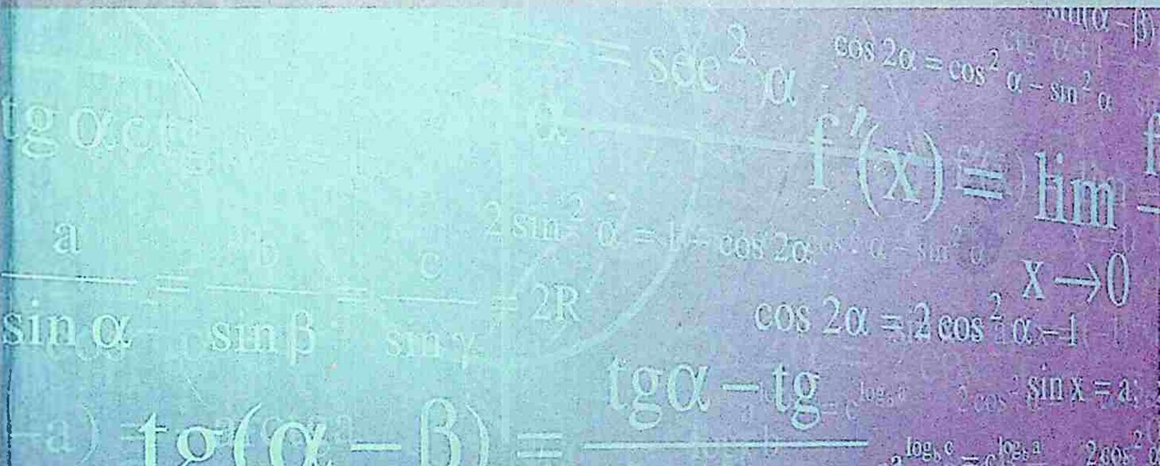
BAYTURAYEV A.M, KUCHAROV R.R

ALGEBRA VA GEOMETRIYA



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

BAYTURAYEV A.M., KUCHAROV R.R.

ALGEBRA VA GEOMETRIYA

O‘quv qo‘llanma

TOSHKENT
«Innovatsiya-Ziyo»
2020

UDK: 581:632.093/097(076)
BBK: 28.0
A 99

Bayturayev A.M., Kucharov R.R.
ALGEBRA VA GEOMETRIYA / O'quv qo'llauma/. Toshkent: Innovatsiya-Ziyo, 2020, 259 b.

Ushbu o'quv qo'llanma Fizika, Astranomiya va Tibbiyot fizikasi bakalavr ta'lim yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, Algeba va geometriya fanining algebra va geometriyaga doir mavzularni o'z ichiga oladi. O'quv qo'llanma yangi dasturga mos ravishda tayyorlangan. Qo'llanmada matritsalar va ular ustida amallar, n-tartibli determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemalari va ularning yechilish usullari, kompleks sonlar, ko'phadlar va ularning ildizlari, chiziqli fazo, chiziqli va bichiziqli akslantirishlar, chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari, normal shakli, vektor tushunchasi va vektorlar ustida chiziqli amallar, tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari, fazoda to'g'ri chiziq va tekislik, ikkinchi tartibli chiziqlar va ilkkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari kabi mavzular bayon qilingan.

Mualliflar:
f.-m.f.n., dotsent Bayturayev Ashur Maxmadaliyevich,
f.-m.,PhD, dotsent Kucharov Ramziddin Ruzimuradovich.

Taqrizchilar:
O'zbekiston Milliy universiteti Geometriya va topologiya kafedrasi mudiri,
f.-m.f.d., professor R.B.Beshimov,
Toshkent Davlat Texnika universiteti Oliy matematika kafedrasi mudiri,
f.-m.f.n. dotsent Sh.T.Pirmatov.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2018 yil 27-martdagi 274-sonli buyrug'iga asosan o'quv qo'llanma sifatida nashr etishga ruxsat etildi.

ISBN: 978-9943-7274-8-9

MUNDARIJA

KIRISH

Mazkur o'quv qo'llanma "Algebra va geometriya" fanidan "5140200-Fizika", "5140400 - Astronomiya" va "5141500 - Tibbiyot fizikasi" ta'lim yo'nalishlari uchun mo'ljallangan bo'lib, birinchi va ikkinchi semestrlarda o'qitiladi. O'quv qo'llanma Matematika fakultetining "Algebra va funksional analiz" va "Geometriya va topologiya" kafedralari professor-o'qituvchilari tomonidan tayyorlangan. "Algebra va geometriya" o'quv qo'llanmasini tayyorlashda yetakchi xorijiy OTMlar o'quv dasturlarining asosiy adabiyotlar ro'yxatiga kiritilgan Kenneth Kuttler "Elementary linear algebra", David Cherney, Tom Denton and Andrew Waldron "Linear Algebra", Fuzhen Zhang "Linear algebra", Izu Vaisman "Analytical Geometry" adabiyotlardan foydalanildi. "Algebra va geometriya" o'quv qo'llanmasi analitik geometriya, oliy va chiziqli algebra bo'limlaridan iboratdir: matritsalar va determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemalari, kompleks sonlar, ko'phadlar, chiziqli fazolar, chiziqli almashtirishlar, kvadratik formalar, vektorlar algebrasi va tekislikda to'g'ri chiziq, ikkinchi tartibli chiziqlar nazariyasi va ikkinchi tartibli sirtlar nazariyasi o'rganiladi. "Algebra va geometriya" fani deyarli barcha fanlar bilan bog'liq, ko'p fanlar uchun asos bo'lganligi uchun asosan birinchi va ikkinchi kurslarda o'qitiladi. Mazkur o'quv qo'llanma talabalarni matematikaning zaruriy ma'lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirish hamda matematika yo'nalishlarining uzviy bog'liqliklarini o'rgatishda muhim vosita bo'lib xizmat qiladi.

O'quv qollanmani tayyorlashda katta hissa qo'shgan O'zbekiston Milliy universiteti algebra va funksional analiz, hamda geometriya va topologiya kafedrasi professor-o'qituvchilari f.-m.f.d., professor B.A.Omirov, f.-m.f.d., professor A.X.Xudoyberdiyev, f.-m., PhD F.X.Xaydarov, f.-m.f.n., dotsent J.O.Aslonov va katta o'qituvchi A.N.Zoyidovlarga mualliflar o'zlarining minnatdorchiligini bildiradi. Shuningdek o'quv qollanmaning taqrizchilari f.-m.f.d., professor R.B.Beshimov va f.-m.f.n. dotsent Sh.T.Pirmatovlarga qimmatli maslahatlari uchun mualliflar o'zlarining minnatdorchiligini bildiradi.

Qo'llanma birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar haqidagi fikr va mulohazalaringizni ramz3364647@yahoo.com elektron manziliga jo'natishingiz mumkin.

I BOB MATRITSALAR VA DETERMINANTLAR

1-§. Matritsalar va ular ustida amallar

1.1-ta'rif. m ta satr va n ta ustundan iborat bo'lgan quyidagi to'rtburchakli jadvalga

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

matrisa deyiladi.

Odatda A matrisani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$A = (a_{i,j}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Bu yerda $a_{i,j}$ sonlar matritsaning *elementlari* deb ataladi. Agar $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($a_{i,j} \in \mathbb{C}$) bo'lsa A matritsa *haqiqiy* (*kompleks*) *elementli matritsa* deyiladi.

Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lgan, ya'ni $m = n$ bo'lgan matritsa *n-tartibli kvadrat matritsa* deb ataladi. m ta satr va n ta ustundan iborat barcha matritsalar to'plamini $M_{m,n}(\mathbb{K})$ orqali belgilanadi, bu yerda matritsa elementlari haqiqiy yoki kompleks bo'lishiga qarab, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ yoki $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bo'ladi. Barcha n-tartibli kvadrat matrisalar to'plami esa $M_n(\mathbb{K})$ orqali belgilanadi.

Mos satr va ustun elementlari teng bo'lgan bir hil tartibli matritsalar teng matritsalar deyiladi.

1.2-ta'rif. Berilgan A matritsaning satrlarini ustunlari, ustunlarini satrlari bilan almashtirisbdan hosil bo'lgan matritsa A matrisaga *transponirlangan matritsa* deyiladi va A^T kabi belgilanadi, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{bo'lsa,} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Endi matritsalar ustida amallarni aniqlaymiz. Matritsalarni qo'shish amali bir xil tartibli matritsalar uchun aniqlanadi.

1.3-ta'rif. $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsalarning yig'indisi deb, bu matritsalarning mos satr va ustun elementlarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan $m \times n$ – tartibli matritsaga aytiladi.

Agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

bo'ladi.

1.4-xossa. Ixtiyoriy $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun quyidagilar o'rinli:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan matritsa *neytral* (*nol*) *matritsa* deyiladi. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsa uchun qarama-qarshi matritsa quyidagi matritsadan iborat:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & -a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & \dots & -a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

1.5-ta'rif. Ixtiyoriy $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ matritsani $\lambda \in \mathbb{K}$ soniga ko'paytmasi deb quyidagi matritsaga aytiladi:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Endi matritsalarni ko'paytirish amalini kiritamiz. Ikkita matritsaning ko'paytmasi faqat birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lgan holdagina aniqlanadi.

1.6-ta'rif. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ va $B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$ matritsalarning ko'paytmasi deb, shunday $A \cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning i–satr va j–ustunida turgan elementi A matritsaning i–satridagi va B matrisaning j–ustunidagi mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni $A \cdot B$ matritsaning elementlari

$$a_{i1}b_{1j} + a_2 b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s \tag{4}$$

yig'indidan iborat.

Berilgan ta'rifdan ko'rinib turibdiki, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ va $B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$ matritsalarni ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan $A \cdot B$ matritsa $m \times s$-tartibli matritsa bo'ladi, ya'ni $A \cdot B \in M_{m,s}(\mathbb{K})$.

1.7-xossa. Ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{K}$, A va B matritsalar uchun quyidagilar o'rinli:

a) $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$;

b) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

c) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$;

d) $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$;

e) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

f) $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$.

Quyidagi xossada matritsalarni ko'paytirish amali assotsiativlik qonuniga bo'ysunishini ko'rsatamiz. Ko'paytmaning ta'rifidan ma'lumki, A, B va C matritsalar uchun $(A \cdot B) \cdot C$ ko'paytma ma'noga ega bo'lishi uchun birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga, ikkinchi matritsaning ustunlari soni esa uchunchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lishi kerak. Ushbu holatda $A \cdot (B \cdot C)$ ko'paytma ma'noga ega ekanligini ham ko'rish qiyin emas.

1.8-xossa. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$ va $C \in M_{s,t}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

munosabat o'rinlidir.

Isbot. Aytaylik, $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ va $C = (c_{i,j})$ bo'lsin, u holda

$$AB = U = (u_{i,j}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, s};$$

$$BC = V = (v_{i,j}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, t}.$$

$$(AB)C = P = (p_{i,j}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, t};$$

$$A(BC) = Q = (q_{i,j}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, t}.$$

ko'rinishida yozib olamiz. Ta'rifdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$u_{i,l} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,l}, \quad v_{k,j} = \sum_{l=1}^{s} b_{k,l} c_{l,j}.$$

Natijada

$$P = UC, \quad Q = AV$$

tengliklarga ko'ra

$$p_{i,j} = \sum_{l=1}^{s} u_{i,l}c_{l,j} = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j},$$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}v_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{s} a_{i,k}b_{k,l}c_{l,j}.$$

Demak, barcha $i = j = \overline{1,n}$ lar uchun $p_{i,j} = q_{i,j}$ tenglik o'rinli ekan, ya'ni

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Misol 1.1. Quyidagi matrisalar berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

U holda

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 12 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ -5 \cdot 3 + 7 \cdot 6 & -5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 27 & 15 \end{pmatrix}.$$

Matrisalarni ko'paytirish qoidasidan ma'lumki, $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,s}(\mathbb{K})$ bo'lib, $m \neq s$ bo'lsa, u holda $A \cdot B$ ko'paytmani aniqlash mumkin, lekin $B \cdot A$ ko'paytmani aniqlab bo'lmaydi. Agar $m = s \neq n$ bo'lsa, $A \cdot B$ va $B \cdot A$ ko'paytmalar aniqlanadi, lekin ularning tartiblari har xil, ya'ni $A \cdot B \in M_{m,s}(\mathbb{K})$, $B \cdot A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ bo'lganligi uchun ular teng bo'lmaydi. $m = s = n$ bo'lgan holda $A \cdot B$ va $B \cdot A$ matritsalar bir xil tartibli bo'lishiga qaramasdan, umuman olganda ular teng bo'lishi shart emas.

Misol 1.2. Bizga $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo'lsin.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \\ -5 \cdot 3 + 7 \cdot 6 & -5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 23 \\ 27 & 15 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 \\ 6 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) & 6 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 37 \\ -13 & 53 \end{pmatrix}.$$

Demak, matritsalarni ko'paytirish amali kommutativ emas, ya'ni $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Endi $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in M_{k,s}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallarini bog'lovchi distributivlik shartini o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

1.9-xossa. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C.$

Isbot. Haqiqatan ham,

$$\sum_{l=1}^{n}(a_{i,l}+b_{i,l})c_{l,j} = \sum_{l=1}^{n}(a_{i,l}c_{l,j}+b_{i,l}c_{l,j}) = \sum_{l=1}^{n}a_{i,l}c_{l,j} + \sum_{l=1}^{n}b_{i,l}c_{l,j}$$

tenglikning chap tomoni $(A+B)\cdot C$ matritsaning i–satri va j–ustunida turgan elementini, o'ng tomoni esa $A\cdot C + B\cdot C$ matritsalarning huddi shu yerda turuvchi elementini ifodalaydi.

Shuningdek, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, C \in M_{n,s}(\mathbb{K})$ matritsalar uchun $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ tenglikning o'rinli ekanligi ham yuqoridagi yo'l bilan ko'rsatiladi.

1.10-ta'rif. Bosh diagonali elementlari 1 ga teng bo'lib, qolgan barcha elementlari 0 ga teng bo'lgan n-tartibli kvadratik matritsa *birlik matritsa* deyiladi va birlik matritsa E kabi belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ma'lumki, ixtiyoriy $A \in M_n(\mathbb{K})$ uchun $A\cdot E = E\cdot A = A$ munosabat o'rinli.

1.11-ta'rif. Agar $A \in M_n(\mathbb{K})$ matritsa uchun $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ matritsa topilib, $A\cdot B = B\cdot A = E$ tenglik bajarilsa, B matritsa A matritsaning teskarisi deyiladi, A matritsa esa teskarilanuvchi matritsa deyiladi.

Teskarilanuvchi A matritsaning teskarisi A^{-1} kabi belgilanadi. Matritsaning teskarilanuvchanlik sharti va teskarisini topish usulini keyingi mavzularda keltiramiz.

2-§. O'rin almashtirishlar va o'rniga qo'yishlar

Bizga n ta natural sonlar $(1, 2, ..., n)$ berilgan bo'lsin. Bu sonlarni o'sish tartibida joylashishdan tashqari boshqa usullar bilan ham tartiblash mumkin. Masalan, $n = 3$ bo'lgan holda $(1, 2, 3)$ uchlikni $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 2, 1)$ va $(3, 1, 2)$ kabi tartiblarda joylash-tirishimiz mumkin.

2.1-ta'rif. 1, 2, ..., n sonlarning ma'lum bir tartibdagi joylashishiga n ta sondan tuzilgan *o'rin almashtirish* deyiladi.

n ta sondan iborat barcha o'rin almashtirishlar to'plami S_n kabi belgilanadi.

2.2-tasdiq. n ta sondan iborat barcha o'rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng, ya'ni $|S_n| = n!$.

Isbot. Ushbu tasdiqni isbotlashda matematik induksiya usulidan foydalanamiz. Ravshanki, $n = 1$ da o'rin almashtirish soni bitta bo'ladi, ya'ni $1! = 1$. Shuningdek, $n = 2$ bo'lgan holda o'rin almashtirishlar soni ikkita bo'ladi, ya'ni (1, 2) va (2, 1).

Tasdiqni $n-1$ ta sonli o'rin almashtirishlar uchun o'rinli deb faraz qilib, n ta sonli o'rin almashtirish uchun ko'rsatamiz.

$n-1$ ta sondan iborat barcha o'rin almashtirishlar ning har biriga unga kirmagan n sonini joylashtirib chiqish natijasida barcha n ta sondan tuzilgan o'rin almashtirish hosil qilamiz. Har bir o'rin almashtirishda n soni n xil usulda joylashadi.

$n-1$ ta sondan iborat barcha o'rin almashtirishlar $(n-1)!$ ta ekanligidan, n ta sondan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni $(n-1)! \cdot n = n!$ ekanligi kelib chiqadi.

2.3-ta'rif. O'rin almashtirishning ixtiyoriy ikkita elementini o'rnini almashtirishga transpozitsiya deyiladi.

Misol 2.1. $(1, 2, 3, 4)$ o'rin almashtirishni 2 va 4-o'rinlarini almashtirishdan quyidagi $(1, 4, 3, 2)$ o'rin almashtirish hosil bo'ladi.

2.4-teorema. n ta elementdan iborat barcha $n!$ ta o'rin almashtirishlarni shunday tartibda joylashtirish mumkinki, bunda xar bir keyingi o'rin almashtirish oldingisidan birgina transpozitsiya yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, transpozitsiyalashni ixtiyoriy o'rin almashtirishdan boshlash mumkin.

Isbot. Teoremani isbotlashda induksiya metodidan foydalanamiz. Ravshanki, $n = 2$ bo'lganda teorema o'rinli. Teoremani $n-1$ uchun o'rinli deb faraz qilib, n uchun isbotlaymiz.

Bizga

$$(i_1, i_2, \dots, i_n) \tag{1}$$

o'rin almashtirish berilgan bo'lsin. Birinchi o'rinda i_1 turgan n ta elementdan iborat barcha o'rin almashtirishlarni qarab chiqamiz. Bunday o'rin almashtirishlar $(n-1)!$ ta va ularni teoremaning talablariga moslab tartiblash mumkin.

Bu tartiblashni induktiv farazga muvofiq ixtiyoriy o'rin almashtirishdan, xususan, $(i_2, \dots, i_n)$ o'rin almashtirishdan boshlash mumkin, n ta simvoldan ana shunday yo'l bilan hosil qilingan o'rin almashtirishlarning oxirgisida i_1 simvolni ixtiyoriy boshqa bir simvol bilan, masalan, i_2 bilan transpozitsiyalaymiz va yangi hosil qilingan o'rin almashtirishdan boshlab, birinchi o'rinda i_2 turgan barcha o'rin almashtirishlarni keraklicha tartiblashtiramiz va hokazo. Bunday yo'l bilan, n ta simvoldan iborat barcha o'rin almashtirishlarni saralab chiqish mumkin.

Misol 2.2. S_3 to'plamning elementlarini quyidagi tartibda joylashtirib chiqamiz: 1,2,3; 1,3,2; 3,1,2; 3,2,1; 2,3,1; 2,1,3;

Bundan tashqari biz o'rin almashtirishda bir nechta transpozitsiyalar bajarib, boshqa o'rin almashtirishga o'tishimiz mumkin. O'rin almashtirishda ikki elementni transpozitsiyalash quyidagicha ko'rinishda ham tasvirlashimiz mumkin:

$$\ldots, i, \ldots, j, \ldots \xrightarrow{tr(i,j)} \ldots, j, \ldots, i, \ldots$$

2.5-ta'rif. Agar berilgan o'rin almashtirishda $i > j$ bo'lib, o'rin almashtirishda i soni j dan oldin turgan bo'lsa, i va j sonlar *inversiya tashkil etadi* deyiladi va $inv(i, j)$ shaklda belgilanadi.

O'rin almashtirishdagi inversiya tashkil etuvchi juftliklar soniga o'rin almashtirishning *inversiyasi* deyiladi va $inv(i_1, i_2, ..., i_n)$ kabi belgilanadi. Inversiyasi toq va juft son bo'lgan o'rin almashtirishlar mos ravishda toq va juft o'rin almashtirishlar deb ataladi. Berilgan $(i_1, i_2, ..., i_n)$ o'rin almashtirishning *signaturasi* deb,

$$sign(i_1, i_2, ..., i_n) = (-1)^{inv(i_1, i_2, ..., i_n)}$$

miqdorga aytiladi. Ma'lumki, o'rin almashtirishning signaturasi uning toq va juftligiga qarab, -1 yoki 1 ga teng bo'ladi.

2.6-teorema. O'rin almashtirishda har qanday bajarilgan transpozitsiya uning toq-juftligini o'zgartiradi.

Isbot. Dastlab, transpozitsiyalanayotgan i va j sonlar yonma-yon turgan holni ko'raylik, ya'ni $(k_1, ..., k_{s-1}, i, j, k_{s+2}, ..., k_n)$ va $(k_1, ..., k_{s-1}, j, i, k_{s+2}, ..., k_n)$ ko'rinishidagi o'rin almashtirishlarni qaraymiz. Ma'lumki, bu o'rin almashtirishlarning inversiyalar soni faqat i va j qa bog'liq holda farqlanadi. Ya'ni agar $i > j$ bo'lsa birinchi o'rin almashtirishning inversiyalar soni ikkinchisidan bittaga ortiq, aks holda bittaga kam bo'ladi. Ya'ni, transpozitsiyalangandan so'ng o'rin almashtirishning toq-juftligini o'zgaradi.

Endi umumiy holni, transpozitsiyalanayotgan i va j sonlar orasida $k_1, k_2, ..., k_s$ – s ta son joylashgan holni qaraymiz.

$$(\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots).$$

Bu o'rin almashtirishda i ni j dan keyingi o'ringa joylashtirish uchun $s+1$ ta transpozitsiya bajarib, o'rin almashtirishni $(\ldots, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, i, \ldots)$

ko'rinishga keltiramiz. Endi j ni k_1 dan oldin joylashtirish uchun s ta transpozitsiya bajarishimiz kerak va o'rin almashtirish $(..., j, k_1, k_2, ..., k_s, i, ...)$ ko'rinishiga keladi. Demak, $2s+1$ ta transpozitsiya bajarildi. Natijada birinchi o'rin almashtirish bilan hosil bo'lgan ikkinchi o'rin almashtirishlarning inversiyasi toq son martaga o'zgaradi. Demak, birinchi o'rin almashtirishning inversiyasi toq bo'lsa, transpozitsiyalash natijasida juft o'rin almashtirishga va aksincha, juft bo'lsa, toq o'rin almashtirishga o'tadi.

Ushbu teoremadan quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

2.7-natija. $n \geq 2$ bo'lganda n ta simvoldan tuzilgan juft o'rin almashtirishlar soni toq o'rin almashtirishlar soniga, ya'ni $\frac{n!}{2}$ ga teng.

Endi biz o'rniga qo'yishlar tushunchasi va uning xossalarini o'rganamiz. Bizga $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ birinchi n ta natural sondan iborat to'plam berilgan bo'lsin.

2.8-ta'rif. A to'plamning o'zini o'ziga akslantiruvchi o'zaro bir qiymatli akslantirishga *n-darajali o'rniga qo'yish* deyiladi.

$A = \{1, 2, \ldots, n\}$ to'plamda aniqlangan barcha $f : A \longrightarrow A$ biyektiv akslantirishlarni quyidagi ustun shaklida yozib chiqamiz:

$$f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{array}$$

Agar $f(1) = \alpha_1$, $f(2) = \alpha_2$, ..., $f(n) = \alpha_n$ deb olsak, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ o'rin almashtirishlar bo'lib, bu moslikni quyidagi sxema yordamida tasvirlab olamiz:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Demak, bu n-darajali o'rniga qo'yish bo'ladi.

Misol 2.3. $n = 4$ da $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ bo'lsa, bu to'rtinchi tartibli o'rniga qo'yish quyidagicha yoziladi:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sxemadan ko'rinib turibdiki, har bir o'rniga qo'yishlarga aniq bir o'rin almashtirish mos qo'yiladi. Demak, o'rin almashtirishlar uchun kiritilgan tushunchalar va xossalar to'g'ridan-to'g'ri o'rniga qo'yishlar uchun ham o'rinli bo'ladi. Masalan, hamma o'rniga qo'yishlar soni $n!$ ta bo'ladi.

Bundan tashqari, tuzilgan sxema orqali akslantirishlarning kompozitsiyasini quyidagicha tasvirlaymiz:

Agar $f : A \longrightarrow A$ va $g : A \longrightarrow A$ bo'lsa, u holda ularning $g \circ f : A \longrightarrow A$ kompozitsiya quyidagicha sxema ko'rinishda ifodalanadi:

$$f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{array} \qquad g: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{array}$$

Demak,

$$g \circ f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ g(f(1)) & g(f(2)) & \dots & g(f(n)) \end{array}$$

Shunday qilib, ushbu sxemadan

$$\begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ g(f(1)) & g(f(2)) & \dots & g(f(n)) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(f(1)) & g(f(2)) & \dots & g(f(n)) \end{pmatrix} = g \circ f$$

hosil bo'ladi.

Misol 2.4. $n = 4$ da
$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ va $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ o'rin almashtirishlarning ko'paytmasini sxematik ko'rinishi quyidagicha:

$$g \circ f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2. \end{array}$$

Algebraik ifodasi esa,

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

n-darajali o'rniga qo'yishning barcha simvollari o'z o'rnida qoladigan bo'lsa, bunday o'rniga qo'yishga *aynan o'rniga qo'yish* deyiladi, ya'ni:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishga teskari f^{-1} o'rniga qo'yish

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

shaklda bo'ladi. Quyidagi tenglik o'rinli ekanini tekshirib ko'rish qiyin emas:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Ta'kidlash joizki,

$$f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{array}$$

qoidani qaysi tartibda yozilishi ahamiyatga ega emas, shuning uchun f^{-1} o'rniga qo'yishning ustunlari bo'yicha shunday joylashtiramizki, uni birinchi satrida tartiblangan 1, 2, ..., n o'rin almashtirish joylashtiriladi.

Misol 2.5. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsa,

$f^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ bo'ladi.

Ravshanki, n-darajali o'rniga qo'yishlarni ko'paytirish assotsiativlik qoidasiga bo'ysunadi, ya'ni $\forall f,\ g,\ h$ o'rniga qo'yishlar uchun

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Ammo o'rniga qo'yishlar kommutativlik qoidasiga bo'ysunmaydi.

Misol 2.6. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ o'rniga qo'yishlar berilgan bo'lsa, u holda

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan $f \circ g \neq g \circ f$ ekanligi kelib chiqadi.

3-§. Determinant va uning xossalari

Bizga $A \in M_n(\mathbb{K})$ kvadrat matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

bu yerda $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ yoki $\mathbb{C}$.

Bu matritsaning ixtiyoriy satr va ustunidan bittadan olingan n ta elementlarining ko'paytmasini qaraymiz:

$$a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Ko'paytmaning ko'paytuvchilaridagi indekslaridan

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

o'rniga qo'yishni tuzib olamiz.

Demak, har bir ko'paytuvchiga bitta o'rniga qo'yishni mos qo'yish mumkin. Aksincha, har bir n-tartibli o'rniga qo'yishga matritsadan yuqoridagi kabi olingan ko'paytmani mos qilib qo'yishimiz mumkin.

Ko'paytmaning ishorasini o'rniga qo'yishni signaturasi bilan aniqlaymiz, ya'ni

$$sgn(\alpha) = (-1)^{inv\alpha}.$$

Quyidagi ko'paytmani hosil qilamiz:

$$sgn(\alpha) \cdot a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Hamma o'rniga qo'yishlar soni $n!$ bo'lganligi uchun, tuzilgan ko'paytmalar soni ham $n!$ ta bo'ladi. Bu elementlarning

$$\sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) \cdot a_{1,\alpha_1} \cdot a_{1,\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n,\alpha_n} \qquad (2)$$

yig'indisini qaraymiz.

3.1-ta'rif. Yuqorida hosil bo'lgan (2) yig'indiga berilgan n-tartibli A kvadrat matritsaning determinanti deyiladi. Determinant odatda $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, determinantni quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}. \qquad (3)$$

Agar (3) ifodada $n = 1, 2, 3$ deb olsak, mos ravishda quyidagi ifodalarni olamiz:

$$\det(a_{11}) = a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Masalan, uchinchi tartibli determinantning to'rtinchi ko'paytmasini olsak, unga $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ uchinchi tartibli o'rniga qo'yish mos qo'yilgan bo'lib, bu o'rniga qo'yishning inversiyasi 3 ga teng. Shuning uchun ko'paytma manfiy ishora bilan ishtirok etadi.

Misol 3.1. a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 20 + 6 = 26;$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 50 - 12 + 60 + 4 - 45 = -25.$

Endi determinantlarni hisoblashda asosiy vazifalarni bajaruvchi xossalarni keltiramiz.

3.2-xossa. Matritsani transponirlash natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, yani $|A| = |A^T|$.

Isbot. Ma'lumki, A matrisaning determinantini hisoblashda har bir satr va ustunlardan bittadan element olinadi. Transponirlangan matritsaning determinantida ham aynan shu ko'paytmalar ishtirok etadi. Demak, transponirlash natijasida yig'indidagi ko'paytmalar o'zgarishsiz qoladi.

Bu ko'paytmalarning ishorasini aniqlovchi o'rniga qo'yish esa $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ dan $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ ga o'zgaradi.

Chunki, A determinantdagi $a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$ element A^T determinantda $a_{\alpha_{1},1} \cdot a_{\alpha_{2},2} \cdot \ldots \cdot a_{\alpha_{n},n}$ kabi o'rinda keladi. $sgn(\alpha) = sgn(\alpha^{-1})$ ekanligidan, hosil bo'lgan ko'paytmalarning ishoralari ham bir xil bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, A^T matritsaning determinanti A matritsaning determinantiga teng ekan.

Ushbu xossadan determinantning satrlari uchun o'rinli bo'ladigan barcha xossalari ustunlari uchun ham o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun determinantning qolgan xossalarini faqat satrlar uchun keltirish kifoya.

Quyidagi ikkita xossa determinantning istalgan satrlari bo'yicha chiziqli ekanligini anglatadi.

3.3-xossa. Agar determinantning biror satri ikkita qo'shiluvchilardan iborat bo'lsa, u holda bu determinant satrlari shu qo'shiluvchilardan iborat bo'lgan ikkita determinantning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i,1} + c_{i,1} & \dots & b_{i,n} + c_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot.

$$\Delta = \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(b_{i,\alpha_i}+c_{i,\alpha_i})\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot b_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} + \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot c_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}$$

bo'lib, bu qo'shiluvchilar mos ravishda

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i,1} & \dots & c_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ga teng bo'ladi.

Isbotlangan xossa determinantning satri bir nechta qo'shiluvchilardan iborat bo'lgan holda ham o'rinlidir.

3.4-xossa. Agar determinantning biror-bir satri umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsa, u holda bu umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarib yozish mumkin, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i,1} & \dots & ka_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Haqiqatan,

$$\Delta = \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot ka_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} =$$

$$k\sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot\ldots\cdot a_{i,\alpha_i}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.5-xossa. Agar determinantning biror satri nollardan iborat bo'lsa, u holda determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan, determinant ta'rifiga asosan yig'indidagi har bir ko'paytmada barcha satrlardan bittadan element ishtirok etadi. Xususan, barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrdan ham albatta bitta element, ya'ni nol olinadi. Demak, ko'paytmalar nolga teng bo'lib, ularning yig'indisi bo'lgan determinantning qiymati ham nolga teng bo'ladi.

3.6-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita satri o'rnini almashtirish natijasida uning faqat ishorasigina o'zgaradi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & .. \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Agar birinchi determinantning umumiy hadi $a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{j,\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$ bo'lsa, satrlarni almashtirishdan so'ng hosil bo'lgan determinantning umumiy hadi

$$a_{1,\alpha_1} \cdot \ldots \cdot a_{j,\alpha_j} \cdot \ldots \cdot a_{i,\alpha_i} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$$

bo'ladi. Bu hadlarga mos keluvchi o'rniga qo'yishlar esa,

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

bo'lib, ularning ishoralari o'zaro qarama-qarshi bo'ladi.

Demak, determinantlarning umumiy hadlari qarama-qarshi ishorali bo'lganligi uchun determinantlarning qiymatlari ham faqat ishorasi bilan farq qiladi.

Bu xossadan to'g'ridan-to'g'ri quyidagi xossani hosil qilamiz.

3.7-xossa. Bir xil satrlarga ega bo'lgan determinantning qiymati nolga teng.

Isbot. Faraz qilaylik, determinantning i-satri j-satr bilan bir hil bo'lsin. U holda oldingi xossaga asosan bu satrlarni o'rinlarini almashtirish natijasi unga ishorasi qarama-qarshi bo'lgan determinantni hosil qilamiz va ular aynan tengdir, ya'ni $\Delta = -\Delta$ bo'lib, bundan $2\Delta = 0$, $\Delta = 0$hosil bo'ladi.

3.4 va 3.7-xossalardan quyidagi xossaga ega bo'lamiz:

3.8-xossa. Proporsional satrlarga ega bo'lgan determinantning qiymati nolga teng.

Isbot.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i,1} & \dots & ka_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Endi biz determinantlarni hisoblashda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan xossani keltiramiz.

3.9-xossa. Agar determinantning biror satrini λ soniga ko‘paytirib, boshqa bir satriga qo‘shsak, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Isbot. Determinantni i–satrini λ ga ko‘paytirib, j–satriga qo‘shamiz:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i,1} + a_{j,1} & \dots & \lambda a_{i,n} + a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i,1} & \dots & \lambda a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \Delta = \Delta.$$

Misol 3.2. Ushbu determinantni xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & -8 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 13 & -12 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 27 = -54.$$

4-§. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar

Endi biz determinantlarni hisoblashda muhim vositachi vazifasini bajaruvchi minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalarini kiritamiz. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar determinantlarning tartibini pasaytirib hisoblashda asosiy rol o'ynaydi.

Bizga quyidagi n-tartibli determinant berilgan bo'lsin

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantning ixtiyoriy $a_{i,j}$ elementining *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $a_{i,j}$ elementni 1 bilan, i-satr va j-ustun qolgan elementlarini nollar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi, ya'ni $a_{i,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Berilgan $a_{i,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{i,j}$ kabi belgilanadi.

4.1-xossa. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satri elementlari bilan mos algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}. \tag{1}$$

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun determinantni qiyudagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}+0+\dots+0 & \dots & 0+\dots+a_{i,j}+\dots+0 & \dots & 0+\dots+0+a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3.3-xossaga ko'ra ushbu determinantni n ta determinantlar yig'indisi shaklida ifodalash mumkin:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{i,j} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Hosil bo'lgan determinantlarning i-satrlaridan mos ravishda $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$ sonlarini determinantlar tashqarisiga chiqarib yozamiz:

$$\det(A) = a_{i,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + a_{i,n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinantlarni algebraik to'ldiruvchilarga teng ekanligini ko'rish qiyin emas. Buning uchun birinchi determinantning i-satrini $-a_{1,1}$ ga ko'paytirib birinchi satrga, $-a_{2,1}$ ga ko'paytirib ikkinchi satrga, va hokazo $-a_{n,1}$ ga ko'paytirib oxirgi satrga qo'shsak $A_{i,1}$ algebraik to'ldiruvchi hosil bo'ladi.

Huddi shunday qolgan determinantlar $A_{i,2}, \dots, A_{i,n}$ algebraik to'ldiruvchilarni beradi, Demak,

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}.$$

Determinantning ushbu xossasi uni biror satri bo'yicha yoyish xossasi deyiladi.

Agar $\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \dots + a_{i,n}A_{i,n}$ yoyilmada i-satrining elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilan almashtirsak, hosil bo'ladigan

$$b_1 A_{i,1} + b_2 A_{i,2} + \ldots + b_n A_{i,n} \qquad (2)$$

ifoda determinantning i-satrini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladigan ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 & \ldots & b_j & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantga teng bo'ladi.

Demak, biror satr algebraik to'ldiruvchilarini berilgan n ta b_1, b_2, ..., b_n sonlarga ko'paytmalarining yig'indisi shu satr elementlarini berilgan sonlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsaning determinantiga teng.

Bu xulosadan quyidagi xossa osongina kelib chiqadi.

4.2-xossa. Determinantning biror satri elementlarini boshqa bir satr algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisiga nolga teng, ya'ni

$$a_{i,1} A_{k,1} + a_{i,2} A_{k,2} + \ldots + a_{i,n} A_{k,n} = 0, \qquad (3)$$

bu yerda $i \neq k$.

Isbot. Ma'lumki,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,j} & \ldots & a_{k,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{k,1} A_{k,1} + a_{k,2} A_{k,2} + \ldots + a_{k,n} A_{k,n}.$$

Ushbu tenglikning o'ng tomonidagi $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ elementlarni mos ravishda $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ lar bilan almashtirsak,

$$a_{i,1} A_{k,1} + a_{i,2} A_{k,2} + \ldots + a_{i,n} A_{k,n} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

ekanligini hosil qilamiz.

Endi minor tushunchasini kiritamiz. Ushbu mavzuda faqat $n-1$-tartibli minorni aniqlash bilan chegaralanib, ixtiyoriy tartibli minor ta'rifini keyingi mavzuda keltiramiz.

Determinantning $n-1$-tartibli *minori* deb, uning i-satr va j-ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan $n-1$-tartibli determinantga aytiladi va $\Delta_{i,j}$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\Delta_{i,j}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

4.3-tasdiq. $A_{i,j}=(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, ya'ni algebraik to'ldiruvchi unga mos $n-1$ tartibli minor bilan faqat ishoragagina farq qilishi mumkin.

Isbot. Tasdiq isbotini dastlab, $i=j=1$ bo'lgan hol uchun ko'rsatamiz:

$$A_{1,1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Determinant ta'rifiga ko'ra,

$$A_{1,1}=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}.$$

Lekin, $a_{1,1}=1$ va $a_{1,k}=a_{k,1}=0,\ 2\le k\le n$ bo'lganligi uchun, $\alpha_1=1$ bo'lib, $\alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ sonlari esa $2,\ \dots,\ n$ sonlaridan hosil bo'lgan o'rin almashtirish bo'ladi. Bundan tashqari

$$inv(1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)=inv(\alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$A_{1,1}=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}=$$

$$=\sum_{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)}(-1)^{inv(\alpha_2,\dots,\alpha_n)}a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{n,\alpha_n}=\begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}=\Delta_{1,1}$$

kelib chiqadi.

Endi tasdiqni ixtiyoriy i va j uchun isbotlaymiz:

$$A_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Determinantning 3.6-xossasidan foydalanib, ushbu determinantdagi 1 sonini chap yuqori burchakka ko'chiramiz. Buning uchun i-satrni ketma-ket o'zidan oldingi starlar bilan, so'nga j-ustunni o'zidan oldingi ustunlar bilan almashtirish kifoya. Bu almashtirishlar natijasida determinantning qiymati faqat $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ ga o'zgarishini hisobga olsak,

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Yuqorida isbotlangan $i = j = 1$ holdan foydalansak, $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ ekanligini hosil qilamiz.

5-§. Laplas teoremasi

Biz avvalgi mavzuda $A_{i,j}$ algebraik to'ldiruvchi va $n-1$ - tartibli $\Delta_{i,j}$ minor tushunchalarini kiritgan edik. Ushbu mavzuda ixtiyoriy k - tartibli minor tushunchasini kiritamiz.

Berilgan n-tartibli determinantning ixtiyoriy k ta satr va k ta ustunining kesishgan joylaridan hosil qilingan k-tartibli tartibli determinantga *k - tartibli minor* deyiladi. Determinantning $i_1, i_2, \dots, i_k$ satrlari va $j_1, j_2, \dots, j_k$ ustunlari kesishmasidan tuzilgan minor $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k}$ kabi belgilanadi. Xususan, determinantning elementlarini ham birinchi tartibli minorlar deb qarash mumkin.

Tanlab olingan k ta satr va k ta ustunlarni o'chirib tashlash natijasida hosil bo'lgan $(n-k)$-tartibli determinantga, berilgan minorning *to'ldiruvchi minori* deyiladi. $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k}$ minorning to'ldiruvchi minori $\overline{M}_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k}$ kabi belgilanadi.

k-tartibli $M_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k}$ minorning *algebraik to'ldiruvchisi deb*

$$\overline{A}_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k} = (-1)^{S_M}\overline{M}_{i_1,i_2,\dots,i_k}^{j_1,j_2,\dots,j_k} \tag{1}$$

ifodaga aytiladi, bu yerda

$$S_M = (i_1 + i_2 + \dots + i_k) + (j_1 + j_2 + \dots + j_k).$$

Ta'kidlash joizki, algebraik to'ldiruvchi tushunchasi minor birinchi tartibli bo'lgan holda 4-mavzuda kiritilgan tushuncha bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $A_{i,j} = \overline{A}_i^j$. $n-1$ - tartibli $\Delta_{i,j}$ minor esa birinchi tartibli $a_{i,j}$ minorning to'ldiruvchi minori bo'ladi.

Misol 5.1. Ushbu $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \\ -4 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ determinant uchun

$$M_{1,3} = 2, M_{1,3}^{2,3} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 24, M_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -86.$$

Berilgan matritsaning bosh diagonalida joylashgan

$$a_{1,1}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{12,} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

minorlar matritsaning *bosh minorlari* deb ataladi.

Minor, hamda unga mos keluvchi to'ldiruvchi minor va algebraik to'ldiruvchilarni qulaylik uchun M, $\overline{M}$ va $\overline{A}$ lar bilan belgilab olamiz.

5.1-lemma. $M \cdot \bar{A}$ ko'paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo'lib, ular bir hil ishorali bo'ladi.

Isbot. Lemma isbotini dastlab, berilgan M minor k-tartibli bosh minor bo'lgan hol uchun ko'rsatamiz:

$$M \cdot \bar{A} = M \cdot (-1)^{S_M} \cdot \overline{M} = (-1)^{S_M} \cdot M \cdot \overline{M}.$$

U holda

$$S_M = (1 + 2 + \dots + k) + (1 + 2 + \dots + k) = 2(1 + 2 + \dots + k)$$

juft son bo'ladi. Demak,

$$M \cdot \bar{A} = M \cdot \overline{M}.$$

Ma'lumki, M va $\overline{M}$ minorlarning hadlari mos ravishda

$$sgn(\alpha)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{k,\alpha_k} \text{ va } sgn(\beta)\cdot a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdot a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdot\ldots\cdot a_{n,\beta_n}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & k\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}k+1 & k+2 & \ldots & n\\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots & \beta_n\end{pmatrix}$$

va $sgn(\alpha)=(-1)^{inv\alpha}$, $sgn(\beta)=(-1)^{inv\beta}$.

Ushbu hadlarning ko'paytmasi

$$sgn(\alpha)\cdot sgn(\beta)\cdot a_{1,\alpha_1}\cdot a_{2,\alpha_2}\cdot\ldots\cdot a_{k,\alpha_k}\cdot a_{k+1,\beta_{k+1}}\cdot a_{k+2,\beta_{k+2}}\cdot\ldots\cdot a_{n,\beta_n}$$

bo'lib, bu ko'paytma determinantning turli satr va ustunlaridan bittadan olingan n ta elementlarning ko'paytmasidan iborat, ya'ni n-tartibli determinantning hadi bo'ladi. Endi n-tartibli determinantning ushbu hadi ishorasi $sgn(\alpha)\cdot sgn(\beta)$ ga teng ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, bu hadning indekslaridan tuzilgan

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & k & k+1 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \ldots & \beta_n\end{pmatrix}$$

o'rniga qo'yishning $inv\alpha+inv\beta$ ta inversiyasi bor, chunki hech qaysi α_i hech bir β_j bilan inversiya tashkil qilmaydi, ya'ni barcha α_i sonlari β_j lardan kichik.

Shunday qilib, biz M minor k-tartibli bosh minor bo'lgan holda $M\cdot\bar{A}$ ko'paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo'lishini ko'rsatdik.

Endi umumiy holni, ya'ni M minor $M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ bo'lgan holni qaraymiz. Ma'limki, $i_1<i_2<\ldots<i_k$, $j_1<j_2<\ldots<j_k$ deb olish mumkin.

U holda $|A|$ determinantning i_1, i_2, ..., i_k satrlari va j_1, j_2, ..., j_k ustunlarini mos ravishda o'zidan oldingi satrlar va ustunlar bilan i_1-1, i_2-2, ..., i_k-k va j_1-1, j_2-2, ..., j_k-k marotaba almashtirsak, hosil bo'lgan determinantda berilgan M minor bosh minor bo'ladi.

Hosil bo'lgan $|A'|$ determinant oldingi $|A|$ determinant bilan faqat $(-1)^z$ ishora bilangina farq qiladi, ya'ni

$$|A|=(-1)^z\cdot|A'|,$$

bu yerda

$$z=(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)+(j_1-1)+(j_2-2)+\ldots+(j_k-k)=$$
$$=(i_1+i_2+\ldots+i_k)+(j_1+j_2+\ldots+j_k)-2(1+2+\ldots+k)=$$
$$=S_M-2(1+2+\ldots+k).$$

Demak,

$$|A| = (-1)^{S_M - 2(1+2+..+k)} \cdot |A'| = (-1)^{S_M} \cdot |A'|.$$

Bu yerdagi $|A'|$ determinantda M minor bosh minor bo'lganligi uchun $M \cdot \overline{M}$ ko'paytmasining hadlari $|A'|$ determinantning hadlari bo'lishi kelib chiqadi. $M \cdot \overline{A} = (-1)^{S_M} M \cdot \overline{M}$ ekanligidan $M \cdot \overline{A}$ ko'paytmaning hadlari $|A|$ determinantning hadlari bo'lishi kelib chiqadi.

Endi biz determinantni bir nechta satri yoki ustuni bo'yicha yoyish haqidagi Laplas teoremani keltiramiz.

5.2-teorema. (Laplas teoremasi). Determinantning tanlab olingan k ta $(1 \leq k \leq n-1)$ satri bo'yicha barcha k-tartibli minorlarining o'z algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisi determinantning qiymatiga teng.

Isbot. Teoremaning shartiga asosan biz

$$|A| = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \ldots + M_z A_z \tag{2}$$

yoyilmaning to'g'ri ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Bu yerda M_i lar tanlab olingan i_1, i_2, ..., i_k satrlar bo'yicha olingan barcha minorlar va A_i lar minorlarga mos keluvchi algebraik to'ldiruvchilardir.

Yuqoridagi lemmaga asosan $M_i A_i$, $i = \overline{1, z}$ ko'paytmalarning har bir hadi determinantning hadi bo'lib, ular bir xil ishorali bo'ladi.

Aytaylik,

$$a_{1,\alpha_1} \cdot a_{2,\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n,\alpha_n}$$

determinantning ixtiyoriy hadi bo'lsin. Bu ko'paytmadan tanlab olingan i_1, i_2, ..., i_k satrlarga tegishli bo'lgan elementlarning ko'paytmasini olamiz:

$$a_{i_1,\alpha_{i_1}} \cdot a_{i_2,\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot a_{i_k,\alpha_{i_k}}.$$

Bu ko'paytma i_1, i_2, ..., i_k satrlar va α_{i_1}, α_{i_2}, ..., α_{i_k} ustunlarning kesishmasida turuvchi k-tartibli M minorning umumiy hadi bo'lib, olinmay qolgan ko'paytuvchilar $(n-k)$-tartibli $\overline{M}$ to'ldiruvchi minorning umumiy hadi bo'ladi.

Shunday qilib, determinantning har qanday hadi tanlab olingan satrlar bo'yicha M minor bilan to'ldiruvchi $\overline{M}$ minorining tarkibiga kiradi. Determinantda bo'lgan hadni hosil qilish uchun esa, to'ldiruvchi minorni algebraik to'ldiruvchi bilan almashtirish kifoya.

Endi biz (2) tenglikning o'ng tomonidagi hadlar soni chap tomonida hadlar soniga teng ekanligini ko'rsatamiz. Bizga ma'lumki, M_i minorda $k!$ ta had bo'lib, A_i algebraik to'ldiruvchida esa $(n-k)!$ ta had mavjud. Demak, $M_i A_i$ ko'paytmada $k!(n-k)!$ ta had ishtirok etadi. Ma'lumki, tanlab olingan k ta satrdan hosil qilinadikan barcha k-tartibli minorlar soni n ta sondan k

ta sonni tanlab olishlar soniga, ya'ni C_n^k ga teng. Demak, o'ng tomondagi barcha hadlar soni

$$C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

ga teng. Bu esa chap tomondagi hadlar soni bilan o'ng tomondagi hadlar soni teng ekanligini bildiradi. Chunki, n-tartibli determinantning $n!$ ta hadi mavjud. Demak, biz determinantning barcha hadi o'ng tomonda ham aynan bir marotaba ishtirok etishini ko'rsatdik.

Misol 5.2. Ushbu 4-tartibli determinantni Laplas teoremasidan foydalanib hisoblang:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantni birinchi va uchinchi satrlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz, ya'ni $i_1 = 1$, $i_2 = 3$ bo'lgan holni tanlaymiz. $k = 2$ bo'lganligi uchun

$$z = C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

bo'ladi.

Determinantning qiymati esa quyidagiga tengdir:

$$d = M_{1,3}^{1,2}A_{1,3}^{1,2} + M_{1,3}^{1,3}A_{1,3}^{1,3} + M_{1,3}^{1,4}A_{1,3}^{1,4} + M_{1,3}^{2,3}A_{1,3}^{2,3} + M_{1,3}^{2,4}A_{1,3}^{2,4} + M_{1,3}^{3,4}A_{1,3}^{3,4} =$$

$$= (-1)^{1+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3+1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3+1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3-2)\cdot(-25-6) = -5\cdot(-31) = 155.$$

Yuqoridagi misoldan ko'rinib turibdiki, Laplas teoremasini qo'llashda tarkibida nol ishtirok etgan satr yoki ustunlarni tanlab olish, hisob kitoblarni ancha yengillashtiradi. Demak, determinantda yetarlicha nollar ishtirok etgan holda, aynan noli ko'p satrlar uchun Laplas teoremasini qo'llash orqali determinantni tez va oson hisoblash mumkin.

6-§. Teskari matritsa va determinantning qo'shimcha xossalari

Ushbu paragrafda biz n-tartibli matritsaning determinanti bilan bog'liq masalalar bilan shug'ullanamiz.

6.1-ta'rif. Determinanti nolga teng bo'lgan matritsa *xos* matritsa, noldan farqli bo'lgan matritsa esa *xosmas* matritsa deyiladi.

Bizga A va B n-tartibli kvadrat matritsalar berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ushbu matritsalar ko'paytmasi $A\cdot B$ ham n-tartibli kvadrat matritsa bo'ladi.

6.2-teorema. Ixtiyoriy A va B kvadrat matritsalar uchun

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$$

tenglik o'rinli, ya'ni matritsalarning ko'paytmasining determinanti determinantlarning ko'paytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, $A=(a_{i,j})$ va $B=(b_{i,j})$ bo'lib, ularning ko'paytmasi $A\cdot B=C=(c_{i,j})$ bo'lsin. A va B matritsalar yordamida quyidagi $2n$-tartibli determinantni tuzib olamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n}\\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremasiga ko'ra,

$$\Delta=\det(A)\cdot\det(B). \tag{1}$$

Ikkinchi tomondan Δ determinantni determinant xossalaridan foydalanib hisoblaymiz. Buning uchun Δ determinantni $1,2,\dots,n$ ustunlarini mos ravishda $b_{1,1},\ b_{2,1},\ \dots,\ b_{n,1}$ larga ko'paytirib, $(n+1)$-ustuniga qo'shamiz, so'ngra $b_{1,2},\ b_{2,2},\ \dots,\ b_{n,2}$ larga ko'paytirib, $(n+2)$-ustuniga qo'shamiz va hokazo, $b_{1,n},\ b_{2,n},\ \dots,\ b_{n,n}$ larga ko'paytirib, $2n$-ustuniga qo'shamiz. Natijada, Δ determinantning $b_{i,j}$ elementlari turgan elementlar nolga aylanadi. Yuqori o'ng burchagida turgan nollar o'rniga esa

$$a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\ldots+a_{i,n}b_{n,j},\ (i,\ j=\overline{1,n})$$

elementlar joylashib, bu element $C=A\cdot B$ ko'paytmaning aynan $c_{i,j}$ elementlaridan iboratdir. Demak, determinant quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Laplas teoremasini yana bir bor qo'llab, determinantni uning oxirgi n ta ustuni bo'yicha yoyamiz. $|C|$ minor uchun to'ldiruvchi minori

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

bo'lib, uning qiymati $(-1)^n$ ga teng. $|C|$ minor $1, 2, \dots, n$ satrlarda va $n+1, n+2, \dots, 2n$ ustunlarda joylashganligi sababli

$$\Delta = (-1)^{S_C} \cdot (-1)^n |C|,$$

$$S_C = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1 + n + 2 + \ldots + 2n) = \frac{1 + 2n}{2} \cdot 2n = n + 2n^2$$

bo'ladi. Demak,

$$\Delta = (-1)^{n+2n^2}(-1)^n|C| = (-1)^{2n+2n^2}|C| = (-1)^{2(n+n^2)}|C| = |C|.$$

Bundan esa $|C| = |A| \cdot |B|$ kelib chiqadi, ya'ni $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Ushbu teorema bir nechta matritsalarning ko'paytmalari uchun ham o'rinlidir, ya'ni

$$\det(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_s) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_s,$$

bu yerda $A_i \in M_n(\mathbb{K})$.

6.2.-teoremadan xos va xosmas matritsalar uchun quyidagi xossalar kelib chiqadi.

6.3-xossa. a) Xos matritsalar ko'paytmasi ham xosdir;

b) Xosmas matritsalar ko'paytmasi ham xosmasdir;

c) Agar matritsalar ko'paytmasida biror ko'paytuvchisi xos matritsa bo'lsa, u holda ko'paytma ham xosdir.

Biz 1-mavzuda berilgan A kvadrat matritsaning teskarisi tushunchasini kiritgan edik. Endi teskari matritsani topish usulini keltiramiz.

6.4-teorema. A matritsa teskarilanuvchi bo'lishi uchun uning xosmas bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* A matritsa teskarilanuvchi bo'lsin, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud va

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

6.2-teoremaga ko'ra,

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(E), \ \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1.$$

Ushbu tenglikdan $\det(A) \neq 0$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A matritsa xosmas bo'lsin. A matritsaning barcha $a_{i,j}$ elementlari $A_{i,j}$ algebraik to'ldiruvchilardan n-tartibli

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

matritsani tuzib olamiz. A^{*} matritsaga A matritsaning biriktirilgan matritsasi deyiladi. Endi AA^{*} va $A^{*}A$ ko'paytmalarni topamiz. Ravshanki,

$$AA^{*} = A^{*}A = \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bo'ladi, bu yerda $d = \det A$.

Haqiqatan ham, A matritsani i-satrini A^{*} matritsaning i-ustu-nining mos elementlariga ko'paytirib qo'shsak, AA^{*} matrisaning i-satr va i-ustunida

$$a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \ldots + a_{i,n}A_{i,n} = d$$

element hosil bo'ladi.

Huddi shunday A matritsaning i-satrini A^{*} matritsaning j-ustuniga mos ravishda ko'paytirib qo'shishdan hosil bo'lgan quyidagi element:

$$a_{i,1}A_{j,1} + a_{i,2}A_{j,2} + \ldots + a_{i,n}A_{j,n}, i \neq j$$

nolga teng bo'ladi.

$A^{*}A$ ko'paytmani ham yuqoridagi kabi hisoblash mumkin.

A matritsa xosmas matritsa bo'lganligi uchun quyidagi ko'paytmani qaraymiz.

$$A\left(\frac{1}{d}A^{*}\right) = \frac{1}{d}(AA^{*}) = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Demak, A matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{d}A^{*} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{d} & \frac{A_{2,1}}{d} & \dots & \frac{A_{n,1}}{d} \\ \frac{A_{1,2}}{d} & \frac{A_{2,2}}{d} & \dots & \frac{A_{n,2}}{d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1,n}}{d} & \frac{A_{2,n}}{d} & \dots & \frac{A_{n,n}}{d} \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Teskari matritsa quyidagi sodda xossalarga ega

6.5-xossa. a) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$;

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

c) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

d) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

Misol 6.1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaning teskarisini toping.

Bu matritsaning determinanti $|A| = -1$ ekanligini hisoblash qiyin emas. Demak, A xosmas matrisa bo'lib, uning teskarisi mavjud. A matritsaning algebraik to'ldiruvchilari

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{1,2} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{2,1} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{3,2} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Demak, biriktirilgan matritsa

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

bo'lib, teskari matritsa esa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

II BOB. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMALARI (UMUMIY NAZARIYA)

7-§. Chiziqli tenglamalar sistemalarini yechish

Bizga m ta tenglamadan iborat n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

bu yerda, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumlar. Tenglamalarni birinchi, ikkinchi, va hokazo m-tenglama deb nomerlab chiqilgan deb hisoblaymiz. $a_{i,j}$ koeffitsient i-tenglamadagi x_j noma'lumning koeffitsientini, b_i esa i-tenglamaning ozod hadi.

Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni m ta satr va n ta ustundan iborat matritsa ko'rinishida yozish mumkin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ushbu matritsa chiziqli tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi deyiladi. Quyidagi $\bar{A}$ matritsa esa chiziqli tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasi deyiladi:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Agar (1) sistemaning barcha ozod hadlari 0 ga teng bo'lsa, u holda (1) sistema *bir jinsli tenglamalar sistemasi* deb ataladi. Agar (1) sistemada $m = n$ bo'lsa, u holda ushbu sistema n-tartibli sistema deyiladi. Yechimga ega bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi *birgalikda* deyiladi.

Masalan, ixtiyoriy bir jinsli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'ladi, chunki barcha noma'lumlarni 0 ga teng qilib olinsa, u bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi.

Yagona yechimga ega bo'lgan sistema *aniq* sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo'lgan sistema aniqmas sistema deyiladi.

(1) sistemani qulaylik uchun qisqacha

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k = b_i, \ (i = \overline{1, m})$$

yig'indilar ko'rinishida yozish mumkin.

Berilgan matritsaning satrlarini $u_1, u_2, \dots, u_m$, ustunlarini esa $v_1, v_2, \dots, v_n$ orqali belgilab olamiz.

Kvadrat matritsaning bosh diagonaldan pastda turgan barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa, bunday matritsaga *uchburchak ko'rinishidagi* matritsa deyiladi, ya'ni

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning to'g'ri burchakli trapesiyali shaklida joylashgan elementlaridan boshqa elementlari nollardan iborat bo'lsa, bunday matritsaga *trapesiya ko'rinishidagi* matritsa deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli sistemadagi tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan hol uchun o'rinli bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3}$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemalarini qaraymiz.

Tenglamalar sistemasi koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa determinantini d harfi bilan belgilaylik:

$$d = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

4-mavzuda berilgan determinantni satr yoki ustun bo'yicha yoyish xossalaridan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \dots + a_{1,j}A_{n,j}. \tag{4}$$

Bundan tashqari,

$$a_{1,i}A_{1,j} + a_{2,i}A_{2j} + ... + a_{n,i}A_{n,j} = 0, i \neq j. \qquad (5)$$

Ya'ni, determinantning birorta ustunidagi hamma elementlarini boshqa ustunning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisi nolga teng.

Agar $d = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + ... + a_{1,j}A_{n,j}$ yoyilmada j-ustunning elementlarini ixtiyoriy n ta sonlar sistemasi b_1, b_2, ..., b_n bilan almashtirsak, hosil bo'ladigan

$$b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + ... + b_nA_{n,j} \qquad (6)$$

ifoda d determinantning j-ustunini shu sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladigan ushbu

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & ... & b_1 & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & ... & b_2 & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & ... & b_n & ... & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinantning j-ustun bo'yicha yoyilmasi bo'ladi.

13.1.-teorema. Agar (3) sistemaning determinanti d noldan farqli bo'lsa, u holda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \; x_2 = \frac{d_2}{d}, \; \ldots, \; x_n = \frac{d_n}{d}. \qquad (7)$$

Isbot. Aytalylik, $d \neq 0$ bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

sistemadagi birinchi tenglamaning ikkala tomonini $A_{1,j}$ ga, ya'ni $a_{1,j}$ elementning algebraik to'ldiruvchisiga ko'paytiramiz. Ikkinchi tenglamaning ikkala tomonini $A_{2,j}$ ga va hokazo, oxirgi tenglamani $A_{n,j}$ ga ko'paytiramiz. Bu tengliklarning chap va o'ng tomonlarini alohida-alohida qo'shib, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\begin{gathered} (a_{1,1}A_{1,j} + a_{2,1}A_{2,j} + ... + a_{n,1}A_{n,j})x_1 + ...+ \\ +(a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + ... + a_{n,j}A_{n,j})x_j + ...+ \\ +(a_{1,n}A_{1,j} + a_{2,n}A_{2,j} + ... + a_{n,n}A_{n,j})x_n = \\ = b_1A_{1,j} + b_2A_{2,j} + ... + b_nA_{n,j}. \end{gathered}$$

Yuqorida qayd qilingan (4), (5) va (6) munosabatlardan, ushbu tenglikda x_j oldidagi koeffitsient d ga, qolgan koeffitsientlarning barchasi nolga teng ekanligini, ozod had esa d_j determinantga teng bo'lishini hosil qilamiz. Demak, yuqoridagi tenglik quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$dx_j = d_j, 1 \le j \le n.$$

$d \neq 0$ bo‘lganligi uchun, $x_j = \frac{d_j}{d}$, $1 \le j \le n$ kelib chiqadi.

Endi $\alpha_1 = \frac{d_1}{d}, \alpha_2 = \frac{d_2}{d}, \ldots, \alpha_n = \frac{d_n}{d}$ sonlar haqiqatdan ham (3) tenglamalar sistemasini qanoatlantirishini ko‘rsatamiz. Buning uchun sistemaning i-tenglamasiga α_1, α_2, ..., α_n noma’lumlarning qiymatlarini qo‘yamiz. i-tenglamaning chap tomonini $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ ko‘rinishda yozish mumkinligi va $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{i,j}$ bo‘lganligi uchun:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k,j}\right) = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{k,j}\right).$$

Bu almashtirishlarga $\frac{1}{d}$ soni barcha qo‘shiluvchilarda umumiy ko‘paytuvchi bo‘lib kelganligi uchun uni yig‘indi tashqarisiga chiqarishimiz mumkin. Bundan tashqari, qo‘shish tartibi o‘zgartirilgandan so‘ng, b_k ko‘paytuvchi ichki yig‘indi belgisi tashqarisiga chiqarildi, chunki u ichki yig‘indi indeksi j ga bog‘liq emas.

Ma‘lumki, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{k,j} = a_{i,1}A_{k,1} + a_{i,2}A_{k,2} + \ldots + a_{i,n}A_{k,n}$ ifoda $k = i$ bo‘lganda d ga, qolgan barcha k larda esa 0 ga teng. Shunday qilib, k bo‘yicha tashqi yig‘indida faqat bitta qo‘shiluvchi qoladi va u $b_i d$ ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_i d = b_i.$$

Bundan α_1, α_2, ..., α_n sonlar haqiqatdan ham (3) tenglamalar sistemasi uchun yechim bo‘lishi kelib chiqadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuliga *Kramer usuli* deyiladi.

Demak, Kramer usuli determinanti noldan farqli bo‘lgan n ta noma’lumli n ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasini yechimini topish imkonini beradi.

Sistema determinanati nolga teng bo’lgan hollarda Kramer usulini qo‘llash maqsadga muvofiq emas. Chunki bu holatda tenglamalar sistemasi yoki yechimga ega emas yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli. Bizga bir xil tartibli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k = b_i, i = \overline{1, m} \tag{8}$$

va

$$\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}x_k = d_i, i = \overline{1, m}. \qquad (9)$$

13.2-ta'rif. Agar (8) sistemaning ixtiyoriy ikkita tenglamasini o'rinlari almashtirish natijasida (9) sistema hosil qilinsa, (9) sistemani (8) dan $I-$tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

13.3-ta'rif. Agar (8) sistemaning biror tenglamasini biror songa ko'paytirib, boshqa biror tenglamasiga qo'shish natijasida (9) sistema hosil qilinsa, (9) sistema (8) sistemadan $II-$tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

I tur va II tur elementar almashtirishlarni qisqacha elementar almashtirish deb yuritiladi.

Har bir chiziqli tenglamalar sistemasiga uning kengaytirilgan matritsasini mos qo'ysak, u holda chiziqli tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlarga uning kengaytirilgan matritsasi ustida mos elementar almashtirishlar bajarilgan deb qarash mumkin. Aksincha, kengaytirilgan matritsa ustidagi elementar almashtirishlarga (elementar almashtirishlar ta'rifini to'g'ridan-to'g'ri matritsalar uchun ham aytishimiz mumkin) tenglamalar sistemasi ustidagi elementar almashtirishlar mos keladi.

