ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов инженерно-технических специальностей вузов

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.161.1
Б90
УДК 517(075.8)

Бугров Я. С., Никольский С. М. **Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление:** Учеб.— 3-е изд., испр.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 432 с.

Учебник вместе с двумя другими книгами тех же авторов «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного» соответствует программе по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов.

Книга содержит следующие разделы: Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Ряды. 1-е издание выходило в 1980 г., 2-е издание — в 1984 г.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Рецензент
член-корреспондент АН СССР *С. И. Похожаев*

Б $\frac{1702050000-038}{053(02)-88}$ 65-88

ISBN 5-02-013737-5

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга входит в серию под названием «Высшая математика», состоящую из трех книг:

а) Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

б) Дифференциальное и интегральное исчисление.

в) Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.

Авторы думают, что эта серия[1]) может быть учебником для студентов втузов, изучающих математику по программе 500 часов или по программе меньшего объема при соответствующих сокращениях. При необходимости делаются ссылки из одной книги на другую.

Авторы при написании этих книг придерживались программы курса «Высшая математика для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений», утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию Министерства высшего и среднего специального образования СССР.

Авторы учли, что в наших школах сейчас изучаются начала аналитической геометрии и математического анализа.

В главе 1 несколько параграфов посвящено «действительному числу», хотя явно этого в программе нет — эти вопросы излагаются в IX и X классах средней школы. Мы думаем, что эти вопросы следует повторить во вводных лекциях. Студент должен знать, что действительное число можно рассматривать как десятичное разложение. Доказательство леммы 2 о неубывающей ограниченной последовательности десятичных дробей надо считать весьма желательным. Но при изложении этих вопросов можно ограничиться только § 1.7 и 1.8.

---

[1]) Однако серия не охватывает раздел этой программы «Теория вероятностей» и не полностью охватывает раздел «Численные методы».

Конечно, данную книгу и книгу «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» надо изучать параллельно. Нет нужды давать советы, в какой последовательности должно происходить изучение. Отметим только, что перед главой 8 о функциях многих переменных читатель должен ознакомиться с понятием m-мерного пространства.

В свою очередь, для изучения самосопряженного оператора и квадратичных форм понадобятся свойства функций, непрерывных на замкнутом множестве (§ 8.12 данной книги). А потом, параграф, посвященный экстремумам функций многих переменных, потребует знания квадратичных форм. В условном экстремуме серьезно используется представление об ортогональных подпространствах m-мерного пространства.

Второе и третье издания отличаются от первого рядом изменений и дополнений.

Более подробно изложен вопрос о применении понятия дифференциала в приближенных вычислениях. Приведены доказательства свойств непрерывных функций многих переменных на замкнутых множествах. Введен пункт об однородных функциях. В главе 9 добавлен материал по теории кратных рядов и теории суммируемости.

Выражаем благодарность секции технических Вузов Научно-методического Совета по математике при Минвузе СССР под руководством профессора Л. Д. Кудрявцева, коллективу кафедры высшей математики № 2 Ленинградского политехнического института, профессору А. И. Прилепко и руководимой им кафедре высшей математики Московского инженерно-физического института за обсуждение наших учебников и ценные замечания и предложения, которые, несомненно, способствовали улучшению содержания учебников.

Мы также выражаем благодарность Ю. И. Волкову, М. Ш. Коссу, А. М. Полосуеву, Я. М. Тобольцеву, А. Ф. Шапкину и ряду других читателей за ценные конструктивные предложения, которые мы старались учесть при работе над учебником.

В 1984 г. комплекс наших учебников по высшей математике, состоящий из трех книг и задачника, удостоен премии МВ и ССО СССР, а в 1986 г.—диплома почета ВДНХ СССР.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Предмет математики. Переменные и постоянные величины, множества

Среди всех наук математика занимает особое место. Математика определяется как наука о пространственных формах и количественных отношениях реального мира. Конечно, если учесть современное состояние математики и разнообразие изучаемых ею структур, то пространственные формы и количественные отношения необходимо понимать в самом общем виде.

Математика дает другим наукам язык чисел и символов для выражения различного рода отношений между явлениями природы. Но прежде чем применять математику, биолог, физик или экономист должны глубоко понять суть изучаемого явления, расчленить его на части, поддающиеся математической обработке.

Объектами изучения в самой математике являются логические модели, построенные для описания явлений природы и общества. Математика изучает соотношения между элементами этих моделей. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет вскрывать и необнаруженные вначале закономерности, т. е. математика способна вскрывать и качественную сторону явления.

В силу большой абстрактности одна и та же математическая модель может описывать различные процессы. Например, одно и то же дифференциальное уравнение описывает и характер радиоактивного распада, и изменение температуры тела.

При изучении явлений природы и общества мы на каждом шагу сталкиваемся с изменением величин, с зависимостью одной из величин от другой. Поэтому понятие о переменной величине является основным в математическом анализе.

Под *переменной величиной* мы будем понимать величину, которая в процессе изучения какого-либо явления принимает хотя бы два различных значения. Величина, которая при исследовании данного вопроса принимает только одно значение, называется *постоянной*.

Ф. Энгельс отмечал, что введение декартовой переменной величины внесло в математику движение и диалектику.

Если все значения, принимаемые переменной величиной, объединить, то мы получим *множество* значений этой величины.

Понятие *множества* также является основным в математике, это простое, первичное понятие, которое мы не будем пытаться определить через другие простые понятия.

Множество — это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы.

Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве молекул в данном теле, о множестве телевизоров с цветным изображением в данной аудитории и т. д. Объекты, входящие в данное множество, будем называть *элементами* множества.

Мы будем обычно обозначать множества большими буквами A, B, $\ldots$, X, Y, $\ldots$, а их элементы малыми буквами a, b, $\ldots$, x, y, $\ldots$.

Если элемент x принадлежит множеству A, то этот факт обозначают так: $x \in A$. Если же x не входит в множество A, то пишут: $x \overline{\in} A$. Символом $A \subset B$ (множество A включено в множество B) обозначают тот факт, что если $x \in A$, то $x \in B$.

Множество A в этом случае называется *подмножеством* множества B. Употребляется также равносильная запись $B \supset A$ (множество B включает в себя множество A). Символы $\subset$, $\supset$ называются *знаками включения*.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$. Ясно, что $\varnothing \subset A$, где A — любое множество.

Для обозначения множеств широко употребляют фигурные скобки, внутри которых тем или иным способом описываются элементы, из которых эти множества состоят. Выражение $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ обозначает множество *натуральных чисел*, $\{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел, а $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

— *множество всех целых чисел.* Вот еще пример: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ — множество, состоящее из цифр десятичной системы счисления. Очевидно $2 \in A$, а $\frac{1}{2} \overline{\in} A$.

Говорят, что множества A и B *равны*, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. На вопрос о том, равны ли данные множества, далеко не всегда легко ответить. Например, если $A = \{6, 8, 10, \ldots\}$, $B = \{p+q\}$ есть множество сумм простых чисел p и q, бо́льших чем 2, то ясно, что $B \subset A$. Однако до настоящего времени не установлено, верно ли, что $A \subset B$, т. е. можно ли любое четное число $\geqslant 6$ представить в виде суммы двух простых чисел, бо́льших двух.

В данном курсе мы в основном будем иметь дело с числовыми множествами, т. е. элементами их будут числа.

§ 1.2. Операции над множествами

Для множеств можно ввести арифметические операции сложения и умножения, которые обладают свойствами, во многом аналогичными соответствующим свойствам операций сложения и умножения чисел.

Пусть даны два произвольных множества A и B. *Суммой* или *объединением* множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множеств A и B; при этом пишут: $C = A + B$ или $C = A \cup B$ (рис. 1). Легко видеть, что $A + A = A$.

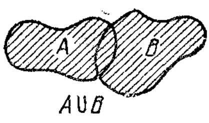

Рис. 1.

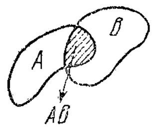

Рис. 2.

Произведением или *пересечением* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, одновременно принадлежащих множеству A и множеству B. Пересечение множеств обозначается через AB или $A \cap B$ (рис. 2). Очевидно, что $A \cap A = A$. Если $AB = \varnothing$, то будем говорить, что множества A и B не пересекаются. Используя понятие равенства множеств, можно доказать, что: 1) $A + B = B + A$, 2) $(A+B)C = AC + BC$, 3) $(AB)C = A(BC)$, 4) $(A+B)+C = A+(B+C)$. Докажем, например, 2). Если $x \in (A+B)C$, то, согласно определению произведения, $x \in A+B$ и $x \in C$. Из определения суммы следует, что $x \in A$ или $x \in B$. Пусть для определенности $x \in A$. Тогда $x \in AC$, а следовательно, $x \in AC + BC$. Значит, $(A+B)C \subset AC+BC$. Если теперь элемент $x \in AC+BC$, то выполняется по крайней мере одно из соотношений $x \in AC$, $x \in BC$, для определенности пусть $x \in AC$. Тогда $x \in A+B$ и $x \in C$, т. е. $x \in \in (A+B)C$. Отсюда $AC+BC \subset \subset (A+B)C$. Этим равенство 2) доказано.

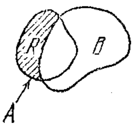

Рис. 3.

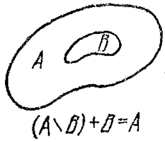

Рис. 4.

Разностью множеств A и B называется множество $R = A \setminus B$, состоящее из элементов A, которых нет в B.

Заметим, что в общем случае $(A \setminus B)+B \neq A$ (рис. 3). Но если $B \subset A$, то $(A \setminus B)+B = A$ (рис. 4).

Множества с введенными операциями сложения и умножения образуют своеобразную алгебру, где нет коэффициентов и степеней.

§ 1.3. Символика математической логики

Для сокращения записи в дальнейшем мы будем употреблять некоторые простейшие логические символы. Если нас интересует не сущность какого-либо предложения, а его связь с другими, то это предложение будем обозначать одной из букв α, β, ... Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из предложения α следует предложение β». Знаком $\alpha \Leftrightarrow \beta$ будем обозначать тот факт, что предложения α и β эквивалентны, т. е. из α следует β и из β следует α.

Запись $\forall x \in A$: α означает: «для всякого элемента $x \in A$ имеет место предложение α». Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности*.

Запись $\exists y \in B$: β означает: «существует элемент $y \in B$, для которого имеет место предложение β». Символ $\exists$ называется *квантором существования*.

