. Agar X va Y topologik fazolar uchun $f: X \to Y$ topologik akslantirish mavjud bo'lsa, X va Y topologik fazolar o'zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deb ataladi. Topologik fazolarning topologik akslantirishda saqlanib qoladigan (ya'ni biridan ikkinchisiga o'tadigan) xossalarи topologik xossalar deb ataladi. Topologiya fanida topologik fazolarning, geometrik figuralarning topologik xossalari o'rganiladi.

Endi bir nechta misollar keltiraylik.

Misol 1. $X = (a, b)$**,** $Y = (c, d)$ **bo'lib,** X**,** Y **fazolarda topologiya** R^1 **dagi topologiya yordamida aniqlanadi. Shunda** $f: X \to Y$ **akslantirishni** $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$ **formula yordamida aniqlasak,** f **gomeomorfizm bo'ladi, chunki** f **chiziqli funksiya, uzluksiz va unga teskari funksiya ham uzluksizdir.**

2. $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$**,** $Y = [-1, 1]$**,** $f(x) = \sin x$ **bo'lsin. Bizga ma'lumki,** $f(x) = \sin x$ **uzluksiz va unga teskari funksiya** $x = \arcsin y$ $[-1, 1]$ **da aniqlangan va uzluksizdir. Shuning uchun** $X \to Y$ **gomeomorfizmdir.**

3. $X = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$**,** $Y = R^1$ **bo'lsa,** $f(x) = tgx$ **gomeomorfizm bo'ladi.**

4. Ixtiyoriy (a,b) **interval** R^1 **ga gomeomorfdir. Bu erda gomeomorfizm** $f(x)=tg\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}-\frac{\pi}{2}\right)$ **formula yordamida aniqlanadi.**

5. Tekislikda $D^2=\{(x,y):\ \ x^2+y^2<R^2\}$ **ochiq doira tekislikka gomeomorfdir.**

Bu yerda

$$f(x,y)=\left\{\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

formula bilan $f:D^2\to R^2$ **akslantirishni aniqlasak,** f **gomeomorfizm bo'ladi. Buni tekshiraylik. Bu akslantirishning uzluksizligi**

$$u(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}},\ \ \upsilon(x,y)=\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$$

funksiyalariing uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi unga teskari akslantirish mavjud va uzluksizligini ko'rsataylik. Teskari $f^{-1}:R^2\to D^2$ **akslantirishni**

$$f^{-1}(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu akslantirishning uzluksizligi

$$\mu(x,y)=\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\quad \varphi(x,y)=\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$

funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi $f^{-1}(x,y)$ **akslantirish haqiqatan ham** f **akslantirishga teskari akslantirish ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun** $f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=(x,y)$ **tenglikni**

$$f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=\left\{\frac{\mu(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi(x,y)^2}},\frac{\varphi(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}}\right\}=$$

isbotlaymiz:

$$=\left\{\frac{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\frac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}},\frac{\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\frac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\right\}=(x,y)$$

Demak, ***f*** **akslantirishdir gomeomorfizmdir.**

6. Evklid fazosida, ya'ni R^n **da ixtiyoriy** D^n **ochiq shar** R^n **ga gomeomorfdir. Buni ko'rsatish uchun** R^n **fazoda koordinata boshini** D^n **sharning markaziga joylashtirib dekart koordinatalar sistemasini kiritib** $f: D^n \to R^n$ **akslantirishni**

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left\{ \frac{x_1}{R-|x|}, \frac{x_1}{R-|x|}, \cdots, \frac{x_n}{R-|x|} \right\}$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu erda $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$**,** R **–** D^n **sharning radiusidir.**

Teskari akslantirish

$$f^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left\{ \frac{Rx_1}{1+|x|}, \frac{Rx_2}{1+|x|}, \cdots, \frac{Rx_n}{1+|x|} \right\}$$

formula yordamida aniqlanadi. Ikkala f**,** f^{-1} **akslantirishlar ham uzluksiz bo'lganligi uchun** f **gomeomorfizmdir.**

Endi topologik akslantirishning ba'zi bir muhim xossalarini keltiraylik. Topologik akslantirishning ta'rifidan bevosita har qanday topologik akslantirish uchun unga teskari akslantirish ham topologik akslantirish ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 30. Bizga $f: X \to Y$***,*** $g: Y \to Z$ ***- gomeomorfizmlar berilgan bo'lsa, ular yordamida qurilgan*** $f \circ g: X \to Z$ ***akslantirish ham gomeomorfizmdir.***

Isbot. Berilgan f **va** g **akslantirishlarning uzluksizligidan 23-teoremaga ko'ra** $f \circ g$ **akslantirish ham uzluksizdir. Ular topologik akslantirishlar bo'lganligi uchun ularga teskari akslantirishlar ham uzluksizdir. Shuning uchun** $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ **akslantirish uzluksizdir. Teorema isbotlandi.**

Teorema 29. Faraz qilaylik $f: X \to Y$ ***- uzluksiz akslantirish,*** X ***- kompakt fazo,*** Y ***- Xausdorf fazosi bo'lsin.Agar*** f ***akslantirishga teskari*** f^{-1}***akslantirish mavjud bo'lsa,*** f ***- gomeomorfizm bo'ladi.***

Isbot. Teoremani isbotlash uchun teskari f^{-1} **akslantirishning uzluksizligini ko'rsatish kerak. Buning uchun ixtiyoriy ochiq** $G \subset X$ **-**

to'plamning f^{-1} akslantirishga nisbatan proobrazi Y da ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Agar G - ochiq bo'lsa, $X \setminus G$ yopiq to'plamdir. Biz bilamizki $X \setminus G$ to'plamning f^{-1} akslantirishga nisbatan proobrazi $f(X \setminus G)$ to'plamdan iborat. Kompakt topologik fazoda $X \setminus G$ to'plam yopiq to'plam bo'lganligi uchun 14-teoremaga ko'ra $X \setminus G$ to'plam kompakt bo'ladi, 23-teoremaga ko'ra esa uning uzluksiz akslantirishdagi obrazi $f(X \setminus G)$ ham kompakt to'plam bo'ladi.Teorema shartiga ko'ra topologik Y fazo xausdorf fazosi bo'lganligi uchun 16-teoremaga ko'ra $f(X \setminus G)$ to'plam yopiq to'plamdir.Engil tekshirib ko'rish mumkin bo'lgan $f(G) = Y \setminus f(X \setminus G)$ tenglikdan $f(G)$ to'plamning ochiqligi kelib chiqadi. Teorema isboti tugadi.

Endi 18-teorema isbotiga qaytaylik.

Bu teorema isbotini, agar X, Y kompakt fazolar bo'lsa, $(x, y) \to x$ qoida bilan aniqlangan $pr : X \times Y \to X$ akslantirishda (proeksiya) yopiq to'plamning obrazi yopiq to'plam ekanligini ko'rsatishdan boshlaymiz.

Bizga $X \times Y$ to'g'ri ko'paytmaning yopiq qism to'plami F berilgan bo'lsin. Uning obrazi prF to'plamning X topologik fazoda yopiq to'plam ekanligini ko'rsatish uchun uning to'ldiruvchisi $G = X \setminus prF$ to'plamning ochiq to'plam ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun $x_0 \in G$ nuqtani qaraylik. Bu nuqta uchun $(x_0, Y) \subset X \times Y \setminus F$ munosabat bajariladi.To'ldiruvchi $X \times Y \setminus F$ ochiq to'plam bo'lgani uchun ixtiyoriy $y \in Y$ nuqta uchun (x_0, y) juftlik birorta $U(x_0, y) = V_y(x_0) \times V_y$ atrofi bilan $X \times Y \setminus F$ to'plamda yotadi. Bu erda $V_y(x_0)$ to'plam x_0 nuqtaning X fazodagi atrofi va u $V_y(x_0) \subset G$ munosabatni qanotlantiradi.Ochiq to'plamlardan iborat $\{ V_y : y \in Y \}$ oila Y fazo uchun ochiq qobiq bo'ladi va Y kompakt bo'lganligi uchun bu oiladan $\{ V_{y_i} : y_i \in Y, i = 1,2 \cdots, n \}$ chekli qobiq ajratish mumkin. Biz V_{y_i} to'plamlarga mos keluvchi x_0 nuqtaning atroflarini $V_{y_i}(x_0)$ ko'rinishda belgilasak,ularning kesishmasi $V = \bigcap V_{y_i}(x_0)$ ochiq to'plam bo'ladi va $V \subset G$

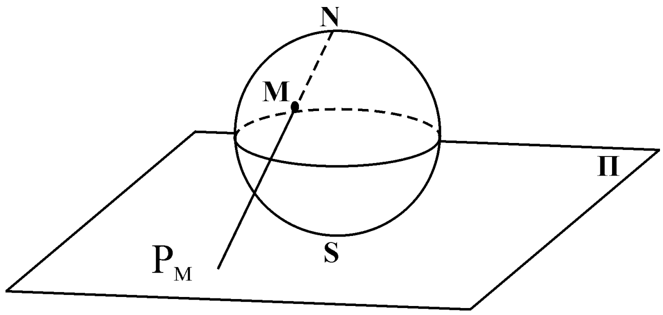
munosabatni qanoatlantiradi. Demak, G **ochiq to'plamdir. Bundan esa** prF **to'plamning yopiq to'plam ekanligi kelib chiqadi.**

Endi agar $\{U_a\}$ **oila** $A\times B$ **to'plamning ochiq qobig'i bo'lsa, undan** $A\times B$ **uchun chekli qobiq ajratish mumkinligini isbotlash kerak.Biz umumiylikni chegaralamagan holda** $A=X$ **va** $B=Y$ **tengliklar bajarilgan deb hisoblaymiz Har bir** α **uchun ochiq qobiqqa tegishli** $\{U_a\}$ **to'plam** $U_\alpha=U_\alpha^1\times U_\alpha^2$ **ko'rinishdagi to'plamlar yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni** $U_\alpha=U_\alpha^1\times U_\alpha^2$ **ko'rinishdagi to'plamlar** $A\times B$ **fazo uchun baza bo'ladi. Bu yerda** $U_\alpha^1\subset X$ **,** $U_\alpha^2\subset Y$ **ochiq to'lamlardir. Biz umumiylikni chegaralamagan holda har bir** α **uchun** $\{U_a\}$ **to'plam** $U_\alpha=U_\alpha^1\times U_\alpha^2$ **to'g'ri ko'paytmadan iborat bo'lsin deb hisoblaymiz. Birorta** $x\in A$ **nuqta uchun** $\{x\}\times B$ **to'plamni qaraylik. Bu to'g'ri** $\{x\}\times B$ **ko'paytma** B **to'plamga gomeomorf bo'lgani uchun kompakt to'plamdir. Shuning uchun** U_α **oiladan** $\{x\}\times B$ **to'plam uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Agar** $U_{\alpha_1}{}^x, U_{\alpha_2}{}^x,\dots,U_{\alpha_k}{}^x$ **to'plamlar** $\{x\}\times B$ **to'plam uchun** $\{U_\alpha\}$ **oiladan ajratilgan chekli qobiq bo'lsa,** $G_x=\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}{}^x$ **to'plam ochiq to'plam bo'lganligi uchun uning** $F_x=X\times Y\setminus G_x$ **to'ldiruvchisi yopiq to'plam bo'ladi. Yuqorida isbotlaganimizga ko'ra to'ldiruvchining** $pr: X\times Y\to X$ **proeksiyadagi obrazi** prF_x **yopiq to'plamdir.Agar** A_x **to'plam** prF_x **to'plamning to'ldiruvchi bo'lsa, to'ғri** $A_x\times B$ **ko'paytma uchun** $A_x\times B\subset G_x$ **munosabat bajariladi. Demak,** $U_{\alpha_1}{}^x, U_{\alpha_2}{}^x,\dots,U_{\alpha_k}{}^x$ **to'plamlardan iborat oila to'g'ri** $A_x\times B$ **ko'paytma uchun ham** $\{U_\alpha\}$ **qobiqdan ajralgan chekli qobiqdir. Endi** $\{A_x : x\in A\}$ **oila** A **to'plam uchun qobiq va** A **kompakt bo'lganligi uchun undan** A **uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Bu oiladan** A **uchun ajralgan chekli qobiq** $A_{x_1}, A_{x_2},\dots,A_{x_m}$ **to'plamlardan iborat bo'lsin. Demak** $\bigcup_{i=1}^m A_{x_i}\supset A$**. Biroq har bir** $A_{x_i}\times B$ **uchun** $\{U_\alpha\}$ **dan chekli** $U_{\alpha_1}{}^{x_i}, U_{\alpha_2}{}^{x_i},\dots,U_{\alpha_{k_i}}{}^{x_i}$ **qobiq ajratish mumkin.**

Lekin $\bigcup_{i=1}^{m}(A_{x_i}\times B)\supset A\times B$ **bo'lganligi uchun** $\{U_\alpha\}$ **dan** $A\times B$ **uchun ham chekli qobiq ajratish mumkin. Demak,** $A\times B$ **kompakt to'plamdir.**

Bu qism oxirida matematikada muhim rol o'ynaydigan topologik akslantirishlardan biri bo'lgan stereografik proeksiyani kiritamiz.

Bizga uch o'lchamli R^3 **evklid fazosida birorta sfera berilgan bo'lsin. Bu sferani** S^2 **bilan, sfera bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan tekislikni** Π **bilan, ularning umumiy nuqtasini** S **bilan belgilaylik. Endi sferaning** S **nuqtasiga diametral qarama – qarshi joylashgan nuqtasini** N **bilan belgilab, sferaning** N **nuqtadan boshqa hamma nuqtalari to'plami bilan** Π **tekislik nuqtalari orasida gomeomorf moslikni o'rnatmoqchimiz. Buning uchun sferaning** N **nuqtadan farqli** M **nuqtasi uchun** NM **to'g'ri chiziqning** Π **tekislik bilan kesishish nuqtasini** P_M **bilan belgilab** $P: S^2\setminus\{N\}\to\Pi$ **akslantirishni** $P(M)=P_M$ **qoida bilan aniqlaymiz.**



Chizma-1.

Endi bu akslantirishning gomeomorf akslantirish ekanligini isbotlaylik. Buning uchun R^3 **fazoda koordinata boshini sfera markaziga joylashtirib** OZ **o'qini** ON **to'g'ri chiziq bo'yicha yo'naltirib dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz. Shunda**

$$S^2=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=R^2\right\}$$

tenglik o'rinli bo'lib, Π **tekislik** $z+R=0$ **tenglama bilan aniqlanadi. Endi sfera nuqtalarining koordinatalari** $x,\ y,\ z$ **bilan,** Π **tekislik nuqtalarining koordinatalarini** $X,\ Y$ **belgilab,** P **akslantirish uchun formula hosil qilamiz.**

Sferadagi $M(x,\ y,\ z)$ **va** $N(0,\ 0,\ R)$ **nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq** $Ï$ **tekislik bilan**

$$\left(\frac{2R}{R-z}x, \frac{2R}{R-z}y\right)$$ **nuqtada kesishadi. Shuning uchun**

$$\underline{P}: S^2 \setminus \{N\} \to \Pi$$

akslantirish

$$\underline{P}(x, y, z) = \left\{\frac{2R}{R-z}x, \frac{2R}{R-z}y\right\} \qquad \textbf{formula}$$

bilan beriladi. Bu erda

$$X(x,z) = \frac{2R}{R-z}x, \quad Y(y,z) = \frac{2R}{R-z}y \qquad \textbf{(1)}$$

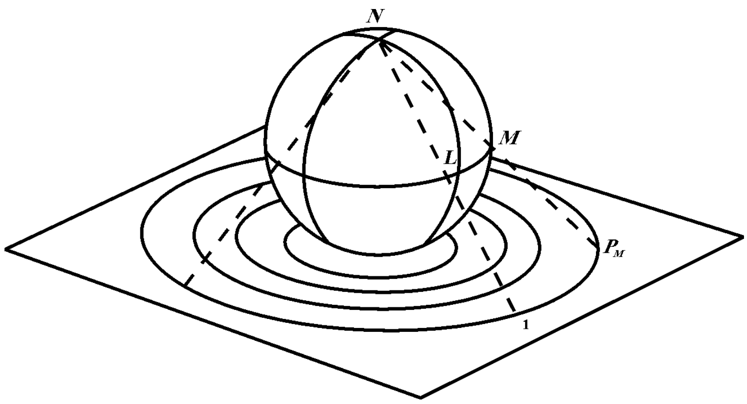
funksiyalar uzluksiz bo'lganligi uchun P **uzluksiz akslantirishdir.**

Endi P **akslantirishga teskari** P^{-1} **akslantirishni topish uchun** $N(0,\ 0,\ R)$ **va** $Q(X,\ Y,\ -R)$ **nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtasini topamiz. Bu kesishish nuqtalari** $N(0,\ 0,\ R)$ **va** $M(x,\ y,\ z)$ **nuqtalar bo'lib,** M **nuqtaning koordinatalari**

$$\begin{cases} x = \dfrac{4R^2}{x^2 + y^2 + 4R^2}X, \\ y = \dfrac{4R^2}{x^2 + y^2 + 4R^2}Y, \\ z = \dfrac{R(x^2 + y^2) - 4R^3}{X^2 + Y^2 + 4R^2} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak (2) formulalar $\underline{P}^{-1}: \Pi \to S^2 \setminus \{N\}$ **akslantirishni aniqlaydi.**

Yuqoridagi keltirilgan (2) sistemadagi $x(X,Y)$**,** $y(X,Y)$**,** $z(X,Y)$ **funksiyalar** $X,\ Y$ **o'zgaruvchilarga nisbatan uzluksiz funksiyalardir. Shuning uchun** P^{-1} **akslantirish uzluksizdir. Quyidagi 2-chizmada sferani** $z = c,\ \ |c| < R$ **tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan aylanalar stereografik proyeksiyada aylanalarga o'tishi tasvirlangan.**



Chizma-2

I - bobga doir mashq va masalalar

1. **Metrik fazoda har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlikning fundamental ekanligi ko'rsatilsin.**

2. **Metrik fazoda berilgan** Y **to'plamning yopiq bo'lishi uchun** Y **to'plam nuqtalaridan iborat barcha yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning limiti** Y **to'plamga tegishli bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.**

3. **Metrik fazoda ixtiyoriy to'plamning yopig'i yopiq to'plamligi ko'rsatilsin.**

4. **Metrik fazoda yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonaligi isbotlansin.**

5. **Haqiqiy sonlar to'plamida ichma-ich joylashgan, uzunligi nolga intiluvchi yopiq kesmalar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh emasligi ko'rsatilsin.**

6. **Haqiqiy sonlar to'plamining qism to'plami ochiq bo'lishi uchun uning o'zaro kesishmaydigan, chekli yoki sanoqli sondagi ochiq intervallarning birlashmasidan iborat bo'lishi zarur va etarli ekanligi isbotlansin.**

7. **Evklid tekisligida bitta nuqtasini chiqarib tashlangandan so'ng ochiq bo'lib qoladigan yopiq to'plamga misol keltiring.**

8. **Kesishmasi ochiq bo'lmagan ochiq to'plamlar sistemasiga misol keltiring.**

9. **Shunday yopiq to'plamlar sistemasiga misol keltiringki, ularning birlashmasi yopiq bo'lmagan to'plamdan iborat bo'lsin.**

10. **Tekislikda** $S^1 = \{(x,y): x = r\cos\beta, \quad y = r\sin\beta; \beta \in [0;2\pi]\}$ **aylana berilgan. Aylanadagi** $\beta = n\alpha\pi$ (α**-irratsional son),** $n \in Z$, **burchakka mos keluvchi nuqtalar to'plamini** A **bilan belgilaymiz. Bu to'plamning aylanada zich ekanligi, ya'ni** $\overline{A} = S^1$ **tenglik isbotlansin.**

11. Bizga X **topologik fazoda** $A \subset X$ **qism to'plam berilgan bo'lsa, uning uchun quyidagi munosabatlar o'rinli ekanligi isbotlansin.**

1) $\vec{A} = A \cup \partial A$

2) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

3) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$

4) $\partial \overline{A} \subset \partial A$

5) $\partial(X \setminus A) = \partial A$

6) $\partial(\operatorname{int} A) \subset \partial A$

7) $\operatorname{int} A = A \setminus \partial A$

12. Ta'rif. ***Berilgan*** X ***-topologik fazo,*** $A \subset X$ ***qism to'plam uchun*** $\overline{A} = X$ ***tenglik o'rinli bo'lsa,*** A ***to'plam hamma yerda zich deyiladi.*** **Bizga** (X, τ) **topologik fazoda ikkita ochiq** Y_1, Y_2 **to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar** Y_1 **va** Y_2 **to'plamlar hamma yerda zich bo'lsa, ularning** $Y_1 \cap Y_2$ **kesishmasi ham hamma yerda zich ekanligi isbotlansin.**

13. Ta'rif. ***Berilgan*** X ***topologik fazoga tegishli har bir nuqtaning atroflari uchun sanoqli baza mavjud bo'lsa,*** X ***fazoda sanoqlilikning I-aksiomasi bajarilgan deyiladi. Agar*** X ***topologik fazoning sanoqli bazasi mavjud bo'lsa,*** X ***fazoda sanoqlilikning 2-aksiomasi bajarilgan deyiladi.*** **Sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilgan topologik fazoda sanoqlilikning birinchi aksiomasi bajarilishi ko'rsatilsin.**

14. Evklid fazosida ochiq sharning yopig'i yopiq shar, sfera esa ochiq hamda yopiq sharlarning chegarasi ekanligi isbotlansin.

15. Berilgan X **to'plamdagi ixtiyoriy topologiyalar oilasining kesishmasi** X **to'plamda topologiya bo'lishi ko'rsatilsin.**

16. Berilgan X to'plamni ikkita yopiq to'plamlarning ayirmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lishi uchun, $\bar{X} \setminus X$ to'plamning yopiq bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

17. Berilgan A to'plam yopiq bo'lishi uchun, $\partial A = A \setminus \operatorname{int} A$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

18. Topologik X fazo va $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. Berilgan A to'plam yopiq bo'lishi uchun uning barcha urinish nuqtalari o'ziga tegishli bo'lishi zarur va etarli ekanligi isbotlansin.

19. Berilgan X topologik fazoning sanoqli va hamma erda zich qism to'plami mavjud bo'lsa, X separabel topologik fazo deyiladi. Metrik fazo separabel bo'lishi uchun unda sanoqlilikning ikkinchi aksiomasi bajarilishi zarur va yetarli ekanliligi ko'rsatilsin.

20. Berilgan A to'plam uchun $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{int} A$ tenglik o'rinli bo'lganda, faqat va faqat shu holdagina A to'plamning ochiq bo'lishi isbotlansin.

21. Uzluksiz akslantirishlarning superpozitsiyasi uzluksiz akslantirish bo'lishi isbotlansin.

22. Bizga X, Y topologik fazolar, $f: X \to Y$ uzluksiz, biektiv akslantirish berilgan bo'lsin. Agar X fazoda ajralgan nuqta mavjud bo'lmasa, u holda Y fazoda ham ajralgan nuqta mavjud emasligi isbotlansin.

23. Bizga X, Y topologik fazolar va $f: X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Berilgan f - akslantiririsch uzluksiz bo'lishi uchun Y topologik fazodagi ixtiyoriy G yopiq to'plamning proobrazi $f^{-1}(G)$ yopiq bo'lishi zarur va etarli ekanligi ko'rsatilsin.

24. Ixtiyoriy uzluksiz $f: [0;1] \to [0;1]$ akslantirish kamida bitta qo'zg'almas nuqtaga egaligi isbotlansin.

25. Teskarisi uzluksiz bo'lmagan o'zaro bir qiymatli uzluksiz akslantirishga misol keltiring.

26. Bizga X, Y topologik fazolar, $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin.To'ғri $X \times Y$ ko'paytmaning qism to'plami bo'lgan $G = \{(x, f(x))\}$ to'plam f akslantirishning grafigi deyiladi. Grafikning ,ya'ni G to'plamning X fazoga gomeomorfligi isbotlansin.

27. Bizga X, Y topologik fazolar va $f: X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Berilgan f akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi shartning bajarilishi zarur va etarliligi isbotlansin: $\forall A \subset X$ uchun $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

28. Bizga (X, d) metrik fazo berilgan bo'lsa, $d(x, y)$ funksiya to'g'ri $X \times Y$ ko'paytmada uzluksiz ekanligi isbotlansin.

29. Bizga X, Y topologik fazolar, $f: X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Berilgan f akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi munosabatning bajarilishi zarur va etarliligi isbotlansin: $\forall A \subset Y$ uchun $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$

30. To'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy ikkita ochiq (yopiq) interval o'zaro gomeomorfligi isbotlansin.

31. Bizga X, Y topologik fazolar berilgan bo'lsa,ularning to'g'ri $X \times Y$ ko'paytmasining X ga proeksiyasi uzluksiz akslantirish ekanligi isbotlansin.

32. Evklid fazosida yopiq shar va yopiq kub gomeomorfligi ko'rsatilsin.

33. Lokal bog'lanishli bo'lmagan, bog'lanishli topologik fazoga misol keltiring.

34. Haqiqiy sonlar to'plamida lokal bog'lanishsiz cheksiz qism to'plamga misol keltiring.

35. Chiziqli bog'lanishli bo'lmagan bog'lanishli to'plamga misol keltiring.

36. Agar A va B bog'lanishli to'plamlar bo'lib, $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ bajarilsa,u holda $A \cup B$ to'plam ham bog'lanishli bo'lishini isbotlang.

37. Berilgan $A \subset R^1$ to'plam bog'lanishli bo'lishi uchun uning intervaldan iborat bo'lishi zarur va etarli ekanligi ko'rsatilsin.

38. Bog'lanishli topologik fazoning uzluksiz akslantirishdagi obrazi bog'lanishli to'plam bo'lishi isbotlansin.

39. Evklid fazosi bog'lanishli fazo ekanligi isbotlansin.

40. Berilgan X topologik fazo yagona bog'lanishlilik komponentasidan iborat bo'lishi uchun, X bog'lanishli fazo bo'lishi zarur va yetarli ekanligi ko'rsatilsin.

41. Chiziqli bog'lanishli, lekin lokal chiziqli bog'lanishli bo'lmagan topologik fazoga misol keltiring.

42. Faraz qilaylik (X, d) kompakt metrik fazoda o'zaro kesishmaydigan, yopiq A va B to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda, $d(A,B)>0$ ekanligi isbotlansin.

43. Faraz qilaylik X metrik fazoda bo'sh bo'lmagan $\{A_n\}$kompakt to'plamlar berilgan bo'lib, ular $A_1 \supset A_2...,$ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing$ va $d(A_n)=\varepsilon_n \to 0$ shartlarni qanoatlantirsin. Bu holda $\bigcap_i A_i$ to'plam bitta nuqtadan iboratligi isbotlansin. Bu yerda $d(A)$ son A to'plamning diametridir.

44. Bizga X, Y topologik fazolar va $f: X \to Y$ uzluksiz, biyektiv akslantirish berilgan bo'lsin. Agar X kompakt fazo va Y Xausdorf fazosi ekanligi ma'lum bo'lsa, berilgan f topologik akslantirish (gomeomorfizm) ekanligi isbotlansin.

45. Faraz qilaylik X kompakt fazo va $f: X \to R^1$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Berilgan f funksiyaning chegaralanganligini va X kompakt fazoda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishishi isbotlansin.

46. Faraz qilaylik X to'la metrik fazo va $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. Berilgan A to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun (ya'ni $\overline{A}$ kompakt to'plam bo'lishi uchun) A to'plamning chegaralangan qism to'plam bo'lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

II BOB

CH I Z I Q L A R N A Z A R I YA S I

Bu bobda biz differensial geometriya kursining asosiy ob'ektlaridan biri bo'lgan egri chiziq tushunchasini kiritamiz, uning berilish usullarini va asosiy geometrik xarakteristikalarini o'rganamiz.

§ 1. Egri chiziq va uning berilish usullari

Ta'rif-1: Fazodagi (yoki tekislikdagi) γ to'plam birorta ochiq intervalning topologik (gomeomorf) akslantirishdagi obrazi bo'lsa, u elementar egri chiziq deb ataladi.

Bu ta'rifga ko'ra, birorta $f:(a;b)\to R^3$ akslantirish uchun, $f((a;b))=\gamma$ tenglik o'rinli bo'lib, $f:(a;b)\to\gamma$ topologik akslantirish bo'lsa, γ elementar egri chiziq deb ataladi.

Biz $f:(a;b)\to R^3$ akslantirish yordamida berilgan elementar γ egri chiziqni qaraylik. Ochiq $(a;b)$ intervalga tegishli ixtiyoriy t nuqtaga mos keluvchi nuqtani $\gamma(t)$ bilan belgilasak, f gomeomorfizmni $t\to\gamma(t)$ ko'rinishda yoza olamiz.Bu $\gamma(t)$ nuqtaning koordinatalarini $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funksiyalar bilan belgilasak, f akslantirish

$$t\to(x(t),y(t),z(t))$$

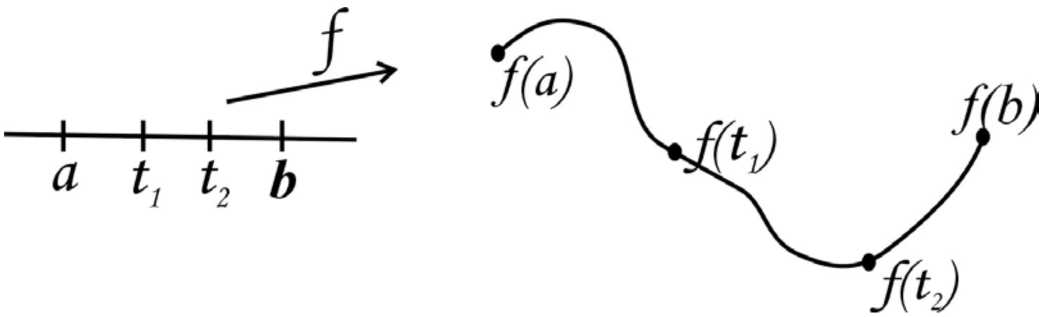
ko'rinishda bo'ladi. Shuning uchun quyidagi tengliklar sistemasi γ chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a<t<b \quad (1) \\ z=z(t), \end{cases}$$

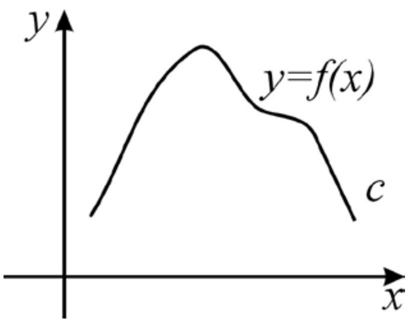
Tabiiyki, $f-$uzluksiz akslantirish bo'lganligi uchun, $x(t),\ y(t),\ z(t)$ koordinatalar t o'zgaruvchining uzluksiz funksiyalaridir. Agar γ elementar

egri chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsa, uning parametrik tenglamalari $x = t,\ y = f(t)$ ko'rinishda bo'ladi. Elementar egri chiziqning parametrik tenglamalari topologik f akslantirish yordamida aniqlanadi. Shuning uchun, agar γ chiziqni boshqa gomeomorfizm yordamida aniqlasak, uning parametrik tenglamalari o'zgaradi. Birinchi bobda ko'rdikki, har qanday ikki ochiq interval o'zaro gomeomorfdir.

Shuning uchun, $f:(a,b)\to R^3$ akslantirish yordamida aniqlangan elementar γ egri chiziqni ixtiyoriy (c,d) intervalning boshqa gomeomorf akslantirishdagi obrazi deb qarash mumkin. Haqiqatdan, agar $g:(c,d)\to(a,b)$ gomeomorfizm bo'lsa, unda γ chiziqni $F:(c,d)\to R^3$ akslantirish yordamida bera olamiz. Bu erda F akslantirish $F(\tau) = f(g(\tau))$ qoida bilan aniqlanadi. Gomeomorfizmlarning kompozitsiyasi sifatida F ham gomeomorfizmdir. Demak, har bir elementar egri chiziqni cheksiz ko'p usullar bilan parametrlash mumkin.



Chizma-1



Chizma-2

Differensial geometriya kursida egri chiziq (1) ko'rinishdagi parametrik tenglamalar yordamida o'rganiladi, ya'ni γ chiziqnini aniqlovchi f akslantirish tanlanib, uning parametrik tenglamalari yoziladi.

Bu holda γ chiziqni parametrlangan elementar egri chiziq deb ataymiz. Matematik analiz asosiy matematik apparat bo'lganligi uchun $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funktsiyalarga qo'shimcha shartlar qo'yamiz.

Ta'rif-2. ***Berilgan γ elementar egri chiziqni differensiallanuvchi $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funksiyalar yordamida parametrlash mumkin bo'lsa, u silliq elementar egri chiziq deb ataladi.***

Izoh: Zarur bo'lgan hollarda, biz yuqori tartibli hosilalarning mavjud va uzluksiz bo'lishini talab qilamiz.

Misollar:

1. Har qanday to'g'ri chiziq elementar egri chiziqdir. Haqiqatdan, agar l to'g'ri chiziq

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, $t \to (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ moslik $(-\infty;+\infty)$ interval bilan l to'g'ri chiziq nuqtalari o'rtasida topologik akslantirish bo'ladi.

2. Ochiq intervalda aniqlangan har qanday uzluksiz funksiyaning grafigi elementar egri chiziqdir. Haqiqatdan ham, agar $y = f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, $x \to (x, f(x))$ moslik (a,b) interval bilan $y = f(x)$ funksiya grafigi nuqtalari o'rtasida gomeomorf akslantirishni beradi.

3. Biz birinchi kursda o'rgangan ikkinchi tartibli chiziqlardan faqat parabola elementar egri chiziq bo'ladi. Haqiqatdan parabola ochiq intervalning topologik akslantirishdagi obrazidir, chunki parabolani uzluksiz funksiyaning grafigi sifatida tasvirlash mumkin.

Ta'rif-3. Bog'lanishli γ to'plamga tegishli har qanday M nuqtaning birorta U_M atrofi mavjud bo'lib, γ to'plamning U_M atrofdagi qismi elementar egri chiziq bo'lsa, γ sodda egri chiziq deb ataladi.

Aylana elementar egri chiziq emas, chunki u hech qanday ochiq intervalga gomeomorf emas. (nima uchun? bu savolga javobni o'quvchilar 1-bobdan topishi mumkin). Lekin u sodda egri chiziqdir. Buni ko'rsatish uchun aylana yotuvchi tekislikda dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz va umumiylikni chegaralamasdan koordinata boshi aylana markazida deb hisoblaymiz. Shunda radiusi R ga teng aylananing parametrik tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0;2\pi].$$

Agar $M(t_0)$ nuqta aylananing $(R\cos t_0; R\sin t_0)$ nuqtasi bo'lsa, etarli kichik $\varepsilon > 0$ uchun

$$t \to (R\cos t; R\sin t), \qquad t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$$

akslantirish $(t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ intervalni uning obraziga gomeomorf akslantiradi. Demak, ixtiyoriy $M(t_0)$ nuqta uchun uning yetarli kichik atrofida aylana elementar egri chiziqqa aylanadi.

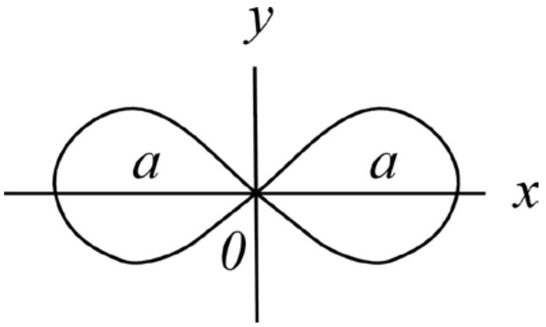
Sodda egri chiziq strukturasi haqidagi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema-1. Har qanday sodda egri chiziq yoki elementar egri chiziqdir, yoki aylanaga gomeomorfdir.

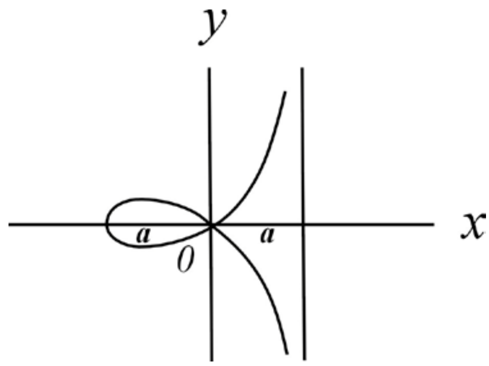
Endi chiziqlar oilasini yana kengaytiramiz.

Buning uchun umumiy egri chiziq tushunchasini kiritamiz. Bizga sodda γ egri chiziq berilgan bo'lib, M esa unga tegishli nuqta bo'lsin. Agar U_M to'plam M nuqtaning atrofi bo'lsa, $U_M \cap \gamma$ kesishmani M nuqtaning γ chiziqdagi atrofi deb ataymiz. Natijada, γ topologik fazoga aylanadi (I-bobdagi keltirilgan topologiya tushunchasiga qarang).

Agar $f\colon\gamma\to R^3$ akslantirish uchun ixtiyoriy $M\in\gamma$ nuqtaning γ da U atrofi mavjud bo'lib, $f|_U : U\to f(U)$ topologik akslantirish bo'lsa, f lokal topologik akslantirish deyiladi.Sodda egri chiziqning lokal topologik akslantirishdagi obrazi umumiy egri chiziq deyiladi. Quyidagi chizmalarda, sodda egri chiziq bo'lmaydigan umumiy egri chiziqlar ko'rsatilgan.



Chizma-3



Chizma-4

Bundan keyin, kurs davomida biz egri chiziq deganda, elementar egri chiziqni, sodda egri chiziqni yoki umumiy egri chiziqni tushunamiz. Umumiy egri chiziqlarning ta'rifiga ko'ra u o'ziga tegishli ihtiyoriy nuqtaning etarli kichik atrofida elementar egri chiziqning topologik akslantirishdagi obrazidir. Shuning uchun, umumiy egri chiziqni ham ixtiyoriy nuqtasining atrofida (1) **ko'rinishdagi parametrik tenglamalar yordamida berish mumkin. Tabiiyki, agar bizga**

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),\quad a < t < b$$

tengliklar sistemasi berilgan bo'lsa, bu sistema birorta egri chiziqning parametrik tenglamalari sistemasi bo'ladimi, degan savol tuғiladi. Bu savolga qisman quyidagi teorema javob beradi.

Teorema-2: Silliq $x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$ ***funktsiyalar hosilalari har bir*** $t\in(a;b)$ ***uchun*** $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ ***shartni qanoatlantirsa,***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in (a,b) \\ z = z(t). \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi umumiy egri chiziqni aniqlaydi.

Bu umumiy egri chiziq (a,b) ***intervalning*** $f: t \to (x(t), y(t), z(t))$ ***akslantirishdagi obrazidir.***

Isbot: Biz etarli kichik $\delta > 0$ **uchun** $(t_0 - \delta; t_0 + \delta)$ **da** f **akslantirishning topologik akslantirish ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun esa etarli kichik** $\delta > 0$ **uchun** f **ning o'zaro bir qiymatli ekanligini ko'rsatish etarlidir.**

Bu faktni teskarisini faraz qilish yordamida isbotlaymiz. Faraz qilaylik, har qanday kichik $\delta > 0$ **uchun ham** f **akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lmasin,** $\{\delta_k\}$ **ketma-ketlik nolga intiluvchi ketma-ketlik bo'lsin. Farazimizga ko'ra, ixtiyoriy** δ_k **uchun** $t_k^1, t_k^2 \in (t_0 - \delta_k, t_0 + \delta_k)$ **lar mavjud bo'lib,** $t_k^1 \neq t_k^2$ **va** $x(t_k^1) = x(t_k^2),\ y(t_k^1) = y(t_k^2),\ z(t_k^1) = z(t_k^2)$ **shartlar bajariladi.**

O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra, shunday $\theta_k^1, \theta_k^2, \theta_k^3 \in (t_k^1, t_k^2)$ **lar mavjud bo'lib,** $x'(\theta_k^1) = 0, \quad y'(\theta_k^2) = 0, \quad z'(\theta_k^3) = 0$ **tengliklar bajariladi.** $\{\delta_k\}$ **ketma-ketlik nolga intilgani uchun** $\{\theta_k^1\},\ \{\theta_k^2\},\ \{\theta_k^3\}$ **ketma-ketliklar** $k \to \infty$ **da** t_0 **ga intiladi. Hosilalar uzluksiz bo'lganligi uchun yuqoridagi tengliklardan** $k \to \infty$ **limitga o'tib,** $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$ **tengliklarni hosil qilamiz. Bu esa teorema shartiga ziddir.** □

Endi (x, y) **koordinatalar sistemasi kiritilgan tekislikda**

$$\varphi(x, y) = 0$$

tenglamani qaraylik. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar birorta egri chiziqni aniqlashi mumkin, yoki aksincha aniqlamasligi ham mumkin.

Teorema-3.** **Bizga differensiallanuvchi** $\varphi(x,y)$ **funktsiya berilgan bo'lib, koordinatalari** $\varphi(x,y)=0$ **tenglamani qanoatlantiruv-chi nuqtalar to'plami** $M=|\{(x,y):\varphi(x,y)=0\}|$ **bo'lsin. Agar** $(x_0;y_0)\in M$ **nuqtada** $\varphi_x^2+\varphi_y^2>0$ **munosabat bajarilsa,** (x_0,y_0) **nuqtaning shunday atrofi mavjudki,** M **to'plamning bu atrofdagi qismi elementar egri chiziq bo'ladi.

Isbot: Faraz qilaylik, (x_0,y_0) **nuqtada** $\varphi_y\neq 0$ **bo'lsin. Shunda oshkormas funksiya haqidagi teoremaga asosan shunday** $\delta>0,\ \varepsilon>0$ **sonlari va** $(x_0-\delta;y_0+\delta)$ **intervalda aniqlangan** $f(x)$ **silliq funktsiya mavjud bo'lib, bu intervalda** $\varphi(x;f(x))=0$ **tenglik o'rinli bo'ladi, va** $\{(x;f(x)):x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\}$ **to'plam** M **to'plamning** $U=\{(x,y):|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\varepsilon\}$ **to'plamdagi qismi bo'ladi. Ravshanki,** M **to'plam** (x_0,y_0) **nuqtaning** U **atrofida** $y=f(x)$ **funksiyaning grafigi bo'ladi. Funksiyaning grafik yuqorida isbotlaganimizga ko'ra elementar egri chiziq bo'ladi.**□

Misol. Biz $\varphi(x,y)=x^2+y^2-9$ **funksiyani qarasak,** $M=|\{(x,y):\varphi(x,y)=0\}|$ **to'plam radiusi 3 ga teng aylanadan iborat bo'ladi. Bu aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqtada qaralayotgan funksiya teorema shartlarini qanoatlantiradi.**

Ba'zi bir egri chiziqlarning parametrik tenglamalarini,

$$\begin{cases} x=t, \\ y=y(t), \quad a<t<b \\ z=z(t), \end{cases}$$

ko'rinishda, yoki

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \quad a<x<b \end{cases}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ba'zi masalalarni yechishda bunday ko'rinish qulaylik tug'diradi. Shu sababli, qaysi hollarda egri chiziqlarni shunday ko'rinishda yozish mumkin degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema-4: Silliq elementar egri γ ***chiziqning parametrik tenglamalari*** (1) ***ko'rinishda bo'lib,*** $t_0 \in (a,b)$ ***uchun*** $x'(t_0) \neq 0$ ***bo'lsa,*** (x_0, y_0, z_0) ***nuqtaning kichik atrofida*** γ ***ni,***

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x), \quad a < x < b \end{cases}$$

tenglamalar yordamida aniqlash mumkin.

Bu erda, $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$

Isbot: Haqiqatdan ham, oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra, shunday $\delta > 0$ **soni va** $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ **intervalda aniqlangan silliq** $t = f(x)$ **funktsiya mavjud bo'lib, u** $t_0 = f(x_0)$ **va** $x = x(f(x))$ **tengliklarni qanoatlantiradi.** $x = x(f(x))$ **teglikni** $x = x_0$ **nuqtada diffrensiallab,** $1 = x'(t_0) \cdot f'(x_0)$ **tenglikni hosil qilamiz.**

Demak, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ **oraliqda** $t = f(x)$ **funksiya monoton funksiyadir.**

Shuning uchun $x \to t = f(x)$ **akslantirish** $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ **ni** $(f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$ **ga topologik akslantiradi. Demak,** $f(x_0 - \delta_1) < t < f(x_0 + \delta)$ **bo'lganda** γ **ni**

$$\begin{aligned} y &= y(f(x)) = \varphi(x) \\ z &= z(f(x)) = \psi(x), \qquad x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1 \end{aligned}$$

ko'rinishda aniqlash mumkin. □

To'rtinchi teorema fazoviy chiziqlar uchun quyidagicha bo'ladi.

Teorema-5. $F(x, y, z)$ ***va*** $G(x, y, z)$ ***uch o'zgaruvchili silliq funksiyalar,*** M ***esa koordinatalari***

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami bo'lsin. Agar $(x_0, y_0, z_0) \in M$ ***nuqtada***

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng bo'lsa, (x_0, y_0, z_0) ***nuqtaning shunday atrofi mavjudki,*** M ***ning bu atrofdagi qismi silliq elementar egri chiziq bo'ladi.***

Isbot. Umumiylikni chegaralamasdan

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$$

determinant, (x_0, y_0, z_0) **nuqtada noldan farqli bo'lsin, deb faraz qilamiz. Oshkormas funktsiyalar haqidagi teoremaga asosan shunday** $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ **musbat sonlar mavjudki,** $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ **intervalga tegishli har bir** x **uchun sistema**

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

yagona $y(x), z(x)$ **yechimga ega bo'ladi va bu yechim**

$$|y_0 - y(x)| < \delta_2, \quad |z_0 - z(x)| < \delta_3$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi. Demak, (x_0, y_0, z_0) **nuqtaning** $\{(x,y,z): |x_0 - x| < \delta_1, \quad |y_0 - y| < \delta_2, |z_0 - z| < \delta_3\}$ **atrofida** M **to'plam**

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \quad x_0 - \delta_1 < t < x_0 + \delta_1 \\ z = z(t), \end{cases}$$

parametrik tenglamalar bilan aniqlanuvchi elementar egri chiziq bo'ladi.□

Ta'rif-4. ***Silliq*** γ ***egri chiziqni uniga tegishli har qanday nuqtaning birorta atrofida ixtiyoriy*** $t \in (a;b)$ ***uchun*** $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0$ ***shartni qanoatlantiruvchi differensiallanuvchi*** $x(t), y(t), z(t)$ ***funksiyalar yordamida parametrlash mumkin bo'lsa, u regulyar egri chiziq deb ataladi.***

Biz bu bobda asosan regulyar egri chiziqlarni o'rganamiz. Agar γ **egri chiziqning har bir nuqtasi atrofida** k **marta differentsiallanuvchi** $x(t), y(t), z(t)$ **funksiyalar yordamida aniqlanuvchi regulyar parametrlash usuli mavjud bo'lsa, chiziqni** k **marta differentsiallanuvchi chiziq deb ataymiz.**

Mashqlar va masalalar

1. **Ikkinchi tartibli chiziqlardan qaysi biri bizning kursimizda kiritilgan ma'noda chiziq bo'lishini tekshiraylik.**

Sizga ma'lumki, ikkinchi tartibli chiziq

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (2)$$

tenglama bidan aniqlanadi. Agar

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinant noldan farqli bo'lsa, (2) tenglama yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziqni aniqlaydi. Bunday chiziqlar markaziy chiziqlar deb ataladi.

Markaziy chiziqlar ellips, giperbola va ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan iboratdir. Bulardan ellips sodda chiziq bo'ladi. Giperbola esa ikkita elementar chiziqdan iborat. Ikkita kesishuvchi to'ғri chiziqlar esa biz kiritgan ma'noda bitta chiziq bo'lmaydi. Agar $\delta=0$ **bo'lsa, ikkinchi tartibli chiziq yoki markazga ega bo'lmaydi, yoki cheksiz ko'p markazga ega bo'ladi. Demak bu holda, (2) tenglama parabola, ikkita parallel to'ғri chiziq yoki ustma-ust tushuvchi ikkita to'g'ri chiziqlardan birortasini aniqlaydi.**

Parabolaning kanonik tenglamasi

$$y'^2 = 2px', \qquad p > 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, parabola $x' = \dfrac{y'^2}{2p}$ **funksiyaning grafigi va elementar chiziqdir. Ikkita parallel to'g'ri chiziqlar esa ikkita elementar chiziqdan, ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar esa bitta elementar chiziqdan iborat.**

2. **Parabolaning regulyar chiziq ekanligini isbotlaylik. Buning uchun uning tenglamasini**

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0$$

kanonik ko'rinishda yozamiz. Agar $y = t$ **tenglik bilan parametr kiritsak, parabola**

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t. \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$

parametrik tenglamalarga ega bo'ladi. Bu erda $x'^2 + y'^2 = \dfrac{t^4}{4p^2} + 1 > 0$ **bo'lganligi uchun parabola cheksiz ko'p marta differensiallanuvchi regulyar chiziqdir.**

3. **Bizga** $y' = ky$ **differensial tenglama berilgan bo'lsin. Uning echimi** $y' = Ce^{kx}$ **ko'rinishda bo'ladi. Yechimning grafigi**

$$\begin{cases} x = t, \\ y = Ce^{kt}. \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$

parametrik tenglamalarga ega bo'lgan regulyar chiziqdir.

4. **Tekislikda**

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan chiziq regulyar emas, chunki u $M(t=0)$ **nuqta atrofida regulyar parametrlash usuliga ega emas.**

5. **Tekislikda**

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan chiziq umumiy chiziq bo'ladi, chunki $M_1(t=-1)$ **va** $M_2(t=1)$ **nuqtalar tekislikda ustma-ust tushadi. Bu umumiy chiziq**

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan elementar chiziqning

$$f(t) = (t^2 - 1, \quad t^3 - t)$$

formula bilan aniqlangan $f\colon \gamma \to R^2$ **lokal topologik akslantirishdagi obrazidir (4-chizma).**

6. Bernulli lemniskatasi (3-chizma). Tekislikda har biridan berilgan F_1 **va** F_2 **nuqtalargacha bo'lgan masofalarning ko'paytmasi** F_1 **va** F_2 **nuqtalar orasidagi masofa yarmining kvadratiga teng bo'lgan nuqtalar to'plami Bernulli lemniskatasi deb ataladi. Bernulli lemniskatasining umumiy chiziq ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun tekislikda** OX **o'qi sifatida** F_1F_2 **to'ғri chiziqni,** OY **o'qi sifatida** F_1F_2 **kesma o'rtasidan o'tuvchi va** OX **o'qiga perpendikulyar to'ғri chiziqni olib,** $|F_1F_2| = 2C$ **belgilash kiritamiz. Shunda Bernulli lemniskatasiga tegishli ixtiyoriy** $M(x, y)$ **nuqta uchun**

$$\sqrt{(x+C)^2 + y^2}\sqrt{(x-C)^2 + y^2} = C^2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni kvadratga ko'tarib soddalashtirish natijasida, quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2C^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Endi $x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$ **formulalar yordamida qutb koordinatalar sistemasiga o'tsak**

$$\rho^2 = 2C^2\cos^2\varphi$$

tenglamani hosil qilamiz. Endi bu chiziqning umumiy chiziq ekanligi

$$\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan aylananing

$$f\colon M(\varphi) \to (C\sqrt{2\cos^2\varphi}, \varphi)$$

formula yordamida aniqlangan lokal topologik akslantirishdagi obrazi Bernulli lemniskatasi bilan ustma-ust tushishidan kelib chiqadi.

§ 2. Vektor funksiyalar uchun differensial hisob

Bizning kursimizda vektor analiz muhim rol o'ynaydi. Shuning uchun bu paragrafda qisqacha vektor-funksiyalar ustida to'xtalamiz.

Birorta G **to'plam berilgan bo'lsin. Agar** G **to'plamning har bir nuqtasiga aniq bitta vektor mos qo'yilgan bo'lsa,** G **to'plamda vektor funksiya berilgan deyiladi. Bu moslikni** $p \to \vec{r}(p)$ **ko'rinishda yozamiz.**

Vektor-funksiya uchun limit tushunchasi skalyar funksiyalar limiti kabi kiritiladi.

Ta'rif. Berilgan $\vec{r}(p)$ ***vektor-funksiya va o'zgarmas*** $\vec{a}$ ***vektor uchun*** $p \to p_0$ ***da*** $|\vec{r}(p) - \vec{a}| \to 0$ ***munosabat bajarilsa,*** $\vec{r}(p)$ ***vektor*** $p \to p_0$ ***da*** $\vec{a}$ ***limitga ega deyiladi va*** $\vec{r}(p) \to \vec{a}$ ***ko'rinishda yoziladi.***

Bu yerda $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$ **bo'lib,** $(\vec{a}, \vec{a})$ **esa skalyar ko'paytmadir. Agar fazoda kiritilgan dekart koordinatalar sistemasida**

$$\vec{r}(p) = \{\, x(p), y(p), z(p) \,\}, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

bo'lsa, $p \to p_0$ **da** $\vec{r}(p) \to \vec{a}$ **munosabat quyidagi uchta munosabatga ekvivalentdir:**

$$x(p) \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} a_1, \quad y(p) \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} a_2, \quad z(p) \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} a_3.$$

Vektor-funksiya limiti uchun quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema-6. Berilgan $\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)$ ***-vektor-funksiyalar va*** $\lambda(p)-$ ***skalyar funksiya*** G ***to'plamda aniqlangan bo'lib, ular uchun*** $p \to p_0$ **da** $\vec{r}(p) \to \vec{a}$, $p \to p_0$ **da** $\vec{\rho}(p) \to \vec{b}$ ***va*** $\lim\limits_{p \to p_0} \lambda(p) = \lambda_0$ ***tengliklar bajarilsa, quyidagi munosabatlar o'rinlidir;***

1). $\vec{r}(p) \pm \vec{\rho}(p) \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} \vec{a} \pm \vec{b},$

2). $\lambda(p)\vec{r}(p) \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} \lambda_0 \vec{a},$

3). $(\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)) \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} (\vec{a}, \vec{b})$

4). $[\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)] \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} [\vec{a}, \vec{b}]$

Bu yerda $[,]-$ **vektor ko'paytma belgisi.**

Isbot.