13.4-ta'rif. Agar (8) va (9) sistemalar bir vaqtning o'zida birgalikda bo'lmasa, yoki bir vaqtda birgalikda bo'lib, bir xil yechimlarga ega bo'lsa, (8) va (9) sistemalar teng kuchli sistemalar deyiladi va (8) $\Leftrightarrow$ (9) ko'rinishda yoziladi.

13.5-teorema. Agar (9) sistemaga (8) sistemadan elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, ular teng kuchlidir.

Isbot. I tur elementar almashtirishlar uchun teoremaning isboti to'g'ridan to'g'ri ko'rinib turibdi. Endi (8) sistemaga II tur elementar almashtirishlarni qo'llaymiz, ya'ni (8) sistemaning biror-bir i-tenglamasini λ ga ko'paytirib, j-tenglamaga qo'shsak, yangi sistemaning j satrida qolganlari o'zgarmagan holda

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{j,k} + \lambda a_{i,k})x_k = b_j + \lambda b_i$$

tenglama hosil bo'ladi. Agar x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 sonlar (8) sistemaning yechimlari bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{j,k} + \lambda a_{i,k})x_k^0 = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}x_k^0 + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k^0 = b_j + \lambda a_i$$

tenglamaning ham yechimi bo'ladi va aksincha. Elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan (9) tenglamalar sistemasining yechimi (8) tenglamalar sistemasining ham yechimi bo'ladi.

Endi biz sistemani yechishning eng qulay va ko'p qo'llanadigan usullaridan biri bo'lgan, noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usulini ya'ni, *Gauss usulini* keltiramiz.

1) Faraz qilaylik, (8) sistemada $a_{11} \neq 0$ bo'lsin. U holda sistemaning birinchi tenglamasini $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$, $i = \overline{2, m}$ ga ko'paytirib mos ravishda boshqa tenglamalarga qo'shsak, hosil bo'lgan sistemaning birinchi tenglamasidan boshqa tenglamalarida x_1 noma'lumi oldidagi koeffitsientlari nolga aylanadi.

2) Agar $a_{1,1} = 0$ bo'lsa, x_1 ning $a_{i,1}$ koeffisientlari orasida noldan farqli bo'lgan tenglamasini izlaymiz va *I* tur elementar almashtirish yordamida sistemaning birinchi tenglamasi bilan o'rnini almashtirib, birinchi holatga kelamiz.

3) Agar x_1 oldidagi hamma $a_{i,1}$ koeffitsientlar nollardan iborat bo'lsa, biz birinchi yoki ikkinchi holatlarni x_2 noma'lum uchun qo'llaymiz va hokazo, bu jarayonni davom ettirish natijasida biz (8) sistemaga teng kuchli bo'lgan sistemaga kelamiz. Hosil bo'lgan sistemaga qarab, quyidagi xulosalarni chiqazishimiz mumkin:

1. Agar sistemaning zinapoyali shaklida chap tomonida nol va o'ng tomonida noldan farqli hadlar qatnashuvchi tenglamalar hosil bo'lsa, bunday sistema birgalikda bo'lmaydi.

2. Agar sistema uchburchaksimon

$$\begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \ldots + a'_{1,n}x_n = b'_1, \\ a'_{2,2}x_2 + \ldots + a'_{2,n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n = b'_{n-1} \\ a'_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

shaklga kelib $a'_{1,1} \neq 0$, $a'_{2,2} \neq 0$, ..., $a'_{n,n} \neq 0$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lib, yechim quyidagi algoritm bo'yicha topiladi.

Hosil bo'lgan sistemaning oxirgi $a'_{n,n}x'_n = b'_n$ tenglamasidan $x^0_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$ noma'lumni topib, topilgan noma'lumni bitta yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz. So'ngra, x^0_{n-1} noma'lumni topib, uni yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz. Bu jarayonni davom ettirish natijada barcha x^0_1, x^0_2, ..., x^0_n noma'lumlarni aniqlaymiz.

3. Sistema zinapoyali shaklga kelib, zinapoya uchlarida turuvchi noma'lumlar soni r ta $1 \leq r \leq \min(m, n)$ bo'lsin. U holda ularni tenglamalarning chap tomonida qoldirib, qolgan $n - r$ ta noma'lumni tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkaziladi va ularni ozod o'zgaruvchilar sifatida qabul qilinadi. Natijada tenglamalar sistemasi r ta noma'lumli uchburchak shaklidagi sistemaga keladi. Endi tenglamalarni o'ng tomoniga

o'tgan $n-r$ ta noma'lumga qiymatlar berib, qolgan r ta noma'lumni topamiz. Demak, bu holatda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Ya'ni, bunday tenglamalar sistemasi birgalikda aniqmas sistema bo'ladi.

Bundan tashqari, qaralayotgan sistemada tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, u holda sistemani uchburchak shakliga keltirish mumkin emas, chunki Gauss metodi bo'yicha o'zgartirish jarayonida tenglamalar soni kamayishi mumkin, ammo ortishi mumkin emas. Demak, bunday holatda sistema zinapoyasimon shaklga keltiriladi va u aniqmas sistema bo'ladi.

Misol 13.1. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Bu sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib, uni elementar almashtirishlar yordamida o'zgartiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$0 = 6$ tenglamaga ega bo'lgan sistemaga keldik, demak, berilgan sistema yechimga ega emas.

Misol 13.2. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 23. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasi uchun elementar almashtirishlarni qo'llab,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -9 \\ 2 & -5 & -4 & 23 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -10 & 19 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

sistemaning matritsasini uchburchak shaklga keltiramiz. Demak, bu sistema yagona yechimga ega va quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_2 + 2x_3 = -11, \\ -8x_3 = 8. \end{cases}$$

Bu sistemada pastdan yuqoriga qarab harakat qilib,

$$x_3 = -1, \; x_2 = -3, \; x_1 = 2$$

yagona yechimni topamiz.

Misol 13.3. Ushbu tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -4. \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasini qaraymiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -7 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistemaning matritsasi zinapoyasimon shaklga kelganligi uchun birgalikda va cheksiz ko'p yechimga ega. $x_1$va x_3 noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar uchburchak shaklni berganligi uchun x_1, x_4 noma'lumlarini o'ng tomonga o'tkazib, ozod o'zgaruvchilar sifatida qabul qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2 + 2x_2 + 4x_4, \\ -5x_3 = 6 \qquad\quad - 11x_4. \end{cases}$$

Bu yerdan $x_3 = \frac{6-11x_4}{-5}$ hosil bo'ladi. Bu ifodani yuqoridagi tenglamaga olib borib qo'ysak,

$$x_1 = \frac{8 + 10x_2 - 13x_4}{5}$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib,

$$x_1 = \frac{8 + 10x_2 - 13x_4}{5}, x_3 = \frac{-6 + 11x_4}{5}$$

berilgan tenglamalar sistemasi yechimlarining umumiy ko'rinishi bo'ladi.

Bu formulada x_2 va x_4 larga ixtiyoriy qiymatlar berib, x_1, x_3 larni topish orqali xususiy yechimlarni hosil qilish mumkin. Masalan, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$ qiymatlar bersak, $x_1 = 1$, $x_3 = 1$ topilib, $(1, 1, 1, 1)$ xususiy yechimga ega bo'lamiz.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matritsa usuli ham tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan hol uchun o'rinli bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Natijada yuqoridagi tenglamalar sistemasi quyidagi matritsaviy tenglamaga teng kuchli bo'ladi

$$A \cdot X = B.$$

Kramer usulidan ma'lumki, agar $\det(A) \neq 0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega. Bundan tashqari, $\det(A) \neq 0$ ekanligi A matritsaning teskarilanuvchi bo'lishini bildiradi. Yuqoridagi matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko'paytirsak,

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi $X = A^{-1} \cdot B$ ko'rinishida bo'ladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ushbu usuli teskari matritsa usuli deb ataladi.

8-§. Matrisaning rangi

Bizga

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lsin. Bu matritsaning satrlarini u_1, u_2, ..., u_m kabi ustunlarini esa v_1, v_2, ..., v_n kabi belgilaymiz. Satrlarning *chiziqli kombinatsiyasi* deb, $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_mu_m$ satrga aytiladi, bu yerda c_i koeffitsientlar berilgan maydondan olingan sonlar. Ko'rinib turibdiki, agar bu koeffitsientlar nolga teng bo'lsa, bu chiziqli kombinatsiya ham nol satrga teng bo'ladi.

Agar bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmagan c_1, c_2, ..., c_m koeffitsientlar mavjud bo'lib, $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_mu_m = 0$ bo'lsa, u_1, u_2, ..., u_m satrlar *chiziqli bog'liq* deyiladi.

Agarda bunday koeffitsientlar mavjud bo'lmasa, ya'ni $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = 0$ tenglikdan barcha c_1, c_2, ..., c_m koeffitsientlarning nolga tengligi kelib chiqsa, u holda u_1, u_2, ..., u_m satrlar *chiziqli erkli* deyiladi.

Misol 9.1. $u_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $u_2 = (-1,\ 2,\ 1)$, $u_3 = (1,\ 4,\ 3)$ satrlar chiziqli bog'liq. Chunki, $2u_1 + u_2 - u_3 = (0,\ 0,\ 0)$.

$u_1 = (1,\ 1,\ 1)$ va $u_2 = (-1,\ 2,\ 1)$ satrlar esa chiziqli erkli, chunki $c_1u_1 + c_2u_2 = 0$ tenglikdan

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

shartlar kelib chiqadi, ya'ni $c_1 = c_2 = 0$.

8.1-tasdiq. Berilgan satrlarning chiziqli bog'liq bo'lishi uchun bitta satrning qolgan satrlar orqali ifodalanishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* u_1, u_2, ..., u_m satrlar chiziqli bog'liq bo'lsin. Demak, bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmaydigan shunday c_1, c_2, ..., c_m koeffitsientlar mavjudki, $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_mu_m = 0$ bo'ladi. Aytaylik, $c_i \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$u_i = -\frac{c_1}{c_i}u_1 - \ldots - \frac{c_{i-1}}{c_i}u_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}u_{i+1} - \ldots - \frac{c_m}{c_i}u_m,$$

ya'ni u_i satr qolgan satrlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $u_i = c_1u_1 + \ldots + c_{i-1}u_{i-1} + c_{i+1}u_{i+1} + \ldots + c_mu_m$ bo'lsin. U holda $c_1u_1 + \ldots + c_{i-1}u_{i-1} + (-1)u_i + c_{i+1}u_{i+1} + \ldots + c_mu_m = 0$, ya'ni u_1, u_2, ..., u_m satrlar chiziqli bog'liq.

Berilgan $u = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ satrni dastlabki k ta elementidan iborat $\bar{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ satrga berilgan satrning *uzunligi k bo'lgan kesmasi* deb ataladi.

9.2-tasdiq. Agar u_1, u_2, ..., u_m satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ixtiyoriy uzunlikdagi $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, ..., $\bar{u}_m$ kesmalar ham chiziqli bo'g'liqdir.

Isbot. $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_mu_m = 0$ tenglik $c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_mu_m$ satrning barcha komponentalari nolga tengligini anglatadi. Bundan esa, $c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + \ldots + c_m\bar{u}_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi tasdiq kabi $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ kesmalarning chiziqli erkli ekanligidan $u_1, u_2, \ldots, u_m$ satralarning ham chiziqli erkli bo'lishini kelib chiqadi.

Aytaylik, A matritsaning k ta satri chiziqli erkli bo'lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ satrlar chiziqli erkli va $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_m$ satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deb olish mumkin. Matritsaning $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ustunlarining uzunligi k bo'lgan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ kesmalarini qaraymiz.

8.3-tasdiq. Agar qandaydir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sonlari uchun $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_n\bar{v}_n = 0$ bo'lsa, u holda $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0$ bo'ladi.

Isbot. $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_m$ satrlar $u_1, u_2, \ldots, u_k$ satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + \ldots + b_{k+1,k}u_k,\\
u_{k+2} &= b_{k+2,1}u_1 + b_{k+2,2}u_2 + \ldots + b_{k+2,k}u_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_m &= b_{m,1}u_1 + b_{m,2}u_2 + \ldots + b_{m,k}u_k.
\end{aligned} \tag{1}$$

Aytaylik, $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \ldots + c_n\bar{v}_n = 0$ bo'lsin. Bu tenglikdan $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$ ustunning dastlabki k ta komponentasi nolga teng ekanligi to'g'ridan to'g'ri kelib chiqadi. Ustunning $(k+1)$- komponentasini qaraylik:

$$c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + \ldots + c_na_{k+1,n}.$$

Bu ifodani qiymatini topish uchun (1) tenglikning birinchisidan foydalanamiz.

$u_{k+1} = b_{k+1,1}u_1 + b_{k+1,2}u_2 + \ldots + b_{k+1,k}u_k$ ekanligidan

$$\begin{aligned}
a_{k+1,1} &= b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + \ldots + b_{k+1,k}a_{k,1},\\
a_{k+1,2} &= b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + \ldots + b_{k+1,k}a_{k,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{k+1,n} &= b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + \ldots + b_{k+1,k}a_{k,n}
\end{aligned}$$

kelib chiqadi. Bundan esa,

$$\begin{aligned}
&c_1a_{k+1,1} + c_2a_{k+1,2} + \ldots + c_na_{k+1,n} =\\
&= c_1(b_{k+1,1}a_{1,1} + b_{k+1,2}a_{2,1} + \ldots + b_{k+1,k}a_{k,1}) +\\
&+ c_2(b_{k+1,1}a_{1,2} + b_{k+1,2}a_{2,2} + \ldots + b_{k+1,k}a_{k,2}) +\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&+ c_n(b_{k+1,1}a_{1,n} + b_{k+1,2}a_{2,n} + \ldots + b_{k+1,k}a_{k,n}) =\\
&= b_{k+1,1}(c_1a_{1,1} + c_2a_{1,2} + \ldots + c_na_{1,n}) +\\
&+ b_{k+1,2}(c_1a_{2,1} + c_2a_{2,2} + \ldots + c_na_{2,n}) +\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +\\
&+ b_{k+1,k}(c_1a_{k,1} + c_2a_{k,2} + \ldots + c_na_{k,n}).
\end{aligned}$$

Qavslar ichidagi ifodalar $c_1\bar{v}_1+c_2\bar{v}_2+\ldots+c_n\bar{v}_n$ ustunning komponentalarini beradi. Ularning barchasi nolga teng bo'lganligi uchun $c_1a_{k+1,1}+c_2a_{k+1,2}+\ldots+c_na_{k+1,n}=0$ ekanligi kelib chiqadi. Qolgan komponentalarining nolga tengligi ham huddi shunday ko'rsatiladi. Demak, $c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_nv_n=0$.

8.4-tasdiq. Aytaylik, u_1, u_2, ..., u_m va w_1, w_2, ..., w_n satrlar jamlanmalari berilgan bo'lib, ikkinchi jamlanma satrlari birinchi jamlanma satrlarining chiziqli kombinatsiyasi bo'lsin. Agar $n>m$ bo'lsa, u holda w_1, w_2, ..., w_n satrlar chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. Isbotni m ga nisbatan matematik induksiya usuli bilan olib boramiz. $m=1$ bo'lganda $w_1=c_1u_1$, $w_2=c_2u_1$, ..., $w_n=c_nu_1$ bo'lib, $c_1=0$ bo'lganida ular chiziqli bo'g'liq bo'lishi ravshan. Agar $c_1\neq 0$ bo'lsa, $(-c_2)w_1+c_1w_2+0\cdot w_3+\ldots+0\cdot w_n=0$ ekanligidan ularning chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi.

Tasdiqni $m-1$ uchun o'rinli deb, m uchun to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz. Tasdiq shartiga ko'ra,

$$\begin{aligned} w_1 &= c_{1,1}u_1+c_{1,2}u_2+\ldots+c_{1,m}u_m,\\ w_2 &= c_{2,1}u_1+c_{2,2}u_2+\ldots+c_{2,m}u_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ w_n &= c_{n,1}u_1+c_{n,2}u_2+\ldots+c_{n,m}u_m. \end{aligned}$$

Agar $c_{1,1}=c_{2,1}=\ldots=c_{k,1}=0$ bo'lsa, tasdiq o'rinli, chunki bu holda w_1, w_2, ..., w_n satrlar $m-1$ ta u_2, ..., u_m satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi.

Aytaylik, biror $c_{i,1}$ noldan farqli bo'lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $c_{11}\neq 0$ deb olish mumkin. U holda quyidagi satrlarni qaraymiz:

$$\begin{aligned} w'_2 &= w_2-\tfrac{c_{2,1}}{c_{1,1}}w_1=c'_{2,2}u_2+\ldots+c'_{2,m}u_m,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w'_n &= w_n-\tfrac{c_{n,1}}{c_{1,1}}w_1=c'_{n,2}u_2+\ldots+c'_{n,m}u_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Ushbu satrlar $n-1$ ta bo'lib, ular $m-1$ ta u_2, ..., u_m satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. $n>m$ bo'lganligi sababli, $n-1>m-1$, hamda induksiya faraziga ko'ra, w'_2, ..., w'_n satrlar chiziqli bog'liq. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo'lgan b_2, ..., b_k koeffitsientlar topilib,

$$b_2w'_2+\ldots+b_nw'_n=0.$$

Bu munosabatga w'_2, ..., w'_n satrlarning w_1, w_2, ..., w_n satrlar orqali yozilgan ifodasini olib borib qo'ysak,

$$b_2\left(w_2-\frac{c_{2,1}}{c_{1,1}}w_1\right)+\ldots+b_k\left(w_k-\frac{c_{n,1}}{c_{1,1}}w_1\right)=0$$

kelib chiqadi, ya'ni,

$$-\frac{b_2c_{2,1} + ... + b_nc_{n,1}}{c_{11}}w_1 + b_2w_2 + ... + b_nw_n = 0.$$

b_2, ..., b_k koeffitsientning kamida bittasi noldan farqli ekanligidan, w_1, w_2, ..., w_n satrlarning chiziqli bog'liqligi kelib chiqadi.

8.5-natija. Uzunligi n ga teng bo'lgan n tadan ko'p satrlar chiziqli bog'liq.

Isbot. Haqiqatdan ham, uzunligi n ga teng bo'lgan ixtiyoriy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satrni quyidagicha ifodalash mumkin

$$a_1(1, 0, ..., 0) + a_2(0, 1, ..., 0) + ... + a_n(0, 0, ..., 1).$$

Demak, ixtiyoriy satr n ta satrning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi. Yuqorida isbotlangan 8.4-tasdiqqa ko'ra, satrlar soni n tadan ko'p bo'lsa, ular chiziqli bog'liq.

Bizga uzunlikdagi n ga teng bo'lgan satrlar berilgan bo'lsin. Bu satrlar ichida qandaydir k ta satr chiziqli erkli bo'lib, ixtiyoriy k tadan ko'p satrlar chiqizli bo'gliq bo'lsin. Ya'ni, chiziqli erkli satrlarning maksimal soni k ga teng bo'lsin.

8.6-ta'rif. Berilgan satrlar jamlanmasidagi chiziqli ekrli vektorlarning maksimal soniga bu satrlar jamlanmasining *rangi* deyiladi. Maksimal sondagi chiziqli erkli satrlar esa, satrlar jamlanmasining *bazisi* deb ataladi.

Tabiiyki, chiziqli erklilik, chiziqli bog'liqlik, rang va bazis tushunchalarini ustunlar uchun ham kiritish mumkin. U holda yuqorida keltirilgan tasdiqlar ham ustunlar jamlanmasi uchun o'rinli bo'ladi.

Demak, berilgan A matritsaning u_1, u_2, ..., u_m satrlar jamlanmasining rangini va o'z navbatida v_1, v_2, ..., v_n ustunlar jamlanmasining rangini ham aniqlash mumkin.

8.7-teorema. Matritsaning satrlari jamlanmasi rangi uning ustunlari jamlanmasi rangiga teng.

Isbot. Aytaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ... & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlar jamlanmasi rangi k va ustunlar jamlanmasining rangi r ga teng bo'lsin.

Satrlar rangi k ekanligidan shunday chiziqli erkli k ta satr mavjud bo'lib, qolgan satrlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastlabki k ta satrni bazis deb olish mumkin.

Bu satrlardan iborat quyidagi

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

matritsani qaraymiz. $\bar{A}$ matritsaning ustunlari A matritsa ustunlarining uzunligi k ga teng bo'lgan kesmalaridan iborat bo'ladi.

Aytaylik, $\bar{A}$ matritsaning ustunlari jamlanmasi rangi $\bar{r}$ bo'lsin. $\bar{A}$ matritsaning ustunlari uzunliklari k ga teng ekanligidan 8.5-natijaga ko'ra, uning chiziqli erkli ustunlar soni k dan oshmaydi. Demak, $\bar{r} \leq k$.

Ikkinchi tomondan esa, $\bar{A}$ matritsada $\bar{r}$ ta chiziqli erkli ustunlari mavjud bo'lib, undan ko'p sondagi ixtiyoriy ustunlar chiziqli bog'liq. Ushbu ustunlarni A matritsaning ustunlarigacha to'ldirsak, ular ham chiziqli erkli bo'ladi. 8.3-tasdiqqa ko'ra esa, A matritsaning $\bar{r}$ tadan ko'p ixtiyoriy ustunlari chiziqli bog'liq. Bundan A matritsaning ustunlar jamlanmasi rangi ham $\bar{r}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $r = \bar{r} \leq k$.

Endi ushbu mulohazalarni ustunlar va satrlarning o'rnini almashtirgan holda qo'llasak, $k \leq r$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan esa, $r = k$ kelib chiqadi.

8.8-ta'rif. Matritsaning satrlari (ustunlari) jamlanmasining rangi *matritsaning rangi* deyiladi.

Endi kvadrat matritsaning rangi va determinanti orasidagi bog'liqlikni beruvchi teoremani keltiramiz.

8.9-teorema. Kvadrat matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriylik.* Berilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsaning satrlari chiziqli bog'liq bo'lib, determinanti noldan farqli bo'lsin. $u_1, u_2, \dots, u_n$ satrlar chiziqli bog'liq ekanligidan $c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik esa, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchlidir:

$$\begin{cases} a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \dots + a_{1,n}c_n = 0, \\ a_{1,2}c_1 + a_{2,2}c_2 + \dots + a_{2,n}c_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + \dots + a_{n,n}c_n = 0. \end{cases}$$

Matritsaning determinanti noldan farqli bo'lganligi uchun, ushbu bir jinsli tenglamalar sistemasi yagona nol yechimga ega. Ya'ni $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Bu esa, satrlarning chiziqli erkli ekanligiga zid. Demak, $\det A = 0$.

Yetarlilik. Yetarlilik isbotini A matritsaning tartibi bo'yicha matematik induksiya usuli bilan keltiramiz. $m = 1$ uchun teorema tasdig'i o'rinli, chunki $\det A = 0$ tenglik A nol elementdan iborat ekanligini bildiradi.

$m - 1$-tartibli matritsa uchun teorema isbotlangan deb, m-tartibli matritsalar uchun isbotlaylik. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $a_{11} \neq 0$ deb olishimiz mumkin. Matritsaning u_1, u_2, ..., u_n satrlari orqali quyidagi satrlarni hosil qilamiz:

$$w_2 = u_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} u_1 = (0, a'_{2,2}, ..., a'_{2,n}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$w_n = u_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} u_1 = (0, a'_{n,2}, ..., a'_{n,n}).$$

Determinantlar xossasiga ko'ra

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ushbu determinant nolga tengligi va $a_{1,1} \neq 0$ ekanligidan

$$\begin{vmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi. Induksiya faraziga ko'ra $(a'_{2,2}, ..., a'_{2,n}), ..., (a'_{n,2}, ..., a'_{n,n})$ satrlar chiziqli bog'liq. Bu esa, w_2, ..., w_n satrlarning ham chiziqli bog'liqligini bildiradi.

Demak, kamida bittasi noldan farqli bo'lgan c_2, ..., c_n koeffitsientlar topilib, $c_2 v_2 + ... + c_n v_n = 0$. Bundan esa,

$$-\left(\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} c_2 + ... + \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} c_n\right) u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n = 0$$

kelib chiqadi. Ya'ni, u_1, u_2, ..., u_n satrlar chiziqli bog'liq.

Yuqoridagi teoremadan n-tartibli kvadrat matritsaning rangi n ga teng bo'lishi uchun uning determinant noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy noldan farqli matritsadan qandaydir noldan farqli minor tanlab olish mumkin. Quyidagi teorema matritsaning rangini minorlar orqali topish imkonini beradi.

8.10-teorema. Matritsaning rangi uning noldan farqli minorlarining eng katta tartibiga teng.

Isbot. Aytaylik, matritsaning rangi k ga teng bo'lsin. U holda ixtiyoriy $(k+1)$ yoki undan katta tartibli minorda chiziqli bog'liq satrlarlar mavjud bo'lib, 8.9-teoremaga asosan bunday minorlar nolga teng bo'ladi.

Bundan tashqari, matritsaning rangi k bo'lganligi uchun unda k ta satrdan va o'z navbatida k ta ustundan iborat bazislar mavjud. Bu ustun va satrlar elementlaridan tuzilgan minorni qaraylik.

Ushbu minor satrlari chiziqli erkli, aks holda, 8.3-tasdiqqa ko'ra avvalgi matritsaning butun satrlari chiziqli bog'liq bo'lar edi. Demak, tanlab olingan k-tartibli minor noldan farqli.

Biz chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulini keltirganimizda sistema ustida elementar almashtirishlarni keltirib o'tgan edik. Matritsaning satrlari ustidagi elementar almashtirishlar ham huddi shu kabi aniqlanadi. Ya'ni, matritsaning satrlari o'rnini almashtirish, satrlarni noldan farqli songa ko'paytirish va bir satrni ikkinchi satrga proporsional satrga qo'shish elementar almashtirishlar hisoblanadi.

Ko'rinib turibdiki, elementar almashtirishlarning xar birida satrlar jamlanmasi chiziqli ekvivalent satrlar jamlanmasiga aylanadi. Shuning uchun elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Bizga ma'lumki, trapetsiyasimon matritsa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,k} & c_{1,k+1} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & c_{2,2} & \cdots & c_{2,k} & c_{2,k+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{k,k} & c_{k,k+1} & \cdots & c_{k,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerda $c_{1,1} \neq 0,\ c_{2,2} \neq 0,\ \ldots,\ c_{k,k} \neq 0$.

Trapetsiyasimon matritsaning rangi k ga teng ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham,

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,k} \\ 0 & c_{2,2} & \cdots & c_{2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{kk} \end{vmatrix} = c_{1,1} \cdot c_{2,2} \cdot \ldots \cdot c_{k,k}$$

minor noldan farqli. Bundan tashqari, tartibi $k$dan katta minorlarda kamida bitta nolga teng satr mavjudligi uchun, bu minorlarning qiymati nolga teng.

8.11-tasdiq. Ixtiyoriy matritsani satrlari ustidagi elementar almashtirishlar bajarish va ustunlar o'rnini almashtirish orqali trapetsiyasimon matritsa ko'rinishiga keltirish mumkin.

Isbot. Agar matritsa nol matritsa bo'lmasa, uning noldan farqli elementi mavjud. Bu elementni matritsaning satrlari va ustunlari o'rnini almashtirish orqali yuqori chap burchagiga ko'chirish mumkin.

Demak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ushbu matritsada quyidagi almashtirishlarni bajaramiz.

Birinchi satrni $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ ga ko'paytirib, i-satrga qo'shamiz. Bu almashtirishlardan keyin A matritsa quyidagi ko'rinishga keladi

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Agar

$$\begin{pmatrix} a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m,2} & \dots & a'_{m,n} \end{pmatrix}$$

matritsa nolga teng bo'lsa, jarayon tugatiladi. Noldan farqli bo'lgan, holda satrlarini va ustunlarini almashtirish hisobiga $a'_{2,2} \neq 0$ deb olish mumkin.

Endi ikkinchi satrni $-\frac{a'_{i,2}}{a'_{2,2}}$ ga ko'paytirib, qolgan satrlarga qo'shish orqali berilgan matritsani quyidagi ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{m,3} & \dots & a''_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Ushbu jarayonni chekli marotaba davom ettirish natijasida, matritsaning ma'lum satrlaridan tashqari qolgan satrlari nolga aylantiriladi. Natijada matritsa trapetsiyasimon shaklga ega bo'ladi.

9-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini to'la yechish

Ushbu mavzuda chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy yechimini topish usulini beramiz. Dastlab, bir jinsli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Bizga

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Ma'lumki, ushbu sistemaning matritsasini A va matritsaning ustunlarini $v_1, v_2, ..., v_n$ deb olsak, sistemani

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

yoki

$$A \cdot X = 0$$

ko'rinishlarda ham yozish mumkin, bu yerda X—noma'lumlardan iborat bo'lgan ustun vektor.

9.1-tasdiq. Agar $Z_1, Z_2, ..., Z_k$ ustunlar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi bo'lsa, u holda ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi ham yechim bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $A \cdot Z_i = 0$ ekanligidan

$$A \cdot (c_1Z_1 + c_2Z_2 + ... + c_kZ_k) = c_1A \cdot Z_1 + c_2A \cdot Z_2 + ... + c_kA \cdot Z_k = 0$$

kelib chiqadi.

9.2-teorema. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining ixtiyoriy yechimi $n - r$ ta chiziqli erkli yechimlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi, bu yerda n—noma'lumlar soni, $r = rank(A)$.

Isbot. Sistemani

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n = 0$$

ko'rinishida yozib olaylik.

$r = rank(A)$ ekanligi uchun $v_1, v_2, ..., v_n$ ustunlar jamlanmasida r ta ustun bazis bo'ladi. Umimiylikka ziyon yetkazmagan holda, dastlabki r ta $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunni bazis deb olish mumkin. Bu holda qolgan $v_{r+1}, v_{r+2}, ..., v_n$ ustunlar $v_1, v_2, ..., v_r$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi, ya'ni

$$\begin{aligned} v_{r+1} &= b_{r+1,1}v_1 + b_{r+1,2}v_2 + ... + b_{r+1,r}v_r, \\ v_{r+2} &= b_{r+2,1}v_1 + b_{r+2,2}v_2 + ... + b_{r+2,r}v_r, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v_n &= b_{n,1}v_1 + b_{n,2}v_2 + ... + b_{n,r}v_r. \end{aligned}$$

Bu tengliklardan quyidagi $n-r$ ta ustunning yechim ekanligini ko'rish qiyin emas,

$$Z_{r+1}=\begin{pmatrix} b_{r+1,1}\\ \dots\\ b_{r+1,r}\\ -1\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\ Z_{r+2}=\begin{pmatrix} b_{r+2,1}\\ \dots\\ b_{r+2,r}\\ 0\\ -1\\ \dots\\ 0\end{pmatrix},\dots,Z_n=\begin{pmatrix} b_{n,1}\\ \dots\\ b_{n,r}\\ 0\\ 0\\ \dots\\ -1\end{pmatrix}.$$

Bu yechimlar chiziqli erkli ekanligi osongina kelib chiqadi, chunki bu ustunlarning oxirgi $n-r$ ta komponentalaridan tuzilgan minorni qarasak, ushbu minor noldan farqli bo'ladi.

Endi ixtiyoriy yechim bu yechimlar orqali chiziqli ifodalanilishini ko'rsatamiz. Aytaylik, $X=(x_1^*,...,x_r^*,x_{r+1}^*,...,x_n^*)^T$ ustun sistemaning boshqa bir yechimi bo'lsin. U holda

$$Y=X+x_{r+1}^*Z_{r+1}+...+x_n^*Z_n$$

ustun ham sistemaning yechimi bo'ladi. Ma'lumki, bu yechimda $(r+1)$-komponentadan boshlab barcha komponentalar nolga teng, ya'ni $Y=(y_1^*,...,y_r^*,0,...,0)^T$.

Ushbu ustun sistemaning yechimi bo'lganligi uchun

$$y_1^*v_1+y_2^*v_2+...+y_r^*v_r=0.$$

Ammo, v_1, v_2, ..., v_r ustunlar chiziqli erkli ekanligidan

$$y_1^*=y_2^*=...=y_r^*=0$$

kelib chiqadi. Demak, $Y=0$, ya'ni

$$X=-x_{r+1}^*Z_{r+1}-...-x_n^*Z_n.$$

Shunday qilib, Z_{r+1}, Z_{r+2}, ..., Z_n chiziqli erkli yechimlar bo'lib, barcha yechimlar ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

Teorema isbotida keltirilgan Z_{r+1}, Z_{r+2}, ..., Z_n yechimlar jamlanmasi *bazis* yoki *fundamental yechim* deb ataladi.

Sistemaning *umumiy yechimi* deb fundamental yechimning umuniy chiziqli kombinatsiyasiga aytiladi. Ularning biror aniq chiziqli kombinatsiyasi esa xususiy yechim bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yechimini ham bir jinsli sistema yechimi orqali berish mumkin.

Aytaylik, bir jinsli bo'lmagan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sistema berilgan bo'lsin. Bu sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalarini qaraymiz, ya'ni

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

Quyidagi teorema bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudligini uning matritsalari ranglari orqali beruvchi teorema hisoblanadi.

9.3-teorema. (Kroneker–Kapelli teoremasi) Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lishi uchun uning asosiy matritsasining rangi kengaytirilgan matritsasining rangiga teng (ya'ni, $rank(A) = rank(\bar{A})$) bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = B,$$

bu yerda B ozod hadlardan tuzilgan ustun.

Sistema yechimga ega bo'lishi uchun B ustun $v_1, v_2, \ldots, v_n$ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi zarur. Bundan esa, matritsalarning ranglari tengligi kelib chiqadi.

Agar matritsalarning ranglari bir xil bo'lsa, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dagi bazis $v_1, v_2, \ldots, v_n, B$ ustunlar uchun ham bazis bo'la oladi. Bundan esa B ustun $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanishi kelib chiqadi.

9.4-teorema. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi, uning biror xususiy yechimi va huddi shu koeffitsientlardan tuzilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig'indisiga teng.

Isbot. Aytaylik, X_0 ustun $A \cdot X = B$ bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining biror yechimi bo'lsin. U holda $A \cdot X = B$ va $A \cdot X_0 = B$ ekanligidan, $A \cdot X = A \cdot X_0$ sistemaga ega bo'lamiz.

Demak, berilgan sistema $A \cdot (X - X_0) = 0$ bir jinsli sistemaga teng kuchli. Bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi $X^* = X - X_0$ ekanligidan $X = X^* + X_0$ kelib chiqadi. Ya'ni berilgan tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechim va bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi yig'indilaridan iborat.

III BOB. KOMPLEKS SONLAR. KO‘PHADLAR

10-§. Kompleks sonlar va ular ustida amallar

Bizga $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to‘plami berilgan bo‘lsin. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ to‘plamda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a + c,\ b + d),$$

$$(a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac - bd,\ bc + ad).$$

Ravshanki, $\mathbb{C}$ da aniqlangan qo‘shish va ko‘paytirish amallari uchun quyidagi shartlar bajariladi:

a) qo‘shishning kommutativligi: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$,

b) qo‘shishning assotsiativligi:

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)],$$

c) ko‘paytirishning kommutativligi $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$,

d) ko‘paytirishning assotsiativligi:

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)].$$

Ushbu qonunning o‘rinli ekanligi quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) =$$

$$= ace - bde - adf - bcf + acf - bdf + ade + bcf,$$

$$(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) =$$

$$= ace - bde - adf - bcf + acf - bdf + ade + bcf.$$

e) distributivlik qonuni:

$$[(a, b) + (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f);$$

Qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bog‘lovchi ushbu distributivlik qonuni ham o‘rinli bo‘lishini tekshirish qiyin emas:

$$[(a, b) + (c, d)] \cdot (e, f) = (a + c, b + d) \cdot (e, f) =$$

$$= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de),$$

$$(a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f) = (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + df) =$$

$$= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de).$$

Ta'kidlash joizki, (0, 0) element $\mathbb{C}$ to'plamning trivial (nol) elementi, (1, 0) element esa birlik elementi bo'ladi, ya'ni:

$$(a,b) + (0,0) = (0,0) + (a,b) = (a,b),$$

$$(a,b) \cdot (1,0) = (1,0) \cdot (a,b) = (a,b).$$

Ma'lumki, ixtiyoriy $(a,b) \in \mathbb{C}$ element qarama-qarshi $(-a, -b)$ elementga ega.

Endi biz $\mathbb{C}$ to'plamdagi ixtiyoriy noldan farqli (a,b) elementning teskarilanuvchi ekanligini ya'ni $(a,b) \cdot (x,y) = (1,0)$ tenglama yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz. Ushbu tenglamadan quyidagiga ega bo'lamiz

$$(ax - by,\ ay + by) = (1,\ 0).$$

Bu tenglikdan quyidagi ikki noma'lumli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Ma'lumki, bu sistema $(a,b) \neq (0,0)$ bo'lganda yechimga ega bo'lib,

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $(a,\ b)$ element uchun teskari element

$$(a,\ b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2},\ -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

10.1-ta'rif Qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari aniqlangan $\mathbb{C}$ to'plamga *kompleks sonlar to'plami*, uning elementlari esa kompleks sonlar deb ataladi.

Kompleks sonlar to'plamining $(a,\ 0)$ ko'rinishidagi elementlari to'plamini $\mathbb{R}_1$ orqali belgilaymiz. $\mathbb{C}$ da kiritilgan qo'shish va ko'paytirish amallarini $\mathbb{R}_1$ da qaraymiz:

$$(a,0) + (c,0) = (a + c, 0),$$

$$(a,0) \cdot (c,0) = (ac, 0).$$

Ushbu tengliklardan ko'rinadiki, $\mathbb{R}_1$ to'plamdagi qo'shish va ko'paytirish amallari, haqiqiy sonlar to'plamidagi amallar kabi aniqlanadi.

$\mathbb{R}_1$ va $\mathbb{R}$ to'plamlar orasida $f((a,0)) = a$ kabi $f : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ moslik o'rnatsak, yuqoridagi tengliklardan ushbu moslik ko'paytma va yig'indi amallarini saqlashi kelib chiqadi. Demak, $(a,0) = a$ deb olish mumkin.

Agar $(0,1)$ elementni ni i orqali belgilasak,

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

bo'ladi. Ushbu $i \in \mathbb{C}$ elementga *mavhum birlik* deyiladi. Ixtiyoriy $(a,b) \in \mathbb{C}$ uchun

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + bi$$

tenglikni yozishimiz mumkin. Shunday qilib, $\mathbb{C}$ kompleks sonlar to'plamining ixtiyoriy elementini $z = a + bi$ shaklda yozish mumkin. Bu shaklga kompleks sonning *algebraik shakli* deyiladi.

$x, y \in \mathbb{R}$ bo'lganda son kompleks son, yozuv esa kompleks son algebraik formasi deyiladi. x soni kompleks son haqiqiy qismi deyiladi va $\mathrm{Re}\, z$ ko'rinishida, y soni esa mavhum qismi deyilib, $\mathrm{Im}\, z$ tarzida belgilanadi.

$z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar ustida amallar quyidagicha kiritiladi:

1). $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2). $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 =$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

3). $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\cdot\dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \dfrac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Misol 10.1. $z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = 1 - i$ bo'lsa, u holda

$$z_1 - z_2 = 1 + 2i - (1 + i) = 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+2i-2}{1+1} = -\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$$

Tenglikni tekshiramiz:

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)\cdot(x_2 - iy_2) =$$

$$= x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Kompleks sonning algebraik shaklidagi a songa kompleks sonnning haqiqiy qismi deyiladi va $Re(z)$ orqali belgilanadi. Undagi b soni esa z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $Im(z)$ orqali belgilanadi. Mavhum qismi nolga teng bo'lgan kompleks sonlar haqiqiy sonlar bo'lsa, haqiqiy qismi nol bo'lgan kompleks sonlar mavhum kompleks sonlar deyiladi.

Ushbu $\bar{z} = a - bi$ kompleks soni $z = a + bi$ kompleks soniga qo'shma kompleks son deyiladi. Qo'shma kompleks sonlar uchun

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

tengliklar o'rinli, ya'ni kompleks sonning o'z qo'shmasiga yig'indisi va ko'paytmasi haqiqiy son bo'ladi.

10.2-xossa. Kompleks sonlarning qo'shmasi quyidagi xossalarga ega:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Kompleks sonning teskarisini topishda uning qo'shmasidan foydalanish juda qulay hisoblanadi:

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

10.3-tasdiq. Bizga $z = a + bi$ kompleks son berilgan bo'lib, $u + vi$ uning kvadrat ildizi bo'lsin, u holda

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}.$$

Isbot. Aytaylik, $\sqrt{a + bi} = u + vi$ bo'lsin. U holda bu tenglikni ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak,

$$(u + vi)^2 = a + bi$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b. \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasi kelib chiqadi. Bu sistemadagi tenglamalarning har birining ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, so'ngra ularni qo'shsak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2.$$

So'nggi tenglikdan $u^2+v^2=\sqrt{a^2+b^2}$ (ildiz musbat ishorali, chunki tenglikning chap tomoni musbat sondir). Bu tenglikdan va tenglamalar sistemasi birinchi tenglamasidan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$u^2=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right),$$
$$v^2=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Kvadrat ildizdan chiqarib,

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)},$$
$$v=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

u va v larni topamiz. (1) tenglamalar sistemasning ikkinchi tengligiga ko'ra uv ko'paytmaning ishorasi b ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni agar $b>0$ bo'lsa, u va v lar bir vaqtning o'zida musbat yoki manfiy ishorali, agar $b<0$ bo'lsa, u va v lar turli ishorali bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy kompleks sonnning ikkita kvadrat ildizi mavjud va ular bir-biridan ishorasi bilan farq qiluvchi sonlar bo'ladi. Xususan, manfiy haqiqiy sonlardan ham kvadrat ildiz chiqarish mumkin. Haqiqatan ham, agar $a<0$ va $b=0$ bo'lsa, u holda $\sqrt{a^2+b^2}=-a$ (bu ildiz musbat) va $u^2=\frac{1}{2}(a-a)=0$, ya'ni $u=0$ bo'ladi. Demak, $\sqrt{u}=\pm\sqrt{-a}\cdot i$ bo'ladi.

Misol 10.2. $z=-35-12i$ kompleks sonning kvadrat ildizlarini toping. Bu yerda $a=-35$, $b=-12$ ekanligi uchun

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1225+144}=\sqrt{1369}=37.$$

Shuning uchun

$$u^2=\frac{1}{2}(35+37)=36,$$
$$v^2=\frac{1}{2}(-35+37)=1.$$

Demak, $u=\pm 6$, $v=\pm 1$, hamda $b<0$ bo'lganligi sababli, u va v larning ishoralari turli xil bo'ladi, shuning uchun

$$\sqrt{-35-12i}=\pm(6-i).$$

Misol 10.3. $z^2-(7-2i)z+13(1-i)=0$ kvadrat tenglamani kompleks sonlar maydonida yeching.

Kvadrat tenglamaning diskriminanti $D=-7+24i$ bo'lib, kvadrat tenglamaning kompleks sonlar maydonida yechimlari

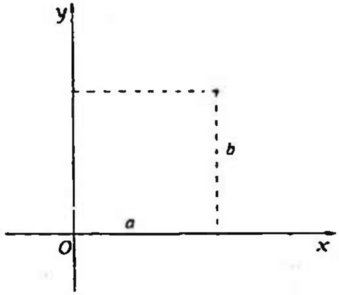
$$z_1=\frac{(7-2i)-(3+4i))}{2}=2-3i,\ z_2=\frac{(7-2i)+(3+4i))}{2}=5+i.$$

11-§. Kompleks sonlarning trigonometrik shakli

Ma'lumki, haqiqiy sonlar to'plaminining geometrik talqini to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Ya'ni, haqiqiy sonlar to'plami bilan to'g'ri chiziq o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. Shuning ushun $\mathbb{R}$ to'plamni to'ri chiziq deb qarashimiz mumkin. Bundan esa, $\mathbb{R}^2$ to'plamni tekislik deb qarash mumkinligi kelib chiqadi.

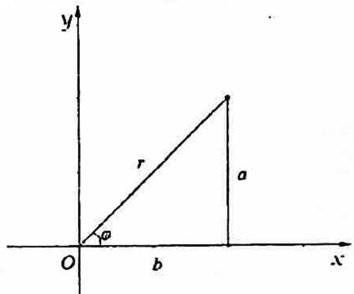
Kompleks sonlar to'plami bilan $\mathbb{R}^2$ to'plam orasida bir qiymatli moslik mavjudligini hisobga olsak, kompleks sonlar to'plamining geometrik talqini tekislikdan iborat bo'lishini payqash qiyin emas.

Kompleks sonlar mos qo'yilgan tekislik kompleks tekislik deyilib, kompleks tekislikning abssissa o'qi nuqtalariga haqiqiy sonlar, ordinata o'qi nuqtalariga esa sof mavhum sonlar mos keladi. Shuning uchun kompleks tekislikning abssissa o'qiga haqiqiy o'q, ordinata o'qiga esa mavhum o'q deyiladi. Demak, $z = a + ib$ kompleks sonning kompleks tekislikdagi o'rni quyidagi shaklda tasvirlanadi:



1-chizma

Tekislikdagi z nuqta bilan koordinatalar boshini tutashtiruvchi kesma uzunligini r orqali, bu kesmaning OX o'qi bilan soat strelkasiga qaramaqarshi yo'nalishda hosil qilgan burchagini φ orqali belgilaymiz.



2-chizma

Endi $z = a + ib$ kompleks sonning trigonometrik shaklini ifodalaymiz. 2-chizmadagi to'g'ri burchakli uchburchakdan Pifagor teoremasiga asosan

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

tenglik kelib chiqadi. Burchak kosinusi, sinusi va tangenslarining ta'rifidan φ burchak aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} \tag{2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Kesma uzunligi r ga kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ orqali belgilanadi. Ya'ni, $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Kompleks sonning argumenti deb, φ burchakka aytiladi va arg z orqali belgilanadi. (2) tengliklardan a va b larni topamiz:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi.$$

Ushbu tengliklarni kompleks sonning algebraik shakliga qo'ysak,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{4}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikka z kompleks sonning *trigonometrik shakli* deyiladi.

Tabiiyki, kompleks son qo'shmasining trigonometrik shakli:

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

bo'ladi.

11.1-teorema. Trigonometrik shaklda berilgan ikkita kompleks sonlar ko'paytmasining moduli, ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga, argumenti esa ko'paytuvchilar argumentlarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|,$$

$$\arg(\alpha \cdot \beta) = \arg\alpha + \arg\beta.$$

Isbot. Bizga $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ va $\beta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ kompleks sonlari berilgan bo'lsin. U holda

$$\alpha \cdot \beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= r \cdot \rho(\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi + i(\sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cdot \sin\psi)) =$$

$$= r \cdot \rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).$$

Demak, $|\alpha \cdot \beta| = \rho \cdot r = |\alpha| \cdot |\beta|$ va $\arg(\alpha \cdot \beta) = \varphi + \psi = \arg\alpha + \arg\beta$ bo'ladi.

Bu teoremadan bevosita quyidagi natijani hosil qilamiz.

11.2-natija. Bir nechta $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar ko'paytmasining moduli

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot ... \cdot |\alpha_n|$$

va argumenti

$$\arg(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n) = \arg\alpha_1 + \arg\alpha_2 + ... + \arg\alpha_n$$

bo'ladi.

Misol 11.1. $\alpha = 1 - i$ komplek sonini trigonometrik shaklga keltiring. $a = 1$, $b = -1$ ekanligidan $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, hamda

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

tengliklardan $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ ga ega bo'lamiz. Natijada

$$\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Misol 11.2. $\alpha = 1 - i$ va $\beta = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8})$ kompleks sonlarning ko'paytmasini toping. $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ ekanli-gini hisobga oslak,

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right).$$

12-§. Kompleks sondan ildiz chiqarish

Ushbu paragrafda trigonometrik shaklda berilgan kompleks sondan n darajali ildiz chiqarish formulasini keltiramiz. Bizga

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ko'rinishidagi kompleks son berilgan bo'lsin.

12.1-tasdiq (Muavr formulasi). Har qanday $n \in \mathbb{Z}$ butun son uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1}$$

ya'ni, $|\alpha^n| = |\alpha|^n$, $\arg(\alpha^n) = n\arg\varphi$.

Isbot. 11.2-natijada

$$r_1 = r_2 = ... = r_n = r, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_n = \varphi$$

deb olsak, (1) formulaning natural sonlar uchun o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Endi ushbu formulani manfiy sonlar uchun o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

tenglik formulani $n = -1$ da o'rinli ekanligi ko'rsatadi.

Endi ixtiyoriy n manfiy butun son uchun $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$ deb olib,

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-m} =$$

$$= ((r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{-1})^m = (r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)))^m =$$

$$= r^{-m}(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

ya'ni (1) tenglik manfiy butun sonlar uchun ham o'rinli.

Misol 12.1. Muavr formulasi yordamida $(1-i)^{10}$ ifodani soddalashtiring.

$$(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{10} = 2^5\left(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(16\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(16\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 32 \cdot (-i) = -32i.$$

12.2-natija. Ikkita kompleks son nisbatining modulli modullar nisbatiga, argumenti esa argumentlar ayirmasiga teng.

Isbot. $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ va $\beta = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ va kompleks sonlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\frac{\alpha}{\beta} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho^{-1}(\cos(-\psi) + i\sin(-\psi)) =$$

$$= r \cdot \rho^{-1}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$$

bo'lib, bundan

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = r \cdot \rho^{-1} = \frac{r}{\rho} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Shuningdek,

$$\arg\frac{\alpha}{\beta} = \varphi - \psi = \arg\varphi - \arg\psi$$

kelib chiqadi.

12.3-ta'rif. α va ω kompleks sonlari va n natural son uchun $\omega^n = \alpha$ tenglik o'rinli bo'lsa, ω kompleks son α sonning n-darajali ildizlari deyiladi.

Quyidagi teoremada kompleks sondan n-darajali ildiz chiqarish formulasini keltiramiz.

12.4-teorema. Ixtiyoriy kompleks son n ta turli n-darajali ildizga ega bo'lib, ular quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k=\overline{0, n-1}..$$

Isbot. α sonining n-darajali ω kompleks ildizini $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ ko'rinishida izlaymiz. Muavr formulasiga asosan

$$\omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Bundan $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ kelib chiqadi. Bu tengliklardan $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ ni olamiz. Demak, α ning har bir n-darajali ildizi ushbu

$$\omega = \omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

ko'rinishga keladi, va aksincha, bunday ko'rinishga ega bo'lgan har qanday kompleks son α ning n-darajali ildizidir.

Endi k ga 0, 1, 2, ..., $n-1$ qiymatlar berib, ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1} larni topamiz, bularning hammasi turlicha bo'ladi, chunki k ni bittaga orttirish argumentning $\frac{2\pi}{n}$ ga ortishiga olib keladi. Endi $k \geq n$ bo'lgan holni ko'ramiz. k ni n ga qoldiqli bo'lsak,

$$k = nq + r,\ \ 0 \leq r \leq n-1,$$

bo'lib,

$$\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi+2\pi nq+2\pi r}{n} = \frac{\varphi+2\pi k}{n} + 2\pi q$$

kelib chiqadi. Natijada,

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}+2\pi q\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}+2\pi q\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi r}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi r}{n}\right)\right) = \omega_r$$

bo'ladi, ya'ni ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1} larning biriga teng bo'ladi.

Misol 12.2.

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),$$

hosil bo'ladi, bu yerda $k = 0, 1, 2$. Bundan

$$\omega_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\omega_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

$$\omega_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

uchta turli ildizlari hosil bo'ladi.

Birning ildizlari

Endi bir sonning n-darajali kompleks ildizlari ustida to'xtalamiz. Agar $\alpha = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ deb olsak, u holda 1 ning n-darajali ildizlari

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

bo'ladi va birning barcha n darajali ildizlari n ta $\varepsilon_0 = 1$, ε_1, $\varepsilon_2, ..., \varepsilon_{n-1}$ kompleks sonlar to'plamidan iboratdir. Ushbu to'plamni $< \varepsilon >_n$ kabi belgilab olamiz.

12.5-teorema. Birning barcha ildizlari uchun quyidagi xossalar o'rinli.

a) $\varepsilon_k, \varepsilon_m \in < \varepsilon >_n$ uchun $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_m \in < \varepsilon >_n$;

b) $\varepsilon_k \in < \varepsilon >_n$ uchun $(\varepsilon_k)^{-1} \in < \varepsilon >_n$.

Isbot. a) Haqiqatan, agar ε_k, $\varepsilon_m \in < \varepsilon >_n$, $0 \leq k, m \leq n-1$ bo'lsa,

$$(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_m)^n = \varepsilon_k^n \cdot \varepsilon_m^n = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) ε_k ning teskarisi ε_k^{-1} bo'lsa, $(\varepsilon_k^{-1})^n = \left(\frac{1}{\varepsilon_k}\right)^n = \frac{1}{\varepsilon_k^n} = 1$ bo'ladi.

Muavr formulasiga asosan $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Demak, $< \varepsilon >_n$ to'plam ε_1 ildizning darajalari orqali ifodalanadi.

12.6-ta'rif. Agar birning n-darajali ildizi ε_k uchun

$$\{\varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \varepsilon_k^3 ..., \varepsilon_k^n\} = < \varepsilon >_n$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda ε_k birning n-darajali boshlang'ich ildizi deyiladi.

12.7-tasdiq. $\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ ildiz birning boshlang'ich ildizi bo'lishi uchun $(k, n) = 1$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Aytaylik, k va n sonlari o'zaro tub bo'lsin. U holda ε_k boshlang'ich ildiz ekanligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni shunday n_1 va n_2, $(0 \le n_1 < n_2 \le n-1)$ sonlari topilib, $\varepsilon_k^{n_1} = \varepsilon_k^{n_2}$ bo'lsin. U holda $\varepsilon_k^{n_2-n_1} = 1$ bo'lib, bundan esa,

$$\frac{2\pi k(n_2 - n_1)}{n} = 2\pi t,$$

ya'ni $k \cdot (n_2 - n_1) = t \cdot n$ hosil bo'ladi. Ushbu tenglikdan k va n o'zaro tub va $n_2 - n_1 < n$ ekanligini hisobga olsak, $n_2 = n_1$ kelib chiqadi. Demak, ε_k boshlang'ich ildiz.

Aytaylik, ε_k boshlang'ich ildiz bo'lsin, u holda k va n sonlari o'zaro tub ekanligini ko'rsatamiz. $(k, n) = d$ bo'lsin, ya'ni $n = n_1 \cdot d$, $k = k_1 \cdot d$. U holda

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k_1}{n_1}\right).$$

Bundan esa, $\varepsilon_k^{n_1} = 1$ ekanligi kelib chiqadi. ε_k boshlang'ich ildiz ekanligi uchun $n_1 = n$, ya'ni $d = 1$.

Yuqoridagi tasdiqdan ko'rinadiki, agar $n = p$ tub son bo'lsa, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ larning hammasi boshlang'ich ildiz bo'ladi.

Misol 12.3. Birning 3-darajali ildizlarini toping. $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$ ekanligidan:

$$\varepsilon_0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

kelib chiqadi. ε_1, ε_2 lar birning 3-darajali boshlang'ich ildizlaridir.

13-§. Ko'phadlar va ular ustida amallar

Biz ushbu mavzuda $\mathbb{K}$ orqali haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ yoki kompleks sonlar to'plami $\mathbb{C}$ ni belgilaymiz.

13.1-ta'rif. Ixtiyoriy $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ uchun

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \tag{1}$$

ifoda haqiqiy (kompleks) koeffitsientli ko'phad deyiladi.

(1) ifodadagi x noma'lum o'zgaruvchi, $a_i \in \mathbb{K}$ lar ko'phadning koeffitsientlari, a_ix^i lar esa *ko'phadning hadlari* deyiladi.

Agar $a_n \neq 0$ bo'lsa, a_n ga bosh koeffitsient $a_n x^n$ esa *bosh had* deyiladi, ko'phadning a_0 hadiga *ozod had* deyiladi.

Ko'phadda qatnashgan noma'lumning eng katta darajasiga ko'phadning darajasi deyiladi va $\deg f(x)$ kabi belgilanadi, ya'ni $a_n \neq 0$ bo'lsa $\deg f(x) = n$.

Barcha koeffitsientlari nolga teng bo'lgan ko'phad *nol ko'phad* deyiladi. Bir hil darajalari oldidagi koeffitsientlari teng bo'lgan ko'phadlar o'zaro *teng ko'phadlar* deyiladi.

$\mathbb{K}$ da berilgan barcha ko'phadlar to'plamini $\mathbb{K}[x]$ orqali belgilaymiz. Shuningdek, $f(\alpha)$ bilan $f(x)$ ko'phadning $x = \alpha$ nuqtadagi qiymati belgilanadi.

Endi $\mathbb{K}[x]$ to'plamda algebraik amallarni aniqlaymiz.

Ko'phadlarni qo'shish. $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning yig'indisi deb, ularning mos darajalari oldidagi koeffitsientlarni qo'shishdan hosil bo'lgan ko'phadga aytiladi, ya'ni

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i, \tag{2}$$

bu yerda $c_i = a_i + b_i$ bo'lib, a_i va $b_i$lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning koeffitsientlaridir.

Ko'phadlarni songa ko'paytirish. $f(x)$ ko'phadni λ soniga ko'paytmasi deb, berilgan ko'phadning barcha koeffitsientlarini shu λ soniga ko'paytirishdan hosil bo'lgan ko'phadga aytiladi, ya'ni

$$\lambda f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i x^i.$$

Ko'phadlarni ko'paytirish. $\mathbb{K}[x]$ to'plamda ko'paytirish amalini quyidagicha kiritamiz: $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko'phadlarning ko'paytmasi sifatida koeffitsientlari

$$d_j = \sum_{k+l=0}^{j} a_k b_l \in K, 1 \leq j \leq n+m.$$

tenglik bilan aniqlangan

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n+m} d_j x^j$$

ko'phadga aytiladi, bu yerda

$$d_0 = a_0 b_0, d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots$$

Ma'lumki, ko'phadlar ko'paytmalarining darajasi berilgan ko'phadlar darajalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\deg\varphi(x) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Misol 13.1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ va $g(x) = 3x^2 - x + 2$ ko'phadlarni yig'indisi va ko'paytmasini toping.

$$g(x) + f(x) = (3x^2 - x + 2) + (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) =$$

$$= x^3 + (3-2)x^2 + (-1+3)x + (2-5) = x^3 + x^2 + 2x - 3.$$

Ushbu ko'phadlarning ko'paytmasi quyidagiga teng:

$$g(x)\cdot f(x) = (3x^2 - x + 2)(x^3 - 2x^2 + 3x - 5) =$$

$$= 3x^5 - 6x^4 + 9x^3 - 15x^2 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x +$$

$$+2x^3 - 4x^2 + 6x - 10 = 3x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 11x - 10.$$

Ko'phadlar ustida aniqlangan amallar quyidagi xossalarga ega.

13.2-xossa. a) $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

b) $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$;

c) $f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f(x)$;

d) $(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))$;

e) $(f(x) + g(x))\cdot h(x) = f(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h(x)$.

Isbot. Dastlabki ikkita xossaning isboti sodda bo'lganligi uchun biz ularning isbotini keltirmaymiz.

c)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{va} \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

bo'lsin. U holda

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k+l=0}^{j} a_k b_l x^j = \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k+l=0}^{j} b_l a_k x^j = g(x)\cdot f(x).$$

d) Ko'phadlarni ko'paytirish assotsiativ ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j, h(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k x^k$$

bo'lsin. U holda $(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x)$ ko'phadning x^t hadi oldidagi koeffitsienti

$$\sum_{l+k=0}^{t} \left(\sum_{i+j=0}^{l} a_i b_j\right) c_k = \sum_{i+j+k=0}^{t} a_i b_j c_k$$

bo‘lib, $f(x)(g(x)\cdot\varphi(x))$ ko‘phadning x^i hadi oldidagi koeffitsienti esa,

$$\sum_{i+l=0}^{t} a_i \left(\sum_{j+k=0}^{l} b_j c_k\right) = \sum_{i+j+k=0}^{t} a_i b_j c_k$$

bo‘ladi. Bu ikki yig‘indining tengligiga ko‘ra ko‘phadlar ko‘paytmasining assotsiativligi kelib chiqadi.

e)

$$\sum_{k+l=0}^{n+m} (a_k + b_k)c_l = \sum_{k+l=0}^{n+m} a_k c_l + \sum_{k+l=0}^{n+m} b_k c_l$$

ekanligigidan ko‘phadlar to‘plami ustida qo‘shish va ko‘paytrish amallari distributiv ekanligi kelib chiqadi.

Endi ko‘phadlar to‘plamlari ustida ko‘paytirish amaliga teskari bo‘lgan bo‘lish amalini o‘rganamiz.

13.3-ta’rif. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko‘phadlar uchun

$$f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x) \tag{3}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko‘phad mavjud bo‘lsa, $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘linadi deyiladi.

Agar $f(x)$ ko‘phad $\varphi(x)$ ko‘phadga bo‘linsa, $f(x)$ bo‘linuvchi, $\varphi(x)$ esa bo‘luvchi ko‘phad deyiladi, hamda $\varphi(x)|f(x)$ yoki $f(x)\vdots\varphi(x)$ kabi belgilanadi.

13.4-xossa. Ko‘phadlar uchun quyidagilar o‘rinli:

a) agar $g(x)|f(x)$ va $h(x)|g(x)$ o‘rinli bo‘lsa u holda $h(x)|f(x)$;

b) agar $\varphi(x)|f(x)$ va $\varphi(x)|g(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi(x)|(f(x)\pm g(x))$.

c) agar $\varphi(x)|f(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g(x)$ uchun $\varphi(x)\,|f(x)\cdot g(x)$.

Agar $\varphi(x)|f_1(x)$, $\varphi(x)|f_2(x)$, ..., $\varphi(x)|f_s(x)$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_s(x)$ ko‘phadlar uchun

$$\varphi(x)|(f_1(x)\cdot g_1(x) + f_2(x)\cdot g_2(x) + \ldots + f_s(x)\cdot g_s(x)).$$

d) har qanday $f(x)$ ko‘phad istalgan nolinchi darajali ko‘phadga bo‘linadi.

e) agar $\varphi(x)|f(x)$ bo‘lsa, $c\varphi(x)|f(x)$, bu yerda $c\in\mathbb{K}$, $c\neq 0$.

f) agar $g(x)|f(x)$ va $f(x)|g(x)$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ ko‘phadlar bir-biridan o‘zgarmas $c\in\mathbb{K}$ ko‘paytuvchi bilan farq qiladi.

Isbot. a) shartga ko‘ra, $f(x) = g(x)\cdot\varphi(x)$ va $g(x) = h(x)\cdot\varphi(x)$ ko‘rinishda yozib olsak,

$$f(x) = h(x)\cdot(\varphi(x)\cdot\psi(x)).$$

b) $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ va $g(x) = \varphi(x)\cdot h(x)$ ekanligidan

$$f(x)\pm g(x) = \varphi(x)\cdot(\psi(x)\pm h(x))$$

kelib chiqadi.

c) agar $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $g(x)$ uchun

$$f(x) \cdot g(x) = \varphi(x) \cdot (\psi(x) \cdot g(x))$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

d) $f(x) = c \cdot c^{-1} \cdot f(x) = c \cdot (c^{-1} \cdot f(x))$ tenglikdan har qanday ko'phad nolinchi darajali ko'phadga bo'linishi kelib chiqadi.

e) $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ tenglik o'rinli ekanligidan

$$f(x) = (c \cdot \varphi(x)) \cdot \left(c^{-1} \cdot \psi(x)\right)$$

tenglik kelib chiqadi.

f) shartga ko'ra $f(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ va $g(x) = f(x) \cdot \psi(x)$, demak, $f(x) = f(x) \cdot (\varphi(x) \cdot \psi(x))$. Bundan $1 = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ tenglik hosil bo'ladi. Bu esa $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ ko'phadlarning har biri nolinchi darajali ko'phadlar bo'lgandagina o'rinli bo'ladi.

Agar $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linmasa qoldiqli bo'lishni amalga oshirish mumkin.

13.5-ta'rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun ga $q(x)$ va $r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$ ko'phadlar topilib,

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga qoldiqli bo'lingan deyiladi.

Bu yerdagi $q(x)$ ko'phadga *bo'linma*, $r(x)$ ga *qoldiq* deyiladi, (4) tenglikka esa qoldiqli bo'lish formulasi deb ataladi.

13.6-teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x),$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko'phadlar mavjud va yagonadir.

Isbot: Dastlab (4) tenglikni qanoatlantiruvchi ko'phadlar mavjud ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\deg f(x) < \deg g(x)$ bo'lsa, u holda (3) tenglik o'rinli bo'ladi. Chunki, bu holatda $q(x) = 0$ va $r(x) = f(x)$ deb olamiz.