Символ $\bar{\alpha}$ будем понимать как *отрицание* предложения α или, коротко, «не α».

Построим отрицание утверждения $\forall x \in A$: α.

Если данное утверждение не имеет места, то предложение α имеет место не для всех $x \in A$, т. е. существует элемент $x \in A$, для которого α не имеет места: $\overline{\forall x \in A:\ \alpha} \Leftrightarrow \exists x \in A:\ \bar{\alpha}$. Совершенно аналогично $\overline{\exists y \in B:\ \beta} \Leftrightarrow \forall y \in B:\ \bar{\beta}$.

Таким образом, чтобы построить отрицание данной логической формулы, содержащей знаки $\forall$ и $\exists$, необходимо знак $\forall$ заменить на $\exists$, а знак $\exists$ на $\forall$ и отрицание (черту) перенести на свойство, стоящее после двоеточия. Например, отрицание предложения

$$\exists M\ \forall x \in A:\ f(x) \leqslant M$$

имеет вид

$$\overline{\exists M\ \forall x \in A:\ f(x) \leqslant M} \Leftrightarrow \forall M\ \exists x \in A:$$
$$\overline{f(x) \leqslant M} \Leftrightarrow \forall M\ \exists x \in A:\ f(x) > M.$$

§ 1.4. Действительные числа

Понятие числа является первичным и основным в математике. Это понятие прошло длительный путь исторического развития. Множество натуральных чисел

$$\mathbf{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

появилось в связи со счетом предметов. Затем под влиянием потребностей практики и развития самой математики были введены целые числа

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

и рациональные числа

$$\mathbf{Q}=\{m/n\},\ \text{где}\ m,\ n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0.$$

Для однозначности записи рационального числа будем считать, что дробь m/n несократима, если не будет делаться оговорки на этот счет.

Введение рациональных чисел, однако, полностью не решило важной практической задачи об измерении отрезков. Ведь существуют отрезки, длина которых не является рациональным числом. Примером может служить диагональ квадрата, сторона которого равна единице.

В связи с этим возникла необходимость введения, кроме рациональных чисел, и других чисел — *иррациональных*. Произвольные числа — рациональные или иррациональные — называются *действительными* или *вещественными*. Множество действительных чисел обозначают через $\mathbf{R}$. Существуют различные способы введения (определения) действительных чисел. Мы остановимся на способе представления их в виде бесконечных десятичных дробей

$$a=\pm a_0,\ a_1a_2a_3\ldots\ . \tag{1}$$

Здесь a_0 — целое неотрицательное число, a_k — десятичные цифры. Таким образом, a_k может принимать только одно из значений $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$. Знак $+$ часто в этих записях опускают.

Чтобы представить не равное нулю рациональное число $\pm m/n$ $(m>0,\ n>0)$ в виде десятичной дроби, производим процесс деления m на n по известному способу, которому нас учили в школе:

$$m\,\underline{|\quad n\quad}\\ \quad a_0,\ a_1a_2\ldots\ . \tag{2}$$

Заметим, что если этот способ применить к другой записи дроби $\pm mp/np = \pm m/n$ $(p > 0)$, то получим тот же результат.

Полагаем

$$\pm \frac{m}{n} = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \tag{3}$$

и правую часть (3) называем *десятичным разложением числа* $\pm m/n$.

Если знаменатель дроби имеет вид $n = 2^s 5^t$, где s, t — целые неотрицательные числа, то процесс (2) заканчивается после конечного числа шагов и получается *конечная десятичная дробь*

$$\pm \frac{m}{n} = \pm a_0, a_1 \dots a_M \qquad (a_M > 0). \tag{4}$$

Конечную десятичную дробь мы будем записывать также в виде бесконечной дроби:

$$\pm a_0, a_1 \dots a_M = \pm a_0, a_1 \dots a_M 0\,0 \dots = \pm a_0, a_1 \dots a_M (0). \tag{5}$$

Но пользуются также и другой записью:

$$\pm a_0, a_1 \dots a_M = \pm a_0, a_1 \dots a_{M-1} (a_M - 1)\, 99 \dots =$$
$$= \pm a_0, a_1 \dots a_{M-1} (a_M - 1)(9) \quad (a_M > 0), \tag{5'}$$

хотя она не возникает из процесса (2).

Итак, имеют место равенства

$$\pm a_0, a_1 \dots a_M = \pm a_0, a_1 \dots a_M (0) =$$
$$= \pm a_0, a_1 \dots a_{M-1} (a_M - 1)(9) \quad (a_M > 0).$$

Дроби $\pm a_0, a_1 \dots a_M (0)$ и $\pm a_0, a_1 \dots a_{M-1} (a_M - 1)(9)$ могут служить примерами периодических дробей. Первая из них после цифры a_M имеет период 0, а вторая после цифры $a_M - 1$ имеет период 9.

Пусть теперь знаменатель нашей дроби не имеет вид $2^s 5^t$. Тогда процесс (2) бесконечный — на любом шаге возникает положительный остаток. Каждый остаток меньше n, и потому (после того, как цифры числа m снесены) уже среди первых n остатков окажутся по крайней мере два, равные между собой. Но как только возникает остаток, который уже был прежде, процесс становится повторяющимся — *периодическим*. Поэтому десятичное разложение произвольного рационального числа имеет вид

$$\pm\frac{m}{n}=\pm a_0, a_1 \ldots a_M b_1 \ldots b_s b_1 \ldots b_s \ldots =$$
$$= \pm a_0, a_1 \ldots a_M (b_1 \ldots b_s) \qquad (s<n). \quad (6)$$

Разложения (5) и (5′) можно рассматривать как частные случаи (6).

Примеры:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{6}=0{,}166\ldots=0{,}1\,(6), \quad \frac{1}{7}=0{,}(142857),\\ &\frac{2}{9}=0{,}22\ldots=0{,}(2)\\ &\frac{7}{99}=0{,}0707\ldots=0{,}(07),\\ &\frac{7}{990}=0{,}00707\ldots=0{,}0(07). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Разложение вида (6) называется *бесконечной десятичной периодической дробью*.

Итак, каждое не равное нулю рациональное число можно разложить с помощью процесса (2), а в случае (4) и процесса (5) — в бесконечную десятичную периодическую дробь с периодом, отличным от 9. При этом можно доказать, что разным рациональным числам соответствуют разные бесконечные десятичные разложения. Но и обратно: любая бесконечная периодическая дробь (6), с периодом, отличным от 9, порождается при помощи указанных процессов (2), (5) некоторым рациональным числом, которое вычисляется по формуле

$$\pm\frac{m}{n}=\pm\left[a_0, a_1 \ldots a_M + \frac{\beta_1 \ldots \beta_s}{9\ldots 9}10^{-M}\right].$$

Здесь мы позволили себе через $\beta_1 \ldots \beta_s$ и $\underbrace{9\ldots 9}_{s\ \text{раз}}$ обозначить целое число, записанное соответственно цифрами $\beta_1, \ldots, \beta_s$ и $\underbrace{9, \ldots, 9}_{s\ \text{раз}}$.

Например,

$$1{,}237\,(06)=1{,}237+0{,}000\,(06)=$$
$$=1{,}237+\frac{06}{99}10^{-3}=1{,}237+\frac{6}{99\,000}.$$

Кроме периодических десятичных дробей, существуют непериодические, например 0,1010010001...; 0,121122111222... .

Вот еще пример: если извлекать корень квадратный из 2 по известному правилу, то получим определенную бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{2} = 1,41\ldots$. Она определена в том смысле, что любому натуральному числу k соответствует определенная цифра α_k, стоящая на k-м месте после запятой и однозначно вычисляемая согласно правилу извлечения квадратного корня.

Математический анализ дает много путей вычисления числа π с любой наперед заданной точностью. Это приводит к вполне определенному бесконечному десятичному разложению π, которое, как оказывается, не является смешанной периодической десятичной дробью.

Дадим теперь определение иррационального числа, пока чисто формальное. *Иррациональным числом называется произвольная бесконечная непериодическая дробь*

$$a = \pm\,\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots, \tag{8}$$

где α_0 *— целое неотрицательное число, а* α_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *— цифры, знак же равенства «=» выражает, что мы обозначили правую часть* (8) *через* a. Впрочем, удобно говорить, что правая часть (8) есть десятичное разложение числа a.

Рациональные и иррациональные числа называются действительными (или вещественными) числами.

Из сказанного следует, что *всякое не равное нулю действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби* (8). *Если оно рациональное, то его десятичное разложение есть бесконечная периодическая десятичная дробь. В противном случае, согласно нашему определению, выражение* (8) *само определяет иррациональное число.*

Не равная нулю десятичная дробь может быть конечной, но она не определяет нового рационального числа: в силу соглашений, выраженных равенствами (5), (5′), она может быть заменена указанными в этих равенствах бесконечными периодическими дробями.

Число a, *где не все* α_k *равны нулю, называется положительным или отрицательным* в зависимости от того, будет ли в (8) фигурировать «+» или «—»; при этом, как обычно, «+» будем опускать.

Число 0 тоже может быть записано бесконечной десятичной дробью одного из следующих видов:

$$0=+0,00\ldots=0,00\ldots=-0,00\ldots .$$

Действительные числа определены пока формально, надо еще определить арифметические операции над ними, ввести для них понятие «$>$» и проверить, что эти операции и понятие «$>$» согласуются с уже имеющимися соответствующими операциями и понятием «$>$» для рациональных чисел, а также удовлетворяют свойствам, которые мы предъявляем к числам.

§ 1.5. Определение равенства и неравенства

Зададим два числа $a=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $b=\pm\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots$, определяемых бесконечными десятичными дробями, не имеющими период 9. Будем считать, что они *равны* между собой тогда и только тогда, когда их знаки одинаковы и

$$\alpha_k=\beta_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть a и b — положительные числа. По определению $a<b$, или, что все равно, $b>a$, если $\alpha_0<\beta_0$ или, если найдется такой индекс (целое неотрицательное число) l, что $\alpha_k=\beta_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ l)$ и $\alpha_{l+1}<\beta_{l+1}$.

Подчеркнем, что если мы хотим сравнивать десятичные дроби, одна из которых имеет период 9, то ее надо заменить дробью с периодом 0 и затем уже применить указанные правила сравнения.

По определению $a>0$ или $a<0$ в зависимости от того, будет ли a положительным или отрицательным; далее, по определению $a<b$, если $a<0$, $b>0$, или если $a,\ b<0$ и $|a|>|b|$.