1). Vektor funksiya limiti ta'rifga ko'ra,

$$\vec{d}(p) = \vec{r}(p) \pm \vec{\rho}(p), \quad \vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$$

belgilashlar kiritib

$$\left|\vec{d}(p) - \vec{c}\right| \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)$$

munosabatni isbotlaymiz. Buning uchun

$$\left|\vec{d}(p) - \vec{c}\right| = \left|(\vec{r}(p) - \vec{a}) \pm (\vec{\rho}(p) - \vec{b})\right| \le \left|\vec{r}(p) - \vec{a}\right| + \left|\vec{\rho}(p) - \vec{b}\right|$$

tengsizlikni yozib olamiz. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi ifoda $p \to p_0$ **da nolga intiladi. Shuning uchun** $(*)$ **munosabat o'rinli bo'ladi.**

2). Ikkinchi munosabat

$$\left|\lambda(p)\vec{r}(p)-\lambda_0\vec{a}\right| = \left|\lambda(p)\vec{r}(p)-\lambda(p)\vec{a}+\lambda(p)\vec{a}-\lambda_0\vec{a}\right| \le$$
$$\le \left|\lambda(p)\right|\left|\vec{r}(p)-\vec{a}\right| + \left|\lambda(p)-\lambda_0\right|\left|\vec{a}\right|.$$

tengsizlikdan kelib chiqadi.

3). Teoremaning uchinchi tasdig'ini isbotlash uchun skalyar ko'paytmalarni vektorning dekart koordinatalari orqali ifodalash yetarli.

4). Siz analitik geometriya kursidan bilasizki,

Agar,

$$\vec{r}(p) = \{x_1(p), y_1(p), z_1(p)\}, \quad \vec{\rho}(p) = \{x_2(p), y_2(p), z_2(p)\}$$

bo'lsa,

$$\left[\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)\right] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1(p) & z_1(p) \\ y_2(p) & z_2(p) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1(p) & x_1(p) \\ z_2(p) & x_2(p) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1(p) & y_1(p) \\ x_2(p) & p_2(p) \end{vmatrix} \right\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Vektor-funksiya limiti ta'rifiga asosan $p \to p_0$ **da**

$\vec{r}(p) \to \vec{a}, \quad \vec{\rho}(p) \to \vec{b}$ **bo'lgani uchun**

$$x_1(p) \to a_1, \quad y_1(p) \to a_2, \quad z_1(p) \to a_3 \text{ va}$$

$$x_2(p) \to b_1, \quad y_2(p) \to b_2, \quad z_2(p) \to b_3.$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Bu erda $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}.$

Shuning uchun,

$$\left[\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)\right] \underset{p \to p_0}{\to} \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

munosabatni hosil qilamiz. □

Vektor funksiyalar uchun uzluksizlik va differensiallanuvchanlik tushunchalari skalyar funksiyalar uzluksizligi va diffrensiallanuvchiligi tushunchalari kabi kiritiladi.

Agar $\vec{r}(p) \underset{p\to p_0}{\to} \vec{r}(p_0)$ **munosabat bajarilsa,** $\vec{r}(p)$ **vektor-funksiya** p_0 **nuqtada uzluksiz deyiladi. Limit ta'rifiga ko'ra** $\vec{r}(p)$ **vektor-funktsiyaning** p_0 **nuqtada uzluksizligi** $x(p), y(p),\ z(p)$ **funksiyalarning** p_0 **nuqtada uzluksizligiga ekvivalentdir.**

Teorema-7. Berilgan $\vec{r}(p)$ ***va*** $\vec{\rho}(p)-$***vektor funksiyalar va*** $\lambda(p)$ ***funksiya*** p_0 ***nuqtada uzluksiz bo'lsa,*** $\lambda(p)\cdot\vec{r}(p),\ \vec{r}(p)\pm\vec{\rho}(p),\ [\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]$ ***vektor funksiyalar va*** $(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p))$ ***funksiya ham*** p_0 ***nuqtada uzluksizdir.***

Bu teorema 1-teoremadan bevosita kelib chiqadi.

Endi hosila tushunchasini kiritamiz. Vektor funksiya aniqlangan G **to'plam sonlar o'qining qism to'plami bo'lsa,** $\vec{r}(p)$ **vektor-funksiya bir o'zgaruvchili vektor-funksiya bo'ladi. Agar** $p_0\in G$ **nuqta uchun**

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(p_0+h)-\vec{r}(p_0)}{h}$$

mavjud bo'lsa, uni $\vec{r}'(p_0)$ **bilan belgilaymiz va** $\vec{r}(p)$ **vektor-funksiyaning** p_0 **nuqtadagi hosilasi deb ataymiz.**

Agar

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(p_0+h)-\vec{r}(p_0)}{h}=\vec{r}'(p_0)$$

tenglikni koordinatalar orqali yozsak u

$$\vec{r}'(p_0)=\{x'(p_0),\quad y'(p_0),\quad z'(p_0)\}$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, $\vec{r}(p)-$**vektor-funksiya** p_0 **nuqtada hosilaga ega bo'lishi uchun** $\{x'(p_0),\quad y'(p_0),\quad z'(p_0)\}$ **hosilalarning mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.**

Agar G **to'plam tekislikdagi birorta soha bo'lsa,** $p=(u,v)$ **belgilash kiritamiz. Bu holda** $\vec{r}(p)$ **va uning koordinata funksiyalari**

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ **ikki o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi. Demak, endi xususiy hosilalar haqida gapirishimiz mumkin.**

Yuqoridagi hosila tushunchasidan foydalanib,

$$\vec{r}'_u(u,v) = \{x'_u, \quad y'_u, \quad z'_u\} \text{ va } \vec{r}'_v(u,v) = \{x'_v \,, \quad y'_v \,, \quad z'_v\}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Hosilalar uchun quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema-8. $\vec{r}(p), \vec{\rho}(p) -$ ***vektor-funksiyalar va*** $\lambda(p)$ ***funksiya*** p_0 ***nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, quyidagi munosabatlar o'rinlidir:***

1). $(\lambda(p)\vec{r}(p))' = \lambda'\vec{r}' + \lambda\vec{r},$

2). $(\vec{r}(p) \pm \vec{\rho}(p))' = \vec{r}(p) \pm \vec{\rho}'(p),$

3). $(\vec{r}(p), \vec{\rho}(p))' = (\vec{r}'(p), \vec{\rho}(p)) + (\vec{r}(p), \vec{\rho}'(p)),$

4). $[\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)]' = [\vec{r}'(p), \vec{\rho}(p)] + [\vec{r}(p), \vec{\rho}')].$

Isbot.

1). Berilgan $\vec{r}(p)$ **vektor-funksiyani** $\lambda(p)$ **ga ko'paytirib**

$$\lambda(p)\vec{r}(p) = \{\lambda(p)x(p), \quad \lambda(p)y(p), \quad \lambda(p)z(p)\}$$

tenglikni yozsak, darhol bu tenglikdan

$$(\lambda(p)\vec{r}(p))' = \lambda'(p)\vec{r}(p) + \lambda(p)\vec{r}'$$

munosabat kelib chiqadi.

2). Ikkinchi tenglik isbotini o'quvchilarga qoldirib, 3-va 4-tengliklarni isbotlaylik. Uchinchi tenglikda skalyar ko'paytma skalyar miqdor bo'lganligi uchun uning hosilasini topish uchun

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\vec{r}(p+h), \vec{\rho}(p+h)) - (\vec{r}(p), \vec{\rho}(p))}{h}$$

limitni hisoblaymiz.

Buning uchun

$$(\vec{r}(p+h), \vec{\rho}(p+h)) - (\vec{r}(p), \vec{\rho}(p)) = (\vec{r}(p+h) - \vec{r}(p), \vec{\rho}(p+h)) +$$
$$+ (\vec{r}(p), \vec{\rho}(p+h) - \vec{\rho}(p))$$

tenglikdan foydalanib,

$$(\vec{r}(p),\vec{\rho}(p))' = \lim_{h\to 0}(\frac{\vec{r}(p+h)-\vec{r}(p)}{h},\vec{\rho}(p+h))+$$

$$+\lim_{h\to 0}(\vec{r}(p),\frac{\vec{\rho}(p+h)-\vec{\rho}(p)}{h}).$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning o'ng tomoni

$$(r'(p),\vec{\rho}(p))+(\vec{r}(p),\vec{\rho}'(p))$$

miqdorga tengdir.

4-tenglikni isbotlash uchun

$$[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]' = \lim_{h\to 0}\frac{[\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h)-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]}{h}$$

tenglikda

$$[\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h)]-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]=[\vec{r}(p+h),\vec{\rho}(p+h)]-$$
$$-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p+h)]+[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p+h)]-[\vec{r}(p),\vec{\rho}(p)]$$

munosabatdan foydalanish yetarlidir.□

Endi bir o'zgaruvchili $\vec{r}(t)$ vektor-funksiya uchun integral tushunchasini kiritaylik. Agar $\vec{r}(t)$ vektor-funktsiya uchun diffrensiallanuvchi $\vec{\rho}(t)$ vektor-funksiya mavjud bo'lib, $\vec{r}(t)=\vec{\rho}'(t)$ tenglik bajarilsa, $\vec{\rho}(t)$ vektor-funksiya $\vec{r}(t)$ vektor-funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\vec{\rho}(t)=\int\vec{r}(t)dt$$

Aniq integral esa quyidagi formula yordamida aniqlanadi.

$$\int_a^b\vec{r}(t)dt=\vec{\rho}(b)-\vec{\rho}(a),$$

Vektor-funksiyaning integrallari uchun quyidagi formulalar bevosita integral va hosila ta'riflari yordamida isbotlanadi:

$\int_a^b\vec{r}(t)dt=\int_a^c\vec{r}(t)dt+\int_c^b\vec{r}(t)dt,$ **bu erda,** $a\le c\le b.$

$\int_a^b \lambda\cdot\vec{r}(t)dt=\lambda\cdot\int_a^b\vec{r}(t)dt,$ **bu erda,** $\lambda -$ **o'zgarmas son.**

$\int_a^b (\vec{r},\vec{\rho}(t))dt=(\vec{r},\int_a^b\vec{\rho}(t)dt),$ **bu erda,** $\vec{r}-$ **o'zgarmas vektor.**

$\int_a^b [\vec{r},\vec{\rho}(t)]dt=[\vec{r},\int_a^b\vec{\rho}(t)dt],$ **bu erda,** $\vec{r}-$ **o'zgarmas vektor.**

Bu tengliklardan uchinchisini isbotlab, qolganlarini o'quvchilarga havola etamiz.

Buning uchun

$$\mu(t)=(\vec{r},\int\vec{\rho}(t)), \qquad \lambda(t)=\int(\vec{r},\vec{\rho}(t))dt$$

belgilashlar kiritamiz va $\vec{r}-$ **o'zgarmas vektor ekanligini hisobga olib,** $\mu(t),\quad \lambda(t)-$ **skalyar differensiallanuvchi funksiyalarning hosilalarini topamiz.**

$\vec{\mu}'(t)=(\vec{r},\vec{\rho}(t)), \quad \lambda'(t)=(\vec{r},\vec{\rho}(t))$ **ya'ni hosilalari tengdir. Demak,**

$$\int_a^b\vec{\mu}'(t)dt=\int_a^b\lambda'(t)dt$$

sistemalar ham teng bo'ladi.

Endi differensiallanuvchi vektor-funksiya uchun quyidagi muhim teoremani isbotlaymiz.

Teorema-9. Biror segmentda aniqlangan $\vec{r}(t)$ **vektor-funksiya uchun quyidagilar o'rinlidir:**

1). $\vec{r}(t)$ **vektor funksiyaning uzunligi o'zgarmas bo'lishi uchun** $\vec{r}(t)\perp\vec{r}'(t)$ **shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.**

2). $\vec{r}(t)$ **vektor-funksiyaning yo'nalishi o'zgarmas bo'lishi uchun,** $\vec{r}(t)//\vec{r}'(t)$ **shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.**

Isbot. 1). Uzunlik kvadrati uchun $|\vec{r}(t)|^2 = (\vec{r}(t), \vec{r}(t))$ **tenglik o'rinli bo'lganligi uchun,** $\frac{d}{dt}|\vec{r}(t)|^2 = 2(\vec{r}(t), \vec{r}'(t))$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,**

$$|\vec{r}(t)|^2 = const \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{r}(t), \vec{r}'(t)) = 0.$$

2). Agar $\vec{r}(t)$ **vektor-funksiyaning yo'nalishi o'zgarmas bo'lsa, uni** $\vec{r}(t) = \lambda(t) \cdot \vec{e}$ **ko'rinishda yozamiz, bu erda** $\vec{e}$ **vektor** $\vec{r}(t)$ **yo'nalishdagi birlik vektordir.Yuqoridagi tenglikni differensiallab** $\vec{r}'(t) = \lambda'(t) \cdot \vec{e}$ **tenglikni hosil qilamiz. Demak** $\vec{r}$ **va** $\vec{r}\,'$ **vektorlar kollineardir.**

Agar $\vec{r}$ **va** $\vec{r}'$ **kollinear bo'lsa, ya'ni birorta** $\lambda(t)$ **funksiya uchun** $\vec{r}'(t) = \lambda(t) \cdot \vec{r}(t)$ **tenglik o'rinli bo'lsa,** $\vec{r}(t)$ **vektorning yo'nalishi o'zgarmas ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun** $\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|\, \vec{e}(t)$ **tenglikni yozib, uni differensiallaymiz. Bu yerda** $\vec{e}(t)$ **birlik vektor va uning yo'nalishi** $\vec{r}(t)$ **yo'nalishi bilan bir xildir. Agar** $\vec{r}(t) = \vec{0}$ **bo'lsa,** $\vec{e}(t)$ **vektor sifatida yo'nalishi ixtiyoriy differensiallanuvchi birlik vektor-funksiyani olish mumkin. Demak, endi**

$$\vec{r}'(t) = |\vec{r}(t)|'\, \vec{e}'(t) + |\vec{r}(t)|\, \vec{e}'(t)$$ **tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa,**

$$|\vec{r}(t)|'\, \vec{e}(t) + |\vec{r}(t)|\vec{e}\,'(t) = \lambda(t)|\vec{r}(t)|\vec{e}(t)$$

yoki $\left(|\vec{r}(t)|' - \lambda(t)|\vec{r}(t)|\right)\vec{e}(t) + |\vec{r}(t)|\vec{e}\,'(t) = \vec{0}$ **tenglik kelib chiqadi.**

Bu yerda $\vec{e}(t)$ **va** $\vec{e}'(t)$ **o'zaro perpendikulyar vektorlar bo'lganligi uchun bu tenglikdan** $\frac{d\vec{e}(t)}{dt} = \vec{0}$ **kelib chiqadi. Demak,** $\vec{e}(t)$ **- o'zgarmas vektordir.** □

Bu paragraf oxirida $n-$ **marta differensiallanuvchi** $\vec{r}(t)$ **vektor funksiya uchun Teylor qatorini keltiramiz. Vektor funksiya uchun Teylor qatorini**

yozish uchun fazoda dekart koordinatalar sistemasini aniqlovchi ortonormal $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ **bazisda**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

tenglikni yozib, $x(t), y(t), z(t)$ **funksiyalar uchun Teylor qatorini yozamiz:**

$$x(t+\Delta t) = x(t) + x'(t)\Delta t + x''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + ... + x^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!} + \frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_1(t,\Delta t)$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t + y''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + ... + y^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!} + \frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_2(t,\Delta t)$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + z'(t)\Delta t + z''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + ... + z^{(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!} + \frac{\Delta t^n}{n!}\varepsilon_3(t,\Delta t)$$

Bu tengliklardan

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{r}\,'(t)\Delta t + \vec{r}\,''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + ... + \vec{r}^{\,(n)}(t)\frac{\Delta t^n}{n!} + \frac{\Delta t^n}{n!}\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

qatorni hosil qilamiz. Bu yerda

$$\vec{\varepsilon}(t,\Delta t) = \{\varepsilon_1(t,\Delta t), \varepsilon_2(t,\Delta t), \varepsilon_3(t,\Delta t)\}$$

va $\left|\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)\right| \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$ **munosabat o'rinlidir.**

Masalan, $n=1$ **va** $n=2$ **bo'lganda**

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{r}\,'(t)\Delta t + \Delta t\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{r}\,'(t)\Delta t + \vec{r}\,''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\Delta t^2}{2!}\vec{\varepsilon}(t,\Delta t)$$

qatorlar hosil bo'ladi.

Mashqlar va masalalar

1. Birorta $[a,b]$ kesmada aniqlangan $\vec{r}(t)$ vektor funksiya uchun $\vec{r}(t)\neq\vec{0}$, $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$ va $\vec{r}(t)//\vec{r}\,'$ shartlar har bir $t\in[a,b]$ uchun bajarilsa,

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$

tenglama to'g'ri chiziq kesmasini aniqlashini ko'rsataylik.

Buning uchun $\vec{r}(t)=\lambda(t)\vec{r}\,'(t)$ tenglikni yozib $\vec{e}(t)=\dfrac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$ vektorning o'zgarmas vektor ekanligini ko'rsataylik. Hosilani hisoblab

$$\frac{d}{dt}\vec{e}(t)=\frac{|\vec{r}(t)\vec{r}\,'(t)|-\vec{r}(t)\dfrac{(\vec{r}(t),\vec{r}\,'(t))}{|\vec{r}(t)|}}{\vec{r}^{\,2}(t)}=\frac{\lambda^2|\vec{r}\,'(t)|^2\vec{r}\,'(t)-\lambda^2|\vec{r}\,'(t)|^2\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}(t)|^3}=\vec{0}$$

tenglikni olamiz. Demak $\vec{r}(t)$ yo'nalishi o'zgarmas vektor va uning uchi to'g'ri chiziq kesmasini chizadi.

2. Tekislikdagi birorta G sohada aniqlangan differensiallanuvchi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiya berilgan. Berilgan $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning uzunligi o'zgarmas bo'lishi uchun, $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir. Bu faktni isbotlash uchun

$$|\vec{r}|^2=(\vec{r},\vec{r})$$

tenglikdan foydalanamiz. Agar $|\vec{r}(u,v)|=const$ bo'lsa,

$$0=\frac{d}{du}|\vec{r}|^2=\frac{d}{du}(\vec{r},\vec{r})=2(r,\vec{r}_u)$$

$$0=\frac{d}{du}|\vec{r}|^2=\frac{d}{du}(\vec{r},\vec{r})=2(r,\vec{r}_v)$$

tengliklardan $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ tengliklar kelib chiqadi.

Endi $\vec{r}\perp\vec{r}_u$, $\vec{r}\perp\vec{r}_v$ bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu holda

$$\frac{d}{du}|\vec{r}|^2=2(r,\vec{r}_u)=0,\quad \frac{d}{du}|\vec{r}|^2=2(r,\vec{r}_v)=0$$

tengliklardan $|\vec{r}(u,v)|$ funksiyaning o'zgarmas ekanligi kelib chiqadi.

3. Tekislikdagi birorta G sohada aniqlangan differensiallanuvchi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning $\vec{r}_u$, r_v vektorlarning ikkalasiga ham kollinear bo'lishi uning yo'nalishi o'zgarmas ekanligiga teng kuchli ekanligini ko'rsataylik.

Agar $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning yo'nalishi o'zgarmas bo'lsa, uni $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{e}$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $\lambda(u,v)-$skalyar funksiya bo'lib, $\vec{e}-$o'zgarmas birlik vektordir. Bu ko'rinishdan $\vec{r}_u=\lambda_u(u,v)\vec{e}$, $\vec{r}_v=\lambda_v(u,v)\vec{e}$ tengliklarni hosil qilamiz. Demak $\vec{r}(u,v)$ vektor $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorning ikkalasiga ham kollineardir.

Endi $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_u$, $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_v$, tengliklar o'rinli deb faraz qilib, $\vec{e}(u,v)=\dfrac{\vec{r}(u,v)}{|\vec{r}(u,v)|}$ vektorning o'zgarmas vektor ekanligini ko'rsataylik.

Buning uchun $\dfrac{d}{du}\vec{e}=\vec{0}$, $\dfrac{d}{dv}\vec{e}=\vec{0}$, tengliklarni isbotlaymiz.

$$\frac{d}{du}\vec{e}=\frac{\vec{r}_u|\vec{r}|-\vec{r}\,\dfrac{(\vec{r},\vec{r}_u)}{|\vec{r}|}}{|\vec{r}^2|}=\frac{\vec{r}_u|\vec{r}|^2-\vec{r}(\vec{r},\vec{r}_u)}{|\vec{r}|^3}=\frac{\lambda^2|\vec{r}_u|^2\vec{r}_u-\lambda^2|\vec{r}_u|^2\vec{r}_u}{|\vec{r}|^3}=\vec{0}$$

Xuddi shunday

$$\frac{d}{dv}\vec{e}=\frac{\mu^2|\vec{r}_v|^2\vec{r}_v-\mu^2|\vec{r}_v|^2\vec{r}_v}{|\vec{r}|^3}=\vec{0}$$

tenglikni olamiz. Demak $\vec{r}(u,v)=|\vec{r}(u,v)|\vec{e}$ bo'lib, $\vec{r}$ vektorning yo'nalishi o'zgarmasdir.

4. Birorta G sohada aniqlangan differensiallanuvchi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning xususiy hosilalari $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorlar nol vektor bo'lishi $\vec{r}(u,v)$ ning o'zgarmas vektor bo'lishiga teng kuchli ekanligini ko'rsataylik.

Xususiy hosilalar uchun

$$\vec{r}_u = \vec{0}, \; \vec{r}_v = \vec{0}$$

tengliklar o'rinli bo'lsa, $\vec{r}(u,v)$ ning koordinata funksiyalari uchun

$$x_u = 0, \qquad x_v = 0$$
$$y_u = 0, \qquad y_v = 0$$
$$z_u = 0, \qquad z_v = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Demak $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyalar o'zgarmasdir. Bundan esa

$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$$

vektorning o'zgarmas ekanligi kelib chiqadi. Aksincha, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funksiyaning o'zgarmas vektor ekanligidan $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ funksiyalar o'zgarmas bo'lishi kelib chiqadi. Bundan esa

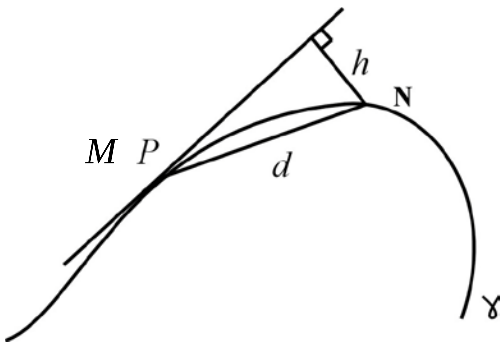
$$\vec{r}_u = \vec{0}, \; \vec{r}_v = \vec{0}$$

tengliklar hosil bo'ladi.

§ 3. Egri chiziq urinmasi va normal tekisligi

Elementar γ egri chiziqning M nuqtasidan o'tuvchi urinma tushunchasini kiritib, uning tenglamasini keltirib chiqaraylik. Buning uchun M nuqtadan l to'g'ri chiziqni o'tkazaylik, N bilan M ga yaqin bo'lgan γ chiziqning birorta nuqtasini belgilaylik. Egri chiziqdagi M va N nuqtalar orasidagi masofani d bilan, N nuqtadan $l-$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani h bilan belgilaylik. Agar, N nuqta M ga yaqinlasha borsa, tabiiyki, d va h masofalar nolga intiladi. Lekin, $\frac{h}{d}$ ifodaning nimaga intilishi haqida hech narsa deya olmaymiz.

<u>Ta'rif</u>: Egri chiziq γ ning N nuqtasi M ga intilganda $\frac{h}{d}$ ifoda nolga intilsa, $l-$ to'g'ri chiziq, γ ning M nuqtadagi urinmasi deb ataladi.



Chizma-5

Agar φ bilan l va MN to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni belgilasak, $\sin\varphi = \frac{h}{d}$ bo'ladi. Demak, agar $l-$urinma bo'lsa, N nuqta M ga intilganda, MN to'g'ri chiziq $l-$to'g'ri chiziqqa intiladi. Aksincha N nuqta M ga intilganda MN to'g'ri chiziq birorta $l-$to'g'ri chiziqqa intilsin. Shunda, ravshanki $l-$urinma bo'ladi.

Teorema-9. Regulyar egri chiziqning har bir nuqtasidan yagona urinma o'tadi. Agar γ egri chiziq, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama yordamida berilgan bo'lsa, $M(t_0)$ nuqtadagi urinma $\vec{r}'(t_0)$ vektorga paralleldir.

Isbot. Avvalo, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi urinma $\vec{r}'(t_0)$ vektorga parallel ekanligini ko'rsataylik. Chiziqning $M(t_0)$ nuqtasi parametrning t_0-qiymatiga, N nuqta parametrning $t_0+\Delta t$ qiymatiga mos kelsa, $d = |r(t_0+\Delta t) - r|$ bo'ladi. l to'g'ri chiziq va MN to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning sinusi $\frac{h}{d}$ ga teng bo'lganligi uchun vektor ko'paytmaning aniqlanishiga muvofiq $h = |(\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)), \vec{e}|$ bo'ladi. Bu erda $\vec{r}$ bilan urinmaga parallel birlik vektorni belgilaganmiz. l to'g'ri chiziq M nuqtadan o'tuvchi urinma bo'lgani uchun,

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{h}{d} = 0$ **bo'ladi. Demak,**

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left\|\left[\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0),\vec e\right]\right\|}{\left|\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)\right|}=0$$

Lekin, kasrning surat va maxrajini Δt **ga bo'lsak,**

$$\frac{\left\|\left[\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0),\vec e\right]\right\|}{\left|\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)\right|}=\frac{\left\|\left[\dfrac{\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)}{\Delta t},\vec e\right]\right\|}{\left|\dfrac{\vec r(t_0+\Delta t)-\vec r(t_0)}{\Delta t}\right|}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\frac{\left\|\left[\vec r'(t_0),\vec e\right]\right\|}{\left|\vec r'(t_0)\right|}$$

munosabatni hosil qilamiz, teorema shartiga ko'ra γ **regulyar egri chiziq bo'lgani uchun** $\left|\vec r'(t_0)\right|\neq\vec 0,$ **va demak,** $\left\|\left[\vec r'(t_0),\vec e\right]\right\|=\vec 0.$

Bundan kelib chiqadiki, $\vec r'(t_0)$ **va** $\vec e$ **vektorlar paralleldir.**

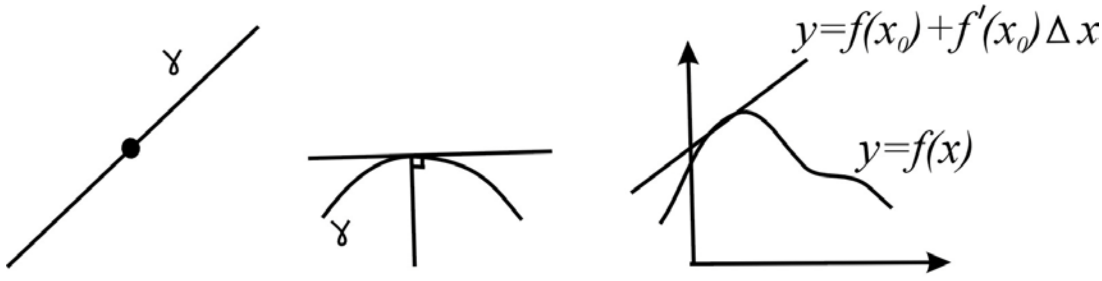
Endi M **nuqtadan o'tuvchi va** $\vec r'(t_0)$ **vektorga parallel** l **to'g'ri chiziq urinma bo'lishini ko'rsataylik. Yuqoridagi hisob-kitobdan ko'rinib turibdiki,**

$$\lim_{\Delta t\to}\frac{h}{d}=\frac{\left\|\left[\vec r'(t_0),\vec e\right]\right\|}{\left|\vec r'(t_0)\right|};$$

Endi bu erda, $\vec e=\dfrac{\vec r'(t_0)}{\left|\vec r'(t_0)\right|}$, **bo'lganligi uchun** $\left\|\left[\vec r'(t_0),\vec e\right]\right\|=0.$ **Demak** l **urinmadir.** □

Yuqoridagi teoremadan foydalanib, urinmaga quyidagicha ta'rif berishimiz mumkin.

Ta'rif. ***Regulyar*** γ ***egri chiziq*** $\vec r=\vec r(t)$ ***tenglama bilan aniqlansa,*** $M(t_0)$ ***nuqtadan o'tuvchi va*** $\vec{r'}(t_0)$ ***vektorga parallel to'əri chiziq*** γ ***ning*** $M(t_0)$ ***nuqtasidan o'tuvchi urinmasi deb ataladi.***



a *б* *в*

Chizma-6

Analitik geometriya kursidan bilamizki, agar to'g'ri chiziqning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektori (ya'ni unga parallel vektor) berilgan bo'lsa, uning tenglamasini tuza olamiz. Regulyar γ egri chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan aniqlansa uning $M(t_0)$ nuqtasidan o'tuvchi urinma tenglamasi

$$\vec{\rho}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0), \quad (\lambda\text{-parametr})$$

ko'rinishda bo'ladi.

Regulyar egri chiziq parametrik tenglamalar yordamida, ya'ni,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad a < t < b$$

sistema yordamida aniqlangan bo'lsa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{x\,(t_0)} = \frac{y - y_0}{y\,(t_0)} = \frac{z - z_0}{z\,(t_0)}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu erda $x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0)$.

Regulyar egri chiziq $y = y(x), \quad z = z(x)$ tenglamalar yordamida berilsa, uning urinma tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar fazodagi egri chiziq

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

tenglamalar yordamida aniqlangan va $\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$ **matritsaning rangi ikkiga teng bo'lsa,** $M(x_0, y_0, z_0)$ **nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasi**

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_x \end{vmatrix}}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda xususiy hosilalar $M(x_0, y_0, z_0)$ **nuqtada hisoblangan. Haqiqatan, birinchi paragrafdagi teoremaga ko'ra,** $M(x_0, y_0, z_0)$ **nuqta atrofida** γ **egri chiziq**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

tenglamalar yordamida aniqlanadi.

Demak,

$$\varphi\big(x(t),\quad y(t),\quad z(t)\big) \equiv 0,\quad \psi\big(x(t),\quad y(t),\quad z(t)\big) \equiv 0$$

tengliklarni differensiallab,

$$\begin{aligned} \varphi_x x' + \varphi_y y' + \varphi_z z' &= 0 \\ \psi_x x' + \psi_y y' + \varphi_z z' &= 0 \end{aligned}$$

tengliklarni olamiz. Bundan esa

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}} = \frac{y'}{\begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{z'}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}$$

munosabatni hosil qilamiz.

Ta'rif. Egri chiziqning M nuqtasidan o'tuvchi va urinmaga perpendikulyar ravishda o'tadigan tekislik egri chiziqning M nuqtasidagi normal tekisligi deb ataladi.

Normal tekislik tenglmasi

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

ko'rinishda bo'ladi.

3-paragrafga doir mashq va masalalar

1-masala. Chiziq $0XY$ tekislikda

$$y=x^2+4x+3$$

funksiyaning grafigidan iborat. Absissasi -1 ga teng bo'lgan M nuqtadan o'tuvchi urinma va normal tenglamasini tuzing.

Yechish: Buning uchun avvvlo M nuqtaning ordinatasini topamiz: $y_0=(-1)^2+4\cdot(-1)+3=0.$ Endi chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2+4t+3, \quad -\infty<t<+\infty. \end{cases}$$

ko'rinishda yozib, urinma va normal tenglamalarini mos ravishda

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2} \text{ va } \frac{x+1}{-2}=\frac{y}{1}$$

va ko'rinishlarda yoza olamiz. Agar chiziq tenglamasini vektor ko'rinishida

$$\vec{r}=\{t, \quad t^2+4t+3\}$$

tenglama bilan yozsak, urinma va normal tenglamalarni ham mos ravishda

$$\vec{\rho}=\{-1{,}0\}+\{1{,}2\}\lambda, \ , \ \vec{\rho}=\{-1{,}0\}+\{-2{,}1\}\lambda$$

ko'rinishlarda yoza olamiz.

2-masala. Parabola

$$y = x^2 - 6x + 5$$

funksiyaning grafigidan iborat bo'lsa, uning qaysi nuqtalaridagi urinmalari $x - 2y + 8 = 0$ **to'ғri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.**

Yechish: Parabolaning $M(x_0; y_0)$ **nuqtasidan o'tuvchi urinma teng-lamasi**

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2x_0 - 6}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamani

$$2(x_0 - 3)x - y - 2(x_0 - 3)x_0 + y_0 = 0$$

ko'rinishda yozib, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartini yozamiz,

$$1 \cdot 2(x_0 - 3) - 2(-1) = 0$$

va $x_0 = 2$ **qiymatni topamiz. Endi ordinatasini topamiz.**

$$y_0 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 5 = -3.$$

Demak, nuqtadan $(2, 3)$ **o'tuvchi urinma berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi. Haqiqatan, bu nuqtadagi urinma tenglamasi** $2x + y + 7 = 0$ **ko'rinishda bo'ladi.**

3-masala. Chiziq $x = e^t, y = e^{-t}, \quad z = t^2$ **parametrik tenglamalarga ega bo'lsa, parametrning** $t = 1$ **qiymatiga mos keluvchi nuqtadagi urinma va normal tekislik tenglamalarini tuzing.**

Yechish. Parametrning $t = 1$ **qiymatiga mos keluvchi** $M(x_0, y_0, z_0)$ **nuqtaning koordinatalarini topamiz:**

$$x_0 = e^1 = e, \quad y_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad z_0 = 1.$$

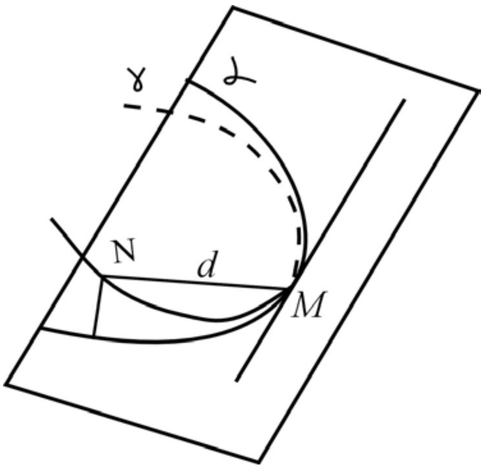
Endi urinma va normal tekislik tenglamalarini yozamiz.

$$\frac{x-e}{e}=\frac{y-\frac{1}{e}}{-\frac{1}{e}}=\frac{z-1}{2}$$ **– urinma.**

$$e(x-e)-\frac{1}{e}(y-\frac{1}{e})+2(z-1)=0$$ **– normal tekislik.**

§ 4. Yopishma tekislik va uning tenglamasi

Egri chiziq uchun yopishma tekislik tushunchasini kiritib, uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Egri chiziq γ ning M nuqtasidan o'tuvchi birorta α tekislik va chiziqdagi M ga yaqin N nuqta uchun d bilan M, N nuqtalar orasidagi masofani, h bilan esa N nuqtadan α tekislikkacha bo'lgan masofani belgilaylik.



Chizma-7

Ta'rif. ***Chiziqdagi N nuqta M nuqtaga yaqinlashganda $\frac{h}{d^2}$ nolga intilsa, α tekislik γ ning M nuqtasidagi yopishma tekisligi deb ataladi.***

Teorema-10: ***Ikki marta differensiallanuvchi regulyar γ egri chiziqning har bir nuqtasidan o'tuvchi yopishma tekislik mavjud bo'lib, urinma yopishma tekislikda yotadi. Agar egri chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama yordamida aniqlangan bo'lsa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi yopishma tekislik $\vec{r}\,'(t_0), \vec{r}\,''(t_0)$ vektorlarga parallel bo'ladi.***

Isbot: Regulyar γ egri chiziqning $M(t_0)$ nuqtasidan o'tuvchi yopishma tekislik mavjud bo'lsa, uning $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ vektorlarga parallel ekanligini ko'rsataylik. Yopishma tekislikni α bilan, uning birlik normal vektorini $\vec{e}$ bilan belgilaylik. Egri chiziq $M(t_0)$ nuqta atrofida $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tenglama bilan aniqlangan bo'lsa, N nuqtaga mos keluvchi parametrning qiymati $t_0 + \Delta t$ bo'ladi (N nuqta M nuqtaga yaqin bo'lganligi uchun). Shuning uchun M va N nuqtalar orasidagi masofa d va N nuqtadan α tekislikkacha bo'lgan masofa h uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi;

$$d = \left|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)\right|,$$
$$h = \left|\left(\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0), \vec{e}\right)\right|.$$

Demak,

$$\frac{h}{d^2} = \frac{\left|\left(\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0), \vec{e}\right)\right|}{\left|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t)\right|^2} = \frac{\left|\left(\vec{r}\,'(t_0)\Delta t + \frac{\vec{r}\,''(t_0)}{2!}\Delta t^2 + \vec{a}(\Delta t^2), \vec{e}\right)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\Delta t + \vec{b}(\Delta t)\right|^2} = \frac{\left|\left(\frac{\vec{r}\,'(t_0)}{\Delta t} + \frac{\vec{r}\,''(t_0)}{2} + \frac{\vec{a}(\Delta t^2)}{\Delta t^2}, \vec{e}\right)\right|}{\vec{r}\,'(t_0) + \vec{b}(\Delta t)^2}$$

Bu erda, $\vec{a}(\Delta t^2)$, $\vec{b}(\Delta t)$, $\vec{c}(\Delta t)$ vektorlar $\Delta t \to 0$ da nol vektorga intiladilar. Shuning uchun, yuqoridagi tenglikda $\Delta t \to 0$ da limitga o'tsak, va α yopishma tekislik bo'lganligi uchun $\frac{h}{d^2}$ ning limiti nolga teng ekanligini hisobga olsak

$$\left(\vec{r}\,'(t_0), \vec{e}\right) = 0, \quad \left(\vec{r}\,''(t_0, \vec{e})\right) = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Demak, α tekislik $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ vektorlarga paralleldir.

Endi yopishma tekislikning mavjud ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun esa α bilan $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ vektorlarga parallel tekislikni belgilaymiz. Shunda $\vec{e}=\dfrac{[\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)]}{\|[\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)]\|}$ vektor α tekislikning birlik normal vektori ekanligini hisobga olib, yuqoridagi hisob kitoblarni takrorlasak,

$$\frac{h}{d^2}=\frac{\dfrac{\left|\left(\vec{a}\left(\Delta t^2\right),\vec{e}\right)\right|}{\Delta t^2}}{\vec{r}'^2(t_0)+\vec{c}(\Delta t)}$$

ni hosil qilamiz. $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ vektorlarning uzunligi $\Delta t\to 0$ da mos ravishda Δt^2 va Δt larga nisbatan tezroq nolga intilishini hisobga olsak, $\dfrac{h}{d}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0$ ni hosil qilamiz. Demak, α yopishma tekislikdir. □

Izoh: Yopishma tekislik $\vec{r}'(t_0)$ va $\vec{r}''(t_0)$ vektorlarga parallel bo'lganligi uchun, agar bu vektorlar o'zaro parallel bo'lsa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi yopishma tekisliklar cheksiz ko'p. Lekin $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ vektorlar parallel bo'lmasa, $M(t_0)$ nuqtadan o'tuvchi yopishma tekislik yagonadir.

Endi yopishma tekislik tenglamasini yozaylik. Buning uchun $\vec{r}'(t_0)$ va $\vec{r}''(t_0)$ vektorlarning boshlarini $M(t_0)$ nuqtaga joylashtirib, $P(x,y,z)$ bilan yopishma tekislik nuqtasini belgilasak, $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$, $\overline{MP}$ vektorlar komplanar vektorlar oilasini tashkil qiladi. Shuning uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Ikkinchi tomondan, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lgandagina $P(x,y,z)$ nuqta yopishma tekislikka tegishli bo'ladi. Demak, $\vec{r}$ bilan R nuqtaning radius vektorini belgilasak, yopishma tekislik tenglamasini $(\vec{r}-\vec{r}(t_0))\vec{r}'(t_0)\vec{r}''(t_0)=0$ ko'rinishda yoza olamiz.

Agar egri chiziq $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ parametrik tenglamalar yordamida berilsa, yopishma tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar egri chiziq $F(x,y,z)=0, \quad \Phi(x,y,z)=0$ **tenglamalar yordamida berilsa, uning** $M(x_0,y_0,z_0)$ **nuqtadan o'tuvchi yopishma tekislik tenglamasini keltirib chiqaraylik.**

Buning uchun esa egri chiziqni $M(x_0,y_0,z_0)$ **nuqta atrofida**

$$\begin{cases} y=f(x) & x_0-\delta<x<x_0+\delta \\ z=g(x) \end{cases}$$

tenglama yordamida yozish mumkinligidan foydalanamiz. Buning uchun esa $M(x_0,y_0,z_0)$ **nuqtada**

$$rang\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix}=2$$

bo'lsin deb faraz qilamiz.

Endi esa $x=t, \quad y=f(t), \quad z=g(t)$ **parametrik tenglamalarni yozib, yuqoridagi ko'rinishdagi yopishma tekislik tenglamasini olamiz.**

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & f'(x_0) & g'(x_0) \\ 0 & f''(x_0) & g''(x_0) \end{vmatrix}=0$$

Bu yerdagi $f'(x_0), f''(x_0), g'(x_0), g''(x_0)$ **hosilalar** F **va** $\hat{O}$ **funksiyalar hosilalari orqali topiladi.**

Egri chiziqning $M(t_0)$ **nuqtasidan urinma to'g'ri chiziqqa perpendikulyar holda o'tuvchi to'g'ri chiziq normal deb ataladi. Normallar ichidan biz uchun muhimlari bosh normal va binormaldir.**

Yopishma tekislikda yotuvchi normal bosh normal deb ataladi, yopishma tekislikga perpendikulyar normal esa binormal deb ataladi.

Albatta yopishma tekislik yagona bo'lgan holdagina bu tushunchalar ishlatiladi. Endi bosh normal va binormal tenglamalarini yozaylik. $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ **vektorlar yopishma tekislikka parallel bo'lgani uchun vektor**

ko'paytma $\left[\vec{r}\,'(t_0),\vec{r}\,''(t_0)\right]$ binormal uchun yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Demak binormal tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'(t_0), & z'(t_0) \\ y^{''i}(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}$$

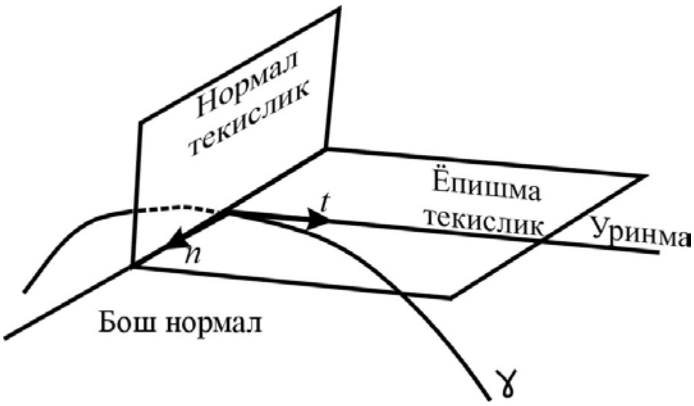
ko'rinishda bo'ladi.

Vektor ko'paytma $\left[\vec{r}\,'(t_0),\left[\vec{r}\,'(t_0),\vec{r}\,''(t_0)\right]\right]$ esa bosh normal uchun yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Shuning uchun bosh normal tenglamasi,

$$\frac{x-x_0}{y'(t_0)\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y^{''i}(t_0) \end{vmatrix}-z'(t_0)\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{z'(t_0)\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}-x'(t_0)\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t) & y''(t_0) \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{z-z_0}{x'(t_0)\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}-y'(t_0)\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}}$$

ko'rinishda bo'ladi.



Chizma-8

4-paragrafga doir mashq va masalalar

1-masala. Egri chiziq mos ravishda

$$x^2+y^2+z^2=9,\;\; x^2-y^2=3.$$

tenglamalar bilan aniqlangan sfera va giperbolik silindrning kesishish chizig'idan iborat. Uning $M(2;1;2)$ nuqtasidagi yopishma tekislik tenglamasini tuzing.

Echish. Avvalo chiziqda x ni parametr sifatida olib chiziqning parametrik tenglamalarini yozamiz. Buning uchun M nuqta atrofida

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 3}$$

tengliklar bajarilishini hisobga olib,

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - 3} \\ z = \sqrt{12 - 2t^2} \end{cases}$$

parametrik tenglamalarni yozamiz. Parametrning $M(2;1;2)$ nuqtaga mos keluvchi qiymati ma'lum: $t_0 = x_0 = 2.$ Endi $t_0 = 2.$ nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz.

$$x'(t_0) = 1. \qquad x''(t_0) = 0.$$
$$y'(t_0) = 2. \qquad y''(t_0) = -3.$$
$$z'(t_0) = -2. \qquad z''(t_0) = -3.$$

Shunda yopishma tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Determinantni birinchi satri bo'yicha yozib va hadlarini ixchamlab

$$4x - y + z - 9 = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

2-masala. Chiziq $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^t$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, parametrning $t = 0$ qiymatiga mos keluvchi nuqtadagi urinma, bosh normal va binormal tenglamalarini yozing.

Echish. Buning uchun avvalo $t=0$ ga mos keluvchi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalarini topamiz. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 1,$$
$$x_0' = 1, \quad y_0' = 0, \quad z_0' = 1,$$
$$x_0'' = 0, \quad y_0'' = 2, \quad z_0'' = 1,$$

Endi quyidagi tenglamalarni yoza olamiz:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$$ **-urinma tenglamasi**

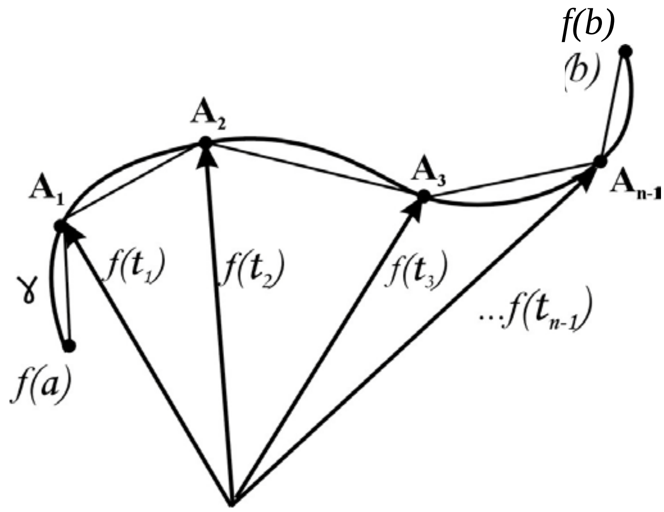
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{-1}$$ **-bosh normal tenglamasi**

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$$ **-binormal tenglamasi.**

§ 5. Egri chiziq yoyi uzunligi va uni hisoblash

Fazoda γ egri chiziq, M esa unga tegishli nuqta bo'lsin. Biz bilamizki M nuqtaning γ chiziqdagi yetarli kichik atrofielementar egri chiziqdir. Shu elementar egri chiziq γ_M ochiq $(a;b)$ intervalning *f* topologik akslantirishdagi obrazi bo'lsin.

Agar $c,d \in (a,b)$ va $c < d$ bo'lsa, γ_M ning $c,d-$nuqtalarga mos keluvchi nuqtalari bilan chegaralangan yoyi uzunligi tushunchasini kiritamiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani n ta qismga ajratuvchi $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$ nuqtalarni olib, ularning γ_M chiziqdagi obrazlarini $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ bilan belgilaylik. Uchlari $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ nuqtalarda bo'lgan siniq chiziqni γ_M chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziq deb ataymiz. Agar M ni o'z ichiga oluvchi birorta yoy uchun unga ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklari yuqoridan tekis chegaralangan bo'lsa, γ egri chiziq M nuqta atrofida to'g'rilanuvchi deyiladi.



Chizma-9

Teorema-11. Regulyar egri chiziq o'ziga tegishli har qanday nuqta atrofida to'g'rilanuvchidir.

Isbot. Elementar γ_M **egri chiziq,**

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \; a < t < b$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin va parametrning M **ga mos keluvchi qiymati** t^0 **uchun** $t^0 \in [c, d] \subset (a, b)$ **munosabat bajarilsin.**

Bu erda, $c < d$, γ_M **ga ichki chizilgan siniq chiziq** Γ **ning uchlari** $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$ **nuqtalarning obrazlari bo'lib,** $c < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < d$ **bo'lsin, qulaylik uchun** $t_0 = c, t_n = d$ **belgilashlarni qabul qilib,** Γ **ning uzunligini yuqoridan baholaylik.**

Siniq chiziqning t_i, t_{i+1} **nuqtalarga mos keluvchi kesmasi uzunligi** $|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)|$ **teng, siniq chiziq uzunligi** $\sum_{i=0}^{n-1} |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)|$ **ga teng bo'ladi, agar** $|\vec{r}\,'(t_0)| \le C$ **bo'lsa,** $\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{r}\,'(t)\,dt$ **ni hisobga olib** $\sum_{i=0}^{n-1} |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} C(t_{i+1} - t_i) \le C(d - c)$ **ni hosil qilamiz.**

Bu erda $|\vec{r}\,'(t)| \le C$ **tengsizlik** $\vec{r}\,'(t)$ **funksiyaning** $[c, d]$ **da uzluksizligidan kelib chiqadi. Demak, parametrning** c **va** d **qiymatlarga mos keluvchi**

nuqtalar bilan chegaralangan yoyga ichki chizilgan ixtiyoriy siniq chiziq uzunligi $C(d-c)$ son bilan chegaralangan.□

Endi egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. γ_M ning $c, d-$ nuqtalarga mos keluvchi nuqtalarini M_1, M_2 bilan belgilab, $M_1 \overset{\cup}{} M_2$ yoyning uzunligi sifatida bu yoyga ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklarining yuqori chegarasini qabul qilamiz.

Yuqoridagi teoremaga ko'ra $M_1 \overset{\cup}{} M_2$ yoy uzunligi chegaralangan. Endi $\varepsilon > 0, \delta > 0$ bo'lib, $\tilde{A}$ siniq chiziqning uzunligi $M_1 \overset{\cup}{} M_2$ yoy uzunligidan ε ga farq qilsin.

Agar $\tilde{A}$ ning uchlari $c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d$ nuqtalarning obrazlari bo'lsa, $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ shart bajarilsin deb talab qilamiz. Lekin bu shart bajarilmasa, $\tilde{A}$ ni shunday siniq chiziq $\overline{\Gamma}$ bilan almashtiramizki, $\overline{\Gamma}$ ning uchlari ichida $\tilde{A}$ ning uchlari ham bor, lekin $\overline{\Gamma}$ uchlari proobrazlari uchun $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ tengsizlik bajariladi. $\overline{\Gamma}$ ning uzunligi $\tilde{A}$ uzunligidan kichik bo'lmaganligi uchun uning uzunligi ham $M_1 \overset{\cup}{} M_2$ uzunligidan ε dan kichik songa farq qiladi.

Demak, berilgan $\varepsilon > 0, \delta > 0$ sonlar uchun $\tilde{A}$ uzunligi $M_1 \overset{\cup}{} M_2$ yoy uzunligidan ε dan kichik songa farq qiladi va $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ munosabat bajariladi deb faraz qilishimiz umumiylikni chegaralamaydi.

Endi $\tilde{A}$ uzunligining $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right|$ ga tengligini hisobga olib,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left|\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)\right| = \int_c^d \left|\bar{r}'(t)\right| dt + \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left|\bar{r}'(t_i)\right| - \int_c^d \left|\bar{r}'(t) dt\right| \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left|\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)\right| - \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \left|\vec{r}(t_i)\right| \right\}$$

tenglikni yozib, uning hadlarini $\delta \to 0$ da baholaymiz.

Bu tenglikning o'ng tarafidagi ikkinchi had integral ta'rifiga ko'ra $\delta \to 0$ da nolga intiladi. Uchinchi had uchun esa

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left|\vec r\left(t_{i+1}\right)-\vec r\left(t_i\right)\right|-\sum_{i=0}^{n-1}\left(t_{i=1}-t_i\right)\left|\vec r\,'\left(t_i\right)\right|=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\vec r\,'(t)dt\right|-\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\vec r\,'\left(t_i\right)\right|dt\right|$$

tenglikni hisobga olsak,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left|\vec r\left(t_{i+1}\right)-\vec r\left(t_i\right)\right|-\sum_{i=0}^{n-1}\left(t_{i+1}-t_i\right)\vec r\,'(t_i)\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|\vec r\,'(t)-\vec r\,'\left(t_i\right)\right|dt$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bu tengsizlikning o’ng tarafi $\vec r\,'(t)$ uzluksiz bo’lganligi uchun $\delta\to 0$ da nolga intiladi.