Faraz qilaylik, $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ bo'lsin. $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^{m-j}, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$$

ko'rinishlarda bo'lsin. U holda quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x).$$

Bu ayirmadan ko‘rinib turibdiki, $n_1 = \deg f_1(x) < \deg f(x)$. Agar $\deg f_1(x) < \deg g(x)$ bo‘lsa, u holda (4) tenglik to‘g‘ri bo‘ladi, aks holda bu jarayonni davom ettirib, quyidagi ayirmani qaraymiz:

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m}g(x),$$

bu yerda $a_{1,0}$ koeffitsient $f_1(x)$ ko‘phadning bosh koeffitsienti.

Ma'lumki,

$$n_2 = \deg f_2(x) < \deg f_1(x) = n_1$$

bo‘lib, yuqoridagi mulohazani yana bir bor qo‘llash mumkin. Bu jarayonni davom ettirish natijasida darajalari kamayib boruvchi $n > n_1 > n_2 > \dots$ sonlariga teng bo‘lgan $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... ko‘phadlarni hosil qilamiz. $f(x)$ ko‘phadning darajasi chekli bo‘lganligi uchun, chekli qadamdan so‘ng shunday $f_k(x)$ ko‘phad topilib, $n_k = \deg f_k(x) < \deg g(x)$ bo‘ladi. Ya'ni quyidagi tenglik o‘rinli

$$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}g(x),$$

bu yerda $a_{k-1,0}$ element $f_{k-1}(x)$ ning bosh koeffitsientidir. Endi hosil bo‘lgan hamma tengliklarni qo‘shsak,

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}\right)g(x) = f_k(x)$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \frac{a_{1,0}}{b_0}x^{n_1-m} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0}x^{n_{k-1}-m}$$

va $r(x) = f_k(x)$ deb olsak,

$$f(x) - q(x)g(x) = r(x)$$

ekanligini hosil qilamiz.

Endi (4) tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x)$ va $r(x)$ ko‘phadlar yagona ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, (4) tenglik yana boshqa qandaydir $q_1(x)$, $r_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ ko‘phadlar uchun ham o‘rinli bo‘lsin, ya'ni

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)\,, \deg r_1(x) < \deg g(x) \tag{5}$$

bo‘lsin. (4) va (5) tengliklarning chap tomonlari tengligidan

$$g(x) \cdot q(x) + r(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x),$$

$$g(x) \cdot (q(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r(x)$$

kelib chiqadi. Bu tenglikdan quyidagiga ega ni bo'lamiz:

$$\deg(r_1(x) - r(x)) = \deg\left(g(x) \cdot (q(x) - q_1(x))\right).$$

Lekin $\deg(r_1(x) - r(x)) < \deg g(x)$ bo'lganligi uchun $q(x) = q_1(x)$ bo'ladi, bundan $r_1(x) = r(x)$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol 13.2.

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 4$ ko'phadni $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ko'phadga qoldiqli bo'lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 2x^2 + x + 4 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3 + 9x^2 + 3x} & 3x - 11 \\ -11x^2 - 2x + 4 & \\ \underline{-11x^2 - 33x - 11} & \\ 31x + 15 & \end{array}$$

Bundan $q(x) = 3x - 11$ va $r(x) = 31x + 15$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$f(x) = g(x) \cdot (3x - 11) + (31x + 15)$$

tenglikni hosil qilamiz.

14-§. Ko'phadlar uchun Yevklid algoritmi

Bizga $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar berilgan bo'lsin.

14.1-ta'rif. Agar $\varphi(x)$ ko'phad uchun $\varphi(x)|f(x)$ va $\varphi(x)|g(x)$ o'rinli bo'lsa, u holda $\varphi(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning *umumiy bo'luvchisi* deyiladi.

Ma'lumki, agar $\varphi(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi bo'lsa, $c\varphi(x)$ ko'phad ham bu ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi bo'ladi. Bundan tashqari, $\varphi(x)$ ko'phadning bo'luvchilari ham $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchilari bo'ladi.

14.2-ta'rif. $d(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi bo'lib, uning o'zi ham $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning istalgan boshqa bir $\varphi(x)$ umumiy bo'luvchilariga bo'linsa, $d(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning *eng katta umumiy bo'luvchisi* deyiladi va $EKUB(f(x), g(x))$ kabi belgilanadi.

Ta'kidlash joizki, $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi darajasi qolgan umumiy bo'luvchilar darajalaridan kichik bo'lmaydi.

Ushbu mavzuda ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisini topish usuli bo'lgan Yevklid algoritmini keltiramiz.

Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ deb olamiz.

$f(x)$ ni $g(x)$ ga bo'lib, $q_1(x)$ bo'linma va $r_1(x)$ qoldiqni hosil qilamiz

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x).$$

Ma'lumki, $\deg g(x) > \deg r_1(x)$, so'ngra $g(x)$ ni $r_1(x)$ ga bo'lib, $q_2(x)$ bo'linma va $r_2(x)$ qoldiqni olamiz:

$$g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x).$$

So'ngra $r_1(x)$ ni $r_2(x)$ ga bo'lib, bu jarayonni shu tarzda davom ettiramiz. Qoldiqlarning darajalari

$$\deg g(x) > \deg r_1(x) > \deg r_2(x) > \ldots$$

tartibda pasayib borganligi va $\deg g(x)$ chekli bo'lganligi uchun tengsizliklar zanjiri ma'lum joyga kelib tugaydi, ya'ni $\deg r_{n+1}(x) = 0$. Demak, biz quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x),\\
&g(x) = r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x),\\
&r_1(x) = r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{n-3}(x) = r_{n-2}(x) \cdot q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x),\\
&r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_n(x) + r_n(x),\\
&r_{n-1}(x) = r_n(x) \cdot q_{n+1}(x).
\end{aligned} \tag{1}$$

Endi bu tengliklarning oxirgisidan yuqoriga qarab harakat qilsak,

$$r_n(x) | r_{n-1}(x) \Rightarrow r_n(x) | r_{n-2}(x) \Rightarrow r_n(x) | r_{n-3}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow r_n(x) | r_1(x) \Rightarrow r_n(x) | g(x) \Rightarrow r_n(x) | f(x)$$

hosil bo'ladi.

Ravshanki, $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi $r_n(x)$ qoldiq bu ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi bo'ladi. Demak, Yevklid algoritmi $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarni umumiy bo'luvchilarini topish usulini berar ekan.

14.3-teorema. $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi oxirgi noldan farqli qoldiq $r_n(x)$ ularning eng katta umumiy bo'luvchisiga teng, ya'ni $EKUB(f(x), g(x)) = r_n(x)$.

Isbot. Yuqorida $r_n(x)$ qoldiq $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi ekanligini aytib o'tdik. Faraz qilaylik, $d(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x)$ larning boshqa bir umumiy bo'luvchisi bo'lsin. U holda Yevklid algoritmidan ko'rish mumkinki, $d(x) | r_1(x)$ o'rinli bo'ladi, shuningdek, $d(x) | r_2(x)$ munosabat ham o'rinli ekanligini tekshirish qiyin emas. Bu jarayonni davom attirish natijasida $d(x) | r_n(x)$ ekanligini hosil qilamiz.

14.3-teoremadan shuni xulosa qilish mumkinki, berilgan ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisini Yevklid algoritmi yordamida topish mumkin. Shuningdek, agar $d(x)$ berilgan ko'phadlarning EKUBi bo'lsa, u holda ixtiyoriy c nolinchi darajali ko'phad uchun $cd(x)$ ko'phad ham berilgan ko'phadlarning EKUBi bo'ladi.

Misol 15.1. Yevklid algoritmi yordamida $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ va $g(x) = x^3 - 1$ ko'phadlarning EKUBini topaylik.

$$f(x) = g(x) \cdot 1 + (x^2 - x),$$

$$g(x) = (x^2 - x)(x + 1) + (x - 1),$$

$$(x^2 - x) = (x - 1) \cdot x.$$

Demak, $EKUB(f(x), g(x)) = x - 1$.

14.4-ta'rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar nolinchi darajali ko'phadlardan boshqa umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmasa, ushbu ko'phadlar o'zaro tub ko'phadlar deyiladi.

Bundan keyin berilgan ko'phadlarning EKUBining bosh koeffitsientini hamma vaqt 1 ga teng deb olamiz va shunga asosan o'zaro tub ko'phadlarning EKUBi 1 ga teng bo'ladi. O'zaro tub ko'phadlar $(f(x), g(x)) = 1$ kabi yoziladi.

Endi Yevklid algoritmidan foydalanib, quyidagi teoremani isbot qilamiz.

14.5-teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun $\deg u(x) < \deg g(x)$ va $\deg v(x) < \deg f(x)$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $u(x)$, $v(x)$ ko'phadlar topiladiki,

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = EKUB(f(x), g(x)) \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarga Yevklid algoritmini qo'llaymiz. Yevklid algoritmidagi oxiridan bitta oldingi tengligini qaraymiz:

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x) \cdot q_n(x) + r_n(x).$$

Bundan

$$r_n(x) = r_{n-2}(x) - r_{n-1}(x) \cdot q_n(x)$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglikda $r_n(x) = EKUB(f(x), g(x))$ ekanligini hisobga olib, $u_1(x) = 1$, $v_1(x) = -q_n(x)$ deb olsak,

$$r_n(x) = r_{n-2}(x) \cdot u_1(x) + r_{n-1}(x) \cdot v_1(x)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerga $r_{n-1}(x)$ ning $r_{n-3}(x)$ va $r_{n-2}(x)$ orqali ifodasini Yevklid algoritmidagi tenglikdan foydalanib soddalashtirsak,

$$r_n(x) = r_{n-3}(x) \cdot u_2(x) + r_{n-2}(x) \cdot v_2(x)$$

tenglik hosil bo'ladi, bu yerda

$$u_2(x) = v_1(x), v_2(x) = u_1(x) - v_1(x) \cdot q_{n-1}(x).$$

Yevklid algoritmidagi tengliklar bo'ylab yuqoriga tomon harakatlanib borsak, (2) tenglikka kelamiz.

Endi teoremani ikkinchi shartini isbot qilamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\deg u(x) > \deg g(x)$ deb olamiz. U holda $u(x)$ ni $g(x)$ ga qoldiqli bo'lib

$$u(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni (2) ga olib borib ixchamlasak

$$f(x) \cdot r(x) + g(x) \cdot (v(x) + f(x) \cdot q(x)) = r_n(x) \tag{3}$$

hosil bo'ladi.

Bu tenglikda $u_1(x) = r(x)$, deb olsak, $\deg u_1(x) < \deg g(x)$.

Bundan tashqari, $v_1(x) = v(x) + f(x) \cdot q(x)$ deb belgilasak, $\deg v_1(x) < \deg f(x)$ bo'ladi. Aks holda (3) tenglikning chap tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchining darajasi $g(x) \cdot f(x)$ ko'paytmaning darajasidan katta yoki teng bo'lib, chap tomondagi yig'indining darajasi ham $g(x) \cdot f(x)$ ning darajasidan katta yoki teng bo'ladi. Vaholangki, $\deg r_n(x) < \deg g(x) \cdot f(x)$.

(2) tenglikdagi ifodaga $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi orqali chiziqli ifodasi deb ataladi.

Teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

14.6-natija. Agar $(f(x), g(x)) = 1$ bo'lsa, u holda

$$f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = 1$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $u(x)$, $v(x)$ ko'phadlar mavjud, bu yerda $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$.

Misol 14.2. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ va $g(x) = x^3 - 1$ ko'phadlar uchun $u(x)$ va $v(x)$ ko'phadlarni aniqlang.

Yuqoridagi 14.1-misoldagi $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun tuzilgan Yevklid algoritmidagi tengliklardan

$$x - 1 = g(x) - (x^2 - x)(x + 1) = g(x) - (f(x) - g(x))(x + 1) =$$

$$= g(x) - f(x) + g(x)(x+1) = f(x)(-1) + g(x)(x+2)$$

hosil bo'lib, bundan $u(x) = -1$, $v(x) = x + 2$ ko'phadlarni topamiz.

Natijadan foydalanib, o'zaro tub ko'phadlar uchun muhim xossalarni olish mumkin.

14.7-xossa. a) agar $(f(x), g(x)) = 1$ va $(f(x), \varphi(x)) = 1$ bo'lsa, u holda $(f(x), \varphi(x) \cdot g(x)) = 1$ bo'ladi;

b) agar $\varphi(x) | (f(x) \cdot g(x))$ bo'lib, $(f(x), \varphi(x)) = 1$ bo'lsa, u holda $\varphi(x) | g(x)$ bo'ladi;

c) agar $\varphi(x) | f(x)$ va $\psi(x) | f(x)$ bo'lib, $(\varphi(x), \psi(x)) = 1$ bo'lsa, u holda $(\varphi(x) \cdot \psi(x)) | f(x)$ bo'ladi.

Isbot: a) haqiqatdan ham,

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$$

tenglikni $\varphi(x)$ ga ko'paytirsak,

$$f(x) \cdot (u(x) \cdot \varphi(x)) + (g(x) \cdot \varphi(x)) \cdot v(x) = \varphi(x)$$

hosil bo'ladi.

Agar $h(x)$ ko'phad $f(x)$ va $g(x) \cdot \varphi(x)$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchisi bo'lsa, yuqoridagi tenglikdan $h(x) | \varphi(x)$ munosabatni hosil qilamiz. Bu esa $h(x)$ ko'phad $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlarning umumiy bo'luvchilari ekanligini anglatadi. Shartga asosan, $h(x) = 1$ bo'ladi, bundan esa $f(x)$ va $\varphi(x) \cdot g(x)$ ko'phadlar o'zaro tub ekanligi kelib chiqadi.

b) shartga asosan

$$f(x) \cdot u(x) + \varphi(x) \cdot v(x) = 1$$

o'rinli bo'ladi. Tenglikning ikkala tomonini $g(x)$ ko'phadga ko'paytiramiz.

$$(f(x) \cdot g(x)) \cdot u(x) + \varphi(x) \cdot (g(x) \cdot v(x)) = g(x).$$

Bu tenglikning chap tomonidagi yig'indi $\varphi(x)$ ko'phadga bo'lingani uchun o'ng tomonining ham bo'linishi kelib chiqadi. Demak, $\varphi(x) | g(x)$.

c) shartga asosan $f(x) = \varphi(x) \cdot \varphi_1(x)$, bo'lib u $\psi(x)$ ko'phadga bo'linadi, ya'ni $\psi(x) | (\varphi(x) \cdot \varphi_1(x))$, hamda $(\varphi(x), \psi(x)) = 1$ bo'lganligi uchun $\psi(x) | \varphi_1(x)$. Demak, $\varphi_1(x) = \psi(x) \cdot \varphi_2(x)$ bo'ladi, bu yerdan

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \varphi_1(x) = (\varphi(x) \cdot \psi(x)) \cdot \varphi_2(x)$$

hosil bo'ladi. Bundan esa

$$(\varphi(x) \cdot \psi(x)) | f(x)$$

ekanligini kelib chiqadi.

Eng katta umumiy bo'luvchi ta'rifini ixtiyoriy $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ko'phadlar uchun ham berish mumkin, ya'ni agar $d(x)|f_i(x)$, $1 \leq i \leq s$ bo'lib, $f_i(x)$ ko'phadlarning boshqa ixtiyoriy $h(x)$ umumiy bo'luvchisi uchun $h(x)|d(x)$ bo'lsa, $d(x)$ ko'phad $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi deyiladi.

Berilgan $f_i(x)$ ko'phadlarning EKUBini topish uchun avval $(f_1(x), f_2(x)) = d_2(x)$, so'ngra $(d_2(x), f_3(x)) = d_3(x)$ va hokazo $(d_{s-1}(x), f_s(x)) = d_s(x)$ topiladi. Topilgan $d_s(x)$ ko'phad $f_i(x)$ larning EKUBi bo'ladi.

Xususan, agar $d_s(x) = 1$ bo'lsa, u holda $f_i(x)$ ko'phadlarga o'zaro tub ko'phadlar deyiladi.

Agar $\forall i \neq j$ uchun $(f_i(x), f_j(x)) = 1$ bo'lsa, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ko'phadlarga juft-jufti bilan o'zaro tub ko'phadlar deyiladi.

15-§. Ko'phadning ildizlari. Algebraning asosiy teoremasi

Ko'phadlarning ildizlarini topish juda muhim ahamiyat kasb etadi. Chunki, ko'plab matematik masalalarni yechish ko'phadning ildizlarini o'rganish masalasiga olib kelinadi. Shu sababli biz ko'phadlarning ildizlarini o'rganish masalasini keltiramiz.

15.1-ta'rif. $f(x)$ ko'phad uchun $f(\alpha) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi α soniga $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Avvalgi mavzudan ma'lumki, $f(x)$ ko'phadni $x - \alpha$ ko'phadga qoldiqli bo'lish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r. \tag{1}$$

Ta'kidlash joizki, $x - \alpha$ ko'phadning darajasi 1 ga teng bo'lganligi sababli, qoldiqning darajasi nolga teng bo'ladi. Shuning uchun qoldiqli bo'lishdagi qoldiq ko'phad $r(x)$ o'rniga r sonini yozish mumkin.

15.2-teorema (Bezu teoremasi). $f(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linishi uchun $f(\alpha) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* Agar $f(x)$ ko'phad $x - \alpha$ ko'phadga qoldiq-siz bo'linsa, u holda $f(x) = (x - \alpha) \cdot \varphi(x)$ o'rinli bo'ladi. Demak,

$$f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot \varphi(\alpha) = 0.$$

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $x = \alpha$ nuqtada $f(x)$ ko'phad nolga aylansin, ya'ni $f(\alpha) = 0$ bo'lsin. U holda $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x) + r$ tenglikdan

$$r = f(\alpha) - (\alpha - \alpha) \cdot q(\alpha) = 0$$

ekanligini hosil qilamiz. Demak, $f(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$ tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib, $f(x)$ ko'phadning ildizlarini izlash, uning chiziqli bo'luvchilarini izlash masalasiga teng kuchlidir. $f(x)$ ko'phadni $x-\alpha$ chiziqli ko'phadga qoldiqli bo'lishda keng qo'llanadigan Gorner usulini keltiramiz.

Kompleks sonlar maydonida berilgan quyidagi ko'phadni qaraylik:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$f(x)$ ko'phadni $x-\alpha$ chiziqli ko'phadga qoldiqli bo'lganda bo'linma $q(x)$ ni quyidagicha yozib olaylik:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \ldots + b_{n-1}.$$

$q(x)$ ko'phadni (1) tenglikka qo'yib, x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini tenglasak,

$$\begin{gathered}
a_0 = b_0,\\
a_1 = b_1 - \alpha b_0,\\
a_2 = b_2 - \alpha b_1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2},\\
a_n = r - \alpha b_{n-1}
\end{gathered}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ya'ni

$$b_0 = a_0,\ b_k = \alpha b_{k-1} + a_k,\ 1 \le k \le n-1$$

tengliklar kelib chiqadi. Oxirgi

$$r = \alpha b_{n-1} + a_n$$

tenglikdan r qoldiq yoki $f(x)$ ko'phadning $x=\alpha$ nuqtadagi qiymati topiladi.

Bu usul *Gorner sxemasi* deb atalib, quyidagicha jadval orqali ifodalanadi:

a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
a_0	$a_1+\alpha b_0$	$a_2+\alpha b_1$	...	$a_{n-1}+\alpha b_{n-2}$	$a_n+\alpha b_{n-1}$
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	r

Misol 15.1. $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - 5x + 7$ ko'phadni $x-3$ ga bo'lishdagi $q(x)$ bo'linmani va r qoldig'ini Gorner sxemasi yordamida toping.

α	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	2	-3	0	4	-5	7
3	2	3	9	31	88	271
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	r

Shunday qilib, bo'linma $q(x) = 2x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 31x + 88$, qoldiq esa $r = f(3) = 271$ ga teng bo'ldi.

Algebraning asosiy teoremasi. Kompleks koeffitsientli barcha ko'phadlar to'plamini $\mathbb{C}[x]$ orqali belgilaylik. Algebraning asosiy teoremasi deb ataluvchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

15.3-teorema (Algebraning asosiy teoremasi). Darajasi nolga teng bo'lmagan ixtiyoriy $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ko'phad kamida bitta kompleks ildizga ega.

Teoremadan quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

15.4-natija. Darajasi n $(n \geq 1)$ ga teng bo'lgan har qanday $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ko'phad $\mathbb{C}$ maydonda n ta ildizga ega bo'lib,

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

yoyilma ko'rinishida ifodalanadi. Bu yoyilma ko'paytuvchilarining tartibi aniqligida yagonadir.

Isbot. Bizga darajasi n ga teng bo'lgan $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ ko'phad berilgan bo'lsin:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Algebraning asosiy teoremasiga asosan, $f(x)$ ko'phad kamida bitta ildizga ega bo'lib, bu ildiz α_1 bo'lsin. U holda

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot \varphi(x),$$

bu yerda $\deg \varphi(x) = n - 1$. Agar $\varphi(x)$ ko'phadning darajasi ham 1 dan katta bo'lsa, u holda algebraning asosiy teoremasiga ko'ra $\varphi(x)$ ko'phad ham qandaydir α_2 ildizga ega, ya'ni $\varphi(x) = (x - \alpha_2) \cdot \varphi_1(x)$. Demak,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\varphi_1(x).$$

Bu jarayonni davom ettirib, $(n - 1)$ ta qadamdan so'ng $f(x)$ ko'phadning chiziqli ko'paytuvchilar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r. \tag{2}$$

Endi ushbu yoyilmaning yagonaligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni (2) yoyilmadan farqli yana bir

$$f(x) = a_0(x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_n) \tag{3}$$

yoyilma mavjud bo'lsin. Ushbu tengliklardan quyidagini hosil qilamiz

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \cdot \ldots \cdot (x - \beta_n). \tag{4}$$

Agar chap tomonda ishtirok etgan biror α_i ildiz o'ng tomonda ishtirok etmasa, ya'ni $\alpha_i \neq \beta_j$, $1 \leq j \leq n$ bo'lsa, u holda (4) tenglikning har ikkala tomonida $x = \alpha_i$ qo'yamiz. Natijada chap tomoni nolga teng bo'lib, o'ng tomonida esa noldan farqli son hosil bo'ladi. Bu esa ziddiyat. Demak, barcha α_i ildizlar o'ng tomonda ham ishtirok etishi kerak. Huddi shunday barcha β_j ildizlarning chap tomonda ham ishtirok etishi kelib chiqadi.

Endi bu ildizlarning aynan bir xil sonda (tartibda) ishtirok etishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, α_1 ildiz chap tomonda s marotaba va o'ng tomonda t marotaba ishtirok etib, $s \neq t$ bo'lsin. U holda (4) tenglikning ikkala tomonini $(x-\alpha_1)^{\min\{s,t\}}$ ko'phadga qisqartirib yuboramiz. Natijada, hosil bo'lgan tenglikning bitta tomonida $x - \alpha_1$ ko'paytuvchi qatnashmaydi, ikkinchi tomonida esa, u $(x-\alpha_1)^{|s-t|}$ shaklda qatnashadi. Yuqoridagi mulohaza kabi yana ziddiyatga duch kelamiz. Bu esa yoyilmani ko'paytuvchilarning tartibi aniqligida yagona ekanligini bildiradi.

Bir hil ko'paytuvchilarni jamlab, (2) yoyilmani

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{k_s} \tag{5}$$

shaklga olib kelish mumkin, bu yerda $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$ va $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ildizlar orasida o'zaro tenglari yo'q.

Hosil bo'lgan (5) tenglikda α_i ildiz $f(x)$ ko'phadning k_i karrali ildizi bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi natijani hosil qilamiz:

15.5-natija. Agar darajalari n dan oshmaydigan $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar noma'lumning turli xil $n+1$ ta qiymatida teng qiymatlarga ega bo'lsa, u holda $f(x) = g(x)$ bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $f(x) - g(x) = h(x)$ ko'phad farazimizga ko'ra $n+1$ ta ildizga ega bo'lib, $\deg h(x) \leq n$ bo'lganligi sababli $h(x)$ ko'phad $n+1$ ta ildizga ega bo'lsa, $h(x) = 0$ bo'ladi.

Bu natijadan istalgan n-darajali ko'phadning koeffitsientlari $n+1$ ta qiymat orqali yagona ravishda aniqlanishi mumkin degan xulosaga kelamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, agar bizga ikkita

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{k_s},$$

$$g(x) = b_0(x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{m_s}$$

ko'phadlarning yoyilmalari berilgan bo'lsa, u holda ularning EKUBi va EKUKi quyidagi ko'rinishlarga ega bo'ladi:

$$EKUB\,(f(x), g(x)) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\beta_2}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{\beta_s},$$

$$EKUK\,(f(x), g(x)) = (x-\alpha_1)^{\gamma_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\gamma_2}\cdot \ldots \cdot (x-\alpha_s)^{\gamma_s},$$

bu yerda

$$\beta_i = \min(k_i, m_i), \quad \gamma_i = \max(k_i, m_i).$$

Shunday qilib, biz ko'phadlarni kanonik yoyilmasidan foydalanib, ularning eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralilarini hisoblay olishimiz mumkin.

Misol 15.2. $f(x) = (x+1)^4(x-2)^3(x-7)^2(x+12)(x+5)^2$ va $g(x) = (x+1)^3(x-2)(x-7)^2(x+12)^3(x+5)^6$ ko'phadlarning EKUB va EKUK larini topamiz:

$$EKUB(f(x), g(x)) = (x+1)^3(x-2)(x-7)^2(x+12)(x+5)^2.$$

Shuningdek,

$$EKUK(f(x), g(x)) = (x+1)^4(x-2)^3(x-7)^2(x+12)^3(x+5)^6.$$

15.6-ta'rif. Agar $f(x)$ ko'phad notrivial bo'luvchilarga ega bo'lmasa, u holda u keltirilmas ko'phad deyiladi.

Algebraning asosiy teoremasidan ma'lumki, kompleks sonlar maydonida keltirilmas ko'phadlar faqat $x - \alpha$ shaklidagi chiziqli ko'phadlardan iborat bo'ladi.

Haqiqiy sonlar maydonida esa $x - \alpha$ shaklidagi chiziqli ko'phadlardan tashqari $x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$ ko'rinishidagi kvadrat uchhadlar ham keltirilmas ko'phad bo'lishi ravshan. Quyidagi tasdiqda haqiqiy sonlar maydonida darajasi ikkidan katta bo'lgan keltirilmas ko'phad mavjud emasligini ko'rsatamiz.

15.7-tasdiq. Haqiqiy sonlar maydonidagi keltirilmas ko'phadlar faqat $x - \alpha$ shaklidagi chiziqli ko'phadlar va $x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$ ko'rinishidagi kvadrat uchhadlardan iborat bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $f(x)$ ko'phad darajasi ikkidan katta va haqiqiy sonlar maydonida keltirilmas ko'phad bo'lsin. U holda u haqiqiy ildizga ega emas, lekin algebraning asosiy teoremasiga ko'ra $f(x)$ ko'phad $x_0 = a + ib$, $b \neq 0$ kompleks izldizga ega. Quyidagi ko'phadni qaraymiz:

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - \bar{x}_0) = (x - a - ib)(x - a + ib) = (x-a)^2 + b^2.$$

Ushbu $\varphi(x)$ ko'phad haqiqiy koeffitsiyentli keltirilmas ko'phad bo'lib, $f(x)$ ko'phad bilan umumiy kompleks ildizga ega. Shuning uchun $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadlar o'zaro tub emas. Demak, $f(x)$ ko'phad $\varphi(x)$ ga bo'linadi. Bu esa $f(x)$ ko'phadning keltirilmas ekanligiga zid.

15.4-natijaning isboti kabi ixtiyoriy haqiqiy koeffitsientli ko'phadni keltirilmas ko'phadlarning ko'paytmasi shaklida yagona ravishda ifodalanilishini ko'rsatish qiyin emas. Ya'ni haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko'phad uchun

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)^{k_n}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

yoyilma o'rinli, bu yerda $p_i^2 - 4q_i < 0$.

Viyet formulasi. Bizga bosh koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan n-darajali

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

ko'phad berilgan bo'lib, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ uning ildizlari bo'lsin. U holda

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n)$$

yoyilmaga ega bo'ladi. Bu yoyilmaning o'ng tomonidagi qavslarini ochib chiqib, o'xshash hadlarini ixchamlagandan so'ng bir xil hadlari oldidagi koeffitsientlarini tenglashtirsak, quyidagi tengliklarni olamiz:

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-1} + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_{n-2} \cdot \alpha_n + ... + \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot ... \cdot \alpha_n),$$

$$a_{n-1} = (-1)^n\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_n.$$

Ushbu tengliklar ko'phad koeffisentlarini uning ildizlari orqali ifodalovchi formula hisoblanib, *Viyet formulasi* deb ataladi. Tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar *simmetrik ko'phadlar* deyiladi.

16-§. Ratsional kasrlar

Ushbu mavzuda haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni ustida berilgan ratsional kasrlar haqida gap boradi. Biror maydon ustida berilgan $f(x)$ va $g(x), g(x) \neq 0$ ko'phadlarning $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbatiga *ratsional kasrli funksiya* yoki qisqacha *ratsional kasr* deyiladi.

16.1-ta'rif. Agar $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ va $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ ratsional kasrlar uchun $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu ratsional kasrlar teng deyiladi.

Masalan, $\dfrac{1}{x-1}$ va $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ ratsional kasrlar tengdir.

Ratsional kasrlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

1. $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} + \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = \dfrac{f_1(x) \cdot g_2(x) + f_2(x) \cdot g_1(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)};$
2. $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)} = \dfrac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)}.$

Berilgan $\frac{f(x)}{g(x)}$ ratsional kasrda xar doim $(f(x), g(x)) = 1$ deb olishimiz mumkin. Chunki, $(f(x), g(x)) = d(x)$ bo'lsa, u holda $f(x) = d(x) \cdot f_1(x)$ va $g(x) = d(x) \cdot g_1(x)$ ekanligidan $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ kelib chiqadi, bu yerda $(f_1(x), g_1(x)) = 1$.

Bunday kasrlarga *normallashgan* kasrlar deb ataladi.

16.2-ta'rif. Agar $\frac{f(x)}{g(x)}$ ratsional kasrda

$$\deg(f(x)) < \deg(g(x))$$

bo'lsa, u holda u to'g'ri ratsional kasr, aks holda noto'g'ri ratsional kasr deyiladi.

16.3-tasdiq. Har qanday ratsional kasr ko'phad va to'g'ri ratsional kasrlarning yig'indisi orqali ifodalanadi.

Isbot: Agar $\frac{f(x)}{g(x)}$ to'g'ri ratsional kasr bo'lsa, teorema o'rinli ekanligi ravshan.

Faraz qilaylik, $\frac{f(x)}{g(x)}$ noto'g'ri ratsional kasr bo'lsin. U holda $f(x)$ ko'phadni $g(x)$ ga qoldiqli bo'lib,

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x), \deg r(x) < \deg g(x)$$

tenglikni hosil qilamiz, bundan esa,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot q(x) + r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

kelib chiqadi.

16.4-tasdiq. To'g'ri ratsional kasrlarning yig'indisi va ko'paytmasi to'g'ri ratsional kasr bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, agar $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ va $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ to'g'ri ratsional kasrlar bo'lsa,

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \frac{f_1(x) \cdot g_2(x) + f_2(x) \cdot g_1(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)}$$

to'g'ri ratsional kasr bo'ladi, chunki

$$\deg(f_1(x) \cdot g_2(x) + f_2(x) \cdot g_1(x)) < \deg(g_1(x) \cdot g_2(x)).$$

Huddi shunday, ularning ko'raytmasi ham to'g'ri ratsional kasr bo'ladi.

16.5-teorema. Agar

$$\frac{f(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x)}$$

to'g'ri ratsional kasrda $(g_1(x), g_2(x)) = 1$ bo'lsa, u holda bu ratsional kasrni ikkita to'g'ri ratsional kasrlarning yig'indisi ko'rinishida yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot. Ratsional kasr maxrajidagi $g_1(x)$ va $g_2(x)$ ko'phadlar o'zaro tub bo'lganligi uchun shunday $u(x)$ va $v(x)$ ko'phadlar mavjudki, $u(x)g_1(x) + v(x)g_2(x) = 1$, bo'ladi. Demak,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)} = f(x)\cdot\frac{u(x)g_1(x)+v(x)g_2(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g_2(x)} + \frac{f(x)v(x)}{g_1(x)}.$$

Endi $f(x)\cdot u(x)$ ni $g_2(x)$ ga qoldiqli bo'lamiz:

$$f(x)\cdot u(x) = g_2(x)\cdot q_2(x) + r_2(x), \deg r_2(x) < \deg g_2(x).$$

Demak,

$$\frac{f(x)\cdot u(x)}{g_2(x)} = q_2(x) + \frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

Hosil bo'lgan $q_2(x)$ ko'phadni $\dfrac{f(x)\cdot v(x)}{g_1(x)}$ kasrga kiritsak,

$$\frac{f(x)\cdot v(x)}{g_1(x)} + q_2(x) = \frac{f(x)\cdot v(x) + g_2(x)\cdot q_2(x)}{g_2(x)}$$

ratsional kasr hosil bo'ladi.

Bu ratsional kasr

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)} \quad \text{va} \quad \frac{r_2(x)}{g_2(x)}$$

to'gri ratsional kasrlarning ayirmasi bo'lganligi uchun, u ham to'g'ri ratsional kasr bo'ladi. Demak,

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)} = \frac{r_1(x)}{g_1(x)} + \frac{r_2(x)}{g_2(x)}.$$

Bu teoremani umumlashtirib, quyidagi natijani hosil qilamiz.

16.6-natija. Agar

$$\frac{f(x)}{g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot \ldots \cdot g_k(x)}$$

to'g'ri ratsional kasrda $(g_i(x), g_j(x)) = 1$, $i \neq j$ bo'lsa, u holda bu kasr to'g'ri ratsional kasrlarning

$$\frac{r_1(x)}{g_1(x)} + \frac{r_2(x)}{g_2(x)} + \ldots + \frac{r_k(x)}{g_k(x)}$$

yoyilmasi orqali yagona ravishda ifodalanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy $g(x)$ ko'phadni keltirilmas ko'phadlarning ko'paytmasi $g(x) = p_1^{k_1}(x) \cdot p_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}(x)$ shaklida yagona ravishda ifodalash mumkin. Bunga asosan, biz yuqoridagi natijani umumlashtirib,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x) \cdot p_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \ldots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}$$

yoyilmani hosil qilamiz.

Ushbu yoyilmadagi

$$\frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)}$$

to'g'ri kasrlarga *primar kasrlar* deb ataladi. Agar primar kasrda $\deg f_i(x) < \deg p_i(x)$ bo'lsa, bu primar kasrga *sodda kasr* deyiladi.

16.7-teorema. Har qanday primar to'g'ri kasr sodda kasrlarning yig'indisi shaklida ifodalanadi.

Isbot. Bizga

$$\frac{f(x)}{p^k(x)}$$

primar kasr berilgan bo'lsin. $f(x)$ ko'phadni $p(x)$ ga qoldiqli bo'lsak, $f(x) = p(x) \cdot q_1(x) + f_1(x)$ bo'ladi. U holda

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{f_1(x)}{p^k(x)} + \frac{q_1(x)}{p^{k-1}(x)}.$$

Agar $\deg(q_1(x)) < \deg(p(x))$ bo'lsa teorema isboti kelib chiqadi. $\deg(q_1(x)) \geq \deg(p(x))$ bo'lganda esa, $q_1(x)$ ko'phadni $p(x)$ ga qoldiqli bo'lib, $q_1(x) = p(x) \cdot q_2(x) + f_2(x)$ ekanligidan

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{f_1(x)}{p^k(x)} + \frac{f_2(x)}{p^{k-1}(x)} + \frac{q_2(x)}{p^{k-2}(x)}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu jarayonni chekli marotaba davom ettirsak, berilgan ratsional kasr sodda kasrlarning yig'indisi shaklida ifodalanishi kelib chiqadi:

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{f_1(x)}{p^k(x)} + \frac{f_2(x)}{p^{k-1}(x)} + \ldots + \frac{f_k(x)}{p(x)}.$$

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

16.8-natija. Ixtiyoriy to'g'ri ratsional kasrni yagona ravishda sodda kasrlarning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin.

Kompleks sonlar maydonida ixtiyoriy ko'phad

$$g(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_s)^{k_s}$$

ko'rinishida ifodalanganligi uchun, sodda ratsional kasrlar

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k}$$

ko'rinishida bo'ladi. To'g'ri kasrning sodda ratsional kasrlarga yoyilmasi esa,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{1,k}}{x-\alpha_1} +$$

$$\frac{A_{2,1}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \frac{A_{2,2}}{(x-\alpha_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{A_{2,k}}{x-\alpha_2} +$$

$$+ \dots + \frac{A_{s,1}}{(x-\alpha_s)^{k_s}} + \frac{A_{s,2}}{(x-\alpha_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{A_{s,k}}{x-\alpha_s}.$$

ko'rinishida bo'ladi.

Haqiqiy sonlar maydonida sodda ratsional kasrlarning umumiy ko'rinishi

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{va} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \quad p^2-4q<0$$

shaklda bo'ladi.

Misol 16.2. $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ to'g'ri kasrni haqiqiy sonlar maydonida sodda kasrlarga yoying.

Ushbu kasr $\dfrac{A}{x-1}$ va $\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ sodda kasrlarning yig'indisiga yoyiladi, ya'ni

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $(x-1)(x^2+1)$ ko'phadga ko'paytirsak, $1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$ tenglik hosil bo'ladi. Bu yerdan

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2} \quad \text{va} \quad C = -\frac{1}{2}$$

ekanligini topish qiyin emas.

Demak,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

17-§. Uchinchi va to'rtinchi darajali algebraik tenglamalarni yechish

Ushbu mavzuda uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalarni yechish usullarini keltiramiz. Dastlab, uchunchi darajali tenglamani qaraymiz.

Ma'lumki, uchinchi darajali tenglamalarning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Bu tenglamaning koeffitsiyentlari kompleks sonlardan iborat bo'lib, tenglamani ham kompleks yechimlarini topish masalasini qaraymiz. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $a_0 = 1$ deb olish mumkin. $x = y - \frac{a_1}{3}$ kabi almashtirish bajarib, teglamani quyidagi ko'rinishga keltirib olamiz:

$$\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + a_3 = 0.$$

Ushbu tenglamaning qavslarini ochib, o'xshash hadlarini ixchamlasak:

$$y^3 + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{3}\right)y + \left(a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2}{27}a_1^3\right) = 0.$$

Endi $p = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$, $q = a_3 - \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2}{27}a_1^3$ belgilashlarni kiritsak, berilgan tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y^3 + py + q = 0.$$

Demak, 3-darajali tenglamani yechish masalasi yuqoridagi tenglamani yechishga keltirildi. Ushbu tenglamada $y = \alpha + \beta$ deb olsak,

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0,$$

yoki,

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Ma'lumki, agar $\alpha^3 + \beta^3 + q = 0$ va $3\alpha\beta + p = 0$ bo'lsa, u holda $y = \alpha + \beta$ soni $y^3+py+q = 0$ tenglamaning yechimi bo'ladi. Shunday qilib, biz quyidagi sistemani hosil qildik:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ 3\alpha\beta = -p, \end{cases}$$

Ushbu sistemani yechish uchun ikkinchi tenglikni kubga ko'tarsak, $\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$. Bundan esa, α^3 va β^3 sonlarini quyidagi kvadrat tenglamaning yechimlari sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

bu yerdan,

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

va

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Demak, y uchun quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ushbu ifodaga *Kardano formulasi* deyiladi.

Har bir sonning uchta kubik kompleks ildizi mavjudligini hisobga olsak, ikkala ildiz uchun jami to'qqizta kombinatsiya kelib chiqadi, ya'ni y ning qiymati to'qqiz xil aniqlanadi. Lekin, ulardan faqatgina $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ shartni qanoatlantiruvchilarigina tenglamaning yechimi bo'ladi.

Aytaylik, α_1 va β_1 – izlanayotgan juftliklardan biri bo'lsin. Qolgan α ga mos qiymatlar $\alpha_1\omega_1$ va $\alpha_1\omega_2$ bo'lib, β ga mos qiymatlar esa $\beta_1\omega_2$ va $\beta_1\omega_1$ bo'ladi. Bu yerda $\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ya'ni 1 ning boshlang'ich kub ildizlari.

Demak, Kardano formulasi orqali tenglamaning barcha

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_2,$$

$$y_3 = \alpha_1\omega_2 + \beta_1\omega_1$$

yechimlarini aniqlash mumkin.

Misol 17.1. $y^3 + (3 - 3i)y + (-2 + i) = 0$ tenglamani yeching.

Kardano formulasiga ko'ra

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{i}{2}\right)^2 + (1 - i)^3}} +$$

$$+ \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} - \sqrt{\left(1 - \frac{i}{2}\right)^2 + (1 - i)^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} + \sqrt{-\frac{5}{4} - 3i}} + \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} - \sqrt{-\frac{5}{4} - 3i}} =$$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} + \left(\frac{3}{2}i - 1\right)} + \sqrt[3]{1 - \frac{i}{2} - \left(\frac{3}{2}i - 1\right)} = \sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

Kub ildizlarni chiqarganda ularning ko'paytmasi $-\frac{p}{3}$ ga ya'ni $-1+i$ ga teng bo'lishini hisobga olish lozim. Shuning uchun birinchi ildiz uchun $-i$ qiymatni olganda ikkinchisi uchun $-1-i$ qiymat olinadi. Demak, berilgan tenglamaning ildizlari:

$$y_1 = -i + (-1-i) = -1-2i,$$

$$y_2 = -i\omega_1 + (-1-i)\omega_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i,$$

$$y_3 = -i\omega_2 + (-1-i)\omega_1 = \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)i.$$

Endi $y^3+py+q=0$ kubik tenglamaning p va q koeffitsiyentlari haqiqiy sonlar bo'lganda Kardano formulasini qo'llash qanday natija berishini tahlil qilamiz.

Kardano formulasidan ko'rinadiki,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

ifodaning ishorasi tenglamaning yechimlari xarakteriga sezilarli ta'sir qiladi. Uchta holatni alohida ko'rib chiqamiz.

1-hol. Aytaylik

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$$

bo'lsin. Bu holda

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \quad \text{va} \quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

sonlarning ikkalasi ham haqiqiy va turli hil bo'lib, birinchi kub ildizning qiymati α_1 haqiqiy qiymat olinganida β_1 ning ham haqiqiy qiymati olinadi. Shunday qilib, bu holatda yechimlar quyidagicha bo'ladi:

$$y_1 = \alpha_1+\beta_1,$$

$$y_2 = \alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_2 = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}+\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}i\sqrt{3},$$

$$y_3 = \alpha_1\omega_2+\beta_1\omega_1 = -\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}-\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}i\sqrt{3}.$$

Demak,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$$

bo'lganda berilgan kubik tenglama bitta haqiqiy ildizga va ikkita o'zaro qo'shma kompleks ildizlarga ega bo'ladi.

2-hol. Farza qilaylik

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$$

bo'lsin. Bu holda

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \quad \text{va} \quad -\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

ifodalar haqiqiy va o'zaro teng bo'lib, α_1 va β_1 kub ildizlar ham haqiqiy va o'zaro teng bo'ladi, ya'ni $\alpha_1=\beta_1$. U holda berilgan kubik tenglama quyidagi ildizlarga ega bo'ladi

$$y_1=\alpha_1+\beta_1=2\alpha_1,$$

$$y_2=\alpha_1\omega_1+\beta_1\omega_2=-\alpha_1,$$

$$y_3=\alpha_1\omega_2+\beta_1\omega_1=-\alpha_1.$$

Demak, bu holda uchchala ildiz ham haqiqiy bo'lib, bitta ildizi ikki karrali ildiz bo'ladi.

3-hol. Aytaylik

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

bo'lsin. Ravshanki, bu holat faqatgina p manfiy bo'lgandagina o'rinli. $p_1=-p$ deb belgilasak, $p_1>0$ bo'lib, kub ildizlar ostida quyidagi o'zaro qo'shma kompleks sonlar hosil bo'ladi:

$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}} \quad \text{va} \quad -\frac{q}{2}-i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}.$$

Kub ildizdan qutilish uchun

$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}$$

kompleks sonni trigonometrik shaklga o'tkazamiz:

$$r=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right)^2}=\sqrt{\frac{p_1^3}{27}},$$

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2r},\ \sin\varphi>0.$$

Demak,

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{\frac{p_1^3}{27}-\frac{q^2}{4}}}=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)=$$

$$= \sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right),$$

bu yerda $k = 0, 1, 2$.

$$\alpha\beta = \frac{p_1}{3}$$

ekanligidan esa

$$\beta = \frac{\frac{p_1}{3}}{\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right).$$

Shunday qilib, β soni α soniga qo'shma kompleks son bo'ladi. Demak, kubik tenglamaning quyidagi ildizlarini hosil qilamiz

$$y = \sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{p_1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) = 2\sqrt{\frac{p_1}{3}}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},$$

bu yerda $k = 0, 1, 2$.

Bundan ko'rinadiki,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

bo'lgan holda kubik tenglamaning uchchala ildizi ham haqiqiy bo'lib, ular turli xil bo'ladi.

Misol 17.2. Tenglamani yeching: $y^3 - 9y + 8 = 0$.

Kardano formulasidan foydalansak,

$$y = \sqrt[3]{-4+\sqrt{16-27}}+\sqrt[3]{-4-\sqrt{16-27}} =$$

$$= \sqrt[3]{-4+i\sqrt{11}}+\sqrt[3]{-4-i\sqrt{11}}.$$

$$-4+i\sqrt{11} = \left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^3 \quad \text{va} \quad -\frac{p}{3} = 3$$

ekanligini hisobga olsak,

$$y_1 = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}+\frac{1+i\sqrt{11}}{2} = 1,$$

$$y_2 = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\omega_1+\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\omega_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2},$$

$$y_3 = \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\omega_2 + \frac{1+i\sqrt{11}}{2}\omega_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Demak, tenglamaning uchchala ildizi ham haqiqiy son bo'ladi.

Misol 17.3. Tenglamani yeching: $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Bu yerda ham Kardano formulasini qo'llasak:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{4+1}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{4+1}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Kub ildiz ostidagi ifodalar uchun

$$2+\sqrt{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \quad \text{va} \quad 2-\sqrt{5} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$$

ekanligidan foydalansak, tenglamaning ildizlarini hosil qilamiz:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

$$x_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2},$$

$$x_3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\omega_2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\omega_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{15}}{2}.$$

Endi to'rtinchi darajali tenglamalarni yechishning L.Ferrariga tegishli bo'lgan usulni keltirib o'tamiz.

Keltiriladigan usulning maqsadi

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

tenglamaning chap tomonini kvadratlar ayirmasi ko'rinishida yozib olishdan iborat. U holda tenglamani ikkita ikkinchi darajali hadlar ko'paytmasi sifatida yozish mumkin. Shu yo'l bilan berilgan tenglamani yechish masalasi ikkita kvadrat tenglamani yechishga olib kelinadi. Buning uchun tenglama chap tomonini quyidagicha yozib olamiz:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{ayx}{2} - \frac{y^2}{4} - yx^2 + bx^2 + cx + d =$$

$$= \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right)\right].$$

Bu yerda y yordamchi noma'lum bo'lib, kvadrat qavsdagi ifoda chiziqli ikkihadning kvadrati bo'ladigan qilib tanlanadi. Ma'lumki, $Ax^2+Bx+C=0$

kvadrat uchhad chiziqli ikkihadning kvadrati bo'lishi uchun $B^2 - 4AC = 0$ bo'lishi zarur va yetarli. Bunga ko'ra

$$\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} + y - b\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0.$$

Bu shart y ga nisbatan uchinchi darajali tenglama bo'lib, qavslarni ochgandan so'ng quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - (c^2 + a^2d - 4bd) = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlaridan biri y_1 bo'lsa, u holda yuqoridagi kvadrat uchhad to'la kvadrat shaklida ifodalanadi, ya'ni

$$\left(\frac{a^2}{4} - y_1 + b\right)x^2 + \left(\frac{ay_1}{2} - c\right)x + \left(\frac{y_1^2}{4} - d\right) = (kx + l)^2.$$

Berilgan tenglamaning ko'rinishi esa

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_1}{2}\right)^2 - (kx + l)^2 = 0,$$

yoki

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_1}{2} + kx + l\right)\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_1}{2} - kx - l\right) = 0$$

holatlarga keladi.

Har bir ko'paytuvchilarni nolga tenglab, tenglamaning 4 ta ildizini topamiz. Agar x_1 va x_2 birinchi ko'paytuvchining, x_3 va x_4 ikkinchi ko'paytuvchining ildizlari bo'lsa, u holda

$$x_1x_2 = \frac{y_1}{2} + l, \quad x_3x_4 = \frac{y_1}{2} - l.$$

Bu tengliklarni qo'shib, $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ munosabatni hosil qilamiz. Demak, berilgan to'rtinchi darajali tenglama ildizlari orqali uchinchi darajali yordamchi tenglamaning y_1 ildizining ifodasini topish mumkin.

Misol 17.4. Tenglamani yeching: $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

Yuqorida keltirilgan usulga ko'ra chap tomonni o'zgartiramiz:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 =$$

$$= \left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 - yx^2 - x^2 - xy - \frac{y^2}{4} - 6x^2 - 5x + 2 =$$

$$= \left(x^2 + x + \frac{y}{2}\right)^2 - \left[(y + 7)x^2 + (y + 5)x + \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)\right].$$

Demak, $(y+5)^2 - 4(y+7)\left(\frac{y^2}{4} - 2\right) = 0$ bo'lib, bu tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y^3 + 6y^2 - 18y - 81 = 0.$$

Ushbu tenglamaning ildizlaridan biri $y_1 = -3$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Berilgan tenglamaning chap tomoniga bu ildizni qo'ysak:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = \left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left[4x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \left(x^2 + x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = (x^2 + 3x - 1)(x^2 - x - 2).$$

Hadlarni nolga tenglab, quyidagi yechimlarni hosil qilamiz:

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}, x_3 = 2, x_4 = -1.$$

IV BOB. CHIZIQLI FAZOLAR. CHIZIQLI ALMASHTIRISHLAR. KVADRATIK FORMALAR

18-§. Chiziqli fazo. Qism fazolar

Bizga V to'plam berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $x, y \in V$ elementlarga ularning yig'indisi deb ataluvchi $z \in V$ elementni mos qo'yib, uni $z := x+y$ ko'rinishda belgilab olamiz. Shuningdek, biror $\mathbb{K}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ maydondan olingan ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{K}$ sonini $x \in V$ elementga ko'paytmasi sifatida $y \in V$ elementni mos qo'yamiz va uni $y := \lambda \cdot x$ ko'rinishda belgilaymiz.

18.1-ta'rif. Agar V to'plamda aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, V to'plam *chiziqli fazo* deyiladi:

1) $x + y = y + x$ (kommutativlik sharti);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (assosiativlik sharti);

3) shunday $0 \in V$ element mavjud bo'lib, har qanday $x \in V$ uchun $x+0 = 0 + x = x$, bu yerdagi 0 element *nol element* deyiladi;

4) har qanday $x \in V$ uchun $-x \in V$ bilan belgilanadigan shunday element mavjud bo'lib, $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha\beta \cdot x = \beta \cdot (\alpha \cdot x)$;

7) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

8) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$; bu yerda, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$.

Misol 18.1. a) Haqiqiy (kompleks) sonlar maydoni $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ o'z ustida chiziqli fazo tashkil etadi.

b) Tekislikdagi (fazodagi) vektorlar to'plami vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

c) Darajasi n dan oshmaydigan haqiqiy (kompleks) koeffitsientli barcha ko'phadlar to'plami ko'phadlarni qo'shish va ko'phadni songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

d) Barcha $n \times m$-tartibli matritsalar to'plami matritsalarni qo'shish va matritsani songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

Chiziqli fazo elementlarini *vektorlar* deb atash qabul qilingan. Agar chiziqli fazo haqiqiy (kompleks) sonlar maydonida berilgan bo'lsa *haqiqiy (kompleks) chiziqli fazo* deyiladi.

Bizga V chiziqli fazo berilgan bo'lib, x_1, x_2, ..., x_n vektorlar chiziqli fazoning elementlari bo'lsin. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ yig'indi vekrorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi, bu yerda $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

18.2-ta'rif. Agar kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar mavjud bo'lib,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar chiziqli bog'liq vektorlar deyiladi.

Chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlar chiziqli *erkli vektorlar* deyiladi. Ya'ni,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

tenglik $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi.

18.3-tasdiq. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ulardan kamida bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalaniladi. Va aksincha, agar vektorlarning bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalansa, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin. U holda

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

chiziqli kombinatsiyadagi koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda, $\alpha_1 \neq 0$ deb olishimiz mumkin. U holda $\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 - \ldots - \alpha_n x_n$ tenglikdan

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$$

kelib chiqadi. $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, $2 \le i \le n$ kabi belgilasak, x_1 vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n$$

kabi ifodalanishini hosil qilamiz.

Aksincha, agar x_1 vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi shaklida $x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots + \lambda_n x_n$ kabi ifodalansa, $x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 - \ldots - \lambda_n x_n = 0$ tenglikdan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlarning chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

Misol 18.2. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'ladi.

Endi fazoning o'lchami tushunchasini kiritamiz.

18.4-ta'rif. Agar V chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli vektorlar mavjud bo'lib, bundan ortiq sondagi chiziqli erkli vektorlar mavjud bo'lmasa, V chiziqli fazo n o'lchamli fazo deyiladi. Chiziqli fazoning o'lchami $\dim(V)$ kabi belgilanadi.

Agar V fazoda cheksiz ko'p chiziqli erkli vektorlar mavjud bo'lsa, u holda V fazo *cheksiz o'lchamli fazo* deyiladi.

18.5-ta'rif. n o'lchamli V fazodagi n ta chiziqli erkli e_1, e_2, ..., e_n vektorlar V fazoning *bazisi* deb ataladi.

Misol 18.3. a) To'g'ri chiziqdagi vektorlar to'plamida har qanday ikki vektor proporsional, ya'ni chiziqli bog'liqdir. Demak, to'g'ri chiziq bir o'lchamli fazoga misol bo'ladi.

b) Tekislikda ikkita chiziqli erkli vektor mavjud, ammo xar qanday uchta vektor chiziqli bog'liq bo'ladi. Bundan esa, tekislik ikki o'lchamli chiziqli fazo ekanligi kelib chiqadi.

Bizga n o'lchamli V chiziqli fazo va uning biror bazisi berilgan bo'lsin.

18.6-teorema. n o'lchamli V chiziqli fazoning ixtiyoriy elementini bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali yagona ravishda ifodalash mumkin.

Isbot. Bizga $x \in V$ element va e_1, e_2, ..., e_n bazis berilgan bo'lsin. Chiziqli fazo n o'lchamli bo'lganligi uchun $n+1$ ta vektordan iborat xe_1, e_2, ..., e_n vektorlar chiziqli bo'g'liq bo'ladi. Demak, kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sonlar topilib,

$$\alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0,$$

bo'ladi. Agar $\alpha_0 = 0$ bo'lsa, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0$ tenglikdan va e_1, e_2, ..., e_n vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa yuqoridagi mulohazaga zid. Demak, $\alpha_0 \neq 0$ bo'lib,

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}e_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}e_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}e_n$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $x \in V$ vektor e_1, e_2, ..., e_n vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalanadi.

Endi hosil qilingan ifodaning yagona ekaniligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, x vektorning bazis vektorlar orqali ikki xil ifodasi mavjud bo'lsin, ya'ni: $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ va $x = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n$.

Bu ifodalarni tenglab,

$$(\xi_1 - \eta_1)e_1 + (\xi_2 - \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n - \eta_n)e_n = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.

e_1, e_2, ..., e_n vektorlar chiziqli erkli bo'lgani uchun, bu tenglik $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$, ..., $\xi_n = \eta_n$ bo'lgandagina o'rinlidir.

18.7-ta'rif. e_1, e_2, ..., e_n vektorlar n o'lchamli fazoning bazisi bo'lib,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

bo'lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sonlar x vektorning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdagi koordinatalari deb ataladi.

18.6-teoremaga muvofiq, ma'lum $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda har bir vektor bir qiymatli aniqlanadigan koordinatalarga ega.

Agar x va y vektor $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda mos ravishda $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ va $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ koordinatalarga ega bo'lsa, ya'ni,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \ldots + \nu_n e_n.$$

U holda $x+y$ vektor $\xi_1+\nu_1, \xi_2+\nu_2, \ldots, \xi_n+\nu_n$ koordinatalarga ega bo'ladi, ya'ni

$$x + y = (\xi_1 + \nu_1)e_1 + (\xi_2 + \nu_2)e_2 + \ldots + (\xi_n + \nu_n)e_n,$$

Shunday qilib, x va y vektorlarni qo'shishda ularning bir xil bazisdagi koordinatalari yig'indisi olinadi.

x vektorni λ soniga ko'paytirishda esa uning har bir koordinatasi shu songa ko'paytiriladi.

Misol 18.4. a) Bizga $V = \mathbb{R}^3$ uch o'lchamli haqiqiy vektor fazo berilgan bo'lsin. Bu fazoda $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ vektorlar bazis tashkil qiladi va ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektorning ushbu bazisdagi koordinatalari x_1, x_2, x_3 bo'ladi.

b) $V = P_n(t)$ darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlardan iborat bo'lgan fazo bo'lsin. Bu fazoda $e_1 = 1$, $e_2 = t$, ..., $e_{n+1} = t^n$ vektorlar to'plami bazis tashkil qiladi, ya'ni $\dim P_n(t) = n+1$. Ushbu bazisda ixtiyoriy $f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n$ ko'phad koordinatalari uning $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koeffitsientlaridan iborat bo'ladi.

Agar $P_n(t)$ fazoda boshqa bazis $e'_1 = 1$, $e'_2 = t - a$, ..., $e'_{n+1} = (t-a)^n$ tanlasak, u holda $f(t)$ ko'phadning bu bazisdagi koordinatalarini topish uchun uni Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n.$$

Demak, $f(t)$ ko'phadning

$$e'_1 = 1, \ e'_2 = t - a, \ \ldots, \ e'_{n+1} = (t-a)^n$$

bazisdagi koordinatalari $f(a)$, $f'(a)$, ..., $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ko'rinishida bo'ladi.

Endi chiziqli fazolar izomorfizmi tushunchasini kiritamiz.

18.8-ta'rif. Bizga V va V' chiziqli fazolar berilgan bo'lsin. Agar $x \in V$ va $x' \in V'$ vektorlar orasida shunday o'zaro bir qiymatli $x \leftrightarrow x'$ moslik o'rnatish mumkin bo'lib, x va x', hamda y va y' vektorning mosligidan

1) $x + y$ vektor $x' + y'$ vektorga mosligi;

2) λx vektor $\lambda x'$ vektorga mosligi
kelib chiqsa, u holda V va V' chiziqli fazolar izomorf fazolar deyiladi.

18.9-teorema. Bir xil o'lchamga ega bo'lgan barcha chiziqli fazolar bir-birlariga izomorfdir.

Isbot. Aytaylik, V va V' chiziqli fazolar n o'lchamli fazolar bo'lsin. V va V' fazolar mos ravishda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ bazislarni tanlab olamiz. V fazodan olingan ixtiyoriy

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

vektorga V' fazodagi $x' = \xi_1 e'_1 + \xi_2 e'_2 + ... + \xi_n e'_n$ vektorni mos qo'yamiz.

Bu moslik o'zaro bir qiymatli bo'ladi. Haqiqatan ham, har bir x vektor $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ ko'rinishida yagona ravishda tasvirlangani uchun x' vektor ham bir qiymatli aniqlanadi. V va V' fazolarning teng o'lchamli ekanligini e'tiborga olsak, har bir $x' \in V'$ vektorga V ning faqat bittagina elementi to'g'ri keladi. Demak, bu moslik bir qiymatli moslik ekan.

Agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ bo'lib, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$ va $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + ... + \eta_n e_n$ bo'lsa, u holda

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + (\xi_2 + \eta_2)e_2 + ... + (\xi_n + \eta_n)e_n$$

ekanligidan $x+y \leftrightarrow x'+y'$ moslik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Huddi shunday $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ moslik ham osongina kelib chiqadi.

Endi vektor fazoning bazisi o'zgarganda vektorning koordinatalarini qanday o'zgarishini keltiramiz.

Aytaylik, n o'lchamli Vvektor fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ bazislar berilgan bo'lib, x vektorning birinchi bazisdagi koordinatalari $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ ikkinchi bazisdagi koordinatalari $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_n$ bo'lsin. U holda

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + ... + \xi'_n e'_n.$$

Xar bir e'_i vektor $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar orqali quyidagicha ifodalansin:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n, \\ e'_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + ... + a_{n,2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ e'_n = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + ... + a_{n,n}e_n \end{cases}$$

U holda birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi $A = (a_{i,j})$ orqali ifodalanadi. Ma'lumki, ushbu matritsaning determinanti noldan farqli.

Yuqoridagi tenglikdan

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n = \xi'_1(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n) +$$

$$+\xi_2'(a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + \ldots + a_{n,2}e_n)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\xi_1'(a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \ldots + a_{n,n}e_n)$$

hosil bo'ladi. e_1, e_2, ..., e_n vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan, bu tenglikning o'ng va chap tomonidagi bazis vektorlar oldidagi koeffitsientlar teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{cases} \xi_1 = a_{1,1}\xi_1' + a_{1,2}\xi_2' + \ldots + a_{1,n}\xi_n', \\ \xi_2 = a_{2,1}\xi_1' + a_{2,2}\xi_2' + \ldots + a_{2,n}\xi_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_n = a_{n,1}\xi_1' + a_{n,2}\xi_2' + \ldots + a_{n,n}\xi_n'. \end{cases}$$

Demak, berilgan x vektorning koordinatalari orasida quyidagi munosabat o'rinli:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \ldots \\ \xi_n' \end{pmatrix}.$$

Bundan esa,

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \ldots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi.

Shunday qilib, x vektorning ikkinchi bazisdagi koordinatalari, birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi teskarisi bilan birinchi bazisdagi koordinatalari ko'paytmasiga teng.

Qism fazolar

Bizga $\mathbb{K}$ maydon ustida aniqlangan V chiziqli fazo va unda $V_1 \subset V$ qism to'plam berilgan bo'lsin.

18.10-ta'rif. V_1 qism to'plam V fazoda aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil etsa, V_1 to'plam V fazoning qism fazosi deyiladi.

Tabiiyki, $V_1 \subset V$ qism to'plamni qism fazoga tekshirish uchun fazoda berilgan shartlarni hammasini tekshirish lozim bo'ladi, ammo quyida keltiriladigan teorema bu shartlarning hammasini tekshirish umuman olganda zarur emasligini ko'rsatadi.

18.11-teorema. $V_1 \subset V$ qism to'plam V fazoning qism fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

1) Ixtiyoriy $x, y \in V_1$ elementlar uchun $(x, y) \in \mathbb{R}$

2) Ixtiyoriy $x \in V_1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ uchun $\lambda x \in V_1$.

Isbot: Agar V_1 qism fazo bo'lsa, teoremadagi shartlar o'rinli bo'lishi to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi.

Aksincha, ya'ni teoremadagi shartlar o'rinli bo'lsin. U holda $V_1 \subset V$ qism to'plamda qo'shish amaliga nisbatan kommutativlik va assosiativlik shartlari o'rinli bo'ladi. Aks holda, bu shartlar V fazoda ham o'rinli bo'lmas edi.

$\lambda x \in V_1$ ekanligidan $\lambda = 0$ deb olsak, $0 \cdot x = 0 \in V_1$ ekanligini, $\lambda = -1$ deb olsak, $-x \in V_1$ ni hosil qilamiz.

Huddi shunday fazoda skalyarlar uchun keltirilgan shartning V_1 qism to'plam uchun ham o'rinliligini ko'rish qiyin emas.

18.12-natija. $V_1 \subset V$ qism fazo bo'lishi uchun ixtiyoriy $x, y \in V_1$ va ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ uchun $\lambda x + \mu y \in V_1$ bo'lishi zarur va yetarli.

Endi qism fazolarga doir misollarni keltirib o'tamiz.

Misol 18.5. a) Faqat nol vektordan iborat bo'lgan qism to'plam va V fazoning o'zi V da qism fazo bo'ladi. Bu qism fazolar V ning xosmas qism fazolari deyiladi;

b) $\mathbb{R}^2$ tekislikda koordinata boshidan o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziqdagi vektorlar to'plami qism fazo tashkil etadi;

c) $\mathbb{R}^3$ uch o'lchamli fazoda koordinata boshidan o'tuvchi ixtiyoriy tekislikda joylashgan vektorlar to'plami qism fazo tashkil qiladi;

d) Darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosi $P_n(x)$ da darajasi $k (k < n)$ dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami $P_k(x)$ qism fazo tashkil qiladi;

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, biror fazoning qism fazolari cheksiz ko'p bo'lishi mumkin.