Если $a=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, то по определению $-a=\mp\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ и абсолютная величина $|a|=+\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$. Таким образом,

$$|-a|=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a\leqslant 0).\end{cases}$$

Как мы знаем из школьного курса математики, между действительными числами и точками некоторой прямой можно установить взаимно однозначное соответствие ($\leftrightarrow$) по следующему правилу. Числу 0 приводится в соответствие произвольная точка O на прямой, называемая нулевой точкой, и наоборот. Длина некоторого отрезка принимается за единицу. Каждому действительному числу $\pm a$ $(a>0)$ приводится в соответствие точка прямой, отстоящая от нулевой точки на расстоянии, равном a, справа от точки O для числа $+a$ и слева от точки O для числа $-a$ (рис. 5). Наоборот, если A—произвольная точка прямой, находящаяся на расстоянии a справа от O, то считают, что она соответствует действительному числу $+a$ (бесконечной десятичной дроби). Если же точка A находится слева от точки O, то она соответствует числу—a. Рассматриваемую прямую будем называть *числовой прямой* или *действительной осью*. В дальнейшем точки числовой прямой будем отождествлять с действительными числами, которые им соответствуют, т. е. сами точки будем называть соответствующими числами. Отметим, что расстояние между точками a и b равно $|a-b|$ (определение разности см. § 1.6).

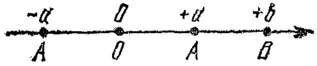

Рис. 5.

§ 1.6. Определение арифметических действий

1.6.1. Общие соображения. Для действительных чисел можно определить арифметические действия—сложение, вычитание, умножение и деление. Как это делается, можно узнать из приводимых ниже мелким шрифтом рассуждений. Читатель, который найдет нужным познакомиться с этими рассуждениями, увидит, что арифметические действия над бесконечными дробями сопряжены с необходимостью совершать некоторые бесконечные процессы. На практике арифметические действия над действительными числами производятся приближенно.

На этом пути возможны и формальные определения этих действий. Об этом будет идти речь в § 1.8.

В следующем параграфе перечисляются свойства действительных чисел, вытекающие из сделанных определений. Мы формулируем эти свойства. Их можно доказать, но мы доказываем их лишь в отдельных случаях (полное доказательство см., например, в учебнике С. М. Никольского «Математический анализ», т. I, гл. 2). Эти свойства собраны в пять групп (I—V). Первые три из них содержат элементарные свойства, которыми мы руководствуемся при арифметических вычислениях и решении неравенств. Группа IV составляет одно свойство (Архимеда). Наконец, группа V также состоит из одного свойства. Это свойство формулируется на языке пределов. Оно будет доказано, но позже — в § 2.5.

1.6.2. Стабилизирующиеся последовательности. Пусть каждому неотрицательному целому числу (*индексу*) n в силу некоторого закона приведено в соответствие число x_n. Совокупность

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots \tag{1}$$

называется *последовательностью* (чисел). Отдельные числа x_n последовательности (1) называются ее *элементами*. Элементы x_n и x_m при $m \neq n$ считаются отличными как элементы последовательности, хотя не исключено, что как числа они равны между собой ($x_n = x_m$).

Последовательность называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $x_k \leqslant x_{k+1}$ ($x_k \geqslant x_{k+1}$) для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Будем говорить, что *последовательность* (1) *ограничена сверху* (*числом* M), если существует число M такое, что $x_k \leqslant M$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Последовательность (1) *ограничена снизу* (*числом* m), если существует число m такое, что $x_k \geqslant m$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Если числа x_k последовательности (1) целые, то будем говорить, что она *стабилизируется* к числу ξ, если найдется такое k_0, что $x_k = \xi$ для всех $k > k_0$, и писать $x_k \rightrightarrows \xi$.

Лемма 1. *Если последовательность целых неотрицательных чисел не убывает и ограничена сверху числом M, то она стабилизируется к некоторому целому числу $\xi \leqslant M$.*

Доказательство. Хотя количество элементов у нашей последовательности бесконечно, но она пробегает *конечное* число целых чисел. Ведь эти числа не превышают M. Пусть ξ — наибольшее среди этих чисел. Таким образом, $\xi \leqslant M$ и существует такое натуральное s, при котором $x_s = \xi$. Но наша последовательность не убывает, и потому $x_k = x_s$ для всех $k \geqslant s$, т. е. наша последовательность стабилизируется к числу ξ ($x_n \rightrightarrows \xi \leqslant M$).

Рассмотрим теперь последовательность неотрицательных десятичных дробей (только конечных или только бесконечных):

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{10},\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\ a_2 &= \alpha_{20},\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\ a_3 &= \alpha_{30},\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Правые части в (2) образуют таблицу (*бесконечную матрицу*).

Будем говорить, что *последовательность* (2) *стабилизируется к числу* $a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\ldots$, и писать

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

если k-й столбец таблицы (2) *стабилизируется к* γ_k, *каково бы ни было* $k = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. $\alpha_{sk} \rightrightarrows \gamma_k$ для любого фиксированного k.

Лемма 2. *Если неубывающая последовательность* (2) *десятичных дробей (только конечных или только бесконечных) ограничена сверху числом M, то она заведомо стабилизируется к некоторому числу a, удовлетворяющему неравенствам*

$$a_n \leqslant a \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

В самом деле, в условиях леммы целые числа нулевого столбца матрицы (2)

$$\begin{array}{c} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \\ \ldots \end{array}$$

также не убывают и ограничены сверху числом M, поэтому, согласно лемме 1, они стабилизируются к некоторому целому неотрицательному числу $\gamma_0 \leqslant M$. Пусть эта стабилизация имеет место, начиная с номера n_0, т. е. $a_n = \gamma_0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots \leqslant M$, $n \geqslant n_0$.

Докажем теперь, что первый столбец в (2)

$$\begin{array}{c} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \ldots \end{array}$$

также стабилизируется к некоторой цифре γ_1 и имеет место неравенство

$$\gamma_0, \gamma_1 \leqslant M.$$

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n при $n \geqslant n_0$ имеют вид

$$\gamma_0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots \leqslant M \quad (n \geqslant n_0)$$

и, кроме того, a_n не убывает, то для указанных n цифры первого столбца α_{n1} ($\leqslant 9$) тоже не убывают и, следовательно, по лемме 1 стабилизируются к некоторой цифре γ_1. Пусть эта вторая стабилизация наступает, начиная с номера $n_1 > n_0$, т. е. при $n \geqslant n_1$

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1\alpha_{n2}\alpha_{n3}\ldots \leqslant M.$$

При этом очевидно, что

$$\gamma_0, \gamma_1 \leqslant a_n \leqslant M \quad (n \geqslant n_1).$$

Рассуждая теперь по индукции, допустим, что уже доказано, что столбцы матрицы (2) с номерами, не превышающими k, стабилизируются соответственно к $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ и

$$\gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant M \quad (\gamma_1, \ldots, \gamma_k\text{—цифры}). \tag{5}$$

Докажем, что $(k+1)$-й столбец в (2) также стабилизируется к некоторой цифре γ_{k+1} и имеет место неравенство

$$\gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant M. \tag{6}$$

В самом деле, раз десятичные разложения чисел a_n при $n \geqslant n_k$ имеют вид

$$a_n = \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_k\alpha_{n,\,k+1}\alpha_{n,\,k+2} \ldots \leqslant M$$

и, кроме того, a_n не убывает, то для указанных n цифры $\alpha_{n,\,k+1}$ $(\leqslant 9)$ не убывают и, следовательно, стабилизируются при $n \geqslant n_{k+1}$, где n_{k+1} достаточно велико, к некоторой цифре γ_{k+1}. При этом очевидно, что

$$\gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M \quad (n \geqslant n_{k+1}),$$

и мы доказали неравенство (6). Положим $a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots$. Очевидно, что $a_n \rightrightarrows a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots$.

Докажем первое неравенство (4). Сравним числа

$$a_n = \alpha_{n0},\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots,$$
$$a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots .$$

Если все соответствующие компоненты обоих разложений равны ($\alpha_{ns} = \gamma_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$), то $a_n = a$. В противном случае при некотором s

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{nj} = \gamma_j \quad (j = 0, 1, \ldots, s-1), \\ &\alpha_{ns} < \gamma_s. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

При этом, если $s = 0$, то равенства в (7) надо опустить. При рассматриваемом n числа $\alpha_{nj} = \gamma_j$ $(j = 0, 1, \ldots, s-1)$ уже стабилизированы, поэтому

$$a_n \leqslant \alpha_{n0},\alpha_{n1} \ldots \alpha_{n,\,s-1}(\alpha_{ns}+1) =$$
$$= \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{s-1}(\alpha_{ns}+1) \leqslant \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{s-1}\gamma_s \leqslant a,$$

и мы доказали первое неравенство (4).

Остается доказать второе неравенство (4). Если $a = \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_N$ — конечная десятичная дробь, то оно следует из (5) при $k = N$. Пусть теперь

$$a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots \tag{8}$$

— бесконечная десятичная дробь. Разложим число M тоже в бесконечную дробь $M = m_0,m_1m_2 \ldots$. Если допустить, что доказываемое неравенство неверно, то найдется такое k, что

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_j = m_j \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1), \\ &\gamma_k > m_k. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если $k = 0$, то равенства в (9) опускаются. Так как разложение (8) бесконечно, то найдется такое s, что $\gamma_{k+s} > 0$. Поэтому

$$\gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{k-1}\gamma_k \ldots \gamma_{k+s} > \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{k-1}\gamma_k = m_0,m_1 \ldots m_{k-1}\gamma_k \geqslant$$
$$\geqslant m_0,m_1 \ldots m_{k-1}(m_k+1) = m_0,m_1 \ldots m_{k-1}m_k99 \ldots \geqslant$$
$$\geqslant m_0,m_1m_2 \ldots = M,$$

и получилось противоречие с неравенством (5).

1.6.3. Определение арифметических действий. Теперь у нас есть возможность дать определение арифметических действий над действительными числами.

Для произвольного числа $a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$ введем его n-ю *срезку* $a^{(n)}=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n$ — конечную десятичную дробь. Мы считаем, что операции с конечными десятичными дробями читателю известны.