Shunday qilib, $\int_c^d\left|\vec r\,'(t)\right|dt$ integral siniq chiziq $\tilde{A}$ uzunligidan berilgan ixtiyoriy sondan kichik songa farq qiladi. $\tilde{A}$ uzunligi esa $M_1^{\cup}M_2$ yoy uzunlikdan ε dan kichik songa farq qiladi. Berilgan ε ning ixtiyoriy tanlanganligidan $M_1^{\cup}M_2$ yoy uzunligi

$\int_c^d\left|\vec r\,'(t)\right|dt$ **integralga tengligi kelib chiqadi.**

Shunday qilib, agar γ_M egri chiziq,

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\qquad a<t<b$$

parametrik tenglamalar yordamida berilsa, $M_1^{\cup}M_2$ yoy uzunligi

$$\int_c^d\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

formula bo’yicha hisoblanadi. Agar γ_M egri chiziq OXY tekislikda $y=f(x)$ funktsiyaning grafigi bo’lsa, $M_1^{\cup}M_2$ yoy uzunligi

$\int_c^d\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ **ga tengdir.**

Yoy uzunligini egri chiziqni parametrlash uchun ham ishlatish mumkin. Agar $t_0, t \in (a,b)$ bo'lsa, γ_M – ning t_0 va t ga mos keluvchi nuqtalari bilan chegaralangan yoy uzunligini $s(t)$ bilan belgilab,

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= s(t), & t > t_0, \\ \sigma(t) &= -s(t), & t < t_0, \\ \sigma(t) &= 0, & t = t_0. \end{aligned}$$

qoida bo'yicha $\sigma(t)$ funksiyasini aniqlasak, bu funksiya monoton o'suvchi funksiya bo'ladi. Chunki uning hosilasi $|\vec{r}\,'(t)|$ ga teng va demak, har doim noldan katta. Agar $\sigma(t)$ ga teskari funktsiyani $t = t(\sigma)$ bilan belgilasak va $\vec{r} = \vec{r}(t)$ da t o'rniga qo'ysak,

$$\vec{r} = \vec{r}\big(t(\sigma)\big) = \vec{\rho}(\sigma)$$

tenglikni olamiz.

Hosil bo'lgan tenglama γ_M ning tabiiy parametr yordamida aniqlangan tenglamasi, σ esa tabiiy parametr deyiladi.

Tabiiy parametrning muhimligi shundan iboratki, urinma vektor uzunligi har doim birga tengdir.

Haqiqatdan ham,

$$\vec{\rho}(\sigma) = \vec{r}\,' \cdot t' = \vec{r}\,' \cdot \frac{1}{\dot{\vec{\rho}}(t)} = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}, \quad \text{va} \quad \left|\dot{\vec{\rho}}(\sigma)\right| = 1.$$

Bundan keyin, $\vec{\rho}$ belgi $\vec{r}(t)$ ning tabiiy parametr bo'yicha hosilasini bildiradi. Tabiiy parametrini esa s bilan belgilaymiz.

5-paragrafga doir mashq va masalalar

1-masala. Vint chizig'i

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad (a > 0, \quad b > 0). \\ z = bt. \end{cases}$$

tenglamalar yordamida beriladi. Vint chizig'i tenglamalarini tabiiy parametr yordamida yozing.

Echish. Buning uchun avvalo vint chizig'i uchun yoy uzunligini hisob-laymiz ($M_1(0)$ **va** $M_2(t)$ **nuqtalar bilan chegaralangan yoy uzunligi)**

$$S = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,t.$$

bu yerdan $t = \dfrac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ **ni topib,**

$$\begin{cases} x = a\cos\dfrac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y = a\sin\dfrac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ z = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,S \end{cases}$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Tekshirish uchun

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin\dfrac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \dot{y} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos\dfrac{S}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \dot{z} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

hosilalarni hisoblab,

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$ **ni hosil qilamiz.**

2-masala. Yarim aylana

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \quad (0 \le t \le \pi) \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, u tabiiy parametr bilan berilganligini ko'rsating.

Yechish. Yoy uzunligini hisoblaymiz

$$s = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = t$$

va tenglikni hosil qilamiz. Demak, $t = s$ **parametr tabiiy parametrdir.**

3-masala. Chiziq

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xz = a^2 \quad (a \ne 0). \end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, bu chiziqning $y = \frac{a}{3}$ **va** $y = 9a$ **tekisliklar bilan chegaralangan yoyining uzunligini toping.**

Echish. Avvalo bu tekisliklar bilan berilgan chiziq bir martadan kesishadi. Birinchi $y = \frac{a}{3}$ **tekislik bilan kesishish nuqtasi** $M_1(a, \frac{a}{3}, \frac{a}{2})$**, ikkinchi** $y = 9a$ **tekislik bilan kesishish nuqtasi** $M_2(3a, 9a, \frac{a}{6})$.

Endi chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{1}{3a^2} t^3 \\ z = \frac{a^2}{2t} \end{cases}$$

ko'rinishda yozib, yoy uzunliklarini hisoblaymiz.

$$S=\int_a^{3a}\sqrt{1^2+\frac{t^4}{a^4}+\frac{a^4}{4t^4}}dt=\int_a^{3a}\sqrt{\frac{4a^4t^4+4t^8+a^8}{4a^4t^4}}dt=\int_a^{3a}\frac{\sqrt{(a^4+2t^4)^2}}{2a^2t^2}dt=$$

$$=\int_a^{3a}\frac{a^4+2t^4}{2a^2t^2}dt=\frac{a^2}{2}\int_a^{3a}\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{a^2}\int_a^{3a}t^2dt=\frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg\|_a^{3a}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg\|_a^{3a}=$$

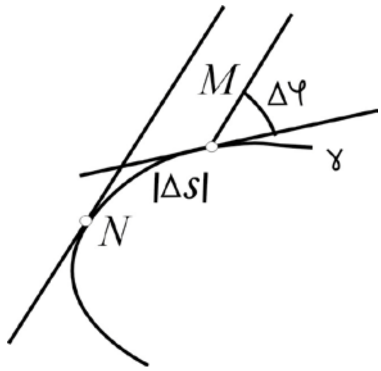
$$=-\frac{a}{6}+\frac{a}{2}+9a-\frac{a}{3}=\frac{-a+3a-2a}{6}+9a=9a.$$

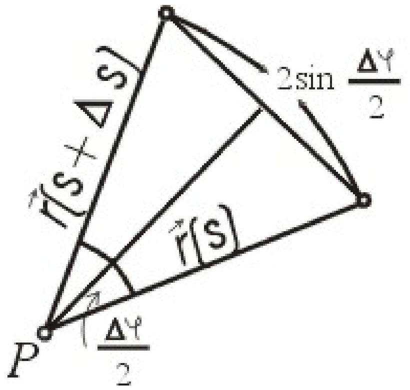
§ 6. Egri chiziq egriligi va uni hisoblash

Bizga regulyar γ –egri chiziq va M unga tegishli nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan M nuqtadagi egrilik tushunchasini kiritib, uni hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun γ – egri chiziqda M ga yaqin bo'lgan N nuqtani olib, bu nuqtalardan o'tuvchi urinmalar orasidagi burchakni $\Delta\varphi$ bilan, $\overset{\cup}{MN}$ yoy uzunligini ΔS bilan belgilaylik. Ravshanki, N nuqta M ga intilganda $\Delta\varphi$ va ΔS miqdorlar nolga intiladi. Ammo $\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ ifoda nimaga intilishini oldindan ayta olmaymiz.

Ta'rif. ***Chiziqdagi N nuqta M ga intilganda $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ifodaning limiti mavjud bo'lsa, u γ chiziqning M nuqtadagi egriligi deb ataladi.***

Teorema-12: ***Ikki marta differentsiallanuvchi regulyar egri chiziq uchun $k=\lim\limits_{M\to N}\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ mavjud. Agar γ chiziq $\vec{r}=\vec{r}(s)$ tenglama bilan tabiiy parametr yordamida berilgan bo'lsa, $k=\left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ tenglik o'rinlidir. Bu yerda s_0 tabiiy parametrning M ga mos keluvchi qiymatdir.***





Chizma-10 **Chizma-11**

Isbot. Faraz qilaylik, γ **egri chiziq** $\vec{r}=\vec{r}(s)$ **tenglama bilan tabiiy parametr yordamida berilgan,** $\vec{r}(s_\circ)$, $\vec{r}(s_\circ+\Delta s)$ **vektorlar mos ravishda** M **va** N **nuqtalarning radius vektorlari bo'lsin. Shunda** $\Delta\varphi$ **burchak** $\vec{r}(s_\circ)$ **va** $\vec{r}(s_\circ+\Delta s)$ **vektorlar orasidagi burchakka teng.**

Shuning uchun $\left|\vec{r}(s_\circ+\Delta s)-\vec{r}(s_\circ)\right|=2Sin\frac{\Delta\varphi}{2}$**. Bu tenglikdan,**

$$\frac{\left|\vec{r}(s_\circ+\Delta s)-\vec{r}(s_\circ)\right|}{\Delta s}=\frac{2Sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}=\frac{Sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

kelib chiqadi. Bu tenglikda $\Delta s\to 0$ **da limitga o'tsak,** $k=\left|\ddot{\vec{r}}(s_\circ)\right|$ **ni hosil qilamiz.**□

Endi ixtiyoriy parametr uchun egrilikni hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun $\vec{r}=\vec{r}(s)$ **tenglikda** s **ni** t **ning funksiyasi sifatida qarab, ikkala tomonini** t **bo'yicha differensiallaylik. Shunda** $\vec{r}\,'=\dot{\vec{r}}s'$ **ni hosil qilamiz. Demak,** $\dot{\vec{r}}=\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}$**.**

Endi bu tenglikni t **bo'yicha differensiallaymiz va**

$$\ddot{\vec{r}}\, s' = \frac{\vec{r}''|\vec{r}'| - \dfrac{(\vec{r}', \vec{r}'')}{\sqrt{(\vec{r}', \vec{r}')}}}{|\vec{r}'|^2}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni ikkala tomonini s' **ga bo'lib** $\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}'|} - \frac{(\vec{r}', \vec{r}'')\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$ **ni olamiz. Endi ikkala tomonini kvadratga oshirib,**

$$k^2 = \frac{\vec{r}''^2 \vec{r}'^2 - (\vec{r}', \vec{r}'')^2}{|\vec{r}'|^6}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bundan esa $k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}''|^3}$ **kelib chiqadi.** $|\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}', \vec{r}')} = \sqrt{\vec{r}'^2}$ **ni hisobga olib va** $k = \frac{|[\vec{r}', \vec{r}'']|}{|\vec{r}'^2|^{3/2}}$ **ko'rinishda yozib ixtiyoriy parametr uchun egrilikni hisoblash formulasini olamiz.**

Agar $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t),\}$ **bo'lsa, formula**

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

ko'rinishiga keladi. Agar γ **egri chiziq** $y = f(x)$ **funksiyani grafigi bo'lsa, egrilik formulasi**

$$k = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

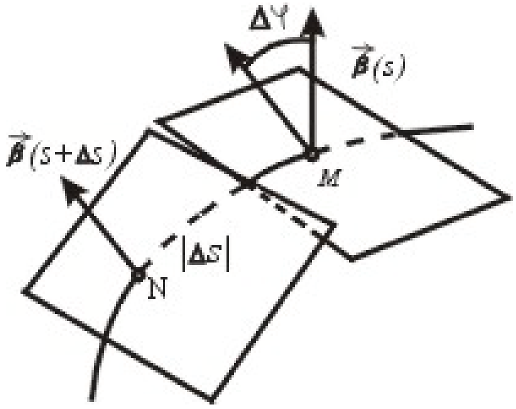
ko'rinishga keladi.

Endi, hamma nuqtalarida egriligi nolga teng bo'ladigan chiziqlarni topaylik. Ikki marta differensiallanuvchi egri chiziq tabiiy parametr yordamida $\vec{r} = r(s)$ **tenglama yordamida berilgan bo'lsa, uning egriligi formula** $k = |\ddot{\vec{r}}(s)|$

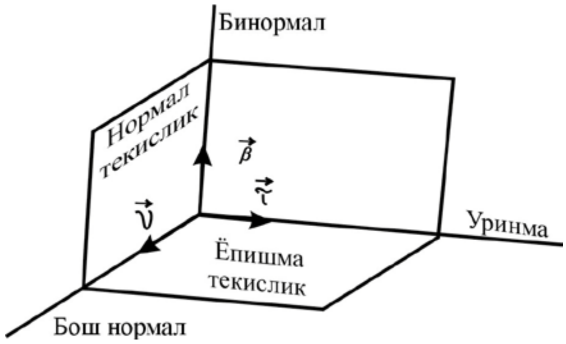
bo'yicha hisoblanadi. Agar $k=0$ bo'lsa, $\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|=0$ bo'ladi. Demak, $\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|=0$ va $\vec{r}(s)=\vec{a}s+\vec{b}$ bo'lib, $\vec{a},\vec{b}$ –o'zgarmas vektorlardir. Demak, egri chiziqning hamma nuqtalarida egriligi nolga teng bo'lsa, u yoki to'g'ri chiziq, yoki to'g'ri chiziqning ochiq kesmasidir. Albatta, bu tasdiqning teskarisi ham to'g'ridir (isbotlang).

§ 7. Egri chiziqning buralishi va uni hisoblash

Egri chiziqning berilgan M nuqtasidagi buralishi tushunchasini kiritaylik. Bizga γ egri chiziq va unga tegishli M nuqta berilgan bo'lsin. M nuqtaga yaqin va γ ga tegishli nuqtani N bilan, $\Delta\varphi$ bilan bu nuqtalardan o'tuvchi yopishma tekisliklar orasidagi burchakni, Δs bilan $\overset{\cup}{MN}$ yoy uzunligini belgilaylik.



Chizma-12



Chizma-13

Ta'rif: *N nuqta M nuqtaga intilganda $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ ifodaning limiti γ egri chiziqning M nuqtadagi absolyut buralishi deyiladi va $|\sigma|$ bilan belgilanadi.*

Teorema-13: *Uch marta differensiallanuvchi regulyar* γ *egri chiziqning,* M *nuqtada egriligi noldan farqli bo'lsa,* $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ *ifoda tayin limitga ega. Agar* γ *egri chiziq tabiiy parametr yordamida*

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning absolyut buralishi,

$$|\sigma| = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}}\right|}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|^2}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Isbot: Faraz qilaylik, M **nuqtadagi egrilik noldan farqli bo'lsin. Egrilik uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun** M **ga yaqin nuqtalarda ham egrilik noldan farqli bo'ladi**

Shuning uchun, M **nuqtaga yaqin nuqtalarda** $\dot{\vec{r}}$ **va** $\ddot{\vec{r}}$ **vektorlar o'zaro nokollinear bo'ladi. Demak, har bir nuqtadan yagona yopishma tekislik o'tadi. Agar** $\vec{\beta}(s_\circ)$, $\vec{\beta}(s_\circ + \Delta s)$ **- vektorlar** M **va** N **nuqtadagi yopishma tekislikka perpendikulyar birlik vektorlar (ya'ni birlik binormal vektorlar) bo'lsa,**

$$2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \left|\vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}(s_0)\right|$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun

$$\frac{\left|\vec{\beta}(s_\circ + \Delta s) - \vec{\beta}(s_\circ)\right|}{\Delta s} = \frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s} = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

tenglik o'rinli. Bu tenglikda $\Delta s \to 0$ **limitga o'tib,** $|\sigma| = \left|\dot{\vec{\beta}}\right|$ **tenglikni hosil qilamiz.**

Binormal $\vec{\beta}$ **vektor birlik vektor bo'lganligi uchun** $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$ **bo'ladi. Agar** $\vec{\tau}(s) = \dot{\vec{r}}(s)$ **bo'lsa,** $\vec{v} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}$ **– birlik boshnormal vektor,** $\vec{\tau}$ **- birlik urinma**

vektor bo'ladi. Shuning uchun $\vec{\beta}=[\vec{\tau},\vec{v}]$ bo'ladi. Demak, $\dot{\vec{\beta}}=\left[\dot{\vec{\tau}},\vec{v}\right]+\left[\vec{\tau},\dot{\vec{v}}\right]=\left[\vec{\tau},\dot{\vec{v}}\right]$, chunki $\left[\dot{\vec{\tau}},\vec{v}\right]=\vec{0}$. Bu tenglikdan, $\dot{\vec{\beta}}\perp\vec{\tau}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\dot{\vec{\beta}}\ //\ \vec{v}$. Shuning uchun, $|\sigma|=\left|\left(\dot{\vec{\beta}},\vec{v}\right)\right|$ tenglikni yoza olamiz.

Bu tenglikka $\vec{v}=\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}$, $\vec{\beta}=\frac{\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]}{k}$ ifodalarni qo'yib, $|\sigma|=\frac{\left|\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\right|}{k^2}$ formulani hosil qilamiz. Endi buralishni aniqlaylik. $\dot{\vec{\beta}}$ vektor $\vec{v}$ vektorga parallel bo'lganligi uchun egri chiziq bo'ylab harakat qilsak (s o'sa boshlaganda) yopishma tekislik urinma atrofida aylana boshlaydi. Agar yopishma tekislik buralishi yo'nalishi $\vec{\beta}$ dan $\vec{v}$ ga yo'nalgan bo'lsa, (+) ishora bilan aks holda esa (-) ishora bilan olib, $\sigma=\pm|\sigma|$ formula bo'yicha buralishni kiritamiz. $|\sigma|$ ning ifodasini hisobga olib

$$\sigma=-\frac{\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}}{k^2}$$

formulani hosil qilamiz.

Endi ixtiyoriy t parametr uchun buralishni hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun yoy uzunligi $S=S(t)$ parametr t ning funktsiyasi ekanligidan foydalanamiz. Egri chiziq tenglamasi $\vec{r}=\vec{r}(s)$ bo'lsa,

$$\dot{\vec{r}}=\vec{r}'\cdot\frac{dt}{ds},\quad \ddot{\vec{r}}=\vec{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\vec{r}'\cdot\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\dddot{\vec{r}}=\vec{r}'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+2\vec{r}''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2r}{ds^2}+\vec{r}''\frac{d^2r}{ds^2}\frac{dt}{ds}+\vec{r}'\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}$$

ifodalarni buralish formulasiga qo'ysak

$$\sigma=-\frac{\vec{r}'\,\vec{r}''\,\vec{r}'''}{\left[\vec{r}',\vec{r}''\right]^2}$$

formulani hosil qilamiz.

Agar birorta chiziqning buralishi hamma nuqtalarda nolga teng bo'lsa, u albatta yassi chiziq bo'ladi, ya'ni birorta tekislikda yotadi (isbotlang).

Yuqorida ko'rsatib o'tganimizdek, agar regulyar γ chiziq

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad a < t < b$$

tenglama bilan berilib, har bir t uchun $\vec{r}'(t)$ va $\vec{r}''(t)$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lmasa, γ chiziqning har bir nuqtasiga ortonormal sistemani tashkil qiluvchi uchta vektorni mos qo'yish mumkin. Bu uchlik birlik urinma vektor, birlik bosh normal vektor va birlik binormal vektorlardan iborat. Bu uchlikni Frene uchligi deb ataymiz. Hozir biz fazodagi orientatsiyani saqlovchi harakat regulyar chiziqni regulyar chiziqqa o'tkazishini va bunda Frene uchligi ham yana Frene uchligiga o'tishini isbotlaymiz.

Fazoda regulyar γ egri chiziq

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \qquad a < t < b$$

tenglama bilan, uning $F\colon R^3 \to R^3$ harakatdagi obrazi $F(\gamma)$

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad a < t < b$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar

$$\vec{\rho}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

bo'lib, F harakat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa va

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}$$

vektor yordamida berilgan bo'lsa, $F(x, y, z)$ nuqtaning koordinatalari

$$x_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1$$
$$y_1 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2$$
$$z_1 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3$$

ko'rinishda bo'ladi. Shuning uchun $\vec{r}(t)$ vektorning koordinatalari

$$x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t)$$

funksiyalar bo'lsa,

$$(x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t)) = F(x(t), \quad y(t), \quad z(t))$$

tenglikdan

$$\vec{r}\,'(t) = A\vec{\rho}\,'(t)$$

formula kelib chiqadi. Bu tenglikda $\vec{r}\,'(t)$ va $\vec{p}\,'(t)$ vektorlar ustun ko'rinishda yozilgan. Bu yerda A ortogonal matritsa bo'lgani uchun

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{r}\,'(t)\right| = \left|A\vec{\rho}\,'(t)\right| = \left|\vec{\rho}\,'(t)\right|, \\
&\left(\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)\right) = \left(A\vec{\rho}\,'(t), A\vec{\rho}\,''(t)\right) = \left(\vec{\rho}\,'(t), \vec{\rho}\,''(t)\right), \\
&\left\|\left[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)\right]\right\| = \left\|\left[A\vec{\rho}\,'(t), A\vec{\rho}\,''(t)\right]\right\| = \left\|\left[\vec{\rho}\,'(t), \vec{\rho}\,''(t)\right]\right\|
\end{aligned}$$

tengliklar o'rinli. Bu tengliklardan oxirgisi o'rinli bo'lishi uchun $\det A > 0$ shartni ham ya'ni F harakat oriyentatsiyani saqlashini talab qildik. Bu tengliklardan

$$\tau_1 = \frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} = \frac{A\vec{\rho}\,'}{\left|A\vec{\rho}\,'\right|} = \frac{A\vec{\rho}\,'}{\left|\vec{\rho}\,'\right|} = A(\vec{\tau})$$

$$\vec{v}_1 = A(\vec{v}), \quad \vec{\beta}_1 = \left[A(\vec{\tau}), A(\vec{v})\right] = A(\vec{\beta})$$

formulalar hosil qilamiz. Bu formulalar γ chiziqning Frene uchligi F akslantirishda $F(\gamma)$ chiziqning Frene uchligiga o'tishini isbotlaydi.

Bu formulalardan orientatsiyani saqlovchi harakatda chiziqlarning egriligi va buralishi ham o'zgarmay qolishi kelib chiqadi. Haqiqatdan, egrilik va buralish formulalaridan foydalanib,

$$k_1 = \frac{\left|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right|}{\left(\vec{r}'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = k = \frac{\left|\left[\vec{\rho}', \vec{\rho}''\right]\right|}{\left(\vec{\rho}'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma_1 = -\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{k_1^2} = \sigma = -\frac{\vec{\rho}' \cdot \vec{\rho}'' \cdot \vec{\rho}'''}{k^2}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

§ 8. Frene formulalari

Egri chiziq γ tabiiy parametr yordamida

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar M **nuqta** γ **ning parametrning** $s_\circ$ **qiymatiga mos keluvchi nuqta bo'lsa, bu nuqtadan chiquvchi o'zaro ortogonal uchta vektor mavjudligini ko'rdik.**

Bular, $\vec{\tau}(s_\circ)$ **– birlik urinma vektor,** $\vec{\nu}(s_\circ)$ **– birlik bosh normal vektor,** $\vec{\beta}(s_\circ)$ **– birlik binormal vektorlardir. Egri chiziq** γ **ning** M **nuqta atrofidagi qismini tekshirishda** M **nuqtani koordinata boshi sifatida,** $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ **– vektorlarni koordinata o'qlarining yo'naltiruvchi vektorlar sifatida olaylik. Buning uchun, oldin** $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ **vektorlarning hosilalarini** $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ **vektorlar orqali ifodalaylik. Birinchidan,** $\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}$ **munosabatini bilamiz. Oldingi paragrafda** $\dot{\vec{\beta}} = \sigma\vec{\nu}$ **ni ko'rsatgan edik. Bularni va** $\vec{\nu} = [\vec{\beta}, \vec{\tau}]$ **ni hisobga olib** $\dot{\vec{\nu}} = \left[\dot{\vec{\beta}}, \vec{\tau}\right] + \left[\vec{\beta}, \dot{\vec{\tau}}\right]$ **dan** $\dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} - \sigma\vec{\beta}$ **formulani hosil qilamiz.**

Demak,

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -k\dot{\vec{\tau}} - \sigma\dot{\vec{\beta}} \\ \dot{\vec{\beta}} = \sigma\vec{v} \end{cases}$$

formulalari hosil qilamiz.

Endi $\vec{r}\left(s_\circ + \Delta s\right)$ **vektor-funksiyani Teylor qatoriga yoyaylik**

$$\vec{r}(s_0+\Delta s) = \vec{r}(s_0) + \dot{\vec{r}}\,\Delta s + \ddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^2}{2} + \dddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^3}{6} + \ldots$$

M nuqta koordinata boshi bo'lganligi uchun $\vec{r}(s_0) = \vec{0}$ **bu qatorda** $\dot{\vec{r}} = \vec{\tau},\ \ddot{\vec{r}} = k\vec{v},\ \ \dddot{\vec{r}} = k\vec{v} - k\sigma\vec{\beta} - k^2\vec{\tau}$ **munosabatlarni hisobga olib,**

$$\vec{r}\left(s_\circ + \Delta s\right) = \left(\Delta s - \frac{k^2\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\tau} + \left(\frac{k\Delta s^2}{2} + \frac{\sigma\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{v} + \left(-\frac{k\sigma\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\beta}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi x, y, z **o'qlari mos ravishda** $\vec{\tau}, \vec{v}, \vec{\beta}$ **vektorlar yo'nalishlariga ega ekanligidan foydalanib**

$$x = \Delta s - k\frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

$$y = k \cdot \frac{\Delta s}{2} + k\frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

$$z = -k\sigma\frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalarda faqat egrilik va buralish qatnashmoqda. Demak, chiziqni aniqlash uchun uning hamma nuqtalarida egrilik va buralishni bilishimiz yetarli.

Endi shu masalani muhokama qilaylik. Bizga parametrlangan regulyar γ **egri chiziq berilgan bo'lsa, uning ixtiyoriy nuqtasida uchta** $s(t),\ k(t),$ $\sigma(t)$ **funktsiyalar aniqlangan. Bu funksiyalar uzluksiz va** $k(t) > 0,\ \ s(t) > 0,$

munosabatlar o’rinlidir. Agar parametr sifatida yoy uzunligini olsak, funksiyalar soni 2 ta bo’ladi.

Teorema-14. ***Ikkita regulyar egri chiziqlarning yoylari*** γ_1 ***va*** γ_2 ***mos ravishda***

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t), \qquad \vec{r} = \vec{r}_2(t),$$

tenglamalar yordamida berilib,

$$\int_a^t |\vec{r}_1'(t)|dt = \int_a^t |\vec{r}_2'(t)|dt$$

tenglik ixtiyoriy $t \in [a,b]$ ***uchun o’rinli bo’lsin. Bundan tashqari har bir*** $t \in [a,b]$ ***uchun*** $k_1(t) = k_2(t), \quad \sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ ***tengliklar o’rinli bo’lsa, yagona*** $F: R^3 \to R^3$ ***harakat mavjud bo’lib,***

$$F(\gamma_2) = \gamma_1$$

munosabat o’rinli bo’ladi.

Isbot. Bu chiziqlarning uzunliklari teng bo’lgani uchun

$$s_0 = \int_a^b |\vec{r}_1'(t)|dt = \int_a^b |\vec{r}_2'(t)|dt$$

belgilash kiritib, chiziqlar tenglamalarini tabiiy parametr yordamida yozamiz. Shunda ularning tenglamalari

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_1(s)$$

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_2(s)$$

ko’rinishda bo’ladi. Endi har bir chiziqda tabiiy parametrning $s = 0$ **qiymatiga mos keluvchi nuqtalarini mos ravishda** M_1 **va** M_2 **bilan belgilaymiz. Bu nuqtalardagi Frene uchliklari mos ravishda,** $\vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}_1(0)$ **va** $\vec{\tau}_2(0)$, $\vec{\nu}_2(0)$, $\vec{\beta}_2(0)$ **vektorlardan iborat bo’ladi. Bu uchliklar fazoda bir xil oriyentatsiyalarni aniqlagani uchun shunday** $F: R^3 \to R^3$ **harakat mavjudki,**

u M_2 **nuqtani** M_1 **nuqtaga,** $\vec{\tau}_2(0),\ \vec{v}_2(0),\ \vec{\beta}_2(0)$ **vektorlarni mos ravishda** $\vec{\tau}_1(0),\ \vec{v}_1(0),\ \vec{\beta}_1(0)$ **vektorlarga o'tkazadi. Biz** $F(\gamma_2) = \gamma_1$ **tenglikni isbotlaymiz. Buning uchun** $F(\gamma_2(s))$ **nuqtaning radius-vektorini** $\vec{\rho}(s)$ **bilan belgilab,** $\vec{\tau}_1(0),\ \vec{v}_1(0),\ \beta_1(0)$ $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s),\ \ s \in [0, s_0]$ **tenglama bilan aniqlangan regulyar egri chiziqning Frene uchligini** $\{\vec{\tau}(s),\ \ \vec{v}(s),\ \ \vec{\beta}(s)\}$ **bilan belgilaymiz. Shunda biz** $\vec{\tau}(0) = \vec{\tau}_1(0)\,,\ \ \vec{v}(0) = \vec{v}_1(0)\,,\ \ \vec{\beta}(0) = \vec{\beta}_1(0)$ **tengliklarga ega bo'lamiz. Harakatda vektorlarning skalyar ko'paytmasi saqlangani uchun**

$$k(s) = k_2(s), \qquad \sigma(s) = \sigma_2(s)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Demak, $k(s) = k_1(s), \qquad \sigma(s) = \sigma_1(s)$ **tengliklar ham o'rinlidir. Endi** $\vec{\rho}(s) = \vec{\rho}_1(s)$ **tenglikni isbotlash uchun**

$$h(s) = (\vec{\tau}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (\vec{v}_1(s), \vec{v}(s)) + (\vec{\beta}_1(s), \vec{\beta}(s))$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun $h(0) = 3$ **tenglik o'rinli. Bu funksiyani differensiallaymiz**

$$h'(s) = (\dot{\vec{\tau}}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (\vec{\tau}_1(s), \dot{\vec{\tau}}(s)) + (\dot{\vec{v}}_1(s), \vec{v}(s)) + (\vec{v}_1(s), \dot{\vec{v}}(s)) +$$
$$+ (\dot{\vec{\beta}}_1(s), \vec{\beta}(s)) + (\vec{\beta}_1(s), \dot{\vec{\beta}}(s))$$

va Frene formulalaridan foydalanib,

$$h'(s) = k_1(\vec{v}_1(s), \vec{\tau}(s)) + k(\vec{\tau}_1(s), \vec{v}(s)) - k_1(\vec{\tau}_1(s), \vec{v}(s)) - \sigma_1(\vec{\beta}_1(s), \vec{v}(s)) -$$
$$- k(\vec{v}_1(s), \vec{\tau}(s)) - \sigma(\vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s)) + \sigma_1(\vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s) + \sigma(\vec{\beta}_1(s), \vec{v}(s)) =$$
$$= (k_1 - k)(\vec{v}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (k - k_1)(\vec{\tau}_1(s), \vec{v}(s)) + (\sigma_1 - \sigma)(\vec{v}_1(s), \vec{\beta}(s)) -$$
$$- (\sigma_1 - \sigma)(\vec{\beta}_1(s), \vec{v}(s))$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $k = k_1$, $\sigma = \sigma_1$ bo'lgani uchun $h'(s) = 0$. Demak, $h(s) = h(0) = 3$ va $\vec{\tau}(s) = \vec{\tau}_1(s)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan $\vec{\rho}(s) = \vec{\rho}_1(s) + \vec{c}$ tenglikni olamiz bu erda $\vec{c}$ – o'zgarmas vektor bo'lgani uchun $\vec{\rho}(o) = \vec{\rho}_1(o)$ tenglikdan $\vec{c} = \vec{o}$ munosabat kelib chiqadi. Shunday qilib, biz $F(\gamma_2) = \gamma_1$ munosabatni isbotladik.

Teorema-15. Ikkita uzluksiz $f(s)$ va $g(s)$ funktsiyalar $[0; s_0]$ oraliqda aniqlangan va $f(s) > 0$ bo'lsa, tabiiy parametr yordamida parametrlangan regulyar egri chiziq mavjud bo'lib, uning egriligi hamda buralishi mos ravishda $f(s)$, $g(s)$ funksiyalarga tengdir.

Isbot. Bizga M_0 nuqta va ortonormal $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ sistema berilgan bo'lsin. Biz $\vec{\tau}$, $\vec{v}$, $\vec{\beta}$ vektor funksiyalarga nisbatan

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\tau}} &= f\vec{v} \\ \dot{\vec{v}} &= -f\vec{\tau} - g\vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} &= g\vec{v} \end{aligned} \qquad (1)$$

differensial tenglamalar sistemasini

$$\vec{\tau}(0) = \vec{a}, \quad \vec{v}(0) = \vec{b}, \quad \vec{\beta}(0) = \vec{c}$$

Boshlang'ich shartlar bilan qaraylik. Differensial tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaga asosan bu sistemaning $[0, s_0]$ oraliqda aniqlangan yagona $\{\vec{\tau}(s), \ \vec{v}(s), \ \vec{\beta}(s)\}$ yechimi mavjud. Boshlang'ich shartlarga asosan $s = 0$ bo'lganda bu uchlik ortonormal sistemani tashkil qiladi. Biz ixtiyoriy $s \in [0, s_0]$ uchun bu uchlikning ortonormal ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $X(s)$ bilan birinchi satri

$\vec{\tau}(s)$**vektordan, ikkinchi satri** $\vec{\nu}(s)$ **vektordan va uchinchi satri** $\vec{\beta}(s)$ **vektordan iborat matritsani belgilasak, (1) sistemani**

$$X'(s) = A(s)X(s) \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & -g(s) \\ 0 & g(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Endi $\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$ **vektorlarning ortonormal sistema ekanligini ko'rsatish uchun** $X(s)$ **matritsaning ortogonal matritsa ekanligini ko'rsatish yetarlidir. Demak, ixtiyoriy** $s \in [0, S_0]$ **uchun**

$$X^T(s)\,X(s) = E$$

tenglikni isbotlashimiz zarur va yetarli. Bu erda $X^T(s)-$ **transponirlangan matritsa,** $E-$ **birlik matritsadir.**

Biz (2) tenglikdan

$$\frac{d}{ds}(X^T(s)) = X^T(s)\,A^T(s)$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikni hisobga olib,

$$X^T(s)\,X(s)$$

ko'paytmani differensiallaymiz. Shunda

$$\frac{d}{ds}(X^T(s)X(s)) = \frac{d}{ds}X^T(s)X(s) + X^T(s)\frac{d}{ds}X(s) =$$

$$= X^T(s)A^T(s)X(s) + X^T(s)A(s)X(s) = X^T(s)[A^T(s) + A(s)]X(s)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikda $A^T(s) = -A(s)$ **munosabatni hisobga olib,**

$$\frac{d}{ds}(X^T(s)\,X(s)) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $X^T(s)\,X(s)$ **o'zgarmas matritsa va** $X^T(0)\,X(0)=E$ **bo'lganligi uchun**

$$X^T(s)\,X(s)=E$$

tenglik hamma s **lar uchun o'rinlidir.**

Shunday qilib, ixtiyoriy $s\in[0,S_0]$ **uchun** $\vec{\tau}(s),\ \vec{\nu}(s),\ \vec{\beta}(s)$ **vektorlar ortonormal sistemani tashkil qiladi. Endi**

$$\vec{\rho}(s)=\vec{\rho}_0+\int_0^s\vec{\tau}(s)ds$$

tenglama bilan γ **chiziqni aniqlaymiz. Bu yerda** $\vec{\rho}_0$**-** M_0 **nuqtaning radius-vektoridir. Bu chiziq uchun**

$$\dot{\vec{\rho}}(s)=\vec{\tau}(s),\qquad |\vec{\tau}(s)|=1$$

$$\ddot{\vec{\rho}}(s)=\dot{\vec{\tau}}(s)=f(s)\vec{\nu}(s)$$

$$k=\left|\ddot{\vec{\rho}}\right|=f(s)$$

bo'lganligi uchun

$$[\dot{\vec{\rho}}(s),\ddot{\vec{\rho}}(s)]\neq\vec{o}$$

munosabat kelib chiqadi. Demak, bu chiziq uchun buralish aniqlangan va

$$\sigma=-\frac{\dot{\vec{\rho}}\ddot{\vec{\rho}}\dddot{\vec{\rho}}}{k^2}=-\frac{\left([\vec{\tau},f\vec{\nu}],f'(s)\vec{\nu}(s)+f\dot{\vec{\nu}}\right)}{k^2}=-\frac{\left([\vec{\tau},f\vec{\nu}],f\dot{\vec{\nu}}\right)}{k^2}=$$

$$=-\frac{f^2\left([\vec{\iota},\vec{\nu}],-f\vec{\tau}-g\vec{\beta}\right)}{k^2}=\frac{f^2g(\vec{\beta},\vec{\beta})}{k^2}=g$$

tenglik o'rinlidir. Demak, γ **chiziq teorema tasdig'ini qanoatlantiradi. Agar** M_0 **nuqta o'rniga boshqa** M **nuqta olsak, biz teorema shartini qanoatlantiruvchi va** M **nuqtadan chiquvchi** γ_M **chiziqni hosil qilamiz.**

Lekin, teorema-12 ga ko'ra, $F: R^3 \to R^3$ harakat mavjud bo'lib, $F(\gamma_M) = \gamma$ bo'ladi. □

II-bobga doir mashq va masalalar

1. Parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi tomonlari kvadratlarining yig'indisiga tengligini vektorlar yordami bilan isbotlang.

2. Tomonlari $a = i - 2j + 4k, \quad b = 3i + j - 2k$ **vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi topilsin.**

3. Tomonlari $a = 2i - 3j + 5k, \quad b = i + j - k, \quad c = 2i + 2j + 3k,$ **vektorlardan iborat parallelepipedning hajmi topilsin.**

4. Fazoda $0XYZ$ **dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va fazoda harakat qilayotgan** M **nuqtaning** $0XY$ **tekislikdagi proeksiyasi** $x^2 + y^2 = R^2$ **aylanada** ω **burchak tezlik bilan tekis harakat qiladi,** $0Z$ **o'qdagi proektsiyasi esa** a **tezlik bilan tekis harakat qiladi. Parametrlar** t **sifatida vaqtni olib va** $t = 0$ **da** $M \ (R;0;0)$ **nuqtada bo'lishini bilgan holda,** M **nuqta fazoda chizgan chiziqning parametrik tenglamalarini tuzing. Bu chiziq vint chizig'i deb ataladi (14-chizma).**

Javob: $x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t, \quad z = at.$

5.Qanday chiziqning parametrik tenglamalari

$$x = t^2 - t + 1, \quad y = t^2 + t - 1$$

ko'rinishda bo'ladi.

Javob: Parabola.

6.Qanday chiziqning parametrik tenglamalari

$$x = a\sin^2 t, \quad y = b\cos^2 t$$

ko'rinishda bo'ladi.

7.Astroida deb ataluvchi va

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

chiziqning silliq chiziq ekanligini ko'rsating.

Ko'rsatma: $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t$ **formulalar yordamida parametr kiritish kerak.**

8. Tekislikda giperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning parametrik tenglamalarini yozing.

9.Vint chizig'i

$$x = R\cos t,\quad y = R\sin t,\quad z = 2t.$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, uning $(R;0;0)$ **nuqtasidagi urinma, yopishma tekislik, boshnormal va binormal tenglamalarini tuzing.**

10. Fazoda

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar yordamida berilgan chiziqning $P(1;3;4)$ **nuqtasidagi urinma va normal tekislik tenglamalarini tuzing.**

11. Astroida uzunligini toping.

12. Parametrik tenglamalari

$$x = acht,\quad y = asht,\quad z = at.$$

ko'rinishda bo'lgan chiziqning $M_1(t = 0)$ **va** $M_2(t = 1)$ **nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini toping.**

13. $y^2 = 2px$ **chiziq tenglamasini tabiiy parametr yordamida yozing.**

14. Qutb koordinatalar sistemasida

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\varphi)$$

tenglama bilan berilgan chiziq yoyi uzunligini hisoblash formulasini yozing.

15. 4-masalada berilgan vint chizig'ining egriligi va buralishini hisoblang.

16. Giperbolik vint chizig'i

$$x = acht,\quad y = asht,\quad z = at.$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan, uning tenglamalarini tabiiy parametr yordamida yozing.

17. Dekart yaprog'i deb ataluvchi chiziq tenglamasi

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

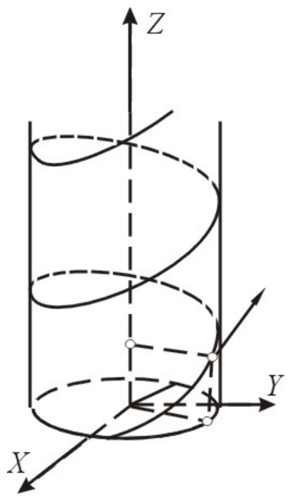
ko'rinishda bo'ladi. Uning $P(\frac{3a}{2};\frac{3a}{2})$ **nuqtasidagi urinma va normal tenglamalarini toping (15-chizma).**

18. Parametrik tenglamalari

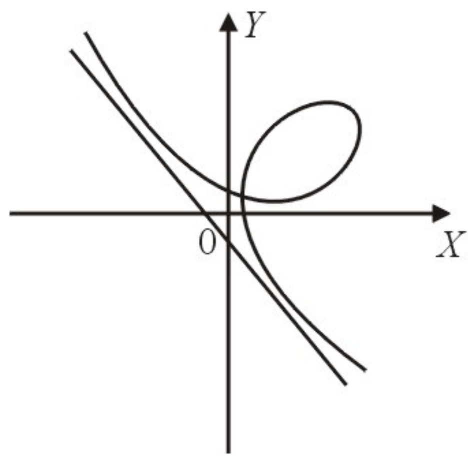
$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = tgt.$$

ko'rinishda bo'lgan chiziqning parametrning $t_0 = \frac{\pi}{4}$ **qiymatiga mos keluvchi nuqtasidagi egriligi va buralishini hisoblang.**

19. Vint chizig'ining hamma urinmalari $0XY$ **tekisligi bilan bir xil burchak ostida kesishishini isbotlang (4-masalaga qarang).**



Chizma-14



Chizma-15

III БОБ

S I R T L A R N A Z A R I YA S I

§1. Sirt tushunchasi va sirtning berilish usullari

Tekislikdagi ochiq doiraga gomeomorf to'plamni elementar soha deb ataymiz.

Ta'rif-1. ***Fazodagi Φ to'plam elementar sohaning topologik akslantirishdagi obrazi bo'lsa, uni elementar sirt deb ataymiz.***

Demak, Φ to'plam elementar sirt bo'lsa, $f: G \to \Phi$ - topologik akslantirish mavjud bo'lishi kerak. Bu erda $G \subset R^2$ elementar soha, Φ esa R^3 dan keltirilgan topologiya yordamida topologik fazoga aylantirilgan.Agar Ô elementar sirt bo'lsa, (f, G) juftlik Ô sirtni parametrlash usuli deyiladi.

Albatta G_1 boshqa elementar soha bo'lsa, G va G_1 sohalar o'zaro gomeomorf bo'ladi va agar $g: G_1 \to G$ gomeomorfizm berilgan bo'lsa, $f \cdot g: G_1 \to \Phi$ gomeomorfizm Ô sirtni parametrlashning boshsa usulidir.

Demak, elementar sirt uchun cheksiz ko'p parametrlash usullari mavjuddir. Birorta to'plamning elementar sirt ekanligini ko'rsatish uchun, uning uchun birorta parametrlash usulini ko'rsatish kerak.

Agar Φ sirt (f, G) parametrlash usuli bilan berilib, $(u,v) \in G$ uchun *f(u,v)* nuqtaning koordinatalari $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ ko'rinishda belgilsak

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

sistema Ô sirtning parametrik tenglamalari sistemasi deyiladi.

Ta'rif-2. ***Fazodagi bog'lanishli Ô to'plamga tegishli har bir nuqtaning birorta atrofida Ô elementar sirtga aylansa, Ô sodda sirt deyiladi.***

Ikkinchi ta'rifga izoh beramiz. Demak, Φ sodda sirt bo'lshi uchun unga tegishli har bir $p \in \Phi$ nuqta uchun shunday $U(p)$ atrof (R^3 fazoda) mavjud bo'lib, kesishma $U(p) \cap \Phi$ elementar sirt bo'lishi kerak.

Keyinchalik kurs davomida sirt deganda elementar yoki sodda sirtni tushunamiz.

Misollar.

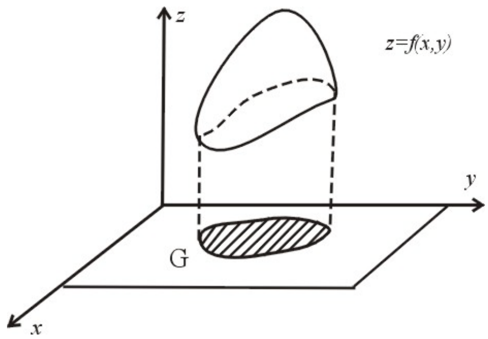
1) Har qanday tekislik elementar sirtdir, chunki tekislik doiraga gomeomorfdir.

Agar $M(x_0, y_0, z_0)$ **tekislik nuqtasi,** $\vec{a}$ **va** $\vec{b}$ **vektorlar tekislikka parallel bo'lsa, uni**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < \infty$$

ko'rinishida parametrlash mumkin. Bu yerda $\vec{r}_0 = \{x_0, y_{0,} z_0\}$ **vektor** M **nuqtaning radius vektoridir.**

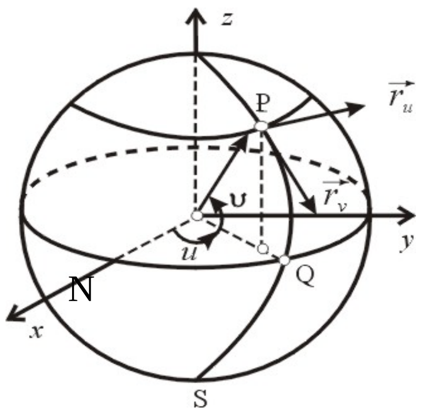
2) Elementar G**sohada aniqlangan** $z = f(x, y) -$ **uzluksiz funksiyaning grafigi elementar sirtdir. Sababi,** $(x, y, f(x, y)) \to (x, y) -$ **akslantirish (proektsiya) gomeomorfizmdir.**



Chizma-1

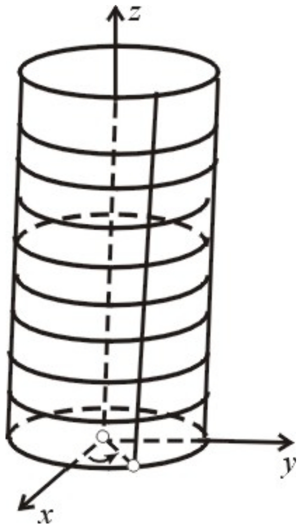
3) Ikki o'lchamli sfera S^2 **elementar bo'lmagan sodda sirtdir. Radiusi** R **ga teng** S^2 **sferaning markaziga koordinatalar boshini joylashtirsak, uni** $R^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ **to'plam sifatida qarashimiz mumkin. Bu sferaning sirt ekanligini isbotlash uchun unga tegishli birorta** P **nuqtani olaylik. Bu** P **nuqtadan farqli** S **nuqtani janubiy qutb sifatida, unga diametrik qarama-qarshi bo'lgan** N **nuqtani shimoliy qutb hisoblab,** z **o'qini koordinata boshidan** N **nuqta orqali o'tkazamiz,** Oxy **tekisligi esa** O **nuqtadan o'tuvchi va** ON **ga perpendikulyar tekislikdir Bu tekislik va sfera kesishishidan hosil bo'lgan aylanani ekvator deb ataymiz. Endi** u **bilan** OQ **nur va** Ox **o'qi**

orasidagi burchakni, v **bilan** OP **va** OQ **nurlar orasidagi burchakni belgilaymiz. Bu yerda** Q **nuqta** NPS **meridianning ekvator bilan kesishish nuqtasidir,** $0 < u < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$**. Shunda** S^2**sferaning** NS **meridian chiqarib tashlangan qismi** $\varphi : P \to (u, v)$ **akslantirish yordamida** $[0;2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ **elementar sohaga gomeomorf akslantiriladi va** $x = R\cos u \cos v,\ y = R\sin u \cos v,\ z = \sin v$ **tenglamalar yordamida parametrlanadi.**



Chizma-2

4) Doiraviy silindrni $x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v$ **tenglamalar sistemasi yordamida parametrlash mumkin. Bu erda** $-\infty < u < +\infty$ **,** $-\infty < v < +\infty$**. Albatta silindr ham elementar sirt emas (3 -chizma).**



Chizma-3

Agar biz $\vec{r}(u,v)=\{x(u;v);y(u;v);z(u;v)\}$ **vektor funksiyani kiritsak (1) tenglamalar sistemasini bitta**

$$\vec{r}=\vec{r}(u;v),\ (u,v)\in G \qquad \textbf{(2)}$$

vektorni tenglama yordamida yoza olamiz. Bu tenglama $\hat{O}$ **sirtning vektor ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. Tabiiyki,** $\hat{O}$ **sirt elementar sirt bo'lmasa, (1) va (2) tenglamalar uni birorta nuqta atrofida aniqlaydi. Agar** $\hat{O}$ **elementar sirt bo'lsa, uni to'liq (1) yoki (2) tenglamalar yordamida aniqlash mumkin.**

2. Sirtning oshkormas ko'rinishda berilishi.

Bizga $G\subset R^3$ **ochiq to'plam va** G **da aniqlangan silliq** $F(x;y;z)$ **funksiya berilgan bo'lsin.**

Shunda $\Phi=\{(x;y;z)\in G: F(x;y;z)=0\}$ **to'plam** F **funksiyaning sath to'plami yoki sirti deyiladi. Agar** $gradF\neq 0$ **bo'lsa,** $\hat{O}$ **haqiqatdan ham sodda sirt bo'ladi. Haqiqatdan, agar** $p=(x_0;y_0;z_0)\in\Phi$ **nuqtada** $F_z\neq 0$ **bo'lsa, oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko'ra, shunday** $\delta>0,\ \varepsilon>0$ **sonlari va** $G_0=\{(x;y): |x_0-x|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$ **sohada aniqlangan** $z=f(x;y)$ **funksiya mavjud bo'lib,** $(x;y)\in G_0$ **bo'lganda** $F(x;y,f(x;y))=0$ **tenglik uchun,** $z_0=f(x_0;y_0)$ **va** $|z_0-f(x;y)|<\varepsilon$ **munosabatlar bajarilib,**

$$\Pi=\{(x;y;z): |x_0-x|<\delta, |y_0-y|<\delta, |z_0-z|<\varepsilon\}$$

parallelipipedning $\hat{O}$ bilan kesishmasi $z = f(x;y)$ funksiyaning grafigidan iboratdir. Demak, $\hat{O}$ o'ziga tegishli har qanday nuqtaning yetarli kichik atrofida elementar sirt bo'ladi.

Bizning kursimizda asosiy metod matematik analiz bo'lganligi uchun, biz sirtlardan qo'shimcha shartlarni talab qilamiz.

Ta'rif-3. ***Berilgan Φ sirt uchun unga tegishli ixtiyoriy nuqta atrofida*** (f,G) ***parametrlash usuli mavjud bo'lib, bunda*** $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ ***funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega va*** $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ ***matritsaning rangi ikkiga teng bo'lsa, Φ sirt regulyar sirt deyiladi, parametrlash usuli esa regulyar parametrlash deyiladi.***

Sirtning regulyarlik shartini $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] = \vec{0}$ **ko'rinishda ham yozishimiz mumkin. Biz kursimizda asosan regulyar sirtlarni o'rganamiz.**

Endi sirtlarning berilish usullari haqida quyidagi teoremalarni isbotlaylik.

Teorema-1. ***Bizga*** G ***sohada aniqlangan silliq*** $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ ***funktsiyalar berilib, har bir nuqtada*** $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ ***tenglik o'rinli bo'lsa,***

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \qquad (u;v) \in G \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

sistema regulyar sirtni aniqlaydi.