V fazoning ixtiyoriy M qism to'plami uchun, M dan olingan vektorlarning chiziqli kombinatsiyalari orqali hosil qilingan barcha vektorlar to'plamini $\langle M \rangle$ kabi belgilaymiz. Hosil bo'lgan to'plamga M to'plamning *chiziqli qobig'i* deyiladi.

Ravshanki, M to'plamning chiziqli qobig'i V fazoning qism fazosi bo'ladi. $\langle M \rangle$ fazoning o'lchami M to'plamning rangi deb ataladi.

Yuqoridagi mulohazadan kelib chiqadiki, agar $\dim V = n$ bo'lsa, u holda V fazo $m (m \leq n)$ o'lchamli qism fazolarga ega. Xususan, agarda V fazoning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ qism to'plam uchun, $\langle M \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_m \rangle$ chiziqli qobiqni qarasak, u m o'lchamli qism fazo bo'ladi.

Bundan tashqari V chiziqli fazonining o'zini $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis vektorlaridan tuzilgan qobiq deb qarashimiz mumkin.

18.13-ta'rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan bo'lsin.

Ixtiyoriy $a \in V$ vektor uchun, ushbu

$$V'_a = a + V' = \{a + x \mid x \in V'\} \subset V$$

qism to'plamga V' qism fazoni a vektorga siljitishdan hosil bo'lgan *gipertekisligi* deb ataladi.

Aytaylik, L_1, $L_2 \subset V$ qism fazolar berilgan bo'lib, $L_1 \bigcap L_2$ ularning to'plam ma'nosidagi kesishmasi bo'lsin. Ravshanki, $L_1 \bigcap L_2$ qism to'plam bo'sh emas, chunki nol vektor har bir qism fazoga tegishli.

18.14-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning kesishmasi $L_1 \bigcap L_2$ qism fazo bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy λ, μ sonlar va $x, y \in L_1 \bigcap L_2$ vektorlarni olaylik. Ma'lumki, $x, y \in L_1$ va $x, y \in L_2$. L_1 va L_2 qism fazo bo'lganligi uchun $\lambda x + \mu y \in L_1$ va $\lambda x + \mu y \in L_2$. Demak, $\lambda x + \mu y \in L_1 \bigcap L_2$ bo'ladi.

Endi qism fazolarning to'plam sifatida birlashmasi $L_1 \bigcup L_2$ ni qaraymiz. Bu to'plam har doim ham qism fazo bo'lavermaydi. Masalan, tekislikda L_1 sifatida OX o'qida yotuvchi vektorlar to'plamini, L_2 sifatida OY o'qida yotuvchi vektorlar to'plamini olsak, L_1 va L_2 qism fazolar bo'lib, ularning birlashmasi qism fazo bo'lmaydi.

Endi qism fazolarning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. L_1, L_2 qism fazolarning yig'indisi deb $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ ko'rinishidagi vektorlar to'plamiga aytiladi va $L_1 + L_2$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2\}.$$

18.15-teorema. L_1, L_2 qism fazolarning yig'indisi $L_1 + L_2$ yana qism fazo bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ va $x, y \in L_1 + L_2$ bo'lsa, u holda $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in L_1$, $x_2, y_2 \in L_2$ bo'lib, bundan

$$\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in L_1 + L_2$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi qism fazolar kesishmasi va yig'indisini o'lchamlari orasidagi munosabatni beruvchi teoremani keltiramiz.

18.16-teorema. V fazoning chekli o'lchamli L_1, L_2 qism fazolarining o'lchamlari yig'indisi ularning kesishmasi va yig'indisi o'lchamlarining yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim L_1 \bigcap L_2 + \dim(L_1 + L_2).$$

Isbot. Faraz qilaylik, $\dim L_1 \bigcap L_2 = k$ bo'lib, $e_1, e_2, \dots, e_k$ uning qandaydir bazisi bo'lsin. $L_1 \bigcap L_2 \subset L_1$ va $L_1 \bigcap L_2 \subset L_2$ bo'lganligi uchun, $\dim L_1 =$

$k+s$ $\dim L_2 = k+t$ deb olishimiz mumkin. Tanlangan $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k$ bazisni L_1 va L_2 qism fazolarning bazislarigacha to'ldiramiz, ya'ni

$$e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k,\ f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_s$$

vektorlar L_1 qism fazoning bazisi

$$e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k,\ g_1,\ g_2,\ \dots,\ g_t$$

vektorlar esa L_2 qism fazoning bazisi bo'lsin. Biz

$$f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_s,\ e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k,\ g_1,\ g_2,\ \dots,\ g_t \tag{1}$$

vektorlarni $L_1 + L_2$ fazoda bazis bo'lishini ko'rsatamiz. Dastlab, ularning chiziqli erkli ekanligini aniqlaymiz. Faraz qilaylik,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \dots + \mu_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + \dots + \nu_t g_t = 0$$

bo'lsin. U holda

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \dots + \mu_k e_k = -\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - \dots - \nu_t g_t$$

bo'lib, tenglikning chap tomoni L_1ga o'ng tomoni esa L_2ga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak, tenglikning chap va o'ng tomonlari $L_1 \bigcap L_2$ qism fazoga tegishli. $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k$ vektorlar $L_1 \bigcap L_2$ da bazis bo'lganligi uchun $-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - \dots - \nu_t g_t$ vektorni ular bazis orqali chiziqli ifodalash mumkin, ya'ni qandaydir $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_k$ lar uchun

$$-\nu_1 g_1 - \nu_2 g_2 - \dots - \nu_t g_t = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k.$$

tenglik o'rinli. Bundan

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k + \nu_1 g_1 + \nu_2 g_2 + \dots + \nu_t g_t = 0$$

hosil bo'ladi, bu vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_t = 0$$

kelib chiqadi. Bularni yuqoridagi tenglikka olib borib qo'ysak,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_s f_s + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \dots + \mu_k e_k = 0$$

tenglik hosil bo'ladi. $e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_k,\ f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_s$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s = 0$ kelib chiqadi. Demak, (1) vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekan.

Endi ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (1) vektorlar sistemasi orqali chiziqli ifodalanishini ko'rsatamiz. Ta'rifga asosan, $x = x_1 + x_2; x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$, bo'lib, x_1 va x_2 vektorlarni bazis vektorlar orqali yoysak,

$$x_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ke_k + a_{k+1}f_1 + ... + a_{k+s}f_s$$

va

$$x_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + ... + b_ke_k + b_{k+1}g_1 + ... + b_{k+t}g_t$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bundan esa

$$x = x_1 + x_2 = (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + ... + (a_k + b_k)e_k +$$

$$a_{k+1}f_1 + a_{k+2}f_2 + ... + a_{k+s}f_s + b_{k+1}g_{k+1} + b_{k+2}g_{k+2} + ... + b_{k+t}g_t$$

hosil bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy $x \in L_1 + L_2$ vektorni (1) vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, biz (1) vektorlar sistemasi $L_1 + L_2$ qism fazoning bazisi ekanligini ko'rsatdik. Bundan esa, $\dim(L_1 + L_2) = s + k + t$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \bigcap L_2)$$

18.17-ta'rif. Agar $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$ bo'lsa, L_1 va L_2 qism fazolarning yig'indisiga to'g'ri yig'indi deyiladi va $L_1 \oplus L_2$ ko'rinishida yoziladi.

Ravshanki, L_1 va L_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indilari uchun

$$\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

18.18-teorema. $L_1 \oplus L_2$ to'g'ri yig'indining ixtiyoriy vektori L_1 va L_2 qism fazolar vektorlarining yig'indisi shaklida yagona ravishda ifodalanadi.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$$

va

$$x = y_1 + y_2, y_1 \in L_1, y_2 \in L_2$$

bo'lsin. U holda bu tengliklardan $y_1 - x_1 = x_2 - y_2$ hosil bo'ladi.
$y_1 - x_1 \in L_1$, $x_2 - y_2 \in L_2$ va $L_1 \bigcap L_2 = \{0\}$
ekanligidan

$$y_1 - x_1 = x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$$

kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlash joizki, V fazoning bir nechta $L_1, L_2, ..., L_s$, qism fazolari uchun ham $\bigcap\limits_{i=1}^{s} L_i$ qism fazolarning kesishmasi va $\sum\limits_{i=1}^{s} L_i$ yig'indisini aniqlash mumkin.

19-§. Yevklid fazolari. Ortogonal va ortonormal sistemalar

Avvalgi mavzularda chiziqli fazoni qo'shish va songa ko'paytirish amallari bajariladigan vektorlar to'plami sifatida ta'riflagan edik. Ammo faqat qo'shish va songa ko'paytirish amallari yordamida vektorlarning uzunligi, vektorlar orasidagi burchak tushunchalarini ta'riflab bo'lmaydi. Buning uchun chiziqli fazoda skalyar ko'paytma tushunchasini kiritish kerak. Vektorlarni qo'shish, ularni songa ko'paytirish va vektorlarning skalyar ko'paytmasi terminlari yordamida Yevklid geometriyasini bayon qilish mumkin.

Bizga haqiqiy sonlar maydonida aniqlangan V chiziqli fazo berilgan bo'lsin.

19.1-ta'rif. Agar $x, y \in V$ vektorlarning har bir juftiga $(x, y) \in \mathbb{R}$ haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lib, bu moslik quyidagi aksiomalarni qanoatlantirsa, V chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi:

1) $(x, y) = (y, x)$;
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Skalyar ko'paytma aniqlangan chiziqli fazo Yevklid fazosi deb ataladi.

Misol 19.1. a) V fazo sifatida elementar geometriyada o'rganiladigan uch o'lchamli fazoni olaylik. Vektorlarning skalyar ko'paytmasini ularning uzunliklari va ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasi sifatida aniqlaymiz, ya'ni;

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\alpha.$$

Bu aniqlangan ko'paytma 1) – 4) aksiomalarni qanoatlantiradi.

b) V fazo sifatida n ta haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ ko'rinishidagi elementlar to'plamni olaylik. Ma'lumki, vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish quyidagicha aniqlanadi:

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, ..., \xi_n + \eta_n), \lambda x = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, ..., \lambda\xi_n),$$

bu yerda $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$.

Endi $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ va $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$ vektorlar uchun quyidagi ko'paytmani qaraymiz;

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + ... + \xi_n\eta_n$$

Bunday aniqlangan ko'paytma ham 1) – 4) aksiomalarini qanoatlantiradi, ya'ni skalyar ko'paytma bo'ladi.

c) darajasi n dan oshmaydigan haqiqiy koeffitsientli ko'phadlar fazosi $P_n(\mathbb{R})$ ni qaraymiz. $f(x), g(x) \in P_n(x)$ ko'phadlarning uchun aniqlangan quyidagi ko'paytma;

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

1) – 4) aksiomalarini qanoatlantiradi, ya'ni skalyar ko'paytma bo'ladi.

Kiritilgan skalyar ko'paytma tushunchasi yordamida biz vektorning uzunligini va vektorlar orasidagi burchakni aniqlashimiz mumkin.

19.2-ta'rif. Yeklid fazosidagi x vektorning uzunligi deb

$$\sqrt{(x,x)}$$

songa aytiladi va $|x|$ kabi belgilanadi.

19.3-ta'rif. x va y vektorlar orasidagi burchak deb $\varphi = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}$ songa aytiladi, ya'ni

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$$

Agar x va y vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ya'ni $(x, y) = 0$ bo'lsa, x va y vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda x va y vektorlar orasidagi φ burchakni $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$ formula yordamida aniqladik. Aslida tenglikning o'ng tomonida turgan ifodaning moduli 1 dan katta emasligini ko'rsatishimiz kerak, ya'ni $\frac{(x,y)^2}{|x|^2|y|^2} \leq 1$ yoki

$$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y) \tag{1}$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Buning uchun $x - ty$ vektorni qaraymiz, by yerda t ixtiyoriy haqiqiy son. Skalyar ko'paytmaning 4)-aksiomasiga asosan: $(x - ty, x - ty) \geq 0$, ya'ni har qanday t uchun:

$$t^2(y,y) - 2t(x,y) + (x,x) \geq 0.$$

Bu tengsizlikning chap tomonidagi t ga nisbatan kvadrat uchhad faqat manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qilishi uchun bu uchhadning diskriminanti musbat bo'lmasligi kerak. Chunki t^2 oldidagi (y,y) ifoda har doim musbat son. Demak,

$$D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0.$$

Bundan esa, $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$ ekanligi kelib chiqadi. Yuqorida keltirilgan (1) tengsizlik *Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi* deb ataladi.

Kiritilgan tushunchalar yordamida elementar geometriyaning qator teoremalarini Yevklid fazosiga ko'chirish mumkin.

Agar x va y vektorlar ortogonal vektorlar bo'lsa, u holda $x + y$ vektorni tomonlari x va y bo'lgan to'g'ri to'rtburchak diagonali deb hisoblash tabiiydir. Quyidagi misolni ko'rib chiqaylik.

19.4-xossa. $|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2$, ya'ni to'g'ri to'rtburchak diagonali uzunligining kvadrati uning parallel bo'lmagan ikki tomoni uzunliklari kvadratlari yig'indisiga teng.

Isbot. Vektor uzunligi kvadratining ta'rifiga muvofiq: $|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2$. Skalyar ko'paytmaning distributivligiga asosan:

$$(x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y).$$

x va y vektorlarning ortogonalligidan esa:

$$(x,y) = (y,x) = 0.$$

Demak, $|x+y|^2 = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$.

Yuqoridagi xossani umumlashtirsak, juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ vektorlar uchun

$$|x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + ... + |x_n|^2$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi Yevklid fazosida eng qulay bazis hisoblangan ortogonal bazis tushunchasini kiritamiz. Yevklid fazosidagi ortogonal bazislar analitik geometriyadagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi kabi rol o'ynaydi.

Bizga n o'lchamli V Yevklid fazosi berilgan bo'lib, $e_1, e_2, ..., e_n \in V$ vektorlar o'zaro ortogonal vektorlar bo'lsin.

19.5-ta'sdiq. n-o'lchamli Yevklid fazosida berilgan o'zaro ortogonal bo'lgan va hech biri nolga teng bo'lmagan $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli erkli bo'ladi.

Isbot. Tasdiqni isbotlash uchun

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$$

chiziqli kombinatsiyani qaraymiz.

Yuqoridagi tenglikning ikkala tomonini e_1 ga skalyar ko'paytirsak,

$$\lambda_1(e_1, e_1) + \lambda_2(e_2, e_1) + ... + \lambda_n(e_n, e_1) = 0$$

tenglik hosil bo'ladi. Berilgan vektorlar o'zaro ortogonal va noldan farqli bo'lganligi uchun $(e_1, e_1) \neq 0$ va $(e_1, e_k) = 0$, $2 \leq k \leq n$. Bundan esa $\lambda_1 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunga o'xshab, chiziqli kombinatsiyani e_j ga skalyar ko'paytirib, $\lambda_j = 0$ ekanligini olamiz. Demak, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ va $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar chiziqli erkli.

19.6-ta'rif. Agar hech biri nolga teng bo'lmagan $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda ular n o'lchamli Yevklid fazosining *ortogonal* bazisi deyiladi.

Agar $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar o'zaro ortogonal bo'lib, har birining uzunligi 1 ga teng bo'lsa, ya'ni

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

tengliklar bajarilsa, u holda ular *ortonormal* bazis deyiladi.

19.7-teorema. Ixtiyoriy n o'lchamli Yevklid fazosida ortogonal bazis mavjud.

Isbot. Ma'lumki, n o'lchamli fazoning ta'rifiga muvofiq unda qandaydir $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazis mavjud. Bu $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vektorlardan o'zaro ortogonal bo'lgan n ta vektor yasaymiz.

Dastlab, $e_1 = f_1$ deb olib, e_2 vektorni $e_2 = f_2 + \alpha e_1$ ko'rinishda izlaymiz. α sonini shunday tanlab olamizki, $(e_2, e_1) = 0$, ya'ni $(f_2 + \alpha e_1, e_1) = 0$ bo'lsin. Bundan

$$\alpha = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, α sonni tanlash hisobiga e_1 va e_2 ortogonal vektorlar topish mumkin.

Aytaylik, o'zaro ortogonal va noldan farqli bo'lgan $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ vektorlar topilgan bo'lsin. U holda e_k vektorni

$$e_k = f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}$$

shaklida izlaymiz, ya'ni e_k vektorni $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ va f_k vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi yordamida hosil qilamiz. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ koeffitsientlarni e_k vektor bilan $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ vektorlarning ortogonalligi shartidan topamiz:

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_1) = 0;$$

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_2) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(f_k + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{k-1} e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

$e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ vektorlar o'zaro ortogonal bo'lganliklari uchun, bu tengliklar ushbu ko'rinishga keladi:

$$(f_k, e_1) + \lambda_1 (e_1, e_1) = 0;$$

$$(f_k, e_2) + \lambda_2 (e_2, e_2) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(f_k, e_{k-1}) + \lambda_{k-1} (e_{k-1}, e_{k-1}) = 0.$$

Bulardan,

$$\lambda_1 = -\frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)}, \ \lambda_2 = -\frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)}, \ \dots, \ \lambda_{k-1} = -\frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})}$$

qiymatlar kelib chiqadi.

Demak, juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan e_1, e_2, ..., e_k vektorlarni hosil qilamiz. Endi e_k vektorni noldan farqli ekaniligini ko'rsatamiz. Hosil qilingan e_k vektor e_1, e_2, ..., e_{k-1}, f_k vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. O'z navbatida e_{k-1} vektor e_1, e_2, ..., e_{k-2} va f_{k-1} vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan va hokazo, e_2 vektor e_1 va f_2 vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Bundan esa e_k quyidagi ko'rinishda yozilish mumkinligi kelib chiqadi:

$$e_k = f_k + \alpha_{k-1} f_{k-1} + \dots + \alpha_1 f_1.$$

f_1, f_2, ..., f_k vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan esa, $e_k \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz e_1, e_2, ..., e_{k-1} hamda f_k vektorlardan e_k vektorni qurdik. Huddi shunday qilib, e_1, e_2, ..., e_k hamda f_{k+1} larga ko'ra e_{k+1} ni quramiz. Bu jarayonni berilgan f_1, f_2, ..., f_n vektorlargacha davom ettiriramiz. Natijada noldan faqli va o'zaro ortogonal bo'lgan n ta e_1, e_2, ..., e_n vektorlarni, ya'ni ortogonal bazisni hosil qilamiz.

Ortogonal bazislar topishning yuqoridagi teorema isbotida keltirilgan jarayon *ortogonallashtirish jarayoni* deb ataladi. Bu jarayon ixtiyoriy f_1, f_2, ..., f_n bazis bo'yicha e_1, e_2, ..., e_n ortogonal bazis yasash usulini beradi.

Agar e_k vektorlarni $e'_k = \frac{e_k}{|e_k|}$ vektorlar bilan almashtirsak, u holda uzunligi 1 ga teng bo'lgan o'zaro ortogonal vektorlar hosil bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu amal bilan ortonormal bazis hosil qilamiz.

Misol 19.2. $P_2(x)$ fazoda $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ kabi aniqlangan skalyar ko'paytmaga nisbatan ortogonal bazis quramiz. Ma'lumki, $P_2(x)$ fazoda $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$ bazis tashkil qiladi. Bu bazisdan ortogonallashtirish jarayoni yordamida e_1, e_2, e_3 ortogonal bazis hosil qilamiz:

$e_1 = f_1 = 1$ deb olib $e_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$ ekanligidan e_2 vektorni aniqlaymiz.

$(f_2, e_1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, $(e_1, e_1) = \int_0^1 dx = 1$ ekanligidan $e_2 = x - \frac{1}{2}$ hosil bo'ladi.

Endi $e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$, hamda

$$(f_3, e_2) = \int_0^1 x^2 (x - \frac{1}{2}) dx = \frac{1}{12},$$

$$(e_2, e_2) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12},$$

$$(f_3, e_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

ekanligidan $e_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$ hosil bo'ladi. Demak, $P_2(x)$ fazoda ortogonal bazis $e_1 = 1$, $e_2 = x - \frac{1}{2}$, $e_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}$ ko'phadlardan iborat.

Yevklid fazosida e_1, e_2, ..., e_n ortonormal bazis berilgan bo'lsin. Shu bazisdagi koordinatalari bilan berilgan $x, y \in V$ vektorlaring skalyar ko'paytmasi qanday ifodalanishini topaylik.

Aytaylik,

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n, y = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2 + \ldots + \nu_n e_n$$

bo'lsin, ya'ni x vektorning koordinatalari ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, hamda y vektorning koordinatalari esa ν_1, ν_2, ..., ν_n bo'lsin, u holda

$$(x, y) = \xi_1 \nu_1 + \xi_2 \nu_2 + \ldots + \xi_n \nu_n$$

bo'ladi.

Demak, ortonormal bazisda ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Endi x vektorning ortonormal e_1, e_2, ..., e_n bazisdagi koordinatalarini bazis vektorlar bilan qanday bog'lanishga ega ekanligini ko'rsatamiz.

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

tenglikning ikkala tomonini e_1 ga skalyar ko'paytirib,

$$(x, e_1) = \xi_1(e_1, e_1) + \xi_2(e_2, e_1) + \ldots + \xi_n(e_n, e_1) = \xi_1$$

ekanini va huddi shunday,

$$\xi_2 = (x, e_2),\ \xi_3 = (x, e_3),\ \ldots,\ \xi_n = (x, e_n)$$

ekanligini topamiz.

Shunday qilib, berilgan vektorning ortonormal bazisdagi koordinatalari shu vektor bilan mos bazis vektorlarining skalyar ko'paytmalaridan iboratligini hosil qildik.

Ortogonal proyeksiya va ortogonal to'ldiruvchi. Endi berilgan vektorning qandaydir qism fazoga ortogonal proyeksiyasi va ortogonal to'ldiruvchisi tushunchalarini kiritamiz.

19.8-ta'rif. Bizga V fazoning qandaydir V' qism fazosi berilgan bo'lsin. Agar $x \in V$ vektor V' qism fazoning ixtiyoriy vektoriga ortogonal bo'lsa, u holda x vektor V' qism fazoga ortogonal deyiladi.

Ravshanki, agar x vektor e_1, e_2, ..., e_n vektorlarga ortogonal bo'lsa, u holda x bu vektorlarning istalgan chiziqli kombinatsiyasiga ham ortogonal bo'ladi. Haqiqatdan ham, $(x, e_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$ ekanligidan $(x, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = 0$ bo'lishi osongina kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan x vektor V' qism fazoga ortogonal bo'lishi uchun uning bazis vektorlarga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli.

Aytaylik, ixtiyoriy $z \in V$ vektor berilgan bo'lib, bu vektor uchun shunday $y \in V'$ vektor topilsinki, natijada $z - y$ vektor V' qism fazoga ortogonal bo'lsin. Ya'ni $z \in V$ vektorni $z = x + y$, $x \in V$, $y \in V'$ ko'rinishida yozilsin, bu yerda x vektor V' qism fazoga ortogonal vektor.

19.9-ta'rif. Agar $z = x+y$, $x \in V$, $y \in V'$ ko'rinishida ifodalangan bo'lib, x vektor V' qism fazoga ortogonal bo'lsa, y vektor z vektorning *ortogonal proyeksiyasi* x esa *ortogonal to'ldiruvchisi* deyiladi.

Quyidagi tasdiqda ortogonal proyeksiya va ortogonal to'ldiruvchi har doim mavjud va yagona ekanligini ko'rsatamiz. Umuman olganda berilgan vektorning ortogonal proyeksiyasi mavjudligidan ortogonal to'ldiruvchining mavjudligi ham o'z-o'zidan kelib chiqadi.

19.10-tasdiq. $z \in V$ vektorning chekli o'lchamli V' qism fazoga ortogonal proyeksiyasi mavjud va yagona.

Isbot. Aytaylik, $\dim V' = n$ bo'lib, V' qism fazonig bazisi e_1, e_2, ..., e_n bo'lsin. Ortogonal proyeksiyani $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ ko'rinishida izlaymiz.

$z - y$ vektor V' qism fazoga ortogonal bo'lishi uchun, uning bazis vektorlarga ortogonal bo'lishi zarur va yetarli ekanligidan

$$(z - y, e_i) = 0, 1 \leq i \leq n$$

tenglikka ega bo'lamiz, ya'ni

$$(z, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n, e_i), 1 \leq i \leq n.$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, ortogonal proyeksiyani topish masalasi, biror bazisda λ_1, λ_2, ..., λ_n noma'lumlarga nisdatan qiyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish masalasiga keltirildi:

$$\begin{cases} \lambda_1(e_1, e_1) + \lambda_2(e_2, e_1) + ... + \lambda_n(e_n, e_1) = (z, e_1), \\ \lambda_1(e_1, e_2) + \lambda_2(e_2, e_2) + ... + \lambda_n(e_n, e_2) = (z, e_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1(e_1, e_n) + \lambda_2(e_2, e_n) + ... + \lambda_n(e_n, e_n) = (z, e_n), \end{cases} \qquad (2)$$

Ixtiyoriy n-o'lchamli fazoda ortonormal bazis mavjud ekanligidan foydalanib, e_1, e_2, ..., e_n bazisni ortonormal deb faraz qilishimiz mumkin. U holda (2) sistemaning yechimi $\lambda_i = (z, e_i)$, $1 \leq i \leq n$ ko'rinishida bo'ladi. Ya'ni sistema yagona yechimga ega. Demak, $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ ortogonal proyeksiya ham mavjud va yagona.

Ta'kidlash joizki, yuqoridagi tasdiqning isbotida biz e_1, e_2, ..., e_n ortonormal bazisdan foydalandik. Umuman olganda ixtiyoriy bazis uchun ham (2) sistema yagona yechimga ega bo'ladi. Chunki, ushbu sistemaning asosiy determinanti quyidagicha bo'lib,

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_2, e_1) & \dots & (e_n, e_1) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & \dots & (e_n, e_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_1, e_n) & (e_2, e_n) & \dots & (e_n, e_n) \end{vmatrix}$$

bu determinant noldan farqli. Ushbu determinantga *Gram determinanti* deb ataladi.

Demak, V' qism fazo berilgan bo'lib, e_1, e_2, ..., e_n uning bazisi bo'lsa, $z \in V$ vektorning V' qism fazoga ortogonal proyeksiyasi $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ ko'rinishida bo'ladi, bu yerda λ_1, λ_2, ..., λ_n (2) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi. $x = z - y$ vektor esa ortogonal to'ldiruvchi bo'ladi.

Yevklid fazolarining izomorfizmi. Endi Yevklid fazolarining izomorfizmi tushunchasini keltiramiz.

19.11-ta'rif. Bizga V va V' Yevklid fazolari berilgan bo'lsin. Agar ularning elementlari orasida shunday $x \leftrightarrow x'(x \in V, x \in V')$ o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lib, bu moslik quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ ekanligidan, $x + y \leftrightarrow x' + y'$ bo'lsa, ya'ni $x, y \in V$ vektorlarning $x', y' \in V'$ vektorlarga mosligidan, $x + y$ yig'indining $x' + y'$ yig'indiga mosligi kelib chiqsa;

2) agar $x \leftrightarrow x'$ bo'lsa, u holda $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$;

3) agar $x \leftrightarrow x'$ va $y \leftrightarrow y'$ bo'lganda $(x, y) = (x', y')$ bo'lsa, ya'ni mos vektorlar juftligining skalyar ko'paytmalari o'zaro teng bo'lsa, u holda V va V' fazolar izomorf Yevklid fazolari deyiladi.

Agar biror n o'lchamli Yevklid fazosida qo'shish, songa ko'paytirish va vektorlarning skalyar ko'paytmasi tushunchalari bilan berilgan tasdiq isbot qilingan bo'lsa, u holda shu tasdiqning o'zi bu fazoga izomorf bo'lgan har qanday fazo uchun ham o'z kuchini saqlaydi. Darhaqiqat, bunday teoremaning tasdig'ida ham, isbotida ham V ning vektorlarini V' ning ularga mos bo'lgan vektorlari bilan almashtirilsa, u holda izomorfizm ta'rifidagi 1) – 3) xossalarga asosan hamma mulohazalar o'rinli bo'lib qolaveradi, ya'ni mos teoremalar V' uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

19.12-teorema. Barcha n o'lchamli Yevklid fazolari o'zaro izomorfdir.

Isbot. Barcha n o'lchamli Yevklid fazolarini maxsus tanlab olingan "standart" n o'lchamli fazoga izomorf ekanligini isbot qilamiz. Shunda barcha n o'lchamli Yevklid fazolarining o'zaro izomorf ekanligi kelib chiqadi.

Standart V' fazo sifatida biz odatdagi n o'lchamli fazoni qaraymiz: bu fazoda vektorlar quyidagicha olinib, $x' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ va $y' = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ ularning skalyar ko'paytmasi esa

$$(x', y') = \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + ... + \xi_n\nu_n$$

formula shaklida aniqlanadi.

Bizga biror n o'lchamli Yevklid fazosi V berilgan bo'lsin. Bu fazoda e_1, e_2, ..., e_n ortonormal bazis tanlab olamiz. Ushbu bazisdagi koordinatalari bilan berilgan ixtiyoriy

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

vektorga n ta ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n sonlar to'plamini, ya'ni V' ning $x' = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ vektorini mos qo'yamiz. Endi bu moslikning izomorfizm ekanligini ko'rsatamiz.

Bu moslikning o'zaro bir qiymatli ekanligi ravshandir. Izomorfizm ta'rifining 1) va 2) shartlarining bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. 3) shartning bajarilishini tekshiramiz. Ortonormal bazisda skalyar ko'paytma uchun avval isbotlangan formuladan foydalanib,

$$(x, y) = \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + ... + \xi_n\nu_n$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ikkinchi tomondan, V' fazoda skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra,

$$(x', y') = \xi_1\nu_1 + \xi_2\nu_2 + ... + \xi_n\nu_n.$$

Shunday qilib, $(x, y) = (x', y')$, ya'ni skalyar ko'paytmalar tengligi isbot qilindi.

20-§. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalari. Chiziqli almashtirish

Ushbu mavzuda biz chiziqli fazoda aniqlangan akslantirishlar ichida muhim o'rin egallaydigan chiziqli almashtirish tushunchasi kiritamiz.

20.1-ta'rif. n o'lchamli V fazoda aniqlangan $A : V \longrightarrow V$ akslantirish uchun

$$1) A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2);$$

$$2) A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

shartlar bajarilsa, u holda A akslantirish chiziqli almashtirish deyiladi.

Odatda A chiziqli almashtirishning qiymati $A(x)$ o'rniga Ax yoziladi.

Misol 20.1. a) uch o'lchamli $\mathbb{R}^3$ Yevklid fazosida vektorni koordinata boshidan o'tadigan biror o'q atrofida burishdan iborat bo'lgan almashtirishni qaraymiz. Bunda har bir x vektorga uni burishdan so'ng hosil bo'lgan Ax vektorni mos qo'yamiz. Bu moslik 1) va 2) shartlarni qanoatlantirishini tekshirish qiyin emas.

Masalan, 1) shartni tekshirib ko'raylik: $A(x_1 + x_2)$ ifoda avval x_1 hamda x_2 vektorlarning qo'shilishini, so'ngra hosil bo'lgan vektorning burilishini bildiradi. $Ax_1 + Ax_2$ esa avval x_1 hamda x_2 vektorlarning burilishini, so'ngra ularning qo'shilishini bildiradi. O'z-o'zidan ravshanki, ikkala holda ham natija bir xil bo'ladi. Demak, A akslantirish chiziqli almashtirish bo'ladi.

b) Bizga $\mathbb{R}^3$ Yevklid fazosi va uning koordinatalar boshidan o'tuvchi biror tekisligi bo'lgan V_1 qism fazosi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^3$ vektorga uning bu tekislikdagi $x_1 = Ax$ proyeksiyasini mos qilib qo'yamiz. Bu moslik ham chiziqli almashtirish bo'ladi.

) $[0,1]$ segmentda $C[0,1]$ uzluksiz funksiyalar fazosini qaraylik. Bu fazoda aniqlangan $Af(t) = \int_0^t f(s)ds$ akslantirish chiziqli almashtirish bo'ladi. Haqiqatdan ham,

$$A(f_1(t) + f_2(t)) = \int_0^t [f_1(s) + f_2(s)]ds =$$

$$= \int_0^t f_1(s)ds + \int_0^t f_2(s)ds = Af_1(t) + Af_2(t),$$

$$A(\lambda f(t)) = \int_0^t \lambda f(s)ds = \lambda \int_0^t f(s)ds = \lambda Af(t).$$

Endi chiziqli almashtirishlar ichida alohida ro'l o'ynovchi quyidagi 2 ta sodda almashtirishlarni keltiramiz. Ixtiyoriy vektorga shu vektorning o'zini mos qo'yuvchi E almashtirish, birlik almashtirish deyiladi, ya'ni

$$Ex = x.$$

Ixtiyoriy x vektorga nol vektorni mos qo'yuvchi Θ almashtirish nol almashtirish deyiladi, ya'ni

$$\Theta(x) = 0.$$

n o'lchamli V chiziqli fazoda A chiziqli almashtirish berilgan bo'lib, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ chiziqli fazo bazisi bo'lsin.

20.2-tasdiq. Berilgan $g_1, g_2, \ldots, g_n$ vektorlar uchun

$$Ae_1 = g_1, \; Ae_2 = g_2, \; \ldots, \; Ae_n = g_n$$

shartni qanoatlantiruvchi A chiziqli almashtirish mavjud va yagona.

Isbot. Dastlab, A chiziqli almashtirish $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ vektorlar orqali bir qiymatli aniqlanishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, V fazodan olingan ixtiyoriy

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$$

vektor uchun

$$Ax = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n) = \xi_1 Ae_1 + \xi_2 Ae_2 + \ldots + \xi_n Ae_n$$

bo'ladi. Demak, Ax vektor $g_1, g_2, \ldots, g_n$ vektorlar orqali bir qiymatli aniqlanadi.

Endi har qanday $g_1, g_2, \ldots, g_n$ vektorlar uchun $Ae_i = g_i$ tenglikni qanoatlantiradigan A chiziqli almashtirish mavjudligini ko'rsatamiz.

Buning uchun ixtiyoriy $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ vektorga $\xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \ldots + \xi_n g_n$ vektorni mos qilib qo'yamiz. x vektor e_i bazis vektorlar orqali bir qiymatli ifoda etilgani uchun, unga muayyan bir Ax vektor mos qo'yiladi. Bunday aniqlangan akslantirish chiziqli almashtirish bo'ladi.

Chiziqli almashtirishlar va matritsalar orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Yuqoridagi tasdiqdan ixtiyoriy $g_1, g_2, \ldots, g_n$ vektorlar uchun $Ae_1 = g_1, Ae_2 = g_2, \ldots, Ae_n = g_n$ shartni qanoatlantiruvchi chiziqli almashtirish yagona ravishda aniqlanishiga ega bo'ldik. g_k vektorning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdagi koordinatalarini $a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{n,k}$ orqali belgilaylik, ya'ni

$$g_k = Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i.$$

Ushbu $a_{i,k}$ koeffitsientlar orqali $(a_{i,k})$ matritsani hosil qilamiz. Hosil qilingan matritsa A chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *bazisdagi matritsasi* deb aytiladi.

Shunday qilib, berilgan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda har bir A chiziqli almashtirishga $(a_{i,k})$ matritsa bir qiymatli mos qo'yilishiga ega bo'ldik. Demak, chiziqli almashtirishlarni matritsalar yordamida tasvirlash mumkin. Lekin ushbu matritsa bazisga bog'liq ekanligini, bazis o'zgarganda esa matritsaning ham o'zgarishini ta'kidlab o'tish joiz.

Misol 20.2. Aytaylik, $V = \mathbb{R}^3$ uch o'lchamli Yevklid fazosi bo'lsin. A chiziqli almashtirish sifatida x vektorni OXY tekisligiga proeksiyalashdan iborat bo'lgan akslantirishni olamiz. Bazis sifatida koordinatalar o'qlari bo'yicha yo'nalgan birlik e_1, e_2, e_3 vektorlarni qabul qilamiz. U holda

$$Ae_1 = e_1, \; Ae_2 = e_2, \; Ae_3 = 0,$$

ya'ni, bu bazisda A almashtirishning matritsasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Endi chiziqli almashtirishlar ustida amallarni aniqlaymiz. Chiziqli almashtirishlar ustida qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish amallarini aniqlash mumkin.

20.3-ta'rif. A va B chiziqli almashtirishlar yig'indisi deb, x vektorga $Ax+Bx$ vektorni mos qo'yuvchi C almashtirishga aytiladi. Boshqacha aytganda, $C=A+B$ ifoda xar qanday x uchun $Cx=Ax+Bx$ ekanligini bildiradi.

Aytaylik, A va B chiziqli almashtirishlar $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisda mos ravishda $(a_{i,k})$ va $(b_{i,k})$ matritsalarga ega bo'lsin. U holda $C=A+B$ chiziqli almashtirishning matritsasini topish uchun $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazis elementlarning ushbu almashtirishdagi qiymatlarini qaraymiz, ya'ni

$$Ce_k = Ae_k + Be_k = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,k}+b_{i,k})e_i.$$

Bu esa C chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdagi $(c_{i,k})$ matritsasi uchun $c_{i,k}=a_{i,k}+b_{i,k}$ tenglik bajarilishini anglatadi.

Shunday qilib, A va B chiziqli almashtirishlar yig'indisining berilgan bazisdagi matritsasi chiziqli almashtirishlarning shu bazisdagi matritsalari yig'indisiga teng ekanligini ko'rsatdik.

20.4-ta'rif. A chiziqli almashtirishning λ soniga ko'paytmasi deb, x vektorga λAx vektorni mos qo'yuvchi $C=\lambda A$ almashtirishga aytiladi, ya'ni $(\lambda A)x=\lambda(Ax)$.

$C=\lambda A$ chiziqli almashtirishning berilgan bazisdagi matritsasi $\lambda\cdot(a_{i,k})$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

20.5-ta'rif. A va B almashtirishlarning ko'paytmasi deb, avval B almashtirishni so'ngra esa A almashtirishni ketma-ket bajarishdan iborat bo'lgan C almashtirishga aytiladi, ya'ni $C=AB$ ifoda x vektor uchun $Cx=A(Bx)$ ekanligini bildiradi.

Dastlab, chiziqli almashtirishlarning ko'paytmasi yana chiziqli almashtirish bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$C(x_1+x_2)=A(B(x_1+x_2))=A(Bx_1+Bx_2)=$$
$$=A(Bx_1)+A(Bx_2)=Cx_1+Cx_2,$$
$$C(\lambda x)=A(B(\lambda x))=A(\lambda Bx)=\lambda A(Bx)=\lambda Cx.$$

Endi chiziqli almashtirishlar yig'indisining matritsasini aniqlaganimiz kabi ko'paytmaning ham matritsasini aniqlaymiz. A va B chiziqli almashtirishlar matritsalari $(a_{i,k})$ va $(b_{i,k})$ ekanligidan foydalanib,

$$Ce_k=A(Be_k)=A\left(\sum_{j=1}^{n}b_{j,k}e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}b_{j,k}Ae_j=$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{j,k} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \right) e_i$$

tenglikni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan

$$Ce_k = \sum_{i=1}^{n} c_{i,k} e_i$$

ekanligidan

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$$

kelib chiqadi. Bundan ko'rinib turibdiki, $(c_{i,k})$ matritsaning $c_{i,k}$ elementlari $(a_{i,k})$ matritsaning i-qator elementlari bilan $(b_{i,k})$ matritsaning k-ustunining mos elementlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Shunday qilib, $C = AB$ chiziqli almashtirishning $(c_{i,k})$ matritsasi A va B chiziqli almashtirishlar $(a_{i,k})$ va $(b_{i,k})$ matritsalari ko'paytmasidan iborat ekanligini hosil qildik.

Xulosa o'rnida shuni aytishimiz mumkinki, chiziqli almashtirishlarni qo'shish va ko'paytirish amallari matritsalarni qo'shish va ko'paytirish kabi amalga oshirilib, quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) $A(BC) = (AB)C$;

4) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$.

Aytaylik, ixtiyoriy A chiziqli almashtirish va E birlik almash-tirish berilgan bo'lsin, u holda

$$AE = EA = A$$

ekanini osongina tekshirish mumkin.

A almashtirishning darajasini odatdagidek

$$A^2 = A \cdot A, \;\; A^3 = A^2 \cdot A, \; ...$$

kabi aniqlaymiz. Sonlar uchun o'rinli bo'lganidek, $A^0 = E$ deb faraz qilamiz.

Yuqoridagilardan foydalangan holda A chiziqli almashtirishdan tuzilgan ko'phadni ham qarash mumkin, ya'ni ixtiyoriy $P(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + ... + a_m$ ko'phad berilgan bo'lsa, $P(A)$ deb

$$P(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + ... + a_mE$$

formula bilan aniqlangan chiziqli almashtirishni tushunamiz.

Endi teskari almashtirish tushunchasini kiritamiz.

20.6-ta'rif. Agar $AB = BA = E$ bo'lsa, B almashtirishga A ning teskari almashtirishi deyiladi, bu yerda E birlik almashtirishdir.

A almashtirishga teskari almashtirish A^{-1} kabi belgilanadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, agar B almashtirish A ga teskari bo'lsa $B(Ax) = x$, bo'ladi.

Har qanday almashtirish uchun teskari almashtirish mavjud bo'lavermaydi. Masalan, uch o'lchamli fazoni OXY tekislikgiga proyeksiyalash almashtirishi teskari almashtirishga ega emas.

Teskari almashtirish tushunchasi bilan teskari matritsa tushunchasi bog'liqdir. Ma'lumki, berilgan matritsa teskarilanuvchi bo'lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli.

Berilgan bazisda matritsalar bilan chiziqli almashtirishlar orasida barcha amallarni saqlovchi o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lganligi uchun, A almashtirish uning biror bazisdagi matritsasi determinanti noldan farqli bo'lgandagina teskarilanuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Teskarisi mavjud bo'lgan almashtirish *xosmas almashtirish* deyiladi.

Ixtiyoriy A chiziqli almashtirish uchun almashtirishning yadrosi va obrazi deb ataluvchi fazolarni aniqlaymiz.

20.7-ta'rif. A almashtirishning obrazi deb Ax ko'rinishidagi vektorlar jamlanmasiga aytiladi, bu yerda $x \in V$.

Almashtirishning obrazi $Im(A)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$Im(A) = \{y \in V | \exists x \in V, Ax = y\}.$$

Ko'rinib turibdiki, teskarilanuvchi almashtirishning obrazi butun fazo bilan ustma-ust tushadi.

20.8-tasdiq. Ixtiyoriy chiziqli almashtirishning obrazi qism fazo tashkil qiladi.

Isbot. Aytaylik, $y_1, y_2 \in Im(A)$ bo'lsin, u holda $x_1, x_2 \in V$ vektorlar uchun $y_1 = Ax_1$ va $y_2 = Ax_2$. Ixtiyoriy λ soni uchun

$$\lambda y_1 = \lambda A x_1 = A(\lambda x_1),$$

$$y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$$

ekanligidan $\lambda y_1 \in Im(A)$ va $y_1 + y_2 \in Im(A)$ kelib chiqadi.

Mazkur qism fazoning o'lchami A almashtirishning *rangi* deyiladi.

20.9-ta'rif. A almashtirishning yadrosi deb $Ax = 0$ bo'ladigan vektorlar jamlanmasiga aytiladi va $Ker(A)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$Ker(A) = \{x \in V | Ax = 0\}.$$

20.10-tasdiq. Ixtiyoriy chiziqli almashtirishning yadrosi qism fazo tashkil qiladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, $Ax_1 = 0$ va $Ax_2 = 0$ bo'lsa, u holda

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0.$$

Huddi shunga o'xshab, agar $Ax = 0$ bo'lsa, $A\lambda x = \lambda Ax = 0$, ya'ni $Ker(A)$ qism fazo.

Agarda A xosmas almashtirish bo'lsa, uning yadrosi faqat noldan iborat bo'ladi.

Misol 2.3. V fazo darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosi bo'lsin. A almashtirish esa differesiallash bo'lsin. Ya'ni

$$AP(x) = P'(x).$$

Bu alamshtirishning yadrosi konstantalardan, obrazi esa, darajasi $n-1$ dan oshmaydigan ko'phadlardan iborat bo'ladi. Ularning o'lchamlari esa, mos ravishda birga va n ga teng.

20.11-tasdiq. n o'lchamli V chiziqli fazodagi ixtiyoriy A almashtirishning obrazi va yadrosi o'lchamlari yig'indisi butun fazo o'lchamiga teng, ya'ni $\dim(Im(A)) + \dim(Ker(A)) = n$.

Isbot. Aytaylik, A almashtirish yadrosining o'lchami k ga teng bo'lsin. U holda $Ker(A)$ da $e_1, e_2, ..., e_k$ bazis tanlab, uni butun fazodagi $e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$ bazisgacha to'ldiramiz.

$Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlarni qaraylik. Bu vektorlar almashtirishning obraziga tegishli bo'lib, ular $Im(A)$ da bazis tashkil qiladi.

Darhaqiqat, ixtiyoriy $y \in Im(A)$ vektor berilgan bo'lsa, ta'rifga ko'ra shunday x vektor mavjudki, $y = Ax$. $e_1, e_2, ..., e_n$ vektorlar V da bazis bo'lganligi sababli $x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + ... + \gamma_n e_n$. Lekin, $Ae_1 = ... = Ae_k = 0$ bo'lgani uchun $y = Ax = \gamma_{k+1} Ae_{k+1} + ... + \gamma_n Ae_n$. Ya'ni ixtiyoriy $y \in Im(A)$ vektor $Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi.

Endi $n-k$ ta $Ae_{k+1}, ..., Ae_n$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, ular chiziqli bog'liq bo'lsin. U holda hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lgan α_j sonlar topilib,

$$\alpha_1 Ae_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$$

bo'ladi.

$x = \alpha_1 e_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} e_n$ vektorni qaraylik. U holda $Ax = A(\alpha_1 e_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} e_n) = \alpha_1 Ae_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} Ae_n = 0$ ekanligidan, $x \in Ker(A)$ kelib chiqadi. Bu esa ziddiyat, chunki bir tomondan x yadroning elementi sifatida $e_1, e_2, ..., e_k$ bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, ikkinchi tomondan esa, $e_{k+1}, ..., e_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lib qoldi. Bu esa, x vektorning bazis vektorlar yordamida berilishiga zid. Bundan esa, Ae_{k+1}, ..., Ae_n vektorlar chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $Im(A) = n-k$, ya'ni chiziqli almashtirish obrazining fazo o'lchami butun fazo o'lchami bilan chiziqli fazo yadrosi o'lchami ayirmasiga teng.

Turli bazislarda chiziqli almashtirish matritsalari orasidagi bog'lanish. Yuqorida ta'kidlaganimizdek, chiziqli almashtirishning matritsasi berilgan chiziqli fazoning bazisiga bog'liq, ya'ni turli bazislarda chiziqli almashtirish turli matritsalarga ega bo'ladi. Endi bir bazisdan boshqa bazisga o'tganda A chiziqli almashtirishning matritsasi qanday o'zgarishini keltiramiz.

V chiziqli fazoda ikkita e_1, e_2, ..., e_n va f_1, f_2, ..., f_n bazislar berilgan bo'lsin. e_1, e_2, ..., e_n bazisdan f_1, f_2, ..., f_n bazisga o'tish matrisasini $(c_{i,j})$ bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\begin{cases} f_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \dots + c_{n,1}e_n, \\ f_2 = c_{1,2}e_1 + c_{2,2}e_2 + \dots + c_{n,2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \dots + c_{n,n}e_n. \end{cases} \tag{1}$$

A chiziqli almashtirishning e_1, e_2, ..., e_n bazisdagi matritsasini $A = (a_{i,j})$, f_1, f_2, ..., f_n bazisdagi matritsasini esa $B = (b_{i,j})$ orqali belgilaymiz. Boshqacha aytganda

$$Ae_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}e_i, \tag{2}$$

$$Af_k = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}f_i. \tag{3}$$

Bizning maqsadimiz $(b_{i,j})$ matritsani $(a_{i,j})$ va $(c_{i,j})$ matritsalar orqali ifodalashdan iboratdir.

20.12-teorema. Agar biror chiziqli almashtirishning e_1, e_2, ..., e_n va f_1, f_2, ..., f_n bazislardagi matritsalari mos ravishda A va B bo'lib, birinchi bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matritsasi C ga teng bo'lsa,

$$B = C^{-1}AC$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, berilgan A chiziqli almashtirish va e_1, e_2, ..., e_n hamda f_1, f_2, ..., f_n bazislar uchun yuqoridagi (1), (2) va (3) shartlar o'rinli bo'lsin.

e_1, e_2, ..., e_n basis elementlarni f_1, f_2, ..., f_n elementlarga mos ravishda o'tkazuvchi C chiziqli almashtirish quramiz, ya'ni $Ce_i = f_i$.

20.2-tasdiqqa ko'ra bunday almashtirish mavjud va yagona bo'lib, qurilgan C chiziqli almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasi $(c_{i,j})$ matritsa bilan ustma-ust tushadi. Bundan tashqari, bu chiziqli almashtirish bazis vektorlarni bazis vektorlarga o'tkazganligi uchun, u teskarilanuvchi almashtirish bo'ladi.

Berilgan (3) formulalarning o'ng va chap tomonlarida f_k ni Ce_k bilan hamda f_i ni Ce_i bilan almashtirsak,

$$ACe_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} Ce_i$$

hosil bo'ladi.

Bu tenglikning ikkala tomoniga C^{-1} almashtirishni tatbiq qilib,

$$C^{-1}ACe_k = C^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,k} Ce_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} C^{-1}(Ce_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,k} e_i$$

tenglígni hosil qilamiz.

Bu tenglikdan esa $(b_{i,j})$ matritsa $C^{-1}AC$ almashtirishning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasi ekanligi ko'rinib turibdi. Almashtirishlarni ko'paytirganda ularning berilgan $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsalari ko'paytirilishidan $B = C^{-1}AC$ tenglik kelib chiqadi.

Chiziqli almashtirishning xos son va xos vektorlari

Invariant qism fazolar. Agar V chiziqli fazoda biror chiziqli yoki bichiziqli funksiya berilgan bo'lib, bu funksiya faqat V fazoning biror V_1 qism fazosidagina aniqlangan bo'lsa, u holda biz uni V_1 da berilgan deb hisoblashimiz, ya'ni V o'rniga faqat V_1 ni qarashimiz mumkin.

Chiziqli almashtirishlarga keladigan bo'lsak, bu yerda holat butunlay boshqacha bo'ladi. Darhaqiqat, chiziqli almashtirish V_1 qism fazoning biror vektorini V_1 ga tegishli bo'lmagan vektorga o'tkazib yuborishi ham mumkin. Bunday holatda biz faqat V_1 qism fazo bilan chegaralanib qola olmaymiz.

20.13-ta'rif. V chiziqli fazo va A chiziqli almashtirish berilgan bo'lsin. Agar V_1 qism fazoning ixtiyoriy x elementi uchun Ax vektor ham V_1 ga tegishli bo'lsa, u holda V_1 qism fazo A chiziqli almashtirishga nisbatan invariant qism fazo deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, A chiziqli almashtirishni biror qism fazoda qarashimiz uchun, u invariant qism fazo bo'lishi kerak.

Misol 20.4. a) Faqat noldangina iborat bo'lgan qism fazo va butun fazo invariant qism fazolardir. Bu qism fazolar *trivial invariant qism fazolar* deyiladi.

b) $\mathbb{R}^3$ uch o'lchamli fazoda vektorni noldan o'tgan biror o'q atrofida burishdan iborat bo'lgan chiziqli almashtirishni qaraylik. Bu holda aylanish o'qi bir o'lchamli invariant qism fazo, koordinatalar boshidan o'tib, bu o'qqa ortogonal bo'lgan tekislik esa ikki o'lchamli invariant qism fazo bo'ladi.

c) $\mathbb{R}^2$ tekislikda (ikki o'lchamli fazo) A chiziqli almashtirish tekislikni X o'q bo'yicha λ_1 marta, Y o'q bo'yicha λ_2 marta cho'zishdan iborat bo'lsin. Boshqacha aytganda, agar $z = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ uchun $Az = \lambda_1\xi_1 e_1 + \lambda_2\xi_2 e_2$, bu yerda e_1, e_2 o'qlardagi birlik vektorlar. Bu holda X hamda Y koordinata o'qlari bir o'lchamli invariant qism fazolar bo'ladi. Agar $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ bo'lsa, u holda koordinatalar boshidan o'tgan ixtiyoriy to'g'ri chiziq invariant qism fazo bo'ladi.

Xos son va xos vektorlar. V fazo va undagi biror $x \neq 0$ vektordan hosil bo'lgan bir o'lchamli V_1 qism fazo berilgan bo'lsin. Ma'lumki, V_1 fazo λx ko'rinishidagi elementlardan tashkil topadi. V_1 fazo invariant bo'lishi uchun Ax vektor ham V_1 da yotishi, ya'ni

$$Ax = \lambda x$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

20.14-ta'rif. $Ax = \lambda x$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x \neq 0$ vektor A chiziqli almashtirishning xos vektori, unga mos keluvchi λ son esa xos son deyiladi.

Shunday qilib, agar x vektor xos vektor bo'lsa, u holda αx vektorlar to'plami bir o'lchamli invariant qism fazoni tashkil qiladi. Aksincha, bir o'lchamli invariant qism fazoning noldan farqli barcha vektorlari xos vektorlardir.

20.15-teorema. V kompleks fazoda har qanday A chiziqli almashtirish kamida bitta xos vektorga ega.

Isbot. V fazoda biror $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis tanlab olamiz. Bu bazisda A chiziqli almashtirishning matritsasi $(a_{i,j})$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \in V$ vektor uchun Ax vektorni qarasak,

$$Ax = \xi_1 A(e_1) + \xi_2 A(e_2) + \dots + \xi_n A(e_n) =$$

$$\xi_1(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + \dots + a_{n,1}e_n) + \xi_2(a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + \dots + a_{n,2}e_n) +$$

$$+ \dots + \xi_n(a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + \dots + a_{n,n}e_n) =$$

$$(a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \dots + a_{1,n}\xi_n)e_1 + (a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + \dots + a_{2,n}\xi_n)e_n +$$

$$+ \dots + (a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + \dots + a_{n,n}\xi_n)e_n,$$

bo'ladi. Demak, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$ vektor xos vektor bo'lishi, ya'ni $Ax = \lambda x$ shart bajarilishi uchun

$$\begin{cases} a_{1,1}\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \dots + a_{1,n}\xi_n = \lambda\xi_1, \\ a_{2,1}\xi_1 + a_{2,2}\xi_2 + \dots + a_{2,n}\xi_n = \lambda\xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + \dots + a_{n,n}\xi_n = \lambda\xi_n \end{cases}$$

tengliklar o'rinli bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda, agar

$$\begin{cases} (a_{1,1}-\lambda)\xi_1 + a_{1,2}\xi_2 + \ldots + a_{1,n}\xi_n = 0, \\ a_{2,1}\xi_1 + (a_{2,2}-\lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2,n}\xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1}\xi_1 + a_{n,2}\xi_2 + \ldots + (a_{n,n}-\lambda)\xi_n = 0, \end{cases} \tag{4}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lsa, x xos vektor mavjud bo'ladi.

Shunday qilib, teoremani isbot qilish uchun (4) sistemani qanoatlantiradigan λ sonini va bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmaydigan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sonlarning mavjud ekanligini ko'rsatish kerak.

Ma'lumki, bir jinsli tenglamalar sistemaning noldan farqli yechimi mavjud bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli, demak

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Ushbu determinantdan biz λ ga nisbatan n-darajali tenglama hosil qilamiz. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra, kompleks sonlar maydonida har qanday ko'phad kamida bitta ildizga ega bo'lganligi uchun, bu tenglama ham λ_0 ildizga ega.

(4) sistemada λ ning o'rniga λ_0 ildizni qo'ysak, hosil bo'lgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'ladi. Ushbu noldan farqli yechimni ξ_1^0, $\xi_2^{(0)}$, ..., $\xi_n^{(0)}$ deb olsak,

$$x^0 = \xi_1^{(0)}e_1 + \xi_2^{(0)}e_2 + \ldots + \xi_n^{(0)}e_n$$

xos vektorni va unga mos keluvchi λ_0 xos sonni hosil qilamiz, chunki $Ax^0 = \lambda_0 x^0$ tenglik bajariladi.

Eslatma. Agar A chiziqli almashtirishni butun fazoda emas, balki uning biror invariant qism fazosida qaralsa, u holda teoremaning isboti o'z kuchini saqlaydi. Demak, ixtiyoriy invariant qism fazoda ham A chiziqli almashtirish kamida bitta xos vektorga ega.

(5) tenglama A chiziqli almashtirish matritsasining *xarakteristik tenglamasi*, uning chap tomonida hosil bo'ladigan ko'phad esa *xarakteristik ko'phadi* deyiladi.

Teoremani isbotlash jarayonida biz xarakteristik ko'phadning ildizlari A chiziqli almashtirishning xos sonlari ekanligini, va aksincha, A chiziqli almashtirishning xos sonlari xarakteristik tenglamaning ildizlari ekanligini ko'rsatdik.

Endi xarakteristik ko'phad bazisning tanlab olinishiga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Yuqorida A almashtirishning xarakteristik ko'phadini $A-\lambda E$ matritsaning determinanti sifatida aniqladik. Bazis o'zgarganda chiziqli almashtirishning A matritsasi $C^{-1}AC$ ko'rinishni oladi, bu yerda C eski bazisdan yangi bazisga o'tish matritsasi. Yangi bazisda xarakteristik ko'pxad $C^{-1}AC-\lambda E$ matritsaning determinantiga teng bo'ladi. Ammo

$$|C^{-1}AC-\lambda E| = |C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC| = |C^{-1}(A-\lambda E)C| =$$

$$= |C^{-1}|\cdot|A-\lambda E|\cdot|C| = |A-\lambda E|\cdot|C^{-1}|\cdot|C| = |A-\lambda E|$$

tenglikdan bazis o'zgarganda xarakteristik ko'phad o'zgarmasligi kelib chiqadi.

Demak, kelgusida chiziqli almashtirish matritsasining xarakteristik ko'phadi emas, balki chiziqli almashtirishning xarakteristik ko'phadi deb yuritishimiz mumkin.

n-o'lchamli chiziqli fazoda berilgan chiziqli almashtirishlar orasida n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo'lgan chiziqli almashtirishlar ma'lum ma'noda eng sodda chiziqli almashtirishlar hisoblanadi. Agar A shunday chiziqli almashtirish bo'lsa, u holda e_1, e_2, ..., e_n chiziqli erkli xos vektorlarni V fazoning bazisi deb qabul qilish mumkin. U holda

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \lambda_1 e_1, \\ Ae_2 &= \lambda_2 e_2, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ Ae_n &= \lambda_n e_n \end{aligned}$$

ekanligidan A almashtirishning bu bazisdagi matritsasi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ko'rinishga keladi. Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

20.16-teorema. Agar A chiziqli almashtirish n ta chiziqli erkli xos vektorlarga ega bo'lsa, u holda A almashtirish matritsasini diagonal shaklga keltirish mumkin. Aksincha, agar biror bazisda almashtirish matritsasi diagonal shaklda bo'lsa, u holda bu bazisning vektorlari xos vektorlardan iboratdir.

Quyidagi tasdiqda turli xos sonlarga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz.

20.17-tasdiq. Agar $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlarlar A chiziqli almashtirishning xos vektorlari bo'lib, ularga mos keluvchi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ xos sonlar turli xil bo'lsa, u holda $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlar chiziqli erklidir.

Isbot. Buni ko'rsatish uchun induksiya usulidan foydalanamiz. $k = 1$ uchun bu tasdiq o'z-o'zidan ravshan. Endi ushbu tasdiqni $k-1$ ta xos vektor uchun o'rinli deb, uni k ta xos vektor uchun isbot qilamiz.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k = 0 \tag{6}$$

tenglik $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda o'rinli bo'lsin. Aytaylik, $\alpha_1 \neq 0$ bo'lsin, u holda yuqoridagi tenglikning xar ikkala tomoniga A almashtirishni tadbiq qilamiz:

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_k e_k) = 0,$$

ya'ni

$$\alpha_1\lambda_1 e_1 + \alpha_2\lambda_2 e_2 + ... + \alpha_k\lambda_k e_k = 0. \tag{7}$$

(6) tenglikni λ_k ga ko'paytirib (7) tenglikdan ayirsak, ushbu ifodani hosil qilamiz:

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_k)e_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)e_2 + ... + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_1)e_{k-1} = 0.$$

Induksiya faraziga ko'ra, $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ vektorlarning chiziqli erkliligi va $\lambda_i \neq \lambda_j$ ekanligidan biz $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{k-1} = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa $\alpha_1 \neq 0$ degan farazga zid. Demak $e_1, e_2, ..., e_k$ vektorlar chiziqli erkli.

Yuqoridagi tasdiqdan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

20.18-natija. Agar A chiziqli almashtirishning xarakteristik ko'phadi n ta har xil ildizga ega bo'lsa, u holda A almashtirish matritsasini diagonal shaklga keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham, xarakteristik tenglamaning har bir λ_k ildiziga kamida bitta xos vektor to'g'ri keladi. Bu vektorlarga mos bo'lgan xos qiymatlarning hammasi turlicha bo'lganligi uchun, yuqoridagi tasdiqqa muvofiq n ta chiziqli erkli $e_1, e_2, ..., e_n$ xos vektorlarga ega bo'lamiz. Bu vektorlarni bazis sifatida olsak, A almashtirishning matritsasi diagonal ko'rinishga keladi.

Agar xarakteristik ko'phad karrali ildizlarga ega bo'lsa, u holda chiziqli erkli xos vektorlarning soni n dan kichik bo'lishi mumkin.

Masalan, darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar fazosida har bir ko'phadga uning hosilasini mos qo'yuvchi A almashtirish faqat bitta $\lambda = 0$ xos qiymatga va bitta $P(t) = const$ xos vektorga ega.

Haqiqatdan ham, darajasi $k > 0$ bo'lgan xar qanday $P(t)$ ko'phad uchun $P'(t)$ ko'phadning darajasi $k-1$ ga teng va shuning uchun $P'(t) = \lambda P(t)$ tenglik faqat $\lambda = 0$ va $P(t) = const$ bo'lgan holdagina bajariladi.

21-§. Bichiziqli va kvadratik formalar

Chiziqli funksiya. Vektor fazoda aniqlanadigan eng sodda funksiyalardan biri chiziqli funksiyadir.

21.1-ta'rif. Agar vektor fazoda har bir x vektorga $f(x)$ son mos qo'yilib, bu moslik uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa;

$$1) f(x+y) = f(x) + f(y);$$

$$2) f(\mu x) = \mu f(x);$$

vektor fazoda *chiziqli funksiya* (chiziqli forma) berilgan deyiladi. Demak, f chiziqli funksiya V fazoni $\mathbb{K}$ maydonga mos qo'yadi, ya'ni $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$.

Bizga n o'lchamli chiziqli fazo va uning ixtiyoriy $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisi berilgan bo'lsin. Har bir x vektorni

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lganligi uchun, chiziqli funksiya xossalariga asosan:

$$f(x) = f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) + ... + \xi_n f(e_n).$$

Demak, muayyan bazisga ega bo'lgan n o'lchamli fazoda chiziqli funksiyani

$$f(x) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$$

ko'rinishda tasvirlanish mumkin. Bunda $x_i = f(e_i)$ bazisning tanlab olinishigagina bog'liq bo'lgan o'zgarmaslar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ sonlar esa x vektorning bu bazisdagi koordinatalari.

Shunday qilib, chiziqli funksiyaga yuqorida berilgan ta'rif, chiziqli funksiyaning algebrada qabul qilingan ta'rifi bilan bir xil bo'ladi, bu yerda faqat x_i koeffitsientlar bazisning tanlab olinishiga bog'liq ekanligini e'tiborga olish zarur.

Bir bazis boshqasiga almashtirilganda chiziqli funksiya koeffitsientlarining qanday o'zgarishini ko'rib chiqaylik.

Aytaylik, V chiziqli fazoda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $e_1', e_2', ..., e_n'$ bazislar tanlab olingan bo'lib, e_i' vektorlar $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis orqali

$$e_1' = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2 + ... + a_{n,1}e_n,$$

$$e_2' = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + ... + a_{n,2}e_n,$$

$$...,$$

$$e_n' = a_{1,n}e_1 + a_{2,n}e_2 + ... + a_{n,n}e_n$$

kabi ifodalangan bo'lsin. Birinchi e_1, e_2, ..., e_n bazisda chiziqli funksiya

$$f(x) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$$

ko'rinishida, e'_1, e'_2, ..., e'_n bazisda esa

$$f(x) = x'_1\xi'_1 + x'_2\xi'_2 + ... + x'_n\xi'_n$$

ko'rinishida ifodalansin.