Зададим два положительных числа

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots, \quad b=\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots,$$

разложенные в бесконечные десятичные дроби. Введем последовательность чисел

$$a^{(n)}+b^{(n)}=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n+\beta_0,\beta_1\ldots\beta_n=\lambda_0^{(n)},\lambda_1^{(n)}\ldots\lambda_n^{(n)}$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно, эта последовательность не убывает, кроме того, она ограничена сверху:

$$a^{(n)}+b^{(n)}\leqslant(\alpha_0+1)+(\beta_0+1) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Но тогда на основании леммы 2 десятичные разложения нашей последовательности стабилизируются к некоторой десятичной дроби — действительному числу — $\gamma_0,\gamma_1\gamma_2\ldots$. Это число и называется по определению *суммой чисел* a и b:

$$a+b=\gamma_0,\gamma_1\gamma_2\ldots\ .$$

Итак, мы определяем сумму $a+b$ как число, к которому стабилизируется $a^{(n)}+b^{(n)}$:

$$a^{(n)}+b^{(n)}\rightrightarrows a+b. \tag{10}$$

Чтобы определить произведение положительных чисел a и b, вводим срезку

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)}=\mu_0^{(n)},\mu_1^{(n)}\ldots\mu_n^{(n)} \tag{11}$$

— конечную десятичную дробь. Последовательность этих срезок, очевидно, не убывает (при возрастании n!) и ограничена сверху:

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)}\leqslant(\alpha_0+1)(\beta_0+1) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому по лемме 2 выражение (11) стабилизируется к некоторому числу, которое и называется *произведением* ab:

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)}\rightrightarrows ab.$$

Отметим неравенства

$$a^{(n)}=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\leqslant\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\leqslant\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\,99\ldots=$$
$$=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n+1)=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n+10^{-n},$$

т. е.

$$a^{(n)}\leqslant a\leqslant a^{(n)}+10^{-n}.$$

Величина $a^{(n)}$ приближается к a (при возрастании n), не убывая. Что же касается величины $a^{(n)}+10^{-n}$, то она приближается к a, не возрастая:

$$a^{(n)}+10^{-n}=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n 99\ldots\geqslant\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}99\ldots=$$
$$=a^{(n+1)}+10^{-(n+1)}.$$

Это обстоятельство будет использовано при определении разности и частного положительных чисел.

Если $a > b > 0$, то *разность* $a-b$ определяется как десятичная дробь (число), к которой стабилизируется последовательность конечных десятичных дробей:

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \rightrightarrows (a-b); \tag{12}$$

если $a,\ b > 0$, то *частное* a/b определяется как десятичная дробь, к которой стабилизируется последовательность конечных дробей:

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}. \tag{13}$$

Надо учесть, что $a^{(n)}$ при возрастании n не убывает, а $b^{(n)} + 10^{-n}$ не возрастает, и потому выражения слева в (12), (13) не убывают. Кроме того, они ограничены сверху:

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \leqslant \alpha_0 + 1,$$
$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \leqslant \frac{\alpha_0 + 1}{\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_s},$$

где s таково, что $\beta_s > 0$. Поэтому по лемме 2 выражения слева в (12) и (13) действительно стабилизируются.

Положим еще

$$0 + a = a \pm 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0 = a - a = \frac{0}{b} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0). \tag{14}$$

Мы определили для неотрицательных чисел a, b их сумму, разность, произведение и частное, предполагая в случае разности, что $a \geqslant b$, и в случае частного, что $b > 0$. Эти определения распространяются обычными способами на числа a и b произвольных знаков. Например, если $a,\ b \leqslant 0$, то полагаем $a + b = b + a = -(|a| + |b|)$. Если же a и b — числа разных знаков и $|a| \geqslant |b|$, то полагаем $a + b = b + a = \pm(|a| - |b|)$, где выбирается знак, одинаковый со знаком a. В частности, имеет место

$$a + (-a) = 0$$

для любого a.

Подобные правила можно было бы привести для остальных арифметических действий, но в этом нет необходимости — они хорошо известны из курса алгебры.

§ 1.7. Основные свойства действительных чисел

I. Свойства порядка.

I_1. Для каждой пары действительных чисел a и b имеет место одно и только одно соотношение:

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b.$$

I_2. Из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$ (транзитивное свойство знака «$<$»).

I_3. Если $a < b$, то найдется такое число c, что $a < c < b$.

II. Свойства действий сложения и вычитания.

II_1. $a+b=b+a$ (переместительное или коммутативное свойство).

II_2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

II_3. $a+0=a$.

II_4. $a+(-a)=0$.

II_5. Из $a<b$ следует, что $a+c<b+c$ для любого c.

Число $a+(-b)$ естественно назвать разностью $a-b$, т. е. писать $a-b=a+(-b)$, потому что, если его добавить к b, то получим a:

$$[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+0=a.$$

Из приведенных свойств легко следует, что разность единственна. Можно доказать, что так определенная разность совпадает с разностью, определенной формулой (12) § 1.6.

III. Свойства действий умножения и деления.

III_1. $ab=ba$ (переместительное или коммутативное свойство).

III_2. $(ab)c=a(bc)$ (сочетательное или ассоциативное свойство).

III_3. $a\cdot 1=a$.

III_4. $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$.

III_5. $(a+b)c=ac+bc$ (распределительный или дистрибутивный закон).

III_6. Из $a<b$, $c>0$ следует $ac<bc$.

Число $a\cdot\frac{1}{b}$ $(b\neq 0)$ естественно назвать частным $\frac{a}{b}$ $\left(\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\right)$, потому что, если его умножить на b, то получим a:

$$\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)b=a\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=a\left(b\cdot\frac{1}{b}\right)=a\cdot 1=a.$$

Из приведенных свойств легко следует, что частное от деления a на b единственно. Можно доказать, что так определенное частное совпадает с частным, определенным формулой (13) § 1.6.

IV. Архимедово свойство. Каково бы ни было число $c>0$, существует натуральное $n>c$. В самом деле, если $c=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, то можно взять $n=\alpha_0+2$.

Из архимедова свойства и некоторых предыдущих свойств следует, что, каково бы ни было положительное число ε, всегда можно указать такое натуральное n, что выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

В самом деле, согласно IV для числа $1/\varepsilon$ можно указать натуральное n такое, что $1/\varepsilon < n$, что в силу III_6 влечет нужное неравенство.

Заметим, что для данного числа $c \geqslant 0$ в ряду 0, 1, 2, ... целых неотрицательных чисел, очевидно, имеется единственное m, для которого выполняются неравенства $m \leqslant c < m+1$.

Свойство V. *Если последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ не убывает и ограничена сверху числом M ($a_n \leqslant M$), то существует число $a \leqslant M$, к которому эта последовательность стремится как к своему пределу*:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \leqslant M.$$

Это значит, что для всякого как угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число n_0 такое, что

$$|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon \text{ для всех } n > n_0.$$

Доказательство свойства V мы не будем считать обязательным, но оно приведено (см. далее § 2.5, теорема 1). Как мы увидим, свойство V есть непосредственное следствие леммы 2 § 1.6, в которой, в частности, утверждалось, что неубывающая ограниченная сверху числом M последовательность бесконечных десятичных дробей стабилизируется к некоторой десятичной дроби $a \leqslant M$ ($a_n \rightrightarrows a$).

Дело в том, что из того, что a_n стабилизируется к a, следует, что a_n стремится к a как к своему пределу.

§ 1.8. Аксиоматический подход к понятию действительного числа

Мы назвали бесконечные десятичные дроби действительными числами, ввели для них понятия 0, 1, $>$, $=$ и арифметические операции, и сформулировали их основные свойства I—V, которые могут быть доказаны.

Нужно сказать, что свойства I—V подобраны экономно и полно, настолько, что из них можно получить логически все остальные свойства чисел.

Существует аксиоматический подход к определению действительного числа, заключающийся в том, что действительными числами называются некоторые объекты (вещи) a, b, c, . ., удовлетворяющие свойствам I—V. При таком подходе свойства I—V называется *аксиомами числа*.

При аксиоматическом подходе формулировки свойств (теперь аксиом) должны быть несколько видоизменены. Аксиомы II теперь уже формулируются так: каждой паре чисел в силу некоторого закона соответствует число $a+b$, называемое их суммой, при этом выполняются аксиомы II_1—II_5. Аксиома II_3 должна быть сформулирована в виде: существует число 0 (нуль) такое, что $a+0=a$ для всех a. Аксиома II_4 формулируется так: для любого числа a существует число, обозначаемое через $-a$ такое, что $a+(-a)=0$. Наконец, аксиома III_3 принимает вид: существует число 1 (единица), отличное от 0, такое, что $a\cdot 1=a$ для всех a.

Обозначим через $\mathbf{R}$ множество всех действительных чисел, т. е. всех вещей, подчиняющихся аксиомам I—V. Тогда в $\mathbf{R}$ имеется нуль 0 и единица 1. С помощью аксиом можно доказать, что $0<1$ и имеют смысл числа $2=1+1$, $3=2+1, \ldots$ и числа -1, -2, -3, $\ldots$. В результате получим множество всех целых чисел (различных между собой!)

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots .$$

На основании аксиом эти числа можно делить друг на друга, исключая деление на 0. Поэтому в $\mathbf{R}$ есть рациональные числа $\pm m/n=\pm mp/np$ $(n>0,\ m\geqslant 0,\ p\neq 0)$. Но тогда в $\mathbf{R}$ имеются также и конечные десятичные дроби. Из последних можно построить ограниченные сверху неубывающие последовательности. На основании аксиомы V в $\mathbf{R}$ должны существовать пределы таких последовательностей. Некоторые из этих пределов не являются конечными десятичными дробями—это числа, отличные от конечных десятичных дробей. Их удобно записывать в виде бесконечных десятичных дробей. В результате от аксиом с помощью логических рассуждений можно прийти к бесконечным десятичным дробям. Конечно, мы здесь привели только схему рассуждений, которая не претендует на доказательство.

Из сказанного следует, что с формальной точки зрения все равно, исходим ли мы при определении действительных чисел из бесконечных десятичных дробей или из аксиоматического подхода.

Конечно, с философской точки зрения второй подход более приемлем: числа суть абстракции, выражающие количественные отношения реального мира, а десятичные дроби — формальные символы, их представляющие.