Isbot: Teoremani isbotlash uchun

$$\mathbf{F} = \{(x;y;z) : x = x(u;v), y = y(u;v), z = z(u;v), (u;v) \in G\}$$

to'plamning sodda sirt ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun esa $\hat{O}$ to'plamga tegishli ixtiyoriy $p_0 = \left(x(u_0;v_0), y(u_0;v_0), z(u_0;v_0)\right)$ **nuqtaning yetarli kichik atrofida $\hat{O}$ elementar sirt ekanligini ko'rsatamiz. Birorta** $\varepsilon > 0$ **va** $G_\varepsilon = \{(u;v) \in G : (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 < \varepsilon\}$ **ochiq doira uchun**

$f:(u;v)\to(x(u;v),y(u;v),z(u;v))$ **qoida bilan aniqlangan** $f:G_\varepsilon\to f(G_\varepsilon)$ **akslantirishni qaraymiz. Berilgan** $x(u;v),y(u;v),z(u;v)$ **funksiyalar uzluksiz bo'lganligi uchun** f **ham uzluksiz akslantirishdir. Agar** f **o'zaro bir qiymatli bo'lsa, uning teskarisi** f^{-1} **mavjud va uzluksiz bo'ladi (** f^{-1} **uzluksizligi ham** $x(u;v),y(u;v)$ **va** $z(u;v)$ **funktsiyalar uzluksizligi va teorema shartidandan kelib chiqadi), demak** Φ **ning** p_0 **nuqtani o'z ichiga oluvchi** $f(G_\varepsilon)$ **qismi elementar sirt bo'ladi.**

Shuning uchun birorta $\varepsilon>0$ **uchun** f **akslantirishning o'zaro bir qiymatli akslantirish ekanligini isbotlaymiz.**

Faraz qilaylik, $\varepsilon_i>0,\ \varepsilon_i\to0,\ i=1,2,3,...$ **va** G_{ε_i} **doiraga tegishli** $(u_i^1;v_i^1)$ **va** $(u_i^2;v_i^2)$ **har xil nuqtalar uchun** $f(u_i^1;v_i^1)=f(u_i^2;v_i^2)$ **tenglik o'rinli bo'lsin. Umumiylikni chegaralamasdan aniqlik uchun** $u_i^1\le u_i^2$ **va** $v_i^1\le v_i^2$ **deb faraz qilaylik.**

Shunda,

$$x(u_i^1;v_i^1)-x(u_i^2;v_i^2)=0,\quad y(u_i^1;v_i^1)-y(u_i^2;v_i^2)=0,\quad z(u_i^1;v_i^1)-z(u_i^2;v_i^2)=0$$

tengliklardan va Lagranj teoremasidan

$$x_u(p_i^1,v_i^1)(u_i^2-u_i^1)+x_v(u_i^2,q_i^1)(v_i^2-v_1^i)=0$$

$$y_u(p_i^2,v_i^1)(u_i^2-u_i^1)+y_v(u_i^2,q_i^2)(v_i^2-v_1^i)=0$$

$$z_u(p_i^3,v_i^1)(u_i^2-u_i^1)+z_v(u_i^2,q_i^3)(v_i^2-v_1^i)=0$$

tengliklarni olamiz. Bu yerda $p_i^1,\ p_i^2,\ p_i^3\in\left[u_i^1,u_i^2\right],\ \ q_i^1,\ q_i^2,\ q_i^3\in\left[v_i^1,v_i^2\right]$ **va** $u_i^2-u_i^1$ **va** $v_i^2-v_i^1$ **sonlari bir vaqtda nolga aylana olmaydi.**

Shuning uchun yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{x_u(p_i^1;v_i^1)}{x_v(u_i^2;q_i^1)}=\frac{y_u(p_i^2;v_i^1)}{y_v(u_i^2;q_i^2)}=\frac{z_u(p_i^3;v_i^1)}{z_v(u_i^2;q_i^3)}$$

munosabatni olamiz. Bu munosabatda x_u, x_v, y_u, y_v va z_u, z_v funksiyalar uzluksizligidan foydalanib, $i \to \infty$ limitga o'tsak,

$$\frac{x_u(u_0,v_0)}{x_v(u_0,v_0)} = \frac{y_u(u_0,v_0)}{y_v(u_0,v_0)} = \frac{z_u(u_0,v_0)}{z_v(u_0,v_0)}$$

munosabatni olamiz.

Bu munosabat esa teorema shartiga zid bo'lgan,

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} < 2$$

tengsizlikka teng kuchlidir. Demak, farazimiz noto'g'ri, va $\varepsilon > 0$ etarli kichik bo'lganda $f : G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ akslantirish topologik akslantirishdir. Bundan esa, $\hat{O}$ to'plamning p_0 nuqtani o'z ichiga oluvchi $f(G_\varepsilon)$ qismi elementar sirt ekanligi kelib chiqadi.

Teorema-2. ***Regulyar*** $\hat{O}$ ***sirt unga tegishli*** $p(u_0,v_0)$ ***nuqta atrofida,***

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

parametrik tenglamalar yordamida berilib, p ***nuqtada*** $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ ***determinant noldan farqli bo'lsa, shunday silliq*** $f(x,y)$ ***funksiya mavjudki*** p ***nuqtaning atrofida*** $\hat{O}$ ***sirt*** $z = f(x,y)$ ***funksiyaning grafigidan iboratdir.***

Izoh. Biz regulyar sirtlarning parametrlash usulini tanlaganimizda har doim x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v hosilalar mavjud va uzluksiz bo'lishini talab qilamiz.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}, \ \begin{matrix} x(u_0,v_0) = x_0 \\ y(u_0,v_0) = y_0 \end{matrix}$ sistemaga ga matematik analiz kursidagi teskari funksiyalar haqidagi teoremani qo'llaymiz. Bu teoremaga asosan shunday $\delta > 0$ soni va $\Pi_\delta = \{(x,y) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$ sohada aniqlangan shunday differensiallanuvchi $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ funksiyalar mavjudki, ular $x(\ u(x,y),\ v(x,y)\ ) \equiv x$, $y(\ u(x,y),\ v(x,y)) \equiv y$ tengliklarni qanoatlantiradi va $u(x_0;y_0) = u_0$, $v(x_0;y_0) = v_0$,

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, p **nuqta atrofida** $\hat{O}$ **sirt** $z = z(u(x;y), v(x;y)) = f(x;y)$ **funksiyaning grafigidan iboratdir.**

§2. Sirt ustida yotuvchi egri chiziqlar

Regulyar $\hat{O}$ **sirtning** $p \in \hat{O}$ **nuqta atrofida regulyar** (f,G) **parametrlash usuli**

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad \textbf{(1)}$$

tenglama yordamida berilgan, sirt ustida M **nuqtadan o'tuvchi** γ **egri chiziq berilgan bo'lib, u**

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \quad a < t < b. \quad \textbf{(2)}$$

tenglama yordamida parametrlangan va $\gamma \subset f(G)$ **bo'lsin.**

Aniqlik uchun, M **sirt nuqtasi sifatida** $(u_0;v_0)$ **koordinatalarga, egri chiziq nuqtasi sifatida** t **parametrning** t_0 **qiymatiga mos kelsin. Tabiiyki, har bir** $t \in (a;b)$ **uchun shunday** $(u(t), v(t)) \in G$ **nuqta mavjud bo'lib,**

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) \quad \textbf{(3)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar γ **silliq egri chiziq bo'lsa,** $u(t), v(t)$ **funksiyalar ham differensiallanuvchi funksiyalar bo'ladi. Buni isbotlash uchun** $\hat{O}$ **sirtning regulyar sirt ekanligidan foydalanamiz.** $\hat{O}$ **regulyar sirt bo'lganligi uchun** $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ **tenglik o'rinli. Aniqlik uchun** $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ **bo'lsin deb faraz qilib,** $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$ **sistemani qaraymiz.**

Agar γ **silliq egri chiziq bo'lsa,** $\vec{\rho}(t)$ **vektor funksiyaning koordinatalari** $x(t), y(t), z(t)$ **differensiallanuvchi funksiyalar bo'ladi. Birorta** $t^* \in (a;b)$ **uchun** $x^* = x(t^*),\ y^* = y(t^*),\ z^* = z(t^*).$ **va** $u^* = u(t^*),\ \ v^* = v(t^*)$ **belgilashlar kiritib,**

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$$

sistemani

$$\begin{cases} x(u^*, v^*) = x^* \\ y(u^*, v^*) = y^* \end{cases}$$

boshlang'ich shartlar bilan qaraymiz. Teskari funksiya haqidagi teoremaga asosan shunday $\delta > 0, \varepsilon > 0$ **sonlari va**

$$\Pi_\delta = \{(x, y) : |x^* - x| < \delta, |y^* - y| < \delta\}$$

sohada aniqlangan va differensiallanuvchi $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ **funksiyalar mavjud bo'lib, ular**

$$\begin{aligned} &|u^* - u(x, y)| < \varepsilon, \quad x = x(u(x, y), v(x, y)),\ u^* = u(x^*, y^*) \\ &|v^* - v(x, y)| < \varepsilon, \quad y = y(u(x, y), v(x, y)),\ v^* = v(x^*, y^*) \end{aligned}$$

munosabatlarni qanoatlantiradi. Biz umumiylikni chegaralamasdan $\Pi_\delta = \{(u, v) : |u^* - u| < \varepsilon, |v^* - v| < \varepsilon\}$ **soha uchun** $\Pi_\delta \subset G$ **munosabat o'rinli deb hisoblaymiz.**

Endi $\delta_0 > 0$ **sonini shunday tanlaymizki,** $|t^* - t| < \delta_0$ **bo'lganda** $|x^* - x(t)| < \delta, |y^* - y(t)| < \delta$ **munosabatlar bajarilsin.** $\pi : (x, y, z) \to (x, y)$ **qoida bilan aniqlangan** $\pi : R^3 \to R^2$ **proeksiya yordamida** $|t^* - t| < \delta_0$ **uchun**

$$(x(t), y(t)) = \pi(x(t), y(t), z(t))$$

tenglikni hisobga olib,

$$\begin{aligned} u(t) &= u(x(t), y(t)) \\ v(t) &= v(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

differensiallanuvchi funksiyalarni aniqlaymiz. Bu funksiyalar $u(t^*) = u^*, v(t^*) = v^*$ **va** $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ **tengliklarni qanoatlantiradi va** t^* **nuqta atrofida aniqlangan funksiyalar bo'ladi. Bu** t^* **nuqta ixtiyoriy tanlangani uchun** $u(t),\ v(t)$ **funk-siyalar** (a, b) **oraliqning har bir nuqtasida differensiallanuvchidir.**

Agar γ **regulyar egri chiziq bo'lsa, u holda**

$$\vec{\rho}'(t) = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v'$$

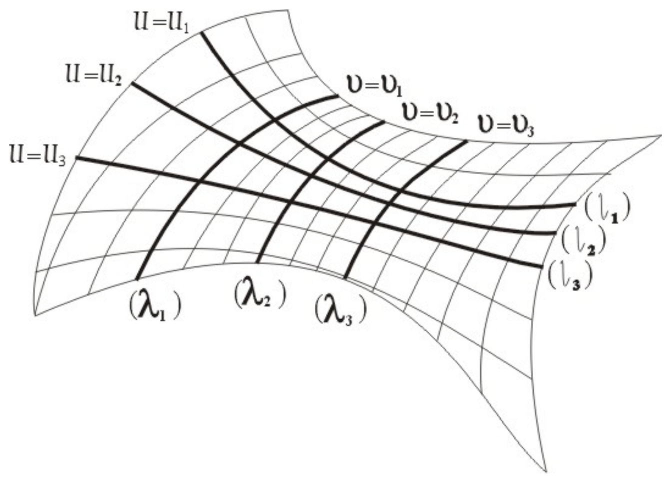
tenglikdan u', v' **larning bir vaqtda nolga teng bo'lmasligi kelib chiqadi. Shunday qilib,** γ **egri chiziqni**

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

tenglamalar bilan berish mumkin. Bu tenglamalar γ **chiziqning ichki koordinatalardagi tenglamalari deb ataladi.**

Berilgan Φ **sirtda** $u = t,\ v = v_0 = const$ **va** $u = u_0 = const,\quad v = t$ **tenglamalar bilan aniqlanuvchi egri chiziqlar koordinata chiziqlari deb ataladi. Koordinata chiziqlarining urinma vektorlari mos ravishda** $\vec{r}_u$ **va** $\vec{r}_v$ **vektorlardir**

(4-chizma).



Chizma-4

Ta'rif-1. ***Berilgan*** $\vec{a}$ ***vektor sirt ustida yotuvchi egri chiziqning*** p ***nuqtadagi urinma vektori bo'lsa, u*** Φ ***sirtga*** p ***nuqtadagi urinma vektor deb ataladi.***

Teorema-3. ***Regulyar sirtning berilgan nuqtadagi urinma vektorlari to'plami ikki o'lchamli chiziqli fazodir.***

Isbot. Φ **- regulyar sirt,** p **- unga tegishli nuqta va** $\vec{a}$**-birorta urinma vektor bo'lsin.**

Agar Φ **sirt (1) tenglama yordamida regulyar parametrlangan,** $\vec{a}$ **vektor** $u = u(t),\ v = v(t)$ **tenglamalar yordamida aniqlangan egri chiziqning** p **nuqtadagi urinma vektori bo'lsa,**

$$\vec{a} = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v',$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy urinma vektorni $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ -vektorlar yordamida chiziqli ifodalash mumkin.

Bundan kelib chiqadiki, urinma vektorlar to'plamida, $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlar bazisni tashkil qiladi.

Ta'rif-2. ***Berilgan Φ sirtning $p(u_0;v_0)$ nuqtasidan o'tuvchi va $\vec{r}_u(u_0;v_0)$, $\vec{r}_v(u_0;v_0)$ vektorlarga parallel tekislik p nuqtadagi urinma tekislik deb ataladi.***

Urinma tekislik ta'rifida sirtning parametrlanish usuliga bog'liq $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar qatnashishiga qaramasdan urinma tekislik tushunchasi sirtning parametrlanish usuliga bog'liq emasligini quyidagi teorema ko'rsatadi:

Teorema-4: Bizga sirtning $p(u_0;v_0)$ nuqtadan o'tuvchi Ï tekislik derilgan bo'lib, q- sirtning p ga yaqin nuqtalaridan biri, d - p va q nuqtalar orasidagi masofa, h- q nuqtadan Ï tekislikgacha bo'lgan masofa bo'lsin. Shunda Ï tekislik p nuqtadagi urinma tekislik bo'lishi uchun,

$$\lim_{q\to p}\frac{h}{d}=0 \qquad (\,*\,)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot: Biz Ï tekislikning birlik normal vektorini $\vec{n}$ bilan belgilaylik. Agar Ô sirt p nuqtada $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama bilan parametrlangan bo'lsa, q va p nuqtalar orasidagi masofa uchun

$$d=\left|\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0)\right|,$$

h uchun esa

$$h=\left|\left(\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{n}\right)\right|$$

formula o'rinli bo'ladi. Shunda,

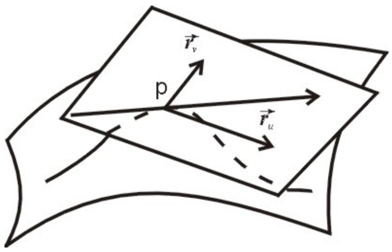
$$\lim_{q\to p}\frac{h}{d}=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{h}{d}=\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{|(\Delta\vec{r},\vec{n})|}{\left|\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0)\right|}$$

bo'ladi. Bu erda, $\Delta\vec{r}=\vec{r}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0)$, $u_0+\Delta u,\ \upsilon_0+\Delta v-q$ nuqtaga mos keluvchi argumentlardir.

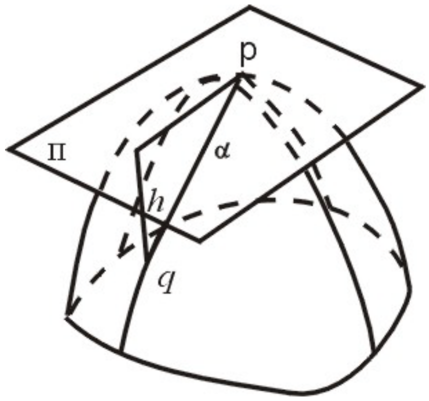
Zarurlik: Ï **urinma tekislik bo'lsin.Ta'rifga ko'ra,** Ï **-tekislik** $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ **vektorlarga parallel bo'lgani uchun,** $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$ **tenglik o'rinlidir.**

Teylor formulasidan foydalanib, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_u(u_0;v_0)\cdot\Delta u + \vec{r}_v(u_0;v_0)\cdot\Delta v + \vec{\varepsilon}$ **tenglikni yozib va** $\lim\limits_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{\varepsilon} = \vec{0}$ **tenglikni hisobga olsak,** $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{h}{d} = 0$ **munosabat kelib chiqadi.**

Etarlilik: Berilgan Ï **tekislik uchun** $(*)$ **tenglik o'rinli bo'lsin. U holda** $(*)$ **tenglikda** $\Delta u = 0$ **va** $\Delta v = 0$ **hollar uchun** $(\vec{r}_u;\vec{n}) = 0$ **va** $(\vec{r}_v;\vec{n}) = 0$ **tengliklarni hosil qilamiz. Demak,** Ï **tekislik urinma tekislikdir.**



Chizma-5



Chizma-6

§ 3. Sirtning birinchi kvadratik formasi

Bizga uch o'lchamli R^3 evklid fazosida regulyar $\hat{O}$ sirt berilgan bo'lsa, $\hat{O}$ sirtgaga urinma $T_P\Phi$ fazoga tegishli ikkita $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar uchun ularning skalyar ko'paytmasini $I(\vec{a},\vec{b})$ bilan belgilaymiz. Bu skalyar ko'paytma yordamida $\hat{O}$ sirtning birinchi kvadratik formasini aniqlaymiz.

Urinma fazoda $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektorlar bazisni tashkil qilganligi uchun

$$\vec{a} = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v, \quad \vec{b} = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$$

tengliklarni yozib,

$$I(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_1\vec{r}^{\,2}{}_u + (a_1b_2 + a_2b_1)\cdot(\vec{r}_u,\vec{r}_v) + a_2b_2\vec{r}^{\,2}{}_v$$

ifodani hosil qilamiz. Demak, $I(\vec{a},\vec{b})$ ifodani hisoblash uchun, $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ bazisdagi koordinatalarini va $E = \vec{r}^{\,2}{}_u$, $F = (\vec{r}_u,\vec{r}_v)$ va $G = \vec{r}_v^{\,2}$ funksiyalarni bilishimiz etarli.

Birinchi kvadratik formani

$$I(\vec{a},\vec{a}) = a_1^2 \cdot E + 2a_1a_2 \cdot F + Ga_2^2$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Birinchi kvadratik forma yordamida quyidagi ishlarni bajarish mumkin:

1. **Sirt ustida chiziqlar uzunligini hisoblash.**

Bizga Φ sirtning (f,G) parametrlash usuli

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$$

tenglama yordamida berilib, sirtda $u = u(t), \quad v = v(t).$ tenglamalar bilan γ chiziq berilgan bo'lsin. γ uchun parametrlarning t_1 va t_2 $(t_1 < t_2)$ qiymatlariga mos keluvchi yoy uzunligini hisoblaylik.

Bilamizki, bu yoy uzunligi R^3 fazoda

$$l(\gamma)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{\rho}'(t)|dt$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu erda $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$ va $\vec{\rho}'(t) = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$ ekanligini hisobga olsak,

$$l(\gamma)\Big|_{t_1}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E\cdot u'^2+2F\cdot u'v'+G\cdot v'^2}\,dt$$

formulani hosil qilamiz.

2. Sirt ustida yotuvchi chiziqlar orasidagi burchak.

Berilgan $\hat{O}$ **sirtda** $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ **va** $\vec{\rho}_1=\vec{\rho}_1(s)$ **tenglamalar bilan regulyar chiziqlar berilgan bo'lsin. Agar bu chiziqlar kesishsa (ya'ni** $\vec{\rho}(t_0)=\vec{\rho}_1(s_0)$ **tenglikni qanoatlantiruvchi** $t_0,\ s_0$ **lar mavjud bo'lsa),** $\vec{\rho}\,'(t_0),\ \ \vec{\rho}_1'(s_0),$ **vektorlar orasidagi burchakni shu nuqtadagi egri chiziqlar orasidagi burchak deb ataymiz: Bu burchakning qiymati** φ **bo'lsa,**

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{\rho}\,'(t_0),\vec{\rho}_1'(s_0))}{|\vec{\rho}\,'(t_0)|\cdot|\vec{\rho}_1'(s_0)|}$$

tenglik o'rinlidir. Bu yerda,

$$\vec{\rho}\,'(t_0)=\vec{r}_u u'(t_0)+\vec{r}_v v'(t_0),$$

$$\vec{\rho}_{1'}(s_0)=\vec{r}_u u_1'(s_0)+\vec{r}_v v_1'(s_0)$$

tengliklarni hisobga olsak,

$$\cos\varphi=\frac{Eu'(t_0)u_1'(s_0)+F(u'(t_0)v_1'\ (s_0)+v'(t_0)u_1'(s_0))+Gv'(t_0)v_1'\ (s_0)}{\sqrt{E(u'(t_0))^2+2Fu'(t_0)v'(t_0)+G(v'(t_0))^2}\cdot\sqrt{E(u_1'(s_0))^2+2Fu_1'(s_0)v_1'\ (s_0)+G(v_1'\ (s_0))^2}}$$

munosabatni hosil qilamiz.

§4. Sirtlarni silliq akslantirish

Bizga $\hat{O}$ **regulyar sirt va** $g:\Phi\to R^m$ **akslantirish berilgan, r sirtning birorta nuqtasi bo'lsin.**

Ta'rif-1: $\hat{O}$ **sirtning** p **nuqta atrofida ixtiyoriy silliq** (f,G) **parametrlash usuli uchun** $g\cdot f:G\to R^m$ **silliq akslantirish bo'lsa,** g **akslantirish** p **nuqtada silliq akslantirish deyiladi. Agar** (f,G) **parametrlash usuli** $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ **tenglama bilan berilgan bo'lsa,** $g\cdot f$ **akslantirish** g **akslantirishning egri chiziqli** (u,v) **koordinatalardagi ifodasi deyiladi.**

Izoh: Ta'rifga ko'ra g **silliq akslantirish bo'lishi uchun sirtning r nuqta atrofidagi ixtiyoriy** (f,G) **parametrlash usuli uchun,** $g\cdot f:G\to R^m$ **akslantirish**

differensiallanuvchi bo'lishi kerak. Bu erda $G-(u,v)-$tekislikdagi elementar soha bo'lganligi uchun $g\cdot f$ akslantirish $m$ta

$$y_1 = g_1(u,v)$$

$$y_2 = g_2(u,v)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m = g_m(u,v)$$

funksiyalar yordamida beriladi. Berilgan g akslantirish silliq bo'lishi uchun bu funksiyalar differensiallanuvchi bo'lishi kerak. Lekin quyidagi teorema ko'rsatadiki, g silliq akslantirish bo'lishi uchun birorta regulyar (f,G) parametrlash usuli uchun $g\cdot f$ ning differensiallanuvchi bo'lishi yetarlidir.

Teorema-5: Berilgan $g:\Phi\to R^m$ akslantirish p nuqtada silliq akslantirish bo'lishi uchun $\hat{O}$ sirtning p nuqta atrofidagi birorta regulyar (f_1,G_1) parametrlash usuli uchun $g\cdot f_1: G_1\to R^m$ akslantirishning differensiallanuvchi bo'lishi zarur va etarlidir.

Isboti: Tabiiyki, bu erda faqat yetarlilik qismini isbotlash lozimdir. Demak, biz ixtiyoriy silliq parametrlash usuli (f,G) uchun $g\cdot f: G\to R^m$ akslantirishning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatishimiz kerak. p nuqtaning (f_1,G_1) parametrlash usulidagi koordinatalari (w_0,s_0), $(f,G)-$parametrlash usulidagi koordinatalari (u_0,v_0) va $W=f(G)\cap f_1(G_1)$ bo'lsin. Shunda $U=f^{-1}(W)$ to'plam (u_0,v_0) nuqtaning atrofi bo'ladi va bu atrofda $g\cdot f=(g\cdot f_1)\cdot(f_1^{-1}\cdot f)$ tenglik o'rinli. Teorema shartiga ko'ra, $g\cdot f_1-$differensiallanuvchi akslantirishdir. Shuning uchun, biz $f_1^{-1}\cdot f: U\to G_1$ akslantirishning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Regulyar parametrlash usuli (f_1,G_1) differensiallanuvchi

$$\begin{cases} x = x(w,s) \\ y = y(w,s) \\ z = z(w,s) \end{cases}$$

funksiyalar yordamida beriladi va $rang\begin{pmatrix} x_w & y_w & z_w \\ x_s & y_s & z_s \end{pmatrix} = 2$ **tenglik o'rinlidir.**

Faraz qilaylik, $\begin{vmatrix} x_w & y_w \\ x_s & y_s \end{vmatrix} \neq 0$ **bo'lsin. Teskari funksiya haqidagi teoremani**

$$\begin{cases} x = x(w,s), & x_0 = x(w_0, s_0) \\ y = y(w,s), & y_0 = y(w_0, s_0). \end{cases}$$

sistemaga qo'llaymiz. Shunda silliq $w = w(x,y),\quad s = s(x,y)$ **funksiyalar mavjud bo'lib,**

$$\begin{aligned} x = x(w(x,y), s(x,y)), \quad & w_0 = w(x_0, y_0) \\ y = y(w(x,y), s(x,y)), \quad & s_0 = s(x_0, y_0). \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Uchinchi koordinatamiz $z = z(w(x,y), s(x,y)) = \gamma(x,y)$ x, y **larning funksiyasi bo'ladi.**

Demak, r nuqta atrofida, (x,y) **lar ichki koordinatalar bo'lib, sirt** $z = \varphi(x,y)$ **funksiya grafigidan iborat bo'ladi. Shunda** $\pi : (x,y,z) \to (x,y)$ **proeksiya va** $w = w(x,y),\quad s = s(x,y)$ **funksiyalar yordamida berilgan** $\tilde{f} : (x,y) \to (w,s)$ **akslantirish differensiallanuvchi bo'lganligi uchun** $f_1^{-1}(x,y,z) = \tilde{f}\pi(x,y,z)$ **akslantirish differensiallanuvchidir. Demak** $f_1^{-1} \circ f$ **ham differensiallanuvchidir.**

Bizga Φ_1, Φ_2 **sirtlar va** $g : \Phi_1 \to R^3$ **akslantirish berilib,** $g(\Phi_1) = \Phi_2$ **bo'lsa,** $g : \Phi_1 \to \Phi_2$ **akslantirish berilgan deyiladi.**

Tabiiyki, $g : \Phi_1 \to R^3$ **differensiallanuvchi bo'lsa,** $g : \Phi_1 \to \Phi_2$ **differensiallanuvchi deyiladi. Agar** g **differensiallanuvchi bo'lsa,** Φ_1 **sirtdagi silliq egri chiziqning obrazi** Φ_2 **sirtda silliq egri chiziq bo'ladi.**

Ta'rif-2: Φ_1 **sirtdagi ixtiyoriy** γ **egri chiziqning** p **nuqtadagi urinma vektorini** $g(\gamma)$ **egri chiziqning** $g(p)$ **nuqtadagi urinma vektoriga o'tkazuvchi** $T_p\Phi_1 \to T_{g(p)}\Phi_2$ **akslantirish** g **akslantirishning** p **nuqtadagi differensiali deb ataladi va** $dg(P)$ **ko'rinishda belgilanadi.**

Bizga $g : R^3 \to R^3$ **differensiallanuvchi akslantirish berilgan va** $\Phi_2 = g(\Phi_1)$ **bo'lsa,** $dg(p)$ **akslantirishning** p **nuqtadagi Yakobi matritsasi bilan ustma-ust tushishini ko'rsataylik.**

Φ_1 **sirt** p **nuqta atrofida**

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \quad \textbf{(1)}$$

tenglama bilan berilgan va $\varPhi_2$ **sirt** $g(p)$ **nuqta atrofida**

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(u,v) \qquad \textbf{(2)}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, $\vec{\rho}(u,v)-$ **vektor** $g(x(u,v),y(u,v).z(u,v))-$ **nuqtaning radius vektoridir. Endi** $p(u_0,v_0)-$**nuqtadan o'tuvchi** γ **egri chiziq ichki koordinatalarda**

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

tenglamalar bilan berilgan va $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, **bo'lsa,** γ **chiziqning** p **nuqtadagi urinma vektori** $\vec{a} = \vec{r}_u u'(t_0) + \vec{r}_v v'(t_0)$ **vektordir.**

$\varPhi_2$ **sirtda** $g(\gamma)$ **egri chiziqning** $g(p)$ **nuqtada urinma vektori**

$$\vec{b} = \vec{\rho}_u u'(t_0) + \vec{\rho}_v v'(t_0) \qquad \textbf{(4)}$$

vektordir.

Agar $g(x,y,z) = \{g^1(x,y,z), g^2(x,y,z), g^3(x,y,z)\}$ **va** $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$, $z_0 = z(u_0,v_0)$ **bo'lsa,** $\vec{b} = I(g)(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{a}$ **tenglik o'rinlidir.**

Bu erda,

$$I(g)(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} g_x^1(x_0,y_0,z_0) & g_x^2(x_0,y_0,z_0) & g_x^3(x_0,y_0,z_0) \\ g_y^1(x_0,y_0,z_0) & g_y^2(x_0,y_0,z_0) & g_y^3(x_0,y_0,z_0) \\ g_z^1(x_0,y_0,z_0) & g_z^2(x_0,y_0,z_0) & g_z^3(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

g **akslantirishning** p **nuqtadagi yakobi matritsasidir.**

Teorema-6. $dg(p)$ **chiziqli akslantirishdir.**

Isboti. (4) formuladan ko'rinib turibdiki, agar $\vec{a}$ **vektor** $T_P\varPhi_1$ **fazoda** a_1, a_2 **koordinatalarga ega bo'lsa,** $\vec{b}$ **vektor ham** $T_{g(p)}\varPhi_2$ **fazoda xuddi shu koordinatalarga ega. Koordinatalarning chiziqliligidan** $dg(p)$ **akslantirishning chiziqli ekanligi kelib chiqadi.**

§5. Izometrik akslantirishlar

Ta'rif-1. Regulyar Φ_1 va Φ_2 sirtlar uchun $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ silliq akslantirish berilgan bo'lib, har qanday $p \in \Phi_1$ nuqta uchun $dg(p):T_p\Phi_1 \to T_{g(p)}\Phi_2$ akslantirish skalyar ko'paytmani saqlasa (ya'ni chiziqli izometrik akslantirish bo'lsa), g izometrik akslantirish deyiladi.

Demak, g izometrik akslantirish bo'lsa, ixtiyoriy $p \in \Phi_1$ nuqta va ixtiyoriy $\vec{a},\vec{b} \in T_p\Phi_1$ vektorlar uchun

$$I_1(\vec{a},\vec{b}) = I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{b}))$$

tenglik o'rinli bo'ladi. bu erda I_1 va I_2 mos ravishda $\hat{O}_1$ va $\hat{O}_2$ sirtlarning 1-kvadratik formalaridir.

Izometrik akslantirishlar haqida quyidagi teoremalarni isbotlaymiz.

Teorema-7. Izometrik akslantirish diffeomorfizmdir.

Isbot. Silliq $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ akslantirish uchun teskari akslantirish $g^{-1}:\Phi_2 \to \Phi_1$ mavjud va differentsiallanuvchi bo'lsa, g diffeomorfizm deyiladi. Demak izometrik $g:\Phi_1 \to \Phi_2$ akslantirishning diffeomorfizm ekanligini ko'rsatish uchun g^{-1} ning mavjud va differentsiallanuvchi ekanligini ko'rsatish kerak.

Faraz qilaylik, Φ_1 sirt (f_1, G_1) parametrlash usuli bilan, Φ_2 sirt (f_2, G_2) parametrlash usuli bilan berilgan bo'lsin. g: $\Phi_1 \to \Phi_2$ differentsiallanuvchi akslantirish bo'lganligi uchun, ta'rifga ko'ra $g \cdot f_1 : G_1 \to R^3$ differentsiallanuvchidir. Biz $g^{-1} \cdot f_2 : G_2 \to R^3$ akslantirishning differentsiallanuvchi ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Akslantirish g izometrik bo'lganligi uchun uning differentsiali dg chiziqli erkli vektorlarni chiziqli erkli vektorlarga o'tkazadi. Haqiqatan ham, Φ_1 sirtning p nuqtasidagi $\vec{p}$ va $\vec{q}$ urinma vektorlari chiziqli erkli bo'lsa, $\frac{|I_1(\vec{p},\vec{q})|}{|\vec{p}||\vec{q}|} \neq 1$ bo'ladi. Лekin

$$I_2(dg(\vec{p}), dg(\vec{q})) = I_1(\vec{p},\vec{q}), \quad |\vec{p}| = |dg(\vec{p})|, \quad |\vec{q}| = |dg(\vec{q})|$$

bo'lganligi uchun

$$\frac{|I_2(dg(\vec{p}), dg(\vec{q}))|}{|dg(\vec{p})||dg(\vec{q})|} \neq 1$$

kelib chiqadi.

Bu esa $dg(\vec{p}),\ dg(\vec{q})$ **vektorlarning chiziqli erkli ekanligiga teng kuchlidir. Agar** $\vec{p}=df_1(\vec{a}),\vec{q}=df_1(\vec{b})$ **bo'lsa,** $dg(\vec{p})=d(g\cdot f_1)(\vec{a})$, $dg(\vec{q})=d(g\cdot f_1)(\vec{b})$ **bo'ladi.** Sh**uning uchun** $g\cdot f_1$ **akslantirishning rangi ikkiga tengdir. Чunki** $g\cdot f_1$ **akslantirishning rangi ikkidan kichik bo'lsa,** $d(g\cdot f_1)(\vec{a}),\ d(g\cdot f_1)(\vec{b})$ **vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'ladi.**

Shunday qilib, G_1 **sohaning ixtiyoriy nuqtasida** $g\cdot f_1$ **akslantirish rangi ikkiga teng bo'ladi. Agar** $f=g\cdot f_1$ **akslantirish**

$$\begin{cases} x=g^1(u,v)\\ y=g^2(u,v)\\ z=g^3(u,v)\end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

funktsiyalar yordamida berilgan bo'lsa, G_1 **ning har bir nuqtasida**

$$rang\begin{pmatrix} g_u^1\,g_u^2\,g_u^3\\ g_v^1\,g_v^2\,g_v^3\end{pmatrix}=2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak, (1) tenglamalar Φ_2 **sirtning regulyar** (f,G_1) **parametrlash usulini aniqlaydi.**

Teskari funksiya haqidagi teoremaga asosan ([2]ga qarang) $(gf_1)^{-1}$ **mavjud. Demak,** $g^{-1}=f_1\cdot(gf_1)^{-1}$ **ham mavjud va** g^{-1} **ning differentsiallanuvchi ekanligi** $g^{-1}f(u,v)=f_1(u,v)$ **tenglikdan kelib chiqadi.**

Berilgan silliq $g:\Phi_1\to\Phi_2$ **akslantirish izometriya bo'lishini tekshirish uchun quyidagi teoremalardan foydalaniladi.**

Teorema-8. Silliq $g:\Phi_1\to\Phi_2$ **akslantirish izometriya bo'lishi uchun bu akslantirishda ixtiyoriy chiziqlar yoyi uzunligi saqlanishi zarur va etarlidir.**

Isbot. Izometrik akslantirish $g:\Phi_1\to\Phi_2$ **va** Φ_1 **da yotuvchi** γ **egri chiziq** $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ **tenglama yordamida berilgan bo'lsin. Shunda bu chiziq yoyi uzunligi** $\int_{t_1}^{t_2}|\vec{\rho}'(t)|\,dt$ **formula bilan hisoblanadi. Agar** $g(\gamma)$ **chiziqning urinma vektori** $\vec{\tau}^{\,1}(t)$ **bo'lsa,** g **izometrik bo'lganligi uchun** $|\vec{\tau}'(t)|=|\vec{\rho}'(t)|$ **tenglik o'rinli. Demak,**

$$\int_{t_1}^{t_2} |\vec{\rho}^1(t)|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{\tau}'(t)|\,dt\,.$$

Aksincha, silliq $g:\varPhi_1 \to \varPhi_2$ akslantirish berilgan bo'lib, u ixtiyoriy chiziq yoyi uzunligini saqlasin. Ixtiyoriy $p \in \Phi$ nuqta va $\vec{a} \in T_p\varPhi_1$ vektorni qaraylik. Ixtiyoriy urinma vektor birorta egri chiziqning p nuqtasidagi urinma vektori bo'lganligi uchun, shunday silliq γ egri chiziq mavjudki, uning p nuqtadagi urinma vektori $\vec{a}$ ga teng. Faraz qilaylik, γ chiziq $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilgan va $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{a}$ bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra

$$\int_{t_0}^{t} |\vec{\rho}'(s)|\,ds = \int_{t_0}^{t} |\vec{\tau}'(t)|\,dt, \qquad \textbf{(2)}$$

bu erda $\vec{\tau}'(t)$ $g(\gamma)$ egri chiziqning urinma vektori.

Biz (2) tenglikning ikkala tomoni t bo'yicha differensiallaymiz va $|\vec{\rho}'(t_0)| = |\vec{\tau}'(t_0)|$ tenglikni hosil qilamiz. Demak differensial $dg(p)$ ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorning uzunligini saqlaydi, ya'ni $|\vec{a}| = |dg(p)(\vec{a})|$. Endi ixtiyoriy $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar uchun

$$I_1(\vec{a},\vec{b}) = \tfrac{1}{2} I_1(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) - \tfrac{1}{2} I_1(\vec{a},\vec{a}) - \tfrac{1}{2} I_1(\vec{a},\vec{b}) = \tfrac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{a}+\vec{b}), dg(p)(\vec{a}+\vec{b})) -$$
$$- \tfrac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{a})) - \tfrac{1}{2} I_2(dg(p)(\vec{b}), dg(p)\vec{b})) = I_2(dg(p)(\vec{a}), dg(p)(\vec{b}))$$

ni hosil qilamiz. Demak, $dg(p)$ skalyar ko'paytmani saqlaydi.

Teorema-9. Silliq $g:\varPhi_1 \to \varPhi_2$ akslantirish izometriya bo'lishi uchun $\varPhi_1$ ga tegishli ixtiyoriy p nuqtaning atrofi uchun $\varPhi_1$ ning shunday (f,G) parametrlash usuli mavjud bo'lib, $\varPhi_1$ va $\varPhi_2$ sirtlarning (f,G) va $(g\cdot f,G)$ parametrlash usullari uchun hisoblangan 1-kvadratik formalari koeffitsientlarining mos ravishda teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Akslantirish $g:\varPhi_1 \to \varPhi_2$ izometriya, $p \in \Phi_1$ va p ning atrofida $\varPhi_1$ sirtning (f,G) parametrlash usuli

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$$

tenglama yordamida berilgan bo'lsin. Birinchi teoremaga ko'ra g **- diffeomorfizm, va** $(g\cdot f, G)$ **-** Φ_2 **sirtning parametrlash usuli bo'ladi. Faraz qilaylik,** Φ_2 **ning bu parametrlash usuli**

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}(u,v)$$

tenglama bilan berilsin. Shunda

$$\vec{\rho}_u=dg(p)(\vec{r}_u),\vec{\rho}_v=dg(p)(\vec{r}_v)$$

tengliklardan g **izometriya bo'lganligi uchun**

$$E_1=I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_u)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_u)=E_2$$

$$F_1=I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v)=F_2$$

$$G_1=I_1(\vec{r}_v,\vec{r}_v)=I_2(\vec{\rho}_v,\vec{\rho}_v)=G_2$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi, aksincha p **nuqta atrofidan** Φ_1 **sirtning** (f,G) **parametrlash usuli va** Φ_2 **sirtning** $g(P)$ **nuqta atrofidagi** $(g\cdot f,G)$ **parametrlash usullari uchun**

$$E_1(u,v)=E_2(u,v),$$
$$F_1(u,v)=F_2(u,v),$$
$$G_1(u,v)=G_2(u,v)$$

tengliklar o'rinli bo'lsin.

Shunda, $dg(p)(\vec{r}_u)=\vec{\rho}_u,dg(p)(\vec{r}_v)=\vec{\rho}_v$ **tengliklarni hisobga olib,**

$$I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_u)=E_1(u,v)=E_2(u,v)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_u),$$
$$I_1(\vec{r}_u,\vec{r}_v)=F_1(u,v)=F_2(u,v)=I_2(\vec{\rho}_u,\vec{\rho}_v),$$
$$I_1(\vec{r}_v,\vec{r}_v)=G_1(u,v)=G_2(u,v)=I_2(\vec{\rho}_v,\vec{\rho}_v)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Demak, $dg(p)$ **akslantirish** $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ **vektorlarning skalyar ko'paytmalarini saqlaydi.**

Differentsial $dg(p)$ **chiziqli akslantirish ekanligidan va skalyar ko'paytmaning bichiziqliligidan** $dg(p)$ **ning skalyar ko'paytmani saqlashi kelib chiqadi.**

§ 6. Sirtning ikkinchi kvadratik formasi

Φ **sirtning 2-kvadratik formasi ham** $T_p\Phi$ **ga tegishli vektorlar jufti uchun aniqlangan bichiziqli (ya'ni har bir argumenti bo'yicha chiziqli) funktsiya**

yordamida aniqlanadi. Φ **sirtning** p **nuqtasidagi birlik normal vektorini** $\vec{n}$ **bilan belgilaylik. Ikkinchi kvadratik formani II bilan belgilab, uni** $\vec{a} \in T_p\Phi$ **uchun** $II(\vec{a}, \vec{a})$ **ni berish yordamida aniqlaymiz.**

Agar p **nuqta atrofida** Φ **sirtni parametrlash usuli** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ **tenglama bilan aniqlanib,** Φ **sirtda** p **nuqtadan o'tuvchi** γ **egri chiziq** $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ **tenglama bilan berilgan va** $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{a}$ **bo'lsin. Yuqorida ko'rsatilganidek,** $u = u(t)$ $v = v(t)$ **differensiallanuvchi funksiyalar mavjud bo'lib** $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ **tenglik bajariladi. Ikkinchi kvadratik formaning** $\{\vec{a}, \vec{a}\}$ **juftlik uchun qiymatini** $II(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{\rho}''(t_0), \vec{n})$ **formula bilan aniqlaymiz. Endi** $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0, v_0)v'(t_0)$ **va**

$$\vec{\rho}''(t_0) = \vec{r}_{uv}(u'(t_0)^2 + \vec{r}_{uv}u'v' + \vec{r}_u u'' + \vec{r}_{vu}u'v' + \vec{r}_{vu}(v')^2 + \vec{r}_v(v)''$$

tengliklarni hisobga olib,

$II(\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{r}_{uv}(u_0, v_0), \vec{n})(\frac{du}{dt})^2 + 2(\vec{r}_{uv}(u_0, v_0), \vec{n})\frac{du\,dv}{dt\;ut} + (\vec{r}_{vu}(u_0, v_0), \vec{n})(\frac{dv}{dt})^2$ **formulani hosil qilamiz.**

Endi

$$L = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), M = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), N = (\vec{r}_{uv}, \vec{n})$$

belgilashlarni kiritib, ikkinchi kvadratik formaga mos keluvchi bichiziqli funksiyani

$$II(\vec{a}, \vec{b}) = La^1b^1 + M(a^1b^2 + a^2b^1) + Na^2b^2$$

formula yordamida aniqlaymiz. Bu erda $\vec{a} = \vec{r}_u a^1 + \vec{r}_v a^2$, $\vec{b} = \vec{r}_u b^1 + \vec{r}_v b^2$**.**

Birinchi va ikkinchi kvadratik formalar koeffitsientlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} L(p) & M(p) \\ M(p) & N(p) \end{pmatrix}$$

matritsalarni kiritamiz. Biz bilamizki, $\det A > 0$ **bo'lganligi uchun teskari** A^{-1} **matritsa mavjud.** $A^{-1}B$ **matritsa uchun quyidagi teorema o'rinlidir.**

Teorema-10. $A^{-1}B$ **matritsaning xos sonlari haqiqiy bo'lib, ular har xil bo'lganda ularga mos keluvchi xos vektorlar o'zaro perpendikulyardir.**

Isbot. $A^{-1}B$ **matritsaning xos sonlarini topish uchun** $\det|A^{-1}B-\lambda E|=0$ **tenglamani echish kerak. Bu tenglama** $\det|B-\lambda A|=0$ **tenglamaga teng kuchlidir.** *Ô* **sirtga tegishli** *ð* **nuqtani fiksirlasak** A, B **sonli matritsalar bo'ladi.** A **simmetrik bo'lganligi uchun uni birorta** $C:T_p\Phi\to T_p\Phi$ **matritsa yordamida birlik matritsaga aylantirish mumkin. Bunda** A **matritsa** CAC^T **matritsaga o'tadi. Demak** $CAC^T=E$ **yoki** $A=C^{-1}(C^{-1})^T$ **bu erda** C^T **transponirlangan matritsa. Shunda**

$$\det|B-\lambda E|=\det|C^{-1}\widetilde{B}(C^{-1})^T-\lambda C^{-1}(C^{-1})^T|=\det|C^{-1}(\widetilde{B}-\lambda E)(C^{-1})^T|=$$
$$=\det C^{-1}\det|\widetilde{B}-\lambda E|\det(C^{-1})^T$$

bu erda $\widetilde{B}=CBC^T$**. Demak,** $\det|B-\lambda A|=0$ **tenglama** $\det|\widetilde{B}-\lambda E|=0$ **tenglamaga teng kuchlidir. Lekin**

$$\widetilde{B}^T=(CBC^T)^T=CB^TC^T=CBC^T,$$

ya'ni $\widetilde{B}$ **simmetrik bo'lganligi uchun uning xos sonlari haqiqiydir. Demak,** $A^{-1}B$ **matritsaning xos sonlari haqiqiy, va ular har xil bo'lganda xos vektorlar o'zaro ortogonaldir**[1]**.**

Agar λ_1,λ_2 **-xos sonlar,** $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ **-xos vektorlar bo'lsa, ya'ni** $A\vec{e}_1=\lambda_1\vec{e}_1, A\vec{e}_2=\lambda_2\vec{e}_2$**, tengliklar bajarilsa** $\lambda_1\neq\lambda_2$ **bo'lganda** $\lambda_1>\lambda_2$ **deb hisoblaymiz.**

Ta'rif-1. $\lambda_1\neq\lambda_2$ **bo'lganda** $\vec{e}_1$ **va** $\vec{e}_2$ **vektorlar aniqlovchi to'g'ri chiziqlar r nuqtadagi bosh yo'nalishlar deb ataladi.**

Normal egrilik va Men'e teoremasi

Ô **sirtni uning** *ð* **nuqtasidan o'tuvchi tekislik bilan kessak, kesimda R nuqtadan o'tuvchi silliq egri chiziq hosil bo'ladi. Bunday egri chiziqni tekis**

[1] И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М:, Наука, 1971.

kesim deb ataymiz. Agar γ tekis kesim bo'lsa, albatta uning buralishi nolga teng bo'ladi. (nima uchun?)

Endi $\hat{O}$ sirtning ð nuqta atrofidagi $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ parametrlash usulini qaraylik. Aniqlik uchun ð ning ichki koordinatalari $u_0=u(t_0), v_0=v(t_0)$ bo'lsin. Tekis kesim γ tenglamasini tabiiy parametr (ya'ni yoy uzunligi) yordamida $\vec{\rho}=\vec{r}(u(s),v(s))$ ko'rinishda yozib, uning uchun Frene formulalarini yozaylik (buralish nolga tengligini hisobga olib)

$$\begin{cases}\dot{\vec{\tau}}=k\vec{v}\\ \dot{\vec{v}}=-k\vec{\tau}\end{cases}.$$

Bu erda $\vec{\tau}=\dot{\vec{\rho}},\vec{v}$ - birlik normal vektor, k esa γ chiziqning ð nuqtadagi egriligi. Shunda

$$II(\vec{\tau},\vec{\tau})=(\dot{\vec{\tau}},\vec{n})=(k\vec{v},n)=k\cos\theta$$

ni hosil qilamiz. Bu erda $\theta-\vec{n}$ va $\vec{v}$ vektorlar orasidagi burchak. Endi γ ni $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ tenglama bilan aniqlasak (bu erda t -ixtiyoriy parametr), unda t - ni s ning funksiyasi ekanligidan va

$$\vec{\rho}'=\dot{\vec{\rho}}\frac{ds}{dt},\vec{\rho}''=\ddot{\vec{\rho}}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\dot{\vec{\rho}}\frac{d^2s}{dt^2}$$

tengliklarni hisobga olib

$$II(\vec{\rho}',\vec{\rho}')=\left(\vec{\rho}'',\vec{n}\right)=(\frac{ds}{dt})^2(\ddot{\vec{\rho}},\vec{n})=(\frac{ds}{dt})^2k\cos\theta$$

ni hosil qilamiz.

Bundan

$$k\cos\theta=\frac{II(\vec{\rho}',\vec{\rho}')}{(\frac{ds}{dt})^2}=\frac{II(\vec{\rho}',\vec{\rho}')}{I(\vec{\rho}',\vec{\rho}')} \qquad (1)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning o'ng tomoni faqat $\vec{\rho}'$ vektorga bog'liqligi ko'rinib turibdi. Agar γ dan boshqa tekis kesim γ' ni olsak, va ular umumiy urinmaga ega (ya'ni bir xil yo'nalishga ega bo'lsa), ular uchun (1) tenglikning o'ng tomoni bir xildir. Bu formulani teorema shaklida yozamiz.

Teorema-11 (Men'e). Φ **sirtning** P **nuqtasidagi ixtiyoriy** $\vec{a}$ **urinma vektor va** P **nuqtadagi urinma vektori** $\underline{\vec{a}}$ **ga teng bo'lgan tekis kesim uchun (1) formula o'rinlidir.**

Endi kesuvchi tekislik $\ddot{I}$ **normal** $\vec{n}$ **vektorga parallel bo'lsin. Bu holda tekis kesim urinmasiga** $\vec{n}$ **vektor perpendikulyar bo'ladi. Demak** $\cos\theta = \pm 1$ **va (1) tenglik**

$$k = \pm\frac{II(\vec{\rho}\,', \vec{\rho}\,')}{I(\vec{\rho}\,', \vec{\rho}\,')}$$

ko'rinishga keladi.

Bu holda tekis kesimni normal kesim deb ataymiz.

Ta'rif-2. $\dfrac{II(\vec{a}, \vec{a})}{I(\vec{a}, \vec{a})}$ **soni** $\hat{O}$ **sirtning** p **nuqtadagi** $\vec{a}$ **yo'nalish bo'yicha normal egriligi deyiladi va** $k_n(\vec{a})$ **bilan belgilanadi.**

Shunday qilib, sirtning $\vec{a}$ **yo'nalish bo'yicha normal egriligi** $\vec{a}$ **vektor aniqlovchi normal kesimning egriligiga absolyut qiymati bo'yicha teng, ishorasi farq qilishi mumkin.**

Teorema-12. $A^{-1}B$ **matritsaning xos** $\vec{e}_1$ **va** $\vec{e}_2$ **vektorlar yo'nalishlari bo'yicha normal egriliklar mos ravishda shu matritsaning xos sonlariga teng bo'ladi.**

Isbot.

$$k_n(\vec{e}_i) = \frac{II(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}{I(\vec{e}_i, \vec{e}_i)}$$

ni hisoblash uchun $T_p\Phi$ **da** $\vec{e}_1$ **va** $\vec{e}_2$ **xos vektorlardan iborat ortonormal bazisni tanlasak,**

$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ **va** $B = A\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ **tengliklar o'rinli bo'ladi.**

$I(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$ **ning skalyar ko'paytma ekanligini hisobga olsak,**

$$I(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1^2 + 0^2, I(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 0^2 + 1^2$$

kelib chiqadi. Demak bu bazisda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Demak,

$$k_n(\vec{e}_1)=\frac{II(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}{I(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}=\frac{\lambda_1\cdot 1^2+\lambda_2\cdot 0^2}{1}=\lambda_1, k_n(\vec{e}_2)=\frac{II(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}{I(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}=\frac{\lambda_1\cdot 1^2+\lambda_2\cdot 0^2}{1}=\lambda_2$$

tengliklar kelib chiqadi.

Ta'rif-3. Bosh yo'nalishlarga mos keluvchi normal egriliklar bosh egriliklar deb ataladi.

Endi $T_p\Phi$**-urinma fazoda bazis sifatida birlik xos** $\vec{e}_1$ **va** $\vec{e}_2$ **vektorlarni olib, ixtiyoriy** $\vec{a}$ **vektor uchun** φ **bilan** $\vec{a}$ **va** $\vec{e}_1$ **orasidagi burchakni belgilaylik.**

Teorema-13 (Eyler). Ixtiyoriy $\vec{a}\in T_p\Phi$ **urinma vektor uchun**

$$k_n(\vec{a})=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi$$

tenglik o'rinlidir. Bu erda k_1,k_2**-bosh egriliklar bo'lib, aniqlik uchun** $k_1\geq k_2$ **deb hisoblaymiz.**

Isbot. Urinma vektorni $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ **ko'rinishda yozib** $k_n(\vec{a})$ **ni hisoblaymiz:**

$$k_n(\vec{a})=\frac{II(\vec{a},\vec{a})}{I(\vec{a},\vec{a})}=\frac{\lambda_1a_1^2+\lambda_2a_2^2}{a_1^2+a_2^2}=\lambda_1\frac{a_1^2}{|a|^2}+\lambda_2\frac{a_2^2}{|a|^2}=\lambda_1\cos^2\varphi+\lambda_2\cos^2\alpha=$$
$$=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi.$$

Natija. Bosh egriliklar normal egrilikning ekstremal qiymatlaridir.