$x_i = f(e_i)$, $x'_k = f(e'_k)$ bo'lgani uchun

$$x'_k = f(a_{1,k}e_1 + a_{2,k}e_2 + ... + a_{n,k}e_n) =$$

$$= a_{1,k}f(e_1) + a_{2,k}f(e_2) + ... + a_{n,k}f(e_n) =$$

$$= a_{1,k}x_1 + a_{2,k}x_2 + ... + a_{n,k}x_n.$$

tenglik kelib chiqadi.

Agar bu ifodani matritsalar ko'rinishida yozsak:

$$(x'_1, x'_2, ..., x'_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

hosil bo'ladi.

Bichiziqli formalar. Endi bichiziqli va kvadratik funksiyalar (formalar) tushunchalarini kiritamiz. Bu tushunchani dastlab, haqiqiy sonlar maydonida aniqlangan vektor fazo uchun kiritamiz.

21.2-ta'rif. Agar $V \times V$ to'plamni $\mathbb{R}$ maydonga o'tkazuvchi $A : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ akslantirish aniqlangan bo'lib, quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa,

1) $A(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda A(x_1, y) + \mu A(x_2, y)$;

2) $A(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda A(x, y_1) + \mu A(x, y_2)$ ya'ni, bitta o'zgaruvchining tayinlangan qiymatida ikkinchi o'zgaruvchiga nisbatan chiziqli funksiya bo'lsa, u holda $A(x, y)$ *bichiziqli forma* deb ataladi.

Misol 21.1. V chiziqli fazo sifatida uzluksiz funksiyalar to'plamini qaraylik. $K(s,t)$ funksiya ikki o'zgaruvchi uzluksiz funksiya bo'lsin. Agar

$$A(f, g) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)f(s)g(t)dsdt$$

bo'lsa, $A(f, g)$ funksiya V fazoda aniqlangan bichiziqli forma bo'ladi.

21.3-ta'rif. Agar ixtiyoriy x, y vektorlar uchun

$$A(x, y) = A(y, x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bichiziqli forma *simmetrik* bichiziqli forma deyiladi.

Yevklid fazosidagi (x, y) skalyar ko'paytma simmetrik bichiziqli formaga misol bo'ladi.

Bichiziqli formaning matritsasi. Biz bichiziqli formaning aksiomatik ta'rifini berdik. Endi n o'lchamli fazoda biror e_1, e_2, ..., e_n bazis tanlab olamiz, hamda $A(x, y)$ bichiziqli formani x va y vektorlarning bu bazisdagi ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n va η_1, η_2, ..., η_n koordinatalari orqali ifodalaymiz. Bu holda:

$$A(x, y) = A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n).$$

Bichiziqli formaning xossalariga asosan:

$$\begin{aligned}
&A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n,\ \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n) = \\
&+\xi_1\eta_1 A(e_1, e_1) + \xi_1\eta_2 A(e_1, e_2) + \ldots + \xi_1\eta_n A(e_1, e_n) + \\
&+\xi_2\eta_1 A(e_2, e_1) + \xi_2\eta_2 A(e_2, e_2) + \ldots + \xi_2\eta_n A(e_2, e_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+\xi_n\eta_1 A(e_n, e_1) + \xi_n\eta_2 A(e_n, e_2) + \ldots + \xi_n\eta_n A(e_n, e_n).
\end{aligned}$$

yoki qisqacha:

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} A(e_i, e_j)\xi_i\eta_j.$$

$A(e_i, e_j)$ o'zgarmaslarni $a_{i,j}$ kabi belgilasak, n o'lchamli fazodagi har qanday bichiziqli forma berilgan e_1, e_2, ..., e_n bazisda

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\eta_j$$

ko'rinishida yozilishini hosil qilamiz, bu yerda ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n va η_1, η_2, ..., η_n sonlar mos ravishda x va y vektorlarning shu bazisdagi koordinatalari.

Ma'lumki, $a_{i,j}$ sonlar bazisning tanlab olinishigagina bog'liq bo'lib,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsa $A(x, y)$ bichiziqli formaning e_1, e_2, ..., e_n bazisdagi matritsasi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $A(x, y)$ bichiziqli forma berilgan bazisda $A = (a_{i,j})$ matritsa bilan aniqlanadi.

Endi bazis o'zgarganda bichiziqli forma matritsasining o'zgarishi ko'rib chiqamiz. Bizga n o'lchamli fazoda ikkita $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislar berilgan bo'lsin. $A(x, y)$ bichiziqli formaning $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdagi matritsasini $A = (a_{i,j})$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisdagi matritsasi esa $B = (b_{i,j})$ kabi belgilaylik. Bundan tashqari, $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdan $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisga o'tish matritsasi

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

bo'lsin, ya'ni

$$\begin{cases} f_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + ... + c_{n,1}e_n, \\ f_2 = c_{1,2}e_1 + c_{2,2}e_2 + ... + c_{n,2}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ f_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + ... + c_{n,n}e_n, \end{cases}$$

21.4-teorema. Agar A va B matritsalar $A(x, y)$ bichiziqli formaning mos ravisbda $e_1, e_2, ..., e_n$ va $f_1, f_2, ..., f_n$ bazislardagi matritsalari bo'lib, $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisdan $f_1, f_2, ..., f_n$ bazisga o'tish matritsasi C bo'lsa, u holda

$$B = C^T AC$$

bo'ladi, bu yerda, C^T matritsa C matritsaning transponirlangan matritsasi.

Isbot. Ta'rifga ko'ra $b_{i,j} = A(f_i, f_j)$ ekanligi ma'lum. Endi

$$f_i = c_{1,i}e_1 + c_{2,i}e_2 + ... + c_{n,i}e_n,$$

$$f_j = c_{1,j}e_1 + c_{2,j}e_2 + ... + c_{n,j}e_n$$

tenglikdan foydalanib,

$$b_{i,j} = A(f_i, f_j) = A\left(\sum_{p=1}^{n} c_{p,i}e_p, \sum_{q=1}^{n} c_{q,j}e_q\right) =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,i}c_{q,j}A(e_p, e_q) = \sum_{p,q=1}^{n} c_{p,i}c_{q,j}a_{p,q}$$

formulani hosil qilamiz.

Bu tenglikni matritsa shaklida yozish uchun $c'_{i,p} = c_{p,i}$ deb delgilash kiritamiz. Natijada, $c'_{i,p}$ lar C^T matritsaning elementlaridan iborat bo'ladi. Demak,

$$b_{i,j} = \sum_{p,q=1}^{n} c'_{i,p}a_{p,q}c_{q,j}.$$

Matritsa shaklida esa, bu tenglik $B = C^T AC$ ko'rinishiga keladi.

Endi biz kvadratik forma ta'rifini keltiramiz. Bizga $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma berilgan bo'lsin.

21.4-ta'rif. Simmetrik bichiziqli formada $y = x$ deb olganda hosil bo'ladigan $A(x, x)$ funksiyaga kvadratik forma deyiladi. $A(x, y)$ simmetrik bichiziqli forma $A(x, x)$ kvadratik formaga nisbatan *qutbiy bichiziqli forma* deyiladi.

21.5-teorema. $A(x, y)$ qutbiy forma o'zining $A(x, x)$ kvadratik formasi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Isbot. Bichiziqli forma ta'rifidan osongina ko'rish mumkinki,

$$A(x + y, x + y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y).$$

$A(x, y) = A(y, x)$ ekanligidan

$$A(x, y) = \frac{1}{2}\left[A(x + y, x + y) - A(x, x) - A(y, y)\right]$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikning o'ng tomonida faqat kvadratik formaning qiymatlari ishtirok etganligi uchun, $A(x, y)$ bichiziqli forma o'zining kvadratik formasi bilan aniqlanishi kelib chiqadi.

Yuqorida biz ixtiyoriy $A(x, y)$ bichiziqli forma x va y vektorlarning koordinatalari orqali

$$A(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\eta_j$$

ko'rinishda yozilishini ko'rsatgan edik. Demak, $A(x, x)$ kvadratik forma ham berilgan bazisda

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

formula bilan ifodalanadi, bunda $a_{i,k} = a_{k,i}$.

21.6-ta'rif. Agar xar qanday $x \neq 0$ vektor uchun $A(x, x) > 0$ bo'lsa, $A(x, x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

Misol 21.1. $A(x, x)$ kvadratik forma biror bazisda $A(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ ko'rinishga ega bo'lsa, bunday kvadratik forma musbat aniqlangan kvadratik forma bo'ladi.

$A(x, x)$ musbat aniqlangan kvadratik forma va $A(x, y)$ uning qutbiy bichiziqli formasi bo'lsin. Yuqorida berilgan ta'riflarga muvofiq quyidagilarga ega bo'lamiz:

1) $A(x, y) = A(y, x)$;

2) $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$;

3) $A(\mu x, y) = \mu A(x, y)$;

4) $A(x, x) \geq 0$ va $A(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bu shartlar skalyar ko'paytmaning aksiomalari bilan bir xil ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak, musbat aniqlangan kvadratik formaga mos bo'lgan bichiziqli forma skalyar ko'paytma bo'ladi.

Kompleks sonlar maydoni ustida berilgan vektor fazoda bichiziqli forma quyidagicha aniqlanadi.

21.7-ta'rif. Agar $V \times V$ to'plamni $\mathbb{C}$ maydonga o'tkazuvchi $A : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ akslantirish aniqlangan bo'lib, $A(x, y)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,

1) $A(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda A(x_1, y) + \mu A(x_2, y)$;

2) $A(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \bar{\lambda} A(x, y_1) + \bar{\mu} A(x, y_2)$, u holda $A(x, y)$ funksiya bichiziqli forma deb ataladi.

22-§. Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish

Biz avvalgi mavzuda $A(x, x)$ kvadratik formaning aniqlanishi x vektorning berilgan bazisdagi koordinatalariga bog'liq ekanligini keltirib o'tdik. Bu mavzuda kvadratik formani kvadratlar yig'indisi shakliga keltirish, ya'ni kvadratik formani

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2 \tag{1}$$

ko'rinishga keltiradigan bazisni topish masalasini qaraymiz.

22.1-ta'rif. Kvadratik formaning (1) ko'rinishidagi shakli uning kanonik (normal) shakli deb ataladi.

22.2-teorema. n o'lchovli V fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x, x)$ kvadratik forma uchun shunday e_1, e_2, ..., e_n bazis mavjudki, bu bazisda kvadratik forma

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2,$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $A(x, x)$ kvadratik forma biror f_1, f_2, ..., f_n bazisda quyidagi

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \eta_i \eta_j \tag{2}$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Bunda η_1, η_2, ..., η_n lar x vektorning ushbu bazisdagi koordinatalari.

Bazisni (2) formulada turli indeksli koordinatalarning ko'paytmalari yo'qolib boradigan qilib almashtiramiz. Bazisning har bir almashtirilishiga ma'lum koordinatalarning xosmas almashtirilishi, va aksincha, koordinatalarning xosmas almashtirilishiga ma'lum bazis almashtirishlari to'g'ri kelgani uchun koordinatalarni almashtirish formulalarini yozish bilan chegaralanamiz.

$A(x,x)$ kvadratik formani kanonik shaklga keltirish uchun, bizga $a_{i,i}$ koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak. Bunga hamma vaqt erishish mumkin. Haqiqatan ham, nolga aynan teng bo'lmagan $A(x,x)$ kvadratik formada o'zgaruvchining birorta ham kvadrat bo'lmasin deb faraz qilaylik, u holda kamida bitta noldan farqli ko'paytma, masalan, $2a_{1,2}\eta_1\eta_2$ mavjud bo'ladi. η_1 va η_2 koordinatalarni

$$\eta_1 = \eta_1' + \eta_2', \eta_2 = \eta_1' - \eta_2'$$

kabi almashtirib, boshqa o'zgaruvchilarni o'zgartirishsiz qoldirsak, bunday almashtirishda $2a_{1,2}\eta_1\eta_2$ hadning ko'rinishi $2a_{1,2}(\eta_1'^2 - \eta_2'^2)$ bo'lib qoladi. Farazga muvofiq, $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$ bo'lgani uchun, bu hech qanday had bilan qisqarmaydi, ya'ni $\eta_1'^2$ ning koeffitsienti noldan farqli bo'ladi.

Demak, umumiylikka ziyon yetkazmagan holda (2) formulada $a_{1,1} \neq 0$ deb olish mumkin. Kvadratik formada η_1 qatnashgan hadlarni ajratib yozamiz:

$$a_{1,1}\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + ... + 2a_{1,n}\eta_1\eta_n.$$

Bu yig'indini to'la kvadratgacha to'ldiramiz, ya'ni uni

$$a_{1,1}\eta_1^2 + 2a_{1,2}\eta_1\eta_2 + ... + 2a_{1,n}\eta_1\eta_n = \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}\eta_1 + ... + a_{1,n}\eta_n)^2 - B \qquad (3)$$

ko'rinishda yozamiz, bu yerda B ifoda faqat $a_{1,2}\eta_2, \ldots, a_{1,n}\eta_n$ hadlar kvadratlari va ularning ko'paytmalarini o'z ichiga olgan haddir.

(3) ifodani (2) tenglikga qo'ygandan so'ng qaralayotgan kvadratik forma

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}\eta_1 + ... + a_{1,n}\eta_n)^2 + ...$$

ko'rinishga keladi, bunda yozilmagan hadlar $\eta_2, \ldots, \eta_n$ o'zgaruvchilardangina tashkil topgan. Quyidagicha o'zgartirish kiritamiz

$$\eta_1^* = a_{1,1}\eta_1 + a_{1,2}\eta_2 + ... + a_{1,n}\eta_n,$$

$$\eta_2^* = \eta_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\eta_n^* = \eta_n.$$

U holda kvadratik forma

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{1,1}}\eta_1^{*2} + \sum_{i,j=2}^{n} a_{i,j}^{*}\eta_i^{*}\eta_j^{*}$$

ko'rinishiga keladi.

$\sum\limits_{i,j=2}^{n} a_{i,j}^{*}\eta_i^{*}\eta_j^{*}$ ifoda (2) formulaning o'ng tomoniga juda o'xshash bo'lib, bunda faqat birinchi koordinata ishtirok etmaydi. $a_{2,2}^{*}$ koeffitsientni noldan farqli deb faraz qilib, o'zgaruvchilarni yuqoridagi usulda,

$$\eta_1^{**} = \eta_1^{*},$$
$$\eta_2^{**} = a_{2,2}^{*}\eta_2^{*} + a_{2,3}^{*}\eta_3^{*} + \ldots + a_{2,n}^{*}\eta_n^{*},$$
$$\eta_3^{**} = \eta_3^{*},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\eta_n^{**} = \eta_n^{*},$$

formulalarga muvofiq yangidan almashtirishimiz mumkin.

Bunday almashtirishdan so'ng kvadratik forma

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{1,1}}\eta_1^{**2} + \frac{1}{a_{2,2}}\eta_2^{**2} + \sum_{i,j=3}^{n} a_{i,j}^{**}\eta_i^{**}\eta_j^{**}$$

ko'rinishga keladi. Bu jarayonni davom ettirib, o'zgaruvchilarni bir necha bor almashtirgandan keyin ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n o'zgaruvchilarga ega bo'lamiz. Ya'ni, $A(x,x)$ kvadratik forma bu o'zgaruvchilar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$A(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_m\xi_m^2,$$

bu yerda $m \le n$.

Ravshanki, $m < n$ bo'lgan holda $\lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ deb faraz qilish mumkin.

Kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirishning yuqoridagi teorema isbotida bayon qilingan usuli *Lagranj usuli* deb ataladi.

Misol 22.1. Bizga uch o'lchamli fazodagi biror f_1, f_2, f_3 bazisda

$$A(x,x) = 2\eta_1\eta_2 + 4\eta_1\eta_3 - \eta_2^2 - 8\eta_3^2$$

kvadratik forma berilgan bo'lsin.

$\eta_1 = \eta_2'$, $\eta_2 = \eta_1'$, $\eta_3 = \eta_3'$ almashtirish bajarsak, u holda

$$A(x,x) = (\eta_1')^2 + 2\eta_1'\eta_2' + 4\eta_2'\eta_3' - 8(\eta_3')^2.$$

So'ngra $\eta_1^* = -\eta_1' + \eta_2'$, $\eta_2^* = \eta_2'$, $\eta_3^* = \eta_3'$ almashtirish qilib, kvadratik forma uchun yangi ifoda hosil qilamiz:

$$A(x,x) = -(\eta_1^*)^2 + (\eta_2^*)^2 + 4\eta_2^*\eta_3^* - 8(\eta_3^*)^2.$$

Shunday qilib, $\xi_1 = \eta_1^*$, $\xi_2 = \eta_2^* + 2\eta_3^*$, $\xi_3 = \eta_3^*$ almashtirish kvadratik formani $A(x,x) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 - 12\xi_3^2$ kanonik shaklga keltiradi..

Ta'kidlash joizki, kvadratik formani Lagranj usuli bilan kanonik ko'rinishiga keltirishda qo'llaniladigan $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*$ koordinatalar $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ orqali, o'z navbatida $\eta_1^{**}, \eta_2^{**}, ..., \eta_n^{**}$ koordinatalar esa $\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*$ va shu tarzda oxirgi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ koordinatalar o'zidan oldingi koordinatalar orqali ifodalanadi. Bundan foydalanib, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ koordinatalarni dastlabki $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ koordinatalar orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= c_{1,1}\eta_1 + c_{2,1}\eta_2 + ... + c_{n,1}\eta_n,\\
\xi_2 &= c_{1,2}\eta_1 + c_{2,2}\eta_2 + ... + c_{n,2}\eta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\xi_n &= c_{1,n}\eta_1 + c_{2,n}\eta_2 + ... + c_{n,n}\eta_n.
\end{aligned}$$

Koordinatalarni almashtirish matritsasi bazis almashtirish matritsasi teskarisining transponirlanganiga teng bo'lishini hisobga olib, yangi $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorlarini eski $f_1, f_2, ..., f_n$ bazis vektorlari orqali ifodalashimiz mumkin, ya'ni

$$\begin{aligned}
e_1 &= d_{1,1}f_1 + d_{2,1}f_2 + ... + d_{n,1}f_n,\\
e_2 &= d_{1,2}f_1 + d_{2,2}f_2 + ... + d_{n,2}f_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
e_n &= d_{1,n}f_1 + d_{2,n}f_2 + ... + d_{n,n}f_n.
\end{aligned}$$

Agar kvadratik formani kanonik shaklga keltirish jarayonida ikki koordinatani birdaniga o'zgartiradigan almashtirishni bajarishga to'g'ri kelmasa, u holda almashtirish formulalarining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= c_{1,1}\eta_1 + c_{2,1}\eta_2 + ... + c_{n,1}\eta_n,\\
\xi_2 &= c_{2,2}\eta_2 + ... + c_{n,2}\eta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\xi_n &= c_{n,n}\eta_n
\end{aligned}$$

ya'ni almashtirish matritsasi uchburchak ko'rinishiga keladi. U holda bazisni almashtirish matritsasi ham

$$e_1 = d_{1,1}f_1,$$

$$e_2 = d_{1,2}f_1 + d_{2,2}f_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n = d_{1,n}f_1 + d_{2,n}f_2 + \dots + d_{n,n}f_n.$$

ko'rinishda bo'ladi.

Endi kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirishning yana bir usulini keltiramiz. Avvalgi usuldan farqli ravishda bu usul izlanayotgan $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisni to'g'ridan-to'g'ri boshlang'ich bazis orqali ifodasini beradi.

Aytaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

matritsa $A(x,x)$ kvadratik formaning $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazisdagi matritsasi bo'lsin. Ushbu matritsaning quyidagi bosh minoralarini qaraymiz:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ \dots; \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

22.3-teorema. Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik formaning $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazisdagi matritsasi $A = (a_{i,j})$ bo'lsin. Agar A matritsaning $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ bosh minorlari noldan farqli bo'lsa, u holda shunday $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis mavjudki, bu bazisda $A(x,x)$ forma kanonik ko'rinishga kelib, uning kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$A(x,x) = \frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2,$$

bunda ξ_k lar x vektorning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi koordinatalari.

Isbot. Teorema shartiga asosan $A(x,x)$ kvadratik forma $f_1, f_2, \dots, f_n$ bazisda

$$A(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\eta_i\eta_j$$

ko'rinishiga ega, bu yerda $a_{i,j} = A(f_i, f_j)$.

Bizning maqsadimiz $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlarni $A(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlashdan iborat. Bu bazislarni

$$\begin{cases} e_1 = \alpha_{1,1}f_1, \\ e_2 = \alpha_{2,1}f_1 + \alpha_{2,2}f_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ e_n = \alpha_{n,1}f_1 + \alpha_{n,2}f_2 + \dots + \alpha_{n,n}f_n \end{cases} \tag{3}$$

ko'rinishida izlaymiz.

$\alpha_{i,j}$ koeffitsientlarni e_1, e_2, ..., e_n bazis elementlari o'rniga ularning (3) tenglikdagi ifodalarini $A(e_i, e_j) = 0$ shartlarga qo'yish yo'li bilan ham topish mumkin. Ammo bu usul hisoblash uchun noqulay bo'lib, bunda $\alpha_{i,j}$ koeffitsientlarga nisbatan 2-darajali tenglamalar sistemasini yechishga to'gri keladi.

Shuning uchun hisoblashni birmuncha yengillashtiradigan boshqa yo'lni tanlaymiz.

Ta'kidlash joizki, $A(e_k, f_i) = 0$, $1 \leq i \leq k-1$ tengliklardan $A(e_k, e_i) = 0$, $1 \leq i \leq k-1$ tengliklar kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar e_i o'rniga $\alpha_{i,1}f_1 + \alpha_{i,2}f_2 + ... + \alpha_{i,i}f_i$ ifodani qo'ysak,

$$A(e_k, e_i) = A(e_k, \alpha_{i,1}f_1 + \alpha_{i,2}f_2 + ... + \alpha_{i,i}f_i) =$$

$$= \alpha_{i,1}A(e_k, f_1) + \alpha_{i,2}A(e_k, f_2) + ... + \alpha_{i,i}A(e_k, f_i) = 0$$

bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy k va $i < k$ uchun $A(e_k, f_i) = 0$ bo'lsa, u holda $A(e_k, e_i) = 0$ bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, qaralayotgan masala $e_k = \alpha_{k,1}f_1 + \alpha_{k,2}f_2 + ... + \alpha_{k,k}f_k$ munosabatdagi $\alpha_{k,1}$, $\alpha_{k,2}$, ..., $\alpha_{k,k}$ koeffitsientlarni

$$A(e_k, f_i) = 0, 1 \leq i \leq k-1 \tag{4}$$

shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlash masalasiga keltirildi.

Agar e_k vektor yuqoridagi shartlar bilan bir qatorda quyidagi

$$A(e_k, f_k) = 1 \tag{5}$$

shartni qanotlantiradigan qilib izlansa, u holda u bir qiymatli aniqlanadi.

(4) va (5) shartlarga e_k ning ifodasini qo'yib, $\alpha_{k,i}$ koeffisiyentlarga nisbatan birinchi darajali quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \alpha_{k,1}A(f_1, f_1) + \alpha_{k,2}A(f_1, f_2) + ... + \alpha_{k,k}A(f_1, f_k) = 0, \\ \alpha_{k,1}A(f_2, f_1) + \alpha_{k,2}A(f_2, f_2) + ... + \alpha_{k,k}A(f_2, f_k) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ \alpha_{k,1}A(f_k, f_1) + \alpha_{k,2}A(f_k, f_2) + ... + \alpha_{k,k}A(f_k, f_k) = 0, \\ \alpha_{k,1}A(f_k, f_1) + \alpha_{k,2}A(f_k, f_2) + ... + \alpha_{k,k}A(f_k, f_k) = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Bu tenglamalar sistemasi matritsasining determinanti:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1, f_1) & A(f_1, f_2) & ... & A(f_1, f_k) \\ A(f_2, f_1) & A(f_2, f_2) & ... & A(f_2, f_k) \\ ... & ... & ... & ... \\ A(f_k, f_1) & A(f_k, f_2) & ... & A(f_k, f_k) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k,1} & a_{k,2} & ... & a_{k,k} \end{vmatrix}$$

ko'rinishida bo'lib, bu determinantning qiymati noldan farqli. Shuning uchun (6) sistema yagona yechimga ega. Demak, yuqoridagi tenglikni qanoatlantiruvchi $\alpha_{k,i}$ koeffitsientlar mavjud va yagonadir. Bundan esa e_k vektor yagona ravishda aniqlanishi kelib chiqadi. Endi $A(x,x)$ kvadratik formaning $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdagi $b_{i,k}$ koeffitsientlarini topamiz.

Ma'lumki, $b_{i,k} = A(e_i, e_k)$ bo'lib, bu bazisning qurilishiga ko'ra, $A(e_i, e_k) = 0$, $k \neq i$, ya'ni $b_{i,k} = 0$. Demak, $b_{k,k} = A(e_k, e_k)$ koeffitsientlarni aniqlash kifoya. (4) va (5) shartlarning bajarilishidan foydalanib,

$$A(e_k, e_k) = A(e_k, \alpha_{k,1}f_1 + \alpha_{k,2}f_2 + \ldots + \alpha_{k,k}f_k) =$$

$$= \alpha_{k,1}A(e_k, f_1) + \alpha_{k,2}A(e_k, f_2) + \ldots + \alpha_{k,k}A(e_k, f_k) = \alpha_{k,k}$$

ya'ni $b_{k,k} = \alpha_{k,k}$ ekanligini hosil qilamiz. Bu esa $b_{i,k}$ koeffisiyentlarni aniqlash uchun (6) tenglamalar sistemasidan faqat $\alpha_{k,k}$ no'malumni aniqlash kifoya ekanligini bildiradi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasidan foydalanamiz. Tenglamalar sistemasining asosiy determinanti Δ_k ekanligini yuqorida ko'rsatdik, $\alpha_{k,k}$ no'malumga mos keluvchi determinant esa

$$\Delta_{\alpha_{k,k}} = \begin{vmatrix} A(f_1,f_1) & A(f_1,f_2) & \ldots & A(f_1,f_{k-1}) & 0 \\ A(f_2,f_1) & A(f_2,f_2) & \ldots & A(f_2,f_{k-1}) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(f_{k-1},f_1) & A(f_{k-1},f_2) & \ldots & A(f_{k-1},f_{k-1}) & 0 \\ A(f_k,f_1) & A(f_k,f_2) & \ldots & A(f_k,f_{k-1}) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A(f_1,f_1) & A(f_1,f_2) & \ldots & A(f_1,f_{k-1}) \\ A(f_2,f_1) & A(f_2,f_2) & \ldots & A(f_2,f_{k-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(f_{k-1},f_1) & A(f_{k-1},f_2) & \ldots & A(f_{k-1},f_{k-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,k-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,k-1} \end{vmatrix} = \Delta_{k-1}$$

bo'ladi. Bundan

$$\alpha_{k,k} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $A(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$ va $A(e_k, e_k) = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$ ekanligiga ega bo'lamiz.

Kvadratik formani kvadratlar yig'indisiga keltirishning yuqorida keltirib o'tilgan usuli *Yakobi usuli* deb ataladi.

Takidlash joizki, yuqoridagi teoremani isbot qilish jarayonida $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisning aniq ko'rinishi mavjudligi ko'rsatildi. Lekin bundan kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi bazis yagona degan xulosa chiqarish noto'g'ri. Ya'ni, boshqa bir bazisda ham kvadratik forma kanonik ko'rinishga kelishi mumkin. Masalan, boshlang'ich $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bazislarni o'zgartirsak, ularga mos ravishda $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazislar ham o'zgaradi.

Bundan tashqari 26.2-teoremani isbot qilish jarayonida berilgan kvadratik formani kanonik ko'rinishi

$$\frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2$$

bo'lishini aniqladik.

Bu bilan kvadratik forma kanonik ko'rinishining musbat va manfiy koeffitsientlari sonini topish imkoni kelib chiqadi. Masalan, agar Δ_{i-1} va Δ_i larning ishorasi bir xil bo'lsa, u holda ξ_i^2 ifoda musbat koeffitsientga, aks holda esa manfiy koeffitsientga ega bo'ladi. Bu esa kvadratlar oldidagi manfiy koeffitsientlarning soni

$$1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$$

qatordagi ishora almashishlar soniga teng ekanligini anglatadi.

Xususiy holda $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ bo'lsa, u holda kvadratik formaning kanonik ko'rinishi

$$A(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2$$

kabi bo'lib, $\lambda_i > 0$ bo'ladi. Bu esa x ning har qanday qiymatida $A(x,x) \geq 0$ ekanligini, shu bilan birga, faqatgina $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$bo'lgandagina $A(x,x) = 0$ bo'lishini bildiradi.

22.4-teorema. $A(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Teoremaning yetarlilik isboti yuqoridagi mulohazadan kelib chiqadi. Shuning uchun uning zaruriyligini isbot qilish bilan chegaralanamiz.

Aytaylik, $A(x,x)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsin. Dastlab $\Delta_k \neq 0$ ekaniligini ko'rsataylik. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A(f_1,f_1) & A(f_1,f_2) & \ldots & A(f_1,f_k) \\ A(f_2,f_1) & A(f_2,f_2) & \ldots & A(f_2,f_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A(f_k,f_1) & A(f_k,f_2) & \ldots & A(f_k,f_k) \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsin. Bundan determinantning satrlari chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqadi, ya'ni, kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ lar topilib,

$$\mu_1 A(f_1,f_i) + \mu_2 A(f_2,f_i) + \ldots + \mu_k A(f_k,f_i) = 0, 1 \leq i \leq k$$

o'rinli bo'ladi. Yuqoridagi tenglikdan

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k, f_i) = 0, 1 \leq i \leq k$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa

$$A(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu kvadratik formaning musbat aniqlangan ekanligiga zid, chunki $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_k f_k \neq 0$.

Demak, $\Delta_k \neq 0$ bo'lib, k ning ixtiyoriyligidan $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ larning barchasi noldan farqli ekanligi kelib chiqadi. U holda 26.2-teoremaga ko'ra $A(x,x)$ kvadratik formaning kanonik ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$A(x,x) = \frac{1}{\Delta_1}\xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\xi_n^2.$$

Agar biror i uchun $\Delta_i < 0$ bo'lsa, u holda bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik i uchun $A(e_i, e_i) = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} < 0$ bo'ladi. Bu esa $A(x,x)$ kvadratik formaning musbat aniqlangan ekanligiga zid, demak, $\Delta_i > 0$, $1 \leq i \leq n$.

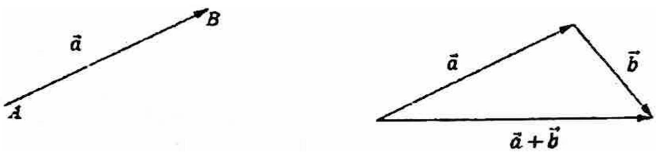
V BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI VA TEKISLIKDA TO‘G‘RI CHIZIQ

23-§. Vektor tushunchasi va vektorlar ustida chiziqli amallar

23.1-ta’rif. Yo‘nalishga ega bo‘lgan kesma vektor deb ataladi.

Biz vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko‘rinishida yoki bitta kichik lotin harfi bilan $\vec{a}$ ko‘rinishida belgilaymiz. Vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko‘rinishida belgilasak A, B nuqtalar mos ravishda vektorning boshi va oxiri joylashgan nuqtalardir, vektorning uzunligi $|\vec{a}|$ ko‘rinishida belgilanadi.

Agar vektorning boshi va oxiri bitta nuqtada bo‘lsa, u nol vektor deyiladi. Nol vektor yo‘nalishga ega emas, uning uzunligi esa nolga teng. Nol vektor $\vec{0}$ ko‘rinishida yoziladi.



1-chizma

23.2-ta’rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan $\vec{b}$ vektor boshini $\vec{a}$ vektor oxiriga qo‘yganda $\vec{a}$ vektor boshidan $\vec{b}$ vektor oxiriga yo‘naltirilgan vektor, berilgan vektorlarning yig‘indisi deyiladi va $\vec{a}+\vec{b}$ ko‘rinishida yoziladi.

Yuqorida keltirilgan vektorlarni qo‘shish qoidasi uchburchak qoidasi deyiladi.

23.3-ta’rif. Berilgan λ haqiqiy son va $\vec{a}$ vektorning ko‘paytmasi shunday vektorki, uning uzunligi $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ga teng, yo‘nalishi: $\lambda > 0$ bo‘lganda vektor yo‘nalishi bilan bir xil, $\lambda < 0$ bo‘lganda esa $\vec{a}$ vektor yo‘nalishiga qarama-qarshi bo‘ladi. Ko‘paytma $\lambda\vec{a}$ ko‘rinishida yoziladi.

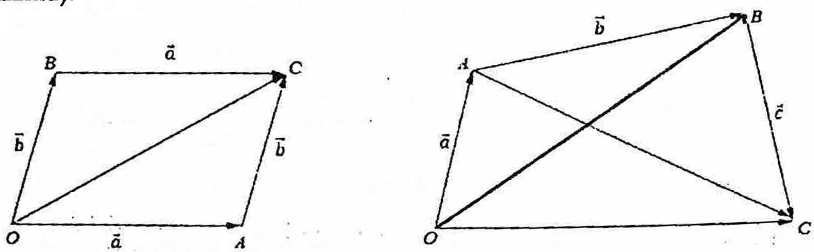
Vektorlar algebrasi, ya‘ni vektorlar ustida chiziqli amallar deganda, vektorlar to‘plamida vektorlarni qo‘shish va skalyar songa ko‘paytirish amallari tushuniladi. Biz V bilan hamma vektorlar to‘plamini belgilaymiz. Bunda vektorlarimiz bir to‘g‘ri chiziqda, bir tekislikda yoki fazoda yotgan bo‘lishi mumkin.

Vektorlarni qo‘shish va skalyar songa ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ uchun $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - kommutativlik;
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ uchun $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ - assosiativlik;
3. $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\exists \vec{b} \in V$: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ bo'ladi, $\vec{b}=-\vec{a}$ - qarama-qarshi vektor mavjudligi;
4. $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$ - birlik element;
5. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ hamda $\forall \lambda \in R$ uchun $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;
6. $\forall \vec{a} \in V$ va $\forall \lambda, \mu \in R$ uchun $\vec{a}(\lambda+\mu)=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
7. $\forall \lambda, \mu \in R$ va $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
8. $\forall \vec{a} \in V$ uchun $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ bo'ladi.

Bu xossalarning ba'zilarini isbotlaymiz, ba'zilarining isbotini esa o'quvchilarga havola qilamiz.

Birinchi xossani isbotlash uchun ixtiyoriy ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning boshini bitta O nuqtaga joylashtiramiz va chizmadagi $OABC$ parallelogrammni hosil qilamiz. Bu parallelogrammdagi OAB uchburchakdan $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ tenglik, OCB uchburchakdan esa $\overrightarrow{OB}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglikni hosil qilamiz (2-chizma).



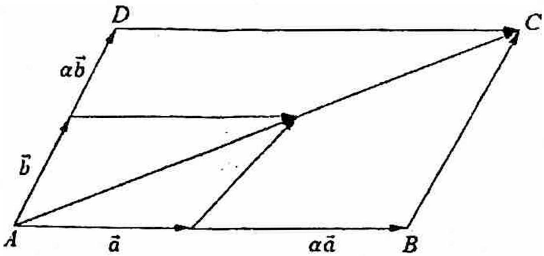
2-chizma

Ikkinchi xossani isbotlash uchun $\vec{a}$ vektorning boshini O nuqtaga, $\vec{b}$ vektorning boshini $\vec{a}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz va $\vec{c}$ vektorning boshini esa $\vec{b}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz. Chizmadan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz (2-chizma)

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{OC} \text{ va } \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OC}.$$

Har bir $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektor uchun $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan, uzunligi esa $\vec{a}$ ning uzunligiga teng vektordir. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ tenglikni hosil qilamiz.

Beshinchi xossani isbotlash uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirib, ular yordamida quyidagi $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz.



3-chizma

Berilgan λ son uchun $\lambda\vec{a}$ va $\lambda\vec{b}$ vektorlarga qurilgan $AB_1C_1D_1$ parallelogramm $ABCD$ parallelogrammga o'xshashdir. Shuning uchun uning diagonali uzunligi $ABCD$ parallelogramm diagonali uzunligidan $|\lambda|$ marta "kattadir". Bundan esa $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ tenglikni hosil qilamiz.

Oltinchi xossani isbotlash uchun $\lambda\mu > 0$ va $\lambda\mu < 0$ hollarni qaraymiz. Birinchi holda λ va μ sonlarining ishorasi bir xil bo'ladi. Shuning uchun ularning ikkalasi ham yoki manfiy yoki musbat bo'ladi. Biz ularning ikkalasi ham manfiy bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $\vec{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ vektorlar $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak ular bir xil yo'nalishga ega. Ularning uzunliklari esa $|\lambda+\mu||\vec{a}|$ ga tengdir. Agar λ va μ sonlari musbat son bo'lsa, yuqoridagi mulohaza takrorlanadi. λ va μ sonlarining ishoralari har xil bo'lsa biz yana ikkita holni qaraymiz:$\lambda+\mu > 0$ va $\lambda+\mu < 0$.

Agar $\lambda+\mu > 0$ bo'lsa, $\vec{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ vektorlar $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishga ega bo'ladi. Bu holda $\mu\vec{a}$ vektorning boshini $\lambda\vec{a}$ vektorning oxiriga joylashtirib, ularning uzunliklari ham tengligini ko'ramiz. Qolgan hollar yuqoridagidek mulohazalar asosida tekshiriladi.

23.4-ta'rif. Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kollinear vektorlar* deyiladi.

Vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ko'rinishda, agar qarama-qarshi yo'nalishga ega bo'lsa $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ko'rinishda belgilaymiz.

23.5-tasdiq. Nol vektordan farqli $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\lambda \in R$ son mavjud bo'lib, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Vektorlar uchun $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ shart bajarilsa, $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinearligini isbotlash sodda bo'lganiligi uchun uni isbotlashni o'quvchilarga havola etamiz. Bu shartninig zarurligini ko'rsatamiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, ularni parallel ko'chirish natijasida bitta to'g'ri chiziqqa joylashtirish mumkin. Shuning uchun ular l to'g'ri chiziqda yotadi va ularning boshi O nuqtada deb hisoblaymiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa, $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ uchun $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ tenglik bajariladi. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar qarama qarshi yo'nalishga ega bo'lsa, $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ uchun $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ tenglik bajariladi.

23.6-ta'rif. Vektor ($\vec{a}$ vektor) yotgan to'g'ri chiziq α tekislikka parallel bo'lsa, $\vec{a}$ vektor α tekislikka parallel deyiladi.

23.7-ta'rif Uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bitta tekislikka parallel bo'lsa, ular komplanar vektorlar deyiladi.

Tabiiyki, agar vektorlar komplanar bo'lsa, ularni parallel ko'chirish natijasida bitta tekisllikka joylashtirish mumkin.

24-§. Chiziqli erkli va chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasi

Bizga $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ vektorlar oilasi va n ta $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sonlar berilgan bo'lsa, $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n}$ vektor $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi deb ataladi. Chiziqli kombinasiyada qatnashayotgan sonlarning birortasi noldan farqli bo'lsa, u notrivial chiziqli kombinasiya deb ataladi.

24.1-ta'rif. Berilgan $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ vektorlar oilasi uchun kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \cdots + \lambda_n\vec{a_n} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli deyiladi.

24.2-izoh. Vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ularning birorta notrivial chiziqli kombinasiyasi nol vektor bo'ladi.

24.3-teorema. Ikkita vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun bu oila vektorlarining kollinear bo'lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Zarurligi. Oilaga tegishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, kamida bittasi noldan farqli λ_1, λ_2 sonlari mavjud bo'lib, $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b} = 0$ tenglik bajariladi. Agar $\lambda_1 \neq 0$ bo'lsa, $\vec{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa birinchi tasdiqqa ko'ra va vektorlarning kollinear ekanligini ko'rsatadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsin. Ularning boshlarini bitta nuqtaga joylashtirsak, ular bitta to'g'ri chiziqda yotadi. Bu to'g'ri chiziqda vektorlar boshi joylashgan nuqtani koordinata boshi sifatida olib, koordinatalar sistemasini kiritamiz. Vektorlarning oxirlarini A va B harflar bilan belgilasak: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ bo'ladi. Vektorlardan bittasi, misol uchun $\vec{a}$ noldan farqli vektor bo'lsin. Demak, $\vec{a} \neq \vec{0}$ va O nuqta AB kesmani biror λ nisbatda bo'ladi: $\frac{BO}{OA} = \lambda$ yoki $BO = \lambda OA$.

Endi $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$ tenglikni ko'rsatamiz. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yo'nalishi bir xil bo'lsa, O nuqta AB kesmaga tegishli emas va $\lambda < 0$. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yo'nalishi qarama-qarshi bo'lsa, $\lambda > 0$ bo'ladi. Shuning uchun $\vec{b}$ va $-\lambda\vec{a}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil. Ularning uzunliklari ham teng:

$$|\vec{b}| = |\overrightarrow{BO}| = |\lambda||\overrightarrow{OA}| = |\lambda||\vec{a}| = |-\lambda\vec{a}|.$$

Demak, bu vektorlar tengdir. Endi $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$ tenglikdan $-\lambda\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli oilani tashkil qiladi.

24.4-teorema. 1. Vektorlar oilasiga nol vektor tegishli bo'lsa, bu oila chiziqli bog'lanishlidir.

2. Vektorlar oilasi birorta chiziqli bog'lanishli vektorlar oilasini o'z ichiga olsa, bu oila ham chiziqli bog'lanishlidir.

Isbot. 1) Berilgan $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ oilada $\vec{a}_i = 0$ bo'lsa, $\lambda_i = 0, \lambda_j = 1$, $i \neq j$, sonlar uchun $\lambda_{i_1}\vec{a}_{i_1} + \lambda_{i_2}\vec{a}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_m}\vec{a}_{i_m} = \vec{0}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

2) Berilgan $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ oilada bir nechta $\vec{a}_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, m; m < n$ vektorlar chiziqli boglanishli oilani tashkil qilsa, ularning birorta notrivial chiziqli kombinasiyasi nol vektor bo'ladi:

$$\lambda_{i_1}\vec{a}_{i_1} + \lambda_{i_2}\vec{a}_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_m}\vec{a}_{i_m} = \vec{0}.$$

Biz agar $\lambda_j = \lambda_{j_k}$, $j = j_k$ va $\lambda_j = 0$, $j \neq j_k$ tengliklar bilan n ta $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sonlarni aniqlasak

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.

24.5-teorema. Uchta vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Oilaga tegishli uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ularning komplanarligini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishlilikning ta'rifiga asosan, kamida bittasi noldan farqli α, β, γ sonlar uchun

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Aniqlik uchun γ noldan farqli bo'lsin, unda avvalgi tenglikdan

$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikda $\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu = -\frac{\beta}{\gamma}$ belgilashlarni kiritib $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning boshi bitta umumiy O nuqtaga joylashtirilgan bo'lsa, oxirgi tenglikdan $\vec{c}$ vektor $\lambda\vec{a}$ va $\mu\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogarmm diagonaliga tengligi kelib chiqadi. Bu esa ular bitta tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlardir.

Va aksincha, $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. Ular chiziqli bog'liqligini isbotlaymiz.

Berilgan uchta vektorlar orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tashlaymiz. Teorema-1 ga asosan, ushbu vektorlar jufti chiziqli bog'liq bo'lar edi va berilagan uchta vektor ham chiziqli bog'liqligi kelib chiqar edi. Shuning uchun $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orasida hech bir jufti kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz (xususan, ular orasida nol vektor ham yo'q). Vektorlarni bitta tekislikka ko'chirib, ularning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz. Keyin $\vec{c}$ vektorning C oxiri orqali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga parallel to'gri chiziqlar o'tkazamiz, $\vec{a}$ vektor yotgan to'g'ri chiziqning $\vec{b}$ vektorga parallel to'gri chiziq bilan kesishish nuqtasini A deb belgilaymiz va $\vec{b}$ vektor yotgan to'g'ri chiziqning $\vec{a}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini B deb belgilaymiz. (Ushbu nuqtalarning mavjudligi, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear emasligidan kelib chiqadi). Vektorlarni qo'shishning parallelogramm qoidasiga ko'ra $\vec{c}$ vektor $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

$\overrightarrow{OA}$ vektor noldan farqli $\vec{a}$ vektorga kollinear (u bilan bir to'g'ri chiziqda yotuvchi), demak, shunday λ haqiqiy son topiladiki, $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Huddi shunga o'xshash, $\overrightarrow{OB} = \mu\vec{b}$ tenglik ham o'rinli. Bu tengliklardan

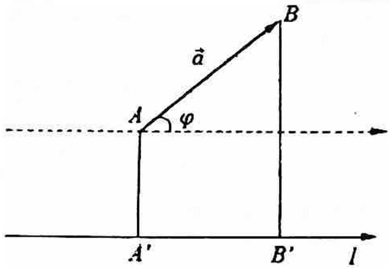
$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi tenglikni $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglikdagi $\lambda, \mu, -1$ sonlarining kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, oxirgi tenglik $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning chiziqli bog'lanishliligini ifodalaydi.

24.6-natija Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladi.

24.7-natija. Ixtiyoriy uchta komplanar bo'lmagan vektorlar orasida ikkita kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shuningdek ular orasida nol vektor ham bo'lmaydi.

Vektorlarning o'qqa proyeksiyasi. Vektorning o'qqa proyeksiyasi vektorning yo'nalishiga qarab musbat, manfiy yoki nolga teng bo'lgan son bo'lib, $\vec{a}$ vektorning l o'qqa proyeksiyasi quyidagi qoida bo'yicha aniqlanadi:



4-chizma

Agar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bo'lsa, A va B nuqtalarning l o'qdagi ortogonal proyeksiyalarini mos ravishda A' va B' bilan belgilaymiz. $A'B'$ kesmaning l o'qdagi kattaligi $\vec{a}$ vektorning l o'qdagi proyeksiyasi deb ataladi va $pr_l\vec{a}$ kabi belgilanadi. Proyeksiya uchun

$$pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda φ berilgan $\vec{a}$ vektor va l o'q orasidagi burchakdir.

Proyeksiyaning xossalari:

1. $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}$.
2. $pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_l\vec{a}$.

Ikkinchi xossani isbotlaymiz. $pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_l\vec{a}$ tenglikni isbotlash uchun quyidagi hollarni qaraymiz: a) Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ tenglik o'rinli bo'ladi va natijada $A' = B'$ munosabatdan $pr_l(\lambda\vec{a}) = 0$ va $pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_l\vec{a} = 0$ tengliklar kelib chiqadi.

b) Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ munosabatdan tenglik kelib chiqadi; bu yerda φ va ψ mos ravishda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning l o'q bilan hosil qilgan burchaklaridir. Bu holda $|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$ va demak $pr_l(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}|\cos\psi$.

c) Agar $\lambda < 0$ bo'lsa, $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar uchun $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ munosabat o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $\quad = \varphi + \pi$ tenglikdan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$pr_l(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}|\cos(\varphi + \pi) = -\lambda|\vec{a}|\cos(\varphi + \pi) = \lambda pr_l(\vec{a}).$$

25-§. Bazis va vektorning koordinatalari

25.1-ta'rif. Berilgan $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ vektorlar oilasi chiziqli erkli bo'lib, ixtiyoriy vektorni ularning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu oila bazis deyiladi.

Quyidagi muhim faktlar o'rinlidir:

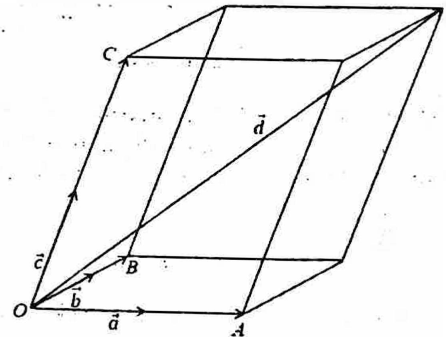
1-xossa. Tekislikda har qanday ikkita nokollinear vektorlar bazis tashkil qiladi.

2-xossa. Fazoda har qanday uchta nokomplanar vektorlar bazis tashkil qiladi.

Bu xossalarning birinchisi 1-teoremaning bevosita natijasidir.

Ikkinchi xossani isbotlaymiz.

Bizga uchta nokomplanar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ular chiziqli erkli oilani tashkil qiladi. Endi ixtiyoriy $\vec{d}$ vektorni olib, uni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalash mumkinligini ko'rsatamiz.



5-chizma

Buning uchun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz va $\vec{d}$ vektorning oxiridan $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar tekisligiga, $\vec{a}, \vec{c}$ vektorlar tekisligiga va $\vec{c}, \vec{b}$ vektorlar tekisligiga parallel tekisliklar o'tkazamiz. O'tkazilgan tekisliklarning $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar yotgan to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda A, B, C harflar bilan belgilaymiz. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

tenglikni olamiz. Bu yerda $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ vektorlar mos ravishda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga kollinear bo'lganligi uchun shunday λ, μ, ν sonlar mavjudki,

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}, \overrightarrow{OB} = \mu\vec{b}, \overrightarrow{OC} = \nu\vec{c}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarni hisobga olib

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$$

tenglikni olamiz.

25.2-ta'rif. Bizga $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ bazis berilib, $\vec{a}$ vektor uchun

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlar $\vec{a}$ vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari deyiladi.

6-xossa. Har bir vektor berilgan bazisda o'zining koordinatalari bilan yagona ravishda aniqlanadi.

Isbot. Berilgan $\vec{a}$ vektor uchun ikkita

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \dots + a_n\vec{e_n},$$

$$\vec{a} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + \dots + b_n\vec{e_n},$$

tengliklar o'rinli bo'lsa ularning birini ikkinchisidan hadma-had ayirib

$$\vec{0} = (a_1 - b_1)\vec{e_1} + (a_2 - b_2)\vec{e_2} + \dots + (a_n - b_n)\vec{e_n},$$

tenglikni hosil qilamiz. Bazisni tashkil qiluvchi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ vektorlar chiziqli erkli bo'lganligi uchun

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots, a_n - b_n = 0,$$

ya'ni

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

munosabat hosil bo'ladi.

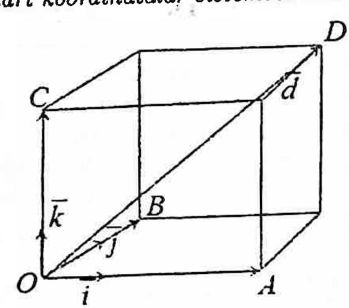
Affin koordinatalar sistemasi. Fazoda yoki tekislikda affin koordinatalar sistemasini kiritish uchun birorta bazis va bitta nuqta tanlanadi. Agar $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bazis va O nuqta berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{OP}$ vektorning $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bazisdagi koordinatalari P nuqtaning *affin koordinatalari* deyiladi.

25.3-ta'rif. Berilgan $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ bazis uchun

$$(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

munosabat bajarilsa, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ bazis *ortonormal bazis* deyiladi.

25.4-ta'rif. Ortonormal bazis yordamida berilgan koordinatalar sistemasi *to'g'ri burchakli* yoki *dekart koordinatalar sistemasi* deb ataladi.



6-chizma

25.5-teorema. Dekart koordinatalar sistemasida vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari, uning koordinatalar o'qlariga tushirilgan proeksiyalari bilan ustma-ust tushadi.

Isbot. Bizga $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortonormal bazis berilgan bo'lsa, ularning boshlarini O nuqtaga joylashtirib, $OXYZ$ koordintalar sistemasini kiritaylik. Agar $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorning boshini koordinata boshiga joylashtirib, uning oxirini M bilan belgilaymiz. Agar M nuqtaning koordinata o'qlariga ortogonal proyeksiyalarini A, B, C harflari bilan belgilasak,

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan OA, OB, OC kesmalarning kattaliklari mos ravishda x, y, z sonlariga teng bo'lgani uchun

$$x = pr_{Ox}\vec{a}, y = pr_{Oy}\vec{a}, z = pr_{Oz}\vec{a}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Yuqorida keltirilgan vektorning o'qqa proyeksiyasining birinchi xossasini shu teoremaning natijasi sifatida isbotlaymiz.

25.6-natija. $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}$.

Isbot. Bizga l o'q berilgan bo'lsin: shunday $OXYZ$ koordinatalar sistemasi kiritamizki, OX koordinata o'qi l bilan ustma-ust tushsin. Agar $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$, $\vec{a} + \vec{b} = x_{a+b}\vec{i} + y_{a+b}\vec{j} + z_{a+b}\vec{k}$ bo'lsa, yuqoridagi teoremaga ko'ra $pr_l\vec{a} = x_a$, $pr_l\vec{b} = x_b$ va $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = x_{a+b}$ tengliklarni hosil qilamiz. Lekin vektorlarni qo'shganda ularning koordinatalari mos ravishda qo'shilgani uchun $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = x_a + x_b = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}$ munosabatni olamiz.

26-§. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi, uning fizik ma'nosi, hisoblash formulalari

26.1-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning uzunliklarini ular orasidagi burchakning kosinusiga ko'paytmasiga aytiladi va $(\vec{a}, \vec{b})$ yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi yoziladi. Demak ta'rifga ko'ra $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

Ikkita vektorning skalyar ko'paytmasini vektorning o'qdagi proyeksiyasi xossasidan foydalanib quyidagicha ta'riflash mumkin: ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi deb, ulardan birining uzunligini ikkinchisining birinchisi yo'nalishidagi o'qqa proyeksiyasiga ko'paytirilganiga aytiladi.

Skalyar ko'paytma mexanikada paydo bo'lgan bo'lib, quyidagi fizik ma'noga ega: A nuqtaga qo'yilgan $\vec{f}$ kuch jismni A nuqtadan B nuqtaga

$\vec{s}$ vektor bo'yicha ko'chirsa, $\vec{f}$ kuchning bajargan ishi $\vec{f}$ va $\vec{s}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi: $\omega = \vec{f}\vec{s}$.

Skalyar ko'paytmaning xossalari:

1-xossa. Ikkita vektor o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir: $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

2-xossa. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

3-xossa. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{b}, \vec{a}), \lambda \in R$.

4-xossa. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$.

5-xossa. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

4-xossaning isboti proyeksiyaning 2-xossasidan kelib chiqadi:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a} + \vec{b}||\vec{c}| \cos\varphi = |\vec{c}|pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|pr_l\vec{a} + |\vec{c}|pr_l\vec{b} =$$
$$|\vec{a}|\vec{c}| \cos\varphi + |\vec{b}||\vec{c}| \cos\varphi = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$$

Dekart koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasi

26.2-teorema. Agar $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar o'zining dekart koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ularning skalyar ko'paytmasi mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ bo'ladi.

Isbot. Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zining dekart koordinatalari bilan berilgan bo'lgani uchun $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ bo'ladi. Skalyar ko'paytmaning xossalaridan foydalansak,

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2(\vec{i}, \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}, \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}, \vec{k}) + y_1x_2(\vec{j}, \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j}, \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}, \vec{k}) + z_1x_2(\vec{k}, \vec{i}) + z_1y_2(\vec{k}, \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}, \vec{k})$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikda

$(\vec{i}, \vec{i}) = 1, (\vec{i}, \vec{j}) = 0, (\vec{i}, \vec{k}) = 0, (\vec{j}, \vec{j}) = 1, (\vec{j}, \vec{k}) = 0, (\vec{k}, \vec{k}) = 1$

ekanligini hisobga olsak, $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

26.3-natija. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar yordamida yasalgan parallelogrammning yuzi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$S = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}.$$

Haqiqatan ham,

$$S = |\vec{a}||\vec{b}|sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - cos^2\varphi} = |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1 - \left(\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2} =$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}.$$

Ushbu natijadan quyidagilarga ega bo'lamiz:

1) Agar parallelogramm tekislikda $\vec{a}(a_1, a_2)$ va $\vec{b}(b_1, b_2)$ vektorlar yordamida yasalgan bo'lsa, uning yuzi

$$S = mod\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$S = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - a_1^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - a_2^2b_2^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2} = \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} =$$

$$= |a_1b_2 - a_2b_1| = mod\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2) Uchlari tekislikdagi $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$S = \frac{1}{2}mod\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Hosil bo'ladigan uchburchakning yuzi, $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ va $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$ vektorlar yordamida yasalgan parallelogramm yuzining yarmiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$S = \frac{1}{2}mod\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Endi agar

$$S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

ekanligini hisobga olsak, bundan

$$S = \frac{1}{2}mod\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

tenglik kelib chiqadi.

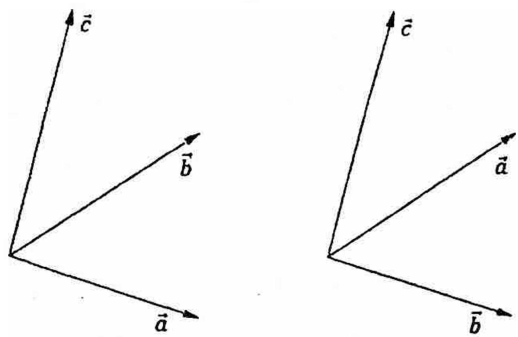
27-§. Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmalari

27.1-ta'rif. Tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchlikda $\vec{c}$ vektor oxiridan $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar tekisligiga qaraganimizda $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ga qisqa burilish yo'nalishi soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, bu uchlik o'ng uchlik deb ataladi. Agar bu yo'nalish soat mili yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchlik chap uchlik deyiladi.

Bizga $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o'ng (va $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ chap) uchlik berilgan bo'lsin.

27.2-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ va vektorlarning vektor ko'paytmasi deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor $[\vec{a}, \vec{b}]$ kabi belgilanadi va u vektor quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$, $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$;
2. $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}|Sin\varphi$, bu yerda φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak;
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ - o'ng uchlik.



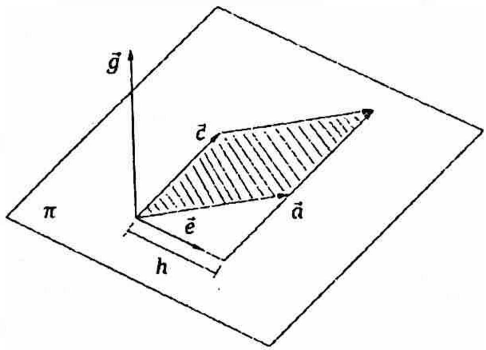
7-chizma

Vektor ko'paytmaning xossalari:

1. Ikkita vektor kollinear bo'lishi uchun ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.
2. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
3. $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}] = -[\lambda\vec{b}, \vec{a}]$, $\lambda \in R$.
4. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.
5. $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.

27.3-teorema. Berilgan α tekislikda $\vec{c}$ vektor va unga perpendikulyar birlik $\vec{e}$ vektor berilgan bo'lsin. Agar $\vec{g}$ vektor α tekislikka perpendikulyar birlik vektor va $\vec{e}, \vec{c}, \vec{g}$ o'ng uchlik bo'lsa, α tekislikda yotuvchi har qanday $\vec{a}$ vektor uchun $[\vec{a}, \vec{c}] = pr_{\vec{e}}\vec{a} \cdot |\vec{c}| \cdot \vec{g}$ tenglik o'rinlidir.

Isbot. Vektorlar tengligini ko'rsatish uchun ularning yo'nalishlari bir xil va uzunliklari tengligini ko'rsatamiz. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko‘ra uninig uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga tengdir: $|[\vec{a},\vec{c}]| = S$. Tenglikning chap tomonidagi vektorning uzunligi esa $|pr_{\vec{e}}\vec{a}|\cdot|\vec{c}|$ ga tengdir. Agar parallelogrammning asosi sifatida $\vec{c}$ vektorni olsak, uning yuzasi $|\vec{c}|\cdot h$ ga tengdir. Bu yerda h balandlik bo‘lib, $|pr_{\vec{e}}\vec{a}| = h$ tenglik o‘rinlidir. Demak vektorlarning uzunligi tengdir. Endi ularning yo‘nalishi bir xil ekanligini ko‘rsatamiz. Agar $\vec{a},\vec{c},\vec{g}$ o‘ng uchlik bo‘lsa, $\vec{g}$ va $[\vec{a},\vec{c}]$ vektorlar bir xil yo‘nalishga ega. Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlar $\vec{c}$ vektorning bir tomonida joylashgan va $pr_{\vec{e}}\vec{a} > 0$ bo‘ladi. Agar $\vec{a},\vec{c},\vec{g}$ chap uchlik bo‘lsa, $pr_{\vec{e}}\vec{a} < 0$ va $pr_{\vec{e}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}$ vektor $\vec{g}$ vektorga qarama-qarshi yo‘nalgandir. Demak, $pr_{\vec{e}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}$ vektor yo‘nalishi $[\vec{a},\vec{c}]$ vektor yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi. Natijada $[\vec{a},\vec{c}] = pr_{\vec{e}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}$ tenglikni hosil qildik.



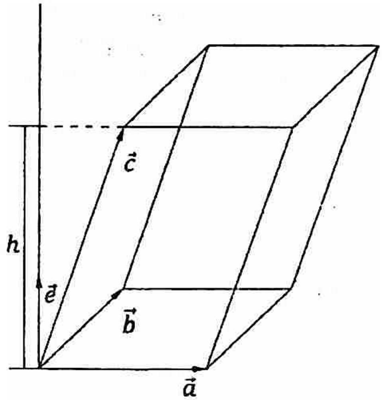
8-chizma

Vektor ko‘paytma ham mexanikada paydo bo‘lgan bo‘lib, quyidagi ma‘noga ega: agar $\vec{f}$ vektor O nuqtaga qo‘yilgan kuchni ifodalasa, $\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtada oxiri esa O nuqtada bo‘lsa, u holda $\left[\vec{a},\vec{f}\right]$ vektor $\vec{f}$ kuchning A nuqtaga nisbatan momentini aniqlaydi.

27.4-ta’rif. Uchta $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi deb, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini $\vec{c}$ vektorga skalyar ko‘paytirilganiga aytiladi va quyidagi ko‘rinishda belgilanadi: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

27.5-teorema. Berilgan nokomplanar (chiziqli erkli) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar o‘ng uchlikni tashkil qilsa, ularning aralash ko‘paytmasi vektorlarning boshi bitta nuqtaga keltirilib qurilgan parallelipipedning hajmiga, aks holda esa hajmning manfiy ishora bilan olinganiga tengdir.

Isbot. Biz $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelipipedning hajmini V bilan belgilaymiz. Agar S bilan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzasini belgilasak, $[\vec{a},\vec{b}] = S\vec{e}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu erda $\vec{e}$ vektor $[\vec{a},\vec{b}]$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan birlik vektordir. Skalyar ko‘paytmani proyeksiya yordamida yozsak, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = S\cdot|\vec{e}|\cdot pr_{\vec{e}}\vec{c}$ tenglikni hosil qilamiz.



9-chizma

Bu yerda $pr_{\vec{e}}\vec{c}$ absolyut qiymati bo'yicha $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan va asosi $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammdan iborat parallelipipedning balandligiga tengdir. Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ o'ng uchlikni tashkil qilsa, $pr_{\vec{e}}\vec{c} = h$, agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ chap uchlikni tashkil qilsa, $pr_{\vec{e}}\vec{c} = -h$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda h qaralayotgan parallelipipedning balandligidir. Shuning uchun $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = Sh$ formulani hisobga olsak biz bevosita teorema isbotini olamiz.

Endi biz vektor ko'paytma xossalarini isbotlaymiz.

2-xossa isboti $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ va $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{b}, \vec{a}]$ uchliklarning oriyentatsiyalari har xil ekanligidan kelib chiqadi: birinchi uchlik o'ng oriyentatsiyaga, ikkinchi uchlik chap oriyentatsiyaga egadir.

3-xossani isbotlash uchun ikkita holni ko'ramiz $\lambda > 0$ va $\lambda < 0$.

Birinchi holda $\vec{a}$ va $\lambda\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega va shuning uchun $\vec{a}, \vec{b}, [\lambda\vec{a}, \vec{b}]$ va $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ vektorlar bir xil oriyentatsiyaga ega. Demak $[\lambda\vec{a}, \vec{b}]$ va $\lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorlar uzunliklari teng va bir xil yo'nalishga ega.

Ikkinchi holda $\vec{a}$ va $\lambda\vec{a}$ vektorlar yo'nalishlari qarama-qarshi, $\vec{a}, \vec{b}, [\lambda\vec{a}, \vec{b}]$ va $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$ vektorlar uchliklari har xil oriyentatsiyaga ega bo'ladi. Bundan esa $[\lambda\vec{a}, \vec{b}]$ va $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorlar qarama-qarshi yo'nalishga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, $[\lambda\vec{a}, \vec{b}]$ va $\lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega va uzunliklari tengdir.