§ 1.9. Неравенства для абсолютных величин

Неравенство

$$|a| < \varepsilon \tag{1}$$

эквивалентно двум неравенствам

$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \tag{1'}$$

Отсюда неравенство

$$|a-b| < \varepsilon \tag{2}$$

эквивалентно неравенствам

$$b-\varepsilon < a < b+\varepsilon. \tag{2'}$$

Аналогично неравенство

$$|a-b| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

эквивалентно неравенствам

$$b-\varepsilon \leqslant a \leqslant b+\varepsilon.$$

Справедливы также неравенства

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \tag{4}$$

$$|a-b| \geqslant \big||a|-|b|\big|. \tag{5}$$

Неравенство (4) можно получить, рассмотрев отдельно четыре случая: 1) $a,\ b \geqslant 0$, 2) $a,\ b \leqslant 0$, 3) $a \leqslant 0 \leqslant b$, 4) $b \leqslant 0 \leqslant a$. Например, в случае 2)

$$a+b \leqslant b \leqslant 0,\ |a+b| = -(a+b) = -a-b = |a|+|b|,$$

а в случае 3), если допустить, что $|b| \geqslant |a|$,

$$|a+b| = b+a \leqslant |a|+|b|.$$

Случай 3) при допущении $|b| \leqslant |a|$ читатель разберет сам, так же, как случай 1). Случай 4) сводится к случаю 3). Далее, в силу (4)

$$|a| \leqslant |b|+|a-b|, \qquad |b| \leqslant |a|+|a-b|,$$

т. е.

$$|a|-|a-b| \leqslant |b| \leqslant |a|+|a-b|,$$

но тогда верно (5).

§ 1.10. Отрезок, интервал, ограниченное множество

Пусть числа (точки) a и b удовлетворяют неравенству $a < b$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (с концами a, b) или *сегментом* и обозначается так: $[a, b]$.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* (с концами a, b) или *открытым отрезком* и обозначается так: (a, b).

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, обозначаются соответственно $[a, b)$, $(a, b]$ и называются *полуоткрытыми отрезками* или *полуинтервалами*. Первый, например, *закрыт* слева и *открыт* справа.

Часто рассматривают еще множества, называемые *бесконечными интервалами* и *полуинтервалами*: 1) $(-\infty, \infty)$, 2) $(-\infty, a]$, 3) $(-\infty, a)$, 4) (a, ∞), 5) $[a, \infty)$.

Первое из них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая); остальные состоят из всех чисел, для которых соответственно: 2) $x \leqslant a$, 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leqslant x$.

Символы $-\infty$ и $+\infty$ удобно называть *бесконечными числами*, а обычные числа—*конечными числами*.

Отметим, что назвав символы $+\infty$ и $-\infty$ бесконечными числами, мы вовсе не считаем их числами.

Подчеркнем, что у отрезка $[a, b]$ концы—конечные числа, у интервала же (a, b) его «концы» могут быть конечными и бесконечными. У полуинтервала $[a, b)$ число a всегда конечное, а b может быть конечным и бесконечным ($b \leqslant \infty$). Аналогично у полуинтервала $(a, b]$ число a конечное или бесконечное ($-\infty \leqslant a$), а b всегда конечное.

Если a и b конечны и $a < b$, то $b-a$ называется *длиной* сегмента $[a, b]$, или интервала (a, b), или полуинтервалов $(a, b]$, $[a, b)$.

Если a и b—произвольные точки действительной оси, то число $|a-b|$ называется *расстоянием между точками a и b*.

Произвольный интервал (a, b), содержащий точку c $(a < c < b)$, мы будем называть *окрестностью точки c*. В частности, интервал $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ называют *ε-окрестностью точки c*.

Пусть $X = \{x\}$ есть произвольное множество действительных чисел. Говорят, что множество X *ограничено* *сверху*, если $\exists$ (действительное) число M такое, что $\forall x \in X$: $x \leqslant M$; *ограничено снизу*, если $\exists$ число m такое, что $\forall x \in X$: $x \geqslant m$; и *ограничено*, если оно ограничено как сверху, так и снизу. Число M (m) называется *верхней* (*нижней*) *границей* множества X. Число M называется также *мажорантой* множества X.

Можно еще, очевидно, сказать, что множество X ограничено, если $\exists$ число $M > 0$ такое, что $\forall x \in X$: $|x| \leqslant M$, так как неравенство $|x| \leqslant M$ эквивалентно двум неравенствам $-M \leqslant x \leqslant M$.

Если множество X не является ограниченным, то его называют *неограниченным*. Его можно определить следующим образом: множество X действительных чисел неограниченно, если $\forall M > 0\ \exists x_0 \in X$: $|x_0| > M$. К этой формулировке можно прийти, исходя из правила построения отрицания данной логической формулы.

Примеры. Отрезок $[a, b]$ есть ограниченное множество. Интервал (a, b) есть ограниченное множество, если a и b конечны, и неограниченное, если $a = -\infty$ или $b = \infty$.

§ 1.11. Счетное множество. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества действительных чисел

Выше мы определили понятие равенства множеств. Для характеристики степени насыщенности бесконечных множеств элементами удобным является понятие эквивалентности множеств. Множество X называется *бесконечным*, если $\forall n \in \mathbb{N}$: в множестве X имеются элементы, количество которых больше n. Два множества A и B называют *эквивалентными*, и при этом пишут $A \sim B$, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие ($\leftrightarrow$), т. е. существует такое правило, закон, по которому $\forall a \in A$ соответствует вполне определенный элемент $b \in B$. При этом в силу этого правила двум разным элементам a_1, $a_2 \in A$ соответствуют два разных элемента b_1, $b_2 \in B$ и каждый элемент $b \in B$ соответствует некоторому элементу $a \in A$.

Например, если A — множество точек на окружности радиуса r, B — множество точек на концентрической окружности радиуса $R > r$, то очевидно, что $A \sim B$ (рис. 6).

Очевидно, что если $A = B$, то $A \sim B$.

Если $X=\{x\}\sim \mathrm{N}=\{n\}$, то множество X называется *счетным*. Естественно, что само множество натуральных чисел N является счетным (соответствие устанавливается по схеме $n\leftrightarrow n$). Множество всех четных натуральных чисел $\mathrm{N}_{ч}=\{2n\}$ эквивалентно всему множеству N, причем соответствие устанавливается по схеме $n\leftrightarrow 2n$. Отметим, что здесь $\mathrm{N}_{ч}\neq \mathrm{N}$, $\mathrm{N}_{ч}\subset \mathrm{N}$. Таким образом, истинное подмножество (часть) множества оказалось эквивалентным всему множеству. Это свойство присуще только бесконечным множествам (его можно принять за определение бесконечного множества).

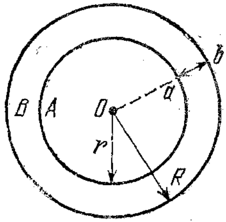

Рис. 6.

Из определения счетности множества вытекает, что его элементы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел, поэтому счетное множество мы часто будем записывать в виде последовательности его элементов:

$$X=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\}.$$

Счетная (теоретико-множественная) сумма

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E^k=E^1+E^2+\ldots$$

счетных (или конечных) множеств E^k есть счетное множество. В самом деле, запишем элементы $x_j^k\in E^k$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$ в виде таблицы:

$$\begin{aligned}
E^1&=\{x_1^1,\ x_2^1,\ x_3^1,\ \ldots\},\\
E^2&=\{x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ \ldots\},\\
E^3&=\{x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3,\ \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Перенумеруем их в следующем порядке:

$$x_1^1,\ x_2^1,\ x_1^2,\ x_3^1,\ x_2^2,\ x_1^3,\ x_4^1,\ \ldots,$$

выбрасывая, однако, на каждом этапе нумерации те элементы, которые уже были занумерованы на предыдущем этапе: ведь может случиться, что E^k и E^l имеют общие элементы. В результате получим бесконечную последовательность элементов $\{y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\}$, очевидно, исчерпывающих множество E. Это доказывает, что E — счетное множество.

Аналогично доказывается, что *конечная сумма* $E = E^1 + \ldots + E^N$ *счетных или конечных множеств, среди которых есть хотя бы одно счетное, счетна.*

Теорема 1. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Рассмотрим сначала положительные рациональные числа $\mathbf{Q}_+ = \{p/q\}$. Назовем натуральное число $p+q$ высотой рационального числа p/q. Пусть A_n — множество всех рациональных чисел с высотой, равной n. Множества A_n состоят из конечного числа элементов (рациональных чисел), например

$$A_1 = \varnothing,\ A_2 = \left\{\frac{1}{1}\right\},\ A_3 = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\right\},\ A_4 = \left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\right\}, \ldots .$$

Легко видеть, что $\mathbf{Q}_+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Перенумеруем числа, записанные в фигурных скобках слева направо, выпуская, впрочем, на каждом этапе нумерации те, которые были уже занумерованы на более раннем этапе. В результате получим последовательность

$$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = 2,\ r_4 = \frac{1}{3},\quad r_5 = 3, \ldots .$$

Так как рациональных положительных чисел бесконечно много, то мы используем все натуральные числа. Значит, $\mathbf{Q}_+$ счетно. Далее, очевидно, что $\mathbf{Q}_- = \{-p/q\}$ счетно. Поэтому все множество рациональных чисел $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{Q}_- \cup \{0\}$ также счетно.

Теорема 2. *Множество всех действительных чисел несчетно.*

Доказательство. Для доказательства достаточно установить, что множество действительных чисел интервала $(0, 1)$ образует несчетное множество. Допустим противное, что интервал $(0, 1)$ есть счетное множество, т. е. все его точки можно перенумеровать:

$$\begin{gathered} x_1 = 0,\ a_1^{(1)} a_2^{(1)} \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = 0,\ a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Но это предположение противоречиво. В самом деле, построим вещественное число $x = 0, a_1 a_2 \ldots$, где цифры a_n подобраны так, чтобы $0 < a_n < 9$ и $a_n \neq a_n^{(n)}$. Ясно, что $x \in (0, 1)$, однако x не совпадает ни с одним из чисел x_{n_0}, так как иначе должно было бы быть $a_{n_0} = a_{n_0}^{(n_0)}$, что не имеет места.

ГЛАВА 2

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 2.1. Понятие предела последовательности

Пусть каждому натуральному числу $n=1, 2, 3, \ldots$ по некоторому закону поставлено в соответствие действительное или комплексное число x_n.

Тогда говорят, что этим определена *последовательность чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ или, короче, последовательность

$$\{x_n\}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}.$$

Говорят еще, что переменная x_n пробегает значения последовательности $\{x_n\}$.

Отдельные числа x_n последовательности $\{x_n\}$ называются ее *элементами*. Надо иметь в виду, что x_n и x_m при $n \neq m$ считаются отличными как элементы последовательности, хотя не исключено, что как числа они равны между собой, т. е. может быть $x_n = x_m$.