Haqiqatan ham, urinma fazoda $\vec{e}_1$ **va** $\vec{e}_2$**ortonormal bazislarni tanlasak,** $\vec{a}$ **yo'nalish aniqlovchi** $k_n(\vec{a})$ **normal egrilikni** φ**ning funksiyasi sifatida qaraymiz:**

$$k_n(\varphi)=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi\textbf{.}$$

$\varphi=0$**da** $\vec{a}=e_1$ **va**

$$k_n(0)=k_n(\vec{a})=k_1, \varphi=\frac{\pi}{2}$$

da $\vec{a}=\vec{e}_2$ **va** $k_n(\frac{\pi}{2})=k_n(\vec{a})=k_2$**. Ixtiyoriy** φ **uchun yuqoridagi formulani**

$$k=(k_1-k_2)\cos^2\varphi+k_2$$

ko'rinishda yozib,

$$k'(\varphi)=2(k_1-k_2)\cos\varphi\sin\varphi=(k_1-k_2)\sin 2\varphi$$

ni hosil qilamiz. $\sin 2\varphi = 0$ **tenglamani yechib** $\varphi = 0$ **va** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **ni topamiz. Demak,** k_1 **va** k_2, $k_n(\varphi)$ **funksiyasining ekstremal qiymatlaridir.** ξ'

§ 7. D'yupen indikatrisasi. Sirt egriliklari

Regulyar $\hat{O}$ **sirtning** p **nuqtasini fiksirlab, ixtiyoriy urinma** $\vec{a}$ **vektor bo'yicha** $k_n(\vec{a})$ **normal egrilikni hisoblab, urinma tekislikda** $\vec{a}$ **yo'nalish bo'yicha boshi** p **nuqtada joylashgan uzunligi** $\frac{1}{\sqrt{|k|}}$ **ga teng bo'lgan kesma olib, bu kesmalar uchlarining geometrik o'rnini D'yupen indikatrisasi deb ataymiz.**

D'yupen indikatrisasi ikkinchi tartibli chiziq ekanini isbotlash uchun $\hat{O}$ **sirtning** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ **tenglama bilan aniqlangan parametrlash usulini tanlab** $p(u_0, v_0)$ **nuqtadan o'tuvchi urinma tekislikda** $\vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)$ **vektorlarni bazis sifatida olib, affin koordinatalar sistemasini kiritamiz. Ixtiyoriy** $\vec{a}$ **yo'nalish bo'yicha boshi** p **nuqtada va uzunligi** $\frac{1}{\sqrt{|k_n(\vec{a})|}}$ **ga teng bo'lgan kesma oxirini** $m(x, y)$ **bilan belgilasak**

$$\vec{p}m = \vec{r}_u x + \vec{r}_v y = \frac{1}{\sqrt{|k_n(\vec{a})|}} \frac{\vec{r}_u x + \vec{r}_v y}{|r_u x + r_v y|}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirib,

$$E(u_0,v_0)x^2 + 2F(u_0,v_0)xy + Gy^2 = \frac{1}{|k_n(\vec{a})|}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu erda

$$k_n(\vec{a}) = \frac{L(u_0,v_0)x^2 + 2M(u_0,v_0)xy + N(u_0,v_0)y^2}{E(u_0,v_0)x^2 + 2F(u_0,v_0)xy + G(u_0,v_0)y^2}$$

tenglikni hisobga olsak,

$$|L(u_0,v_0)x^2 + 2M(u_0,v_0)xy + N(u_0,v_0)y^2| = 1$$

tenglamani hosil qilamiz. Demak, D'yupen indikatrisasi ikkinchi tartibli chiziqdir. Biz analitik geometriya kursida ikkinchi tartibli chiziqlarni o'rgangan edik. Shuning uchun ayta olamizki, agar

a) $LN - M^2 > 0$ **bo'lsa, D'yupen indikatrisasi ellips bo'ladi.**

b) $LN - M^2 < 0$ **bo'lsa D'yupen indikatrisasi giperbola bo'ladi.**

v) $LN - M^2 = 0$ **bo'lsa D'yupen indikatrisasi 2 ta parallel to'g'ri chiziq bo'ladi.**

$\hat{O}$ **sirtning** p **nuqtasidagi bosh egriliklar** k_1, k_2 **bo'lsa,** $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ **va** $K = k_1 \cdot k_2$ **ifodalar mos ravishda** $\hat{O}$ **sirtning** p **nuqtadagi o'rta va to'liq (yoki Gauss) egriliklari deb ataladi. Bosh egriliklar** $\det|B - \lambda A| = 0$ **tenglamaning echimi ekanligini hisobga olsak**

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \text{ va } H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

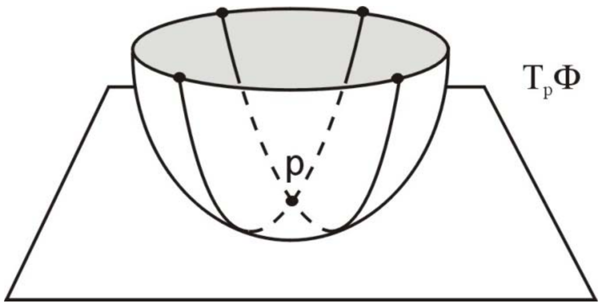
formulalarni hosil qilamiz. Birinchi kvadratik forma musbat aniqlangani uchun Gauss egriligining ishorasi $LN - M^2$ **fodaning ishorasiga bog'liqdir. Agar** p^0 **nuqtada K>0 bo'lsa, uni elliptik nuqta,** $K < 0$ **bo'lsa, giperbolik nuqta, agar** $K = 0$ **bo'lsa,** p **ni parabolik nuqta deb ataymiz.**

Birorta $\vec{a}$ **yo'nalish bo'yicha** $k_n(\vec{a}) = 0$ **bo'lsa, bunday yo'nalishni asimptotik yo'nalish deb ataymiz.** $\vec{a} = \{x, y\}$ **vektor aniqlovchi yo'nalish asimptotik yo'nalish bo'lishi uchun** $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = 0$ **bo'lishi zarur va yetarlidir.**

Elliptik nuqtada asimptotik yo'nalishlar yo'q, giperbolik nuqtada ikkita asimptotik yo'nalish mavjud, parabolik nuqtada bitta asimptotik yo'nalish mavjud va nihoyat yassilanish nuqtasida (ya'ni $k_1 = 0, k_2 = 0$ **bo'lganda) hamma yo'nalishlar asimptotik yo'nalishdir.**

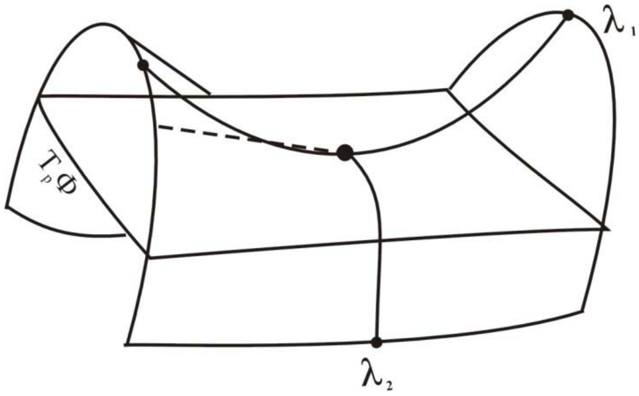
F sirtda silliq γ **chiziq** $u = u(t)$, $v = v(t)$ **tenglama bilan berilib, uning har bir nuqtasida urinma vektori asimptotik yo'nalishni aniqlasa, bunday chiziq asimptotik chiziq deyiladi. Tabiiyki, sirtda to'g'ri chiziq yotsa, u asimptotik chiziq bo'ladi. Analitik geometriya kursidan bilamizki, bir pallali giperboloidning har bir nuqtasida ikkita asimptotik yo'nalish mavjud.** γ

asimptotik chiziq bo'lishi uchun $u(t), v(t)$ **funksiyalar** $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$ **differensial tenglamaning yechimlari bo'lishi zarur va yetarlidir. F sirtda** $u = const$ **va** $v = const$ **tenglama bilan aniqlanadigan chiziqlar (ya'ni koordinata chiziqlari) asimptotik chiziqlar bo'lishi uchun** $L = N = 0$ **bo'lishi zarur va yetarlidir.**

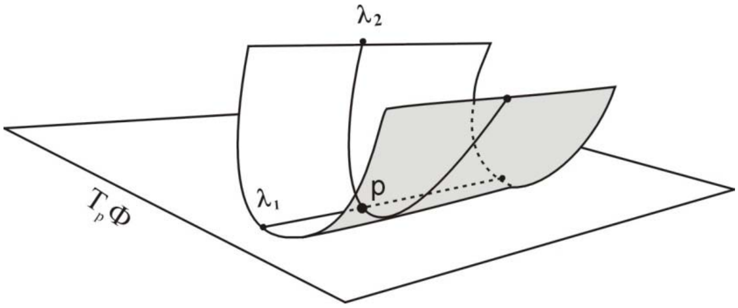


Elliptik nuqta

Chizma-7



Giperbolik nuqta Chizma-8



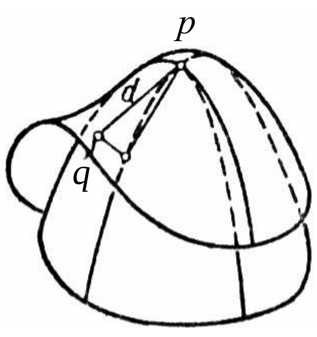
Parabolik nuqta

Chizma-9

§ 8. Yopishma paraboloid

$\hat{O}$ regulyar sirt (kamida ikki marta differensiallanuvchi), r unga tegishli nuqta, F uchi p nuqtada bo'lgan va p nuqtada $\hat{O}$ bilan urinuvchi paraboloid bo'lsin (ya'ni p nuqtada $\hat{O}$ va F sirtlarning urinma tekisliklari ustma-ust tushadi). Endi $\hat{O}$ sirtda p ga yaqin q nuqta olib, q dan F sirtgacha bo'lgan masofani h bilan, q va p nuqtalar orasidagi masofani d bilan belgilaylik.

Ta'rif-1. Sirtda q nuqta p nuqtaga intilganda $\frac{h}{d^2} \to 0$ bo'lsa, F-paraboloid $\hat{O}$ sirtning p nuqtadagi yopishma paraboloidi deb ataladi.



Chizma-10

Teorema-14. Ikki marta differensiallanuvchi regulyar sirtning har bir nuqtasida yagona yopishma paraboloid mavjud.

Isbot. $\hat{O}$**-regulyar sirt,** p **unga tegishli nuqta bo'lsin. Koordinata boshini** p **nuqtada joylashtirib, fazoda x,y,z-dekart koordinatalar sistemasini shunday kiritamizki, bunda xy-tekisligi** $\hat{O}$ **sirtning** ***r*** **nuqtadagi urinma tekisligi bilan ustma-ust tushadi,** z **o'qini urinma tekislikka perpendikulyar qilib olamiz. Bu koordinatalar sistemasida** $\hat{O}$ **sirtning regulyar parametrlash usuli** $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ **tenglama yordamida berilgan bo'lsa** $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] \neq 0$ **bo'lganligidan va** $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ **vektorning** z **o'qiga parallelligidan** $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ **kelib chiqadi. Shunda 2-teoremaga ko'ra shunday ikki marta differentsiallanuvchi** $f(x, y)$ **funksiya mavjud bo'lib** $\hat{O}$ **sirtni** p **nuqta atrofida** $z = f(x, y)$ **tenglama yordamida aniqlash mumkin. Bu koordinatalar sistemasida** p **koordinata boshi bo'lganligi uchun** $f(0,0) = 0$ **bo'ladi. Urinma tekislik tenglamasi**

$$z = z_x(0,0)x + z_y(0,0)y$$

bo'lib, u xy **tekislik bilan ustma-ust tushganligi uchun**

$$z_x(0,0) = 0, z_y(0,0) = 0$$

bo'ladi.

Endi uchi koordinata boshida joylashgan paraboloid tenglamasini

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \qquad \textbf{(1)}$$

ko'rinishda yozish mumkinligidan foydalanamiz. Agar (1) paraboloid p **nuqtadagi yopishma paraboloid bo'lsa, uning yagonaligini ko'rsatamiz. Buning uchun** $\hat{O}$ **sirtdagi** $q(x_0, y_0, z_0)$ **nuqtaning koordinatalari paraboloid tenglamasiga qo'yib**

$$\lambda(x_0, y_0, z_0) = z_0 - \frac{1}{2}(ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2)$$

funksiyani hosil qilamiz va q **nuqta koordinata boshiga intilganda** λ **va** h **miqdorlarning nolga intilishi tartibi bir xil ekanligini ko'rsatamiz.**

Buning uchun $\frac{\lambda}{h}$ **miqdor** $q \to p$**da aniq chekli limitga intilishini ko'rsatamiz.**

$$\varphi(x,y,z)=z-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)$$

funksiya uchun $\varphi_z \neq 0$ bo'ladi. q nuqtani p ga yetarli yaqin deb hisoblaymiz va p_m bilan (1) paraboloidga tegishli shunday nuqtalarni belgilaymizki, $|qp_m|$ masofalar h ga, p_m nuqtalar esa birorta p_* nuqtaga intilsin. Shunda p_* nuqta ham (1) paraboloidga tegishli bo'ladi. Endi $\vec{\rho}_0$ bilan q nuqtaning radius vektori belgilasak, va

$$\vec{\rho}=\{x,y,\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)\}$$

vektor funksiyasini kiritsak $|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|^2$ funksiya $\vec{\rho}=\vec{\rho}_*$ nuqtada minimumga erishadi. Bu erda $\vec{\rho}_*$ vektor ρ_* nuqtaning radius-vektori. Demak,

$$(\vec{\rho}_*-\vec{\rho}_0,\vec{\rho}_x)=0$$
$$(\vec{\rho}_*-\vec{\rho}_0,\vec{\rho}_y)=0$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bundan p_*q kesmaning paraboloid urinma tekisligiga perpendikulyarligi kelib chiqadi. p_* nuqtaning koordinatalarini x_*,y_*,z_* bilan, p_*q to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi kosinuslarini n_1,n_2,n_3 bilan belgilab,

$$x_*=x_0+n_1h, y_*=y_0+n_2h, z_*=z_0+n_3h$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Endi $\varphi(x^*,y^*,z^*)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyib

$$\varphi(x_0,y_0,z_0)+(\varphi_x n_1+\varphi_y n_2+\varphi_z n_3)h+h\varepsilon=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa

$$\frac{\varphi(x_0,y_0,z_0)}{h}\xrightarrow[q\to p]{}(\varphi_x n_1+\varphi_y n_2+\varphi_z n_3)$$

ni hosil qilamiz. $\varphi_z(0,0,0)=1$ va $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$ bo'lganligi uchun o'ng tomondagi ifoda noldan farqlidir. Demak, $\frac{\lambda(x_0,y_0,z_0)}{h}$ ifoda $q\to p$ da chekli noldan farqli limitga ega. Endi $f(x,y)$ funksiyani p nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz.

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)yx+f_{yy}(0,0)y^2)+\varepsilon(x,y)(x^2+y^2).$$

Endi q nuqtaning $x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ koordinatalarini paraboloid tenglamasiga qo'yamiz va

$$z_0 = f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x_0^2 + 2f_{xy}(0,0)x_0, y_0 + f_{yy}(0,0)y^2\} +$$
$$+\varepsilon(x_0, y_0)(x_0^2 + y_0^2)$$

tenglikni hisobga olib

$$\lambda(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}\{(f_{xx}(0,0) - a)x_0^2 + 2(f_{xy}(0,0) - b)x_0 y_0 + (f_z(0,0) - c)y_0^2\} +$$
$$+(x_0^2 + y_0^2)\varepsilon_1(x_0, y_0)$$

tenglikni hosil qilamiz. Sirtning q va p nuqtalari orasidagi masofa kvadrati uchun

$$d^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + f^2(x_0, y_0)$$

tenglikdan foydalanamiz. Endi (1) yopishma paraboloid ekanligi uchun $\frac{h}{d^2}$ **ifoda** $q \to p$ **da nolga intilishi ma'lum. Demak,** $\frac{\lambda}{d^2}$ **ifoda ham nolga intiladi.** $y_0 = 0, x_0 \to 0$ **da**

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0) - a)x_0^2 + x_0^2\varepsilon_1(x_0, y_0)}{x_0^2 + x_0^2\varepsilon_2(x_0, y_0)}$$

ifoda nolga intilishi kerak. Bundan $a = f_{xx}(0,0)$ **kelib chiqadi. Xuddi** $x_0 = 0, y_0 \to 0$ **va** $x_0 = y_0 \to 0$ **hollarni ko'rib** $b = f_{xy}(0,0)$ $c = f_{yy}(0,0)$ **tengliklarni hosil qilamiz. Demak, urinma paraboloid**

$$z = \frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\} \quad (2)$$

tenglamaga ega va yagonadir. Ikkinchi tomondan tanlangan koordinatalar sistemasida (2) paraboloid urinma bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\frac{\lambda}{d^2} = \frac{(x_0^2 + y_0^2)\varepsilon_0(x_0, y_0)}{x_0^2 + y_0^2 + (x_0^2 + y_0^2)\varepsilon_1(x_0, y_0)}$$

tenglikda x_0, y_0 **lar nolga intilganda** $\frac{\lambda}{d^2} \to 0$ **bo'ladi.** ⌷

Yuqoridagi 14-teorema isbotidagidek koordinatalar sistemasini kiritsak, F sirt

$$z = f(x,y), f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

tenglama bilan, urinma paraboloid

$$z = \frac{1}{2}\left\{ f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_y(0,0)y^2 \right\}$$

tenglama bilan beriladi. $f(x,y)$ **funktsiyani Teylor qatoriga yoysak**

$$z = \frac{1}{2}\left\{ f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_y(0,0)y^2 \right\} + 0(x^2 + y^2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamalardan ko'rinib turibdiki, sirt va yopishma paraboloidning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari koeffitsientlari mos ravishda teng bo'ladi. Bevosita hisoblash natijasida

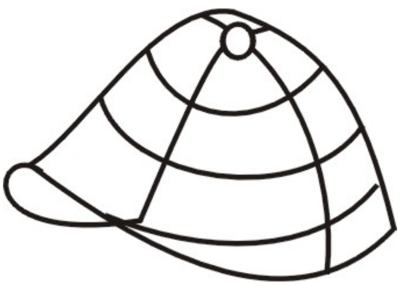
$$L = f_{xx}(0,0), M = f_{xy}(0,0), N = f_{yy}(0,0)$$

tengliklarni olamiz. Demak, yopishma paraboloid tenglamasini

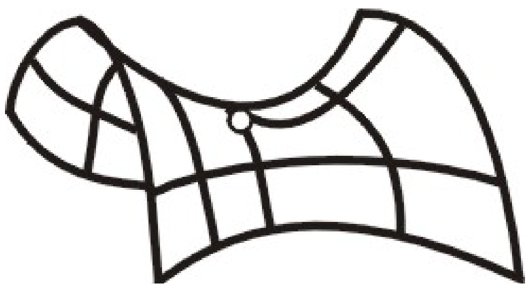
$$z = \frac{1}{2}\left\{ Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 \right\}$$

ko'rinishda yoza olamiz. Endi quyidagi teorema yopishma paraboloid tenglamasidan kelib chiqadi.

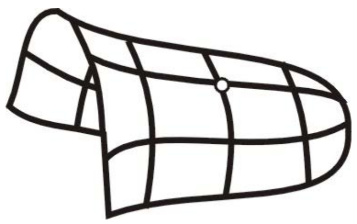
Teorema-15. Elliptik nuqtada yopishma paraboloid elliptik paraboloid bo'ladi, giperbolik nuqtada yopishma paraboloid giperbolik paraboloid, va parabolik nuqtada parabolik silindr bo'ladi.

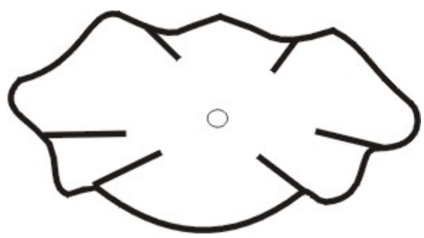


Chizma-11



Chizma-12





Chizma-13 **Chizma-14**

Regulyar sirt Ô **ning** p **nuqtasida bosh egriliklar o'zaro teng bo'lsa, ombilik nuqta, agar bosh egriliklar nolga teng bo'lsa,** p **nuqta yassilanish nuqtasi deyiladi. Yassilanish nuqtada yopishma paraboloid sirtning shu nuqtadagi urinma tekisligi bilan ustma-ust tushadi. Чunki Eyler teoremasiga ko'ra ixtiyoriy** $\vec{a}$ **urinma vektor uchun**

$$k_n(\vec{a}) = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi = k_1(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = k_1 = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak normal kesim yoki to'g'ri chiziq, yoki to'g'ri chiziq kesmasidir. Endi koordinatalar sistemasini yuqoridagidek kiritsak va urinma tekislikda x, y **koordinatalar o'qlarini bosh yo'nalishlar bo'yicha yo'naltirsak birinchi kvadratik forma matritsasi birlik matritsa bo'ladi, ikkinchi kvadratik forma matritsasi** $B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ **ko'rinishda bo'ladi. Demak bu holda yopishma paraboloid** $z = \frac{1}{2}\{k_1x^2 + k_2y^2\}$ **funksiyaning grafigi bo'ladi. Shuning uchun** $k_1 = k_2 = 0$ **bo'lganda yopishma paraboloid** $z = 0$ **tekislikka aylanadi.**

Teorema-16. Regulyar Ô **sirtning hamma nuqtalari ombilik nuqtalar bo'lsa, u sfera yoki sferaning qismi, agar** Ô **sirtning hamma nuqtalari yassilanish nuqtalari bo'lsa, u tekislik yoki tekislik qismi bo'ladi.**

Isbot. F sirtning hamma nuqtalari ombilik nuqtalar bo'lsin. Ixtiyoriy $p \in \Phi$ **nuqta olib,** p **nuqta atrofida** Ô **sirtning regulyar** $\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in G$ **parametrlash usulini qaraymiz. Bu tenglama bilan aniqlanuvchi sirt nuqtalari uchun urinma tekisliklarda bazis sifatida** $A^{-1}B$ **matritsaning ortonormal xos vektorlarini olamiz. Shunda**

$$E = G = 1, F = M = 0, L = N = \lambda(u,v)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\lambda(u,v) = k_1(u,v) = k_2(u,v).$$

Ma'lumki, ixtiyoriy parametrlash usuli uchun

$$L = (\vec{r}_u, \vec{n}_u), M = (\vec{r}_u, \vec{n}_v) = -(F_v, \vec{n}_u), N = -(F_v, n_v)$$

bo'lib, $\vec{n}(u,v)-q(u,v)$ nuqtadagi birlik normal vektor. $M=0$ bo'lganligi uchun $\vec{n}_u \perp \vec{r}_v, \vec{n}_v \perp \vec{r}_u$ va $\vec{n}$ birlik vektor bo'lganligi uchun $\vec{n}_u, \vec{n}_v$ vektorlar urinma tekislik parallel. Bundan $\vec{n}_u = \lambda\vec{r}_u, \vec{n}_v = \lambda\vec{r}_v$ tengliklar kelib chiqadi. Bu tengliklarni differensiallab

$$\vec{n}_{uv} = \lambda_v\vec{r}_u + \lambda\vec{r}_{uv}, \vec{n}_{vu} = \lambda_u\vec{r}_v + \lambda\vec{r}_{uv}$$

tengliklarni va natijada $\lambda_v\vec{r}_u - \lambda_u\vec{r}_v = \vec{0}$ tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlar chiziqli erkliligidan $\lambda_u = \lambda_v = 0$ tengliklarni hosil qilamiz. Demak, p nuqta atrofida $\lambda = const$ ekan. Endi r dan farqli ixtiyoriy q nuqtani olamiz va p, q nuqtalarni chiziq bilan tutashtiramiz (bu mumkin, chunki sirt ta'rifiga ko'ra, $\hat{O}$ bog'lanishli va lokal chiziqli bog'lanishli. Bundan esa sirtning chiziqli bog'lanishli ekanligi kelib chiqadi). Bu chiziq $\gamma:[a,b]\to\Phi$ akslantirish yordamida parametrlangan bo'lib, $\gamma(a)=p, \gamma(b)=q$ bo'lsin. Har bir $t\in[a,b]$ uchun $\gamma(t)$ nuqtaning atrofida юqoridagidek λ ni o'zgarmas ekanligini ko'rsatamiz. $\gamma([a,b])$ kompakt bo'lganligi uchun γ ni chekli sondagi atroflar bilan qoplash mumkin. Har bir atrofda λ o'zgarmas, atroflar kesishadi. Shuning uchun p nuqtani o'z ichiga oluvchi atrofda $\lambda=\lambda_0$ bo'lsa, hamma atroflarda, shu jumladan q nuqtada $\lambda=\lambda_0$ bo'ladi. Demak, λ o'zgarmas sondir. Endi

$$\begin{aligned} n_u - \lambda r_u &= \frac{\partial}{\partial u}(n-\lambda r) = 0 \\ n_v - \lambda r_v &= \frac{\partial}{\partial v}(n-\lambda r) = 0 \end{aligned}.$$

tengliklar $\vec{n}-\lambda\vec{r}$ vektorning o'zgarmas vektor ekanligini ko'rsatadi. Shuning uchun

$$\vec{n}(u,v) - \lambda\vec{r}(u,v) = \vec{n}(u_0,v_0) - \lambda\vec{r}(u_0,v_0)$$

yoki

$$\vec{r}(u,v) - \vec{r}(u_0,v_0) + \frac{1}{\lambda}\vec{n}(u_0,v_0) = \frac{1}{\lambda}\vec{n}$$

va $|\vec{r}(u,v) - \vec{r}(u_0,v_0) + \frac{1}{\lambda}\vec{n}(u_0,v_0)| = \frac{1}{|\lambda|}$ munosabatlar o'rinlidir.

Bu tengliklar $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt nuqtalari markazining radius vektori $\vec{r}(u_0,v_0)-\frac{1}{\lambda}\vec{n}(u_0,v_0)$ bo'lgan va radiusi esa $\frac{1}{|\lambda|}$ ga teng bo'lgan sferada yotishini bildiradi.

Agar $\lambda=0$ bo'lsa,

$$\vec{n}_u(u,v)=\vec{0},\vec{n}_v(u,v)=0$$

tengliklardan, $\vec{n}(u,v)$ o'zgarmas vektor ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $(\vec{r},\vec{n})_u=0,(\vec{r},\vec{n})_v=0$ tengliklar hosil qilamiz. Bundan esa $(\vec{r}-\vec{r}(u_0,v_0),\vec{n})=0$ tenglama kelib chiqadi. Bundan esa sirt nuqtalari $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar tekislikda yotishi kelib chiqadi.

§ 9. Derivatsion formulalar

Bu paragrafda biz sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari orasidagi bog'lanishlarni ko'rsatamiz. Regulyar $\hat{O}$ sirt $p(u_0,v_0)$ nuqta atrofida regulyar $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ parametrlash usuli bilan berilgan bo'lsin. Hosil bo'ladigan formulalarni ixchamlash uchun tenzor hisob-kitobdagi belgilashlardan foydalanamiz. Buning uchun $u_1=u,u_2=v$ belgilashlarni kiritamiz. Bundan tashqari birinchi kvadratik forma matritsasi elementlarini g_{ij} lar bilan, ikkinchi kvadratik forma matritsasi elementlarini q_{ij} lar bilan belgilaymiz. Demak,

$$A=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Yig'indilarda agar bironta indeks юqorida va pastda bir xil marta uchrasa bu indekslar bo'yicha yig'indi belgisini tashlab yozamiz. Misol uchun

$$a_1b^1+a_2b^2+...a_nb^n=\sum_{i=1}^{n}a_ib^i=a_ib^i,$$
$$\sum_i\sum_j a_{ij}b^j=\sum_i a_{ij}b^j.$$

Endi R^3 **da** $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}$ **va** $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}]}{|[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}]|}$ **vektorlarni bazis sifatida olib,** $\vec{n}_{u_1}, \vec{n}_{u_2}$ **va** $\vec{r}_{u_i u_j}$ **vektorlarni bu bazis vektorlar yordamida chiziqli ifodalaymiz:**

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{u_k} + b_{ij}\vec{n} \\ \vec{n}_i = a_i^k \vec{r}_{u_k} + c_i \vec{n} \end{cases} \qquad i = 1,2; \;\; j = 1,2; \qquad \textbf{(1)}$$

Bu erda $\vec{n}_i = \vec{n}_{u_i}$**. Agar birinchi tenglikda** $i = 1, j = 2$ **bo'lsa**

$$\vec{r}_{u_1 u_2} = \Gamma_{12}^1 \vec{r}_{u_1} + \Gamma_{12}^2 \vec{r}_{u_2} + b_{12}\vec{n}$$

tenglik hosil bo'ladi.

Ana shu yozilgan (1) formulalarda Γ_{ij}^k **va** b_{ij}, a_i^k, c_i **funksiyalar (koeffitsientlar) faqat birinchi va ikkinchi kvadratik formalar koeffitsientlari orqali ifodalanishini ko'rsatamiz. Buning uchun** $\vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{uk} + b_{ij}\vec{n}$ **tenglikni** $\vec{n}$ **vektorga skalyar ko'paytiramiz va**

$$\left(\vec{r}_{u_k}, \vec{n}\right) = 0, \quad \left(\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{n}\right) = \Gamma_{ij}^k \left(\vec{r}_{u_k}, \vec{n}\right) + b_{ij}\left(\vec{n}, \vec{n}\right)$$

tengliklarni hisobga olib

$$b_{ij} = \left(\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{n}\right) = q_{ij}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi $\vec{n}_i = a_i^k \vec{r}_{u_k} + c_i \vec{n}$ **tenglikni** $\vec{r}_{u_j}$ **ga skalyar ko'paytiramiz va**

$$\left(\vec{n}_i, \vec{r}_{u_j}\right) = a_i^k \left(\vec{r}_{u_j}, \vec{r}_{u_j}\right) + c_i \left(\vec{n}, \vec{r}_{u_j}\right), \left(\vec{n}, \vec{r}_{u_j}\right) = 0$$

tengliklarni hisoga olib

$$-q_{ij} = a_i^k g_{kj} \qquad \textbf{(2)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni odatdagi ko'rinishda yozsak

$$\begin{cases} -q_{11} = a_1^1 g_{11} + a_1^2 g_{21} \\ -q_{12} = a_1^1 g_{12} + a_1^2 g_{22} \\ -q_{21} = a_2^1 g_{11} + a_2^2 g_{21} \\ -q_{22} = a_2^1 g_{12} + a_2^2 g_{22} \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemadan $\det A > 0$ **bo'lganligi uchun** a_i^k **koeffitsientlarni topish mumkin.** g^{ij} **bilan** A^{-1} **matritsaning elementlarini belgilaymiz. Shunda** $A^{-1}A = E$ **tenglikni**

$$g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bundan foydalanib, (2) tenglikni g^{jl} ga ko'paytirib va j indeks bo'yicha yig'ib, quyidagi formulalarni hosil qilamiz: $-q_{ij}g^{jl}=a_i^k g_{kj}g^{jl}$.

Bundan $a_i^k=-\sum_{j=1}^{2}q_{ij}g^{jk}$ tenglik kelib chiqadi.

Misol uchun $k=1, i=1$ da

$a_1^1=-q_{1j}g^{j1}=-q_{11}g^{11}-q_{12}g^{21}$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$g^{11}=\frac{1}{\det A}g_{22},\ \ g^{21}=-\frac{1}{\det A}g_{12}$$

bo'ladi. Shunday qilib, a_j^k, b_{ij} funksiyalarni topdik. Endi

$$\vec{r}_{u_iu_j}=\Gamma_{ij}^k\vec{r}_{u_k}+b_{ij}\vec{n}$$

tenglikni $\vec{r}_{u_e}$ vektorga skalyar ko'paytirib

$$(\vec{r}_{u_iu_j},\vec{r}_{u_l})=\Gamma_{ij}^k(\vec{r}_{u_k},\vec{r}_{u_l})$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $(\vec{r}_{u_k},\vec{r}_{u_l})=g_{kl}$ ekanligi ma'lum. Biz (1) sistemadagi Γ_{ij}^k koeffitsientlarni topmoqchimiz. Buning uchun $\Gamma_{ij,l}=(\vec{r}_{u_iu_j},\vec{r}_{u_l})$ belgilashni kiritib

$$\Gamma_{ij,l}=\Gamma_{ij}^k g_{kl} \qquad \textbf{(3)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi

$$(\vec{r}_{u_i},\vec{r}_{u_l})=g_{il}$$

tenglikni u_j bo'yicha differensiallab

$$(\vec{r}_{u_iu_j},\vec{r}_{u_l})+(\vec{r}_{u_i},\vec{r}_{u_lu_j})=\frac{\partial}{\partial u_j}(g_{il})$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni $\Gamma_{ij,l}$ funksiyalar orqali yozsak

$$\Gamma_{ij,l}+\Gamma_{lj,i}=\frac{\partial}{\partial u_j}g_{il} \qquad \textbf{(4)}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglikda indekslarni aylantirib yana ikkita tenglikni yozamiz

$$\Gamma_{jl,i}+\Gamma_{il,j}=\frac{\partial}{\partial u_l}g_{ij},\Gamma_{li,j}+\Gamma_{ji,l}=\frac{\partial}{\partial u_i}g_{lj} \quad . \quad (5)$$

Endi (4) tenglikdan (5) tengliklarni ayirib

$$\Gamma_{ij,l}-\Gamma_{ji,l}+\Gamma_{lj,i}-\Gamma_{jl,i}-\Gamma_{il,j}-\Gamma_{li,j}=\frac{\partial}{\partial u_j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial u_l}g_{ji}-\frac{\partial}{\partial u_l}g_{lj} \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $\Gamma_{ij,l}=\Gamma_{ji,l}$ tenglikni hisobga olib (6)ni quyidagicha yozamiz

$$-2\Gamma_{il,j}=\frac{\partial}{\partial u_j}g_{i_l}-\frac{\partial}{\partial u_l}g_{ji}-\frac{\partial}{\partial u_i}g_{lj}.$$

Bundan esa

$$\Gamma_{il,j}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_l}g_{lj}+\frac{\partial}{\partial u_l}g_{ji}-\frac{\partial}{\partial u_j}g_{il}\right\} \quad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi Γ_{ij}^k funksiyalarni topa olamiz. Buning uchun (3) ni g^{ls} ga ko'paytirib l indeks bo'yicha yig'sak

$$\Gamma_{ij,l}g^{ls}=\Gamma_{ij}^k g_{kl}g^{ls}=\Gamma_{ij}^k\delta_k^s=\Gamma_{ij}^s$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, $\Gamma_{ij}^s=\Gamma_{ij,l}g^{ls}$ formulani hosil qildik. Nihoyat (7) tenglikni g^{jk} ga ko'paytirib j indeks bo'yicha yig'amiz va natijada

$$\Gamma_{il}^k=\Gamma_{il,j}g^{jk}=\frac{1}{2}g^{jk}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}g_{l_j}+\frac{\partial}{\partial u_l}g_{ij}-\frac{\partial}{\partial u_j}g_{il}\right) \quad (8)$$

formulani hosil qilamiz. Bu (8) formula bizga 6 ta Γ_{ij}^k funksiyalarni topish imkonini beradi. Misol uchun $i=k=l=1$ da

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11}+\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11}-\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11}\right\}+\frac{1}{2}g^{21}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}g_{12}+\frac{\partial}{\partial u_1}g_{12}-\frac{\partial}{\partial u_2}g_{11}\right\}=$$

$$=g^{11}\frac{\partial}{\partial u_1}g_{11}+g^{21}\frac{\partial}{\partial u_1}g_{12}-\frac{1}{2}g^{21}\frac{\partial}{\partial u_2}g_{11}$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi (8) formuladan ko'rinib turibdiki, Γ_{ij}^k funksiyalar faqat birinchi kvadratik forma koeffitsientlari va ularning hosilalari orqali hisoblanadi. Nihoyat (1) formuladagi hamma koeffitsientlar topildi. Endi (1)ni quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$\begin{cases} \vec{r}_{u_i u_j} = \Gamma_{ij}^k \vec{r}_{uk} + q_{ij}\vec{n} \\ \vec{n}_{u_i} = -q_{ij} g^{jk} \vec{r}_{u_k} \end{cases} . \qquad \textbf{(9)}$$

Bu formulalar derivatsion formulalar deb ataladi. Derivatsion formulalarni birinchi va ikkinchi kvadratik formalar orasidagi bog'lanishni topish uchun ishlatamiz. Buning uchun

$$\vec{r}_{u_i u_j u_k} = \vec{r}_{u_i u_k u_j}, \; \vec{n}_{u_i u_j} = \vec{n}_{u_j u_i} \qquad \textbf{(10)}$$

tengliklarni yozib, $\vec{r}_{u_i u_j}, \vec{r}_{u_i u_k}, n_{u_i}, n_{u_j}$ **funksiyalarni derivatsion formulalar yordamida ifodalaymiz. Shunda (10) tengliklar**

$$\frac{\partial}{\partial u_k}(\Gamma_{ij}^l \vec{r}_{u_e} + q_{ij}\vec{n}) - \frac{\partial}{\partial u_j}(\Gamma_{ik}^l \vec{r}_{u_e} + q_{ik}\vec{n}) = 0$$

va

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(q_{il} g^{lk} \vec{r}_{u_k}) - \frac{\partial}{\partial u_i}(q_{jl} g^{lk} \vec{r}_{u_k}) = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tengliklarda differensiallash amalini bajarib

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\Gamma_{ij}^l \vec{r}_{ul} + \Gamma_{ij}^l \vec{r}_{u_e u_i} + \frac{\partial}{\partial u_k}(q_{ij})\vec{n} + q_{ij}\vec{n}_{u_k} - \left[\frac{\partial}{\partial u_j}(\Gamma_{ik}^l)\vec{r}_{u_i} + \Gamma_{ik}^l \vec{r}_{u_l u_j} - \frac{\partial}{\partial u_j}(q_{ik})\vec{n} + q_{ik}\vec{n}_{u_j}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(q_{il} g^{lk})\vec{r}_{uk} + q_{il} g^{lk} \vec{r}_{u_k u_j} - \left[\frac{\partial}{\partial u_j}(q_{il} g^{lk})\vec{r}_{uk} + q_{il} g^{lk} \vec{r}_{u_k u_i}\right] = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Bu tengliklarda yana bir marta derivatsion formulalardan foydalanamiz. Shunda $\vec{r}_{u_m}, \vec{n}$ **vektorlar chiziqli erkli bo'lganligi uchun ular oldidagi koeffitsientlarni nolga tenglashtirib**

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\partial_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial u_j}\partial_{ik}^m + \sum_{l=1}^{2}(\partial_{ij}^l \partial_{lk}^m - \partial_{ik}^l \partial_{lj}^m) = \sum_{l=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm} \qquad \textbf{(11)}$$

va

$$\sum_{m=1}^{2}\partial_{ij}^m q_{mk} - \sum_{m=1}^{2}\partial_{ik}^m q_{mj} + \frac{\partial}{\partial u_k}q_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j}q_{ik} = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu munosabatlardan birinchisi Gauss tenglamasi, ikkinchi Peterson-Kodatstsi tenglamalari deb ataladi. Gauss tenglamasini g_{ms} **ga ko'paytirib indeks** m **bo'yicha yig'aylik:**

$$\sum_m g_{ms}\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\partial_{ij}^m - \frac{\partial}{\partial u_j}\partial_{ik}^m + \sum_{l=1}^{2}(\partial_{ij}^l\partial_{lk}^m - \partial_{ik}^l\partial_{lj}^m\right) =$$
$$= \sum_{l,m=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms}.$$

Shunda o'ng tomondagi ifoda

$$\sum_{l,m=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms} = \sum_{l=1}^{2}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})\delta_l^s = q_{ij}q_{ks} - q_{ik}q_{js}$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda $i = j = 1, k = s = 2$ **bo'lganda**

$$q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = \sum_{m=1}^{2} g_{m2}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\Gamma_{11}^m - \frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{12}^m + \sum_{l=1}^{2}(\Gamma_{11}^l\Gamma_{l2}^m - \Gamma_{12}^l\Gamma_{l1}^m\right) \qquad \textbf{(13)}$$

ko'rinishga keladi.

Demak, Gauss egriligi K **faqat birinchi kvadratik forma koeffitsientlariga bog'liq ekan. Bu esa uning izometrik akslantirishlarda o'zgarmay qolishini ko'rsatadi.**

§ 10. Sirtlar nazariyasining asosiy teoremalari

Bu paragrafda berilgan ikkita kvadratik formalar uchun sirtning mavjudligi va fazodagi harakatga nisbatan uning yagonaligi haqidagi teoremalarni isbotlaymiz.

Teorema-16 (Mavjudlik). Tekislikdagi G ***sohada aniqlangan*** g_{ij}, q_{ij} ***differentsiallanuvchi funktsiyalar berilgan bo'lib,*** $g_{ij} = g_{ji}, q_{ij} = q_{ji}$ ***munosabatlar bajarilgan va*** $\{g_{ij}\}$ ***matritsaning determinanti noldan katta bo'lsin. Bundan tashqari bu funktsiyalar uchun Gauss va Peterson-Kodatstsi tenglamalari bajarilgan bo'lsin. Shunda har bir*** $(u_0, v_0) \in G$ ***uchun bu nuqtaning*** $V \subset G$ ***atrofi va***

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in V$$

tenglama bilan aniqlangan regulyar Φ ***sirt mavjud bo'lib, uning birinchi va ikkinchi kvadratik formalarining matritsalari mos ravishda*** $\{g_{ij}\}$ ***va*** $\{q_{ij}\}$ ***matritsalar bilan ustma-ust tushadi.***

Isbot. Berilgan $\{g_{ij}\}$ matritsaga teskari matritsa elementlarini g^{jk} bilan belgilaymiz va

$$\Gamma_{il}^{k} = \Gamma_{il,j} g^{jk} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} g_{l_j} + \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j} g_{il} \right)$$

bo'yicha Γ_{ij}^{k} funksiyalarni topamiz. Endi quyidagi X_1, X_2, N vektor funksiyalarga nisbatan quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini qaraylik.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial_{uj}} \left(X_i \right) = \Gamma_{ij}^{k} X_k + q_{ij} N \\ N_{u_i} = -q_{ij} g^{jk} X_k \end{cases} \quad \textbf{(1).}$$

Bu erda $u_1 = u,\ \ u_2 = v$ belgilashlardan foydalandi. Shuni hisobga olib (1) sistemani har bir indeks uchun yozsak, u

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} X_1 = \Gamma_{11}^{1} X_1 + \Gamma_{11}^{2} X_2 + q_{11} N \\ &\frac{\partial}{\partial v} X_1 = \Gamma_{12}^{1} X_1 + \Gamma_{12}^{2} X_2 + q_{12} N \\ &\frac{\partial}{\partial u} X_2 = \Gamma_{21}^{1} X_1 + \Gamma_{21}^{2} X_2 + q_{21} N \\ &\frac{\partial}{\partial v} X_2 = \Gamma_{22}^{1} X_1 + \Gamma_{22}^{2} X_2 + q_{22} N \\ &\frac{\partial N}{\partial u} = a_1^{1} X_1 + a_1^{2} X_2 \\ &\frac{\partial N}{\partial v} = a_2^{1} X_1 + a_2^{2} X_2 \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishga keladi. Endi bu xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasining yechimi mavjudlik shartlarini yozamiz:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u_j \partial u_k} = \frac{\partial X_i}{\partial u_k \partial u_j}, \ \frac{\partial N}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial N}{\partial u_j \partial u_i} \quad \textbf{(3).}$$

Bu mavjudlik shartlari Gauss va Peterson-Kodatstsi tenglamalariga ekvivalent ekanligini oldingi paragrafda ko'rsatdik. Demak bizning (1) sistemamiz uchun G sohaning har bir nuqtasida yechimning mavjudlik shartlari bajarilgan. Demak, birorta $(u_0, v_0) \in G$ nuqta olsak, shu nuqtaning birorta V atrofida (1) sistema (u_0, v_0) nuqtada berilgan boshlang'ich shartlarni

qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega ya'ni V **sohada aniqlangan vektor funksiyalar**

$$X_1(u,v), X_2(u,v), N(u,v)$$

mavjud va (1) sistemani qanoatlantiradi. Boshlang'ich shartlarni quyidagicha tanlaymiz:

$$|N(u_0,v_0)|=|N^0|=1, (X_1(u_0,v_0), N(u_0,v_0)) = (X_2(u_0,v_0), N(u_0,v_0)) = 0,$$

$$g_{ij}(u_0,v_0) = (X_i(u_0,v_0), X_j(u_0,v_0))$$

va

$$X_1(u_0,v_0), X_2(u_0,v_0), N(u_0,v_0)$$

vektorlar o'ng sistemani tashkil qiladi. Bu boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi vektorlar mavjudligi $\{g_{ij}(u_0,v_0)\}$ **matritsaning musbat aniqlanganligidan kelib chiqadi. Endi** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ **vektor funksiya uchun**

$$\begin{cases} \vec{r}_u = X_1, \\ \vec{r}_v = X_2 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$

sistemasini qaraymiz. Bu sistema uchun yechimning mavjudlik sharti $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$ **tenglikdan iboratdir. Lekin** $g_{ij} = g_{ji}$ **bo'lganligi uchun** $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ **undan tashqari** $q_{ij} = q_{ji}$ **munosabat ham bor. Demak,**

$$\frac{\partial}{\partial v} X_1 = \frac{\partial}{\partial u} X_2$$

munosabat va $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{ru}$ **tenglik o'rinlidir.**

Shunday qilib, agar $(u_0,v_0) \in V$ **nuqta uchun (4) sistemani** $\vec{r}(u_0,v_0) = \vec{a}$ **boshlang'ich shart bilan qarasak. (**u_0,v_0**) nuqtaning birorta** $V_0 \subset V$ **atrofida aniqlangan** $\vec{r}(u,v)$ **yechim mavjud. Endi** $\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad (u,v) \in V_0$ **tenglama bilan aniqlangan** Φ **sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari koeffitsientlarini hisoblaymiz. Buning uchun**

$$(X_i, X_j), (X_i, N), N^2$$

funksiyalarni differensiallash yordamida

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_k}(X_i, X_j) = \Gamma^l_{ik}(X_l, X_j) + \Gamma^l_{jk}(X_l, X_i) + q_{ik}(N, X_j) + q_{jk}(N, X_i) \\ \dfrac{\partial}{\partial u_i}(N, X_j) = -q_{il}g^{lk}(X_k, X_j) + \Gamma^l_{ij}(X_l, N) + q_{ij}N^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_i}(N, N) = -2q_{il}g^{lk}(X_k, N) \end{cases} \tag{5}$$

xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasi uchun

$$(X_i, X_j) = q_{ij}, (X_j, N) = 0, (N, N) = N^2 = 1$$

funksiyalar yechim bo'ladi. Oxirgi tenglama uchun bu faktni bevosita

$$N^2 = 1, (X_j, N) = 0$$

ifodalarni tenglamaga qo'yib tekshirish mumkin. Ikkinchi tenglama uchun tekshiramiz

$$q_{il}g^{lk}g_{kj} + q_{ij} = q_{il}\delta^l_j + q_{ij} = -q_{ij} + q_{ij} = 0 \,.$$

Birinchi tenglamani tekshirish uchun

$$\partial^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{lm}\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}g_{km} + \frac{\partial}{\partial u_k}g_{im} - \frac{\partial}{\partial u_m}g_{ik}\right\}$$

tenglikni g_{lj} ga ko'paytirib, indeks l bo'yicha yig'amiz.

Natijada

$$\partial^l_{ik}g_{lj} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}g_{kj} + \frac{\partial}{\partial u_k}g_{ij} - \frac{\partial}{\partial u_j}g_{ik}\right\}$$

tenglikni hosil qilamiz. Xuddi shunday

$$\partial^l_{jk}g_{li} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_j}g_{ki} + \frac{\partial}{\partial u_k}g_{ji} - \frac{\partial}{\partial u_i}g_{jk}\right\}$$

tenglik ham o'rinli. Bundan

$$\partial^l_{ik}g_{lj} + \partial^l_{jk}g_{li} = \frac{\partial}{\partial u_k}g_{ij}$$

munosabat kelib chiqadi. Bu munosabat o'z navbatida

$$(X_i, X_j) = g_{ij}, (X_i, N) = 0$$

funksiyalar 1-tenglama uchun yechim ekanligini ko'rsatadi. Bu yechimlar uchun boshlang'ich shartlarga ko'ra

$$(X_i, X_j)(u_0, v_0) = g_{ij}(u_0, v_0), (X_i(u_0, v_0)N(u_0, v_0)) = 0$$

$$|N^2(u_0,v_0)|=1$$

munosabatlar o'rinli va

$$X_1(u_0,v_0), X_2(u_0,v_0), N(u_0,v_0)$$

vektorlar o'ng sistemani tashkil etadi. Bundan esa, (5) sistemaning yechimi yagonaligiga ko'ra

$$g_{ij}=(X_i,X_j),(X_j,N)=0, N^2=1$$

tengliklar va aralash ko'paytma uchun $X_1X_2N>0$ munosabat V_0 sohaning hamma nuqtasida bajarilishi kelib chiqadi. Demak, Φ sirt uchun

$$(\vec{r}_{u_i},\vec{r}_{u_j})=g_{ij},(\vec{r}_{u_i},N)=0, N^2=1$$

munosabatlar o'rinli. Bundan esa Φ sirtning birinchi kvadratik formasi matritsasi $\{g_{ij}\}$ matritsa bilan ustma-ust tegishli kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan

$$(\vec{r}_u,\vec{N}(u,v))=(\vec{r}_v,\vec{N}(u,v))=0$$

bo'lganligi uchun $\vec{N}(u,v)$ vektor Φ sirtning birlik normal vektori bo'ladi. Demak,

$$-(\vec{r}_{u_l},\vec{N}_{u_i})=-(X_l,\vec{N}_{u_i})=q_{ij}g^{jk}(X_k,X_l)=q_{ij}g^{jk}g_{kl}=q_{il}$$

munosabat o'rinli bo'lib, Φ sirtning ikkinchi kvadratik forma matritsasi q_{il} matritsa bilan ustma-ust tushadi.

Teorema-17 (Yagonalik). Mavjudlik haqidagi teorema shartlarini qanoatlantiruvchi regulyar Φ_1,Φ_2 sirtlar uchun yagona, $C:R^3\to R^3$ harakat mavjud bo'lib, $C(\Phi_1)=\Phi_2$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, Φ_1,Φ_2 regulyar sirtlarning (f_1,V_0) va (f_2,V_0) regulyar parametrlash usullari mos ravishda

$$\begin{matrix}\vec{r}=\vec{r}^{\,1}(u,v)\\ \vec{r}=\vec{r}^{\,2}(u,v)\end{matrix}\qquad (u,v)\in V_0$$

tenglamalar bilan aniqlanib, ularning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari mos ravishda har bir $(u,v)\in V_0$ nuqtada teng bo'lsin. Bu sirtlar uchun radiusi vektori $\vec{r}_1(u,v)$ ga teng bo'lsin nuqtani radius vektori $\vec{r}_2(u,v)$ bo'lgan nuqtaga

o'tkazuvchi $F:\Phi_1 \to \Phi_2$ akslantirishni qaraylik. Demak, F akslantirish Φ_1 sirtdagi (u,v) koordinatali nuqtani Φ_2 sirtdagi (u,v) koordinata nuqtaga akslantiradi va demak F differensiallanuvchi akslantirishdir. Bu akslantirishning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatish uchun 5-teoremaga ko'ra $F\cdot f_1 : V_0 \to R^3$ akslantirishning differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatish kerak. Agar $x^2(u,v), y^2(u,v), z^2(u,v)$ differensiallanuvchi funktsiyalar $\vec{r}^{\,2}(u,v)$ vektor-funksiyaning koordinatalari bo'lsa,

$$F\cdot f_1(u,v) = \{x^2(u,v), y^2(u,v), z^2(u,v)\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi va shuning uchun $F\cdot f_1(u,v)$ differensiallanuvchi akslantirishdir. Har bir $(u,v)\in V_0$ nuqtada $I_1(u,v)=I_2(u,v)$ bo'lganligi uchun 9-teoremaga ko'ra F akslantirish izometrik akslantirishdir. Demak, F akslantirishda skalyar ko'paytma, xususan urinma vektorlar orasidagi burchaklar saqlandi. Demak (u_0,v_0) nuqtada $\vec{r}_u^{\,1}, \vec{r}_v^{\,1}$ va $\vec{n}^1 = \dfrac{[\vec{r}_u^{\,1}, \vec{r}_v^{\,1}]}{|[\vec{r}_u^{\,1}, \vec{r}_v^{\,1}]|}$ vektorlar o'ng (chap) orientatsiyani aniqlasa $\vec{r}_u^{\,2}, \vec{r}_v^{\,2}$ va $\vec{n}^2 = \dfrac{[\vec{r}_u^{\,2}, \vec{r}_v^{\,2}]}{|[\vec{r}_u^{\,2}, \vec{r}_v^{\,2}]|}$ vektorlar ham o'ng (mos ravishda chap) oriyentatsiyani aniqlaydi. Demak

$$P(x^1(u_0,v_0), y^1(u_0,v_0), z^1(u_0,v_0))$$

nuqtada

$$\vec{r}_u^{\,1}(u_0,v_0), \vec{r}_v^{\,1}(u_0,v_0), \vec{n}^1(u_0,v_0)$$

vektorlar,

$$Q=(x^2(u_0,v_0), y^2(u_0,v_0), z^2(u_0,v_0))$$

nuqtada esa

$$\vec{r}_u^{\,2}(u_0,v_0), \vec{r}_v^{\,2}(u_0,v_0), \vec{n}^2(u_0,v_0)$$

vektorlar bazisni tashkil etib, bu bazislar bir xil orientatsiyani tashkil etadi va

$$|\vec{r}_u^{\,1}| = |\vec{r}_u^{\,2}|, |\vec{r}_v^{\,1}| = |\vec{r}_v^{\,2}|, |\vec{n}^1| = |\vec{n}^2|$$

tengliklar bajariladi. Analitik geometriyadagi ma'lum teoremaga ko'ra P nuqtani Q nuqtaga, $(\vec{r}_u^{\,1}, \vec{r}_v^{\,1}, \vec{n}^1)$ bazisni $(\vec{r}_u^{\,2}, \vec{r}_v^{\,2}, \vec{n}^2)$ bazisga o'tkazuvchi $C:R^3 \to R^3$ akslantirish mavjud bo'lib, u parallel ko'chirish va burishdan iborat bo'ladi

[1]. Bu akslantirish izometrik akslantirish bo'ladi, chunki parallel ko'chirish va burish izometrik akslantirishlardir. Endi $C: R^3 \to R^3$ akslantirishda $C(\Phi_1) = \Phi_2$ ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun $\vec{\rho}(u,v) = C^*(\vec{r}^1(u,v))$ belgilash kiritaylik. Bu yerda C^* akslantirish, C akslantirishning differensialidir. Akslantirish C izometriya bo'lganligi uchun C^* ortogonal matritsadir. Demak,

$$\vec{\rho}(u_0,v_0) = \vec{r}_2(u_0,v_0), \vec{\rho}_u(u_0,v_0) = C^*(\vec{r}_u^1(u_0,v_0)), \vec{\rho}_v(u_0,v_0) = C^*(\vec{r}_v^1(u_0,v_0))$$

tengliklardan tashqari $C(\Phi_1)$ sirtning birinchi kvadratik formasi Φ_1 sirtning va demak Φ_2 sirtning birinchi kvadratik formasi bilan ustma-ust tushadi. Akslantirish C orientatsiyani saqlanganligi uchun, $C(\Phi_1)$ va Φ_2 sirtlarning ikkinchi kvadratik formalari ham ustma-ust tushishini ko'rsatamiz. Urinma $\vec{a}, \vec{b} \in T_p\Phi_1$ vektorlar berilgan va $\vec{a}^* = C^*(\vec{a}), \vec{b}^* = C^*(\vec{b})$ bo'lsin. $II_1(\vec{a},\vec{b}) = II^*(\vec{a}^*,\vec{b}^*)$ tenglikni ko'rsatishimiz kerak.