4-xossaning isbotini keltiramiz.

a) $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ komplanar vektorlar, $\vec{e}, \vec{c}, \vec{g}$ - o'ng uchlik bo'lib, $\vec{e}, \vec{g}$ vektorlar 27.3.-teorema shartlarini qanoatlantiruvchi vektorlar bo'lsa, ikkita vektor ko'paytmani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin: $[\vec{a}, \vec{c}] = pr_{\vec{e}}\vec{a} \cdot |\vec{c}| \cdot \vec{g}$ va $[\vec{b}, \vec{c}] = pr_{\vec{e}}\vec{b} \cdot |\vec{c}| \cdot \vec{g}$. Endi proyeksiya xossasidan foydalanib, $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = pr_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot |\vec{c}| \cdot \vec{g} = pr_{\vec{e}}\vec{a} \cdot |\vec{c}| \cdot \vec{g} + pr_{\vec{e}}\vec{b} \cdot |\vec{c}| \cdot \vec{g}$ tenglikni hosil qilamiz.

b) $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lmagan hol: Bu holda $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{a}, \vec{c}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$ vektorlarning barchasi $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar bo‘lganligi uchun ular komplanar oilani tashkil etadi. Demak ular chiziqli bog‘lanishli bo‘ladi, ya‘ni kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sonlari mavjud bo‘lib,

$$\lambda_1[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}] + \lambda_2[\vec{a}, \vec{c}] + \lambda_3[\vec{b}, \vec{c}] = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikdan

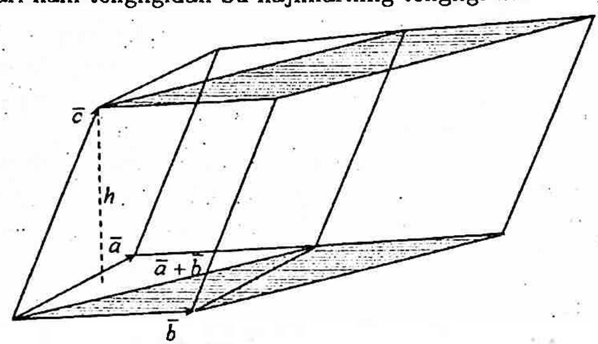
$$\lambda_1[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}] = -\lambda_2[\vec{a}, \vec{c}] - \lambda_3[\vec{b}, \vec{c}]$$

tenglikni hosil qilib, uning ikkala tomonini $\vec{b}$ vektorga skalyar ko‘paytiramiz va

$$\lambda_1(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{b} = -\lambda_2\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi aralash ko‘paytma haqidagi teoremaga ko‘ra $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{b}$ va $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ aralash ko‘paytmalarning absolyut qiymatlari mos ravishda $V_{(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{b}}$ va $V_{\vec{a}\vec{c}\vec{b}}$ hajmlarga tengdir.

Bu parallelipipedlarning asoslari sifatida mos ravishda $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}$ va $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammlarni olsak, ularning balandligi tengligini ko‘ramiz. Shuning uchun $V_{\vec{a}\vec{c}\vec{b}} = S_1 h$ va $V_{(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{b}} = S_2 h$ tengliklardan va ularning asoslari yuzalari ham tengligidan bu hajmlarning tengligi kelib chiqadi.



10-chizma

Endi $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{b}$ va $\vec{a}\vec{c}\vec{b}$ aralash ko‘paytmalar bir xil ishoralarga ega bo‘lishi, $\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}$ uchlik oriyentatsiyasi $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ uchlik oriyentatsiyasi bilan ustma-ust tushishidan kelib chiqadi. Demak, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{b}$. Bundan esa $\lambda_1 = -\lambda_2$ munosobatni hosil qilamiz. Huddi shunday usul bilan $\lambda_1 = -\lambda_3$ tenglikni isbotlaymiz. Demak, $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ tenglik o‘rinlidir.

5-xossaning isboti $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo‘lganda ular orasidagi burchakning sinusi nolga tengligidan kelib chiqadi.

Vektor va aralash ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalash

O'ng uchlikni tashkil qiluvchi ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bazis berilgan bo'lsa, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarni

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\ \vec{b} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \\ \vec{c} &= c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

ko'rinishda yozib, ularning vektor va aralash ko'paytmalarini hisoblaymiz.

Skalyar ko'paytma uchun

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

tenglik o'rinli bo'lishini bilamiz.

Vektor ko'paytmani hisoblashda $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3$, $[\vec{e}_3, \vec{e}_1] = \vec{e}_2$, $[\vec{e}_2, \vec{e}_3] = \vec{e}_1$ munosabatlarni hisobga olib

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3$$

tenglikni hosil qilamiz.

Qulaylik uchun vektor ko'paytmani koordinatalari orqali

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \text{yoki } [\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \vec{a}_3 & \vec{a}_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

ko'rinishda yozish qabul qilingan.

Bundan foydalanib aralash ko'paytma uchun

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

formulani hosil qilamiz.

28-§. Tekislikda to'g'ri chiziq va uning turli tenglamalari

Affin koordinatalar sistemasida ixtiyoriy to'g'ri chiziq uchun shunday birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

tenglama mavjudki, to'g'ri chiziqda yotgan har bir nuqtaning (x, y) koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiradi (A, B sonlari bir vaqtda nolga teng emas); shu bilan birga (x, y) o'rniga (1) tenglamada qaralayotgan to'g'ri chiziqdagi istalgan nuqta koordinatalarini qoyganda bu tenglama ayniyatga aylanadi.

Aksincha: tekislikdagi ixtiyoriy affin koordinatalar sistemasida

$$A^2 + B^2 > 0$$

sharti bilan berilgan (1) ko'rinishdagi har qanday tenglama uchun shunday to'g'ri chiziq mavjudki, bu to'g'ri chiziqda yotgan nuqtalarning koordinatalari bu tenglamani ayniyatga aylantiradi.

(1) ko'rinishdagi tenglama to'g'ri chiziqning *umumiy tenglamasi* deyiladi.

Agar to'g'ri chiziq o'zining umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqqa nisbatan bir tomonda joylashgan nuqtalar uchun

$$Ax + By + C > 0 \tag{2}$$

va unga nisbatan ikkinchi tomonda yotgan nuqtalar uchun

$$Ax + By + C < 0 \tag{3}$$

tengsizliklar bajariladi.

Tekislikning tegishli qismlari musbat va manfiy yarim tekisliklar deb ataladi. Tenglamaning chap tomonini manfiy songa ko'paytirish natijasida musbat yarim tekislik manfiy yarim tekislikka almashadi va aksincha.

Ustma-ust tushmaydigan ikkita $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasi affin koordinatalar sistemasida quyidagi ko'rinishlardan biriga ega bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

yoki

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

$x_2 - x_1 \neq 0$ va $y_2 - y_1 \neq 0$ shartlar bajarilganda:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6}$$

yoki $x_2 - x_1 \neq 0$ shart bajarilganda:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{7}$$

To'g'ri chiziqda yotgan yoki unga parallel bo'lgan noldan farqli ixtiyoriy vektor to'g'ri chiziqning *yo'naltiruvchi vektori* deyiladi.

OY o'qiga parallel bo'lmagan yoki OY o'qi bilan ustma-ust tushmaydigan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb $k = \frac{m}{l}$ songa aytiladi. Ikkita

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

formuladan topiladi.

Agar koordinatalar sistemasi to'g'ri burchakli bo'lsa, k soni to'g'ri chiziqning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak tangensiga teng.

Berilgan (x_1, y_1) nuqtadan o'tib, burchak koeffitsiyenti k ga teng va OY o'qiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziq tenglamasi affin koordinatalar sistemasida

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{8}$$

ko'rinishda bo'ladi.

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti k bo'lib, u OY o'qini $(0, b)$ nuqtada kesib o'tsa, to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y = kx + b. \tag{9}$$

To'g'ri chiziq koordinita o'qlarini $(a, 0)$ va $(0, b)$ nuqtalarda kesib o'tsa, uning tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{10}$$

ko'rinishda yoziladi.

To'g'ri chiziq (x_1, y_1) nuqtadan o'tib, l, m vektorga parallel bo'lsa, u holda uning tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ l & m \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

yoki

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \tag{12}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ixtiyoriy (x_1, y_1) nuqta va noldan farqli $\vec{a} = \{l, m\}$ vektor berilgan bo'lsa, bu nuqtadan o'tib $\vec{a}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \tag{13}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda t son shu to'g'ri chiziqda yotgan M nuqtaning koordinatasi bo'lib, bunda (x_1, y_1) nuqta koordinatalar boshi va $\{l, m\}$ vektor esa masshtab vektor sifatida olingan.

Umumiy tenglamalar bilan berilgan ikki

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlarning kesishishi, parallel bo'lishi va ustma-ust tushishi uchun quyidagi jadvalda berilgan shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Vaziyati	Shartlar
Kesishadi	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$
Parallel bo'ladi	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}^2 > 0$
Ustma-ust tushadi	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$

Ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushishining zarur va yetarli shartini quyidagicha ham ifodalash mumkin:

$$A_1x + B_1y + C_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2),$$

bu yerda $\lambda \neq 0$ haqiqiy son (bu tenglik x, y ga nisbatan ayniyatdir).

Umumiy tenglamalar bilan berilgan

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasining koordinatalari Kramer formulalaridan hisoblanadi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \tag{14}$$

Affin sistemasida umumiy tenglamalari bilan berilgan

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlar kesishsa,

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \ (\alpha^2 + \beta^2 > 0)$$

tenglamada x, y oldidagi koeffitsiyentlar baravariga nolga aylanmaydi, va bu tenglama to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlaydi. Aksincha, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasidan o'tgan har qanday to'g'ri chiziq

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{15}$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Agar $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, (15) tenglama berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlaydi, bunda $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq -\frac{\alpha}{\beta}$ bajarilishi kerak va aksincha (bunda α, β sonlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq (15) tenglama bilan ifodalanadi.

To'g'ri chiziqlarning *xos dastasi* deb bir tekislikda yotgan va bitta nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqlar to'plamiga aytiladi. Umumiy nuqta *dasta markazi* deyiladi. O'zaro parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar to'plami ham parallel to'g'ri chiziqlar dastasi yoki *xos bo'lmagan dasta* deyiladi.

Agar affin koordinatalar sistemasiga nisbatan uchta to'g'ri chiziq tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ A_3x + B_3y + C_3 = 0 \qquad (16)$$

berilgan bo'lsa,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

shart to'g'ri chiziqlarning biror dastaga tegishli bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir.

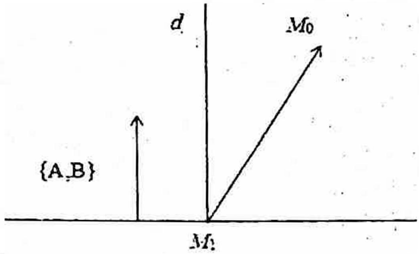
Ixtiyoriy (x_1, y_1) nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (18)$$

bu yerda A, B koeffitsiyentlar ixtiyoriy haiqiqy qiymatlarni qabul qiladi va bir vaqtda nolga aylanmaydi.

Umumiy dekart koordinatalar sistemasida koordinatalari $\{-B, A\}$ bo'lgan vektor hamma vaqt $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida $\{A, B\}$ vektor $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi. Agar $\{A, B\}$ vektorning boshi to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida joylashtirilsa, bu vektorning oxiri $Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan musbat yoki manfiy yarim tekislikda yotadi.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Tekislikda berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan umumiy $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani topamiz. Bu masofani boshi to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqtada, oxiri esa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lgan vektorning $\vec{n} = \{A, B\}$ normal vektor yo'nalishidagi o'qqa proyeksiyasining absolyut qiymati sifatida qaraymiz.



11-chizma

Demak, $d = |pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}|$. Vektorlarning skalyar ko'paytmasining proyeksiya tilidagi ta'rifidan foydalansak, $pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0} = \frac{(\vec{n},\overrightarrow{M_1M_0})}{|\vec{n}|}$ tenglikka ega bo'lamiz. Buni oldingi tenglikka qo'ysak, $d = \frac{|(\vec{n},\overrightarrow{M_1M_0})|}{|\vec{n}|}$ bo'ladi. Bu yerdan koordinatalardagi ifodalarga o'tsak va $C = -Ax_1 - By_1$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

formulani hosil qilamiz.

Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani boshqacha ham aniqlash mumkin.

Bizga L to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, koordinata boshidan o'tuvchi va L to'g'ri chiziqga perpendikulyar to'g'ri chiziqni L_1 bilan, ularning kesishish nuqtasini P_0 bilan belgilaymiz. Agar $\vec{n}$ bilan L_1 to'g'ri chiziqning birlik yo'naltiruvchi vektorini belgilasak, u

$$\vec{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}$$

koordinatalarga ega bo'ladi. Bu yerda θ - L_1 to'g'ri chiziq bilan Ox o'qi orasidagi burchak.

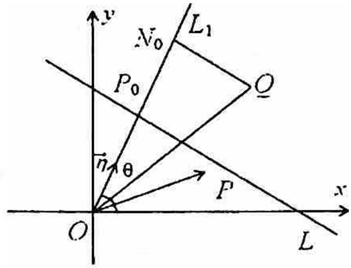
Tekislikning $P(x,y)$ nuqtasi L to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun $\overrightarrow{OP}$ vektorning L_1 to'g'ri chiziqqa proyektsiyasi $\overrightarrow{OP_0}$ vektorning uzunligiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar $\overrightarrow{OP_0}$ vektorning uzunligini p bilan belgilasak,

$$pr_{\vec{n}}\overrightarrow{OP} = p$$

tenglikni hosil qilamiz. Proyektsiyani skalyar ko'paytma orqali ifodalash natijasida biz

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning *normal tenglamasi* deyiladi.



12-chizma

Agar $Q(x,y)$ nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, N_0 bilan $Q(x,y)$ nuqtaning L_1 to'g'ri chiziqdagi proyektsiyasini belgilasak, P_0N_0 kesma kattaligi uchun quyidagi

$$P_0N_0 = ON_0 - OP_0 = ON_0 - p$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $ON_0 = pr_{\vec{n}}\overrightarrow{OP}$ bo'lganligi uchun

$$P_0N_0 = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

formula P_0N_0 kattalikni hisoblash imkonini beradi. Bu kattalik $Q(x,y)$ nuqtaning L to'g'ri chiziqdan *chetlashishi* deyiladi.

Chetlashishning absolyut qiymati $Q(x,y)$ nuqtadan L to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga tengdir. Demak nuqtadan to'g'ri qiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash uchun to'g'ri chiziq tenglamasini normal ko'rinishga keltirish keyin esa nuqta koordinatalarini normal tenglamaning chap tomonidagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'yish yetarlidir.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltirish uchun uning ikkala tomonini

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ifodaga ko'paytirish zarur bo'ladi. Bu yerda $tC = -p$ tenglik bajarilishi kerak. Shuning uchun t ifodaning ishorasi C ning ishorasiga qarama-qarshi bo'lishi lozimdir.

VI BOB. FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIK

29-§. Tekislik va uning turli tenglamalari

Har qanday tekislik umumiy dekart sistemasida (x, y, z) koordinatalariga nisbatan birinchi darajali, ya‘ni ushbu

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ko‘rinishli tenglama bilan ifodalanadi; bu tenglamadagi A, B, C koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng emas deb faraz qilinadi. Aksincha, shu ko‘rinishdagi har qanday tenglama tekislikni aniqlaydi. Bu tenglama tekislikning *umumiy tenglamasi* deyiladi. Tekislikka perpendikulyar bo‘lgan $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektor esa uning *normal vektori* deb ataladi. Tekislik tenglamasidagi A, B, C koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng bo‘lmaganligi uchun tekislikka perpendikulyar har qanday noldan farqli vektorni normal vektor deb hisoblash mumkin.

Agar tekislik o‘zining umumiy $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, tekislikning bir tarafida yotgan barcha nuqtalar koordinatalari uchun

$$Ax + By + Cz + D > 0$$

va ikkinchi tarafda yotgan nuqtalar uchun esa:

$$Ax + By + Cz + D < 0$$

tengsizlik o‘rinli.

Mos ravishda yarim fazolarni "musbat" va "manfiy" yarim fazolar deb ataymiz. Tekislikning umumiy tenglamasining chap tomonini manfiy songa ko‘paytirganda musbat yarim fazo manfiy yarim fazoga aylanadi va aksincha.

Agar umumiy tenglamadagi barcha A, B, C, D koeffitsiyentlar noldan farqli bo‘lsa, u tekislikning to‘liq umumiy tenglamasi deyiladi, uni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ko‘rinishda yozish mumkin va bu tenglama tekislikning "kesmalarga" nisbatan tenglamasi deyiladi, bu yerda

$$a = -\tfrac{D}{A},\ b = -\tfrac{D}{B},\ c = -\tfrac{D}{C}.$$

Umumiy tenglamada koeffitsiyentlardan ayrimlari nolga teng bo'lgan hollarda tekislikning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashuvini, ya'ni to'liq bo'lmagan tenglamalarni ko'rib chiqamiz.

1. Agar $D = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + By + Cz = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, koordinatalar boshining koordinatalari tenglamani qanoatlantiradi. Demak, bu holda tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.

2. Agar $C = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + By + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda normal vektor $\vec{n} = \{A, B, 0\}$ koordinatalarga ega bo'lib, Oz o'qiga perpendikulyardir. Demak, tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi.

3. Agar $B = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + Cz + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda normal vektor $\vec{n} = \{A, 0, C\}$ koordinatalarga ega bo'lib, Oy o'qiga perpendikulyardir. Demak, tekislik Oy o'qiga parallel bo'ladi.

4. Agar $A = 0$ bo'lsa, tenglama $By + Cz + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda normal vektor $\vec{n} = \{0, B, C\}$ koordinatalarga ega bo'lib, Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Demak, tekislik Ox o'qiga parallel bo'ladi.

5. Agar $D = C = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + By = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda yuqoridagilarga ko'ra tekislik koordinata boshidan o'tadi va Oz o'qiga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oz o'qi orqali o'tadi.

6. Agar $D = B = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + Cz = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik koordinata boshidan o'tadi va Oy o'qiga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oy o'qi orqali o'tadi.

7. Agar $D = A = 0$ bo'lsa, tenglama $By + Cz = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik koordinata boshidan o'tadi va Ox o'qiga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Ox o'qi orqali o'tadi.

8. Agar $C = B = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda yuqoridagilarga ko'ra tekislik Oy va Oz o'qlariga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oyz koordinata tekisligiga parallel bo'ladi.

9. Agar $C = A = 0$ bo'lsa, tenglama $By + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik Ox va Oz o'qlariga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oxz koordinata tekisligiga parallel bo'ladi.

10. Agar $B = A = 0$ bo'lsa, tenglama $Cz + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik Ox va Oy o'qlariga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oxy koordinata tekisligiga parallel bo'ladi.

11. Agar $D = C = B = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax = 0$ yoki $x = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik koordinatalar boshidan o'tadi va Oyz koordinata tekisligiga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oyz koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

12. Agar $D = C = A = 0$ bo'lsa, tenglama $By = 0$ yoki $y = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik koordinatalar boshidan o'tadi va Oxz koordinata

tekisligiga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oxz koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

13. Agar $D = B = A = 0$ bo'lsa, tenglama $Cz = 0$ yoki $z = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu holda tekislik koordinatalar boshidan o'tadi va Oxy koordinata tekisligiga parallel bo'ladi. Demak, tekislik Oxy koordinata tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

Maktab aksiomatikasidan ma'lumki, bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan yagona tekislik o'tadi. Bizga nuqtalar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Shu nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozaylik. Qaralayotgan tekislikka tegishli bo'lgan ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olinganda ham $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar shu tekislikka komplanar bo'ladi. Demak ularning aralash ko'paytmasi no'lga teng: $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Bu aralash ko'paytmani koordinatalarda ifodalasak,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan uchta nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasidir.

Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tadigan va berilgan ikkita nokollinear $\vec{a} = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{b} = \{l_2, m_2, n_2\}$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

yoki $(\vec{r} - \vec{r}_1)\vec{a}\vec{b} = 0$, bu yerda $\vec{r}_1$ - berilgan M_1 nuqtaning radius-vektorini bildiradi. Bu tenglama quyidagi vektor-parametrik ko'rinishga ega:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a} + v\vec{b}$$

yoki koordinatalarda

$$\begin{cases} x = x_1 + ul_1 + vl_2 \\ y = y_1 + um_1 + vm_2 \\ z = z_1 + un_1 + vn_2 \end{cases}$$

bu yerda u, v-sonlar tekislikdagi M nuqtaning boshi M_1 nuqtada va masshtab vektorlari $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlardan iborat koordinatalar sistemasiga nisbatan umumiy dekart koordinatasidir.

Ikkita $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tadigan, $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga kollinear bo'lmagan, $\vec{a} = \{l, m, n\}$ vektorga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi ushbu ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

yoki vektorlarning aralash ko'paytmasi

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\vec{a} = 0$$

ko'rinishida, bu yerda r_1, r_2 mos ravishda berilgan M_1, M_2 nuqtalarning radius-vektorlarini ifodalaydi. Bu tenglama esa parametrik shaklda:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{a} + v(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

yoki koordinatalarda:

$$\begin{cases} x = x_1 + ul + v(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + um + v(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + un + v(z_2 - z_1) \end{cases}$$

ko'rinishida bo'ladi.

Ikki tekislikning o'zaro vaziyati. Bizga dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda α va β ikkita tekisliklar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Bu tekisliklar orasidagi burchak ularning normal vektorlari orasidagi burchakka tengdir. Ularning $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakning kosinusini

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n_1}, \vec{n_2})}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formula bo'yicha hisoblashni bilamiz.

Tekisliklarning parallellik sharti ularning normal vektorlari paralleligiga teng kuchlidir. Shuning uchun bu shart

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ko'rinishda yoziladi.

Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti ularning normal vektorlari perpendikulyarligiga teng kuchli va

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

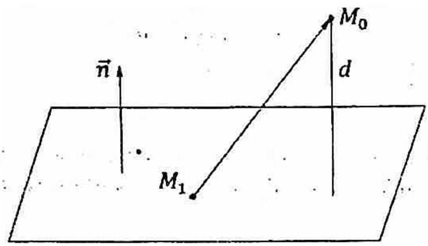
ko'rinishda yoziladi.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa. Endi fazodagi ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan shu nuqtadan o'tmaydigan tekislikkscha bo'lgan masofani topamiz.

Tekislik umumiy

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglamasi bilan berilgan deb hisoblaymiz va M_0 nuqtadan bu tekislikkacha bo'lgan masofani d deb belgilaymiz. Biz bu masofani boshi berilgan tekislikdagi M_1 nuqtada, oxiri esa M_0 nuqtada bo'lgan vektorning normal vektor yo'nalishidagi o'qqa proyeksiyasining absolyut qiymati sifatida qaraymiz: $d = \left|pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|$.



1-chizma

Vektorlarning skalyar ko'paytmasining proyeksiya tilidagi ta'rifidan foydalanib

$$d = \left|pr_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\left(\vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0}\right)}{|\vec{n}|}\right|$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerdan vektorlarni koordinatalarda ifodalasak

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

munosabatni va $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta tekislikka tegishli ekanligini inobatga olsak,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

formulani hosil qilamiz.

30-§. Tekisliklar dastasi. Uchta tekislikning o'zaro vaziyati

30.1-ta'rif. Tekisliklarning *xos dastasi* deb bitta to'g'ri chiziq orqali o'tadigan tekisliklar to'plamiga aytiladi. O'zaro parallel bo'lgan tekisliklar to'plami ham parallel tekisliklar dastasi yoki *xosmas dasta* deyiladi.

30.2-teorema. Agar affin koordinatalar sistemasiga nisbatan uchta tekislik tenglamalari

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

bilan berilgan bo'lsa, bu tekisliklar bitta dastaga (xos yoki xosmas) tegishli bo'lishi uchun

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga yoki birga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. Berilgan tekisliklar bitta dastaga tegishli bo'lsin. Ushbu $rangM \le 2$ tengsizlikni isbotlaymiz.

Avval berilgan tekisliklar xos dastaga tegishli bo'lsin deb hisoblaymiz. U holda (1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Bu hol faqat va faqat $rangM \le 2$ bo'lgandagina bo'ladi, aks holda, agar $rangM = 3$ bo'lsa, u holda (1) sistema yoki yagona yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

Agar berilgan tekisliklar xosmas dastaga tegishli bo'lsa, u holda

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 1 ga teng bo'ladi. Demak, M matritsaning rangi yoki 2 ga yoki 1 ga teng bo'ladi.

Yetarliligi. Endi $rangM \le 2$ ekanligini bilgan holda berilgan tekisliklarning bitta dastaga tegishli bo'lishini isbotlaymiz.

Agar $rangM \le 2$ bo'lsa, u holda $rangm \le 2$ bo'ladi. Aytaylik, $rangM = rangm = 2$ bo'lsin. U holda Kroneker-Kapelli teoremasiga ko'ra (1) sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, berilgan tekisliklar orasida esa kesishuvchilari bor. Demak berilgan uchta tekislik bitta xos dastaga tegishlidir.

Agar $rangm = 1$, $rangM = 2$ bo'lsa, u holda barcha tekisliklar kollinear bo'ladi (berilgan tekisliklarning ikkitasi parallel bo'ladi, uchinchisi esa bu parallel tekisliklarning biri bilan ustma-ust tushishi mumkin).

Agar $rangM = 1$ bo'lsa, u holda $rangm = 1$ bo'ladi. Demak, berilgan tekisliklar ustma-ust tushadi. Teorema isbotlandi.

30.3-teorema. Affin koordinatalar sistemasiga nisbatan ikkita parallel bo'lmagan π_1 va π_2 tekisliklar umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

bilan berilgan bo'lsin. U holda umumiy tenglamasi

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

bo'lgan uchinchi π tekislik π_1 va π_2 tekisliklar bilan aniqlanuvchi dastaga tegishli bo'lishi uchun π tekislik tenglamasining chap tomoni π_1 va π_2 tekisliklar tenglamalarining chap tomonlarining chiziqli kombinatsiyasi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. Biz π tekislik π_1 va π_2 tekisliklar bilan aniqlanuvchi dastaga tegishli ekanligini bilgan holda, λ va μ haqiqiy sonlar mavjud bo'lib, o'zgaruvchi x, y, z larning barcha qiymatlarida

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

ayniyatning bajarilishini isbotlaymiz.

Agar π, π_1 va π_2 tekisliklar bitta dastaga tegishli bo'lsa, u holda 31.2-teoremaga ko'ra

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun $rang M \leq 2$ bo'ladi.

Teorema shartiga ko'ra π_1 va π_2 tekisliklar parallel bo'lmaganligi uchun M matritsaning birinchi va ikkinchi satrlari chiziqli erkli. Ammo $rang M \leq 2$ bo'lganligi uchun uchinchi satr birinchi va ikkinchi satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni λ va μ sonlari mavjud bo'lib,

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2,\ B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2,\ C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2,\ D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Bu munosabatlardan birinchi tenglikning ikkala tomonini x ga ko'paytirib, ikkinchi tenglikning ikkala tomonini y ga ko'paytirib, uchinchi tenglikning ikkala tomonini esa z ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tengliklarni va $D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2$ tenglikni hadma-had qo'shsak, isbot qilinishi kerak bo'lgan ayniyatni hosil qilamiz.

Yetarliligi. Faraz qilaylik,

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

ayniyat o'zgaruvchi x, y, z larning barcha qiymatlarida o'rinli bo'lsin. Bu ayniyatdan

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2,\ B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2,\ C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2,\ D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2$$

munosabatlar kelib chiqadi. Bu esa M matritsaning uchinchi satri birinchi va ikkinchi satrlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini bildiradi. Demak, $rang M \leq 2$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

30.4-ta'rif. Ushbu

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

tenglama affin koordinatal sistemasidagi umumiy tenglamalari

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

bo'lgan turli π_1 va π_2 tekisliklar aniqlovchi dastaning tenglamasi deyiladi, bu yerda λ va μ bir vaqtda nolga teng bo'lmagan haqiqiy sonlar.

Uchta tekislikning o'zaro vaziyati. Aytaylik bizga affin koordinatal sistemasida (1) umumiy tenglamalari bilan uchta tekislik berilgan bo'lsin. Biz m va M matritsalarni kiritgan edik, endi quyidagi determinantni

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

kiritamiz va tekisliklarning normal vektorlarini

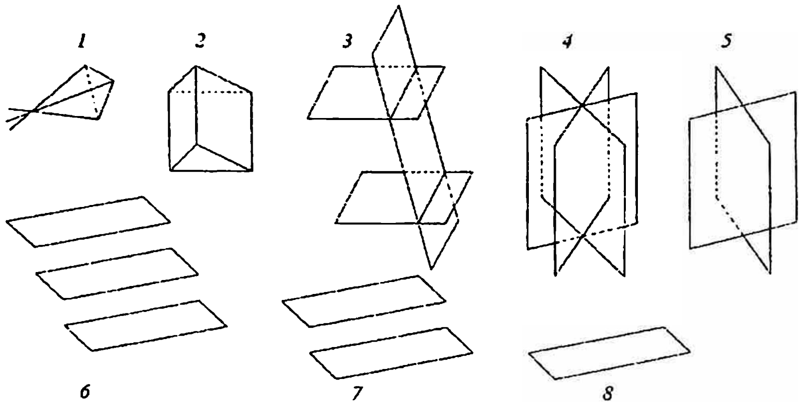
$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}, \vec{n}_3 = \{A_3, B_3, C_3\}$$

kabi belgilaymiz.

Yuqorida isbotlanganlar asosida uchta tekislikning o'zaro joylashuvi uchun quyidagi zarur va yetarli alomatlarni hosil qilamiz.

1. Agar $\delta \neq 0$ bo'lsa, u holda berilgan uchta tekislik bitta va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'ladi. Chunki (1) sistema yagona yechimga ega. Bu holda tekisliklar piramida hosil qiladi deyiladi.

2. Agar $rang m = 2$, $rang M = 3$ bo'lib, normal $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorlar orasida kollinearlari bo'lmasa, u holda (1) sistema yechimga ega emas ($rang M > rang m$). Berilgan tekisliklar juft-jufti bilan turli to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesishadi. Bu holda tekisliklar prizma hosil qiladi deyiladi.



2-chizma

3. Agar $rangm = 2$, $rangM = 3$ bo‘lib, normal $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorlar orasida ikkitasi kollinear bo‘lsa (normal vektorlarning uchalasi ham kollinear bo‘la olmaydi, chunki $rangm = 2$), u holda (1) sistema yechimga ega emas ($rangM > rangm$). Berilgan tekisliklardan ikkitasi parallel, uchinchisi ularni kesib o‘tadi.

4. Agar $rangm = rangM = 2$ bo‘lib, normal $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorlar orasida kollinearlari bo‘lmasa, u holda (1) sistema yechimga ega ($rangM = rangm$). Berilgan tekisliklar turli bo‘lib, uchalasi bitta to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.

5. Agar $rangm = rangM = 2$ bo‘lib, normal $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorlar orasida ikkitasi kollinear bo‘lsa, u holda berilgan tekisliklardan ikkitasi ustma-ust tushadi, uchinchisi ularni kesib o‘tadi.

6. Agar $rangm = 1$ bo‘lib, (1) sistemadagi tenglamalarda birorta proporsional koeffisiyentli juftlik bo‘lmasa, berilgan uchta tekisliklar o‘zaro parallel bo’ladi.

7. Agar $rangm = 1$ bo‘lib, (1) sistemadagi tenglamalarda ikkitasi proporsional koeffisiyentli juftlik bo‘lsa, berilgan tekisliklarning ikkitasi ustma-ust tushadi, uchinchisi ularga parallel bo’ladi.

8. Agar $rangM = 1$ bo‘lsa, u holda tekislikar ustma-ust tushadi.

31-§. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari

Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda bizga l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsa, nol bo‘lmagan $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor l to‘g‘ri chiziqqa parallel vektorlardan bittasi bo‘lsin, bu vektor to‘g‘ri chiziqning *yo‘naltiruvchi vektori* deyiladi, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ esa to‘g‘ri chiziqqa tegishli birorta nuqta bo‘lsin.

Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning radius-vektorini $\vec{r}_0$ bilan belgilasak, fazoda radius-vektori $\vec{r}$ bo'lgan $M(x, y, z)$ nuqtaning to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi ushbu $\vec{r} - \vec{r}_0$ va $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektorlarning parallelligiga teng kuchlidir. Bu shartni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a} \tag{1}$$

ko'rinishda yozib, to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi tenglamasini olamiz. Bu yerda t parametr $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgarganda $\vec{r}$ vektor oxiri l to'g'ri chiziq nuqtalarini hosil qiladi. Yuqoridagi tenglamani koordinatalar orqali yozsak

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tenglamalar to'g'ri chiziqning *parametrik* tenglamalari deyiladi. Agar bu tenglamalardan t parametrni yo'qotsak

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{2}$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama to'g'ri chiziqning *kanonik* tenglamasi deyiladi.

Fazoda radius-vektorlari $\vec{r}_1$ va $\vec{r}_2$ bo'lgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, bu nuqtalardan o'tgan l to'g'ri chiziq uchun $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Yuqoridagi (1) tenglamadagi $\vec{a}$ vektor o'rniga $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vektorni qoysak, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta sifatida $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtani olsak l to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi parametrik tenglamasini

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{3}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar (3) tenglamada t parametrni yo'qotib uni koordinatalar orqali yozsak l to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{4}$$

ko'rinishda hosil qilamiz. Bu tenglama *ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq* tenglamasi deyiladi.

To'g'ri chiziq ikkita tekislikning umumiy qismi sifatida: Bizga l to'g'ri chiziq kanonik

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama yordamida berilgan bo'lsin. Bu tenglamadan quyidagi ikkita tenglamalarni hosil qilamiz

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{5}$$

Bu tenglamalarni

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0,\ a_3(y - y_0) - a_2(z - z_0) = 0$$

ko'rinishda yozsak l to'g'ri chiziq

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0 \text{ va } a_3(y - y_0) - a_2(z - z_0) = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi tekisliklarning kesishishidan iborat bo'lishini ko'ramiz.

Agar bizga ikkita α va β tekisliklar

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ va } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilib

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 2 ga teng bo'lsa, ular parallel bo'lmaydi va birorta l to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini yozish uchun uning birorta nuqtasini va bitta yo'naltiruvchi vektorini bilishimiz yetarli. Biz koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani topib, l to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida tekisliklarning normal $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlarining vektor ko'paytmasini olamiz, chunki bu vektor ko'paytma l to'g'ri chiziqqa paralleldir.

32-§. Fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati

Bizga ikkita L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \text{ va } \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$$

kanonik tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Bu tenglamalarni vektor ko'rinishda yozsak ular

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t \text{ va } \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{b}s$$

ko'rinishlarga keladi. Fazoda ikkita to'g'ri chiziq to'rt xil holatda joylashishi mumkin: parallel, kesishuvchi, ustma-ust va ayqash.

32.1-ta'rif. Ikkita to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotib kesishmasa, ular *parallel to'g'ri chiziqlar* deyiladi.

Agar biz uchta $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning bir tekislikda yotishi shartini yozsak

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz.

32.2-ta'rif. To'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa, ular *ayqash to'g'ri chiziqlar* deyiladi.

Bu holda $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar komplanar bo'lmaganligi uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. To'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaganligi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro kollinear emas.

Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar komplanar bo'ladi, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar esa kollinear emas.

32.3-teorema. Quyidagi shartlar fazoda kanonik tenglamalari bilan berilgan ikkita to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuv vaziyatining zarur va yetarli alomatlaridir.

Vaziyati	Shartlar
Ayqash	$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$
Kesishadi	$\Delta = 0$, lekin yo'naltiruvchi $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ vektorlar kollinear emas
Parallel bo'ladi	Yo'naltiruvchi $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ vektorlar kollinear, lekin $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektor ularga kollinear emas
Ustma-ust tushadi	Uchala $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektorlar o'zaro kollinear

Isbot. Zarurligi. Teoremadagi zaruriy alomatlar teskarisini faraz qilish orqali oson kelib chiqadi.

Yetarliligi. 1. Ushbu $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektorni va yo'naltiruvchi $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ vektorlarni qaraymiz. Agar

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa, u holda bu vektorlar nokomplanar bo'ladi. Natijada esa berilgan to'g'ri chiziqlar ham bir tekislikda yotmaydi.

2. Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}$ vektorlar komplanar bo'ladi. Bundan esa berilgan to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotishi kelib chiqadi. Shartga ko'ra yo'naltiruvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear emas. U holda to'g'ri chiziqlar kesishadi.

3. Agar yo'naltiruvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqlar yoki parallel, yoki ustma-ust tushadi. Shartga ko'ra boshi birinchi to'g'ri chiziqqa tegishli M_1 nuqtada, oxiri ikkinchi to'g'ri chiziqqa tegishli M_2 nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektor bu $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga kollinear emas. Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi.

4. Agar uchala $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ravshanki to'g'ri chiziqlar ustma-ust tusadi. Teorema isbotlandi.

Ikkinchi holning xususiy holi sifatida ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarligini qarash mumkin. Bu holda yo'naltiruvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ham perpendikulyar bo'ladi.

Demak, ikkita to'g'ri chiziq perpendikulyar bo'lishi uchun $\Delta = 0$ va $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ tengliklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak sifatida fazoning istalgan nuqtasidan shu to'g'ri chiziqlarga parallel o'tkazilgan ikki to'g'ri chiziqning tashkil qilgan burchaklaridan ixtiyoriy birini olamiz. Bu burchak 0 bilan π orasida o'zgaradi. Agar L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar o'zining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ravshanki ular orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng.

Agar

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ va } L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

bo'lsa, L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak kosinusi uchun

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

33-§. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

33.1. Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.

Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish masalasini qaraymiz. Bizga $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va bu nuqtadan o'tmaydigan L to'g'ri chiziq

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

kanonik tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. Ma'lumki, M_1 nuqta va L to'g'ri chiziq orqali yagona tekislik o'tadi. Izlanayotgan d masofani shu tekislikda $\vec{a} = \{l, m, n\}$ va $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning balandligi sifatida qarash mumkin. Bu vektorlarning vektor ko'paytmasining uzunligini qaraymiz:

$$|[\vec{a}, \overrightarrow{M_0M_1}]| = ||\vec{a}||\overrightarrow{M_0M_1}|\sin\varphi|$$

bu yerda φ - $\vec{a}$ va $\overrightarrow{M_0M_1}$ vektorlar orasidagi burchak.

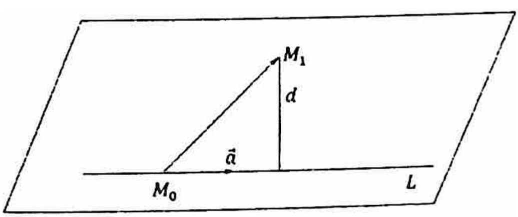
Ushbu $d = ||\overrightarrow{M_0M_1}|\sin\varphi|$ munosabatni inobatga olsak,

$$|[\vec{a}, \overrightarrow{M_0M_1}]| = |\vec{a}| \cdot d$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan esa

$$d = \frac{|[\vec{a}, \overrightarrow{M_0M_1}]|}{|\vec{a}|}$$

formulaga ega bo'lamiz.



3-chizma

Yuqoridagi formulani koordinatalar orqali yozsak

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & l \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu formula fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani ifodalaydi.

33.2. Ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa.

Biz ikkita $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$ va $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{b}s$ tenglamalar bilan berilgan L_1, L_2 ayqash to'g'ri chiziqlar orsadagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqarmoqchimiz. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi masofa

$$d = \inf d(A, B), \ A \in L_1, B \in L_2$$

formula bo'yicha aniqlanadi. Bu yerda $d(A, B)$ - A va B nuqtalar orasidagi masofadir.

Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa, ular orasidagi masofa nolga teng bo'ladi.

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa esa ularning biridan olingan ixtiyoriy nuqtadan ikkinchi to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa kabi topiladi.

To'g'ri chiziqlar ayqash bo'lgan holda biz avvalo mos ravishda L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lgan A_0 va B_0 nuqtalar mavjud bo'lib, bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning L_1, L_2 to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz $\overrightarrow{A_0B_0}$ vektorni

$$\overrightarrow{A_0B_0} = (\vec{r}_2 + \vec{b}s_0) - (\vec{r}_1 + \vec{a}t_0)$$

ko'rinishda yozib, uning $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyarlik shartlarini yozamiz. Bu shartlarni skalyar ko'paytma orqali yozsak, ular

$$\begin{cases} (r_2 - r_1, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b})s_0 - (\vec{a}, \vec{a})t_0 = 0 \\ (r_2 - r_1, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b})s_0 - (\vec{a}, \vec{b})t_0 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishga keladi. Bu tengliklar s_0, t_0 noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bu sistemaning asosiy determinanti Δ noldan farqli, chunki

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix} = [\vec{a}, \vec{b}]^2 > 0$$

munosabat o'rinlidir. Demak yuqoridagi sistema yagona yechimga ega, ya'ni (A_0, B_0) juftlik yagonadir. Endi A_0B_0 kesma uzunligi berilgan ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaga tengligini ko'rsatamiz. Buning uchun mos ravishda L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli va radius-vektorlari

$$\vec{r}_1 + \vec{a}t, \ \vec{r}_2 + \vec{b}s$$

vektorlardan iborat ixtiyoriy A va B nuqtalar uchun $|AB| > |A_0B_0|$ tengsizlikni isbotlaymiz. Bu tengsizlikni isbotlash uchun $\overrightarrow{AB}$ vektorni

$$\overrightarrow{AB} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + (\vec{b}s - \vec{a}t) = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{b}s_0 - \vec{a}t_0) + (s - s_0)\vec{b} - (t - t_0)\vec{a}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu ifodada

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{b}s_0 - \vec{a}t_0$$

tenglik o'rinli. Ikkita o'zaro perpendikulyar $\vec{p}$, $\vec{q}$ vektorlar uchun

$$(\vec{p} + \vec{q})^2 = \vec{p}^2 + \vec{q}^2$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglik umumlashgan Pifagor teoremasi deyiladi. Bu tenglikni

$$\vec{p} = \overrightarrow{A_0B_0}, \ \vec{q} = (s - s_0)\vec{b} - (t - t_0)\vec{a}$$

vektorlar uchun yozsak,

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{b}s_0 - \vec{a}t_0)^2 + ((s - s_0)\vec{b} - (t - t_0)\vec{a})^2$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikdan esa

$$\overrightarrow{AB}^2 \geq (\vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{b}s_0 - \vec{a}t_0)^2 = \overrightarrow{A_0B_0}^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Endi A_0B_0 kesma uzunligini hisoblash uchun formula keltirib chiqaramiz. Shu maqsadda $\overrightarrow{A_0B_0}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini tekshiramiz. Aralash ko'paytma moduli uchun

$$|\overrightarrow{A_0B_0}\vec{a}\vec{b}| = |\overrightarrow{A_0B_0}||[\vec{a}, \vec{b}]|$$

tenglik o'rinli ekanligini bilamiz. Bundan esa

$$d = |A_0B_0| = \frac{|\overrightarrow{A_0B_0}\vec{a}\vec{b}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$$

munosabatni olamiz. Aralash ko'paytmadagi $\overrightarrow{A_0B_0}$ vektorni

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_0}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda $A_1 \in L_1$, $B_1 \in L_2$ va $\overrightarrow{OA_1} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \vec{r}_2$. Shuning uchun $\overrightarrow{OA_1}$ vektor $\vec{a}$ vektorga, $\overrightarrow{OB_1}$ vektor esa $\vec{b}$ vektorga paralleldir. Bularni hisobga olsak

$$d = \frac{|\overrightarrow{A_1B_1}\vec{a}\vec{b}|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$$

formula kelib chiqadi. Bu formulani koordinatalar yordamida yozsak, u

$$d = \frac{abs\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

ko'rinishga keladi.

34-§. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyati

Bizga L to'g'ri chiziq

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

tenglama bilan, α tekislik esa

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, ularning tenglamalari bo'yicha o'zaro vaziyatini aniqlamoqchimiz.

To'g'ri chiziq va tekislik o'zaro uch xil vaziyatda bo'lishi mumkin: to'g'ri chiziq tekislikka parallel, to'g'ri chiziq tekislikda yotadi, to'g'ri chiziq tekislikni bitta nuqtada kesib o'tadi.

To'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lganda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo'ladi va to'g'ri chiziqning birorta ham nuqtasi tekislikka tegishli bo'lmaydi, jumladan tenglamada koordinatalari berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta ham. Demak, tekislik va to'g'ri chiziqning paralellik sharti

$$\begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0, \end{cases}$$

munosabatlardan iborat bo'ladi.

To'g'ri chiziq tekislikda yotgan holda ham to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo'ladi va to'g'ri chiziqning barcha nuqtalari tekislikka tegishli bo'ladi, jumladan tenglamada koordinatalari berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta ham. Demak,

$$\begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \end{cases}$$

tengliklar bir vaqtda bajarilsa, L to'g'ri chiziq α tekislikda yotadi.

Agar to'g'ri chiziq tekislikni biror nuqtada kesib o'tsa, u holda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo'lmaydi.

Agar to'g'ri chiziq tekislikni to'g'ri burchak ostida kesib o'tsa, to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyarlik deyiladi. Demak, to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori tekislikning normal vektoriga parallel bo'ladi, perpendikulyarlik sharti esa

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$$

munosabatga teng kuchlidir.

Endi to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish masalasini qaraylik: To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb aytiladi.

To'g'ri chiziq

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

tenglama bilan, tekislik esa

$$Ax+By+Cz+D=0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq bilan uning proyeksiyasi orasidagi burchak φ o'rniga, tekislikning normal vektori $\vec{n}$ bilan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\vec{a}$ vektori orasidagi $\frac{\pi}{2}-\varphi$ burchakni topish qulay. Haqiqatan, $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$ bo'lganidan

$$\sin\varphi=\frac{(\vec{n},\vec{a})}{|\vec{n}||\vec{a}|}=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

formulaga ega bo'lamiz.

To'g'ri chiziq va tekislikning vaziyatini algebraik yo'l bilan quyidagicha ham tekshirish mumkin.

Bizga L to'g'ri chiziq

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

kanonik tenglamasi bilan, π tekislik

$$Ax+By+Cz+D=0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin. Berilgan L to'g'ri chiziq bilan π tekislikning umumiy nuqtalarini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda tenglamalar sistemasi qilib, yechimini topamiz. Buning uchun to'g'ri chiziq kanonik tenglamasidagi proporsiyaning umumiy qiymatini λ bilan belgilaymiz va bu tenglamalardan x,y,z larni topamiz, ya'ni

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=\lambda,\ \frac{x-x_0}{l}=\lambda,\ \frac{y-y_0}{m}=\lambda,\ \frac{z-z_0}{n}=\lambda$$

bulardan

$$x=l\lambda+x_0,\ y=m\lambda+y_0,\ z=n\lambda+z_0 \qquad (*)$$

tengliklarni olamiz. Bu tengliklardagi x,y,z larning qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo'yamiz:

$$A(l\lambda+x_0)+B(m\lambda+y_0)+C(n\lambda+z_0)+D=0$$

yoki λ ga nisbatan ushbu

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + \lambda(Al + Bm + Cn) = 0$$

chiziqli tenglamani hosil qilamiz.

Bu chiziqli tenglama $Al + Bm + Cn \neq 0$ bo'lganda yagona yechimga ega, ya'ni to'g'ri chiziq tekislikni bitta nuqtada kesib o'tadi.

Agar $Al + Bm + Cn = 0$ bo'lib, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ bo'lsa, bu tenglama yechimga ega emas, ya'ni to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishmaydi.

Agar $Al+Bm+Cn = 0$ bo'lib, $Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0$ bo'lsa, bu vaqtda tenglama cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni to'g'ri chiziq tekislikda yotadi.

Masala. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $x+2y-2z-3 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish: $Al + Bm + Cn = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 4 \neq 0$, demak berilgan to'g'ri chiziq va tekislik parallel emas. Endi to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik shaklga keltiramiz: $\frac{x-1}{2} = \lambda$, $\frac{y}{3} = \lambda$, $\frac{z-1}{2} = \lambda$, bulardan $x = 2\lambda + 1$, $y = 3\lambda + 0$, $z = 2\lambda + 1$ x, y, z larning topilgan ifodalarini tekislikning umumiy tenglamasiga qo'yamiz:

$$2\lambda + 1 + 2 \cdot 3\lambda - 2(2\lambda + 1) - 3 = 0$$

$$2\lambda + 1 + 6\lambda - 4\lambda - 2 - 3 = 0$$

$$4\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$x_0 = 2\lambda + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y_0 = 3\lambda = 3 \cdot 1 = 3$, $z_0 = 2\lambda + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

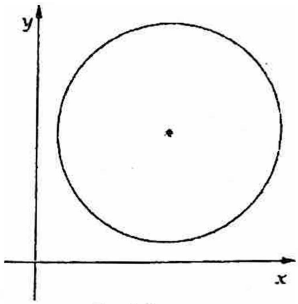
Demak berilgan to'g'ri chiziq tekislikni $M_0(3; 3; 3)$ nuqtada kesib o'tar ekan.

VII BOB. IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR NAZARIYASI

35-§. Aylana va sfera tenglamalari

Bu mavzu affin yoki ortogonal koordinatalar sistemasiga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlangan chiziqlar va sirtlar oilasiga mansub bo‘lgan aylana va sferaga bag‘ishlangan.

Bizga elementar geometriyadan malumki, tekislikda markazi A nuqtada, radiusi r bo‘lgan aylana - bu AN masofa r ga teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rnidir. Fazodagi $AN = r$ bo‘lgan N nuqtalarning geometrik o‘rni markazi A nuqtada radiusi r bo‘lgan *sfera* deyiladi.



1-chizma

Markazi $C(a, b)$ nuqtada bo‘lgan r radiusli aylananing tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Bu tenglama aylananing *normal* tenglamasi deyiladi. Markazi koordinatalar boshida bo‘lsa, aylananing normal tenglamasi

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Ushbu $Ax^2 + Ay^2 + 2Bx + 2Cy + D = 0$ tenglama $A \neq 0$ va $B^2 + C^2 - AD > 0$ shartlarda markazi $(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A})$ nuqtada, radiusi $r = \sqrt{\frac{B^2+C^2-AD}{A^2}}$ bo‘lgan aylanani aniqlaydi.

35.1-ta'rif. Tekislikdagi ixtyoriy $M(x,y)$ nuqta koordinatalarini aylananing normal tenglamasiga qo'ysak, hosil qilingan:

$$\sigma = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$$

son $M(x,y)$ *nuqtaning aylanaga nisbatan darajasi* deyiladi. Agar M nuqtadan $C(a,b)$ nuqtagacha bo'lgan masofani d desak, bu son $\sigma = d^2 - r^2$ ga teng bo'ladi.

Agar M nuqta aylana tashqarisida yotsa, M nuqtaning shu aylanaga nisbatan darajasi musbat, va u M nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinma uzunligining kvadratiga tengdir, yoki elementar geometriyaning malum teoremasiga ko'ra: $\sigma = MT^2 = MA \cdot MB$ bo'ladi, yani urinma uzunligining kvadrati M nuqtadan o'tkazilgan ixtiyoriy kesuvchi uzunligini uning tashqi qismi ko'paytmasiga teng.

Olingan M nuqta aylana ichida yotsa, M nuqtaning darajasi manfiy va uning absolyut qiymati shu nuqtadan o'tuvchi vatar bo'laklarining ko'paytmasiga teng bo'ladi: $\sigma = -MA \cdot MB$

Agar M nuqta aylanaga tegishli bo'lsa, uning darajasi nolga teng: $\sigma = 0$.

Agar ushbu

$$u_1 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0$$

$$u_2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

tengliklar ikkita aylana tenglamasini ifoda etsa,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$$

tenglama (λ_1, λ_2 - ixtiyoriy bir vaqtda 0 ga teng bo'lmagan sonlar) aylana (yoki to'g'ri chiziq)ni tasvirlaydi: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ aylanalar kesishsa, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ aylana(yoki to'g'ri chiziq) aylanalarning kesishish nuqtalaridan o'tadi.

Bu $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ tenglamani, har biri uchun $\frac{u_1}{u_2}$ nisbatning darajasi $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ga teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni tenglamasi deb qarash mumkin.

35.2-ta'rif. Agar $\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$ shart bajarilsa, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ tenglama $u_1 - u_2 = 0$ yoki $u_1 = u_2$ to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Bu to'g'ri chiziq ikki aylananing *radikal o'qi* deyiladi, yani radikal o'qda yotuvchi har bir nuqtaning har ikkala aylanaga nisbatan darajasi tengdir.

35.3-ta'rif. Uchta $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ aylana berilgan bo'lib, ularning markazlari bir to'g'ri chiziqda yotmasa, har bir juft aylananing radikal o'qlari $u_1 = u_2$, $u_2 = u_3$, $u_3 = u_1$ bitta nuqtadan o'tadi. Bu nuqta shu uchta aylananing ixtiyoriy *radikal markazi* deb ataladi.

Quyidagilar mos ravishda

$$u = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

$$v = Ax + By + C = 0$$

aylana bilan to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lsa, $u + \lambda v = 0$ tenglama aylanani ifodalaydi. Agar $u = 0$ aylana bilan $v = 0$ to'g'ri chiziq kesishsa, $u + \lambda v = 0$ aylana ularning kesishish nuqtalaridan o'tadi.

35.4-tasdiq. 1) Markazi A nuqtada va radiusi r bo'lgan aylana (sfera) quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi N nuqtalar to'plami bo'ladi:

$$(\vec{R} - \vec{a})^2 = \vec{r}^2 \tag{1}$$

bu yerda $\vec{R}$ va $\vec{a}$ vektorlar mos ravishda N va A nuqtalarning radius vektorlari.

2) Tekislikda ortogonal koordinatalar sistemasiga nisbatan aylana tenglamasi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{2}$$

ko'rinishida bo'ladi, bu yerda a, b sonlari A nuqtaning koordinatalari. Bu (2) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + \sigma = 0 \tag{3}$$

ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\sigma = a^2 + b^2 - r^2$.

3) ortogonal koordinatalar sistemasiga nisbatan sfera tenglamasi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \tag{4}$$

ko'rinishida bo'ladi, bu yerda a, b, c sonlari A nuqtaning koordinatalari. Bu (4) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan ushbu

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + \sigma = 0 \tag{5}$$

ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\sigma = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$.

Isbot. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib A va N nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz. Natijada isbotlash kerak bo'lgan tengliklarni hosil qilamiz.

Yuqoridagi (3) ko'rinishidagi tenglamalarni (2) tenglama ko'rinishida yozish mumkin bo'lganligi uchun (3) ko'rinishidagi har qanday tenglama aylanani aniqlaydi. Masalan,

$$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0 \tag{6}$$

tenglamani

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

ko'rinishida yozish mumkin va u markazi $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ nuqtada va radiusi $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ga teng aylana tenglamasidir.

Ikkinchi tomondan

$$x^2+y^2-x+y+1=0 \tag{7}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi haqiqiy koordinatali nuqtalar mavjud emas. Bu tenglamani

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

ko'rinishida yozamiz va uni *xosmas aylana tenglamasi* deyiladi. Lekin har ikki holda ham (3) tenglama *aylananing umumiy tenglamasi* deyiladi. (5) tenglama esa *sferaning umumiy tenglamasi* deyiladi.

Aylananing umumiy tenglamasida uchta parametr ishtirok etadi. Demak, aylana tenglamasi uni qanoatlantiruvchi uchta nuqta yordamida hosil qilinar ekan. Elementar geometriya kursidan yaxshi malumki, buning uchun berilgan uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmasligi kerak. Shuningdek har bir uchburchak uchun bitta aylana mavjud bo'ladi. Agar berilgan nuqtalar $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $(i=1,2,3)$ bo'lsa, aylana tenglamasi ushbu

$$x_i^2+y_i^2-2ax_i-2by_i+\sigma=0$$

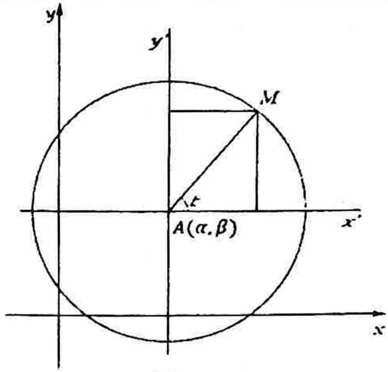
tenglamalar sistemasini a, b, σ larga nisbatan yechib hosil qilinadi. Determinantlar nazariyasi bilan tanish talabalar izlanayotgan aylana tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{8}$$

ko'rinishida bo'lishini osongina topishadi. Bu determinant hisoblansa u (3) tenglama ko'rinishini oladi. Ikkinchi tomondan bu determinant nolga teng bo'ladi, agar (x, y) ni x_i, y_i bilan almashtirilsa (ikkita satri bir xil bo'lgan determinant nolga teng).

Huddi shunga o'xshash bir tekislikda yotmaydigan to'rtta nuqtadan o'tuvchi sfera tenglamasini ham hosil qilishimiz mumkin. Bu masalani talabalarga mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

Bizga ma'lumki chiziqlar va sirtlar parametrik tenglamalar yordamida ham berilishi mumkin. Endi biz aylana va sfera uchun ham parametrik tenglamalar yozmoqchimiz.

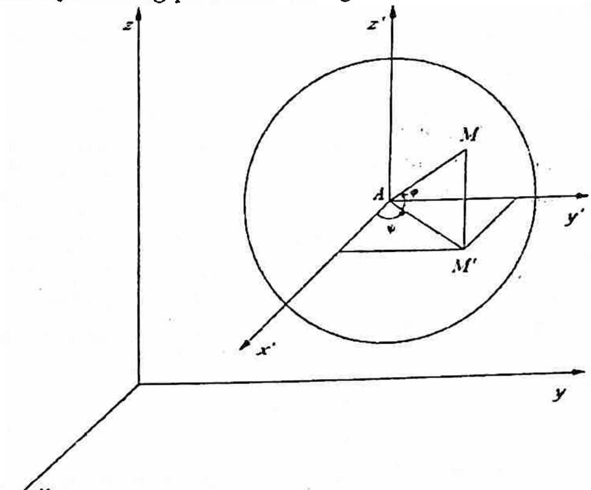


2-chizma

Aylana uchun parametr t sifatida $\overrightarrow{AM}$ vektor va Ox o'qi orasidagi burchakni olsak, M nuqtaning koordinatalarini osongina topamiz:

$$\begin{cases} x = r\cos t + a \\ y = r\sin t + b. \end{cases} \tag{9}$$

(9) tenglama aylananing parametrik tenglamalari bo'ladi.



3-chizma

Sfera uchun bizga ikkita parametr kerak bo'ladi. Ulardan biri sifatida *geografik kenglikni*, yani $\overrightarrow{AM}$ vektor bilan Oxy tekisligi orasidagi φ burchakni, ikkinchisi sifatida *geografik uzoqlikni*, yani AM to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi Oz o'qiga parallel tekislik bilan A nuqta orqali o'tuvchi Oxz tekisligiga parallel tekislik orasidagi ψ burchakni olamiz. U holda M nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi\cos\psi \\ y = b + r\cos\varphi\sin\psi \\ z = c + r\sin\varphi \end{cases} \tag{10}$$

formulalar bilan aniqlanadi. Bu tengliklar sferaning parametrik tenglamalari bo'ladi.

36-§. Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemasi

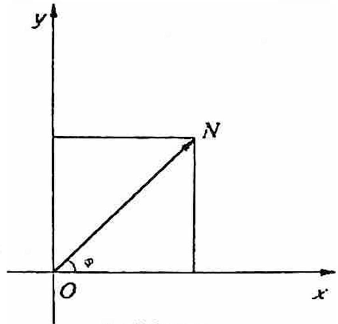
Shuni takidlab o'tishimiz kerakki, aylana va sferaning parametrik tenglamalaridagi parametrlarni ayrim hollarda maxsus turdagi koordinatalar sifatida foydalaniladi va ular tadbiqiy masalalarda muhim rol o'ynaydi. Agar tekislikda O nuqta qutb boshi bo'lsa, har bir N nuqta markazi O nuqtada, radiusi $r = l$ (ON) bo'lgan aylanaga tegishli bo'ladi (bu yerda l uzunlik). Agar δ oriyentirlangan yo'nalish Ox o'qi yo'nalishi va δ bilan ON orasidagi oriyentirlangan burchak sifatida φ ni olsak, (r, φ) juftlik N nuqtani aniqlaydi. (r, φ) juftlik N nuqtaning *qutb koordinatalari* deyiladi.

Qutb koordinatalardan foydalanishda ba'zi muammolar mavjud. Birinchidan, bu koordinatalar O nuqta uchun aniqlanmagan. N nuqta O nuqta bilan ustma-ust tushganda φ burchak aniqlanmagan, lekin O nuqta $r = 0$ ga mos keladi deyish mumkin. Ikkinchidan, r uzunlik bo'lgani uchun $r \geq 0$ shartni talab qilishimiz kerak bo'ladi, φ burchakning qiymati esa $2\pi n$ (bu yerda n ixtiyoriy butun son) ga teng bo'ladi. Tekislik nuqtalari va nuqtaning qutb koordinatalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish uchun r va φ ning qiymatlarini quyidagi oraliqlarda o'zgaradigan qilib olishimiz mumkin:

$$0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Lekin bazi masalalarda nuqta tekislik bo'ylab uzluksiz harakat qilishi kerak. Bunday hollarda φ burchakning qiymatini 2π dan katta, r barcha haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi deb hisoblash mumkin. Bu noqulayliklarga qaramasdan qutb koordinatalardan foydalanish ko'pgina hollarda qulaydir.

Agar (x, y) Dekart koordinatalar sistemasini 4-chizmadagidek kiritsak,



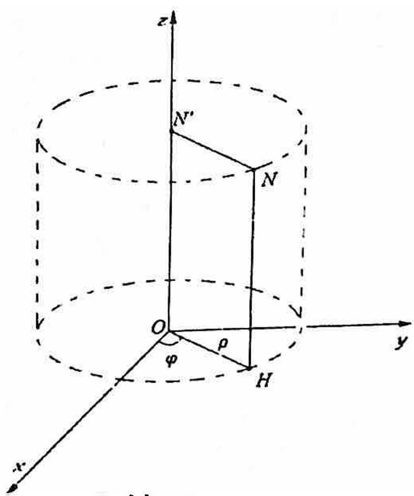
4-chizma

quyidagi

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

bog'lanishlarni olamiz. Berilgan N nuqtaning Dekart koordinatalari malum bo'lsa, uning qutb koordinatalarini topish uchun $r = \sqrt{x^2+y^2}$ formula bo'yicha birinchi qutb koordinatani topamiz. Ikkinchi qutb koordinatani topish uchun nuqtaning N nuqtaning qaysi chorakda joylashganligini bilishimiz kerak va $\varphi = arctg\frac{y}{x}$ yoki $\varphi = arcctg\frac{x}{y}$ tengliklardan foydalanishimiz kerak.

Fazoda N nuqta uchta son bilan aniqlanishi mumkin: (ρ, φ, z). Bu yerda (ρ, φ) juftlik N nuqtaning Oxy tekisligidagi proyektsiyasi bo'lgan H nuqtaning qutb koordinatalari, z esa N nuqtaning Oz o'qiga proyektsiyasi bo'lgan H nuqtaning applikatasidir. Ushbu (ρ, φ, z) sonlar N nuqtaning *silindrik koordinatalari deyiladi.*



5-chizma

Agar biz fazoda dekart koordinatalar sistemasini kiritsak, silindrik va dekart koordinatalari orasidagi ushbu

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

bog'lanishlarni olamiz. Bu yerda ρ, φ o'zgaruvchilar uchun

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

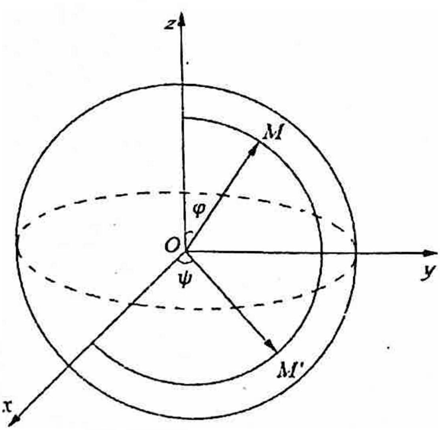
munosabatlar o'rinlidir.