Если положить $x_n = y_{n-1}$, то последовательность

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}$$

превратится во множество

$$\{y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\},$$

которое в § 1.6 тоже было названо последовательностью.

В этой главе мы будем рассматривать последовательности *действительных* чисел и это обстоятельство не будем оговаривать особо.

Примеры последовательностей:

Пример 1. $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\right\}=\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Пример 2. $\left\{\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \ldots\right\}=\{2^{(-1)^n}\}$.

Пример 3. $\left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots\right\} = \{n^{(-1)^n}\}$.

Пример 4. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$.

Пример 5. $\{2, 5, 10, \ldots\} = \{n^2+1\}$.

Пример 6. $\{-1, 2, -3, 4, \ldots\} = \{(-1)^n n\}$.

В примере 2 переменная x_n для четных n принимает одно и то же значение:

$$2 = x_2 = x_4 = x_6 = \ldots .$$

Тем не менее мы считаем, что элементы $x_2, x_4, \ldots$ различны.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу a, то ее называют *постоянной*.

Легко видеть, что последовательности в примерах 1, 2 и 4 *ограничены* (см. § 1.6). В этом случае говорят также, что соответствующие переменные, пробегающие эти последовательности, ограничены. Что касается последовательностей в примерах 3, 5 и 6, то они неограничены. Однако последовательность в примере 3, очевидно, ограничена снизу числом 0, а последовательность в примере 5 ограничена снизу числом 2. Что касается последовательности в примере 6, то она неограничена как снизу, так и сверху.

Введем понятие предела последовательности.

Определение 1. *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется (зависящее от ε) число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что выполняется неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

для всех (натуральных) $n > n_0$.

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a$$

и говорят, что переменная x_n или последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a, или стремится к a. Говорят также, что переменная x_n или последовательность $\{x_n\}$ *сходится к числу a.*

Если $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim a = a$.

Замечание. Если $\lim x_n = a$, то $\lim x_{n+1} = a$; и обратно. Это следует из того факта, что если

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0,$$

то

$$|x_{n+1} - a| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 - 1,$$

и обратно.

Переменная примера 1 имеет предел, равный 0:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{2}$$

В самом деле, зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Этим для всякого $\varepsilon > 0$ найдено число $n_0 = n_0(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ такое, что неравенство

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

выполняется для всех $n > n_0$, и мы доказали равенство (2).

Пример 7. Переменная примера 4 стремится к 1:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} = 1. \tag{3}$$

В самом деле, составим неравенство

$$\left|1 - \frac{n-1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Оно, как мы видели, выполняется для любого $\varepsilon > 0$, если $n > n_0 = 1/\varepsilon$. Это доказывает равенство (3).

Пример 8. Если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0. \tag{4}$$

В самом деле, пусть пока $q \neq 0$. Неравенство

$$|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$$

верно, если

$$n \lg |q| < \lg \varepsilon,$$

т. е. если

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} = n_0(\varepsilon).$$

Мы доказали (4) при $0 < |q| < 1$. Если $q=0$, то равенство (4) тривиально. Ведь в этом случае переменная q^n есть постоянная, равная нулю:

$$\{0,\ 0,\ 0,\ \ldots\}.$$

Пример 9. Разложим положительное число a в бесконечную десятичную дробь:

$$a = a_0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Для его n-й срезки

$$a^{(n)} = a_0,\ a_1\ \ldots\ a_n$$

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a. \qquad (5)$$

В самом деле,

$$|a - a^{(n)}| = 0,\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ раз}} a_{n+1} a_{n+2} \ldots \leqslant 10^{-n}.$$

Но если задать $\varepsilon > 0$, то всегда найдется такое n_0, что

$$10^{-n} < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

(см. предыдущий пример, где надо считать $q = 10^{-1}$). Поэтому

$$|a - a^{(n)}| < \varepsilon \quad \forall n > n_0,$$

и мы доказали (5).

Замечание. Срезки $a^{(n)}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — рациональные числа. Из (5) следует, что *всякое действительное число* является пределом последовательности рациональных чисел.

Таким образом, всякое иррациональное число можно приблизить рациональным числом с любой наперед заданной степенью точности.

В силу этого свойства про множество **Q** рациональных чисел говорят, что оно *всюду плотно* в множестве **R** всех действительных чисел.

Неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

эквивалентно двум неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{или} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

что эквивалентно тому факту, что точка x_n принадлежит к ε-окрестности точки a:

$$x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \quad (\text{см. § 1.10}).$$

Тогда определение предела можно выразить следующими словами: число (точка) a есть предел переменной x_n, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число n_0, что все точки x_n с индексами $n > n_0$ попадут в ε-окрестность точки a:

$$x_n \in (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \quad (n > n_0).$$

Очевидно, какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, найдется такое $\varepsilon > 0$, что интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ содержится в (c, d), т. е. $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \subset (c, d)$ (рис. 7).

Поэтому тот факт, что $x_n \to a$, можно выразить еще и так: какова бы ни была окрестность (c, d) точки a, все точки x_n, начиная с некоторого номера n, должны попасть в эту окрестность, т. е. должно существовать такое число n_0, что $x_n \in (c, d)$ $(n > n_0)$. Что же касается точек x_n с индексами $n \leqslant n_0$, то они могут принадлежать и могут не принадлежать к (c, d). Таким образом, если вне (c, d) имеются точки x_n, то их конечное число.

С другой стороны, если известно, что вне (c, d) имеется только конечное число точек $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_s}$, то, обозначив

$$k = \max\{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_s\},$$

т. е. максимум среди индексов $n_1, \ldots, n_s$, мы можем сказать, что точки x_n с индексом $n > k$ попадут в интервал (c, d). Поэтому понятие предела можно сформулировать и так: переменная x_n имеет своим пределом точку a, если *вне любой окрестности этой точки имеется конечное или пустое множество точек* x_n.

Пример 10. Переменная

$$\{(-1)^{n+1}\} = \{1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\} \tag{6}$$

ни к какому пределу не стремится.

В самом деле, допустим, что эта переменная имеет предел, равный числу a. Рассмотрим окрестность этой точки

$$\left(a-\frac{1}{3},\ a+\frac{1}{3}\right).$$

Длина ее равна 2/3. Очевидно, что эта окрестность не может содержать в себе одновременно и точку 1, и точку —1, потому что расстояние между этими точками равно 2 ($2 > 2/3$). Для определенности будем считать, что точка 1 не принадлежит к нашей окрестности. Но $x_n=1$ для $n=1, 3, 5, \ldots$, т. е. вне нашей окрестности имеется бесконечное число элементов последовательности.

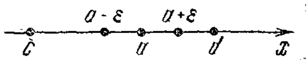

Рис. 7.

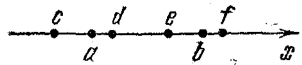

Рис. 8.

Таким образом, точка a не может быть пределом нашей последовательности, и так как эта точка произвольна, то последовательность (6) не имеет предела.

Теорема 1. *Если переменная x_n имеет предел, то он единственный.*

В самом деле, допустим, вопреки теореме, что x_n имеет два различных предела a и b. Покроем точки a, b соответственно интервалами (c, d), (e, f) настолько малой длины, чтобы эти интервалы не пересекались (рис. 8). Так как $x_n \to a$, то в интервале (c, d) находятся все элементы x_n, за исключением конечного их числа, но тогда интервал (e, f) не может содержать в себе бесконечное число элементов x_n и x_n не может стремиться к b. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится (имеет предел), то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim x_n = a$. Зададим $\varepsilon = 1$ и подберем натуральное $n_0 = n_0(1)$ так, чтобы

$$1 > |x_n - a| \quad (n > n_0),$$

но тогда $1 > |x_n| - |a|$ и выполняется неравенство

$$1 + |a| > |x_n|$$

для всех $n > n_0$. Пусть M—наибольшее среди чисел

$$1+|a|, \ |x_1|, \ |x_2|, \ \ldots, \ |x_{n_0}|.$$

Тогда, очевидно,

$$M \geqslant |x_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости последовательности, но не достаточным, как показывает пример 10.

Теорема 3. *Если переменная x_n имеет не равный нулю предел a, то найдется такое n_0, что*

$$|x_n| > |a|/2 \text{ для } n > n_0.$$

Больше того, для указанных n, если $a > 0$, то $x_n > a/2$, если же $a < 0$, то $x_n < a/2$. Таким образом, начиная с некоторого номера, x_n сохраняет знак a.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$. Тогда для $\varepsilon = |a|/2$ должно найтись число n_0 такое, что

$$|a|/2 > |a - x_n| \geqslant |a| - |x_n| \quad (n > n_0),$$

откуда $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, и первое утверждение теоремы доказано. С другой стороны, неравенство $|a|/2 > |a - x_n|$ эквивалентно следующим двум:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \quad (n > n_0).$$

Тогда, если $a > 0$, то

$$x_n > \frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} \quad (n > n_0),$$

а если $a < 0$, то

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad (n > n_0),$$

и этим второе утверждение теоремы доказано.

Теорема 4. *Если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $x_n \leqslant y_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то $a \leqslant b$.*

Доказательство. Допустим, что $b < a$. Зададим $0 < \varepsilon < (a - b)/2$ и подберем числа N_1 и N_2 так, чтобы $a - \varepsilon < x_n$ $(n > N_1)$, $y_n < b + \varepsilon$ $(n > N_2)$: это возможно, потому что $x_n \to a$, а $y_n \to b$.

Если $n_0 = \max\{N_1, N_2\}$, то, очевидно, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ $(n > n_0)$, и мы пришли к противоречию, так как по условию $x_n \leqslant y_n$ для всех n.

Следствие. *Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат $[a, b]$, то ее предел также принадлежит $[a, b]$.*

Доказательство. В самом деле, $a \leqslant x_n \leqslant b$. Если $\lim x_n = c$, то по теореме 4 $a \leqslant c \leqslant b$, что и требовалось доказать.

Замечание. Для интервала (a, b) для конечных a и b можно утверждать только, что если $x_n \in (a, b)$, то $\lim x_n = c \in [a, b]$. Таким образом, неравенства в пределе сохраняются или обращаются в равенство. Например, $x_n = 1/(n+1) \in (0, 1)$, но $c=0 \in [0, 1]$.