Buning uchun,

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{uu}, \vec{n}), M = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{uv}, \vec{n})$$

va $N = (\vec{r}_{vv}, \vec{n}_1) = (\vec{\rho}_{vv}, \vec{n})$ tengliklari ko'rsatamiz. Bu erda $\vec{n} - C(\Phi_1)$ sirtning normal vektori. $\vec{\rho}(u,v) = C^*(\vec{r}(u,v))$ tenglikni differensiallaymiz va $\vec{\rho}_u(u,v) = C^*(\vec{r}_u), \vec{\rho}_v = C^*(\vec{r}_v)$ tengliklarni hosil qilamiz. Bundan tashqari $\vec{n} = \frac{[\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_v]}{|[\vec{\rho}_u, \vec{\rho}_v]|} = C^*(\vec{n}_1)$ tenglik ham o'rinli, chunki vektor ko'paytma orientatsiya saqlovchi izometriyada saqlanadi. Yuqoridagi tenglikni differensiallab, $\vec{n} = C^*(\vec{n}_u^1)$ tenglikni hosil qilamiz. Demak,

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}^1) = -(\vec{r}_u, \vec{n}_u) = -(\vec{\rho}_u, \vec{n}_u) = (\vec{\rho}_{uu}, \vec{n})$$

bo'ladi. Xuddi shunday ikkinchi kvadratik formaning boshqa koeffitsientlari ham tengdir. Natijada, Φ_2 sirt va $C(\Phi_1)$ sirtlarning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari tengligini hosil qildik. Demak,

$$\vec{\rho}(u\ ,v\ ), \quad \vec{r}_2(u\ ,v\ )$$

vektor funksiyalar derivatsion formulalarga ko'ra bitta xususiy hosilali differen sial tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. Bundan

$$\vec{\rho}(u_0,v_0) = \vec{r}_2(u_0,v_0)$$

tenglikka asosan $\vec{\rho}(u,v) = \vec{r}_2(u,v)$ kelib chiqadi. Demak, $C(\Phi_1) = \Phi_2$ tenglik isbotlandi.

11. Sirtlarning ichki geometriyasi

Sirtning unda yotuvchi chiziqlar uzunligiga bog'liq xossalari uning ichki geometriyasini tashkil qiladi. Sirt ichki geometriyasini o'rganishda geodezik chiziqlar muhim rol o'ynaydi. Sirtlarda geodezik chiziqlar o'zlarining xossalari bo'yicha tekislikdagi to'g'ri chiziqlarga yaqin turadi.

1. Geodezik chiziqlar

Regulyar $\hat{O}$ sirt va unda yotuvchi ikki marta differensiallanuvchi parametrlangan γ egri chiziq $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Таъrif. *Parametrning har bir t qiymatida $\vec{\rho}''(t)$ vektor sirtning $\gamma(t)$ nuqtasidagi urinma tekislikka perpendikulyar bo'lsa, γ chiziq geodezik chiziq deb ataladi.*

***Izoh.** Bu yerda $\gamma(t)$ chiziqning radius vektori $\vec{\rho}(t)$ bo'lgan nuqtasidir.*

Teorema-18. *Geodezik chiziq $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, uning tezlik vektori $\vec{\rho}'(t)$ o'zgarmas uzunlikka ega bo'ladi.*

Isbot. Skalyar ko'paytma $(\vec{\rho}', \vec{\rho}')$ uzunlik kvadrati bo'lganligi uchun uni differensiallab uning hosilasi nolga teng ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, $(\vec{\rho}', \vec{\rho}')' = 2(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') = 0$. Demak, $|\vec{\rho}'(t)| = \sqrt{(\vec{\rho}', \vec{\rho}')}$ o'zgarmasdir.

Teorema-19. *Geodezik chiziq $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lib, $s = s(t)$ differensiallanuvchi funksiya yordamida parametrni almashnirganimizda $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ parametrlangan chiziq hosil bo'lsin. Parametr almashtirilgandan keyin chiziq geodezik bo'lishi uchun $s = \alpha t + \beta$ bo'lishi zarur va etarlidir.*

Isbot. Berilgan $s = s(t)$ formula parametrni almashtirish formulasi bo'lgani uchun $s'(t) > 0$ (yoki $s'(t) < 0$) munosabat o'rinli bo'ladi. Agar $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ tenglama geodezik chiziqni aniqlasa,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}_1(s(t)), \vec{\rho}'(t) = \vec{\rho}_1' s'(t), \vec{\rho}''(t) = \vec{\rho}_1''(s'(t))^2 + \rho_1' s''(t)$$

va

$$0=(\vec{\rho}',\vec{\rho}'')=(s')^3(\vec{\rho}_1',\vec{\rho}_1'')+s's''(\vec{\rho}_1',\vec{\rho}_1')=s's''(\vec{\rho}_1',\vec{\rho}_1')$$

tengliklarni hosil qilamiz. $s'(t)\neq 0$ **bo'lgani uchun** $s''=0$ **hosil bo'ladi. Demak,** $s(t)=\alpha t+\beta$ **bo'ladi. Endi** $s(t)=\alpha t+\beta$ **deb faraz qilsak,** $\vec{\rho}''(t)=\vec{\rho}_1''s'^2$ **tenglik** $\vec{\rho}''(t)$ **va** $\vec{\rho}_1''$ **vektorlarning kollinear ekanligini ko'rsatadi.** □

Natija. Har qanday geodezik chiziq tabiiy parametrga nisbatan ham geodezik chiziq bo'ladi, chunki *s(t)* yoy uzunligi uchun

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\vec{\rho}'(t)|\,dt=\alpha(t-t_0)$$

tenglik o'rinlidir.

Endi geodezik chiziqlar uchun differensial tenglamalar sistemasini keltirib chiqaramiz. Regulyar $\hat{O}$ **sirtning** (f,G) **parametrlash usuli** $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ **tenglama bilan berilgan bo'lsin.**

Agar geodezik chiziqning ichki koordinatalardagi tenglamalari $u=u(t),v=v(t)$ **ko'rinishda bo'lsa, 9-paragrafdagidek** $u_1=u,u_2=v$ **belgilash kiritib**

$$\vec{\rho}(t)=\vec{r}(u_1(t),u_2(t)),\vec{\rho}'(t)=\vec{r}_{u_1}u_1'+\vec{r}_{u_2}u_2',$$
$$\vec{\rho}''(t)=\vec{r}_{u_1u_2}(u_1')^2+\vec{r}_{u_1}u_1''+\vec{r}_{u_2u_2}(u_2')^2+\vec{r}_{u2}u''$$

tengliklarni hosil qilamiz. Endi $\vec{r}_{u_1u_1},\vec{r}_{u_1u_2},\vec{r}_{u_2u_2}$ **ifodalar uchun derivatsion formulalarni ishlatib**

$$\vec{\rho}''(t)=\sum_{k=1}^{2}(u_k''+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k u_i'u_j')\vec{r}_{u_k}+\sum_{i,j=1}^{2}q_{ij}u_i'u_j'\vec{n}$$

ifodani hosil qilamiz. Endi $\vec{\rho}''(t)$ **vektorning** $\vec{n}$ **vektorga kollinear ekanligi va** $\vec{r}_{u_1},\vec{r}_{u_2},\vec{n}$ **vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan**

$$u_k''+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^k u_i'u_j'=0,\ k=1,2$$

kelib chiqadi. Demak, $u=u_1(t),u=u_2(t)$ **tenglamalar geodezik chiziqni aniqlash uchun** $u_1(t),u_2(t)$ **funksiyalar**

$$\begin{cases} \frac{d^2u_1}{dt^2} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} = 0 \\ \frac{d^2u_2}{dt^2} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij} \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

sistemaning yechimi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teorema-20. Regulyar sirtning har bir nuqtasidan har bir yo'nalish bo'yicha yagona geodezik chiziq chiqadi.

Isbot. Berilgan $p(u_0, v_0) \in \Phi$ nuqta va $\vec{a} \in T_p\Phi$ urinma vektor uchun (1) sistemaning

$$u_1(0) = u^0, u_2(0) = v_0, u_1'(0) = a_1, u_2'(0) = a_2$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $\vec{a}$ yo'nalish bo'yicha geodezik chiziqni aniqlaydi.

Geodezik chiziqlarni xarakterlovchi kattalik, geodezik egrilik tushunchasini kiritamiz. Regulyar $\hat{O}$ sirtning p nuqtasidan o'tuvchi γ egri chiziq berilgan bo'lsin. Chiziqning p nuqta atrofidagi qismining p nuqtadan o'tuvchi urinma tekislikka proeksiyasini γ_0 bilan belgilaymiz. Tabiiyki, γ_0 ham silliq egri chiziq bo'ladi. Proeksiyalash natijasida hosil bo'lgan γ_0 egri chiziqning p nuqtadagi egriligini γ chiziqning geodezik egriligi deb ataymiz.

Bizning maqsadimiz, γ geodezik chiziq bo'lishi uchun uning geodezik egriligi nolga teng bo'lishi zarur va etarli ekanligini ko'rsatishdir. Buning uchun γ_0 va γ chiziqlar egriliklari orasidagi bog'lanishlarni topamiz. Avvalo, γ chiziq nuqtalaridan (p nuqtadan o'tuvchi) urinma tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazib, silindrik sirt hosil qilib, uni F bilan belgilaymiz. Bu silindrik sirtni α tekislik bilan kesganimizda γ_0 hosil bo'ladi (α-Φ sirtning p nuqtadagi urinma tekisligi). Demak, F silindr uchun γ_0 normal kesim va uning bosh normali F ning normaliga kollineardir. γ va γ_0 chiziqlar umumiy urinmalarga ega. Shuning uchun, silindrik sirtga nisbatan Men'e teoremasidan foydalanib $k_0 = |k \cos\varphi|$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $\varphi - \gamma_0$ va γ chiziqlar bosh normallari orasidagi burchakdir, $k_0, k -$ mos ravishda γ_0 va γ chiziqlarning p nuqtadagi egriliklaridir. Endi γ chiziqni yoy uzunligi

yordamida parametrlab, uning tenglamasini $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s)$ ko`rinishda yozamiz va p nuqtaga mos kesuvchi parametrning qiymatini s_0 bilan belgilaymiz. Shunda $\vec{\tau}=\dot{\vec{p}}(s)$-urinma vektor, $\vec{v}(s_0)$-bosh normal vektori bo'lsa, $\vec{\tau}$-vektor γ_0 uchun ham p nuqtadagi urinma vektor bo'lib, $[\vec{\tau},\vec{n}]$ vektor γ_0 chiziqning bosh normali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

Shuning uchun

$$|k_0|=|k\cos\varphi|=|(\ddot{\vec{\rho}},[\dot{\vec{\rho}},\vec{n}])|=|\ddot{\vec{\rho}}\dot{\vec{\rho}}\vec{n}|$$

formulani hosil qilamiz. Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, $k_0=0$ bo'lishi uchun bosh normal vektor sirtning normal vektori $\vec{n}$ ga kollinear bo'lishi zarur va etarlidir. Shunday qilib, biz quyidagi teoremani isbotladik.

Teorema-21. Sirtda yotuvchi chiziq geodezik chiziq bo'lishi uchun uning geodezik egriligi har bir nuqtada nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Regulyar Φ sirt parametrlanganda koordinata chiziqlarining bir oilasi geodezik chiziqlardan iborat bo'lib, har bir nuqtada shu nuqtadan o'tuvchi koordinata chiziqlari o'zaro ortogonal bo'lsa, bunday parametrlash usuli yarim geodezik parametrlash usuli deb ataladi.

Teorema-22. Regulyar Φ sirtga tegishli har bir nuqta atrofida uning uchun yarim geodezik parametrlash usuli mavjuddir.

Isbot. Sirtning p nuqta atrofidagi regulyar parametrlash usuli

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v),(u,v)\in G$$

tenglama yordamida berilgan, $p(u_0,v_0)$ nuqtadan o'tuvchi va ikki marta differensiallanuvchi γ chiziq ichki koordinatalarda

$$\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases} \qquad a<t<b$$

tenglamalar yordamida aniqlangan va $u_0=u(t_0),\ \upsilon_0=\upsilon(t_0)$ bo'lsin. Shunda γ chiziqning fazodagi vektor tenglamasi

$$\vec{\rho}=\vec{r}(u(t),v(t)) \qquad a<t<b$$

ko'rinishda bo'ladi. Har bir t uchun $\vec{p}'(t)$ vektorga perpendikulyar birlik urinma vektorni $\vec{a}(t)$ bilan belgilaymiz. Bundan tashqari $\vec{a}(t)$ vektorni shunday tanlaymizki, $\{\vec{\rho}'(t),\vec{a}(t)\}$ vektorlar urinma fazoda $\{\vec{r}_u,\vec{r}_v\}$ vektorlar bilan bir xil

oriyentasiyani aniqlasin. Urinma fazoda $\vec{a}(t)$ vektor, $a_1(t), a_2(t)$ korrdinatalarga ega bo'lsa, $a_1(t), a_2(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'ladi. Har bir t uchun $Q(u(t), v(t))$ nuqtadan $\vec{a}(t)$ yo'nalish bo'yicha chiquvchi geodezik chiziqni μ_t bilan, uning urinma vektorini $\dot{\vec{\mu}}_t$ bilan belgilaymiz.

Har bir t uchun μ_t geodezik chiziqda tabiiy parametr kirisak, uning ichki koordinatalarda tenglamalari

$$\begin{matrix} u = u_t(s) \\ v = v_t(s) \end{matrix} \quad -\varepsilon(t) < s < \varepsilon(t)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu erda $u_t(s), v_t(s)$ funksiyalar (1) differensial tenglamalar sistemasining

$$u_t(0) = u(t), v_t(0) = v(t), \dot{u}_t(0) = a_1(t), \dot{\vec{v}}_t(0) = a_2(t)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimidir. Endi shunday $\delta > 0, \varepsilon > 0$ sonlarni topamizki, $|t_0 - t| < \delta$ bo'lganda, $u_t(s), v_t(s)$ funksiyalar $(-\varepsilon, \varepsilon)$ oraliqda aniqlangandir. Bu yerda t_0 parametrning p nuqtaga mos keluvchi qiymatidir. Buning uchun (1) differensial tenglamalar sistemasini har bir fiksirlangan t uchun

$$\begin{cases} \dfrac{du_t}{ds} = q_1 \\ \dfrac{dv_t}{ds} = q_2 \\ \dfrac{dq_k}{ds} = -\sum \Gamma_{ij}^{\ k}(q_1, q_2) q_i q_j \qquad 1 \le i, j, k \le 2 \end{cases} \qquad (2)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda (u_t, v_t, q_1, q_2) tartiblangan to'rtlikni R^4 fazoning nuqtasi sifatida qaraymiz. Boshlang'ich shartlar, ya'ni $u_t(0), v_t(0)$, $q_1(t,0) = q_1(t)$, $q_2(t,0) = q_2(t)$ funksiyalar t parametr (a,b) oraliqda o'zgarganda R^4 fazoda silliq chiziqni aniqlaydi.

Differensial tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligi va yechimning boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liqligi haqidagi teoremaga [4] asosan

$$\left\{u_{t_0}(0), v_{t_0}(0), \quad q_1(t_0) = q_1(t_0,0), \ q_2(t_0) = q_2(t_0,0)\right\}$$

nuqtaning shunday V atrofi va shunday $\varepsilon > 0$ soni mavjudki, V atrofga tegishli har bir nuqtadan chiquvchi yechim $-\varepsilon < s < \varepsilon$ oraliqda aniqlangan. Biz shunday

$\delta > 0$ **sonini tanlashimiz mumkinki,** $|t-t_0| < \delta$ **bo'lganida** $\{u(t), v(t),\ q_1(t),\ q_2(t)\}$, **nuqta** V **atrofga tegishli bo'lsin. Demak,** $|t-t_0| < \delta$ **bo'lganda** $u_t(s), v_t(s)$ **funksiyalar** $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ **atrofda aniqlangan. Endi sirtning** $p(u_0, v_0)$ **nuqta atrofidagi**

$$\vec{r}(t,s) = \vec{r}(u_t(s), v_t(s)) \quad (t,s) \in G_\circ = \begin{Bmatrix} (t,s): |t-t_0| < \delta \\ |s| < \varepsilon \end{Bmatrix}$$

parametrlash usulini qaraylik. Differensial tenglamalar sistemasi yechimi boshlang'ich qiymatlarning differensiallanuvchi funksiyasi bo'lganligi uchun $\vec{r}(t,s)$ **differensiallanuvchi funksiyadir. Bundan tashqari** $[\vec{r}_t, \vec{r}_s] \neq \vec{0}$ **bo'lganligi uchun** $\vec{r} = \vec{r}(t,s)$ **tenglama regulyar sirtning parametrlash usulini aniqlaydi. Endi uning yarim geodezik parametrlash usuli ekanligini ko'rsataylik.**

Har bir t **uchun** μ_t **geodezik chiziq bo'lganligi uchun**

$$\left(\ddot{\vec{r}}_{ss}(t,s), \ddot{\vec{r}}_t'\right) = 0 \ \textbf{va}\ \left(\dot{\vec{r}}_s, \dot{\vec{r}}_s\right) = 1$$

tengliklar o'rinli. Lekin

$$\left(\ddot{\vec{r}}_{ss}, \dot{\vec{r}}_s\right) = \frac{d}{ds}\left(\ddot{\vec{r}}_{s}, \vec{r}_t'\right) - \left(\dot{\vec{r}}_s, \vec{r}_{ts}''\right) =$$
$$= \frac{d}{ds}F(t,s) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_s, \dot{\vec{r}}_s\right) = \frac{d}{ds}F = 0$$

tengliklardan va $F(t,0) = 0$ **tenglikdan** $F(t,s) = 0$ **ekanligi kelib chiqadi.**

Endi geodezik chiziqlarning yana bir muhim xossasini isbotlaylik. Regulyar $\hat{O}$ **sirt o'zininmg birorta nuqtasi atrofidagi** (f, G) **parametrlash usuli** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ **tenglama yordamida berilgan bo'lsin. Agar** Φ **sirtda** γ **geodezik chiziq berilgan bo'lsa, u o'ziga tegishli yetarli yaqin ixtiyoriy ikkita nuqtani tutashtiruvchi eng qisqa chiziq ekanligini isbotlaymiz.**

Umumiylikni chegaralamasdan γ **geodezik chiziq** $p_0(u_0, v_0)$ **nuqtadan o'ssin deb faraz qilamiz.** $p_0(u_0, v_0)$ **nuqtadan** γ chiziqga **perpendikulyar birorta** γ_0 **chiziq chiqaramiz va** γ_0 **yordamida** p_0 **nuqta atrofida yarim geodezik koordinatalar sistemasini kiritamiz. Demak,** $v = const$ **chiziqlar geodezik chiziqlar bo'lib, ular** γ_0 **chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.**

Bu koordinatalar sistemasida γ **chiziq** $v = v_0$ **tenglama yordamida aniqlanadi. Faraz qilaylik** γ **chiziqda yotuvchi** p **va** q **nuqtalar** p_0 **nuqtaning**

geodezik koordinatalar sistemasi kiritilgan atrofida yotsin. Yarim geodezik koordinatalar sistemasi kiritilgan p_0 nuqtaning atrofini $V(p_0)$ bilan belgilab, $\varepsilon > 0$ ni shunday tanlaymizki, radiusi ε ga teng $V_\varepsilon(p_0)$ shar $V(p_0)$ atrofning qismi bo'lsin. Shunda p va q nuqtalar $V_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_0)$ sharga tegishli bo'lsa, γ chiziqning $\overset{\cup}{pq}$ yoy uzunligidan kichik uzunlikka ega bo'lgan $\tilde{\gamma}$ chiziq albatta $V(p)$ da yotadi. Haqiqatan $\tilde{\gamma}$ chiziq $V(p)$ da yotmasa, uning $\frac{V_\varepsilon}{2}(p_0)$ doira chegarasini birinchi va oxirgi marta kesishish nuqtalarini r va s bilan belgilaymiz. Shunda

$$|\overset{\cup}{p_0 p}| + |\overset{\cup}{pr}| > \varepsilon, |\overset{\cup}{p_0 q}| + |\overset{\cup}{qs}| > \varepsilon$$

munosabatlardan

$$|\overset{\cup}{p_0 p}| + |\overset{\cup}{pr}| + |\overset{\cup}{p_0 r} + |\overset{\cup}{qs}| > 2\varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Lekin ikkinchi tomondan

$$|\overset{\cup}{pr}| + |\overset{\cup}{qs}| < |\overset{\cup}{p_0 p}| + |\overset{\cup}{p_0 q}| < \varepsilon$$

qarama-qarshilik mavjud. Demak $\tilde{\gamma}$ chiziq $V(p)$ da yotadi. Uning uzunligini hisoblasak,

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_p^q \sqrt{u'^2 + Gv'^2}\,dt > \int_p^q |u'|\,dt \geq u|_N - u|_M = |\overset{\cup}{pq}|$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, bu qarama-qarshilikdan γ chiziqning $\overset{\cup}{pq}$ yoyi eng qisqa yoy ekanligi kelib chiqadi.

Misollar.

1. **Har qanday sirtda chiziqli parametrlash usuli bilan berilgan to'g'ri chiziq geodezik chiziqdir. Bu holda $\vec{\rho}(t) = \vec{a}t + \vec{s}$ bo'lib, bu erda $\vec{a}, \vec{s}$ o'zgarmas vektorlardir. Shuning uchun $\vec{\rho}''(t) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.**
2. **Regulyar Φ sirt sifatida oshkormas ko'rinishda berilgan doiraviy silindrni olaylik. Koordinatalar sistemasi qulay tanlanganda tenglama $x^2 + y^2 = R^2$ ko'rinishda bo'ladi. Bu silindrda**

$$\begin{cases} x = R\cos(\alpha t + \beta) \\ y = R\sin(\alpha t + \beta) \\ z = at + \beta \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan chiziq geodezik chiziq bo'ladi. Bu erda

$$\overline{\rho}''(t) = \{-\alpha^2 R\cos(\alpha t + \beta), -\alpha^2 R\sin(\alpha t + \beta), 0\}$$

bo'lib, $gradF(x, y, z) = \{2x, 2y, 0\}$ **vektorga kollineardir.**

$F(x, y, z) = x^2 + y - R^2$ **funksiyaning gradienti** $F(x, y, z) = 0$ **sirtga ortogonal bo'lganligi uchun** $\vec{\rho}''(t)$ **vektor ham urinma tekislikka perpendikulyar bo'ladi. Agar** $\alpha = 0$ **bo'lsa bu chiziq silindrning yasovchisi bo'ladi,** $a = 0$ **bo'lsa aylana hosil bo'ladi. Umumiy holda esa vint chizig'iga aylanadi.**

3. **Ikki o'lchamli** S^2 **sfera** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ **tenglama bilan berilgan bo'lsa, ikkita o'zaro ortogonal** $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ **birlik vektorlar uchun** $\vec{\rho}(t) = R\cos t\vec{e}_1 + R\sin t\vec{e}_2$ **tenglama geodezik chiziqni aniqlaydi. Haqiqatan** $|\vec{\rho}(t)| = R$ **bo'lib,**

$$\vec{\rho}''(t) = -R\cos t\vec{e}_1 - R\sin t\vec{e}_2 = -\vec{\rho}(t)$$

bo'lib, $\vec{\rho}(t)$ **radius vektor, demak** $\vec{\rho}(t)$ **vektor ham sfera urinma tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. Bu chiziqni hosil qilish uchun** $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ **vektorlarga parallel va koordinata boshidan o'tuvchi tekislik bilan sferani kesamiz. Demak, bu chiziq sferadagi katta aylanalardan biridir. Har bir nuqtada ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha bitta katta aylana o'tganligi uchun sferada har qanday geodezik chiziq katta aylana yoki katta aylana yoyidan iboratdir.**

4. **Evklid fazolarida to'g'ri chiziqlar (yoki ularning qismi) va faqat to'g'ri chiziqlar (ularning qismi) geodezik chiziqlar bo'ladi.**

§ 12. Vektorlarni parallel ko'chirish

Evklid geometriyasida tekislikda va fazoda vektorlarni bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga parallel ko'chirishni biz yaxshi bilamiz. Lekin sirtlarda bir nuqtadagi urinma vektorni ikkinchi nuqtadagi urinma vektorga parallel ko'chirishda Evklid fazodagi parallel ko'chirishdan foydalanib bo'lmaydi, chunki, bitta nuqtadagi urinma vektor ikkinchi nuqtada sirtga urinma vektor bo'lmay qolishi mumkin. Shuning uchun sirtlarda parallel ko'chirish qoidasini

boshqacha yo'l bilan aniqlashga kirishamiz. Avvalo biz vektor maydonlar va ularni kovariant differensiallash tushunchalarini kiritamiz.

1. Vektor maydonlar

Uch o'lchamli Evklid fazosining birorta ochiq G qism to'plami berilgan bo'lsin. Agar G to'plamga tegishli har bir p nuqtaga bitta $X(p)$ vektor mos qo'yilsa, bu moslik vektor maydon deb ataladi. Fazoda $Oxyz$ dekart koordinatalar sistemasini kiritib, $X(p)$ vektorni bazis vektorlar orqali ifodalasak

$$X(p) = X_1(p)\vec{i} + X_2(p)\vec{j} + X_3(p)\vec{k}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $X(p)$ vektorning $X_1(p),\ X_2(p),\ X_3(p)$ koordinatalari p nuqtaning funksiyalaridir. Demak, vektor maydon berish uchun

$$X_1(x,y,z),\ \ X_2(x,y,z),\ \ X_3(x,y,z)$$

funksiyalar ko'rsatilishi yetarlidir. Agar

$$X_1(x,y,z),\ \ X_2(x,y,z),\ \ X_3(x,y,z)$$

funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,

$$X:(x,y,z) \to \{X_1(x,y,z),\ X_2(x,y,z),\ \ X_3(x,y,z)\}$$

vektor maydon silliq (yoki differensiallanuvchi) vektor maydon deyiladi. Bektor maydon X uchun

$$X_1(x,y,z),\ \ X_2(x,y,z),\ \ X_3(x,y,z)$$

funksiyalarni uning koordinata funksiyalari deb ataymiz.

Ta'rif. Birorta $G \subset R^3$ sohada X vektor maydon berilgan bo'lib va shu sohada $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan aniqlangan differensiallanuvchi γ chiziq ham berilgan bo'lsin. Agar har bir t uchun $\vec{\rho}'(t) = X(\gamma(t))$ bo'lsa γ chiziq X vektor maydonning integral chizig'i deyiladi.

Bu erda $\gamma(t)$ - chiziqning radius-vektori $\vec{\rho}(t)$ bo'lgan nuqtasi.

Teorema-23. Silliq vektor maydon berilgan sohaning har bir nuqtasidan shu vektor maydonning yagona integral chizig'i o'tadi.

Isbot. Bektor maydonning

$X_1(x,y,z), X_2(x,y,z), X_3(x,y,z)$

koordinata funksiyalari va $(x_0, y_0, z_0) \in G$ **nuqta berilgan bo'lsa**

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = X_1(x,y,z) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = X_2(x,y,z) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = X_3(x,y,z) \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

differensial tenglamalar sistemasining

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$$

boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi $\{x(t), y(t), z(t)$ **yechimi** (x_0, y_0, z_0) **nuqtadan o'tuvchi integral chiziqni aniqlaydi.**

Endi sirtlarda berilgan vektor maydonlarni qaraylik. Regulyar Φ **sirtning** p **nuqta atrofidagi** (f, G) **parametrlash usuli** $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ **tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar** Φ **sirtga tegishli har bir nuqtaga shu nuqtadan chiquvchi vektor mos qo'yilgan bo'lsa, sirtda vektor maydon berilgan deyiladi. Agar vektor maydonning koordinata funksiyalari** Φ **sirtda aniqlangan differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, vektor maydon silliq vektor maydon deyiladi. Demak,** $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ **vektor maydon** p **nuqta atrofida silliq bo'lishi uchun**

$$X_1 \cdot f : G \to R^3, X_2 \cdot f : G \to R^3, X_3 \cdot f : G \to R^3$$

funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lishi lozim. Sirtda berilgan X **vektor maydonni** $X(q) = X^\tau(q) + X^n(q)$ **ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda** $X^\tau(q)$, $X^n(q)$ **vektorlar mos ravishda** $X(q)$ **vektorning** q **nuqtadan o`tuvchi urinma tekislikka va normalga proyeksiyalaridir. Shunday qilib, sirtga urinuvchi** $X^\tau : q \to X^\tau(q)$ **va sirtga perpendikulyar** $X^n : q \to X^n(q)$ **vektor maydonlar hosil bo'ldi. Agar** X **silliq vektor maydon bo'lsa,** $X^\tau(q), X^n(q)$ **vektor maydonlar ham silliq bo'ladi.**

Buni isbotlash uchun berilgan p **nuqta atrofida ularning silliq ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun** X **vektorni** $X = X^\tau + \lambda(u,v)\vec{n}$ **ko'rinishda yozib, bu**

tenglikni $\vec{n}$ vektorga skalyar ko'paytirib $\lambda(u,v)=(X,\vec{n})$ munosabat hosil qilamiz. Bu erda $\vec{n}=\dfrac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|}$. Demak, $X^n=\lambda\vec{n}$, $X^\tau=X-\lambda\vec{n}$ tengliklar hosil bo'ladi. Berilgan X vektor maydon va $\vec{n}$ vektor silliq vektor maydonlar bo'lganligi uchun $\lambda(u,v)$ differensiallanuvchi funksiyadir. Shuning uchun $X^\tau(q)$, $X^n(q)$ vektot maydonlar ham silliq vektor funksiyalar bo'ladi.

Endi $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ tenglama bilan parametrlangan silliq γ chiziq berilib, parametrning har bir t qiymati uchun $\gamma(t)$ nuqtadan chiquvchi $X(t)$ vektor mos qo'yilsa, γ chiziqda vektor maydon berilgan deyiladi. Berilgan vektor maydonning koordinata funksiyalari differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u silliq vektor maydon deyiladi. Agar

$$X(t)=\{X_1(t),X_2(t),X_3(t)\}$$

silliq vektor maydon bo'lsa

$$\frac{dX}{dt}=\left\{\frac{dX_1}{dt},\frac{dX_2}{dt},\frac{dX_3}{dt}\right\}$$

vektor maydon X vektor maydonning γ chiziq bo'ylab differensiali deb ataladi.

Endi γ chiziq regulyar Φ sirtda yotuvchi chiziq bo'lib, γ chiziqda silliq vektor maydon X berilib, har bir t uchun $X(t)$ vektor sirtning γ (t) nuqtasidagi urinma vektor bo'lsin. Shunda $\dfrac{dX}{dt}$ vektor maydon sirtga urinma vektor maydon bo'lishi shart emas. Lekin har bir t uchun

$$\frac{dX(t)}{dt}=\left[\frac{dX}{dt}(t)\right]^\tau+\left[\frac{dX}{dt}(t)\right]^n$$

tenglikni yozsak, Φ sirtda $\left[\dfrac{dX(t)}{dt}\right]^\tau$ urinma vektor maydonni hosil bo'ladi. Bu vektor maydon uchun

$$\frac{Dx}{dt}(t)=\left[\frac{dX}{dt}(t)\right]^\tau$$

belgilash kiritib, uni X vektor maydonning kovariant differensiali deb ataymiz. Agar regulyar Φ sirt $p=\gamma(t_0)\in\Phi$ nuqta atrofida $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa har bir t uchun

$$X(t)=\vec{r}_{u_1}(u_1(t),u_2(t))x^1(t)+\vec{r}_{n_2}(u_1(t),u_2(t))x^2(t)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu erda $u_1=u_1(t),\, u_2=v_2(t)$ **funksiyalar** γ **chizqing ichki koordinatalardagi tenglamalaridir. Bu tenglikdagi** $x^1(t),x^2(t)$ **funksiyalar esa** $X(t)$ **vektorning** $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ **bazisdagi koordinatalar bo'lib, ular** t **parametrning differensiallanuvchi funksiyalaridir.**

Endi

$$\frac{dX(t)}{dt}=\sum_{i,j=1}^{2}\vec{r}_{u_iu_j}(u_1(t),u_2(t))x^i(t)\frac{du_j}{dt}+\sum_{i=1}^{2}\vec{r}_{u_i}\frac{dx^i}{dt},$$

tenglikda $\vec{r}_{u_iu_j}=\Gamma_{ij}^k\vec{r}_k+q_{ij}\vec{n}$ **derivasion formulalardan foydalanib**

$$\frac{dX(t)}{dt}=\sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\vec{r}_{u_k}x^i\frac{du_j}{dt}+\sum_{i,j}q_{i,j}x^i\frac{du_j}{dt}\vec{n}+\sum_k\frac{dx^k}{dt}\vec{r}_{u_k}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erdan esa kovariant differensial uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$\frac{DX(t)}{dt}=\sum_k\left\{\frac{dx^k}{dt}+\sum_{ij}\Gamma_{ij}^k\frac{du_j}{dt}\right\}\vec{r}_{u_k} \qquad \textbf{(2)}$$

2. Vektorlarni parallel ko'chirish

Regulyar $\hat{O}$ sirtning bir nuqtasidan ikkinchi nuqtasiga shu nuqtalarni tutashtiruvchi birorta chiziq bo'ylab urinma vektorni parallel ko'chirish masalasini ko'raylik. Sirtda yotuvchi γ chiziq bo'ylab berilgan X vektor maydon uchun $\frac{DX}{dt}=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, X vektor maydon γ chiziq bo'ylab parallel vektor maydon deyiladi.

Taъrif.* *$\hat{O}$ sirtda p va q nuqtalarni tutashtiruvchi silliq γ chiziq va $\vec{a}\in T_p\Phi$, $\vec{b}\in T_q\Phi$ urinma vektorlar berilgan bo'lsin. Agar γ chiziq bo'yicha parallel X vektor maydon bo'lib, $X(t_1)=\vec{a},\ X(t_2)=\vec{b}$ tengliklar bajarilsa, $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorni γ chiziq bo'ylab parallel ko'chirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

Bu erda t_1, t_2 sonlar mos ravishda parametrning p va q nuqtalarga mos keluvchi qiymatlaridir.

Teorema-24. Regulyar Φ sirtda p va q nuqtalarni tutashtiruvchi silliq γ chiziq $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilib, $\gamma(t_1)=p,\ \gamma(t_2)=q$ bo'lsin. Shunda ixtiyoriy $\vec{a}\in T_p\Phi$ urinma vektor uchun yagona $\vec{b}\in T_q\Phi$ vektor mavjud bo'lib, u $\vec{a}$ vektorni γ chiziq bo'ylab parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi.

Isbot. Sirtni birorta nuqta atrofida

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v),(u,v)\in G \qquad \textbf{(3)}$$

tenglama bilan parametrlasak, ichki koordinatalarda $u_1=u_1(t),\ u_2=u_2(t)$ tenglamalar bilan berilgan γ chiziq bo'ylab koordinata funksiyalari $X^1(t), X^2(t)$ bo'lgan X vektor maydon parallel bo'lishi uchun

$$\sum_k \left\{ \frac{dx^k}{dt} + \sum_{ij}\Gamma_{ij}^k \frac{du_j}{dt} \right\} \vec{r}_{u_k} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu erda $\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligini hisobga olsak

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dfrac{du_j}{dt} = 0 \\ \dfrac{dx^2}{dt} + \sum\limits_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dfrac{du_j}{dt} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Endi bevosita teorema isbotiga o'taylik. Agar p, q **nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq** Φ **sirtning (3) tenglama bilan parametrlangan qismida yotsa, (4) differensial tenglamalar sistemasining** $x^1(0) = a_1, x^2(0) = a_2$ **boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi** $\{x^1(t), x^2(t)\}$ **echimi bizga** γ **chiziq bo'ylab parallel bo'lgan** $X(t) = \vec{r}_{u_1} x^1(t) + \vec{r}_{u_2} x^2(t)$ **vektor maydonni beradi. Bu erda** a_1, a_2 **ifodalar** $\vec{a}$ **vektorning koordinatalaridir. Endi teorema tasdig'idagi** b **vektor sifatida** $X(t_2)$ **vektorni olamiz. Agar** p **va** q **nuqtalarni tutashtiruvchi** γ **chiziq sirtning birorta parametrlangan qismida to`liq yotmasa, bu chiziqni chekli sondagi mayda-mayda bo'laklarga shunday qilib ajratamizki, har bir bo'lak sirtning birorta parametrlangan sohasida yotadi. Har bir bo'lakda yuqoridagidek parallel vektor maydonni aniqlasak,** γ **chiziq bo'ylab parallel vektor maydonni hosil qilamiz. Agar** $\vec{b} = X(t_2)$ **bo'lsa, u** $\vec{a}$ **vektorni** γ **bo'ylab** q **nuqtaga parallel ko'chirish natijasidir.**

Teorema-25. Sirtda yotuvchi ixtiyoriy chiziq bo'yicha urinma vektorlarni parallel ko'chirish operasiyasi skalyar ko'paytmani saqlovchi chiziqli izomorfizmdir.

Isbot. Regulyar Φ **sirtda** $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ **tenglama bilan** γ **chiziq berilib,** $\gamma(t_1) = p, \gamma(t_2) = q$ **bo'lsin. Agar** $\vec{a}, \vec{b} \in T_p\Phi$ **urinma vektorlarni** γ **bo'ylab** q **nuqtaga ko'chirish natijasida** $\vec{a}_1, \vec{b}_1$ **vektorlar hosil bo'lsa, bu chiziq bo'ylab parallel** X, Y **vektor maydonlar mavjud bo'lib,**

$$X(t_1) = \vec{a}, X(t_2) = \vec{a}_1, Y(t_1) = \vec{b}, Y(t_2) = \vec{b}_1$$

tengliklar bajariladi. Bu vektor maydonlar parallel bo'lganligi uchun $X + Y$ **vektor maydon va ixtiyoriy** λ **haqiqiy son uchun** λX **vektor maydon ham** γ **bo'ylab parallel bo'ladi, chunki**

$$\frac{DX}{dt} = 0, \ \frac{DY}{dt} = 0$$

tengliklardan

$$\frac{D(X+Y)}{dt}=0,\ \frac{D(\lambda X)}{dt}=0$$

munosabatlar kelib chiqadi. Bu munosabatlarni isbotlash uchun

$$\frac{d}{dt}(X,Y)=\left(\frac{DX}{dt},Y\right)+\left(X,\frac{DY}{dt}\right),\quad \frac{D(fX)}{dt}=\frac{df}{dt}X+f\frac{DX}{dt},\quad \frac{D(X+Y)}{dt}=\frac{DX}{dt}+\frac{DY}{dt}$$

formulalarni isbotlaymiz. Bu erda $f(t)$ **differensiallanuvchi funksiya,** fX **vektor maydon** $fX(t)=f(t)X(t)$ **qoida bo'yicha aniqlanadi.**

Bu formulalarni isbotlash uchun

$$\frac{d(X+Y)}{dt}=\frac{dX}{dt}+\frac{dY}{dt},\frac{d}{dt}(X,Y)=\left(\frac{dX}{dt},Y\right)+\left(X,\frac{dY}{dt}\right),\frac{d(fX)}{dt}=\frac{df}{dt}X+f\frac{dX}{dt}$$

tengliklardan foydalanamiz. Uchinchi formulani isbotlaylik:

$$\frac{D(fx)}{dt}=\left[\frac{d(fX)}{dt}\right]^{\tau}=\left[\frac{df}{dt}(t)X(t)\right]^{\tau}+\left[f(t)\frac{dX}{dt}(t)\right]^{\tau}=\frac{df}{dt}X+f\frac{Dx}{dt}$$

Ikkinchi formulaning isboti

$$\left(\frac{dX}{dt},Y\right)=\left(\left[\frac{dX}{dt}\right]^{\tau}+\left[\frac{dX}{dt}\right]^{n},Y\right)=\left(\frac{DX}{dt},Y\right),$$

$$\left(X,\frac{dY}{dt}\right)=\left(X,\left[\frac{dY}{dt}\right]^{\tau}+\left[\frac{dY}{dt}\right]^{n}\right)=\left(X,\frac{DY}{dt}\right)$$

tengliklardan kelib chiqadi. Endi teorema isbotiga qaytaylik. Quyidagi

$$(X+Y)(t_1)=X(t_1)+Y(t_1)=\vec{a}+\vec{b},$$
$$(X+Y)(t_2)=X(t_2)+Y(t_2)=\vec{a}_1+\vec{b}_1$$
$$\lambda X(t_1)=\lambda\vec{a}$$

munosabatlardan γ **chiziq bo'ylab parallel ko'chirish operasiyasi** $\gamma^{n}:T_p\Phi\to T_q\Phi$ **urinma fazolar orasidagi chiziqli izomorfizm ekanligi kelib chiqadi.**

Endi γ^{Π} **akslantirishda skalyar ko'paytmaning saqlanishini ko'rsataylik. Buning uchun**

$$\frac{d}{dt}(X(t),Y(t))=\left(\frac{DX(t)}{dt},Y(t)\right)+\left(X(t),\frac{DY(t)}{dt}\right)$$

tenglikdan har bir t **uchun**

$$\frac{DX(t)}{dt}=0,\frac{DY(t)}{dt}=0$$

bo'lganligi uchun $\frac{d}{dt}(X(t),Y(t)=\mathbf{0}$ **tenglikni hosil qilamiz.**

Demak, γ **chiziq bo'ylab** $\gamma(t_1)$ **nuqtadan** $\gamma(t_2)$ **nuqtaga harakat qilganimizda** $(X(t),Y(t))$ **skalyar ko'paytma o'zgarmaydi va**

$$(X(t_1),Y(t_1))=(X(t_2),Y(t_2))$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Regulyar $\hat{O}$ **sirtda yotuvchi va** $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ **tenglama bilan aniqlangan** γ **chiziq geodezik chiziq bo'lishi uchun uning** $\vec{\rho}'(t)$ **urinma vektori** γ **bo'ylab parallel bo'lishi zarur va yetarlidir.**

Isbot. Urinma vektorning kovariant differensialini hisoblasak

$$\frac{D\vec{\rho}'_{(t)}}{dt}=\left[\frac{d}{dt}\vec{\rho}'_{(t)}\right]^{\tau}=\left[\vec{\rho}''_{(t)}\right]^{\tau}$$

munosabatini hosil qilamiz. Demak, γ **geodezik chiziq bo'lishi uchun** $\frac{D\vec{\rho}'_{(t)}}{dt}=0$ **bo'lishi zarur va yetarlidir.**

Misol. Doiraviy silindr $Oxyz$ **dekart koordinatalar sistemasida** $x^2+y^2=R^2$ **tenglama bilan berilsa, unda yotuvchi**

$$x=R\cos t,y=R\sin t,z=Rt$$

tenglama bilan aniqlanuvchi vint chizig'i uchun uning

$$\vec{\rho}'_{(t)}=\{-R\sin t,R\cos t,R\}$$

urinma vektori shu chiziq bo'ylab paralleldir, chunki

$$\vec{\rho}''_{(t)}=\{-R\cos t,-R\sin t,0\}$$

vektor urinma tekislikka ortogonal va demak $\frac{D\vec{\rho}'_{(t)}}{dt}=\left[\frac{d\vec{\rho}''_{(t)}}{dt}\right]^{\tau}=0$**.**

Regulyar Φ_1 **va** Φ_2 **sirtlar uchun** $F:\Phi_1\to\Phi_2$ **differensiallanuvchi akslantirishlar berilib,** Φ_1 **sirtda** $\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ **tenglama bilan aniqlangan** γ **chiziq bo'ylab sirtga urinuvchi** $X(t)$ **vektor maydon berilgan bo'lsin. Bunda** Φ_2 **sirtda** γ **chiziqning obrazi** $F(\gamma)$ **silliq chiziq bo'ladi, va** $F(\gamma)$ **bo'ylab aniqlangan** $Y=dF(X)$ **silliq vektor maydon hosil bo'ladi.**

Teorema-26. Regulyar Φ_1,Φ_2 ***sirtlar uchun*** $F:\Phi_1\to\Phi_2$ ***izometrik akslantirish bo'lsa,***

$$dF\left(\frac{DX}{dt}\right)=\frac{DY}{dt}$$

tenglik o'rinlidir, ya'ni kovariant differensiallash izometrik akslantirishlarga nisbatan invariantdir.

Isbot. Ixtiyoriy t_0 **uchun**

$$dF_{(t_0)}\left(\frac{DX}{dt}(t_0)\right)=\frac{DY_{(t_0)}}{dt}$$

tenglikni isbotlash yetarlidir. Faraz qilaylik, $\gamma(t_0)$ **nuqta atrofida** Φ_1 **sirt** $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ **tenglama yordamida aniqlangan va** γ **chiziq** $u=u_1(t),\quad v=u_2(t)$ **tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Endi** Φ_2 **sirtni** $F(\gamma(t_0))=Q$ **nuqta atrofida** $\vec{a}=\vec{a}(u,v)$ **tenglama yordamida parametrlaymiz. Bu erda** $\vec{a}(u,v)$ **vektor** Φ_2 **sirtning** $F(P(u,v))$ **nuqtasi radius-vektoridir. Akslantirish** F **differensiallanuvchi bo'lganligi uchun** $\vec{a}(u,v)$ **differensiallanuvchi vektor funksiyadir. Bu parametrlashda** $F(\gamma)$ **chiziqni** $\vec{b}(t)=\vec{a}(u_1(t),u_2(t))$ **tenglama bilan parametrlasak,** Φ_2 **sirtdagi** $F(\gamma)$ **chiziqning ichki koordinatalaridagi tenglamalari** $u=u_1(t),v=u_2(t)$ **ko'rinishda bo'ladi. Bizga ma'lumki,** $dF(\gamma(t))(\vec{r}_{u_i}(t))=\vec{a}_{u_i}(t)$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Undan tashqari biz bilamizki,** F **izometrik akslantirish bo'lganligi uchun** Φ_1 **va** Φ_2 **sirtlarning yuqoridagi parametrlash usullari bilan aniqlangan birinchi kvadratik formalarining koeffisientlari mos ravishda teng bo'ladi; shuning uchun Kristofel' simvollari ham o'zaro teng bo'ladi. Endi**

$$\frac{DX(t)}{dt}=\sum_k\left\{\frac{dx^k}{dt}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du_j}{dt}\right\}\vec{r}_{u_k}$$

formuladan

$$\frac{DY}{dt}(t_0)=dF(\gamma(t_0))\left(\frac{DX}{dt}(t_0)\right)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Chunki $X(t)$ **urinma vektor uchun** $X(t)=\vec{r}_u x^1(t)+\vec{r}_v x^2(t)$ **tenglikdan** $Y(t)=\vec{a}_u x^1(t)+\vec{a}_v x^2(t)$ **tenglik kelib chiqadi.**

Natija. Teorema shartlari bajarilganda γ ***geodezik chiziq bo'lsa,*** $F(\gamma)$ ***ham geodezik chiziq bo'ladi va aksincha.***

§ 13. Gauss-Bonne teoremasi

Bu paragrafda sirtda berilgan yopiq chiziq bo'ylab birorta urinma vektorni parallel ko'chirib boshlang'ich nuqtaga qaytganimizda, vektorning boshlang'ich va oxirgi holatlari orasidagi burchak bilan sirtning to'liq egriligi orasidagi munosabatni topmoqchimiz.

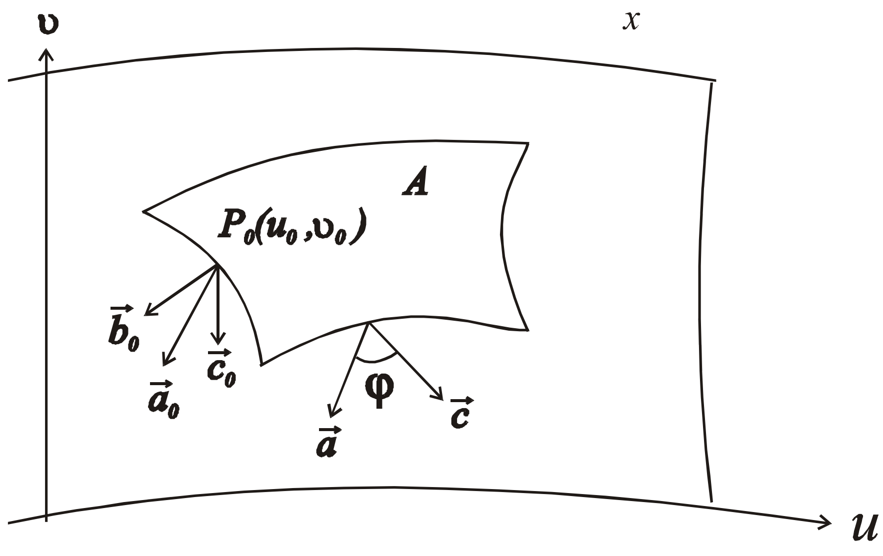
Faraz qilaylik, regulyar $\hat{O}$ sirt

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \qquad (u,v) \in G$$

tenglama yordamida parametrlangan bo'lsin. Fazoda

$$\vec{r}_u,\ \vec{r}_v,\ \vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$$

vektorlar yordamida oriyentasiyani aniqlab, sirtda $\vec{r}_u$ vektordan $\vec{r}_v$ vektorga burilishni musbat burilish deb hisoblaymiz.



Chizma-15

Sirtda chegarasi bir nechta $\gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_m$ silliq chiziqlardan iborat bo'lgan bir bog'lanishli A soha qarab, uning chegarasini Γ bilan belgilaylik. Bu sohaning chegarasida birorta $p(u_0, v_0)$ nuqta va sirtga urinma bitta $\vec{a}_0$ vektor berilgan bo'lsin. Musbat yo'nalish bo'yicha $\vec{a}_0$ vektorni Γ chiziq bo'ylab parallel ko'chirib yana $p(u_0, v_0)$ nuqtaga qaytsak, $\vec{a}_0$ vektorni parallel ko'chirish natijasida $\vec{b}_0$ vektorni hosil qilamiz. Bu vektorlar orasidagi burchakni $\Delta\varphi$ bilan

belgilab, uni hisoblashga kirishamiz. Buning uchun Φ sirtda birlik urinma $\vec{c}$ vektor maydonni qaraymiz va $\vec{c}_0 = \vec{c}(u_0, v_0)$ belgilash kiritib, φ_0 bilan $\vec{a}_0$ va $\vec{c}_0$ vektorlar orasidagi burchakni belgilaymiz. Sohaning chegarasi $\tilde{A}$ chiziqning har bir nuqtasida $\vec{a}$ va $\vec{c}$ vektorlar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak, $\varphi(u_0, v_0) = \varphi_0$ bo'ladi. Endi parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan $\vec{b}_0$ vektor bilan $\vec{c}_0$ orasidagi burchakni φ_1 deb belgilasak, $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi$ tenglikni hosil qilamiz. Chunki, biz musbat yo'nalish bo'yicha harakat qilganimiz uchun burchak ortib boradi.