Fazoda silindrik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo bitta o'qqa ega bo'lgan ichma-ich joylashgan (kontsentrik) silindrlarga ajraladi. Fazoning har bir nuqtasi bu silindrlarning faqat bittasiga tegishli bo'ladi. Agar nuqtaning silindrik koordinatalari (ρ, φ, z) bo'lsa, bu nuqta yotgan silindrning radiusi ρ ga teng bo'ladi. Agar nuqta silindrlar o'qiga tegishli bo'lsa, u tegishli bo'lgan silindrning radiusi nolga teng bo'ladi. Yuqoridagi tanlangan dekart koordinatalar sistemasida silindrlarning o'qi Oz o'qidan iboratdir. Bu dekart koordinatalar sistemasida kontsentrik silindrlar tenglamasi

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

ko'rinishda bo'ladi.

Huddi shuningdek fazodagi M nuqta quyidagi uchta son bilan ham aniqlanishi mumkin: (ρ, φ, ψ). Bu yerda $\rho = |OM|$ ga teng bo'lgan masofa, φ va ψ esa mos ravishda markazi O nuqtada, radiusi ρ bo'lgan sferada kenglik va uzoqlikdir.



6-chizma

Yuqorida aniqlangan ρ, φ, ψ kattaliklar M nuqtaning *sferik koordinatalari* deyiladi. Bunga sabab, fazoning koordinatalari $\rho = cost$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalari to‘plami sferani tashkil qiladi. Fazoning har bir nuqtasi radiusi koordinata boshidan shu nuqtagacha bo‘lgan masofaga teng bo‘lgan sferada yotadi. Nuqtaning dekart koordinatalari bilan sferik koordinatalari orasidagi bog‘lanish quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi sin\psi, 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y = \rho sin\varphi cos\psi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \\ z = \rho cos\varphi \end{cases}$$

Odatda fazo nuqtalari bilan ularning sferik koordinatalari orasidagi moslik o'zaro bir qiymatli bo‘lishi uchun ular uchun

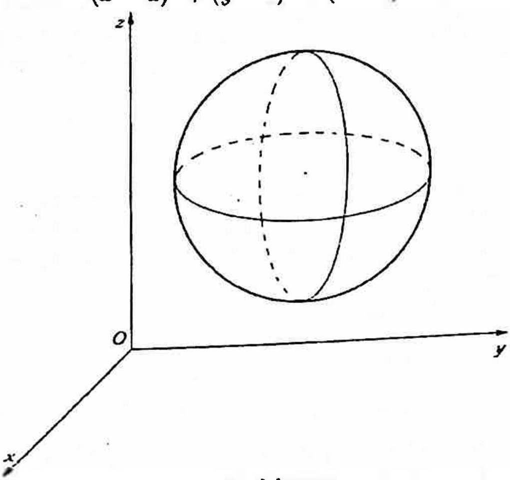
$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < \pi$$

chegaralar qo‘yiladi.

Fazoda sferik koordinatalar sistemasini kiritganimizda fazo markazi bitta nuqtada bo‘lgan sferalarga ajraladi. Agar nuqtaning sferik koordinatalari (ρ, φ, ψ) bo‘lsa, u yotgan sferaning radiusi ρ ga teng bo‘ladi. Bu masofa nuqtadan koordinatalar boshigacha bo‘lgan masofaga tengdir. Nuqta ρ radiusli sferada yotgan bo‘lsa, φ va ψ burchaklar uning sferadagi vaziyatini aniqlaydi.

Markazi $C(a, b, c)$ nuqtada, r radiusli sfera tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$



7-chizma

Bu tenglama *sferaning normal tenglamasi* deyiladi. Agar sfera markazi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushsa, normal tenglama quyidagi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ushbu

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0$$

tenglama

$$A \neq 0, B^2 + C^2 + D^2 - AE > 0$$

shartda markazi $(-\frac{B}{A}, -\frac{C}{A}, -\frac{D}{A})$ nuqtadagi va radiusi $r = \sqrt{\frac{B^2+C^2+D^2-AE}{A^2}}$ ga teng bo'lgan sferani aniqlaydi.

36.1-ta'rif. Ixtiyoriy M nuqtaning radiusi r, markazi C nuqtada bo'lgan sferaga nisbatan darajasi deb

$$u = d^2 - r^2$$

songa aytiladi. Bu erda $d = |MC|$ soni M nuqtadan C markazgacha bo'lgan masofa.

Agar M nuqta sfera tashqarisida yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi musbat sondir. Bu son M nuqtadan sferaga o'tkazilgan urinma uzunligining kvadratiga teng. Agar M nuqta sfera ichida yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi manfiy son bo'ladi va absolyut qiymati bo'yicha $MP \cdot MQ$ ko'paytmaga teng. MP, MQ kesmalar M nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy vatar bo'laklarining uzunliklariga teng. Agar M nuqta sferada yotsa, bu nuqtaning sferaga nisbatan darajasi nolga teng. $M(x, y, z)$ nuqtaning markazi $C(a, b, c)$ nuqtada yotuvchi va radiusi r ga teng sferaga nisbatan darajasi

$$s = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2$$

formuladan aniqlanadi.

36.2-ta'rif. Kontsentrik bo'lmagan ikkita sferalarga nisbatan teng darajali nuqtalarning geometrik o'rni tekislikdan iborat. Bu tekislik ikkita *sferaning radikal tekisligi* deyiladi. Agar sferalar kesishsa, radikal tekislik ularning umumiy aylanasi orqali o'tadi.

Ikkita sfera tenglamalarini qaraylik:

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 - r_1^2 = 0,$$

$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 - r_2^2 = 0$$

va ularning chap tomonlarini u_1, u_2 deb belgilaylik. Ushbu $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ tenglama λ_1, λ_2 sonlar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan holda sfera yoki tekislikni aniqlaydi. Agar sferalar kesishsa, bu tenglama ularning umumiy aylanasidan o'tadigan sferani yoki tekislikni ifoda etadi. $u_1 = u_2$ tenglama *radikal tekislikni* aniqlaydi.

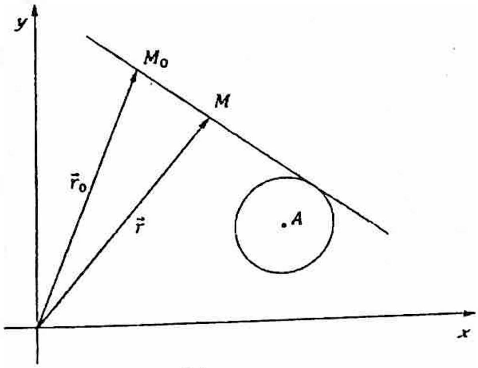
Ushbu $\lambda u + \mu v = 0$ tenglamada $u = 0$ sfera tenglamasi va $v = 0$ tekislik tenglamasi bo'lsa, $\lambda \neq 0$ shartda sferani, yoki $\lambda = 0, \mu \neq 0$ shartda tekislikni aniqlaydi. Agar ular kesishsa bu sfera tekislikning sfera bilan kesishish chizig'i orqali o'tadi.

36.3-tasdiq. Bizga markazi A nuqtada bo'lgan Γ aylana yoki sfera berilgan bo'sin. Aylana tekisligida yotuvchi d to'g'ri chiziq aylanani ikkita haqiqiy koordinatali nuqtalarda kesib o'tadi, agar A nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa radiusdan kichik bo'lsa. Agar bu masofa radiusga teng bo'lsa bitta haqiqiy koordinatali nuqtada kesib o'tadi. Agar bu masofa radiusdan katta bo'lsa to'g'ri chiziq kesib o'tmaydi.

36.4-natija. Aylana (sfera)ning har bir urinmasi (urinma tekisligi) urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusga perpendikulyar bo'ladi.

Urinma tushunchasi muhim geometrik rol o'ynaydi. Shuning uchun turli geometrik holatlar uchun urinma tenglamalarini yozish qiziqarlidir. Agar tekislik (fazo)dagi tayin nuqta bo'lsa, (1) teglama bilan berilgan aylana (sfera)ning berilgan nuqtadan o'tuvchi barcha urinmalarini topamiz.

Agar urinma (urinma tekislik)ga tegishli bo'lgan ixtiyoriy M nuqtaning radius vektori $\vec{r}$ bo'lsa, urinma (urinma tekislik) tenglamasi $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{v}$ ($\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$) ko'rinishida bo'ladi va uning yo'naltiruvchi vektori $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ga teng.



8-chizma

Shuning uchun M_0M to'g'ri chiziq aylana (sfera)ga urinma bo'lishi uchun $\vec{v}$ vektor $\Delta = 0$ shartni qanoatlantirishi, ya'ni

$$[(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_0 - \vec{a})]^2 - (\vec{r} - \vec{r}_0)^2\left(\rho^2 - (\vec{r} - \vec{r}_0)\right) = 0 \qquad (11)$$

tenglik bajarilishi kerak, bu yerda $\Delta = (\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{a}\vec{v}$.

Yuqoridagi mulohazalardan ushbu tasdiq kelib chiqadi.

36.5-tasdiq. Aylana (sfera)ning berilgan M_0 nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$\left[(\vec{r} - \vec{a})(\vec{r}_0 - \vec{a}) - \vec{\rho}^2)\right]^2 - \left[(\vec{r} - \vec{a})^2 - \vec{\rho}^2\right]\left[(\vec{r}_0 - \vec{a})^2 - \vec{\rho}^2\right] = 0 \qquad (12)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbot. Biz $M(\vec{r})$ nuqta urinmaga tegishli bo'lishi uchun $\vec{r}$ vektor (12) tenglikni qanoatlantirishi zarur va yetarli ekanligiga egamiz. Shuning uchun biz (12) tenglik (11)-tenglikka teng kuchli ekanligini isbotlashimiz kerak. Buning uchun (11) tenglikda ushbu $\vec{r} - \vec{a} + \vec{a} - \vec{r}_0$ almashtirishni bajaramiz va qavslarni ochamiz. Natijada (12) tenglikni hosil qilamiz. (12) formulaning geometrik manosi quyidagidan iborat. Agar M_0 nuqta aylanaga tegishli bo'lsa, (12) tenglik

$$(\vec{r} - \vec{a})(\vec{r}_0 - \vec{a}) - \vec{\rho}^2 = 0 \qquad (13)$$

ko'rinishiga keladi. (13) tenglama to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, u aylananing M_0 nuqtadagi urinmasi tenglamasidir. Bu urinma TM_0 radiusga perpendikulyardir. Shuning uchun TM_0 to'g'ri chiziq aylananing M_0 nuqtadagi normal tenglamasi bo'ladi. Sfera uchun esa (13)-tenglamani fazoda qaraymiz. U holda bu tenglik M_0 nuqtadan o'tuvchi va radiusga perpendikulyar tekislik tenglamasi bo'ladi. Bu tekislik sferaning M_0 nuqtadagi urinmalaridan tashkil topganligi uchun uni sferaning M_0 nuqtadagi urinma tekisligi tenglamasi deb ataymiz. TM_0 to'g'ri chiziq esa sferaning M_0 nuqtadagi normal tenglamasi bo'ladi.

Yuqoridagi (13) tenglamaning chap tomoni aylana (sfera) tenglamasining chap tomonidagi $(\vec{r} - \vec{a})^2$ ifodani skalyar ko'paytma shaklida yozib, ko'paytuvchilardan birida $\vec{r}$ vektorning o'rniga $\vec{r}_0$ vektorni qo'yib hosil qilinadi. Bu jarayon algebra kursidan malumki, *qutblashtirish* deb yuritiladi. Agar (1) va (13) tenglamalar koordinatalar yordamida yozilsa, aylana (sfera)ning (3) (5) umumiy tenglamasini qutblashtirish ushbu

$$x^2 \mapsto xx_0, \ x \mapsto \frac{1}{2}(x + x_0) \qquad (14)$$

almashtirish yordamida amalga oshiriladi. Bu almashtirish y va z o'zgaruvchilar uchun ham huddi shunday yoziladi, bu erda x_0, y_0, z_0 lar M_0 nuqtaning koordinatalari. Natija shundan iboratki, aylana (sfera)ning M_0 nuqtadagi urinma (urinma tekislik) tenglamasi bu uning umumiy tenglamasini qutblashtirishdir.

36.6-misol. Ushbu $M_0(2,-1,3)$ nuqta

$$x^2+y^2+z^2-x+y+z-14=0$$

tenglama bilan berilgan Γ sferaga tegishli ekanligini tekshiring va Γ sferaga M_0 nuqtadagi urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan M_0 nuqta Γ sferaga tegishli ekanligi tekshirish uchun nuqtaning koordinatalari sfera tenglamasini qanoatlantirishini ko'rishimiz oson. Urinma tekislik tenglamasini yozish uchun sfera tenglamasini qutblashtiramiz. Buning uchun esa (14) munosabatdan foydalanamiz. Natijada $2x-y+3z-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(z+3)-14=0$ tenglikni yoki $3x-y+7z-28=0$ ni hosil qilamiz. Bu izlanayotgan urinma tekislik tenglamasidir.

Endi yana (12) tenglikka qaytamiz. Agar M_0 nuqta Γ aylana (sfera)dan tashqarida yotsa, malumki bu nuqtadan aylanaga ikkita urinma, sferaga esa urinma konus o'tadi. Agar M_0 nuqta Γ aylana (sfera)ning ichida yotsa, u holda bu nuqtada aylana (sfera) uchun haqiqiy urinma (urinma tekislik) yo'q. Lekin aytish mumkinki, bu holda (12) tenglik aylana uchun ikkita mavhum urinmalar juftligini, sfera uchun esa xosmas konus tenglamasini aniqlaydi.

Shuni ham ta'kidlashimiz kerakki, urinma (urinma tekislik) bilan aylana (sfera)ning kesishish nuqtasi M_0 ning koordinatalari (1) va (12) tengliklarni qanoatlantirishi bilan bir qatorda (13) tenglikni ham qanotlantirishi kerak. Natijada urinma (urinma tekislik) M_0 nuqta uchun muhim geometrik ahamiyatga egaligini hosil qilamiz. Bu urinma (urinma tekislik) M_0 nuqta bilan aylana (sfera)ga nisbatan *qutb o'qi (tekisligi)* va M_0 nuqta *qutb boshi* deyiladi.

36.7-misol. Ushbu $x+y+z+1=0$ tenglama bilan berilgan tekislikning $x^2+y^2+z^2-x+y+z-14=0$ tenglama bilan berilgan sferaga nisbatan qutb boshini toping.

Yechish. Izlanayotgan qutb boshi $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta bo'lsin. U holda sfera tenglamasini qutblashtirish yordamida qutb tekisligini hosil qilamiz, uning tenglamasi

$$xx_0-yy_0+zz_0-\frac{1}{2}(x+x_0)+\frac{1}{2}(y-y_0)+\frac{1}{2}(z+z_0)-14=0$$

yoki unga ekvivalent bo'lgan

$$x(x_0-\frac{1}{2})+y(y_0+\frac{1}{2})+z(z_0+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(-x_0+y_0+z_0)-28=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tekislik berilgan tekislik bilan ustma-ust tushishi, yani ularning mos koeffitsiyentlari proporsional bo'lishi kerak va biz $x_0=-\frac{63}{2}, y_0=z_0=-\frac{127}{4}$ ni hosil qilamiz.

36.8-tasdiq. Aytaylik Γ aylana (sfera) umumiy tenglamasi (3) (mos ravishda (5)) bilan berilgan va M nuqta aylana (sfera) yotuvchi tekislik (fazo)ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda, agar P_1, P_2 nuqtalar Γ aylana (sfera)ning M nuqtadan o'tuvchi d o'q bilan kesishish nuqtalari bo'lsa, $a(MP_1) \cdot a(MP_2)$ ko'paytma d o'qqa bog'liq emas.

37-§. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini almashtirish

Tekislikda dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lib, uni koordinatalar boshi O nuqta atrofida φ burchakka burishni qaraylik.

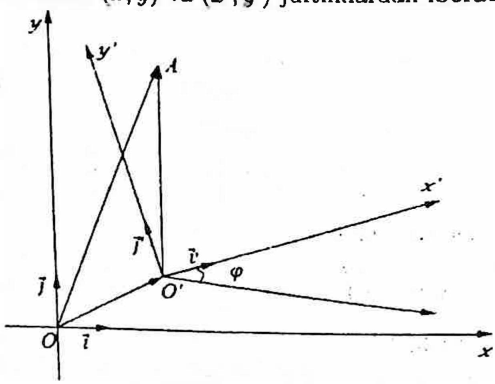
37.1-tasdiq. Nuqtaning "eski" va "yangi" koordinatalari orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi.

Isbot. Bir vektordan ikkinchisiga qisqa burilish yo'nalishi soat strelkasi yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa, bu vektorlar o'ng ikkilik, aks holda chap ikkilik tashkil qiladi deyiladi. Bazis sifatida biror ikkilik tanlansa, biz oriyentatsiya tanlab olingan deb hisoblaymiz. Bizga $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ va $\{\vec{i'}, \vec{j'}\}$ ortonormal bazislar berilgan bo'lsin. Bu bazislar yordamida kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasilarini mos ravishda Oxy va $O'x'y'$ bilan belgilaylik. Nuqtaning "eski" va "yangi" koordinatalari orasidagi bog'lanishni topamiz. "Yangi" koordinatalar sistemasi markazining "eski" koordinata sistemasidagi koordinatalarini (a, b) bilan belgilaylik.

Tekislikda M nuqta berilgan bo'lib, uning Oxy va $O'x'y'$ sistemalardagi koordinatalari mos ravishda (x, y) va (x', y') juftliklardan iborat bo'lsin.



9-chizma

Biz quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j},\ \overrightarrow{O'A} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'},\ \overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Har bir vektorni $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bazis orqali ifodalash mumkinligi uchun

$$\begin{cases} \vec{i'} = a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} \\ \vec{j'} = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} \end{cases} \tag{1}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu ifodalarni

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A},\ \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

tengliklarga qo‘yib

$$x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + a_{11}x'\vec{i} + a_{12}x'\vec{j} + a_{21}y'\vec{i} + a_{22}y'\vec{j}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bazis vektorlar $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ chiziqli erkli oilani tashkil etganligi uchun yuqoridagi munosabatdan

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{21}y' + a \\ y = a_{12}x' + a_{22}y' + b \end{cases} \tag{2}$$

formulalarni olamiz. Endi a_{ij} koeffitsiyentlarni topish uchun ikkita holni qaraymiz.

Birinchi hol: $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ va $\{\vec{i'}, \vec{j'}\}$ bazislar bir xil oriyentatsiyaga ega. Bu holda agar φ bilan $\vec{i}$ va $\vec{i'}$ vektorlar orasidagi burchakni belgilasak, $\vec{j}$ va $\vec{j'}$ vektorlar orasidagi burchak ham φ ga teng bo‘ladi. Yuqoridagi (1) tengliklarning har ikkalasini $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga skalyar ko‘paytirib

$$a_{11} = \cos\varphi,\ a_{12} = \sin\varphi,\ a_{21} = -\sin\varphi,\ a_{22} = \cos\varphi$$

formulalarni olamiz. Bu formulalarni (2) formulalarga qo‘yib mos ravishda quyidagi ikkita formulalarni olamiz:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + a \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + b. \end{cases} \tag{3}$$

Bu holda o‘tish determinanti uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$$

tenglik o‘rinli.

Ikkinchi hol: Agar $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ va $\{\vec{i'}, \vec{j'}\}$ bazislar har xil oriyentatsiyaga ega bo‘lsa, $\vec{i}$ va $\vec{i'}$ vektorlar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak, $\vec{j}$ va $\vec{j'}$ vektorlar orasidagi burchak $\pi-\varphi$ ga teng bo'ladi. Bu holda (1) tengliklarning har birini $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib

$$a_{11}=\cos\varphi,\ a_{12}=\sin\varphi,\ a_{21}=\sin\varphi,\ a_{22}=-\cos\varphi$$

formulalarni hosil qilamiz. Bu holda koordinatalarni almashtirish formulalari

$$\begin{cases} x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi+a \\ y=x'\sin\varphi-y'\cos\varphi+b \end{cases} \tag{4}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu holda o'tish determinanti uchun

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix}=-1$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak koordinatalar sistemasini almashtirganimizda o'tish matritsasinig determinanti musbat bo'lsa, oriyentatsiya o'zgarmaydi. Agar o'tish matritsasining determinanti manfiy bo'lsa, oriyentatsiya qarama-qarshi oriyentatsiyaga o'zgaradi.

38-§. Ikkinchi tartibli chiziqlarning kanonik tenglamalari

Biz bu mavzuda ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlanadigan chiziqlarni qaraymiz.

Ikkinchi tartibli chiziqlar oilasiga mansub bo'lgan aylananing xossalari va unga doir masalalar bilan biz oldingi mavzuda tanishgan edik. Endi esa boshqa chiziqlar bilan tanishamiz va ularning muhim xossalarini o'rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlardan ellips, giperbola va parabolani qaraymiz.

Yuqorida bayon etilgan chiziqlarni bitta atama bilan atash mavjud bo'lib, ellips, giperbola va parabola *xos konus kesimlari* yoki qisqacha *konikalar* deb yuritiladi. Bunday atalishiga sabab, bu chiziqlarni cheksiz aylanma konus sirtni turli tekisliklar yordamida kesish yordamida hosil qilish mumkinligini isbotlash mumkin.

Agar tekislik konusning bir pallasini kesib o'tsa, kesimda ellips hosil bo'ladi. Agar tekislik konusning ikkala pallasini kesib o'tsa, kesimda giperbola hosil bo'ladi. Agar tekislik konusning yasovchilaridan biriga parallel bo'lsa, kesimda parabola hosil bo'ladi (9-chizma). Agar kesuvchi tekislik konus uchidan o'tsa, u holda kesimda ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftligi hosil bo'ladi. Biz bu juftlikni *xosmas konikalar* deb ataymiz.

38.1-ta'rif. Tekislikda ixtiyoriy nuqtasidan berilgan ikkita fokuslari deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas $2a$ miqdorga teng bo'lgan M nuqtalarning geometrik o'rni *ellips* deb ataladi.

Hozir biz qulay koordinatalar sistemasida uning tenglamasini topamiz va uni ellipsning kanonik tenglamasi deb ataymiz.

Koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz: koordinatalar boshi sifatida F_1F_2 kesmaning o'rtasi O nuqtani, Ox o'qi sifatida F_1F_2 to'g'ri chiziqni, Oy o'qi sifatida esa O nuqtadan Ox o'qiga perpendikulyar ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqni tanlaymiz. U holda agar $|F_1F_2| = 2c$ bo'lsa, tarifga ko'ra ellipsga tegishli M nuqtalar uchun o'rinli bo'lgan ushbu $F_1M + F_2M = 2a$ munosabat

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \tag{1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglikning chap tomonidagi qo'shiluvchilardan birini o'ng tomonga o'tkazamiz va tenglikning ikkala tomonini ikki marta kvadratga oshirsak, (1) tenglik

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \tag{2}$$

ko'rinishni oladi. Va nihoyat biz $b = \sqrt{a^2-c^2} > 0$ belgilashni kiritsak, (2) tenglik

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{3}$$

ko'rinishni oladi va (3) tenglama *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Kanonik (3) tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $N(x_0, y_0)$ nuqta ellipsda yotadi.

Haqiqatan ham, agar $NF_1 + NF_2 = 2a'$ bo'lsa, yuqoridagidek ushbu

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,\ b' = \sqrt{a'^2-c^2} > 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni (3) bilan taqqoslab

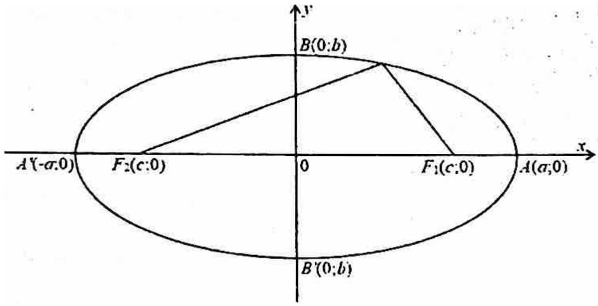
$$x_0^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'^2}\right) + y_0^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b'^2}\right) = 0$$

tenglikni olamiz. Shuningdek $a \le a'$, $a \ge a'$ bo'lganligidan $b \le b'$, $b \ge b'$ bo'ladi. Mos ravishda biz $a' = a$ ni hosil qilamiz.

Yuqoridagi a, b sonlar *ellipsning yarim o'qlari* deb ataladi. (3) tenglikdan ko'rish mumkinki, koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlari bo'ladi (nima uchun?), koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari esa ellipsning uchlari, koordinata boshi ellipsning simmetriya markazi bo'ladi. Ellipsning birinchi chorakda joylashgan qismi oshkor ko'rinishdagi

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi. Bundan ko'rinadiki $0 \le x \le a$ oraliqda y ning qiymati b dan 0 gacha kamayadi. Yuqoridagilarni inobatga olsak, ellipsning ko'rinishi 10-chizmada tasvirlangan kabi bo'ladi.



10-chizma

Biz oldingi mavzuda o'rgangan aylana ellipsning xususiy holi bo'lib, ikkala fokuslari ellips simmetriya markazi bilan ustma-ust tushgan holga to'g'ri keladi.

38.2-ta'rif Tekislikda ixtiyoriy nuqtasidan berilgan ikkita fokuslari deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ miqdorga teng bo'lgan M nuqtalarning geometrik o'rni *giperbola* deb ataladi.

Demak giperbolani tekislikda $|F_1M - F_2M| = 2a$ munosabat o'rinli bo'ladigan M nuqtalarning geometrik o'rni sifatida qarashimiz mumkin. Belgilashlarni ellipsdagidek olsak, F_1 va F_2 nuqtalar *fokuslari* bo'ladi. Dekart koordinatalar sistemasi huddi ellipsdagidek kiritilib, giperbolaning kanonik tenglamasi

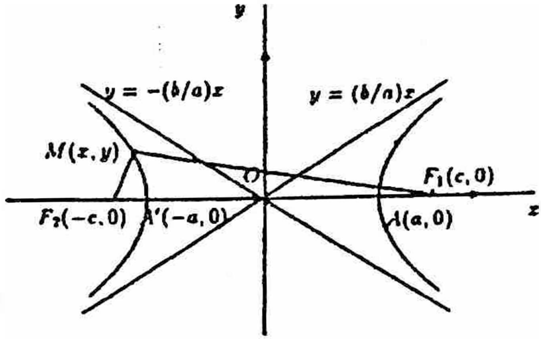
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{4}$$

ko'rinishida bo'lishini (bu yerda $b = \sqrt{c^2 - a^2}$) va bu tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqta giperbolada yotishini hosil qilamiz.

Koordinata boshi giperbolaning simmetriya markazi, koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari bo'ladi, koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari esa giperbolaning uchlari bo'ladi (Oy o'qdagi uchlari mavhum nuqtalar bo'ladi). Giperbolaning birinchi chorakda joylashgan qismi oshkor ko'rinishdagi

$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

funksiyaning grafigidan iborat bo'ladi. Yuqoridagilarni inobatga olsak, giperbolaning ko'rinishi 11-chizmada tasvirlangan kabi bo'ladi.



11-chizma

Giperbola ikkita shoxdan iborat bo'ladi. $y = \pm\frac{b}{a}x$ tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlar *giperbolaning asimptotalari* deyiladi. Giperbolaga tegishli nuqtalar $x \to \pm\infty$ da asimptotalarga cheksiz yaqinlashadi ($x \to \pm\infty$ uchun $\frac{y}{x} \to \pm\frac{b}{a}$).

Agar $a = b$ bo'lsa, chiziq *teng tomonli giperbola* deyiladi va uning kanonik tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ ko'rinishda bo'ladi. Agar koordinata o'qlari orasidagi burchak bissektrisalarini koordinata o'qlari sifatida olsak, u holda teng tomonli giperbola tenglamasi $xy = k$ ko'rinishini oladi (nima uchun?), bu yerda k o'zgarmas son.

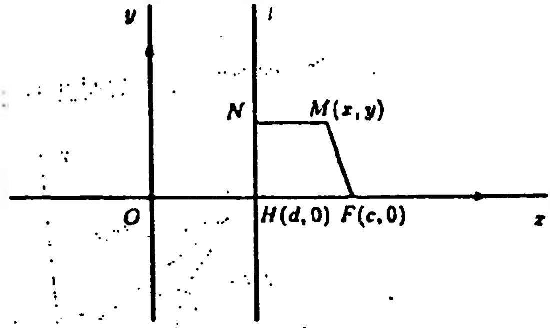
Endi biz ellips va giperbolaning ikkinchi tarifini hamda yangi chiziq *parabolani* aniqlaymiz.

Tekislikda berilgan tayin F nuqta - *fokus*, F nuqtadan o'tmaydigan berilgan l to'g'ri chiziq - *direktrisa* deb ataladi. Biz tekislikdagi

$$\frac{MF}{MN} = e = const, (MN \perp l,\ N \in l) \tag{5}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rnini topamiz. Bu nuqtalar o'rni chiziq bo'ladi, o'zgarmas son e esa *ekstsentrisitet* deb ataladi.

Buning uchun ortogonal koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz: F nuqtadan o'tuvchi va l ga perpendikulyar to'g'ri chiziqni Ox o'qi, F nuqtaning koordinatalarini $(c, 0)$, l to'g'ri chiziqning tenglamasini $x = d$ deb faraz qilamiz (12-chizma) (keyingi hisoblashlar shuni ko'rsatadiki bunday faraz noqulaylik tug'diradi, shuning uchun $d = 0$ deb olamiz).



12-chizma

U holda (5) munosabat quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e|x-d|, \tag{6}$$

bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirib, unga ekvivalent bo'lgan

$$(1-e^2)x^2+y^2+2(de^2-c)x+(c^2-e^2d^2)=0 \tag{7}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Agar $e \neq 1$ bo'lsa, Oy o'qini shunday tanlash mumkinki, $de^2-c=0$ bo'ladi, yani $\frac{d}{c}=\frac{|OH|}{|OF|}=\frac{1}{e^2}$ yoki H,F,O nuqtalarning oddiy nisbati $(H;F;O)=\frac{1}{e^2}$. U holda (7) tenglik ushbu ko'rinishni oladi:

$$c^2-e^2d^2=d^2e^2(e^2-1)$$

va (7) tenglik ushbu tenglikka ekvivalent bo'ladi:

$$\frac{x^2}{d^2e^2}+\frac{y^2}{d^2e^2(1-e^2)}-1=0. \tag{8}$$

Mos ravishda, agar $e<1$ bo'lsa, (8) tenglik yarim o'qlari quyidagicha bo'lgan ellipsni ifodalaydi:

$$a=ed=\frac{c}{e},\ b=ed\sqrt{1-e^2}. \tag{9}$$

Agar $e>1$ bo'lsa, (8) tenglik yarim o'qlari quyidagicha bo'lgan giperbolani ifodalaydi:

$$a=ed=\frac{c}{e},\ b=ed\sqrt{e^2-1}. \tag{10}$$

Bundan tashqari teskari natijalar ham o'rinli, yani har qanday ellips (giperbola) uchun (9) ((10)) tenglikni qo'llasak, $e=\frac{c}{a}$, $d=\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}$ ni hosil qilamiz. Bu erda c soni chiziq fokusining abssissasi, $x = d$ to'g'ri chiziq l direktrisa vazifasini bajaradi. Ellips (giperbola) esa (5) munosabatni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik to'plamidir. Ellips (giperbola) koordinatalar o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun ikkinchi direktrisa $x = -d$ va ikkinchi fokus $F(-c, 0)$ ga ham ega bo'lib, (5) munosabatni qanoatlantiradi.

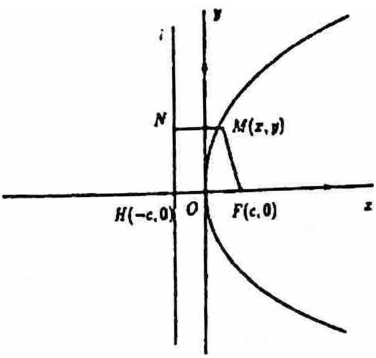
Endi (7) tenglikka qaytamiz va $e = 1$ hol uchun nuqtalarning geometrik o'rnini qaraymiz. Bu holda nuqtalarning geometrik o'rni *parabola* deyiladi.

38.3-ta'rif. Parabola - *fokus* deb ataluvchi qo'zg'almas nuqtadan va *direktrisa* deb ataluvchi tayin to'g'ri chiziqdan bir xil masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rnidir.

Oy o'qi har qanday tanlanganda ham parabola tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y^2 + 2(d - c)x + (c^2 - d^2) = 0. \tag{11}$$

Bu esa parabola uchun dekart koordinatalar sistemasini qulay tanlash imkonini beradi: koordinatalar boshi sifatida HF kesmaning o'rtasini olamiz.



13-chizma

Bu holda $d = -c$ bo'ladi. Yuqoridagi koordinatalar sistemasiga nisbatan (11) tenglama *parabolaning kanonik tenglamasi* deb ataluvchi ushbu ko'rinishni oladi:

$$y^2 - 2px = 0, \tag{12}$$

bu yerda $p = 2c$ bo'lib, u parabolaning *parametri* deyiladi.

Ravshanki, parabola koordinatalar boshidan o'tadi. Koordinatalar boshi *parabolaning uchi* deyiladi, *Ox* o'qi parabolaning simmetriya o'qi bo'ladi. Parabolaning ko'rinishi 13-chizmadagi kabi bo'lishini ko'rish qiyin emas (elementar matematikadan kvadrat funksiya grafigi haqidagi mulohazalarni eslang).

Konikalar (ikkinchi tartibli chiziqlar: ellips, giperbola va parabola)ning sodda parametrik tenglamalari mavjudligini takidlab o'tamiz. (3) tenglamadan ko'rish mumkinki, ellipsga tegish bo'lgan nuqtalarni ushbu

$$x = acost,\ y = bsint \tag{13}$$

formulalardan ham aniqlash mumkin. Yuqoridagi (4) tenglamadan esa giperbola

$$x = acht,\ y = bsht \tag{14}$$

ko'rinishdagi parametrik tenglamalarga ega ekanligini hosil qilamiz. Parabola uchun esa (12) tenglama o'rniga parametrik tenglamalar sifatida quyidagi tenglamalarni yozishimiz mumkin: $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$.

Ellips, giperbola va parabolaning urinmalari. Bu chiziqlarning har biri o'ziga tegishli har qanday nuqtaning atrofida birorta differensiallanuvchi funksianing grafigi bo'ladi. Shuning uchun, bu chiziqlar urinmalarining tenglamalarini tuzishda biz elementar matematika kursidan ma'lum bo'lgan

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

tenglamadan foydalanishimiz mumkin. Misol uchun ellipsning ordinatalari manfiy bo'lmagan nuqtalardan iborat qismi

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ (-a \le x \le a)$$

funksiyaning grafigi bo'ladi. Bu funksiyaninig hosilasini topsak, u

$$y' = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu ifodalarni hisobga olib, ellipsga tegishli (x_0, y_0) nuqtadagi urinma tenglamasini yozamiz:

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Bu tenglamada

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

tenglikni hisobga olsak, yuqoridagi tenglama

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

ko'rinishga keladi. Giperbola va parabola uchun urinma tenglamalarini keltirib chiqarish o'quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etiladi. Ularning nuqtadagi urinmalari tenglamalari mos ravishda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

$$y_0y = p(x + x_0).$$

Ellips, giperbola va parabolaning optik xossalari. Biz ellipsning quyidagi optik xossasini isbotlaymiz.

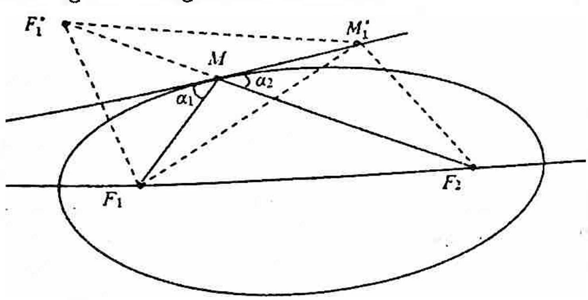
38.4-teorema. Ellipsning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng ikkinchi fokusga tushadi.

Isbot. Ellipsning chap F_1 fokusidan chiquvchi nur uning M nuqtasida sinib F_2 fokusga tushishini ko'rsatish uchun MF_1 va MF_2 to'g'ri chiziqlarning M nuqtadan o'tuvchi urinma bilan teng burchaklar hosil qilishini ko'rsatishimiz kerak. Biz ellipsning M nuqtasidan o'tuvchi urinmasini ℓ bilan, bu to'g'ri chiziqqa nisbatan F_1 nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani F_1^* bilan belgilaymiz. 14-chizma ellipsning M nuqtasidagi urinmasi bilan MF_1 va MF_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni mos ravishda α_1 va α_2 deb belgilaymiz. Agar $\alpha_1 \neq \alpha_2$ bo'lsa, $F_1^*F_2$ to'g'ri chiziqning urinma bilan kesishish nuqtasi M^* nuqta M bilan ustma-ust tushmaydi. Shuning uchun

$$|F_1M^*| + |F_2M^*| = |F_1^*F_2| < |F_1M| + |F_2M| = 2a$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda a - ellipsning katta yarim o'qi.

Biz M^* nuqtani urinma bo'ylab M nuqtadan uzoqlashtira boshlaymiz. Bunda $|F_1M^*| + |F_2M^*|$ yig'indi o'sa boshlaydi. Boshlang'ich holatda bu yig'indining qiymati, yuqoridagi tengsizlikka ko'ra $2a$ dan kichik bo'lganligi uchun, yig'indi o'sish natijasida qandaydir N nuqtada $2a$ ga teng bo'ladi. Bu nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalarning



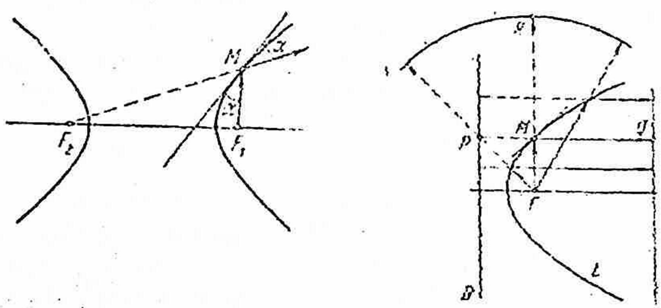
14-chizma

yig'indisi $2a$ ga teng bo'lganligi uchun, u ellipsga tegishli nuqta boladi. Bundan esa l urinma ellipsni ikkita nuqtada kesishi kelib chiqadi. Ellipsning har bir urinmasi uni faqat bitta nuqtada kesib o'tganligi uchun biz ziddiyat hosil qildiq. Demak $\alpha_1 = \alpha_2$ tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Giperola va parabola uchun optik xossalar quyidagi teoremalarda keltirilgan. Giperbola uchun optik xossa ellipsning optik xossasiga o'xshaydi. Parabola uchun esa, optik xossa boshqacha bayon qilinadi. Agar biz yorug'lik manbaini, parabolaning fokusiga joylashtirsak, undan tarqaluvchi yorug'lik nurlari parabolaga urilib singandan so'ng direktrisaga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar bo'ylab harakatlanadi. Bu chiziqlarning optik xossalari fan va texnikada ko'p qo'llaniladi. Misol uchun siz bilasizki parabolaning optik xossasi antennalar yasashda ishlatiladi.

Giperbola va parabolaning optik xossalarini isbotlash o'quvchilarga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

38.5-izoh. Giperbola va parabolaning urinmalari ham ellipsning urinmasi singari, ularni faqat bitta nuqtada kesib o'tadi.



15-chizma

38.6-teorema. Giperbolaning bitta fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng ikkinchi fokusga tushadi.

38.7-teorema. Parabolaning fokusidan chiquvchi nur sinishdan so'ng uning o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanadi.

Parabola, ellips va giperbolaning ba'zi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari. Koordinata boshi chiziqning uchida bo'lgan hol: Ellips kanonik ko'rinishdagi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa,

$$x' = x + a, y' = y \tag{2}$$

almashtirish bajarsak, yangi $O'x'y'$ koordinatalar boshi ellipsning chap $(-a, 0)$ uchida joylashadi va (1) tenglama

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamani

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \tag{4}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda $p = \frac{b^2}{a}$, $q = -\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ bo'lib, $-1 \leq q < 0$ munosabat bajariladi.

Agar giperbolaning

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

tenglamasida

$$x' = x - a, y' = y \tag{6}$$

almashtirish bajarsak tenglama

$$y'^2 = 2px' + qx'^2 \tag{7}$$

ko'rinishda bo'lib, koeffitsiyentlar uchun

$$p = \frac{b^2}{a}, q = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 > 0$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Agar (7) tenglamada $q = 0$ bo'lsa parabola tenglamasini hosil qilamiz. Demak giperbolalar, ellipslar va parabolalar tenglamalarini (7) ko'rinishda yozish mumkin.

39-§. Ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamalari

Parabola $y^2 = 2px$ kanonik tenglama bilan berilgan bo'lsa, qutbni parabola fokusiga joylashtirib, qutb o'qi sifatida abssissa o'qini olib parabola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozaylik. Agar biz

$$x' = x - \frac{p}{2}, y' = y$$

almashtirishlar bajarsak

$$x' = rcos\varphi, y' = rsin\varphi$$

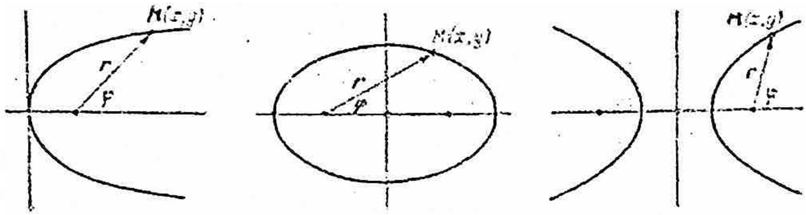
tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu yerda r, φ nuqtaning qutb koordinatalari bo'lib, agar nuqta parabolaga tegishli bo'lsa, r uning fokal radiusiga tengdir. Biz

$$x - \frac{p}{2} = rcos\varphi$$

tenglikda r ning nuqtadan direktrisagacha bo'lgan masofaga tengligini hisobga olib $r = x + \frac{p}{2}$ ifodani yuqoridagi tenglikka qo'ysak

$$r = \frac{p}{1 - cos\varphi}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu munosabat parabolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir.



16-chizma

Ellipsning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutbni ellipsning chap fokusiga joylashtirib, abssissa o'qini qutb o'qi sifatida olamiz. Ellipsning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kanonik tenglamasini qutb koordinatalar sistemasiga o'tkazish uchun

$$\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y \end{cases}$$

almashtirishlar yordamida yangi $O'x'y'$ dekart koordinatlar sistemasini kiritamiz. Bu koordinatalar sistemasi va qutb koordinatalar orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x' = rcos\varphi \\ y' = rsin\varphi \end{cases}$$

formulalar yordamida beriladi. Ellipsning M nuqtasi uchun chap fokal radius uning qutb radiusiga tengligidan foydalanib

$$F_1M = r = ex + a$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikdagi $r = ex + a$ ifodani

$$x + c = rcos\varphi$$

tenglikka qo'ysak

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = a - ec$$

tenglikdan foydalandik.

Giperbola tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun uning har qismi uchun mos ravishda qutb koordinatalar sistemasi kiritamiz. Uning o'ng qismi uchun qutb boshini giperbolaning o'ng fokusiga joylashtiramiz va abssissa o'qini qutb o'qi sifatida olamiz. Giperbola nuqtasi uchun qutb radiusi r uning o'ng fokal radiusiga teng bo'lganligi uchun

$$r = ex - a$$

ifodani hosil qilamiz. Biz bilamizki, agar dekart $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi uchun qutb boshi koordinata boshida joylashgan va qutb o'qi $O'x'$ abssissa o'qi bilan ustma-ust tushsa, qutb koordinatalar sistemasi va $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x' = r\cos\varphi \\ y' = r\sin\varphi \end{cases}$$

formulalar yordamida beriladi. Bu yangi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi va giperbola tenglamasi berilgan Oxy koordinatalar sistemasi orasidagi bog'lanish esa

$$\begin{cases} x' = x - c \\ y' = y \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi. Biz bu tengliklarning birinchisidan foydalanib

$$x - c = r\cos\varphi$$

tenglikni hosil qilamiz. Yuqoridagi $r = ex - a$ ifodani bu tenglikka qo'ysak

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglikdan foydalandik.

Biz giperbola chap shoxining tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida yozish uchun qutb boshini chap fokusga joylashtiramiz va abssissa o'qini qarama-qarshi yo'nalish bilan qutb o'qi sifatida olamiz. Biz agar

$$\begin{cases} x' = -x - c \\ y' = y \end{cases}$$

formulalar bilan yangi dekart koordinatalar sistemasi kiritsak, ular uchun

$$\begin{cases} x' = r\cos\varphi \\ y' = r\sin\varphi \end{cases}$$

formulalar o'rinli bo'ladi. Bu yerda qutb radiusi chap fokal radiusga teng bo'lganligi uchun

$$r = -ex - a$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdagi r ning ifodasini yuqoridagi formulalardan kelib chiqadiagan

$$-x - c = r\cos\varphi$$

tenglikka qo'yib

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2 - a^2}{a} = ec - a$$

tenglik o'rinlidir.

Demak, qutb koordinatalar sistemasi mos ravishda tanlanganda har qanday ikkinchi tartib chiziq tenglamasini

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekan. Bu tenglama $e = 1$ bo'lsa, parabola, $e < 1$ bo'lganda ellips va nihoyat $e > 1$ bo'lganda giperbola tenglamasidir.

40-§. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi. Simmetriya markazi, markaziy va nomarkaziy chiziqlar

40.1-ta'rif. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari ushbu

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami ikkinchi tartibli chiziq deb ataladi. Bu tenlamadagi ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffisiyentlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi talab qilinadi.

Bu (1) tenglama ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

Biz bu mavzuda umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni tekshirish bilan shug‘ullanamiz. Bu ishni koordinatalar sistemasini o‘zgartirish va (1) tenglamani soddalashtirish yordamida amalga oshiramiz. Birinchi navbatda parallel ko‘chirishda (1) tenglama koeffitsiyentlari qanday o‘zgarishini tekshiramiz. Buning uchun

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \tag{2}$$

formulalar yordamida almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda koordinata o‘qlarining yo‘nalishlari o‘zgarmaydi, faqat koordinata boshi $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga ko‘chadi. Bu formulalardan x, y larni topib va (1) ga qo‘yib

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \tag{3}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada koeffitsiyentlar uchun

$$\begin{cases} a'_{11} = a_{11} \\ a'_{12} = a_{12} \\ a'_{22} = a_{22} \\ a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} \\ a'_{33} = F(x_0, y_0) \end{cases} \tag{4}$$

tengliklar o‘rinli bo‘lib, $F(x_0, y_0)$ bilan (1) tenglamaning chap tomonidagi ifoda belgilangan.

Yuqoridagi (3) formulalardan ko‘rinib turibdiki, parallel ko‘chirishda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffitsiyentlar o‘zgarmaydi. Agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

sistemani qanoatlantirsa, (3) tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi.

40.2-tasdiq. Agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa, bu nuqta ikkinchi tartibli chiziq uchun simmetriya markazi bo'ladi. Va aksincha, agar birorta A nuqta chiziq uchun simmetriya markazi bo'lsa uning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantiradi.

Isbot. *Zarurligi.* Haqiqatan ham bu holda koordinatalar boshini $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga parallel ko'chirsak, tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi. Shuning uchun yangi koordinatalar sistemasida

$$F(x', y') = F(-x', -y')$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Chiziqning har bir nuqtasi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan. Demak $O'(x_0, y_0)$ nuqta chiziq uchun simmetriya markazidir.

Yetarliligi. Agar birorta A nuqta chiziq uchun simmetriya markazi bo'lsa uning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Koordinata boshini A nuqtaga joylashtirib, yangi $x'y'$ koordinatalar sistemasini kiritamiz. Agar $M(x', y')$ nuqta chiziqqa tegishli bo'lsa,

$$F(x', y') = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Koordinata boshi simmetriya markazi bo'lgani uchun

$$F(-x', -y') = 0$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning ikkinchisini birinchisidan ayirib

$$a'_{13}x' + a'_{23}y' = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar a'_{13}, a'_{23} koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, bu tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi, ya'ni ikkinchi tartibli chiziqning hamma nuqtalari bir to'g'ri chiziqda yotadi. Agar ikkinchi tartibli chiziq bir to'g'ri chiziqda yotmasa, bu koeffisiyentlarning har ikkalasi ham nolga teng bo'ladi. Bu esa A nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirishini ko'rsatadi. Tasdiq isbotlandi.

Bu faktlarni hisobga olsak quyidagi ta'rifning geometrik ma'nosi yaxshi tushunarli bo'ladi.

40.3-ta'rif. Tekislikdagi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (5) sistemani qanoatlantirsa, u (1) tenglama bilan berilgan ikkkinchi tartibli chiziqning *markazi* deyiladi.

Tabiiyki, (5) sistema yagona yechimga ega bo'lishi, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi yoki umuman yechimga ega bo'lmasligi mumkin.

Agar

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, (5) sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa sistema cheksiz ko‘p yechimga,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat bajarilsa sistema yechimga ega emas.

Bularni e'tiborga olib, biz ikkinchi tartibli chiziqlarni uchta sinfga ajratamiz:

a) yagona markazga ega bo‘lgan chiziqlar;

b) cheksiz ko‘p markazga ega bo‘lgan chiziqlar;

v) markazga ega bo‘lmagan chiziqlar.

Biz quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

bu yerda $a_{21} = a_{12}, a_{31} = a_{13}, a_{32} = a_{23}$ belgilashlar kiritilgan.

Yagona markazga ega chiziqlar uchun $\delta \neq 0$, yagona markazga ega bo‘lmagan chiziqlar uchun $\delta = 0$. Chiziqlar cheksiz ko‘p markazga ega bo‘lishi uchun $\Delta = 0$ tenglik bajarilshi kerak.

Uchinchi tartibli determinantni

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko‘rinishda yozib olsak, oxirgi determinant δ ga tengdir. Agar $\delta = 0$ bo‘lsa, birorta k soni uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabat bajariladi. Bu tenglikni hisobga olib

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $\Delta = 0$ tenglik ham bajarilsa,

$$a_{13} - ka_{23} = 0$$

va

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

tengliklardan kamida bittasi o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisi o'rinli bo'lsa,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$$

munosabatdan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosobat kelib chiqadi. Agar

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ va $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{31}}{a_{32}}$ tengliklardan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosobat kelib chiqadi. Demak $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ tengliklarning bir vaqtda bajarilishi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

shartga teng kuchlidir. Natijada biz quyidagi tasdiqni hosil qilamiz:

40.4-tasdiq. Ikkinchi tartibli chiziq

a) $\delta \neq 0$ bo'lsa, yagona markazga ega;

b) $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ bo'lsa, cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'plami bitta to'g'ri chiziqni tashkil etadi;

c) $\delta = 0$ va $\Delta \neq 0$ bo'lsa, markazga ega emas.

40.5-tasdiq. Yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq markazi o'ziga tegishli bo'lishi uchun $\Delta = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. *Zarurligi.* Ikkinchi tartibli chiziq markazi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lib, u chiziqqa tegishli bo'lsa

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

va

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \tag{7}$$

tengliklar bajariladi. Yuqoridagi (6) tenglikning birinchisini x_0 ga, ikkinchisini y_0 ga ko'paytirib, (7) tenglikdan ayirsak

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak $(x_0, y_0, 1)$ uchlik

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \tag{8}$$

bir jinsli sistemaning notrivial yechimidir. Bu esa $\Delta = 0$ shartga teng kuchlidir.

Yetarliligi. Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, (8) sistema notrivial (x_0, y_0, z_0) yechimga egadir. Bu uchlikda $z_0 \neq 0$, chunki $\delta \neq 0$. Biz $z_0 = 1$ deb hisoblay olamiz, chunki $\delta \neq 0$ bo'lganligi uchun har bir z_0 uchun (x_0, y_0) juftlik mavjud. Yuqoridagi (8) sistemada $z_0 = 1$ bo'lganda (x_0, y_0) juftlik markaz koordinatalari ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari (8) sistemadan foydalanib

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

tenglikni olish mumkin.

41-§. Ikkinchi tartibli chiziq va to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati

Bizga

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

tenglama bilan aniqlangan ikkinchi tartibli chiziq va

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \tag{2}$$

parametrik tenglamalar yordamida ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq va ikkichi tartibli chiziqning kesishish nuqtalarini topish uchun (2) ifodalarni (1) ga qo'yamiz. Natijada quyidagi

$$(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)t^2 + 2\left[(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})l + \right.$$
$$\left. + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})m\right]t + F(x_0, y_0) = 0 \tag{3}$$

kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada ikkinchi darajali had oldidagi ifoda to'g'ri chiziqning yo'nalishiga bog'liq xolos. Ba'zi yo'nalishlar uchun bu ifoda nolga teng bo'ladi va yuqoridagi tenglama chiziqli tenglamaga aylanadi. Ba'zi yo'nalishlar uchun bu ifoda nolga teng emas va yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo'ladi.

41.1-ta'rif. Berilgan $\{l, m\}$ yo'nalish uchun

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \tag{4}$$

tenglik bajarilsa, bu yo‘nalish *asimpotik yo‘nalish*,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0 \tag{5}$$

munosabat bajarilsa *noasimptotik yo‘nalish* deyiladi.

To‘g‘ri chiziq esa mos ravishda asimptotik yoki noasimptotik to‘g‘ri chiziq deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning yo‘nalishi noasimptotik bo‘lsa, yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo‘ladi. Demak bu to‘g‘ri chiziq (1) chiziq bilan ikkita yoki bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin.

41.2-ta’rif. Noasimptotik yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa, u *urinma deb ataladi.*

To‘g‘ri chiziqning yo‘nalishi asimptotik bo‘lsa, yuqoridagi tenglama chiziqli tenglama bo‘ladi. Demak bu holda to‘g‘ri chiziq (1) bilan bitta nuqtada kesishadi, yoki to‘g‘ri chiziqning hamma nuqtalari (1) ga tegishli bo‘ladi.

Agar ikkinchi darajali had koeffitsiyenti nolga teng bo‘lib, ozod had noldan farqli bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmaydi.

41.3-ta’rif. Asimptotik yo‘nalishdagi to‘g‘ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa u ikkinchi tartibli chiziq uchun *asimptota* deyiladi.

Biz

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

tenglamada $l \neq 0$ bo‘lsa, $k = \frac{m}{l}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

ko‘rinishda, agar $m \neq 0$ bo‘lsa, $s = \frac{l}{m}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11}s^2 + 2a_{12}s + a_{22} = 0$$

ko‘rinishda yozamiz. Ikkala holda ham diskriminant uchun

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

tenglik o‘rinli.

Demak $\delta > 0$ bo‘lsa asimptotik yo‘nalish mavjud emas. Bu holda (1) chiziq *elliptik chiziq*, agar $\delta = 0$ bo‘lsa, asimptotik yo‘nalish bitta va bu holda (1) chiziq *parabolik*, $\delta < 0$ bo‘lsa ikkita asimptotik yo‘nalish mavjud, chiziq esa *giperbolik chiziq* deyiladi.

Yuqoridagi (3) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsiyent

$$(a_{11}l + a_{12}m)x + (a_{21}l + a_{22}m)y + a_{13}l + a_{23}m = 0 \tag{6}$$

ko‘rinishga ega. Agar

$$\begin{cases} a_{11}l + a_{12}m = 0 \\ a_{21}l + a_{22}m = 0 \end{cases} \tag{7}$$

tengliklar bir vaqtda bajarilmasa, (6) tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Berilgan $\{l, m\}$ yo'nalish uchun (7) tengliklar bajarilsa, bu yo'nalish *maxsus yo'nalish* deyiladi.

Ikkinchi tartibli chiziq uchun $\delta \neq 0$ bo'lsa, (7) sistema faqat trivial yechimga ega va demak yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar uchun maxsus yo'nalishlar yo'q.

41.4-ta'rif. Maxsus bo'lmagan $\{l, m\}$ yo'nalish uchun (6) tenglama aniqlovchi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziqning $\{l, m\}$ yo'nalishga *qo'shma diametri* deb ataladi.

Diametr tushunchasining korrekt aniqlanganligini ko'rsatamiz. Avvalo $\{l, m\}$ yo'nalish asimptotik yo'nalish bo'lgan holni qaraylik. Bu holda

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

tenglikning chap tomoni uchun

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = (a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m \tag{8}$$

tenglik o'rinli. Demak

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m = 0 \tag{9}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikdan

$$\frac{l}{-(a_{12}l + a_{22}m)} = \frac{m}{a_{11}l + a_{12}m} \tag{10}$$

proportsionallik munosabati kelib chiqadi.

Diametr uchun $\{-(a_{12}l + a_{22}m), a_{11}l + a_{12}m\}$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'lganligi uchun diametr $\{l, m\}$ yo'nalishga parallel bo'ladi. Diametrga tegishli nuqtalar uchun (4) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsiyent nolga teng bo'ladi. Demak bu holda diametr ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota bo'ladi (kesishmaydi) yoki diametrga tegishli hamma nuqtalar (1) chiziqda yotadi.

Noasimptotik $\{l, m\}$ yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq (1) chiziqni ikkita M_1 va M_2 nuqtalarda kesib o'tsa, M_1M_2 kesmaning o'rtasini $M_0(x_0, y_0)$ bilan belgilab to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. Parametrning M_1 va M_2 nuqtalarga mos keluvchi qiymatlarini t_1 va t_2 bilan belgilasak, ular (3) tenglamaning ildizlari bo'ladi va Viyet teoremasigi ko'ra $t_1 + t_2 = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning diametrga tegishli ekanligi kelib chiqadi. Demak noasimptotik $\{l, m\}$ yo'nalishga parallel vatarlarning o'rtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu yo'nalishga qo'shma diametr bo'ladi.

Noasimptotik $\{l, m\}$ yo'nalishga ega bo'lgan va qo'shma diametrga tegishli $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq (1) chiziqni M_1 va M_2 nuqtalarda kesib o'tsa, bu nuqtalarga mos keluvchi parametrning qiymatlari (3) tenglamaning ildizlari bo'ladi. To'g'ri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi diametrga tegishli bo'lganligi uchun (3) tenglamada birinchi darajali had oldidagi koeffitsiyent nolga teng bo'ladi. Viyet teoremasiga ko'ra $t_1 + t_2 = 0$ bo'lganligi uchun $M_0(x_0, y_0)$ nuqta M_1M_2 kesmaning o'rtasi bo'ladi. Demak, diametr tushunchasi korrekt aniqlangan.

Berilgan yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasini

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \tag{11}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, har qanday diametr (1) chiziq markazidan o'tadi.

Qo'shma yo'nalishlar va bosh yo'nalishlar. Berilgan $\{l, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametr yo'nalishi $\{l', m'\}$ uchun

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \tag{12}$$

munosabat o'rinli. Bu munosabatni

$$(a_{11}l + a_{12}m)l' + (a_{12}l + a_{22}m)m' = 0 \tag{13}$$

ko'rinishda yoki

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0 \tag{14}$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

41.5-ta'rif. Ikkita $\{l, m\}$ va $\{l', m'\}$ yo'nalishlar uchun (14) munosabat bajarilsa, bu yo'nalishlar (1) chiziqga nisbatan *qo'shma yo'nalishlar* deyiladi.

Bu munosabatda (1) tenglama koeffitsiyentlari qatnashadi. Koeffitsiyentlar esa koordinatalar sistemasiga bog'liq. Ikkita $\{l, m\}$ va $\{l', m'\}$ yo'nalishlar biror koordinatalar sistemasida (1) chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'lsa, ular ixtiyoriy koordinatalar sistemasida (1) chiziqqa nisbatan qo'shma yo'nalishlar bo'ladi.

41.6-ta'rif. Birorta yo'nalish o'ziga perpendikulyar yo'nalishga qo'shma bo'lsa, u *bosh yo'nalish* deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra $\{l, m\}$ yo'nalish bosh yo'nalish bo'lishi uchun u $\{-m, l\}$ yo'nalishga qo'shma bo'lishi kerak. Albatta, agar $\{l, m\}$ yo'nalish bosh yo'nalish bo'lsa, $\{-m,l\}$ yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi. Berilgan $\{l,m\}$ yo'nalishning bosh yo'nalish bo'lish sharti

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0$$

tenglikda $\{l',m'\}$ vektorni $\{-m,l\}$ bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0. \qquad (15)$$

Agar $\{l,m\}$ maxsus yo'nalish bo'lsa,

$$\frac{l}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

tenglik o'rinli bo'ladi va yuqoridagi (15) shart bajarilgan. Biz bilamizki, faqat $\delta = 0$ bo'lgan hollardagina ikkinchi tartibli chiziq maxsus yo'nalishga ega bo'lib, u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptotik yo'nalish bo'ladi. Demak yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun asimptotik yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi. Albatta maxsus yo'nalishga perpendikulyar yo'nalish ham bosh yo'nalish bo'ladi. Boshqa bosh yo'nalishlar yo'q. Demak yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqlar uchun o'zaro perpendikulyar faqat ikkita bosh yo'nalish mavjuddir.

Yuqoridagi (15) tenglikda $a_{12} = 0$ va $a_{11} = a_{22}$ munosabatlar bajarilsa, bu tenglik ixtiyoriy $\{l,m\}$ yo'nalish uchun bajariladi. Demak bu holda ixtiyoriy yo'nalish bosh yo'nalish bo'ladi. Agar $a_{12} \neq 0$ bo'lsa, (15) tenglik $k = \frac{m}{l}$ (yoki $k = \frac{l}{m}$) ifoda uchun kvadrat tenglama bo'ladi. Bu tenglamada diskriminant uchun

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun u ikkita ildizga ega va demak ikkinchi tartibli chiziq uchun ikkita o'zaro perpendikulyar bosh yo'nalish mavjud.

42-§. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish

Biz bu paragrafda umumiy

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (1)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni aniqlash va uni yasash bilan shug'ullanamiz.

Yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini soddalashtirish. Bu holda parallel ko'chirish yordamida koordinata boshini ikkinchi tartibli chiziqning markaziga joylashtiramiz. Natijada tenglamada bosh koeffitsiyentlar o'zgarmaydi, birinchi darajali hadlar esa ishtirok etmaydi va (1) tenglama yangi koordinatalar sistemasida

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$$

ko'rinishni oladi.

Koordinata o'qlarini o'zaro perpendikulyar bosh yo'nalishlar bo'yicha yo'naltiramiz. Yo'nalishlarning o'zaro qo'shma bo'lishi invariant xossa bo'lganligi uchun yangi koordinatalar sistemasida $\{1, 0\}$ va $\{0, 1\}$ yo'nalishlar o'zaro qo'shma bo'ladi. Bu shart

$$a'_{12} = 0$$

tenglikka teng kuchlidir. Demak bu holda ikkinchi tartibli chiziqning tenglamasi

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \tag{2}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada $a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0$, chunki

$$\delta = a'_{11}a'_{22} - (a'_{12})^2 \neq 0.$$

Ammo a'_{33} koeffitsiyent esa nolga teng bo'lishi ham, nolga teng bo'lmasligi ham mumkin. Agar a'_{33} koeffitsiyent nolga teng bo'lsa, (2) tenglama

$$Ax'^2 + By'^2 = 0 \tag{3}$$

ko'rinishga keladi. Agar A va B koeffitsiyentlar har xil ishoralarga ega bo'lsa, bu tenglama ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Koeffitsientlar bir xil ishoralarga ega bo'lsa, bu tenglama bitta nuqta (yoki ikkita kesishuvchi mavhum to'g'ri chiziqlar)ni aniqlaydi.

Yuqoridagi (2) tenglamada a'_{33} koeffitsiyent nolga teng bo'lmasa, tenglama

$$Ax'^2 + By'^2 = 1 \tag{4}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama esa koeffitsiyentlarning ishorasiga qarab, ellipsni, mavhum ellips yoki giperbolani aniqlaydi. Demak, yagona markazga ega bo'lgan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi beshta chiziqlarning biridan iborat:

1. Ellips;
2. Mavhum ellips;
3. Giperbola;
4. Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq;
5. Bitta nuqta (yoki ikkita kesishuvchi mavhum to'g'ri chiziqlar).

Yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini soddalashtirish. Biz bu holda yangi ordinata o'qini maxsus bo'lmagan bosh yo'nalish bo'yicha yo'naltiramiz. Bu yo'nalish noasimptotik ekanligini bilamiz. Abstsissa o'qi sifatida ordinata o'qi yo'nalishiga qo'shma diametrni olamiz. Yangi koordinatalar sistemasida ordinata o'qi yo'nalishi $\{0,1\}$ koordinatalarga ega bo'ladi va bu yo'nalishga qo'shma diametr tenglamasi

$$a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglama $y' = 0$ tenglamaga teng kuchli bo'lganligi uchun

$$a'_{21} = a'_{23} = 0, a'_{22} \neq 0$$

munosabatlarni olamiz. Bundan tashqari

$$\delta = a'_{11}a'_{22} - (a'_{12})^2 = 0$$

tenglikni hisobga olsak $a'_{11} = 0$ kelib chiqadi. Natijada yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} = 0 \tag{5}$$

ko'rinishga keladi. Bu chiziq uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{31} & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = -a'_{22}(a'_{13})^2$$

bo'lganligi uchun, agar $a'_{13} \neq 0$ bo'lsa ikkinchi tartibli chiziq markazga ega bo'lmaydi, agar $a'_{13} = 0$ bo'lsa ikkinchi tartibli chiziq cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'g'ri chiziqni tashkil qiladi.