Теорема 5. *Если переменные x_n и y_n стремятся к одному и тому же пределу a и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, то переменная z_n также стремится к a.*

Доказательство. Задав $\varepsilon > 0$, можно найти N_1 и N_2 такие, что

$$a-\varepsilon < x_n \quad (n > N_1), \qquad y_n < a+\varepsilon \quad (n > N_2),$$

откуда для $n > n_0 = \max\{N_1, N_2\}$

$$a-\varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a+\varepsilon$$

и

$$|z_n - a| < \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Если $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.*

Доказательство следует из неравенства $||x_n|-|a|| \leqslant |x_n - a|$.

§ 2.2. Арифметические действия с переменными, имеющими предел

Пусть x_n и y_n обозначают переменные, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. По определению *сумма $x_n + y_n$, разность $x_n - y_n$, произведение $x_n y_n$ и частное x_n/y_n суть переменные*, пробегающие соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Если $x_n = c$ для $n = 1, 2, \ldots$, то в этом случае пишут $c \pm y_n$, cy_n, c/y_n вместо $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n/y_n.

Справедливы следующие утверждения:

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{1}$$

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n, \tag{2}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ если } \lim y_n \neq 0. \tag{3}$$

Эти утверждения надо понимать в том смысле, что *если существуют конечные пределы x_n и y_n, то существуют также и пределы их суммы, разности, произведения и* *частного (с указанной оговоркой) и выполняются равенства* (1)—(3).

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем n_0 так, чтобы

$$|x_n - a| < \varepsilon/2, \quad |y_n - b| < \varepsilon/2 \quad (n > n_0).$$

Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > n_0),$$

и мы доказали (1).

Чтобы доказать (2), заметим, что

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n|\,|x_n - a| + |a|\,|y_n - b|. \quad (4)$$

Так как y_n имеет предел, то (по теореме 2 предыдущего параграфа) существует положительное число M такое, что

$$|y_n| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (5)$$
$$|a| \leqslant M. \quad (6)$$

Подберем число n_0 так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (n > n_0). \quad (7)$$

Тогда из (4)—(7) следует, что

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad (n > n_0).$$

Этим доказано равенство (2).

Пусть теперь к условию, что $x_n \to a$ и $y_n \to b$, добавляется условие, что $b \neq 0$. Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)\, b + (b - y_n)\, a|}{|y_n|\,|b|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n|\,|a|}{|y_n|\,|b|}. \quad (8)$$

Теперь уже удобно использовать теорему 3 предыдущего параграфа, в силу которой

$$|y_n| > |b|/2 \quad (n > N_1) \quad (9)$$

для достаточно большого N_1. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем N_2 и N_3 такие, чтобы

$$|x_n - a| < \varepsilon|b|/4 \quad (n > N_2), \quad (10)$$
$$|a|\,|y_n - b| < \varepsilon b^2/4 \quad (n > N_3). \quad (11)$$

Тогда, положив $n_0 = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, будем в силу (8)—(11) иметь

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon \cdot |b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

что доказывает равенство (3).

Заметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях равенств (1)—(3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n. Например, если $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, то x_n и y_n не имеют пределов, в то время как $\lim(x_n + y_n) = 0$, $\lim x_n y_n = -1$.

Теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного во многих случаях дают возможность узнать, имеет ли переменная предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими переменными, существование и величина пределов которых известны.

Однако часто встречаются случаи, выходящие за границы применимости доказанных теорем, и здесь остается большое поле для инициативы математика.

Пример 1. Пусть $x_n = 1 + q + \ldots + q^n$, $|q| < 1$. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{1-q}.$$

Имеем

$$x_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Так как $\lim q^{n+1} = 0$ при $|q| < 1$, то, применяя формулы (1), (2), получаем

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n \to \infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \cdot 0 = \frac{1}{1-q}.$$

В дальнейшем под символом

$$1 + q + \ldots + q^n + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

будем понимать $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

§ 2.3. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная α_n, имеющая предел, равный нулю, называется *бесконечно малой величиной или, короче, бесконечно малой*.

Таким образом, переменная α_n есть бесконечно малая, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такое, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ $(n > n_0)$.

Нетрудно видеть, что *для того, чтобы переменная x_n имела предел a, необходимо и достаточно, чтобы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n есть бесконечно малая.*

Переменная β_n называется *бесконечно большой величиной* или просто *бесконечно большой*, если для любого $M > 0$ найдется такое n_0, что $|\beta_n| > M$ $(n > n_0)$. При этом пишут

$$\lim \beta_n = \infty, \quad \text{или} \quad \beta_n \to \infty \tag{1}$$

и говорят, что β_n *стремится к бесконечности*.

Если бесконечно большая β_n, начиная с некоторого n_0, принимает только положительные значения или только отрицательные значения, то пишут

$$\lim \beta_n = +\infty, \quad \text{или} \quad \beta_n \to +\infty, \tag{2}$$

соответственно

$$\lim \beta_n = -\infty, \quad \text{или} \quad \beta_n \to -\infty. \tag{3}$$

Таким образом, из (2), так же как и из (3), следует (1). Пример переменной $\{(-1)^n n\}$ показывает, что может иметь место соотношение (1), в то время как не имеет места ни (2), ни (3).

Отметим следующие очевидные свойства:

1. *Если переменная x_n ограничена, а y_n бесконечно большая, то $x_n/y_n \to 0$.*

2. *Если абсолютная величина x_n ограничена снизу положительным числом, а y_n — не равная нулю бесконечно малая, то $x_n/y_n \to \infty$.*

Докажем только второе свойство. Дано, что для некоторого числа $a > 0$ имеет место неравенство $|x_n| > a$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что

$$|y_n| < \varepsilon \qquad (n > n_0). \tag{4}$$

Тогда

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M \qquad (n > n_0).$$

Зададим произвольное положительное число M и подберем по нему ε так, чтобы $M=a/\varepsilon$, а по ε подберем такое n_0, чтобы имело место свойство (4). Тогда $|x_n/y_n|>M$ $(n>n_0)$, что и требовалось доказать.

Из высказанных двух утверждений получаются следующие следствия:

$$\lim_{y_n\to\infty}\frac{c}{y_n}=0,\qquad \lim_{y_n\to 0}\frac{c}{y_n}=\infty \qquad (c\neq 0).$$

Отметим, что если последовательность $\{x_n\}$ неограничена, то она не обязательно бесконечно большая. Например, последовательность

$$\{n^{(-1)^n}\}=\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \ldots\right\}$$

неограничена, но она не является бесконечно большой, так как в ней имеются как угодно малые члены с каким угодно большим (нечетным) номером.

Замечание. Любая не равная нулю постоянная величина (последовательность) не является бесконечно малой. Из всех постоянных величин бесконечно малой является только одна — равная нулю. Если про некоторую величину известно, что она постоянна и ее абсолютная величина меньше любого положительного числа ε, то она равна нулю.

Теорема 1. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью, т. е. если* $\lim x_n=0$ *и* $|y_n|\leqslant M$ $\forall n\in\mathbb{N}$, *то* $\lim x_ny_n=0$.

В самом деле, зададим $\varepsilon>0$ и подберем n_0 так, чтобы

$$|x_n|<\varepsilon/M \qquad \forall n>n_0.$$

Тогда

$$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon \qquad \forall n>n_0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2.4. Неопределенные выражения

1. Пусть $\lim x_n=\lim y_n=0$ $(y_n\neq 0)$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n/y_n\}$. О пределе этой последовательности заранее ничего определенного сказать нельзя, как это показывают конкретные примеры:

если $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$, то $\frac{x_n}{y_n}=n\to+\infty$ при $n\to\infty$;

если $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$, то $\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$;

если $x_n=\frac{a}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$, то $\frac{x_n}{y_n}=a\to a$ при $n\to\infty$;

если $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$, то $\frac{x_n}{y_n}=(-1)^n$ и предел этой последовательности не существует.

Таким образом, для нахождения предела $\{x_n/y_n\}$ недостаточно знать, что $x_n\to 0$, $y_n\to 0$. Нужны еще дополнительные сведения о характере изменения x_n и y_n. Для нахождения этого предела в каждом конкретном случае требуются специальные приемы.

Говорят, что выражение x_n/y_n при $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ представляет собой *неопределенность вида* $\left(\frac{0}{0}\right)$.

2. Если $x_n\to\infty$, $y_n\to\infty$, то выражение x_n/y_n также представляет собой неопределенность и ее называют *неопределенностью вида* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

3. Если $x_n\to 0$, $y_n\to\infty$, то для выражения x_ny_n получаем *неопределенность вида* $(0\cdot\infty)$.

4. Если $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$, то выражение x_n+y_n представляет *неопределенность вида* $(\infty-\infty)$.

Для каждого из отмеченных случаев можно привести примеры.

Раскрыть соответствующую неопределенность — это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако, не всегда просто.

Пример 1. Если

$$x_n=a_mn^m+\ldots+a_1n+a_0,$$
$$y_n=b_ln^l+\ldots+b_1n+b_0\qquad (a_m\neq 0,\ b_l\neq 0),$$

то при $n\to\infty$ для выражения x_n/y_n мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Раскроем эту неопределенность.

а) Если $l=m$, то, деля числитель и знаменатель на n^m, получаем

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{a_m+\frac{a_{m-1}}{n}+\ldots+\frac{a_0}{n^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{n}+\ldots+\frac{b_0}{n^m}}\to\frac{a_m}{b_m}$$

при $n \to \infty$, т. е. $\lim (x_n/y_n) = a_m/b_m$ — отношению коэффициентов при старших степенях n в выражениях для x_n и y_n.

б) Аналогично можно показать, что при $m > l$ $\lim (x_n/y_n) = \infty$, а при $m < l$ $\lim (x_n/y_n) = 0$.

Пример 2. Если $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$, то при $n \to \infty$ для выражения $x_n - y_n$ имеем неопределенность вида $(\infty - \infty)$.

Раскроем эту неопределенность:

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$$
$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит, $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

§ 2.5. Монотонные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$x_n \leqslant x_{n+1} \qquad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Если на самом деле выполняются строгие неравенства $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) или просто *возрастающей* (*убывающей*). Последовательности убывающие и возрастающие, неубывающие и невозрастающие называются *монотонными*.

Элементы монотонных последовательностей можно расположить в цепочки $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots)$, откуда видно, что неубывающая последовательность ограничена снизу, а невозрастающая — сверху.

Примеры:

1) $\left\{1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \ldots\right\}$ — невозрастающая последовательность.

2) $\{n^2\}$ — возрастающая последовательность.

Ниже мы доказываем важную теорему, утверждающую, что монотонная ограниченная последовательность чисел всегда имеет предел. В нашем изложении (в § 1.7) эта теорема фигурировала как одно из основных свойств — свойство V — множества действительных чисел.