Shuning uchun $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ tenglik o'rinli bo'lib, $\Delta\varphi$ sohaning chegarasini bir marta aylanib chiqishda hosil bo'lgan burchak orttirmasiga teng bo'lib, uni

$$\Delta\varphi = \oint d\varphi \qquad \textbf{(1)}$$

ko'rinishda yoza olamiz. Hisob kitob qulayligi uchun $|\vec{a}_0| = 1$ deb hisoblasak, Γ chiziqning hamma nuqtalarida $|\vec{a}| = 1$ tenglik o'rinli bo'ladi. Endi φ burchakning $d\varphi$ differensialini hisoblash uchun $(\vec{a}, \vec{c}) = \cos\varphi$ tenglikdan foydalanamiz. Bu tenglikni differensiallab

$$(d\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, d\vec{c}) = -\sin\varphi d\varphi$$

tenglikni hosil qilamiz. Urinma $\vec{a}$ vektor Γ chiziq bo'ylab, $\vec{a}_0$ vektorni parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lganligi uchun $d\vec{a}$ vektorning urinma tekislikka proeksiyasi nol' vektorga teng bo'ladi, demak, $(d\vec{a}, \vec{c}) = 0$ va $-\sin\varphi d\varphi = (\vec{a}, d\vec{c})$ tengliklar hosil bo'ladi.

Burchak $d\varphi$ differensialini hisoblashda yana bir narsani hisobga olishimiz zarur. Agar $\vec{a}_0$ vektorni boshqa birlik $\vec{g}_0$ vektor bilan almashtirib, α_0 bilan $\vec{a}_0, \vec{g}_0$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak, unda ularni $\tilde{A}$ chiziq bo'ylab parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan $\vec{a}, \vec{g}$ vektorlar orasidagi burchak ham α_0 ga teng bo'ladi. Shuning uchun, agar ψ bilan $\vec{c}, \vec{g}$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak, $\psi = \varphi \pm \alpha_0$ bo'ladi va demak d$\psi = d\varphi$ tenglik o'rinlidir.

Endi sirtning har bir nuqtasida $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan $\vec{p}$ vektorni shunday tanlaymizki, har bir nuqtada $\{\vec{c}, \vec{p}, \vec{n}\}$ vektorlar oilasi o'ng sistemani hosil qilsin.

Misol uchun, bunday vektorni hamma nuqtalarda $\vec{c}$ vektorni urinma tekislikda $+90^0$ ga burib hosil qilish mumkin. Soha chegarasiga tegishli q nuqtani olib, bu nuqtadagi $\vec{p}$ vektorni M_0 nuqtaga parallel ko'chirib $\vec{p}_q$ bilan belgilaymiz. Endi parallel ko'chirilishi lozim bo'lgan $\vec{a}_0$ vektor o'rniga $\vec{p}_q$ vektorni Γ chiziq bo'ylab parallel ko'chiramiz va natijada Γ ning hamma nuqtalarida berilgan vektorni $\vec{p}_\pi$ bilan belgilaymiz. Agar ψ burchak $\vec{c}$ va $\vec{p}_\pi$ orasidagi burchak bo'lsa, q nuqtada $\vec{p}_\pi$ vektor $\vec{p}$ vektor bilan ustma-ust tushganligi uchun bu nuqtada $\psi_q = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi va demak

$$d\psi_q = -(\vec{p}, d\vec{c}) \qquad \textbf{(2)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Biz q nuqtani ixtiyoriy tanlaganimiz uchun bu ishni hamma q nuqtalar uchun takrorlab, (2) tenglikni hosil qilamiz. Endi $d\varphi$ ning ixtiyoriy q nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun $d\varphi = d\psi_q$ tenglikdan foydalanamiz va natijada

$$d\varphi(q) = d\psi_q(q) = -(\vec{p}, d\vec{c}) \qquad \textbf{(3)}$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula biz uchun muhim ahamiyatga ega, chunki $(\vec{p}, d\vec{c})$ skalyar ko'paytmani hisoblay olamiz.

Endi biz $(\vec{p}, d\vec{c})$ skalyar ko'paytmani hisoblashga kirishamiz. Buning uchun $d\vec{c} = \vec{c}_u du + \vec{c}_v dv$ tenglikni va (3) tenglikni hisobga olib (1)tenglikni $\Delta\varphi = -\oint_\Gamma \{(\vec{p}, \vec{c}_u) du + (\vec{p}, c_v) dv\}$ ko'rinishda yozamiz.

Biz

$$\oint_\Gamma (Pdx + Qdy) = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

formuladan foydalanib

$$\Delta\varphi = \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(\vec{p}, c_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{P}, c_u) \right\} dudv = -\iint_A \{(\vec{c}_v, \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v)\} dudv$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \vec{n}\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ **va** $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = K[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ **tengliklardan** $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = K\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,\vec{n}$ **tenglikni hosil qilamiz. Bu erda** K **sirtning Gauss egriligidir. Bu tenglikdan** $(\vec{c}_v, \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v)$ **ifodani hisoblashda foydalanamiz. Buning uchun**

$$\vec{c}_u = c_1^1\vec{c} + c_1^2\vec{p} + c_1^3\vec{n},\ \vec{c}_v = c_2^1\vec{c} + c_2^2\vec{p} + c_2^3\vec{n}$$
$$\vec{p}_u = p_1^1\vec{c} + p_1^2 p + p_1^3\vec{n},\ \vec{p}_v = p_2^1\vec{c} + p_2^2\vec{p} + p_2^3\vec{n}$$

ifodalardan foydalanamiz. Lekin $\vec{c}$ **va** $\vec{p}$ **birlik vektorlar bo'lgani uchun**

$$(\vec{c}, \vec{c}_u) = (\vec{c}, \vec{c}_v) = 0, (\vec{p}, \vec{p}_u) = (\vec{p}, \vec{p}_v) = 0$$

tengliklar o'rinli. Demak, $c_1^1 = c_2^1 = p_1^1 = p_2^2 = 0$ **tengliklar o'rinli bo'ladi. Xullas**

$$\vec{c}_u = c_1^2 p + c_1^3\vec{n}\quad \vec{c}_v = c_2^2\vec{p} + c_2^3\vec{n}$$
$$\vec{p}_u = p_1^1\vec{c} + p_2^3\vec{n},\ \vec{p}_v = p_2^1\vec{c} + p_2^3\vec{n}$$

tengliklarni hisobga olib

$$(\vec{c}_v . \vec{p}_u) - (\vec{c}_u, \vec{p}_v) = c_2^3 p_2^3 - c_1^3 p_2^3$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi

$$\vec{n}_u = N_1^1\vec{c} + N_1^2\vec{p}, \vec{n}_v = N_2^1 c + N_2^2\vec{p}$$

yoyilmalardan

$$[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = N_1^1 N_2^2[\vec{c}, \vec{p}] + N_1^2 N_2^1[\vec{p}, \vec{c}] = N_1^1 N_2^2\vec{n} - N_1^2 N_2^1\vec{n} =$$
$$= (N_1^1 N_2^2 - N_1^2 N_2^1)\vec{n}$$

tenglikni yozish mumkin. Lekin $\vec{n} = [\vec{c}, \vec{p}]$ **va**

$$\vec{n}_u = [\vec{c}_u, \vec{p}] + [\vec{c}, \vec{p}_u]\quad \vec{n}_v = [\vec{c}_v, \vec{p}] + [\vec{c}, \vec{p}_v]$$

tenglikni hisobga olib, $[\vec{n}_u, \vec{n}_v] = (c_1^3 p_2^3 - c_2^3 p_2^3)\vec{n}$ **munosabatni hosil qilamiz. Demak,**

$$(c_1^2 p_2^3 - c_1^3 p_2^3)\vec{n} = K\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,\vec{n}$$

tenglik va natijada esa

$$c_1^2 p_2^3 - c_1^3 p_2^3 = K\sqrt{EG - F^2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shunda

$$\Delta\varphi = \iint K\sqrt{EG - F^2}\,dudv \quad (4)$$

formulani hosil qilamiz.

Endi yuqoridagi (4) formuladan foydalanib Gauss-Bonne teoremasini isbotlaylik. Buning uchun A **sohani chegaralovchi** $\tilde{A}$ **chiziq bir nechta silliq chiziqlardan iborat ekanligini eslatib o'tamiz. Demak, bu chiziqning urinma vektori** $\vec{\tau}$ **aniqlangan bo'lib,** $\tilde{A}$ **chiziqni aylanib chiqish davomida u silliq chiziqlarning tutash nuqtalarida funksiya sifatida uzilishga ega bo'ladi, ya'ni uning yo'nalishi sakrab o'zgaradi. Sohaning chegarasi** $\tilde{A}$ **chiziq bo'ylab parallel ko'chirilayotgan** $\bar{a}$ **vektor bilan** $\vec{\tau}$ **vektor orasidagi burchakni** ψ **bilan,** $\vec{c}$ **vektor va** $\bar{a}$ **vektor orasidagi burchakni yuqoridagidek** φ **bilan belgilasak,** $\vec{c}$ **va** $\vec{\tau}$ **vektorlar orasidagi burchak** μ **uchun** $\mu = \varphi + \psi$ **tenglik o'rinli bo'ladi. Biz** $\tilde{A}$ **chiziqni bir marta aylanib chiqsak,**

$$\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(u_0, v_0), \vec{c}_0 = \vec{c}(u_0, v_0)$$

vektorlar yana o'z vaziyatiga qaytadi. Demak, μ **burchakning orttirmasi** $2\pi k$ **ga teng bo'lishi kerak. Aslida esa bu orttirma** 2π **ga tengdir. Chunki** A **soha doiraga va chegarasi esa aylanaga gomeomorfdir.**

Demak, $\Delta\mu = 2\pi$ **yoki** $\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi$ **bo'ladi. Parallel ko'chirilayotgan** $\bar{a}$ **vektor va chiziqning urinma vektori** $\vec{\tau}$ **orasidagi burchak orttirmasi uchun**

$$\Delta\psi = \oint d\psi + \sum_{i=1}^{n} \Delta\psi_i$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu erda $\Delta\psi_i$ **-** $i-$ **chi tutashish nuqtasidagi burchak orttirmacidir. Endi** $d\psi$ **ni hisoblash uchun** $d\psi = -(\vec{b}, d\vec{\tau})$ **tenglikdan foydalanamiz. Bu erda** $\vec{b}$ **vektor sifatida** $\vec{\tau}$ **ni sirtning urinma tekisligida** $+90^0$ **ga burib hosil qilingan vektorni qabul qilamiz. Endi** $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{m}$ **tenglikni hisobga olib** $\frac{d\psi}{ds} = k(\vec{b}, \vec{m})$ **formulani hosil qilamiz. Bu yerda** $\vec{m}$ **chiziqning bosh normalidir. Shunda** $(\vec{b}, \vec{m})$ **skalyar ko'paytma** $\vec{m} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$ **vektorning urinma tekislikdagi proeksiyasi ekanligidan va chiziqning egriligi** $\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|$ **ga tengligidan** $\frac{d\psi}{ds} = k_g$ **tenglikni hosil qilamiz.**

Bu erda k_g-chiziqning geodezik egriligidir. Endi bularni hisobga olib $\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi$ tenglikni

$$\iint_A K\sqrt{EG-F^2}dudv + \sum_{i=1}^{n}\oint_{\gamma_i} K_g ds + \sum_{i=1}^{n}\Delta\psi_i = 2\pi \qquad (5)$$

ko'rinishda yozamiz. Hosil bo'lgan formula Gauss-Bonne teoreması deb ataladi. Endi

$$\iint_A \sqrt{EG-F^2}dudv$$

integral A sohaning yuzasiga teng ekanligini ko'rsatamiz.

Buning uchun avvalo soha yuzasi tushunchasini kiritamiz. Sirtdagi A sohani kichkina sohachalarga ajratib, har bir kichkina sohachaning chegarasi yopiq chiziq bo'lib, bu yopiq chiziq chekli sondagi silliq chiziqlardan iborat bo'lishini talab qilamiz. Bu kichkina sohachalarni a bilan belgilaylik. Endi har bir a sohadan bittadan P_a nuqta olib, shu nuqtadan sirtga urinma tekislik o'tkazamiz. Kichkina a sohachalar shunchalik kichik bo'lishi kerakki, a sohani P_a nuqtadan o'tadigan urinma tekislikka proeksiyalash o'zaro bir qiymatli moslik bo'lishi kerak. Urinma tekislikdagi a sohaning proyeksiyasini a_n bilan uning yuzasini $S(a_n)$ bilan belgilaymiz.

$\sum_a S(a_n)$ **ifodaning sohalar soni cheksizlikka intilgandagi limitini A sohaning Yuzasi deb ataymiz va $S(A)$ bilan belgilaymiz. Endi $S(A)$ ni hisoblashga kirishamiz. Buning uchun har bir a uchun $S(a_n)$ni hisoblaymiz. Agar P_a nuqtani koordinata boshi sifatida qabul qilib, Z o'qini shu nuqtadagi normal bo'yicha yo'naltirsak, XY tekisligi P_a nuqtadagi urinma tekislik bilan ustma-ust tushadi. Bu koordinatalar sistemasida $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ tengliklar a_n sohacha bilan G sohadagi birorta $\tilde{a}_n$ sohacha o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi. Agar**

$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$$

bo'lsa,

$$z_u(u_0,v_0)=0, z_v(u_0,v_0)=0$$

tengliklar o`rinli bo'ladi. Bu erda u_0,v_0 **sirtda** P_a **nuqtaning ichki koordinatalaridir. Bundan tashqari,** $[r_u,\vec{r}_v]\neq 0$ **va**

$$[r_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0)]=\left\{0,0,\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right\}$$

tengliklardan

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}\neq 0$$

munosabat kelib chiqadi. Birinchi tartibli xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

determinant $p_a(u_0,v_0)$ **nuqtaga yetarli yaqin nuqtalarda ham noldan farqli bo'ladi. Faraz qilaylik** $\sigma_a>0$ **son uchun** $|u-u_0|<\sigma_a, |v-v_0|<\sigma_a$ **tengsizliklar bajarilganda yuqoridagi determinant noldan farqli bo'lib, sirtning**

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \qquad (u,v)\in\{(u,v):|u-u_0|<\sigma, |v-v_0|<\sigma\} \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan qismi a **sohani o'z ichiga olsin. Shunda**

$$\begin{cases} x=x(u,v),\ x(u_0,v_0)=0 \\ y=y(u,v),\ x(u_0,v_0)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan oshkormas funksiya haqidagi teoremaga asosan differensiallanuvchi $u=u(x,y), v=v(x,y)$ **funksiyalar mavjud bo'ladi. Shunda** a **sohani urinma tekislikka proeksiyalash** $(x,y,z)\to(x,y)$ **formula orqali ifodalangani uchun** $u=u(x,y), v=v(x,y)$ **funksiyalar** a_n **sohachani** G **sohadagi** $\tilde{a}_n$ **sohachaga gomeomorf akslantiradi. Demak,** a_n **sohacha yuzasini hisoblash uchun karrali integraldan foydalanib** $S(a_n)=\iint\limits_{a_n}dxdy$ **ko'rinishda yozsak, uni** $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ **almashtirishdan keyin**

$$S(a_n)=\iint\limits_{\tilde{a}_n}abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}dudv$$

ko'rinishda yoza olamiz.

Bu yerda

$$abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

bilan $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ **determinantning absolyut qiymati belgilangan. Endi** P_a **nuqtada**

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'lgani va $|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|$ **funksiyaning uzluksizligidan har bir** $(u,v) \in a_n$ **nuqta uchun**

$$abs\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| + \varepsilon_a(u,v)$$

tenglikni yoza olamiz. Bu erda $\varepsilon_a(u,v)$ **etarli kichik miqdor bo'lib,** a **kichiklashganda u nolga intiladi.**

Yuqoridagilarni hisobga olib

$$\sum_a S(a_n) = \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \left(|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| + \varepsilon_a(u,v)\right) dudv = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv + \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u,v) dudv$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $\tilde{A}$ **bilan** G **sohadagi** A **sohaga mos keluvchi soha belgilangan.**

Shunday qilib,

$$\sum_a S(a_n) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv + \sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u,v) dudv \qquad \textbf{(6)}$$

tenglikni hosil qildik. Bu tenglikda a **sohachalarni etarli kichik qilish hisobiga birorta** $\varepsilon > 0$ **uchun** $\varepsilon_a(u,v) < \varepsilon$ **tengsizlikning bajarilishini ta'minlaymiz. Natijada**

$$\left|\sum_a \iint_{\tilde{a}_n} \varepsilon_a(u,v) dudv\right| < \varepsilon \sum_a S(\tilde{a}_n) = \varepsilon S(\tilde{A})$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Endi (6) tenglikda A **sohachalar sonini cheksizlikka intiltirib limitga o'sak**

$$\lim \sum_a S(\tilde{a}_n) = \iint_{\tilde{A}} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, dudv$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak,

$$S(A)=\iint\limits_{\tilde{A}}|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|\,dudv$$

formulani hosil qildik. Bu erda

$$|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|=\sqrt{EG-F^2}$$

tenglikdan foydalansak

$$S(A)=\iint\limits_{\tilde{A}}\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

formulani hosil qilamiz. Endi

$$ds=\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

belgilash kirisak Gauss-Bonne teoremasini

$$\iint\limits_{\tilde{A}}Kds+\sum_{i=1}^{n}\oint\limits_{\gamma_i}K_g ds+\sum_{i=1}^{n}\Delta\psi_i=2\pi$$

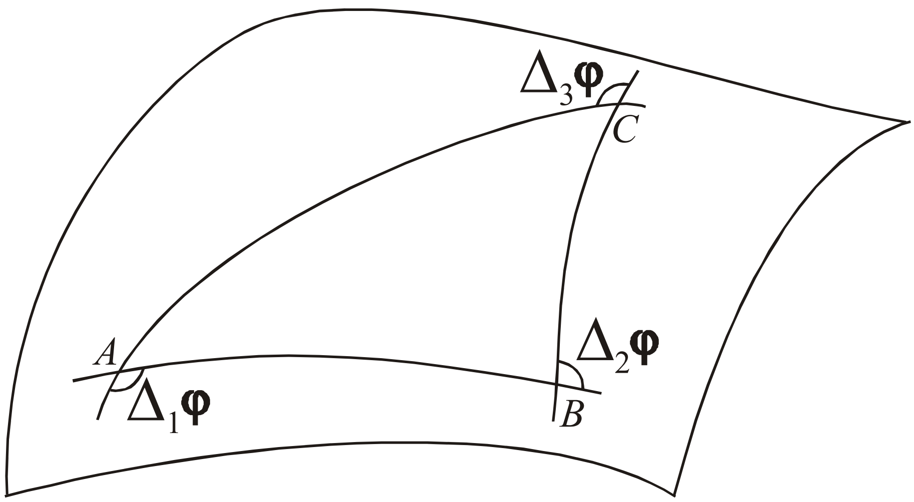
ko'rinishda yozib olish mumkin. Endi Gauss-Bonne teoremasini A soha uchta $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ geodezik chiziqlar bilan chegaralangan holni ko'raylik. Geodezik chiziqlar uchun $K_g=0$ bo'lganligidan Gauss-Bonne teoremasiga ko'ra

$$\iint\limits_{\tilde{A}}Kds+\sum_{i=1}^{3}\Delta\psi_i=2\pi$$

ko'rinishga keladi. Bu holda A soha geodezik uchburchak bo'lib, uning ichki burchaklari α_i lar uchun $\alpha_i=\pi-\Delta\psi_i$ o'rinli bo'ladi. Shuning uchun yuqoridagi formula

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi+\iint\limits_{\tilde{A}}Kds$$

ko'rinishga keladi. Bu erda $K=0$ bo'lsa (misol uchun $\hat{O}$ sirt tekislik bo'lsa) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$ tenglikni hosil qilamiz.



Chizma-16

§ 14. Egriligi o'zgarmas sirtlar

Sirtning Gauss egriligi hamma nuqtalarda bitta o'zgarmas songa teng bo'lsa, bunday sirtni egriligi o'zgarmas sirt deb ataymiz. Misol uchun tekislikning hamma nuqtalarida Gauss egriligi nolga teng bo'ladi.

Biz Gauss egriligi o'zgarmas sirtlarda Gauss-Bonne teoremasini geodezik uchburchak uchun yozsak

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + K\,S(A)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $S(A)$-geodezik uchburchak yuzasi, K -sirtning Gauss egriligi. Tekislik uchun $K = 0$ va demak $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0$. Uch o'chamli evklid fazosida $Oxyz$ - dekart koordinatalari kiritilsa, sferani

$$S_R^2 = \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

to'plam sifatida aniqlaymiz. Sferaning Gauss egriligi o'zgarmas va hamma nuqtalarda $K = \dfrac{1}{R^2}$ bo'lganligi uchun sferada geodezik uchburchak ichki burchaklarning yig'indisi 180^0 dan katta bo'ladi.

Endi Gauss egriligi o'zgarmas manfiy son bo'lgan sirtga misol keltiraylik. Buning uchun Oxz **tekisligida**

$$\begin{cases} x = R\sin u \\ z = R(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u), \dfrac{\pi}{2} < u < \pi, R > 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

tenglama yordamida parametrlangan egri chiziqni Oz **o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtni qaraylik.**

Bu sirtning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases} x = R\sin u\cos v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u) \end{cases} \quad \begin{matrix} \dfrac{\pi}{2} < u < \pi \\ 0 < v < 2\pi \end{matrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. Birinchi va ikkinchi kvadratik formalar koeffisientlarini hisoblash natijasida

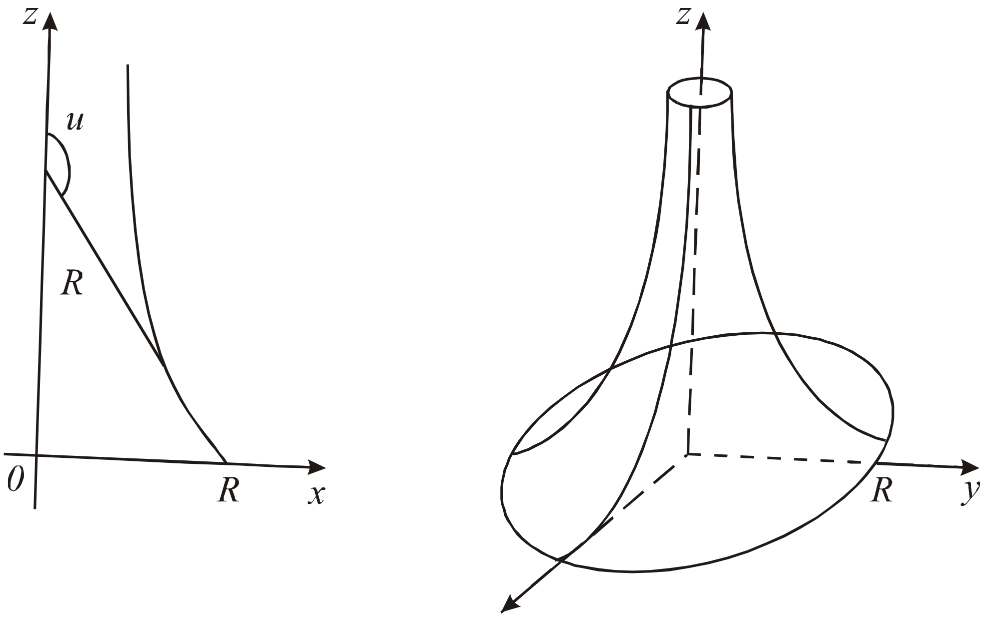
$E = R^2ctg^2u,\ F = 0,\ G = R^2\sin^2 u,\ L = -Rctgu, M = 0,\ N = Rctgu\sin^2 u$ **ifodalarni topamiz. Gauss egriligini**

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

formuladan foydalanib hisoblasak

$$K = \frac{-R^2ctg^2u\sin^2 u}{R^2ctg^2uR^2\sin^2 u} = -\frac{1}{R^2}$$

natijani olamiz. Bu sirt psevdosfera yoki Bel'trami sirti deb ataladi. Gauss-Bonne teoremasiga ko'ra bu sirtda geodezik uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^0 **dan kichik bo'ladi.**



Chizma-17

Endi regulyar Ô **sirtning yarim geodezik parametrlash usuli** $\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in G$ **tenglama bilan berilgan bo'lsin. Bu holda** $E = 1, F = 0$ **bo'lishini bilamiz. Demak bu holda Gauss egriligini** G **orqali ifodalash mumkin. Gauss egriligini** G **orqali ifodalash uchun** Γ_{ij}^{k} **Kristoffel simvollarini hisoblaymiz. Bu holda**

$$\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{11}^{2} = \Gamma_{12}^{1} = 0,\ \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\ \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Gauss tenglamasini g_{ms} **ga ko'paytirib m indeks bo'yicha yig'sak**

$$\sum_{m} g_{ms}\left(\frac{\partial}{\partial u^{k}}\Gamma_{ij}^{m} - \frac{\partial}{\partial u^{j}}\Gamma_{ik}^{m} + \sum_{l}\Gamma_{ij}^{l}\Gamma_{lk}^{m} - \sum_{l}\Gamma_{ik}^{l}\Gamma_{lj}^{m}\right) = \sum_{l,m}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning o'ng tomonini

$$\sum_{l,m}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})g^{lm}g_{ms} = \sum_{l}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})\sigma_{s}^{l} =$$

$$\sum_{l}(q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl})\sigma_{s}^{l} = q_{ij}q_{ks} - q_{ik}q_{js}$$

ko'rinishga olib kelib, $i = j = 1, k = s = 2$ **qo'ysak yuqoridagi tenglikdan**

$$q_{11}q_{22}-q_{12}^2=\sum_m g_{m2}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11}^m-\frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{12}^m+\sum_l \Gamma_{11}^l\Gamma_{l2}^m-\sum_l \Gamma_{12}^l\Gamma_{l1}^m\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $u^1=u, u^2=v, \{g_{ij}\}$ **birinchi kvadratik forma matrisasi,** $\{q_{ij}\}$**-ikkinchi kvadratik forma matrisasidir. Endi**

$$K=\frac{q_{11}q_{22}-q_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$

formulada $g_{11}=1, g_{12}=0, g_{22}=G$ **va** $q_{11}q_{22}-q_{12}^2$ **uchun Yuqoridagi formuladan foydalansak**

$$K=\frac{1}{4G^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$$

formulani hosil qilamiz.

Bundan tashqari

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=\frac{1}{2\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}$$

va

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=\frac{1}{2\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}-\frac{1}{4\sqrt{G^3}}\cdot\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2$$

tengliklarni hisobga olsak

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

formulani hosil qilamiz. Bu tenglikni

$$\sqrt{G}K+\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Biz yarim geodezik parametrlash usulini kiritish uchun $u^1=0$ **tenglama bilan aniqlangan chiziqqa ortogonal geodezik chiziqlarni** $(v=const)$ **kiritgan edik. Agar biz** $u_1=0$ **chiziqning yoy uzunligi yordamida parametrlangan geodezik chiziq bo'lishini talab qilsak**

$$1=\sqrt{(\vec{r}_v(0,v),\vec{r}_v(0,v))}=\sqrt{G(0,v)}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan tashqari $u_1=0, u_2=t$ **ifodalarni geodezik chiziq tenglamalariga qo'yib**

$$\Gamma_{22}^1(0,v)=0,\ \Gamma_{22}^2(0,v)=0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Demak,

$$\frac{\partial G(0,v)}{\partial u}=0$$

yoki

$$\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{G(0,v)}=0.$$

Endi K ni o'zgarmas songa teng deb hisoblab,

$$\sqrt{G}K+\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}=0$$

tenglikni $\sqrt{G}$ ga nisbatan xususiy hosilali differensial tenglama sifatida qaraymiz. Boshlang'ich shartlar

$$\sqrt{G(0,v)}=1,\ \frac{\partial\sqrt{G(0,v)}}{\partial u}=0$$

tengliklardan iborat bo'ladi. Bu tenglamada $K=0$ bo'lsa, $G(u,v)=1$ bo'lib, sirt tekislikka lokal izometrik bo'ladi. Agar $K>0$ bo'lsa, bu tenglama echimi $\sqrt{G(u,v)}=\cos\sqrt{K}u$ ko'rinishda bo'ladi. Demak bu holda

$$E=1, F=0,\ G(u,v)=\cos^2\sqrt{K}u$$

bo'ladi.

Agar $K<0$ bo'lsa, bu tenglama yechimi $\sqrt{G}=ch\sqrt{-K}u$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema. Regulyar Φ sirt o'zgarmas K Gausc egriligiga ega bo'lsa:

1) $K=0$ bo'lganda u tekislikka lokal izometrikdir.

2) $K>0$ bo'lganda u radiusi $\frac{1}{\sqrt{K}}$ ga teng bo'lgan sferaga lokal izometrikdir.

3) $K<0$ bo'lsa, sirt parametri $l=\frac{1}{\sqrt{-K}}$ ga teng bo'lgan Bel'trami sirtiga lokal izometrikdir.

Isbot. Regulyar Φ_1 va Φ_2 sirtlar o'zgarmas K soniga teng bo'lgan Gauss egriligiga ega bo'lsin. Bu sirtlarga tegishli p_1 va p_2 nuqtalardan o'tuvchi γ_1 va γ_2 geodezik chiziqlarni qaraylik. Bu nuqtalar atrofida Φ_1 va Φ_2 sirtlarning regulyar parametrlash usullari mos ravishda

$$\vec{r}=\vec{r}^{\,1}(u,v)$$
$$\vec{r}=\vec{r}^{\,2}(u,v),\ (u,v)\in G$$

tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Geodezik chiziqlar mos ravishda

$$\gamma_1 : \begin{cases} u = u^1(s) \\ v = v^1(s) \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} u = u^2(s) \\ v = v^2(s) \end{cases}$$

tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin.

Bu erda aniqlik uchun $P_1(u_0^1, v_0^1),\ P_2(u_0^2, v_0^2)$ **nuqtalar uchun**

$$u_0^1 = u^1(0) = 0,\ v_0^1 = v^1(0) = 0,\ u_0^2 = u^2(0) = 0,\ v_0^2 = v^2(0) = 0$$

tengliklar o'rinli deb hisoblaymiz. Demak,

$$\gamma_1(0) = p_1,\ \gamma_2(0) = p_2$$

bo'ladi. Bu chiziqlarda parametr sifatida yoy uzunligini olib va bu chiziqlarga ortogonal geodezik chiziqlar oilasini qurib, $\gamma_1(0) = p_1$ **va** $\gamma_2(0) = p_2$ **nuqtalar atrofida yarim geodezik parametrlash usullarini aniqlaymiz (22-teoremaga qarang). Endi**

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}^{\,1}(w,s)$$
$$\vec{\rho} = \vec{\rho}^{\,2}(w,s)\ \ (w,s) \in G$$

tenglamalar mos ravishda p_1 **va** p_2 **nuqta atrofidagi yarim geodezik parametrlash usullari bo'lsin. Shunda** $w = 0$ **tenglama mos ravishda** Φ_1 **va** Φ_2 **sirtlarda** γ_1 **va** γ_2 **chiziqlarni aniqlaydi va birinchi kvadratik formalar koeffisientlari uchun** $E^1 = E^2 = 1,\ F^1 = F^2 = 0$ **tengliklar o'rinli bo'ladi.** G^1, G^2 **koeffisientlar esa**

$$\sqrt{G}K + \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

tenglamaning

$$\sqrt{G(o,s)} = 1 \quad \frac{\partial \sqrt{G(o,s)}}{\partial u} = 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi echimlari bo'ladi. Yechimning yagonaligiga ko'ra $G^1(w,s) = G^2(w,s)$ **tenglik o'rinli bo'ladi.**

Demak, 9-teoremaga ko'ra $p(u,v) \to q(u,v)$ **formula bilan aniqlangan** F **akslantirish** p_1 **nuqta atrofini** p_2 **nuqta atrofiga izometrik akslantiradi. Demak, agar birorta** Φ **sirtning Gauss egriligi nolga teng bo'lsa, unga tegishli ixtiyoriy**

nuqtaning birorta atrofi tekislikdagi birorta sohaga izometrik bo'ladi. Agar Φ **sirt uchun** $K > 0$ $(K < 0)$ **bo'lsa, unga tegishli har bir nuqtaning birorta atrofi sferaning (mos ravishda psevdosferaning) qismiga izometrik bo'ladi.**

III-bobga doir mashq va masalalar

1. Elliptik paraboloid

$$z = x^2 + y^2 \quad (x, y) \in R^2$$

tenglama bilan berilgan bo`lsa,

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1}{u^2 + v^2} \quad \textbf{(1)}$$

va

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u^2 \quad \textbf{(2)}$$

tenglamalar sistemasi paraboloid uchun har xil parametrlash usullarini beradi. Bu parametrlash usullaridan birinchisi paraboloidni $M(0,0,0)$ nuqta atrofida aniqlamaydi, ammo boshqa nuqtalar uchun regulyar parametrlash usulini beradi. Ikkinchi parametrlash usuli paraboloid uchun uning hamma nuqtalari atrofida regulyar parametrlash usulidir.

2. Tekislik $x = u\cos v, \quad y = \sin v, \quad z = 0$ tenglamalar bilan parametrlangan bo`lsa, uning koordinata chiziqlarini aniqlang.

Yechish: Tekislikda (u_0, v_0) nuqta olsak, bu nuqtadan chiquvchi koordinata chiziqlaridan birinchisi $u = t, \quad v = v_0$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

Bu chiziqning fazodagi tenglamalari

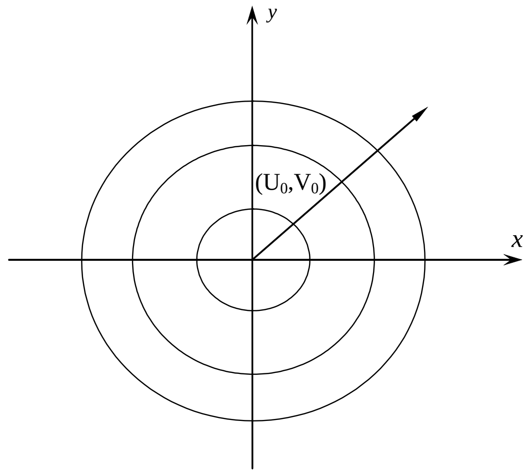
$$\begin{cases} x = t\cos v_0, \\ y = t\sin v_0, \\ z = 0 \end{cases}$$

ko`rinishda bo`ladi. Berilgan (u_0, v_0) nuqtadan chiquvchi ikkinchi koordinata chizig'i $u = u_0, \quad v = t$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

Demak, uning fazodagi tenglamalari

$$\begin{cases} x = u_0 \cos t \\ y = u_0 \sin t, \\ z = 0 \end{cases}$$

ko`rinishda bo`ladi. Birinchi koordinata chizig'i yarim to`g'ri chiziq (nur), ikkinchi koordinata chizig'i esa radiusi u_0 ga teng aylanadir (chizma-18).



Chizma-18

2. Sirt $z = x^3 + y^3$ **funksiyaning grafigidan iborat. Uning** $M(1;2;9)$ **nuqtadagi urinma tekisligi, normal tenglamalari tuzilsin, birinchi va ikkinchi kvadratik formalar topilsin.**

Echish: Avvalo sirtning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$

ko`rinishda yozib, $M(u=1; v=2)$ **nuqtadagi** x, y, z **funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz:**

$$x_u = 1, \quad y_u = 0, \quad z_u = 3, \quad x_v = 0, \quad y_v = 1, \quad z_v = 12, \quad x_{uu} = 0, \quad y_{uu} = 0, \quad z_{uu} = 6,$$

$$x_{vv} = 0, \quad y_{vv} = 0, \quad z_{vv} = 12, \quad x_{uv} = 0, \quad z_{uv} = 0.$$

1) Urinma tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 0 \ \textbf{yoki} \ 3x + 12y - z - 18 = 0$$

2) Normal tenglamasi

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$$

3) Birinchi kvadratik forma.

$$g_{11}(1;2)=E(1;2)=10,\quad g_{12}(1;2)=F(1;2)=36,\quad g_{22}(1;2)=G(1;2)=145.$$

Demak, birinchi kvadratik forma

$$I=10du^2+72dudv+145dv^2$$

ko`rinishda bo`ladi.

4) Ikkinchi kvadratik formani topish uchun birlik normal

$$\vec{n}=\left\{\frac{-3}{\sqrt{154}}:\frac{-12}{\sqrt{154}}:\frac{1}{\sqrt{145}}\right\}$$

vektorni topamiz. Endi

$$q_{11}(1;2)=L(1;2)=\left(\vec{r}_{uu},\vec{n}\right)=\frac{6}{\sqrt{154}},\quad q_{11}(1;2)=M(1;2)=\left(\vec{r}_{uu},\vec{n}\right)=0,$$

$$q_{11}(1;2)=N(1;2)=\left(\vec{r}_{uu},\vec{n}\right)=\frac{12}{\sqrt{154}}.$$

Ikkinchi forma

$$II=\frac{6}{\sqrt{154}}du^2+\frac{12}{\sqrt{154}}dv^2$$

ko`rinishda bo`ladi.

3. Sirt $z=xy$ **funksiyaning grafigidan iborat bo`lsa, uning** $M(1;1;1)$ **nuqtasidagi bosh egriliklari hisoblansin.**

Buning uchun birinchi va ikkinchi kvadratik formalar matrisalarini topamiz. Sirtning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases}x=u\\ y=v\\ z=uv\end{cases}$$

ko`rinishda bo`lib, M **nuqtaning ichki koordinatalari** $u=1,\quad v=1$ **bo`ladi. Demak,**

$$x_u=1,\quad y_u=0,\quad z_u=1,\quad x_v=0,\quad y_v=1,\quad z_v=1,\quad x_{uu}=0,\quad y_{uu}=0,\quad z_{uu}=0,$$

$$x_{vv}=0,\quad y_{vv}=0,\quad z_{vv}=0,\quad x_{uv}=0,\quad y_{uv}=0,\quad z_{uv}=1.$$

$$q_{11}E(1;1)=2,\quad q_{12}=F(1;1)=1,\quad q_{22}=G(1;1)=2,$$

$$\vec{r}_u=\{1;0;1\}\quad \vec{r}_v=\{0;1;1\}\quad \vec{n}=\left\{\frac{-1}{\sqrt{3}}:\frac{-1}{\sqrt{3}}:\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$q_{11}=L(1;1)=(\vec{r}_{uu},\vec{n})=0,\quad q_{12}=M(1;1)=(\vec{r}_{uu},\vec{n})=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad q_{22}=0$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Endi bosh egriliklarni topish uchun $\det(B-\lambda A)=0$ **tenglamani yechamiz. Bu yerda**

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad B-\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}.$$

Demak, $\det(B-\lambda A)=0$ **tenglama**

$$\begin{vmatrix}-2\lambda&\frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda\\\frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda&-2\lambda\end{vmatrix}=4\lambda^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\lambda+\frac{1}{\sqrt{3}}-\lambda\right)\left(2\lambda-\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda\right)0\quad \lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \lambda_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

4. Sirtning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases}x=u\sin v\\y=u\cos v\\z=v\end{cases}$$

ko`rinishida bo`lsa, unda $u=0,\quad u=shv,\quad v=t,\quad 0\le t\le t_0$ **chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak Yuzini toping.**

Yechish: Avvalo birinchi kvadratik forma matrisasini topamiz.

$$x_u=\sin v,\quad y_u=\cos v,\quad z_u=0,\quad x_v=u\cos v,\quad y_v=-u\sin v,\quad z_v=1,$$

$$q_{11}=E=1,\quad q_{12}=F=0,\quad q_{22}=G=1+u^{2,}\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1+u^2\end{pmatrix}$$

$$\det A=1+u^2.$$

Biz bilamizki, yuza

$$S=\iint_G\sqrt{\det A}\,dudv$$

formula bilan hisoblanadi. Bu yerda G **- berilgan uchburchak. Integral hisoblash uchun** $(u;v)\in G$ **nuqtaning**

$$0\le u\le shv, 0\le v\le v_0,\quad v_0=t_0\,.$$

O'zgarish chegaralarini hisobga olib,

$S=\int\limits_0^{v_0}dv\int\limits_0^{shv}\sqrt{1+u^2}du$ **tenglikni hosil qilamiz.**

Bu integralda $u=shw$ **formula bilan o`zgaruvchini almashtiramiz:**

$$\int\limits_0^{shv}\sqrt{1+u^2}du=\int\limits_0^{v}ch^2wdw=\int\left(\frac{e^w+e^{-w}}{2}\right)^2dw=\int\limits_0^{v}\frac{e^{2w}+2+e^{-2w}}{4}dw=$$

$$=\left(\frac{e^{2w}}{8}-\frac{e^{-2w}}{8}+\frac{w}{2}\right)\Big|_0^v=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2v}-e^{-2v}}{2}\right)+2v=\frac{1}{4}sh2v+\frac{v}{2}.$$

Endi $\int\limits_0^{v_0}\left(\frac{1}{4}sh2v+\frac{1}{2}v\right)dv=\frac{1}{8}ch2v+\frac{1}{4}v^2\Bigg|_0^{v_0}=\frac{1}{8}ch2v_0+\frac{1}{4}v_0^2-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\left\{\frac{ch2v_0-1}{2}+v_0^2\right\}=$

$=\frac{1}{4}\left\{\frac{e^{2v_0}+e^{-2v_0}-2}{4}+v_0^2\right\}=\frac{1}{4}\left(sh^2v_0+v_0^2\right)$. **Demak,** $S=\frac{1}{4}\left(sh^2v_0+v_0^2\right)$

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1. Yo`naltiruvchi chizig'i** $\vec{p}=\vec{p}(u)$ **tenglama bilan berilgan, yasovchilari** $\vec{e}$ **vektorga parallel bo`lgan silindrning parametrik tenglamalari tuzilsin.

2. Fazoda $x=ach\left(\frac{u}{a}\right),\quad y=0,\quad z=u$ **tenglamalar bilan berilgan chiziqning** Oz **o`qi atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirtning (katenoid) tenglamalarini yozing.**

3. Giperbolik paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

kanonik tenglama bilan berilgan bo`lsa, uning shunday parametrik teng-lamalarini yozingki, koordinata chiziqlari yasovchilardan iborat bo`lsin.

4. Sfera

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=a\sin u\cos v,\quad z=a\sin v$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan bo`lsa, uning birinchi kvadratik formasini toping.

5. Elliptik paraboloid

$$x=\sqrt{p}v\cos u,\quad y=\sqrt{q}v\sin u,\quad z=\frac{v^2}{2}$$

tenglamalar bilan berilgan, uning birinchi kvadratik formasini toping.

6. Birinchi kvadratik formasi $I=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ **ko`rinishda bo`lgan sirtda** $u=\frac{1}{2}av^2,\quad u=-\frac{1}{2}av^2,\quad v=1$ **chiziqlar hosil qilgan uchburchakning perimetrini va burchaklarini toping.**

7. Birinchi kvadratik forma 6-masaladagi ko`rinishda bo`lgan sirtda $u=av, u=-av, v=1$ **chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakning Yuzini hisoblang.**

8. Birinchi kvadratik forma 6-masaladagi ko`rinishda bo`lgan sirtda $u+v=0, u-v=0$ **chiziqlar orasidagi burchakni toping.**

9. Bir pallali giperboloid

$$x=achu\cos v,\quad y=achu\sin v,\quad z=cchu$$

tenglamalar bilan berilgan bo`lsa, uning ikkinchi kvadratik formasini toping.

10. Doiraviy silindr

$$x=R\cos v, y=R\sin v, z=u$$

tenglamalar bilan berilgan bo`lsa, uning ikkinchi kvadratik formasini toping.

11. Sirt $F(x,y,z)=0$ **tenglama bilan berilgan. Uning Gauss egriligini toping.**

12. Sirt differensiallanuvchi $z=f(x,y)$ **funksiyaning grafigidan iborat bo'lsa, uning Gauss va o`rta egriligini hisoblang.**

13. Sfera $x^2+y^2+z^2=169$ **tenglama bilan berilgan. Uning** $M(3,4,12)$ **nuqtadan o`tuvchi urinma tekisligi va normal tenglamalari tuzilsin.**

14. Gelikoid

$$x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning o`rta egriligini toping.

15. Sirt $xyz=1$ **tenglama bilan berilgan. Uning** $x+y+z-3=0$ **tekislikka parallel urinma tekisliklarini toping.**

16. Gelikoid uchun geodezik chiziqlarning tenglamalarini yozing (14-masala).

17. Sirt $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ **tenglamalar bilan berilgan. Uning** $P(u = 1, v = 1)$ **nuqtasidagi** $v = u^2$ **chiziq yo`nalishi bo`yicha normal egriligini toping.**

18. Sirt $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ **tenglama bilan berilgan. Uning** $M(0,0,0)$ **nuqtasidagi Dyupen indikatrisasi tenglamasini tuzing.**

IV BOB

TENZOR ANALIZ ELEMENTLARI

§ 1. Chiziqli formalar

Haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan chekli o’lchamli chiziqli fazoni V bilan, uning o’lchamini esa n bilan belgilaymiz, ya’ni $n=\dim V$. Chiziqli fazoda aniqlangan

$$\omega : V \to R^1$$

funksiya uchun

$$\omega(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})=\lambda\omega(\vec{x})+\mu\omega(\vec{y})$$

tenglik ixtiyoriy $\vec{x},\vec{y}$ vektorlar va barcha λ,μ xaqiqiy sonlar uchun bajarilsa, ω chiziqli forma deb ataladi. Chiziqli V fazoda aniqlangan hamma chiziqli formalar to’plamini V^* bilan belgilaymiz.

Teorema 1. *Chiziqli formalardan iborat V^* to’plam n o’lchamli chiziqli fazodir.*

Isbot. Ikkita ω_1,ω_2 chiziqli formalarni qo’shish

$$(\omega_1+\omega_2)(\vec{x})=\omega_1(\vec{x})+\omega_2(\vec{x})$$

tenglik bo’yicha, va λ haqiqiy son uchun ω chiziqli formani λ songa ko’paytirish

$$(\lambda\omega)(\vec{x})=\lambda\omega(\vec{x})$$

tenglik bo’yicha aniqlanadi va natijada V^* chiziqli fazoga aylanadi.

Bu kiritilgan amallar uchun chiziqli fazo aksiomalari bajarilishini tekshirish qiyin emas. Agar ixtiyoriy $\vec{x}$ uchun $\omega(\vec{x})=0$ bo’lsa, ω chiziqli V^* fazo uchun “nol vektor” bo’ladi va $\tilde{0}$ ko’rinishda belgilanadi.

Endi V^* chiziqli fazoning o’lchami n ga teng ekanligini ko’rsataylik. Buning uchun V fazodagi birorta $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$ bazis uchun

$$\omega^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

qoida bilan n ta $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ chiziqli formalarni aniqlaymiz. Ixtiyoriy

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n$$

vektor uchun $\omega^i(\vec{x}) = x^i$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni ω^i forma $\vec{x}$ vektorga uning i-koordinatasini mos qo'yadi.

Endi $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ formalar V^* fazo uchun bazis ekanligini ko'rsataylik. Agar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ haqiqiy sonlar uchun

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega^i = \tilde{0}$$

tenglik bajarilsa, har bir $\vec{x}$ vektor uchun

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega^i(\vec{x}) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $\vec{x} = \vec{e}_j$ bo'lsa, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \omega^i(\vec{x}) = \beta_j = 0$ tenglik hosil bo'ladi.

Demak $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ tengliklar o'rinlidir.Bundan esa $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ forma-larning chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi.

Endi ixtiyoriy $\omega \in V^*$ uchun

$$\omega(\vec{x}) = x^1\omega(\vec{e}_1) + x^2\omega(\vec{e}_2) + \ldots + x^n\omega(\vec{e}_n) =$$
$$= \alpha_1\omega^1(\vec{x}) + \alpha_2\omega^2(\vec{x}) + \ldots + \alpha_n\omega^n(\vec{x})$$

tenglikni yozsak, $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \omega^i$ tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $\alpha_i = \omega(\vec{e}_i)$ sonlar ω formaning $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ bazisdagi koordinatalaridir.□

Endi $V = R^n$ bo'lgan holda quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 2. *Har qanday ω chiziqli forma uchun shunday yagona $\vec{x}_0 \in R^n$ vektor mavjud bo'lib,*

$$\omega(\vec{x}) = (\vec{x}_0, \vec{x})$$

tenglik hamma $\vec{x} \in R^n$ vektorlar uchun o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bu teoremani isbot qilish uchun R^n fazoda $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ vektorlardan iborat ortonormal bazisni tanlab,unga mos keluvchi qo'shma fazodagi bazisni $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n$ bilan belgilaymiz.Bilamizki

$$\omega(\vec{x})=\alpha_1\omega^1(\vec{x})+\alpha_2\omega^2(\vec{x})+\ldots+\alpha_n\omega^n(\vec{x})$$

tenglik har bir $\vec{x}$ uchun o'rinli bo'ladi.

Endi

$$\vec{x}_0=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$$

vektorni kiritsak,

$$(\vec{x}_0;\vec{x})=\alpha_1\omega^1(\vec{x})+\alpha_2\omega^2(\vec{x})+\ldots+\alpha_n\omega^n(\vec{x})$$

tenglik bajariladi. Albatta $\vec{x}_0$ vektor ω formaga bog'liq. Agar ω forma uchun ikkita $\vec{x}_0,\vec{y}_0$ vektorlar mavjud bo'lib,

$$\vec{\omega}(\vec{x})=(\vec{x}_0,\vec{x}),\quad \vec{\omega}(\vec{x})=(\vec{y}_0,\vec{x})$$

tengliklar bajarilsa,

$$(\vec{x}_0-\vec{y}_0,\vec{x})=0$$

tenglikdan $\vec{x}_0=\vec{y}_0$ tenglik kelib chiqadi.□

Endi V chiziqli fazoda va qo'shma V^* chiziqli fazoda bazis o'zgarganda vektor va chiziqli formalarning koordinatalari uchun o'zgarish qoidasini aniqlaymiz.

Agar $\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,...,\tilde{\vec{e}}_n$ vektorlar V chiziqli fazoda boshqa bazis bo'lsa, har bir $\tilde{\vec{e}}_i$ vektorni $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ bazis orqali ifodalaymiz:

$$\tilde{\vec{e}}_i=a_i^1\vec{e}_1+\ldots+a_i^n\vec{e}_n.$$

va natijada

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz. Bu matritsaning determinanti noldan farqli bo'ladi (nima uchun?).

Endi $\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,...,\tilde{\vec{e}}_n$ bazisga qo'shma $\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2,\ldots,\tilde{\omega}^n$ bazisni

$$\tilde{\omega}^i\left(\tilde{\vec{e}}_j\right)=\delta^i_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

qoida bilan aniqlaymiz. Har bir $\tilde{\omega}^i$ formani $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n$ bazis orqali ifodalab,

$$\tilde{\omega}^i=b^i_1\omega^1+b^i_2\omega^2+\ldots+b^i_n\omega^n$$

tenglik yordamida

$$B=\begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \cdots & b^1_n\\ b^2_1 & b^2_2 & \cdots & b^2_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b^n_1 & b^n_2 & \cdots & b^n_n\end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz.

Endi

$$\delta^i_j=\tilde{\omega}^i\left(\tilde{\vec{e}}_j\right),\quad \tilde{\omega}^i=\sum_k b^i_k\omega^k \quad \text{va} \quad \tilde{\vec{e}}_j=\sum_s a^s_j\vec{e}_s$$

tengliklardan foydalanib tenglikni hosil qilamiz. Bu erda $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n$ va $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ bazislar o'zaro qo'shma bazis bo'lganligi uchun

$$\omega^k\left(\vec{e}_s\right)=\delta^k_s$$

tenglik o'rinli. Demak

$$\delta^i_j=\sum_{k,s} b^i_k a^s_j\delta^k_s=\sum_k b^i_k a^k_j$$

munosabatdan $\{b^i_k\}$ matritsa $\{a^k_j\}$ matritsaga teskari matritsa ekanligi kelib chiqadi.

Chiziqli V fazoga tegishli $\vec{x}$ vektorning $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ bazisdagi koordinatalari $x^1,x^2,\ldots,x^n$ sonlar, $\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,...,\tilde{\vec{e}}_n$ bazisdagi koordinatalari $y^1,y^2,\ldots,y^n$ sonlar bo'lsa,

$$\vec{x}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\ldots+x^n\vec{e}_n=y^1\tilde{\vec{e}}_1+y^2\tilde{\vec{e}}_2+\ldots+y^n\tilde{\vec{e}}_n$$

va

$$\tilde{\vec{e}}_i=\sum a^j_i\vec{e}_j\,;$$

tengliklardan

$$x^i=\sum a^i_k y^k,\quad y^i=\sum b^i_k x^k \quad (1)$$

tengliklar kelib chiqadi. Bu formulalar bazis o'zgarganda vektor koordinatalarining o'zgarish qonunini ko'rsatadi.

Endi chiziqli formalar koordinatalari o'zgarish qonunini ko'raylik.

Buning uchun

$$\omega=\sum_i \alpha_i\omega^i,\quad \omega=\sum_j \beta_j\tilde{\omega}^j \quad \text{va} \quad \tilde{\omega}^j=\sum_i b_i^j\omega^i$$

tengliklardan foydalanib

$$\alpha_i=\sum_j b_i^j\beta_j,\quad \beta_j=\sum_k a_i^k\alpha_k \quad (2)$$

formulalarni hosil qilamiz.

§ 2. Chiziqli fazoda tenzorlar

Chiziqli V fazo va unga qo'shma V^* fazo uchun

$$T:\underbrace{V\times V\times\ldots\times V}_{r}\times\underbrace{V^*\times V^*\times\ldots\times V^*}_{s}\to R^1$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $r+s$ argumentli bo'lib r ta argumenti vektorlar, s ta argumenti chiziqli formalardir.

Ta'rif. *Berilgan* $T\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^s\right)$ *funksiya har bir argumenti bo'yicha chiziqli bo'lsa (boshqa argumentlari fiksirlangan holda), u* (r,s) *tipdagi tenzor deb ataladi.*

Misollar.