Agar ikkinchi tartibli chiziq markazga ega bo'lmasa, yuqoridagi (5) tenglamada $a'_{13} \neq 0$ va ikkinchi tartibli chiziq abssissa o'qini $x' = -\frac{a'_{33}}{2a'_{13}}$ nuqtada kesib o'tadi. Biz koordinata boshini shu nuqtaga ko'chirib, tenglamani

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' = 0 \tag{6}$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamada a'_{13} koeffitsientning ishorasi a'_{22} koeffitsiyent ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa, (6) tenglama

$$y'^2 = 2px' \tag{7}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada $p > 0$ bo'lganligi uchun, u parabolani aniqlaydi.

Agar a'_{13} koeffitsiyent ishorasi a'_{22} koeffitsiyent ishorasi bilan bir xil bo'lsa, (7) tenglamada $p < 0$ bo'lganligi uchun, u bo'sh to'plamni aniqlaydi.

Yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziqning (5) tenglamasida a'_{13} koeffitsiyent nolga teng bo'lsa, tenglama

$$a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \tag{8}$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglamada $a'_{22} \neq 0$, a'_{33} koeffitsiyent esa nolga teng bo'lishi ham, nolga teng bo'lmasligi ham mumkin. Agar a'_{33} koeffitsiyent nolga teng bo'lsa, (8) tenglama

$$y'^2 = 0 \tag{9}$$

ko'rinishga keladi va ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Yuqoridagi (8) tenglamada a'_{33} koeffitsiyent nolga teng bo'lmasa, tenglama

$$y'^2 = c \tag{10}$$

ko'rinishga keladi. Agar a'_{33} koeffitsiyentning ishorasi a'_{22} koeffitsiyent ishorasiga qarama-qarshi bo'lsa, (10) tenglamada $c > 0$ bo'ladi va u ikkita parallel to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Agar a'_{33} koeffitsiyentning ishorasi a'_{22} koeffitsiyent ishorasi bilan bir xil bo'lsa, (10) tenglamada $c < 0$ bo'ladi va u bo'sh to'plam (yoki ikkita parallel mavhum to'g'ri chiziqlar)ni aniqlaydi.

Demak yagona markazga ega bo'lmagan ikkinchi tartibli chiziq quyidagi uchta chiziqlarning biridan iborat:

1) parabola (markazga ega emas);
2) ikkita parallel to'g'ri chiziq (markazlar to'g'ri chizig'iga ega);
3) ikkita ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziq (markazlar to'g'ri chizig'iga ega);
4) ikkita parallel mavhum to'g'ri chiziqlar.

43-§. Ikkinchi tartibli chiziqlarning invariantlari

Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi odatda quyidagi ko'rinishlardan birida yoziladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \tag{1'}$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1''}$$

(1) ko'rinishdagi tenglama quyidagi chiziqlarning birini aniqlaydi:

$$(I)\begin{cases}\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \text{ ellips}\\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1 \text{ mavhum ellips}\\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0 \text{ ikkita mavhum kesishuvchi to‘g‘ri chiziq}\\ \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=\pm1 \text{ giperbola}\\ \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0 \text{ ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq}\end{cases}$$

$$(II)\ Y^2=2px \qquad \text{parabola}$$

$$(III)\begin{cases}X^2=a^2,\ a\neq0 \text{ ikkita parallel to‘g‘ri chiziq}\\ X^2=-a^2,\ a\neq0 \text{ ikkita parallel mavhum to‘g‘ri chiziq}\\ X^2=0, \text{ ikkita ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziq}\end{cases}$$

Ushbu

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \tag{2}$$

$$K_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \tag{3}$$

$$I_1=a_{11}+a_{22} \tag{4}$$

ifodalar to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini boshqa to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga almashtirishga nisbatan ikkinchi tartibli chiziqning *invariantlari* deyiladi, bu yerda $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$ deb hisoblanadi. Bu esa quyidagini bildiradi: agar biror to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida ikkinchi tartibli chiziq

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a=0$$

tenglama bilan va boshqa to‘g‘ri to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida shu chiziq

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'=0$$

tenglama bilan berilsa, u holda:

$$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a'_{11} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{22}\end{vmatrix}$$

$$K_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a'_{11} & a'_{12} & a'_{13}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23}\\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}\end{vmatrix}$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}=a'_{11}+a'_{22}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Agar $I_2 = 0$, $K_3 = 0$ bir vaqtda bajarilsa, u holda ushbu

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix}$$

ifoda ham (aytilgan ma'noda) invariant bo'ladi va u *semiinvariant* deyiladi.

Ushbu

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \tag{5}$$

tenglama *xarakteristik tenglama* deyiladi. Uning λ_1, λ_2 ildizlari doimo haqiqiy.

Haqiqatan (5) kvadrat tenglamaning diskriminanti $D = I_1^2 - 4I_2$ ga teng bo'lib, bu ifodani ikkinchi tartibli chiziq tenglamasidagi koeffitsiyentlar orqali ifodalasak

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 \geq 0 \tag{6}$$

munosabat bajariladi.

Ikkinchi tartibli chiziqlarni uch guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruhga yagona simmetriya markaziga ega bo'lgan chiziqlar kiradi, ular: ellips, mavhum ellips, kesishadigan ikki mavhum to'g'ri chiziq, giperbola va kesishadigan ikki to'g'ri chiziq.

Ikkinchi tartibli chiziq yagona markazga ega (ya'ni I guruhga tegishli) bo'lishi uchun $I_2 \neq 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Ikkinchi guruhga simmetriya markaziga ega bo'lmagan chiziqlarni, ya'ni parabolani kiritamiz.

Chiziqning parabola bo'lishi uchun ushbu $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Uchinchi guruhga simmetriya markazlari to'g'ri chiziqni tashkil etadigan chiziqlarni kiritamaz, ular: ikkita parallel to'g'ri chiziq, ikkita mavhum parallel to'g'ri chiziq, ustma-ust tushadigan ikkita to'g'ri chiziq.

Ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya markazlari to'g'ri chiziqni tashkil etadigan bo'lishi uchun $I_2 = 0$, $K_3 = 0$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Chiziqlarning asosiy elementlari: shakli, o'lchamlari. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini almashtirish natijasida I guruh chiziqlarining tenglamasini

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \tag{7}$$

II guruh chiziqlarining tenglamasini

$$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y = 0 \tag{8}$$

III guruh chiziqlarining tenglamasini

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \tag{9}$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli chiziqlarning mos guruhlarga tegishli bo'lishining zaruriy va yetarli alomatlari invariantlar orasidagi munosabatlar bilan quyidagicha ifodalanadi:

I. Ellips: $I_2 > 0, I_1K_3 < 0$,
Mavhum ellips: $I_2 > 0, I_1K_3 > 0$,
Kesishuvchi ikkita mavhum to'g'ri chiziq: $I_2 > 0, K_2 = 0$,
Giperbola: $I_2 < 0, K_3 \neq 0$,
Kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq: $I_2 < 0, K_2 = 0$.
2. Parabola: $I_2 = 0, K_3 \neq 0$.
3. Ikkita parallel to'g'ri chiziq: $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 < 0$,
Ikki mavhum parallel to'g'ri chiziq: $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 > 0$,
Ustma-ust tushadigan to'g'ri chiziq: $I_2 = 0,\ K_3 = 0,\ K_2 = 0$.

Ellips yoki giperbolaning boshlang'ich koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashishi quyidagicha aniqlanadi: Yangi koordinatalar sistemasining boshi

$$(III) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

sistemani yechish natijasida topiladi.

Yangi $O'X'$ o'qning burchak koeffitsiyenti ($a_{12} \neq 0$ holda)

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \tag{11}$$

formuladan topiladi, bu yerda λ_1 son xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lib, (7) tenglamadagi X^2 oldidagi koeffitsiyentdir.

Agar chiziq ellips bo'lib λ_1 xarakteristik tenglamaning absolyut qiymati jihatdan kichik ildizi bo'lsa, (11) formula ellips katta o'qining burchak koeffitsiyentini aniqlaydi.

Agar chiziq giperbola bo'lib, λ_1 xarakteristik tenglamaning K_3 bilan bir xil ishorali ildizi bo'lsa, u holda: (11) formula giperbola haqiqiy o'qining burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Agar parabolaning uchi, parametri va o'qi bo'yicha botiqlik tomoniga yo'nalgan vektor ma'lum bo'lsa, parabolaning boshlang'ich sistemaga nisbatan joylashishi ma'lum bo'ladi.

Parabola uchi parabola o'qi tenglamasi bilan parabola tenglamasini birgalikda yechish natijasida, ya'ni parabola o'qining

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0 \tag{12}$$

yoki

$$a_{12}x + a_{22}y + \frac{a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0$$

tenglamasini parabola tenglamasi bilan birga yechib topiladi.

Koordinatalari

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} \tag{13}$$

sonlardan iborat vektor parabola o'qiga parallel bo'lib, botiqlik tomoniga yo'nalgan.

Parabolaning parametri

$$p = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}} \tag{14}$$

formuladan aniqlanadi.

Agar ikkinchi tartibli chiziq ikkita to'g'ri chiziqqa ajralsa, bu to'g'ri chiziqlar tenglamalarini tuzish uchun chiziq tenglamasining chap tomonini chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib, ularning har birini nolga tenglashtiriladi.

Masala. Quyidagi

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

tenglama bilan aniqlangan chiziq tenglamasini soddalashtiring.

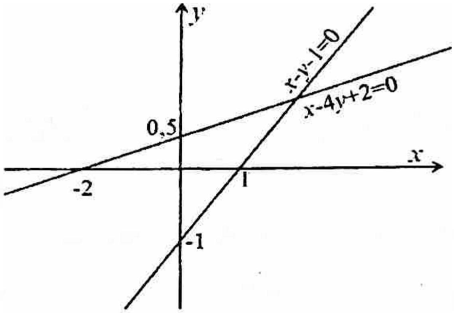
Yechish. Berilgan ikkinchi tartibli chiziq uchun ikkinchi invariantni hisoblasak,

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} < 0,$$

demak chiziq birinchi guruhga tegishli, ya'ni berilgan chiziq giperbolik tipda. Ushbu

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

munosabatdan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning kesishadigan ikkita to'g'ri chiziqdan iborat ekanligini ko'ramiz.



1-chizma

Tenglamani ikkita chiziqli ko'paytuvchilarga ajratish yordamida soddalashtiramiz.

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = x^2 + (-5y + 1)x + 4y^2 + 2y - 2 =$$

$$= x^2 + (-5y + 1)x + \left(\frac{-5y + 1}{2}\right)^2 + 4y^2 + 2y - 2 - \left(\frac{-5y + 1}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(x + \frac{-5y + 1}{2}\right)^2 + 4y^2 + 2y - 2 - \frac{25y^2 - 10y + 1}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{-5y + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3y - 3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{-5y + 1}{2} + \frac{3y - 3}{2}\right) \times$$

$$\times \left(x + \frac{-5y + 1}{2} - \frac{3y - 3}{2}\right) = (x - y - 1)(x - 4y + 2),$$

bu to'g'ri chiziqlar tenglamalari: $x - y - 1 = 0$ va $x - 4y + 2 = 0$ dan iborat.

VIII BOB. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR NAZARIYASI

44-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari

Biz bu bobda ikkinchi darajali tenglamalar bilan aniqlanadigan sirtlarni qaraymiz.

Ellipsoid va giperboloidlar

Fazoda dekart koordinatalari sistemasi kiritilgan bo'lib, unda ikkinchi darajali $F(x, y, z)$ ko'phad yordamida berilgan

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy +$$

$$+2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qaraylik.

44.1-ta'rif. Fazoda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami *ikkinchi tartibli sirt* deb ataladi, bu yerda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffitsiyenlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lishi talab qilinadi. Tenglama esa ikkinchi tartibli sirtning *umumiy tenglamasi* deyiladi.

44.2-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u *ellipsoid* deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b \geq c > 0$ munosabat bajarilishi talab qilinadi.

Ellipsoid tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.

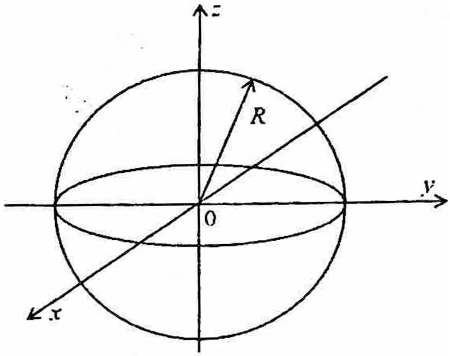
Ellipsoidning shaklini chizish uchun uning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimini qaraymiz. Masalan, uni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| < c$ bo'lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellipslar hosil bo'ladi. Bu tenglamani

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin.



1-chizma

Huddi shunday, ellipsoidni Oxz, Oyz tekisliklariga parallel tekisliklar bilan bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olib, ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin (1-chizma).

44.3-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u *ikki pallali giperboloid* deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko'rish mumkinki, uchinchi o'zgaruvchi $z \leq -c$ va $z \geq c$ tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak. Demak, ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir. Agar ikki pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| > c$ bo'lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$$

kattaliklarga tengdir.

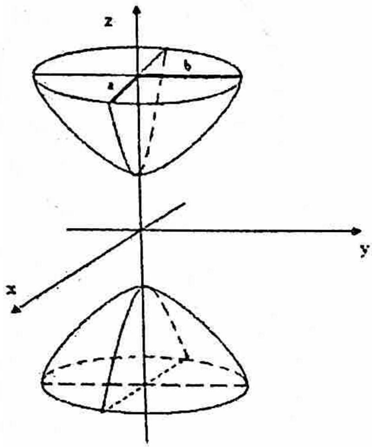
Agar ikki pallali giperboloidni $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{h^2}{b^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1},\ a\sqrt{\frac{h^2}{b^2}+1}$$

kattaliklarga tengdir.



2-chizma

Huddi shunday ikki pallali giperboloidni $x = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{a^2}+1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1},\ b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}$$

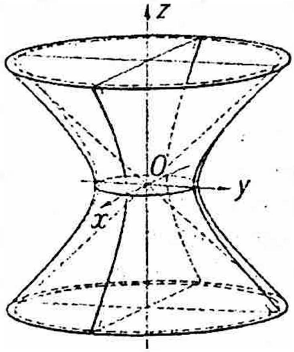
kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (3) tenglamadan ko'rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bularni hisobga olib uni chizmada tasvirlashimiz mumkin (2-chizma).

44.4-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{4}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u *bir pallali giperboloid* deb ataladi. Bu yerda $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.



3-chizma

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bir pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1},\ b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} + 1}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $h = 0$ bo'lsa, kesimda eng kichkina ellips hosil bo'ladi. Bu ellips bir pallali giperboloidning *bo'g'zi* deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni $x = h$, $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, mos ravishda $|h| < a$ va $|h| < b$ bo'lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2},\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo'ladi. Bu giperbolalardan birinchisining yarim o'qlari mos ravishda

$$b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}},\ c\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $|h| = a$ yoki $|h| = b$ bo'lsa, kesimda mos ravishda

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ va } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi. Bu faktlarni hisobga olib bir pallali giperboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin (3-chizma).

44.5-ta'rif. Sirtning har bir nuqtasidan shu sirtda yotuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tsa, bunday sirt *chiziqli sirt* deyiladi.

Sirt chegaralagan bo‘lsa, unda to‘g‘ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chiziqli sirt bo‘lmaydi. Demak ellipsoid chiziqli sirt bo‘lmaydi.

44.6-teorema. Bir pallali giperboloid chiziqli sirt bo‘lib, uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

Konus va uning kesimlari

44.7-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{5}$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa, u *konus* deb ataladi. Bu yerda $a \geq b \geq 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Konus tenglamasidan ko‘rinib turibdiki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir. Bundan tashqari, agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta konusga tegishli bo'lsa, $O(0,0,0)$ va $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqdagi har bir nuqta konusga tegishlidir. Haqiqatan ham, bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqta (tx_0, ty_0, tz_0) ko‘rinishga ega va bevosita

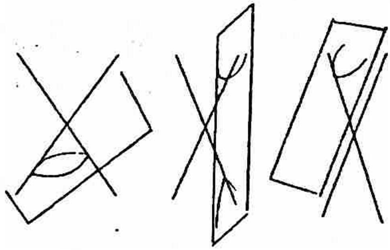
$$\frac{(tx_0)^2}{a^2}+\frac{(ty_0)^2}{b^2}-\frac{(tz_0^2)}{c^2}=t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)=0$$

tenglikni tekshirib ko‘rish mumkin.

Konusni $z = h$ tenglama bilan aniqlanuvchi tekisliklar bilan kessak, kesimda $h \neq 0$ bo‘lganda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$$

ellipslar hosil bo‘ladi. Konusning har bir yasovchisi bu ellipslarni bir marta (faqat bitta nuqtada) kesib o‘tadi. Konusda yotuvchi va bu xossaga ega bo‘lgan chiziqlar *konusning yasovchisi* deyiladi. Bu ellipslarning markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq *konusning o‘qi* deyiladi.



4-chizma

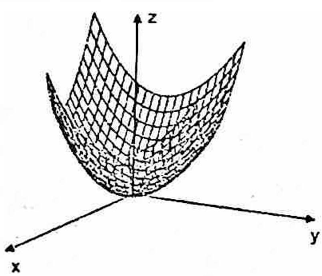
Yuqoridagi kanonik tenglamada konusning o'qi oz o'qi bilan ustma-ust tushadi. Koordinata boshi ham konusga tegishli, konusning hamma yasovchilari bu nuqtadan o'tadi. Konusning hamma yasovchilari o'tuvchi nuqta uning *uchi* deb ataladi.

Paraboloidlar

44.8-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt umumiy tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \qquad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u *elliptik paraboloid* deb ataladi. Bu tenglamada $p > 0$, $q > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.



5-chizma

Elliptik paraboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki, koordinata boshi unga tegishli, xOz va yOz tekisliklari elliptik paraboloidning simmetriya tekisliklari bo'ladi. Elliptik paraboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h > 0$ bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{2hp}$, $\sqrt{2hq}$ kattaliklarga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Elliptik paraboloidni $x = h$, $y = h$ tenglamalar bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda fokal parametrlari mos ravishda p, q kattaliklarga teng bo'lgan parabolalar hosil bo'ladi. Bu parabolalarning uchlari mos ravishda

$\left(0,\, h,\, \frac{h^2}{2q}\right)$ va $\left(0,\, h,\, \frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtalarda joylashgan. Bu xossalarni hisobga olib, elliptik paraboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin (5-chizma).

44.9-ta'rif. Ikkinchi tartibli sirt umumiy tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \tag{6}$$

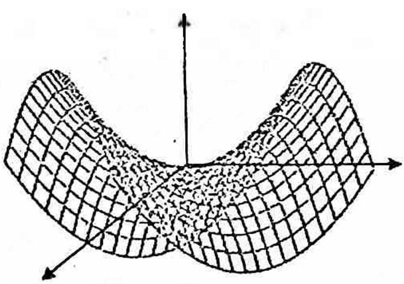
(6) ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u *giperbolik paraboloid* deb ataladi. Bu tenglamada $p > 0$, $q > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Giperbolik paraboloid ham xOz va yOz tekisliklarlarga nisbatan simmetrik joylashgandir. Agar giperbolik paraboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h > 0$ bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{2hp}$, $\sqrt{2hq}$ kattaliklarga teng bo'lgan giperbola hosil bo'ladi. Agar $h < 0$ bo'lsa, kesimda haqiqiy o'qi Ox o'qqa, mavhum o'qi Oy o'qqa parallel va yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{-2hp}$, $\sqrt{-2hq}$ kattaliklarga teng bo'lgan giperbola paydo bo'ladi. Kesuvchi tekislik xOy tekisligi bilan ustma-ust tushsa, kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri hosil bo'ladi.

Giperbolik paraboloidni o'qiga parallel tekisliklar bilan kesssak kesimda parabolalarni olamiz.



6-chizma

Masalan kesuvchi tekislik $x = h$ tenglama bilan berilsa, kesimda fokal parametri q ga teng va uchi $\left(h,\, 0,\, \frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtada bo'lgan parabola hosil bo'ladi.

44.10-teorema. Giperbolik paraboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan paraboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot. Giperbolik paraboloidga tegishli $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi

va

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziq paraboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{p} - \frac{(y_0 + mt)^2}{q} = 2(z_0 + nt)$$

tenglik parametrning har bir qiymatida bajarilishi kerak. Bu tenglikni

$$t^2 \left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} \right) + 2t \left(\frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n \right) = 0$$

ko'rinishda yozib, undan

$$\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklardan $\{l, m, n\}$ yo'nalish uchun

$$l : m : n = \sqrt{p} : u\sqrt{q} : \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} \right)$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu yerda $u = \pm 1$ tenglik bajarilgan. Demak giperbolik paraboloidning har bir nuqtasidan unda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi. Bu to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = x_0 + t\sqrt{p} \\ y = y_0 + ut\sqrt{q} \\ z = z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} \right) \end{cases} \tag{7}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu parametrik tenglamalarda

$$\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} \neq 0$$

munosabat bajarilsa,

$$t = t_1 = -\frac{z_0}{\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} \right)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0}{\sqrt{q}} \right)$$

bo'lganda (7) to'g'ri chiziqlar $z = 0$ tekislikni kesib o'tadi. Bu tekislikda

$$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \; \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \tag{8}$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ham yotadi. Demak (7) to'g'ri chiziq (8) to'g'ri chiziqlarning bittasini kesib o'tadi. Buni aniqlash uchun (7) ifodalarni (8) tenglamalarga qo'ysak

$$\left(\frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0 + ut_1\sqrt{q}}{\sqrt{q}}\right) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) + 2t_1 = 0$$

tenglikni olamiz. Demak (7) to'g'ri chiziq

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + u\frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \tag{9}$$

to'g'ri chiziqni kesib o'tadi. Bu to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = \tau\sqrt{p} \\ y = -\tau u\sqrt{q} \end{cases}$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $-\infty < \tau < +\infty$. Yuqoridagi (7) va (9) to'g'ri chiziqlar $(x_0 + t_1\sqrt{p}, y_0 + ut_1\sqrt{q})$ nuqtada kesishadi va bu nuqtaga parametrning

$$\tau_1 = \frac{x_0 + t_1\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{x_0}{\sqrt{p}} + t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)$$

qiymati mos keladi. Agar $t' = t - t_1$ belgilashni kiritib, (7) to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalarini

$$\begin{cases} x = x_0 + t\sqrt{p} = (x_0 + t_1\sqrt{p}) + (t - t_1)\sqrt{p} = (t' + \tau_1)\sqrt{p} \\ y = y_0 + ut\sqrt{q} = (y_0 + ut_1\sqrt{q}) + u(t - t_1)\sqrt{q} = u(t' - \tau_1)\sqrt{q} \\ z = z_0 + t\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = (t - t_1)\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right) = 2t'\tau_1 \end{cases}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Agar $\frac{x_0}{\sqrt{p}} - u\frac{y_0}{\sqrt{q}} = 0$ bo'lsa, giperbolik paraboloidning (6) tenglamasidan $z_0 = 0$ tenglik kelib chiqadi. Demak bu holda (7) to'g'ri chiziq $z = 0$ tekislikda yotadi.

45-§. Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasini soddalashtirish

Ikkinchi tartibli sirt umumiy tenglamasi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

bilan berilgan bo'lsin.

Bu tenglama to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan bo'lsa, quyidagi ifodalar to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasini parallel ko'chirish va burishga nisbatan invariantlari hisoblanadi:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Semiinvariant nomini olgan quyidagi ikki ifoda, to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini burishga nisbatan invariantlardir:

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a \end{vmatrix},$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a \end{vmatrix}.$$

Agar $I_3 = 0$, $K_4 = 0$ bo'lsa, K_3 semiinvariant ayni vaqtda burishga nisbatan ham invariant bo'ladi, $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 = 0$, $K_3 = 0$ holda esa, K_2 semiinvariant parallel ko'chirishga nisbatan invariant bo'ladi.

I. $I_3 \neq 0$ holda ikkinchi tartibli sirt tenglamasini to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish natijasida quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0 \tag{1}$$

bu yerda λ_1, λ_2, λ_3 - quyidagi xarakteristik tenglamaning ildizlaridir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

yoki

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

1^0. Agar λ_1, λ_2, λ_3 bir xil ishorali, $\frac{K_4}{I_3}$ esa ularga teskari ishorada bo'lsa, u holda (1) tenglama ellipsoidni aniqlaydi. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ deb hisoblab, (1) tenglamani

$$\frac{X^2}{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}} + \frac{Y^2}{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}} + \frac{Z^2}{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}} = 1$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Bunda ellipsoidning yarim o'qlarini $a = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}$, $b = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}$, $c = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}}$ ko'rinishda yoza olamiz va $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ qilingan farazga ko'ra $a \geq b \geq c$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

2^0. Agar λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{K_4}{I_3}$ bir xil ishorali bo'lsa, u holda (1) tenglama mavhum ellipsoidni aniqlaydi: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ deb hisoblagan holda uni $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$ ko'rinishga keltiramiz, bunda: $a = \sqrt{\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}$, $b = \sqrt{\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}$, $c = \sqrt{\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}}$ qilingan $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ farazga ko'ra $a \geq b \geq c$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

3^0. Agar λ_1, λ_2, λ_3 sonlar bir xil ishorali va $K_4 = 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama mavhum konusni aniqlaydi. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$ deb hisoblagan holda uni

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

ko'rinishga keltiramiz, bunda:

$$a = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}},\ b = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}},\ c = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_3|}}$$

va shu bilan birga $a \geq b \geq c$.

4^0. Agar (2) xarakteristik tenglama ildizlarining ikkitasi bir xil ishorali, uchinchi ildizi bilan $\frac{K_4}{I_3}$ ularga teskari ishorali bo'lsa, (1) tenglama bir pallali giperboloidni aniqlaydi. Bu holda xarakteristik tenglamaning bir xil ishorali ildizlarini λ_1, λ_2 deb belgilab va $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ deb faraz qilib (1) tenglamani

$$\frac{X^2}{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}} + \frac{Y^2}{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}} - \frac{Z^2}{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}} = 1$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu erda: $a = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}}$, $b = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}}$, $c = \sqrt{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}}$, $a \geq b$.

5^0. Xarakteristik tenglamaning ikki ildizi va $\frac{K_4}{I_3}$ ozod hadi bir xil ishorali, xarakteristik tenglamaning uchinchi ildizi esa ularga teskari ishorali bo'lsa, (1) tenglama ikki pallali giperboloidni aniqlaydi. Bu holda xarakteristik tenglamaning bir xil ishorali ildizlari λ_1 va λ_2 ni olib $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ deb hisoblasak, (2) tenglamani

$$\frac{X^2}{-\frac{K_4}{\lambda_1 I_3}} + \frac{Y^2}{-\frac{K_4}{\lambda_2 I_3}} - \frac{Z^2}{-\frac{K_4}{\lambda_3 I_3}} = -1$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

ko'rinishida yozamiz, bunda: $a \geq b$.

6^0. Xarakteristik tenglamaning ikkita ildizi bir xil ishorali, uchinchi ildizi ularga teskari va $K_4 = 0$ bo'lsa, u holda (1) tenglama konusni aniqlaydi. λ_1 va λ_2 sonlar bir xil ishorali ildizlar va $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ deb hisoblanganda (1) tenglamani

$$\frac{X^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}} - \frac{Z^2}{\frac{1}{|\lambda_3|}} = 0$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

korinishga keltiramiz. Bu yerda $a \geq b$ bo'lib:

$$a = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}},\ b = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}},\ c = \sqrt{\frac{1}{|\lambda_3|}}$$

Xarakteristik tenglamadagi musbat ildizlar soni uning koeffitsiyentlari orasidagi ishoralar almashuvlari soniga teng bo'ladi (Dekart qoidasi).

II. Agar $I_3 = 0$, $K_4 \neq$ bo'lsa, u holda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish va burish natijasida ikkinchi tartibli sirt tenglamasini

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}Z = 0 \tag{3}$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Bu tenglamada λ_1 va λ_2 xarakteristik tenglamaning noldan farqli bo'lgan ildizlari.

7^0. Agar λ_1 va λ_2 sonlar bir xil ishorali bo'lsa, u holda (3) tenglama elliptik paraboloidni aniqlaydi. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ deb hisoblab (3) tenglamani

$$\frac{X^2}{\pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}} + \frac{Y^2}{\pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}} = 2Z$$

ko'rinishda yoza olamiz.

$$p = \pm\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}},\ q = \pm\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$$

deb olib, ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z$$

bunda: $p \geq q > 0$.

8^0. Agar λ_1 va λ_2 sonlar har xil ishorali bo'lsa, (3) tenglama giperbolik paraboloidni aniqlaydi. λ_1 ni musbat, λ_2 ni manfiy ildiz deb olib, $\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}$ radikal oldidagi ishoradan minusini olib, (3) tenglamani

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}} - \frac{Y^2}{-\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}} = 2Z$$

yoki

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z$$

ko'rinishda yozamiz, bu erda:

$$p = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}, \; q = -\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{K_4}{I_2}}.$$

III. Agar $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 \neq 0$ bo'lsa, to'gri burchakli koordinatalar sistemasini burish va parallel ko'chirish natijasida ikkinchi tartibli sirt tenglamasini

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \tag{4}$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Bu yerda λ_1 va λ_2 sonlar xarakteristik tenglamaning noldan farqli ildizlari.

9^0. Agar λ_1 va λ_2 sonlar bir xil ishorali, $\frac{K_3}{I_2}$ esa ularga qarama-qarshi ishorali bo'lsa, (4) tenglama elliptik silindrni aniqlaydi. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ deb hisoblab, (4) tenglamani

$$\frac{X^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{Y^2}{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = 1$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ko'rinishida yozib olamiz, bu yerda $a \geq b$ bo'lib,

$$a = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}, \; b = \sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}.$$

10^0. Agar λ_1, λ_2, $\frac{K_3}{I_2}$ sonlar bir xil ishorali bo'lsa, (4) tenglama mavhum elliptik silindrni aniqlaydi. $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ deb hisoblab, (4) tenglamani

$$\frac{X^2}{\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{Y^2}{\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}} = -1$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1$$

ko'rinishda yozamiz, bunda $a \geq b$.

11^0. Agar λ_1, λ_2 sonlar bir xil ishorali va $K_3 = 0$ bo'lsa, u holda (4) tenglama kesishadigan ikkita mavhum tekisliklarni aniqlaydi. Bu holda (4) tenglamani

$$\frac{X^2}{\frac{1}{|\lambda_1|}}+\frac{Y^2}{\frac{1}{|\lambda_2|}}=0$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$$

ko'rinishda yozib olamiz, bunda $a \geq b$. bo'lib,

$$a=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_1|}},\ b=\sqrt{\frac{1}{|\lambda_2|}}.$$

12^0. Agar λ_1, λ_2 sonlar har xil ishorali va $K_3 \neq 0$ bo'lsa, (4) tenglama giperbolik silindrni aniqlaydi. λ_1 deb xarakteristik tenglamaning $\frac{K_3}{I_2}$ ning ishorasiga teskari ishorali ildizni olib, (4) tenglamani

$$\frac{X^2}{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}}-\frac{Y^2}{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}=1$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda

$$a=\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_1 I_2}},\ b=\sqrt{-\frac{K_3}{\lambda_2 I_2}}.$$

13^0. Agar λ_1, λ_2 sonlar har xil ishorali va $K_3 = 0$ bo'lsa, (4) tenglama kesishadigan ikkita tekislikni aniqlaydi. Xarakteristik tenglamaning musbat ildizini λ_1 deb olib, (4) tenglamani

$$\frac{X^2}{\frac{1}{\lambda_1}}-\frac{Y^2}{\frac{1}{\lambda_2}}=0$$

yoki

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$$

ko'rinishda yozamiz, bunda

$$a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}},\ b = \sqrt{-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

IV. Agar $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ hol yuz bersa, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini burish va parallel ko'chirish natijasida ikkinchi tartibli sirt tenglamasini

$$\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y = 0 \tag{5}$$

ko'rinishga keltirish mumkin, bu yerda $\lambda_1 = I_1$ son xarakteristik tenglamaning noldan farqli bo'lgan ildizi.

14^0. Yuqoridagi (5) tenglamani ushbu

$$X^2 = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}Y$$

ko'rinishda yozish ham mumkin. Bu tenglama parabolik silindrni aniqlaydi. Bu silindrning yasovchilariga perpendikular bo'lgan tekislik bilan kesishish natijasida hosil bo'lgan parabolaning parametrini ushbu

$$p = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}$$

formuladan aniqlanadi.

V. Agar $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 = 0$, $K_3 = 0$ bo'lsa, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini burish natijasida ikkinchi tartibli sirt tenglamasini

$$\lambda_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$$

yoki

$$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$$

yoki

$$X^2 + \frac{K_2}{I_1^2} = 0 \tag{6}$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

15^0. Agar $K_2 < 0$ bo'lsa, (6) tenglama ikkita parallel tekislikni aniqlaydi. Bu holda ushbu $\frac{K_2}{I_1^2} = -a^2$ belgilashni kiritib olib, tenglamani $X^2 - a^2 = 0$ ko'rinishda yozib olamiz.

16^0. Agar $K_2 > 0$ bo'lsa, (6) tenglama ikkita mavhum parallel tekislikni aniqlaydi. Bu holda $\frac{K_2}{I_1^2} = -a^2$ deb, tenglamani $X^2 + a^2 = 0$ ko'rinishda yozamiz.

17^0. Nihoyat, $K_2 = 0$ bo'lsa, (6) tenglama ikkita ustma-ust tushuvchi tekislikni aniqlaydi: $X^2 = 0$.

45.1-tasdiq. Ikkinchi tartibli sirt aylanma sirt bo'lishi uchun uning xarakteristik tenglamasi karrali ildizga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kanonik tenglamasi ma'lum bo'lgan sirt vaziyatini aniqlash uchun, kanonik sistemaning yangi koordinatalar boshi O' ni va shu bilan birga bu koordinatalar sistemasi o'qlarining yo'naltiruvchi vektorlari koordinatalarini bilish kerak.

Kanonik koordinatalar sistemasi o'qlari yo'naltiruvchi vektorlari koordinatalari ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n = 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n = 0 \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)m = 0 \end{cases} \tag{7}$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi, bunda λ - xarakteristik tenglamaning ildizi. Aylanma sirtning joylashishini aniqlash uchun kanonik koordinatalar sistemasida yangi koordinata boshi O' ni va aylanish o'qi yo'naltiruvchi vektorining koordinatalarini bilish lozim. Yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan aniqlanadi, bunda λ - xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi.

Sirt markazga ega bo'lsa (yagona bo'lishi shart emas), u holda kanonik sistemasining yangi koordinata boshi O' deb sirt markazi olinadi. Sirt markazining koordinatalari

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

tenglamalar sistemasidan topiladi.

1^0. Uch o'qli ellipsoid:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1, \ (a > b > c).$$

Bu ellipsoid markazining koordinatalari (8) sistemadan topiladi. Katta o'qi ($O'X$) ning yo'naltiruchi vektorining koordinatalari (7) tenglamalar sistemasidan topiladi, undagi son xarakteristik tenglamaning modul jihatdan kichik bo'lgan ildizi; o'rta o'q ($O'Y$) ning yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan topiladi, λ son xarakteristik tenglamaning modul jihatdan o'rta bo'lgan ildizi; kichik o'q ($O'Z$) ning yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari ham (7) sistemadan topiladi, bunda λ - xarakteristik tenglamaning modul jihatidan katta bo'lgan ildizi.

2^0. Agar (1) tenglama nuqtani aniqlasa (mavhum konus), u holda bu nuqtaning koordinatalari (8) sistemadan topiladi.

3^0. Bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasi:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1, \ (a > b).$$

Bir pallali giperboloid markazining koordinatalari (8) sistemadan aniqlanadi.

Aytaylik, λ_1, λ_2 sonlar xarakteristik tenglmaning bir xil ishorali ildizlari bo‘lib, bunda $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ va λ_3 esa ishorasi λ_1 va λ_2 ildizlarning ishorasiga qarama-qarshi ildiz bo‘lsin. Giperboloid $(O'Z)$ o‘qining yo‘naltiruvchi vektori koordinatalari (7) sistemadan aniqlanadi, bunda $\lambda = \lambda_3$. Bir pallali giperboloid bo‘g‘iz kesimining $(O'X)$ katta o‘qi yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan aniqlanadi, bunda $\lambda = \lambda_1$; bir pallali giperboloid bo‘g‘iz kesimining $(O'Y)$ kichik o‘qi yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan topiladi, bunda $\lambda = \lambda_2$.

4^0. Ikki pallali giperboloid:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1, \ (a > b).$$

Ikki pallali giperboloid markazining koordinatalari (8) sistemadan topiladi.

Aytaylik, λ_1, λ_2 sonlar xarakteristik tenglamaning bir xil ishorali ildizlari va $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ bo‘lsin, λ_3 esa xarakteristik tenglamaning λ_1, λ_2 ildizlari ishorasiga qarama-qarshi ishoraga ega bo‘lgan uchinchi ildizi bo‘lsin. U holda giperboloid $(O'Z)$ o‘qining yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan aniqlanadi, bunda $\lambda = \lambda_3$; $O'X$ o‘qini (giperboloid o‘qiga perpendikular bo‘lgan o‘q bilan kesishi natijasida hosil bo‘lgan ellipsning katta o‘qi) yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan topiladi, bunda $\lambda = \lambda_1$; $O'Y$ o‘qi yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan topiladi, bunda $\lambda = \lambda_2$.

5^0. Konus:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0, \ (a > b).$$

Konus uchining koordinatalari (8) sistemadan aniqlanadi. Aytaylik, λ_1, λ_2 sonlar xarakteristik tenglamaning bir xil ishorali ildizlari va $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ bo‘lsin, λ_3 esa xarakteristik tenglamaning λ_1, λ_2 ildizlari ishorasiga qarama-qarshi ishoraga ega bo‘lgan uchinchi ildizi bo‘lsin. U holda konusning $(O'Z)$ o‘qi yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan aniqlanadi, bunda $\lambda = \lambda_3$. $O'X$ o‘qi yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalarini (7) sistemadan aniqlanadi, bunda $\lambda = \lambda_1$. $O'X$ o‘qi (ya’ni konusning o‘qiga perpendikular bo‘lgan kesimda hosil qilingan ellipisning katta o‘qi) yo‘naltiruchi vektorning koordinatalari (7) sistemadan aniqlaydi; $O'Y$ o'qi yo'naltiruvchi vektorining koordinatalarini (7) sistemadan aniqlaymiz, bunda $\lambda = \lambda_2$.

6^0. Elliptik paraboIid:

$$\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

Kanonik sistemasining boshi, bu holda paraboloid uchidan iborat. Elliptik paraboloidning sirt botiqligi tomon yo'nalgan o'qining vektori ushbu munosabatdan aniqlanadi:

$$\vec{P} = \{I_1A_1,\ I_1A_2,\ I_1A_3\}$$

bu yerda

$$A_1 = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix},\quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix},\quad A_3 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}.$$

Bu yerdagi A_1, A_2, A_3 sonlar K_4 determinantdagi a_1, a_2, a_3 elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini bildiradi.

Aytaylik, λ_1, λ_2 - xarakteristik tenglamaning noldan farqli ildizlari va $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ bo'lsin, bu holda $O'X$ o'qining (ya'ni elliptik paraboloidning o'qiga perpendikular bo'lgan tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan ellips katta o'qi) yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari $\lambda = \lambda_1$ holda (3) sistemadan aniqlanadi, $O'Y$ o'qining yo'naltiruvchi vektorini koordinatalari esa $\lambda = \lambda_2$ holda (7) sistemadan aniqlanadi. Elliptik paraboloidning uchi ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1}{A_1} = \dfrac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2}{A_2} = \\ = \dfrac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3}{A_3} \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \\ +2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \end{cases} \tag{9}$$

tenglamalar sistemasidan topiladi.

7^0. Giperbolik paraboloid:

$$\frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z.$$

Bu holda kanonik koordinatalar sistemasining boshi paraboloid uchidan iborat. Giperbolik paraboloidning $(O'XZ)$ tekislik bilan kesishishi natijasida hosil bo'lgan katta parametrli bosh kesimning botiqlik tomonga yo'nalgan parabola o'qining yo'naltiruvchi vektori ushbu koordinatalarga ega bo'ladi:

$$\{I_1A_1,\ I_1A_2,\ I_1A_3\}$$

bu yerda A_1, A_2, A_3 sonlar K_4 determinantning a_1, a_2, a_3 elementlarining algebraik to'ldiruvchilaridir.

Aytaylik, λ_1, λ_2 - xarakteristik tenglamaning ildizlari bo'lib, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ bo'lsin. U holda $O'X$ o'qining yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (ya'ni paraboloid uchidan o'tuvchi to'gri chiziqli yasovchilar orasidagi o'tkir burchak bissektrisalari) (7) sistemadan $\lambda = \lambda_1$ deb aniqlanadi; $O'Y$ o'qning yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan $\lambda = \lambda_2$ deb aniqlanadi. Giperbolik paraboloidning uchi (9) sistemadan aniqlanadi. Agar giperbolik paraboloid uchun $\lambda_1 = -\lambda_2$ tenglik o'rinli bo'lsa, tegishli tenglama ushbu

$$X^2 - Y^2 = 2pZ$$

ko'rinishni qabul qiladi.

Bu holda paraboloidning $O'XZ$, $O'YZ$ tekisliklar bilan kesimida hosil qilingan parabolalar bir xil parametrga ega. Bunda parabola o'qining yo'nalishi $\{A_1, A_2, A_3\}$ vektor orqali aniqlanadi.

8^0. Elliptik silindr:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Bu holda $a \neq b$ bo'lganda, elliptik silindrning joylashishini aniqlash uchun uning o'qini va silindr o'qiga perpendikular kesimidagi katta va kichik o'qlarining yo'naltiruvchi vektorlarini bilish kerak.

Silindr o'qi (8) tenglamalar yordamida topiladi (ulardan chiziqli erklilarini olish kerak). Aytaylik, λ_1, λ_2 sonlar xarakteristik tenglamaning noldan farqli ildizlari va $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ bo'lsin. U holda $O'X$ o'qi (silindr o'qiga perpendikular kesimida hosil bo'lgan katta o'qi) yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan topiladi, bunda $\lambda = \lambda_1$; $O'Y$ o'qi yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (7) sistemadan aniqlanib, bunda $\lambda = \lambda_2$ farazda $\lambda_1 = \lambda_2$ b'olsa,

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

silindr hosil qilinadi va uning joylashishini aniqlash uchun o'qini bilish yetarli.

9^0. Giperbolik silindr:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Giperbolik silindrning joylashishini bilish uchun uning o'qini va o'qiga perpendikular kesimining haqiqiy va mavhum o'qlarining yo'naltiruvchi vektorlarini bilish kerak. λ_1, λ_2 sonlar xarakteristik tenglamaning noldan farqli ildizlari, va λ_1 deb ishorasi $\frac{K_3}{I_2}$ ishorasiga qarama-qarshi bo'lgan ildiz belgilangan. U holda $O'X$ o'qning yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari (silindr o'qiga perpendikular kesimining haqiqiy o'qi) (7) tenglamalardan ($\lambda = \lambda_1$

holda) topiladi. $O'Y$ o'qning (mavhum o'qning) yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari esa $\lambda = \lambda_2$ holda (7) tenglamalardan topiladi.

10^0. Parabolik silindr.

Parabolik silindrning joylashishini aniqlash uchun quyidagilarni:

I) silindr yasovchilariga parallel bo'lgan simmetriya tekisligini;

II) bu simmetriya tekisligiga perpendikular bo'lgan urinma tekislikni;

III) bu urinma tekislikka perpendikular bo'lgan va silindrning botiqlik tomoniga yo'naltirilgan vektorni bilish kerak.

Agar umumiy tenglama parabolik silindrni aniqlasa, u holda uni

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2 + 2b_1 X + 2b_2 Y + 2b_3 Z + b = 0$$

yoki

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + m)^2 - [2(m\alpha - b_1)X +$$
$$+2(m\beta - b_2)Y + 2(m\gamma - b_3)Z + m^2 - b] = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda m sonni ushbu

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + m = 0$$

$$2(m\alpha - b_1)X + 2(m\beta - b_2)Y + 2(m\gamma - b_3)Z + m^2 - b = 0$$

tekisliklar o'zaro perpendikular bo'ladigan qilib tanlaymiz, ya'ni

$$\alpha(m\alpha - b_1) + \beta(m\beta - b_2) + \gamma(m\gamma - b_3) = 0$$

bundan

$$m = \frac{b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

ga ega bo'lamiz. m ning bunday qiymatida ushbu

$$2(m\alpha - b_1)X + 2(m\beta - b_2)Y + 2(m\gamma - b_3)Z + m^2 - b = 0$$

tenglama silindr yasovchilariga parallel bo'lgan simmetriya tekisligini ifodalaydi.

Ushbu

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + m = 0$$

tenglama bilan aniqlangan tekislik ko'rsatilgan simmetriya tekisligiga perpendikular bo'lgan urinma tekislik bo'ladi, $\{\alpha m - b_1, \beta m - b_2, \gamma m - b_3\}$ vektor esa topilgan urinma tekislikka perpendikular va silindrning botiqlik tomoniga yo'nalgan.

Agar (1) tenglama bir juft tekislikka ajraladigan sirtni aniqlasa, u holda uning joylashishini bilish uchun bu tekisliklarning har birining tenglamasini bilish kerak. Bu tenglamalar (1) tenglamaning chap tomonini x, y, z ga nisbatan chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib va har birini nolga tenglab hosil qilamiz.

45.2-teorema. Umumiy (1) tenglama bilan aniqlangan ikkinchi tartibli sirtning ikkita tekislikka ajralishi uchun ushbu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi 2 yoki 1 ga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Agar koordinatalar boshi sirtning markazi bo'lib xizmat qilsa, u holda sirt tenglamasida birinchi darajali hadlar qatnashmaydi va sirtning umumiy tenglamasi

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda $a = \frac{K_4}{I_3}$, agar $I_3 \neq 0$ bo'lsa; $a = \frac{K_3}{I_2}$, agar $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $I_2 \neq 0$ bo'lsa; $a = \frac{K_2}{I_1}$, agar $I_3 = 0$, $K_4 = 0$, $K_3 = 0$, $I_1 \neq 0$ bo'lsa. Jumladan uchi koordinatalar boshida bo'lgan konus tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0$$

Aksincha, shu ko'rinishdagi har qanday tenglama uchi koordinatalar boshida bo'lgan (haqiqiy yoki mavhum) konusni yoki koordinata boshidan o'tuvchi bir juft (haqiqiy har xil, yoki ustma-ust tushuvchi) tekislikni aniqlaydi. Eski koordinatalarni yangi koordinatalar bilan bog'lovchi tenglamalar

$$\begin{cases} x = l_1X + l_2Y + l_3Z + x_0 \\ y = m_1X + m_2Y + m_3Z + y_0 \\ z = n_1X + n_2Y + n_3Z + z_0 \end{cases}$$

ko'rinishga ega, bu yerda $\vec{e}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{e}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$, $\vec{e}_3 = \{l_3, m_3, n_3\}$ vektorlar $O'X$, $O'Y$, $O'Z$ kanonik sistemani birlik vektorlari. Bu vektorlarning koordinatalari (8) sistemadan topiladi, (x_0, y_0, z_0) eski sistemaga nisbatan yangi sistemaning boshi (sirt markazi, agar sirt markazga ega bo'lsa va sirt uchining koordinatasi, agar sirt markazsiz bo'lsa) ning koordinatasidir.

Umumiy tenglama

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

bilan aniqlangan sirtning (x_0, y_0, z_0) nuqtasida o'tkazilgan urinma tekisligi

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)y+$$

$$+(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)z + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a = 0$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Umumiy tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli sirtga tashqi chizilgan va uchi $S(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada bo'lgan konus tenglamasi

$$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y+$$

$$+2a_3z + a)(a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{23}y_0z_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_1x_0+$$

$$+2a_2y_0 + 2a_3z_0 + a) - [(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0+$$

$$+a_2)y + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)z + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a]^2 = 0$$

ko'rinishda bo'ladi.

Yasovchilari $\{l, m, n\}$ vektorga parallel va tenglamasi (1) ko'rinishda berilgan ikkinchi tartibli sirtga tashqi chizilgan silindr tenglamasi

$$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a)$$

$$(a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{13}ln) - [(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z+$$

$$+a_1)l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2)m + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3)n]^2 = 0$$

ko'rinishga ega.

Ikkinchi tartibli sirt asimtotik konus yasovchilariga parallel vektorlarining koordinatalari

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{13}ln = 0$$

tenglamadan topiladi.

Ushbu $\{l, m, n\}$ vektor yo'nalishiga qo'shma bo'lgan diametrial tekislik

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1)l + (a_{21}x + a_{22}y+$$

$$+a_{23}z + a_2)m + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3)n = 0$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Ikkinchi tartibli sirtning $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka qo'shma bo'lgan diametri

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1}{A} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2}{B} =$$

$$= \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3}{C}$$

tenglamadan topiladi.

Ikkinchi tartibli sirtga nisbatan o'zaro qo'shma yo'nalishlarga ega bo'lgan $\{l, m, n\}$ va $\{l', m', n'\}$ vektorlarning (ya'ni vektorlardan biri ikkinchisiga qo'shma bo'lgan diametrial tekislikka parallel) koordinatalari ushbu

$$(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)l' + (a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n)m' + (a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n)n' = 0$$

munosabat bilan bog'langan.

Agar Ox, Oy o'qlari (sirtga nisbatan) qo'shma yo'nalishga ega bo'lsa, u holda sirt tenglamasida xy ko'paytma qatnashmaydi, va aksincha.

Agar Oz o'qi yo'nalishi Oxy tekislikka qo'shma bo'lsa, u holda ikkinchi tartibli sirt tenglamasida xz va yz ko'paytmali hadlar qatnashmaydi, va aksincha.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

tenglama bilan aniqlangan sirt va $Ax + By + Cz + D = 0$ (bu yerda $A^2+B^2+C^2 = 1$) tenglama bilan aniqlangan tekislik berilgan bo'lsin deb faraz qilaylik. Bunday holda berilgan tekislik bilan berilgan sirtning kesishishidan hosil bo'lgan ikkinchi tartibli chiziqning invariantlari quyidagi munosabatlardan aniqlanadi:

$$\dot{I}_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}, \quad \dot{K}_3 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix},$$

$$\dot{I}_1 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A \\ a_{31} & a_{33} & C \\ A & C & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & B \\ a_{32} & a_{33} & C \\ B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$\dot{K}_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_1 & a_2 & a & D \\ A & B & D & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{31} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_3 & a & D \\ A & C & D & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_2 & a_3 & a & D \\ B & C & D & 0 \end{vmatrix},$$

shu bilan birga kesishish chizig'ining shaklini aniqlash va kanonik tenglamasini tuzish tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqni tekshirishda qo'llanilgan formulalardan foydalanib, faqat I_2, K_3, I_1 va K_2 lar o'rnida mos ravishda $\dot{I}_2$, $\dot{K}_3$, $\dot{I}_1$ va $\dot{K}_2$ sonlarni olib o'tkaziladi.

Masalan, kesim chizig'ining xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^2 - \dot{I}_1\lambda + \dot{I}_2 = 0$$

ko'rinishda yoziladi va chiziqning yagona markazga ega bo'lish sharti

$$\dot{I}_2 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

ko'rinishda yoziladi.

Yagona markazga ega bo'lgan chiziqning eng sodda tenglamasi quyidagicha:

$$\dot{\lambda}_1 X^2 + \dot{\lambda}_2 Y^2 + \frac{\dot{K}_3}{\dot{I}_2} = 0$$

bu yerda $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_2$ sonlar xarakteristik tenglamaning ildizlari va h.k.

Agar kesimda markazli chiziq hosil bo'lsa, u holda uning markazi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = At \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = Bt \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

sistemadan aniqlanadi.

Kesimning o'qlari bo'yicha yo'nalgan vektorning koordinatalari ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m + a_{13}n - A\beta = 0 \\ a_{21}l + (a_{22} - \lambda)m + a_{23}n - B\beta = 0 \\ a_{31}l + a_{32}m + (a_{33} - \lambda)n - C\beta = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$$

tenglamalardan aniqlanadi. Bu yerda λ kesimda hosil bo'lgan chiziq xarakteristik tenglamasi $\lambda^2 - \dot{I}_1\lambda + \dot{I}_2 = 0$ ning yechimi yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning ildizlaridir.

Kesimda parabola hosil bo'lgan holda ushbu

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & A \\ a_2 & a_{22} & a_{23} & B \\ a_3 & a_{32} & a_{33} & C \\ D & B & C & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} & A \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & B \\ a_{31} & a_3 & a_{33} & C \\ A & D & C & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & C \\ A & B & D & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

vektor parabola o'qiga parallel bo'lib, botiqlik tomoniga yo'nalgan.

Parabola o'qi

$$\begin{cases} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1)l + (a_{21}x + a_{22}y + \\ + a_{23}z + a_2)m + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3)n = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi orqali aniqlanadi.

Parabolaning uchini esa sirtning parabola o'qi bilan kesishish nuqtasi sifatida aniqlaymiz.

45.3-misol. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

tenglama bilan berilgan sirt ko'rinishi va uning joylashishi aniqlansin.

Yechish. Dastlab sirt markazga ega yoki ega emasligini aniqlaymiz.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0,$$

demak, sirt yagona simmetriya markaziga ega. So'ngra

$$K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0,$$

$$I_1 = 1 + 5 + 1 = 7, \ I_1 \cdot I_3 < 0$$

ekanidan, berilgan sirt bir pallali giperboloidligi kelib chiqadi. Endi I_2 ni topamiz:

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Xarakteristik tenglama tuzamiz va yechamiz:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 6, \ \lambda_3 = -2.$$

Sodda tenglamasi

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + \frac{36}{-36} = 0$$

yoki

$$3x^2 + 6y^2 - 2z^2 - 1 = 0$$

yoki

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

ko'rinishga ega ekan, bu yerda $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sirt markazini

$$\begin{cases} x+y+3z-1=0\\ x+5y+z+3=0\\ 3x+y+z+1=0\end{cases}$$

sistemani yechib topamiz, bundan $C\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Yangi $O'X$ o'qiga parallel $\vec{l'}=\{l_1,m_1,n_1\}$ vektorning koordinatalarini

$$\begin{cases}(1-3)l_1+m_1+3n_1=0\\ l_1+(5-3)m_1+n_1=0\\ 3l_1+m_1+(1-3)n_1=0\end{cases}$$

sistemani yechib, $\vec{l'_1}=\{1,-1,1\}$ ekanini topamiz. Huddi shunga o'xshash yangi $O'Y$, $O'Z$ o'qlariga parallel bo'lgan vektorlarning koordinatalari $\vec{l'_2}=\{1,2,1\}$ va $\vec{l'_3}=\{1,0,-1\}$ bo'ladi.

45.4-misol. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan

$$2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2xz+2yz-4x+6y-2z+3=0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko'rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish. Invariantlarni aniqlaymiz.

$$I_3=\begin{vmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=0,$$

demak, sirt yagona simmetriya markaziga ega emas ekan. So'ngra

$$K_4=\begin{vmatrix}2&2&1&-2\\2&2&1&3\\1&1&3&-1\\-2&3&-1&3\end{vmatrix}=-125<0,$$

ekanligidan berilgan tenglama elliptik paraboloidni aniqlaydi.

$$I_2=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=10,$$

$$I_1=2+2+3=7.$$

Xarakteristik tenglama: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 10\lambda = 0$, uning ildizlari: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 0$. Sodda tenglamasi:

$$2x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{-\frac{-125}{10}}z = 0$$

yoki

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2\sqrt{2}}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2z$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $p = \frac{5}{2\sqrt{2}}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Paraboloidning botiqlik tomoniga yo'nalgan o'qining yo'naltiruvchi vektori

$$\vec{a} = \left\{ -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{25, -25, 0\} \downarrow\downarrow \{1, -1, 0\}$$

Yangi $O'X$ o'qi yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari

$$\begin{cases} (2-2)l_1 + 2m_1 + n_1 = 0 \\ 2l_1 + (2-2)m_1 + n_1 = 0 \\ l_1 + m_1 + (3-2)n_1 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan topiladi, bu yerdan $l_1 = 1$, $m_1 = 1$, $n_1 = -2$. Demak, $O'X$ o'qining yo'naltiruvchi vektori $\{1, 1, -2\}$ ekan. Huddi shunga o'xshash, ushbu tenglamalar

$$\begin{cases} (2-5)l_2 + 2m_2 + n_2 = 0 \\ 2l_2 + (2-5)m_2 + n_2 = 0 \\ l_2 + m_2 + (3-5)n_2 = 0 \end{cases}$$

sistemasidan $O'Y$ o'qining yo'naltiruvchi vektori $\{1, 1, 1\}$ ni topamiz. Uchining koordinatalarini

$$\begin{cases} \dfrac{2x + 2y + z - 2}{25} = \dfrac{2x + 2y + z + 3}{-25} = \dfrac{x + y + 3z - 1}{0} \\ 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 2 = -(2x + 2y + z + 3) \\ x + y + 3z - 1 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$O'\left(-\frac{1}{40}, -\frac{19}{40}, \frac{1}{2}\right).$$

45.5-misol. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan

$$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz + 10x - 4y - 2z + 4 = 0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko'rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish. Invariantlarni topamiz.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad K_4 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 36,$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -36,$$

$$I_1 = 5 + 2 + 5 = 12.$$

Yuqoridagilardan

$$I_3 = K_4 = 0, \ I_2 > 0, \ I_1 \cdot K_3 < 0$$

bo'lgani uchun berilgan tenglama elliptik silindrni aniqlaydi.

Xarakteristik tenglama $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$ ning ildizlari: $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 0$. Sodda tenglamasi:

$$6x^2 + 6y^2 - \frac{36}{36} = 0$$

yoki

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{6}$$

ko'rinishga ega. Bu tenglama radiusi $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ga teng aylanma silindrni aniqlaydi. Silindrning o'qi ushbu

$$\begin{cases} 5x - 2y - z + 5 = 0 \\ -2x + 2y - 2z - 2 = 0 \\ -x - 2y + 5z - 1 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan topiladi, ammo bu sistemadagi ikkita tenglamani olish kifoya.

45.6-misol. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko‘rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish. Invariantlarni aniqlaymiz.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad K_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -18,$$

$$I_1 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Berilgan tenglama parabolik silindrni aniqlaydi. Sodda tenglamasi:

$$6x^2 - 2\sqrt{+\frac{18}{3}}y = 0$$

yoki

$$x^2 = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Silindr yasovchilariga perpendikular kesimining parametri $p = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Silindrning vaziyatini aniqlash uchun uning tenglamasini

$$(x + y + 2z + m)^2 - [2mx + 2my + 2(2m + 3)z + 1] = 0$$

ko‘rinishda yozib olamiz. m sonini ikkita tekislikning perpendikularlik shartidan foydalanib topamiz:

$$x + y + 2z + m = 0$$

$$2mx + 2my + 2(2m + 3)z + 1 = 0$$

$$2m + 2m + 4(2m + 3) = 0$$

$$m = -1.$$

Shunday qilib silindr yasovchilariga parallel bo‘lgan simmetriya tekisligining tenglamasi:

$$x + y + 2z - 1 = 0.$$

Bu tekislikka perpendikular urinma tekislik tenglamasi:

$$-2x - 2y + 2z + 1 = 0.$$

Bu yerdan esa, shu urinma tekislikka perpendikular va silindrning botiqlik tomoniga yo'nalgan

$$\{-2, -2, 2\} \downarrow\downarrow \{-1, -1, 1\}$$

vektorni topamiz.

45.7-misol. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida ushbu

$$y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y = 0$$

tenglama bilan berilgan sirtning ko'rinishi va joylashishi aniqlansin.

Yechish. Avval invariantlarni topamiz.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad K_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$I_1 = 0 + 1 + 0 = 1,$$

bu yerda $I_3 = K_4 = 0$, $I_2 < 0$, $K_3 = 0$ bo'lgani uchun berilgan tenlama kesishuvchi ikkita tekislikni aniqlaydi.

Bu tekisliklar tenglamalarini topish uchun berilgan tenglamaning chap tomonini x, y, z ga nisbatan chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\begin{aligned} y^2 + 2xy + 4xz + 2yz - 4x - 2y &= y^2 + 2(x + z - 1)y + 4xz - 4x = \\ &= y^2 + 2(x + z - 1)y + (x + z - 1)^2 + 4xz - 4x - (x + z - 1)^2 = \\ &= (x + y + z - 1)^2 - 4xz - 4x - x^2 - 2xz - z^2 - 1 + 2x + 2z = \\ &= (x + y + z - 1)^2 - x^2 + 2xz - 2x - z^2 + 2z - 1 = \\ &= (x + y + z - 1)^2 - (x^2 - 2xz + 2x + z^2 - 2z + 1) = \\ &= (x + y + z - 1)^2 - [x^2 + 2(1 - z)x + (1 - z)^2] = \\ &= (x + y + z - 1)^2 - (x - z + 1)^2 = (2x + y)(y + 2z - 2). \end{aligned}$$

Bu yerdan berilgan tenglama aniqlagan tekislik tenglamalari

$$2x + y = 0 \text{ va } y + 2z - 2 = 0$$

ekanligini topamiz.

ADABIYOTLAR

1. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., Algeba and Number theory. 2010. – 523 p.
2. Everest G., Ward T. An Introduction to Number Theory. 2006. – 297p.
3. Kuttler K. Elementary linear algebra. 2012. – 433 p.
4. Strang G. Introduction to Linear algebra. 2016. – 584 p.
5. Бухштаб А.А. Теория чисел. 1966. – 386 с.
6. Веретенников Б.М., Михалева М.М., Алгебра и теория чисел. Учебное пособие. 2014. – 52 с.
7. Виноградов И.М. Основы теории чисел. 1948. – 178 с.
8. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. 1998. – 320 с.
9. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. 2000 г. – 272 с.
10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. 2000 г. – 368 с.
11. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. Москва. 1979 г. – 559 с.
12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 2008 г. 432 с.
13. Проскуряков И.Л. Сборник задач по линейной алгебре. "Наука", 2010 г. 480 с.
14. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. 2007 г. 416 с.
15. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре, Санкт-Петербург, 1999 г. 304 с.
16. Хожиев Ж.Х. Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси, Тошкент, кгзбекистонь, 2001 й.

17. Ayupov Sh.A., Omirov B.A.,Xudoyberdiyev A.X.,Haydarov F.H. Algeba va sonlar nazariyasi, Toshkent, Tafakkur gulshani, 2019 y. – 319 b.

18. Kenneth Kuttler Elementary linear algebra 2012, Ventus Publishing Aps, ISBN 978-87-403-0018-5

19. David Cherney, Tom Denton and Andrew Waldron, Linear Algebra, 2013.

20. Fuzhen Zhang LINEAR ALGEBRA 2009.

21. Izu Vaisman. Analytical Geometry. World Scientific, 1997.

22. Narmanov A.Ya. Analitik geometriya. T. O'zbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriyoti, 2008 y.

23. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to'plami. T. Universitet, 2006.

24. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1. М., Наука, 1983.

25. A.Robson. Introduction to Analytical Geometry Cambridge University Press, 2009.

26. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.

27. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., Гостехиздат, 2001.

Bayturayev Ashur Maxmadaliyevich
Kucharov Ramziddin Ruzimuradovich

ALGEBRA VA GEOMETRIYA

O‘quv qo‘llanma

Toshkent - "Innovatsiya-Ziyo" - 2020

Muharrir: F. Xolsaidov

Nash.lits. № AI 023, 27.10.2018.
Bosishga 30.11.2020 yilda ruxsat etildi. Bichimi:
60x84 1/16. «Times New Roman» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli b.t. 17. Nashr b.t. 16,8.
Adadi 200 nusxa. Buyurtma № 89.

«Innovatsiya-Ziyo» MCHJ matbaa bo‘limida chop
etildi. Manzil: Toshkent shahri, Farhod ko‘chasi,
6-uy. Telefon: (93) 552 11 21

ISBN 978-9943-7274-8-9