1. Bizga $\vec{x}$ vektor berilgan bo'lsa, har bir $\omega\in V^*$ chiziqli forma uchun $\omega(\vec{x})$ skalyar miqdor bo'ladi. Demak $\vec{x}$ vektorni $\vec{x}:V^*\to R^1$ funktsiya sifatida qarashimiz mumkin. Shuning uchun vektor $(0,1)$ tipdagi tenzor bo'ladi.
2. Har bir

$$\omega:V\to R^1$$

chiziqli forma $(1,0)$ tipdagi tenzordir. Chiziqli forma kovektor deb ham ataladi.

3. Regulyar Φ sirtning $p(u_0,v_0)$ nuqtasidagi birinchi kvadratik formasi $\{g_{ij}\}$ matritsa bilan, ikkinchi kvadratik formasi $\{q_{ij}\}$ matritsa bilan berilsa,

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in \mathrm{T}_p\Phi\times\mathrm{T}_p\Phi\to g_{ij}a^ib^j,$$
$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\in \mathrm{T}_p\Phi\times\mathrm{T}_p\Phi\to q_{ij}a^ib^j$$

funksiyalar $(2,0)$ tipdagi tenzorlar bo'ladi. Bu erda $\{a^i\},\{b^j\}$ sonlari mos ravishda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalaridir.

Hamma (r,s) tipli tenzorlar to'plamini $\mathrm{T}_s^r(V)$ deb belgilaymiz.

Teorema 3. *Barcha* (r,s) *tipdagi tenzorlar to'plami chekli o'lchamli chiziqli fazodir*.

Avvalo ikkita (r,s) tipdagi T,S tenzorlar va haqiqiy λ son uchun chiziqli amallar quyidagicha aniqlanadi:

$$(\mathrm{T}+S)(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S)=\mathrm{T}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S)+$$

$$+S(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S),$$

$$(\lambda T)(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S)=\lambda T(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_r,\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^S)\ .$$

Endi $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ vektorlar chiziqli V fazoda bazisni, $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^n$ kovektorlar V^* fazoda qo'shma bazisni aniqlasin.

$\mathrm{T}_s^r(V)$ fazoda

$$\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s})=\delta_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\ldots\delta_{k_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{l_1}\delta_{j_2}^{l_2}\ldots\delta_{j_s}^{l_s}$$

qoida bo'yicha $\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}$ tenzorlarni aniqlaymiz. Bu erda $1\le i_1,i_2,\ldots,i_r,\,j_1,\,j_2,\ldots,\,j_s\le n$ bo'lib, bu tenzorlar soni n^{r+s} ga teng. Bu tenzorlarning chiziqli erkli ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun

$$\sum_{\substack{1\le i_1,i_2,\ldots,i_r\le n\\ 1\le j_1,j_2,\ldots,j_s\le n}}\alpha_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}=0$$

tenglikdan $\alpha_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}=0$ tenglik indekslarning hamma qiymatlarida o'rinli ekanligini ko'rsataylik. Shu maqsadda

$$\sum\alpha_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s})$$

ni hisoblaymiz va natijada

$$\sum \alpha_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_r\\ j_1,j_2,\ldots,j_s}}\alpha_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}\delta_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\ldots\delta_{k_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{l_1}\delta_{j_2}^{l_2}\ldots\delta_{j_s}^{l_s}=\alpha_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_s}=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak $\Omega_{j_1\ldots j_s}^{i_1\ldots i_r}$ tenzorlar chiziqli erkli oilani tashkil qiladi.

Bu tenzorlarning $\mathrm{T}_s^r(V)$ fazoda to'liq oila ekanligini isbotlaylik. Buning uchun (r,s) tipdagi ixtiyoriy T tenzor uchun

$$\mathrm{T}_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}=\mathrm{T}\left(\vec{e}_{j_1},\vec{e}_{j_2},\ldots,\vec{e}_{j_r},\omega^{i_1},\omega^{i_2},\ldots,\omega^{i_s}\right)$$

belgilashni kiritib

$$\mathrm{T}=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_s\\ j_1,j_2,\ldots,j_r}}\mathrm{T}_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}\Omega_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r}$$

tenglikni isbotlaymiz. Buning uchun tenglikning o'ng tomonidagi tenzorning $\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s}\right)$ oila uchun qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_s\\ j_1,j_2,\ldots,j_r}}\mathrm{T}_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}\Omega_{i_1\ldots i_s}^{j_1\ldots j_r}\left(\vec{e}_{k_1},\vec{e}_{k_2},\ldots,\vec{e}_{k_r},\omega^{l_1},\omega^{l_2},\ldots,\omega^{l_s}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_s\\ j_1,j_2,\ldots,j_r}}\mathrm{T}_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}\delta_{k_1}^{j_1}\delta_{k_2}^{j_2}\ldots\delta_{k_r}^{j_r}\delta_{i_1}^{l_1}\delta_{i_2}^{l_2}\ldots\delta_{i_s}^{l_s}=$$
$$=\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_s\\ j_1,j_2,\ldots,j_r}}\mathrm{T}_{j_1\ldots j_r}^{i_1\ldots i_s}\delta_{k_1}^{k_1}\delta_{k_2}^{k_2}\ldots\delta_{k_r}^{k_r}\delta_{l_1}^{l_1}\delta_{l_2}^{l_2}\ldots\delta_{l_s}^{l_s}=\mathrm{T}_{k_1\ldots k_r}^{l_1\ldots l_s}$$

Demak, tenzorlarning qiymati bazislarni tashkil qiluvchi ixtiyoriy vektorlar va kovektorlar oilasi uchun ustma-ust tushadi. Tenzorlarning har bir argument bo'yicha chiziqli ekanligidan ularning tengligi kelib chiqadi. Shunday qilib (r,s) tipdagi tenzorlar to'plami chekli o'lchamli chiziqli fazoni tashkil qiladi.□

Endi chiziqli V fazoda bazis o'zgarganda tenzorlar koordinatalarining o'zgarish qoidasini aniqlaylik. Buning uchun Vfazoda yangi bazisni $\tilde{\vec{e}}_1,\tilde{\vec{e}}_2,...,\tilde{\vec{e}}_n$ bilan belgilab, yangi bazis vektorlarini eski bazis orqali ifodalaylik:

$$\tilde{\vec{e}}_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_j^i e_i$$

Yangi bazisga qo'shma $\tilde{\omega}^1,\tilde{\omega}^2,\ldots,\tilde{\omega}^n$ elementlarini ham

$$\tilde{\omega}^i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j \omega^i$$

ko'rinishda yozsak, $\{\beta_j^i\}$ matritsa $\{\alpha_j^i\}$ matritsaga teskari matritsa ekanligini bilamiz. Bu yangi bazislarga mos keluvchi $\mathrm{T}_s^r(V)$ fazoning bazisi

$$\begin{aligned}&\tilde{\Omega}_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\left(\tilde{\vec{e}}_{k_1}, \tilde{\vec{e}}_{k_2}, \dots, \tilde{\vec{e}}, \tilde{\omega}^{l_1}, \tilde{\omega}^{l_2}, \dots, \tilde{\omega}^{l_s}\right) = \\ &= \delta_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\dots\delta_{k_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{l_1}\delta_{j_2}^{l_2}\dots\delta_{j_s}^{l_s}\end{aligned}$$

qoida bo'yicha aniqlanadi. Bu yangi bazisning eski bazisdagi koordinatalarini topish uchun

$$\tilde{\Omega}_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\left(\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \dots, \vec{e}_{k_r}, \omega^{l_1}, \omega^{l_2}, \dots, \omega^{l_s}\right)$$

miqdorni hisoblaylik. Buning uchun

$$\vec{e}_j = \sum_k \beta_j^k \tilde{\vec{e}}_k, \qquad \omega^i = \sum_k \alpha_k^i \tilde{\omega}^k$$

tengliklardan foydalanamiz. Natijada

$$\begin{aligned}&\tilde{\Omega}_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r}\left(\sum_{n_1}\beta_{k_1}^{n_1}\tilde{\vec{e}}_{n_1}, \sum_{n_2}\beta_{k_2}^{n_2}\tilde{\vec{e}}_{n_2}, \dots, \sum_{n_r}\beta_{k_r}^{n_r}\tilde{\vec{e}}_{n_r}, \sum_{m_1}\alpha_{m_1}^{l_1}\tilde{\omega}^{m_1}, \dots, \sum_{m_s}\alpha_{m_s}^{l_s}\tilde{\omega}^{m_s}\right) = \\ &= \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_r \\ m_1, m_2, \dots, m_s}} \beta_{k_1}^{n_1}\beta_{k_2}^{n_2}\dots\beta_{k_r}^{n_r}\alpha_{m_1}^{l_1}\dots\alpha_{m_s}^{l_s}\delta_{n_1}^{i_1}\delta_{n_2}^{i_2}\dots\delta_{n_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{m_1}\delta_{j_2}^{m_2}\dots\delta_{j_s}^{m_s} = \\ &= \beta_{k_1}^{i_1}\beta_{k_2}^{i_2}\dots\beta_{k_r}^{i_r}\alpha_{j_1}^{l_1}\dots\alpha_{j_s}^{l_s}\end{aligned}$$

Tenglikni hosil qilamiz. Demak,

$$\tilde{\Omega}_{j_1\dots j_s}^{i_1\dots i_r} = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_r \\ l_1, l_2, \dots, l_s}} \beta_{k_1}^{i_1}\beta_{k_2}^{i_2}\dots\beta_{k_r}^{i_r}\alpha_{j_1}^{l_1}\alpha_{j_2}^{l_2}\dots\alpha_{j_s}^{l_s}\Omega_{l_1\dots l_s}^{k_1\dots k_r}$$

Endi T tenzorning yangi bazisdagi koordinatalarini topaylik:

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=\mathrm{T}\left(\widetilde{\vec{e}}_{i_1},\widetilde{\vec{e}}_{i_2},\ldots,\widetilde{\vec{e}}_{i_r},\widetilde{\omega}^{j_1},\widetilde{\omega}^{j_2},\ldots,\widetilde{\omega}^{j_s}\right)=$$
$$=\mathrm{T}\left(\sum_{k_1}\alpha_{i_1}^{k_1}\vec{e}_{k_1},\sum_{k_2}\alpha_{i_2}^{k_2}\vec{e}_{k_2},\ldots,\sum_{k_r}\alpha_{i_r}^{k_r}\vec{e}_{k_r},\sum_{l_1}\beta_{l_1}^{j_1}\omega^{l_1},\sum_{l_2}\beta_{l_2}^{j_2}\omega^{l_2},\ldots,\sum_{l_s}\beta_{l_s}^{j_s}\omega^{l_s}\right)=$$
$$=\sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r\\ l_1,l_2,\ldots,l_s}}\alpha_{i_1}^{k_1}\alpha_{i_2}^{k_2}\ldots\alpha_{i_r}^{k_r}\beta_{l_1}^{j_1}\beta_{l_2}^{j_2}\ldots\beta_{l_s}^{j_s}\mathrm{T}_{k_1\ldots k_r}^{l_1\cdots l_s}$$

Demak,

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}=\sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_r\\ l_1,l_2,\ldots,l_s}}\alpha_{i_1}^{k_1}\alpha_{i_2}^{k_2}\ldots\alpha_{i_r}^{k_r}\beta_{l_1}^{j_1}\beta_{l_2}^{j_2}\ldots\beta_{l_s}^{j_s}\mathrm{T}_{k_1\ldots k_r}^{l_1\cdots l_s}\quad(1)$$

formula o’rinli. Bu formula yangi koordinatalarni eski koordinatalar bilan $\{\alpha_j^i\},\ \{\beta_j^i\}$ matritsalar orqali ifodalaydi. Bu formulani tenzor o’zgarish qonuni deb ataymiz. $r=0, s=1$ va $r=1, s=0$ bo’lganda bu formula mos ravishda vektor va kovektor koordinatalarining o’zgarish qoidasini beradi.

Bu paragraf oxirida tenzorlar ustida algebraik amallarni kiritamiz. Yuqorida tenzorlarni qo’shish va haqiqiy songa ko’paytirish amallari kiritilgan edi.

1. Agar T ва S tenzorlarning koordinatalari

   $\mathrm{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_s}$ va $S_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$ lardan iborat bo’lsa, $\mathrm{T}+S$ tenzorning koordinatalari

$$\mathrm{T}_{i_1\cdots i_k}^{j_1\cdots j_s}+S_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$$

sonlardan, λ haqiqiy son uchun $\lambda\mathrm{T}$ tenzorining koordinatalari T tenzorning har bir koordinatasini shu songa ko’paytirish yordamida hosil bo’ladi, ya’ni

$$\lambda\mathrm{T}_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_s}$$

sonlariga teng bo’ladi.

Endi boshqa algebraik amallarni kiritamiz.Qulaylik uchun$0\le r\le 3,\ \ 0\le s\le 3$ hollarni ko’ramiz.

2. Tenzorlarni ko’paytirish. Tenzorlarni ko’paytirish uchun ularning tiplari bir xil bo’lishi shart emas. Tenzor ko’paytma koordinatalari berilgan ikkita tenzorlarning koordinatalarini ko’paytirish natijasida hosil bo’ladi. Agar $(2,3)$ tipdagi T

tenzorning koordinatalari $\mathrm{T}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}$, $(1,2)$ tipdagi S tenzorning koordinatalari $S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2}$ bo'lsa, $\mathrm{T}\cdot S$ tenzorning koordinatalari

$$\mathrm{T}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}\cdot S_{\alpha}^{\beta_1 \beta_2}$$

sonlardan iborat bo'ladi. Demak ko'paytma

$$\mathrm{T}\cdot S=\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5\\ i_1,i_2,i_3}}\mathrm{T}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}S_{i_3}^{j_4 j_5}\Omega_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5}^{i_1 i_2 i_3}$$

ko'rinishda bo'ladi.

3. Bir xil tipdagi indekslarni almashtirish. Bizga T tenzor berilgan bo'lsa, uning koordinatalarida ixtiyoriy 2 ta bir xil indeks joylarini almashtirish yordamida boshka tenzorni hosil qilamiz. Masalan $(3,0)$ tipdagi T tenzorning koordinatalari T_{ijk} sonlardan iborat bo'lsa, koordinatalari T_{ikj} sonlardan iborat tenzor

$$R=\sum_{ijk}\mathrm{T}_{ikj}\Omega^{ijk} \text{ ko'rinishda bo'ladi.}$$

Xuddi shunday $(0,2)$ tipdagi $\{\mathrm{T}^{ij}\}$ tenzor uchun

$$R=\sum_{ij}\mathrm{T}^{ji}\Omega_{ij}$$

formula bilan boshqa tenzorni hosil qilamiz.

4. Indekslar bo'yicha yig'ish. Bizga $(2,3)$ tipdagi $\{\mathrm{T}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2 j_3}\}$ tenzor berilgan bo'lsa,

$$R_{i_2}^{j_1 j_3}=\sum_{k}\mathrm{T}_{k i_2}^{j_1 k j_3}$$

qoida bo'yicha $R_{i_2}^{j_1 j_3}$ sonlarni aniqlasak, $(1,2)$ tipdagi $\{R_{i_2}^{j_1 j_3}\}$ tenzorni hosil qilamiz. Bu amal k-indeks bo'yicha yig'ish deb ataladi.

5. Indekslarni tushirish va ko'tarish. Bizga $(2,0)$ tipdagi $A=\{a_{ij}\}$ tenzor berilgan va $\det A\neq 0$ bo'lsin. Teskari A^{-1} matritsa elementlarini a^{ik} bilan belgilasak, $\sum a^{ik}a_{kj}=\delta_j^i$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi bizga $(3,2)$ tipdagi $\mathrm{T} = \{\mathrm{T}_{i_1 i_2 i_3}^{j_1 j_2}\}$ tenzor berilgan bo'lsa,

$$S_{i_1 i_2}^{i j_1 j_2} = \sum_k a^{ik} \mathrm{T}_{k i_1 i_2}^{j_1 j_2}$$

qoida bilan $(2,3)$ tipdagi $\{S_{i_1 i_2}^{i j_1 j_2}\}$ tenzorni aniqlaymiz. Bu operatsiya indeksni ko'tarish operatsiyasi deb ataladi. Xuddi shunday

$$S_{j i i_1 i_2}^{\ j_1} = \sum_k a_{ki} \mathrm{T}_{i_1 i_2}^{j_1 k}$$

qoida bilan $(4,1)$ tipdagi $\{S_{i i_1 i_2}^{j_1}\}$ tenzorni aniqlash mumkin. Bu operatsiya indekslarni tushirish opratsiyasi deyiladi.

Tenzor belgilashlar:

Tenzor analizda qulaylik uchun quyida va yuqorida bir xil marotaba takrorlanuvchi indekslar buyicha yig'indi yozilganda yig'indi belgisi yozilmaydi.

Masalan,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i = x^i \vec{e}_i$$

$$\sum_k a^{ik} \mathrm{T}_{k i_1 i_2}^{j_1 j_2} = a^{ik} \mathrm{T}_{k i_1 i_2}^{j_1 j_2}$$

demak

$$S_{i_1 i_2}^{i j_1 j_2} = a^{ik} \mathrm{T}_{k i_1 i_2}^{j_1 j_2}$$

Keyinchalik bu qoidadan foydalanganimizda bu haqda eslatib o'tirmaymiz.

§ 3. Sirtlarda tenzor maydonlar

Regulyar Φ sirt berilgan bo'lib, u

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \qquad (u,v) \in G \tag{1}$$

tenglama yordamida parametrlangan bo'lsin.

Ḱar bir $p(u,v)$ nuqta uchun sirtning shu nuqtadagi urinma fazosini $T_p\Phi$ bilan belgilagan edik. Urinma fazoga qo'shma fazoni $T_p^*\Phi$ bilan belgilab, (r,s) tipdagi tenzorni

$$R(u,v): \underbrace{T_p\Phi \times T_p\Phi \times \ldots \times T_p\Phi}_{r} \times \underbrace{T_p^*\Phi \times T_p^*\Phi \times \ldots \times T_p^*\Phi}_{s} \to R^1$$

akslantirish sifatida aniqlaymiz.

Ta'rif-1. *Sirtning har bir nuqtasiga*

$$(u,v) \to R(u,v)$$

akslantirish bilan (r,s) *tipdagi tenzor mos qo'yilgan bo'lsa,* Φ *sirtda* (r,s) *tipdagi* R *tenzor maydon berilgan deyiladi.*

Misollar.

1. Sirtda aniqlangan vektor maydon $(0,1)$ tipdagi tenzor maydonga misol bo'ladi.
2. Sirtda aniqlangan chiziqli forma maydoni $(1,0)$ tipdagi tenzor maydondir.
3. Sirtning 1 chi va 2 chi kvadratik formalari pam sirtda $(2,0)$ tipdagi tenzor maydonlarni aniqlaydi.

Agar $\vec{a} = \{a^1, a^2\}$, $\vec{b} = \{b^1, b^2\}$ vektor maydonlar, $\{g_{ij}\}, \{q_{ij}\}$ matritsalar mos ravishda 1–chi va 2–kvadratik formalar matritsalari bo'lsa,

$$T_1(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j, \qquad T_2(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{i,j} q_{ij} a^i b^j$$

formulalar

$$T_1, T_2 : T_p\Phi \times T_p\Phi \to R^1$$

tenzor maydonlarni aniqlaydi.

Ma’lumki $p(u,v)$ nuqtadagi $\mathrm{T}_p\Phi$ urinma fazo uchun $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlar bazisni tashkil qiladi. Qo’shma $\mathrm{T}_p^*\Phi$ fazodagi ω_p^1, ω_p^2 qo’shma bazis

$$\omega_p^i\left(\vec{r}_{u_j}\right) = \delta_j^i$$

qoida bo’yicha aniqlanadi. Bu erda $u_1 = u, \quad u_2 = v$ belgilashlar kiritilgan, $1 \le i, j \le 2$. Biz bilamizki, agar Φ sirt yetarli darajada silliq bo’lsa, $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlar $u,\ v$ larning differensiallanuvchi funksiyalaridir. Xuddi shuningdek $\omega_{\mathrm{p}}^1,\ \omega_p^2$ chiziqli formalar ham $u,\ v$ argumentlarning differensiallanuvchi funksiyalari bo’ladi. Buni ko’rsatish uchun $\omega_{\mathrm{p}}^1, \omega_p^2$ formalarning ixtiyoriy silliq X vektor maydon uchun qiymatlari $u,\ v$ argumentlarning differensiallanuvchi funksiyalari ekanligini ko’rsatishimiz kerak. Agar

$$X(u,v) = \vec{r}_u a^1(u,v) + \vec{r}_v a^2(u,v) \text{ bo’lsa,}$$

$$\omega_p^1(X) = a^1(u,v), \quad \omega_p^2(X) = a^2(u,v)$$

tengliklar o’rinlidir. X silliq vektor maydon bo’lganligi uchun $a^1(u,v),\ a^2(u,v)$ funksiyalar differensiallanuvchidir.

Ta’rif 2*.Berilgan* R *tenzor maydon uchun*

$$R_{j_1 \ldots j_r}^{i_1 \ldots i_s} = R\left(\vec{r}_{u_{j_1}}, \vec{r}_{u_{j_2}}, \ldots, \vec{r}_{u_{j_r}}, \omega_p^{i_1}, \omega_p^{i_2}, \ldots, \omega_p^{i_s}\right)$$

funksiyalar differensiallanuvchi bo’lsa, R *differensiallanuvchi tenzor deb ataladi.* Bu erda $1 \le i_1, i_2, \ldots, i_s,\ j_1,\ j_2, \ldots,\ j_r \le 2$.

Ta’rifda kiritilgan funksiyalar R tenzorning koordinata funksiyalari deb ataladi.

Endi geometriyada muhim rol o’ynaydigan egrilik tenzorini kiritamiz. Buning uchun avvalo vektor maydonlar uchun kommutator tushunchasini kiritamiz.

Φ sirtda differensiallanuvchi X va Y vektor maydonlar berilgan bo’lsin. Bu vektor maydonlarni

$$X = x^1(u,v)\vec{r}_u + x^2(u,v)\vec{r}_v$$
$$Y = y^1(u,v)\vec{r}_u + y^2(u,v)\vec{r}_v$$

ko’rinishda yozib

$$\left[X,Y\right](u,v)=\left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial x^1}{\partial u_i}\right)\right)\vec{r}_u+\left(\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial x^2}{\partial u_i}\right)\right)\vec{r}_v \quad (2)$$

qoida bilan yangi $[X,Y]$ vektor maydonni hosil qilamiz. Bu vektor maydon X va Y vektor maydonlarning *kommutatori* deb ataladi.

Agar $f:\Phi\to R^1$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, har bir silliq X vektor maydon yordamida

$$X(f)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial u_i}x^i$$

qoida bilan $X(f)$ funksiya aniqlanadi. Bu $X(f)$ funksiyaning $p(u,v)$ nuqtadagi qiymati f funksiyaning $X(p)$ vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasidir.

Endi kommutator haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 4.S*illiq X, Y vektor maydonlar va differentsiallanuvchi f funksiya uchun quyidagilar o'rinlidir:*

1) $[X,X]=0$*;*

2) $[X,Y]=-[Y,X]$*;*

3) $[\lambda X_1+\mu X_2,Y]=\lambda[X_1,Y]+\mu[X_2,Y],\quad \lambda,\mu\in R^1$*;*

4) $[fX,Y]=f[X,Y]-Y(f)X,\quad [X,fY]=f[X,Y]+X(f)Y$ *;*

5) $[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f))$*;*

6) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$*.*

Isbot. Teorema isboti kommutatorning aniqlanishi va differensiallash qoidalaridan bevosita kelib chiqadi. Shuning uchun faqat 4-punktni isbotlab, qolgan punktlarni isbotlashni o'quvchilarga havola etamiz.

Silliq

$$X=x^1(u,v)\vec{r}_u+x^2(u,v)\vec{r}_v$$

vektor maydon va differensiallanuvchi f funksiya berilgan bo'lsa,

$$fX=fx^1(u,v)\vec{r}_u+fx^2(u,v)\vec{r}_v$$

tenglikni hisobga olib, $[fX,Y]$ kommutatorni hisoblaymiz:

$$[fX,Y]=\left\{\left(\sum_{i=1}^{2}\left(fx^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial fx^1}{\partial u_i}\right)\right)\right\}\vec r_u+\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(fx^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial fx^2}{\partial u_i}\right)\right\}\vec r_v=$$

$$=f\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^1}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial x^1}{\partial u_i}\right)\right\}\vec r_u+f\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(x^i\frac{\partial y^2}{\partial u_i}-y^i\frac{\partial x^2}{\partial u_i}\right)\right\}\vec r_v-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\left(y^i\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)\left(x^1\vec r_u+x^2\vec r_v\right)=f[X,Y]-Y(f)X.$$

Xuddi shunday

$$[X,fY]=f[X,Y]+X(f)Y$$

tenglikni hosil qilamiz.□

Sirtda yotuvchi va

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t) \qquad a<t<b\\ z==z(t)\end{cases}$$

tenglamalar bilan berilgan γ chiziq va X vektor maydon uchun

$$\vec\rho\,'(t)=X\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$

tenglik bajarilsa, γ chiziq X vektor maydonning *integral chizig'i* deb ataladi. Bu yerda $\vec\rho(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$. Bu tenglik differensial tenglamalar sistemasi bo'lganligi uchun, har bir $(x_0,y_0,z_0)\in\Phi$ nuqtasidan chiquvchi X vektor maydonning integral chizig'i mavjud.

Bu fakt

$$\begin{cases}\vec\rho\,'(t)=X\left(x(t),y(t),z(t)\right)\\ \vec\rho(t_0)=\{x_0,y_0,z_0\}\end{cases}. \quad (3)$$

Koshi masalasining yechimi mavjudligidan kelib chiqadi. Demak $(x_0,y_0,z_0)\in\Phi$ nuqta uchun $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ oraliqda aniqlangan $\vec\rho(t)$ vektor funksiya mavjud bo'lib, u (3) sistemani qanoatlantiradi.

Sirtda aniqlangan differensiallanuvchi **Y** vektor maydon berilgan bo'lsa, har bir $t\in(a,b)$ uchun **X** vektor maydonning integral chizig'iga tegishli $(x(t),y(t),z(t))$ nuqtada $Y(x(t),y(t),z(t))$ vektor aniqlangan bo'ladi. Endi

$$\nabla_X Y(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{DY(x(t), y(t), z(t))}{dt}\right|_{t=t_0}$$

qoida bilan $\nabla_X Y$ vektor maydonni Φ sirtda aniqlaymiz. Bu erda $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$ belgilashlar kiritilgan. Bu vektor maydon uchun quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema 5. *Silliq* X, Y, Z *vektor maydonlar va differentsiallanuvchi* f, g *funktsiyalar uchun quyidagilar o'rinlidir:*

1) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

2) $\nabla_X (fY) = f\nabla_x Y + X(f)Y$

3) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.

Isbot. 1.Birinchi tenglikni isbotlash bevosita kovariant differensialni hisoblash yordamida amalga oshiriladi.

$$\nabla_X (Y + Z)(x_0, y_{0,} z_0) = \left.\frac{D(Y(x(t), y(t), z(t)) + Z(x(t), y(t), z(t)))}{dt}\right|_{t=t_0} =$$

$$= \left.\frac{DY}{dt}\right|_{t=t_0} + \left.\frac{DZ}{dt}\right|_{t=t_0} = \nabla_X Y(x_0, y_{0,} z_0) + \nabla_X Z(x_0, y_{0,} z_0)$$

Bu yerda $\vec{\rho}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ vektor funktsiya X vektor maydonning $t = t_0$ bo'lganda $(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ nuqtadan o'tuvchi integral chizig'ini aniqlaydi.

2. Ikkinchi tenglikni isbotlash bevosita kovariant differensialni hisoblash yordamida amalga oshiriladi.

$$\nabla_X (fY)(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{D(fY(x(t), y(t), z(t)))}{dt}\right|_{t=t_0} =$$

$$= \left.\frac{fDY(x_0, y_0, z_0)}{dt}\right|_{t=t_0} + Y(x_0, y_0, z_0)\left.\frac{df(x(t), y(t), z(t))}{dt}\right|_{t=t_0} =$$

$$= f\nabla_X Y(x_0, y_0, z_0) + X(f)Y(x_0, y_0, z_0)$$

3. Teoremaning 3-qismini isbotlash uchun

$$\nabla_{fX} Z = f\nabla_X Z \text{ va } \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

tengliklarni isbotlash yetarlidir.Avvalo

$$\nabla_{fX} Z = f\nabla_X Z$$

tenglikni isbotlaylik.Buning uchun $\vec{\rho}_1'(t) = fX(x,y,z)$ sistemaning yechimini $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}$ bilan, $\vec{\rho}'(t) = X(x,y,z)$ sistemani yechimini $\{x(t), y(t), z(t)\}$ bilan belgilasak

$$\tilde{x}'(t) = fx'(t)$$
$$\tilde{y}'(t) = fy'(t)$$
$$\tilde{z}'(t) = fz'(t)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Endi shu tengliklarni hisobga olib, $\nabla_{fX} Z(x,y,z)$ ifodani hisoblaymiz.

$$\nabla_{fX} Z(x_0, y_0, z_0) = \left.\frac{D(Z(\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}))}{dt}\right|_{t=t_0} =$$
$$= \left[\left.\frac{d(Z(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau} = \left[\tilde{x}(t_0)Z_x + \tilde{y}(t_0)Z_y + \tilde{z}(t_0)Z_z\right]^{\tau} =$$
$$= \left[fx'(t_0)Z_x + fy'(t_0)Z_y + fz'(t_0)Z_z\right]^{\tau} = f\left.\frac{DZ(x(t), y(t), z(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = f\nabla_X Z(x_0, y_0, z_0)$$

Endi $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ tenglikni hisoblash uchun

$$\vec{\rho}_1'(t) = X(x,y,z) + Y(x,y,z)$$

sistemaning $t = t_0$ bo'lganda (x_0, y_0, z_0) nuqtadan chiquvchi yechimini $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}$ bilan belgilasak,

$$\begin{aligned}\tilde{x}'(t) &= x_1^1(t) + x_2^1(t)\\ \tilde{y}'(t) &= y_1^1(t) + y_2^1(t)\\ \tilde{z}'(t) &= z_1^1(t) + z_2^1(t)\end{aligned} \quad (4)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu erda $\{x_1(t), y_1(t), z_1(t)\}$ va $\{x_2(t), y_2(t), z_2(t)\}$ vektor funksiyalar mos ravishda X va Y vektor maydonlarning $t = t_0$ da (x_0, y_0, z_0) nuqtadan chiquvchi integral chiziqlarni aniqlaydi. Endi (4) tengliklarni hisobga olib $\nabla_X (Y + Z)(x_0, y_0, z_0)$ ni topamiz:

$$\nabla_X (Y+Z)(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{D(Z(\{\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\tilde{z}(t)\}))}{dt}\right|_{t=t_0}=$$

$$=\left[\left.\frac{d(Z(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t),\tilde{z}(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau}=$$

$$=\left[(\tilde{x}_1(t_0)+\tilde{x}_2(t_0))Z_x+(\tilde{y}_1(t_0)+\tilde{y}_2(t_0))Z_y+(\tilde{z}_1(t_0)+\tilde{z}_2(t_0))Z_z\right]^{\tau}=$$

$$=\left[\left.\frac{D(Z(x_1(t),y_1(t),z_1(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau}+\left[\left.\frac{D(Z(x_2(t),y_2(t),z_2(t))}{dt}\right|_{t=t_0}\right]^{\tau}=$$

$$=\nabla_X Z(x_0,y_0,z_0)+\nabla_Y Z(x_0,y_0,z_0)$$

Endi egrilik tenzorini aniqlashga kirishaylik. Buning uchun X,Y,Z vektor maydonlar uchun

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

vektor maydonni kiritamiz. Bu vektor maydon ixtiyoriy uchta silliq X,Y,Z vektor maydonlar va ω kovektor maydon uchun

$$(X,Y,Z,\omega)\to\omega(R(X,Y)Z)$$

qoida bo'yicha $(3,1)$ tipdagi tenzor maydonni aniqlaydi. Geometriyada $R(X,Y)Z$ ifodani egrilik tenzori deb atashadi. Bu tenzorning nomidagi "egrilik" qo'shimchasi quyidagi teorema bilan asoslanadi.

Teorema 6. *Sirtda aniqlangan silliq X,Y vektor maydonlar har bir nuqtada ortonormal sistemani aniqlasa,*

$$K=-I(R(X,Y)X,Y)$$

tenglik o'rinlidir.

Bu erda K–sirtning Gauss egriligi bo'lib, I esa sirtning birinchi kvadratik formasidir.

Isbot. Teorema shartiga ko'ra har bir $p\in\Phi$ uchun $X(p)$, $Y(p)$ vektorlar o'zaro ortogonal birlik vektorlardir. Shuning uchun

$$\begin{aligned}\vec{r}_u&=a_1X+a_2Y\\ \vec{r}_v&=b_1X+b_2Y\end{aligned}\qquad(5)$$

tengliklarni yoza olamiz. Endi R ning har bir argumenti bo'yicha chiziqli ekanligidan

$$I(R(\vec{r}_u,\vec{r}_v)\vec{r}_u,\vec{r}_v)=(a_1b_2-a_2b_1)^2 I(R(X,Y)X,Y)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda (5) sistemadan

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = |\vec{r}_u|^2|\vec{r}_v|^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2$$

tenglikni olish qiyin emas. Demak, teoremani isbotlash uchun

$$-\frac{I(R(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}_u, \vec{r}_v)}{g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2} = K$$

tenglikni isbotlashimiz kerak.

Buning uchun avvalo

$$\nabla_{\vec{r}_{u_i}} \vec{r}_{u_j} = \Gamma_{ji}{}^k \vec{r}_{u_k} \qquad (6)$$

tenglikni isbotlaylik. Kovariant differensialni topish uchun $\vec{r}_{u_i}$ vektor maydonning integral chizig'i $u_i = t$ tenglama bilan aniqlanishini hisobga olsak

$$\nabla_{\vec{r}_{u_i}} \vec{r}_{u_j} = \frac{D\vec{r}_{u_j}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}_{u_j}}{dt}\right]^{\tau} = \left[\vec{r}_{u_j u_i}\right]^{\tau}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi

$$\vec{r}_{u_j u_i} = \sum_k \Gamma_{ji}^k \vec{r}_{u_k} + q_{ji}\vec{n}$$

derivatsion formuladan foydalansak (6) tenglikni hosil qilamiz. Bundan tashqari

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = 0 \qquad (7)$$

tenglik ham o'rinlidir. Bu erda $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = 0$ esa $\vec{r}_u$ va $\vec{r}_v$ vektor maydonlarning kommutatoridir. Yuqoridagi (5) va (6) tengliklarni hisobga olib

$$R(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}_u = \nabla_{\vec{r}_u}\nabla_{\vec{r}_v}\vec{r}_u - \nabla_{\vec{r}_v}\nabla_{\vec{r}_u}\vec{r}_u = \nabla_{\vec{r}_u}\left(\sum_k \Gamma_{12}^k \vec{r}_{u_k}\right) - \nabla_{\vec{r}_v}\left(\sum_k \Gamma_{11}^k \vec{r}_{u_k}\right) =$$

$$= \sum_k \Gamma_{12}^k \nabla_{\vec{r}_u}\vec{r}_{u_k} + \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^k\right)\vec{r}_{u_k} - \sum_k \Gamma_{11}^k \nabla_{\vec{r}_u}\vec{r}_{u_k} - \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^k\right)\vec{r}_{u_k} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^1\right)\vec{r}_u + \left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^2\right)\vec{r}_v + \sum_k \Gamma_{12}^k\left(\sum_m \Gamma_{k1}^m \vec{r}_{u_m}\right) - \sum_k \Gamma_{11}^k\left(\sum_m \Gamma_{k2}^m \vec{r}_{u_m}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^1 - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^1\right)\vec{r}_u + \left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^2\right)\vec{r}_v + \sum_m\left(\sum_k \Gamma_{12}^k\Gamma_{k1}^m - \sum_k \Gamma_{11}^k\Gamma_{k2}^m\right)\vec{r}_{u_m}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi $I(R(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ni hisoblaymiz:

$$I\left(R\left(\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)=\left\{\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^{m}-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{11}^{m}+\sum_k\Gamma_{12}^{k}\Gamma_{k1}^{m}-\sum_k\Gamma_{12}^{k}\Gamma_{k2}^{m}\right)\right\}g_{m2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $g_{m2}=I\left(\vec{r}_{u_m},\vec{r}_v\right)$ bo'ladi. Demak,

$$I\left(R\left(X,Y\right)X,Y\right)=\frac{I\left(\left(R\left(\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)\vec{r}_u,\vec{r}_v\right)\right)}{g_{11}^{2}g_{22}^{2}-g_{12}^{2}}=$$

$$=-0\frac{1}{\det A}\left\{\sum_{m=1}^{2}\left\{\frac{\partial\Gamma_{11}^{m}}{\partial v}-\frac{\partial\Gamma_{12}^{m}}{\partial u}+\sum_k\Gamma_{11}^{k}\Gamma_{k2}^{m}-\sum\Gamma_{12}^{k}\Gamma_{k1}^{m}\right\}\right\}g_{m2}$$

tenglik o'rinlidir.

Biz Gauss egriligini hisoblash uchun

$$K=\frac{\det B}{\det A}$$

formuladan va

$$\det B=q_{11}q_{22}-q_{12}^{2}=\sum_m\left(\frac{\partial}{\partial v}\Gamma_{11}^{m}-\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^{m}+\sum_k\Gamma_{11}^{k}\Gamma_{k2}^{m}-\sum\Gamma_{12}^{k}\Gamma_{k1}^{m}\right)g_{m2}$$

tenglikdan foydalansak,

$$K=-I\left(R\left(X,Y\right)X,Y\right)$$

tenglik kelib chiqadi.□

§ 4. Fazoda tenzor maydonlar (misollar)

Fazoda $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ nuqta berilgan bo'lsa, boshi shu nuqtaga qo'yilgan vektorlar to'plami chiziqli R^n fazoni tashkil etadi. Bu vektorlar fazosini T_xR^n bilan belgilaymiz.

Bizga $G\subseteq R^n$ soha berilib, uning har bir x nuqtasiga bitta $S_x\in T_r^s\left(\mathrm{T}_xR^n\right)$ tenzor mos qo'yilgan bo'lsa, G sohada (r,s) tipdagi $S:x\to S_x$ tenzor maydon berilgan deyiladi. Demak har bir x uchun

$$S_x : \underbrace{T_xR^n \times T_xR^n \times ... \times T_xR^n}_{r} \times \underbrace{T_x^*R^n \times T_x^*R^n \times ... \times T_x^*R^n}_{s} \to R^1$$

funksiya (r,s) tipdagi tenzordir.

Agar $\mathrm{T}_{i_1...i_r}^{j_1...j_s}(x)$ bilan S_x tenzorning koordinatalarini belgilasak, bu koordinatalar x nuqtaning funksiyalaridir.

Ta'rif. *Berilgan G sohada*

$$\mathrm{T}_{i_1...i_r}^{j_1...j_s}(x)$$

funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, S silliq tenzor maydon deb ataladi.

Misollar.

1. Berilgan G sohada differensiallanuvchi $f(x^1,x^2,...,x^n)$ funksiya aniqlangan bo'lsa, uning x nuqtadagi gradiyenti $T(x) = gradf(x) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}\right\}$ (1,0) tipdagi tenzor bo'lib, $\overline{a} \in T_xR^n$ vektorga

$$T(x)(\vec{a}) = a^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + \ldots + a^n\frac{\partial f}{\partial x^n}$$

sonini mos qo'yadi. Agar berilgan funksiya f kamida ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, $x \to T(x)$ moslik $(1,0)$ tipdagi silliq tenzor maydondir.

2. **Inersiya momentlari tenzori.** Uch o'lchamli evklid fazosida O nuqta (koordinata boshi) atrofida aylanayotgan qattiq jism berilgan bo'lsin. Qattiq jism o'zaro vaziyatlari o'zgarmaydigan N ta material nuqtadan iborat bo'lib, ularning massalari $m_1, m_2, ..., m_N$, t vaqtdagi koordinatalari esa $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), ..., \vec{x}_N(t)$ vektorlar bilan aniqlansin deb faraz qilamiz. Bu vektorlarni

$$\vec{x}_1(t) = \{x_1^1(t), x_1^2(t), x_1^3(t)\}, \quad \vec{x}_2(t) = \{x_2^1(t), x_2^2(t), x_2^3(t)\}, ...,$$
$$\vec{x}_N(t) = \{x_N^1(t), x_N^2(t), x_N^3(t)\}$$

ko'rinishida yozib,

$$a_{ij} = -\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^i x_k^j + \delta^{ij}\sum_{k=1}^{N} m_k |\vec{x}_k|^2$$

formula bilan simmetrik $\{a_{ij}\}$ matritsani aniqlaymiz.

Agar qo'zg'almas O nuqta orqali l to'g'ri chiziq o'tkazib, uning birlik yo'naltiruvchi vektorini $\vec{e} = \{e^1, e^2, e^3\}$ bilan belgilasak jismning l o'qqa nisbatan inersiya momenti $H(l)$ uchun

$$H(l) = \sum_{ij} a_{ij} e^i e^j = -\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i=1}^{3} x_k^i e^i \sum_j x_k^j e^i + \sum_{ij} \delta^{ij} e^i e^j \sum_1^N m_k |\vec{x}_k| =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \left(m_k \left(|\vec{x}_k|^2 - (\vec{x}_k, \vec{e}) \right)^2 \right)$$

tenglik posil bo'ladi. Bu skalyar miqdor jismning inersiya momentidir. Bu yerdagi $\{a_{ij}\}$ matritsa $(2,0)$ tipdagi tenzor maydon bo'lib, u inersiya momentlari tenzori deb ataladi.

3. **Deformatsiya tenzori**. Bizga R^n fazodagi birorta G sopani to'ldiruvchi tutash mupit berilgan bo'lsin. Bu mupit tashqi kuch ta'sirida deformatsiyalansa, $(x^1, x^2, ..., x^n)$ nuqta $(x^1 + u^1(x), ..., x^n + u^n(x))$ nuqtaga o'tadi. Ikkita yaqin $A(x^1, x^2, ..., x^n)$ va $B(y^1, y^2, ..., y^n)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$(\Delta e)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i - y^i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x^i\right)^2$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $y^i = x^i - \Delta x^i$ deb hisobladik. Bu nuqtalar deformatsiyadan keyin $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ nuqtalarga o'tsa, $\tilde{A}$ va $\tilde{B}$ nuqtalar orasidagi masofa kvadrati uchun

$$\left(\Delta \tilde{e}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y^i + u^i(y) - x^i - u^i(x)\right)^2 = \sum \left(\Delta x^i + \Delta u^i\right)^2 =$$
$$= (\Delta e)^2 + 2\sum \Delta x^i \Delta u^i + \sum \left(\Delta u^i\right)^2$$

tenglik o'rinli.

Agar $\Delta u^i = \sum \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \Delta x^k$ tenglikni hisobga olsak

$$
\begin{aligned}
(\Delta\tilde{e})^2-(\Delta e)^2 &= 2\sum_{i,k}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}\Delta x^i\Delta x^k+\sum_i\left(\sum\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^k\right)^2 = \\
&= 2\sum_{i,k}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^i\Delta x^k+\sum_{i,k,\rho}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^\rho}\Delta x^k\Delta x^\rho = \\
&= \sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)\Delta x^i\Delta x^k+\sum_{i,k,\rho}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^\rho}\Delta x^i\Delta x^\rho
\end{aligned}
$$

tenglikni olamiz.

Agar deformatsiyani aniqlovchi $u^i(x)$ funksiyalar yetarli darajada kichik bo'lsa,

$$
(d\tilde{e})^2-(de)^2 \cong \sum_{i,k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)dx^i dx^k \quad (1)
$$

munosabat o'rinli deb hisoblashimiz mumkin.

Biz

$$
\eta_{ij}(x)=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+\frac{\partial u^j}{\partial x^i}
$$

belgilash yordamida $(2,0)$ tipdagi tenzor maydonni aniqlaymiz. Bu tenzor maydon deformatsiya tenzori deb ataladi. Bu tenzor yordamida (1) ni

$$
(d\tilde{e})^2-(de)^2=\eta_{ij}dx^i dx^j
$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda takrorlanuvchi indekslar bo'yicha yig'indi belgisi yozilmagan.

§ 5. Kuchlanish tenzori va Guk qonuni.

Deformatsiyalangan elastik jismda kuchlanish paydo bo'ladi. Jismning P nuqtasidan o'tuvchi tekislikda bu nuqtani o'z ichiga oluvchi kichkina sohachani dG, uning P nuqtadagi normal vektorini $\vec{n}(P)$ bilan belgilab, sohada normal vektor yordamida oriyentatsiya kiritamiz: $P\to\vec{n}(P)$ moslik uzluksiz bo'lishini talab qilamiz. Bu elastik jismni P nuqta atrofida sohacha ikki qismga ajratadi. Kuchlanish deganda jism bir qismining ikkinchi qismiga ta'sir kuchi tushuniladi. Bu kuchni $\vec{F}$ bilan belgilasak, u normal vektorning funksiyasi bo'ladi, chunki P nuqtadan o'tuvchi tekisliklar cheksiz ko'p, shuning uchun har bir tekislikda sohachalar olib, ularning shaklini e'tiborga olmaymiz.

Mexanikada $\vec{F}$ kuchni normal vektorning chiziqli funksiyasi deb hisoblanadi(bu holda real jarayondan juda ko'p uzoqlashmaymiz). Bundan tashqari ta'sir etuvchi kuch soha yuzasi ds ga to'g'ri proporsional deb qabul qilamiz. Shunda

$$F^i = Q^i_j n^j ds$$

tenglikni olamiz. Bu yerdagi matritsa Q^i_j $(1,1)$ tipdagi tenzor maydonni aniqlaydi va kuchlanish tenzori deb ataladi. Kuchlanish va deformatsiya tenzori orasidagi bog'lanishni beruvchi Guk qonuni

$$Q^i_j = \alpha^{ikl}_j \eta_{kl}$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda fazo o'lchami uchga teng bo'lganligi uchun α^{ikl}_j, funksiyalar soni 81 ta bo'ladi: $81 = 3^{r+s} = 3^4$.

IV- bobga doir mashq va masalalar

1. Berilgan

$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning $P(1,1,1)$ nuqtadagi $\vec{a} = \{2,1,0\}$ vektor yo'nalish bo'yicha hosilasini toping.

Yechish. Buning uchun avvalo f funksiyaning gradiyentini topamiz:

$$\omega(x, y, z) = gradf = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

Biz bilamizki, ω kovektor maydon bo'lib, uning

$$\omega(1,1,1)(\vec{a}) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{0}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

qiymati f funksiyaning P nuqtadagi $\vec{a}$ yo'nalishi bo'yicha hosilasidir. Bu erda $\omega(x, y, z)$ kovektor $G = R^3 / \{0,0,0\}$ sohada aniqlangan silliq kovektor maydondir.

2. Tekislikda berilgan $X(x, y) = \{y, x\}$ vektor maydonning integral chiziqlarini toping.

Bu vektor maydonning (x_0, y_0) nuqtadan chiquvchi integral chizig'ini topish uchun

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

sistemani $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ boshlang'ich shartlar bilan yechamiz. Bu yerda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, xos vektorlari esa $\vec{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ vektorlardan iboratdir. Shuning uchun yechim vektor ko'rinishda $\vec{r}(t) = c_1\vec{e}_1e^{-t} + c_2\vec{e}_2e^{t}$ tenglama bilan, koordinatalar orqali yozsak

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{t}$$
$$y(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^{t}$$

tenglamalar bilan beriladi. Boshlang'ich shartlarni hisobga olib

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{x_0 - y_0}{2}e^{-t} + \dfrac{x_0 + y_0}{2}e^{t} \\ y(t) = \dfrac{x_0 - y_0}{2}e^{-t} + \dfrac{x_0 + y_0}{2}e^{t} \end{cases} \qquad (1)$$

tenglamalarni olamiz. Demak (x_0, y_0) nuqtadan chiquvchi integral chiziq (1) parametrik tenglamalar bilan beriladi.

3. Doiraviy silindrning Gauss egriligini toping.

Buning uchun $x^2 + y^2 = R^2$ tenglamadan foydalanib

$$\begin{cases} x = u \\ y = \pm\sqrt{R^2 - u^2} \\ z = v \end{cases} \quad \begin{matrix} -R < u < R \\ -\infty < v < \infty \end{matrix}$$

parametrik tenglamalarni yozamiz. Aniqlik uchun $P(u,v)$ nuqta atrofida $y = \sqrt{R^2 - u^2}$ tenglik o'rinli bo'lsin.Endi

$$\vec{r}_u = \left\{1, \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2}}, 0\right\}, \ \vec{r}_v = \{0,0,1\}$$

$$\vec{r}_{uu} = \left\{0, \frac{2u^2 - R^2}{\left(R^2 - u^2\right)^{3/2}}, 0\right\}, \ \vec{r}_{uv} = \{0,0,0\}$$

$$\vec{r}_{vv} = \{0,0,0\}$$

hosilalarni hisobga olib $R(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}_u$ ni hisoblaymiz.

$$R(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}_u = \nabla_{\vec{r}_u} \nabla_{\vec{r}_v} \vec{r}_u - \nabla_{\vec{r}_v} \nabla_{\vec{r}_u} \vec{r}_u = 0 - \nabla_{\vec{r}_v} \left(\Gamma_{12}^k \vec{r}_{u_k}\right) =$$
$$= -\Gamma_{12}{}^k \nabla_{\vec{r}_v} \vec{r}_{u_k} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\Gamma_{12}^k\right)\vec{r}_{u_k} = 0.$$

Bu yerda Γ_{12}^k–koeffitsiyentlar g_{11}, g_{12}, g_{22} funksiyalar orqali ifodalanadi. Bizda esa $\{g_{ij}\}$ koeffitsientlar faqat u ga bog'liq. Shuning uchun $\frac{\partial}{\partial u}\Gamma_{12}^k = 0$ tenglik $k = 1,2$ bo'lganda o'rinlidir.

Demak,

$$K = -\frac{I\left(R(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\vec{r}_u, \vec{r}_u\right)}{g_{11}^2 g_{22}^2 - g_{12}^2} = 0$$

Mustaqil ish uchun masalalar

1. Berilgan funksiyalarning berilgan nuqtalarda ko'rsatilgan yo'nalishlar bo'yicha hosilalari hisoblansin.

1) $f(x,y,z) = x^2 y + xz^2 - 2,$ $\quad$ $P(1,1,-1), \vec{a} = \{1,-2,4\}$

2) $f(x,y,z) = xe^y + ye^x - z^2,$ $\quad$ $P(3,0,2), \vec{a} = \{1,1,1\}$

3) $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x},$ $\quad$ $P(1,1,), \vec{a} = \{4,5\}$

2. Berilgan funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtalardagi berilgan chiziqlar yo'nalishlari bo'yicha hosilalarini toping.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2, P(1,2), \gamma : x^2 + y^2 = 5$

b) $f(x, y) = 2xy + y^2, P(\sqrt{2},1), \gamma : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

v) $f(x, y) = x^2 - y^2, P(5,4), \gamma : x^2 - y^2 = 9$

3. Bizga regulyar sirtda silliq Y vektor maydon berilgan bo'lsa,

$$(Y, \omega) \to \omega(\nabla_x Y)$$

moslik $(1,1)$ tipdagi tenzor maydonni aniqlanishini ko'rsating.

4. Egrilik tenzori yordamida ikki o'lchamli sferaning Gauss egriligini toping.

5. Egrilik tenzori yordamida elliptik paraboloidning Gauss egriligini pisoblang.

6. Tekislikda berilgan $X(x, y) = \{x, y\}$ vektor maydonning integral chiziqlarini toping.

7. Tekislikda berilgan $X(x, y) = \{x, y\}$ va $Y = \{y, -x\}$ vektor maydonlarning kommutatorini toping.

Adabiyot

1. Александров А.Д. Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М:Наука,1990
2. Azlarov T.A, Mansurov X. Matematik analiz. 1,2 qismlar, T., O’zbekiston, 1994, 1995.
3. Begmatov A., Musina N.G. Tenzor hisob elementlari. T., Universitet, 1993.
4. Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. Ленинградского университета , 1981, 232 с.
5. Narmanov A.Ya. Ko’pxilliklarlarning Eyler xarakteristikasi. T., ToshDU nashriyoti, 1990.
6. Narmanov A.Ya, Pshenichnov V. I va boshqalar. Umumiy topologiyadan mashq va masalalar. T., ToshDU nashriyoti, 1996.
7. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1974.
8. Петрова В.Т. Лекции по алгебре и геометрии. Часть-1,2. М., Влад, 1999.

M U N D A R I J A

Abdig'appor Yakubovich Narmanov

DIFFERENTSIAL GEOMETRIYA

Muharrir Z.Axmedjanova

Bosishga ruxsat etildi 5.02.2003 y. Bichimi 60×84 1/16. Ofset bosma usulida bosildi. Nashriyot hisob tabog'i 11,0. Shartli hisob tabog'i 19,3. Adadi 2000 nusxa. Bahosi shartnoma asosida. Buyurtma № 53.

"Universitet" nashriyoti. Toshkent – 700174. Talabalar shaparchasi. O'zMU ma'muriy bino, 2 qavat 7 xona.

O'zMU bosmaxonasida chop etildi.