Теорема 1. *Если последовательность действительных чисел*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots \tag{1}$$

не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) числом M (соответственно m), то существует действительное число a, не превышающее M (не меньшее m), к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant M \tag{2}$$

(соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant m$).

Доказательство. Пусть последовательность (1) не убывает и пусть пока $a_1 > 0$, тогда и все $a_n > 0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Каждый элемент последовательности разложим в бесконечную десятичную дробь:

$$a_n = a_{n0}, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Так как последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху числом M $(a_n \leqslant M)$ и не убывает, то на основании леммы 2 § 1.6 десятичные дроби (3) стабилизируются к некоторому числу $a \leqslant M$:

$$a_n \rightrightarrows a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\ldots,$$

но тогда a_n стремится к a как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

В самом деле, для любого ε найдется натуральное m такое, что $10^{-m} < \varepsilon$. Так как a_n стабилизируется к a, то

$$a_n = \gamma_0,\ \gamma_1\ldots\gamma_m a_{n,\,m+1}a_{n,\,m+2}\ldots$$

для всех $n > n_0$, где n_0 достаточно велико, но тогда

$$|a - a_n| = a - a_n \leqslant 0,\ \underbrace{0\ldots0}_{m\ \text{раз}}\gamma_{m+1}\gamma_{m+2}\ldots \leqslant 10^{-m} < \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

т. е. $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Если $a_1 \leqslant 0$, то прибавим к a_1 число c настолько большое, что $a_1 + c > 0$, и положим $b_n = a_n + c$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

Последовательность $\{b_n\}$ не убывает, ограничена сверху числом $M+c$ и ее элементы положительны. Поэтому по доказанному выше существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \leqslant M + c$, но тогда существует также предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - c) = b - c \leqslant M$, и теорема доказана для произвольной неубывающей последовательности.

Если теперь последовательность $\{a_n\}$ не возрастает и ограничена снизу числом m, то последовательность чисел $\{-a_n\}$ не убывает и ограничена сверху числом $-m$, и на основании уже доказанного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-a\leqslant -m$, который мы обозначили через $-a$. Следовательно, существует также $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-(-a)=a\geqslant m$. Теорема доказана.

Замечание. Если последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ сходится, то их десятичные разложения не обязательно стабилизируются. Например, если

$$a_{2k}=1,0\ldots011\ldots,\quad a_{2k+1}=0,9\ldots911\ldots\quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

где после запятой стоят k нулей или k девяток, то последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный 1 ($a_n\to 1$), однако, как легко видеть, эта последовательность не стабилизируется.

Пример 1. Приведем новое доказательство равенства (ср. пример 8 § 2.1)

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0\ (|q|<1), \tag{4}$$

Пусть пока $q\geqslant 0$. Тогда переменная q^n ($n=1,\ 2,\ \ldots$) не возрастает и ограничена снизу числом 0. Но тогда по теореме 1 существует число $A\geqslant 0$, к которому стремится q^n:

$$\lim_{n\to\infty} q^n=A.$$

Имеем также

$$A=\lim_{n\to\infty} q^{n+1}=q\lim_{n\to\infty} q^n=qA,$$

откуда $A(1-q)=0$ и $A=0$, потому что $q<1$.

Если теперь $q<0$, то на основании уже доказанного $|q^n|=|q|^n\to 0$, $n\to\infty$.

Равенство (4) доказано полностью.

Это доказательство (4), пожалуй, более элегантное, чем то, которое было приведено в примере 8 § 2.1, но оно не дает возможности судить о скорости стремления q^n к нулю — не дается эффективно число $n_0=n_0(\varepsilon)$, начиная с которого $|q^n|<\varepsilon$.

Пример 2. Справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0, \tag{5}$$

где a — произвольное число.

При $|a|\leqslant 1$ оно очевидно. Пусть $a>1$. Положим

$$u_n=\frac{a^n}{n!}.$$

Тогда $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{a}{n+1}\to 0$ ($n\to\infty$). Отсюда следует, что $u_{n+1}<u_n$ $\forall n>n_0$, где n_0 достаточно велико.

Таким образом, переменная u_n для $n > n_0$ убывает. Кроме того, она ограничена снизу числом 0. Но тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \geqslant 0.$$

Но также

$$A = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(u_n \frac{a}{n+1}\right) = A \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} = A\cdot 0 = 0,$$

и мы доказали равенство (5) для любого $a \geqslant 0$. Но оно верно и для любого $a < 0$, потому что

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

§ 2.6. Число e

Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Покажем, что эта последовательность возрастающая и ограничена сверху. На основании формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k$$

имеем

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

Из данного равенства видно, что последовательность $x_n \geqslant 2$ $\forall n$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху. Из равенства (1) имеем

$$x_n \leqslant 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots +$$
$$+ \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. По аналогии с (1) имеем

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что $x_n<x_{n+1}$ $\forall n\in\mathbf{N}$ (в (2) каждое слагаемое больше, чем соответствующее слагаемое в (1), и, кроме того, имеется на одно положительное слагаемое больше). По теореме 1 § 2.5 последовательность $\{x_n\}$ сходится. Обозначим ее предел буквой e, как это предложил впервые Л. Эйлер [1])

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Из сказанного ясно, что $2<e<3$. Более точное значение

$$e=2{,}718281\ \ldots\ .$$

В будущем (в § 4.16) будет доказана формула, из которой следует, что

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{n!}\qquad (n>2), \qquad (3)$$

где θ — некоторое зависящее от n число, удовлетворяющее неравенствам $0<\theta<1$. С помощью этой формулы нетрудно доказать, что e есть число иррациональное. Допустим, что $e=p/q$, где p и q натуральные. Тогда, положив в (3) $n=q$, будем иметь

$$\frac{p}{q}=\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{q!}.$$

Умножая на $q!$, получаем

$$p\,(q-1)!-l=\theta, \qquad (4)$$

где $l=q!\sum\limits_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}$ — натуральное число. Мы получили противоречие — левая часть (4) есть целое число, а правая, равная θ, есть правильная дробь.

[1]) Л. Эйлер (1707—1783) — великий математик, академик Российской академии наук, швейцарец по происхождению.

§ 2.7. Принцип вложенных отрезков

Теорема 1 (принцип вложенных отрезков). *Пусть задана последовательность отрезков (сегментов)*

$$\sigma_n=[a_n,\ b_n] \quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

вложенных друг в друга, т. е. таких, что $\sigma_{n+1}\subset\sigma_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, *с длинами, стремящимися к нулю:*

$$d_n=b_n-a_n\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Тогда существует и притом единственная точка c (число), одновременно принадлежащая всем отрезкам σ_n $(c\in\sigma_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\ldots\leqslant b_m$$

при любом заданном натуральном m. Это показывает, что числа a_n не убывают и ограничены сверху числом b_m при любом m и, согласно теореме 1 § 2.5, существует число c, к которому стремится переменная a_n $(\lim a_n=c)$. При этом $a_n\leqslant c\leqslant b_m$. Так как в этих неравенствах натуральные n и m произвольные, то, в частности, $a_n\leqslant c\leqslant b_n$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Следовательно, $c\in\sigma_n$, каково бы ни было $n\in\mathbf{N}$.

Найденная точка c — единственная. Допустим, что существует другая точка $c_1\in\sigma_n$ $\forall n$. Тогда $a_n\leqslant c,\ c_1\leqslant b_n$, откуда

$$b_n-a_n\geqslant|c-c_1|>0 \quad \forall n,$$

но это противоречит тому, что $b_n-a_n\to 0$.

Отметим, что

$$\lim b_n=\lim[(b_n-a_n)+a_n]=c.$$

Замечание. В теореме 1 существенно, что в ней рассматриваются отрезки $[a_n,\ b_n]$ а не интервалы, как показывает следующий пример. Интервалы $(0,\ 1/n)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ вложены друг в друга, их длина $d_n=\frac{1}{n}-0=\frac{1}{n}\to 0$, но нет ни одной точки, принадлежащей одновременно ко всем этим интервалам.

В самом деле, любая точка $c\leqslant 0$ не принадлежит к любому из интервалов $(0,\ 1/n)$. Если же $c>0$, то найдется такое n, что $1/n<c$ и $c\,\overline{\in}\,(0,\ 1/n)$.

§ 2.8. Точные верхняя и нижняя грани множества

Рассмотрим произвольное множество E действительных чисел x. Может случиться, что в нем имеется наибольшее (максимальное) число, которое мы обозначим через M. В этом случае пишут

$$M = \max E = \max_{x \in E} x.$$

Может случиться также, что среди чисел $x \in E$ имеется наименьшее (минимальное), равное числу m. Тогда пишут

$$m = \min E = \min_{x \in E} x.$$

Если множество E конечно, т. е. состоит из конечного числа чисел

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_p,$$

то среди них всегда есть наибольшее и наименьшее.

Однако это не всегда так, если E—бесконечное множество.

Приведем примеры:

1) $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
2) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
3) $\mathbf{N}_- = \{\ldots, -2, -1\}$,
4) $[a, b]$,
5) $[a, b)$,
6) (a, b).

Множество $\mathbf{Z}$ не имеет наибольшего и наименьшего чисел. Интервал (a, b) тоже не имеет наибольшего и наименьшего чисел. При этом здесь не имеет значения, будут ли числа a, b конечными или бесконечными. Каково бы ни было число $c \in (a, b)$, т. е. число, удовлетворяющее неравенствам $a < c < b$, всегда найдутся числа c_1, c_2 такие, что $a < c_1 < c < c_2 < b$.

Множество $\mathbf{N}$ не имеет наибольшего элемента, но имеет наименьший $x = 1$. Множество же $\mathbf{N}_-$ имеет наибольший элемент $x = -1$, но не имеет наименьшего.

Очевидно также $\min [a, b] = a$, $\max [a, b] = b$, $\min [a, b) = a$, однако максимального числа в $[a, b)$ нет.

Возникает вопрос о введении для произвольного множества E чисел, которые по возможности заменяли бы $\max E$ и $\min E$. Такими числами (конечными или бесконечными) являются *точная верхняя грань*

$$\sup E = \sup_{x \in E} x = M$$

и точная нижняя грань

$$\inf E = \inf_{x \in E} x = m$$

множества.

Пусть множество E ограничено сверху.

Число M (конечное) называется *точной верхней гранью* множества E, если для него выполняются два условия:

1) $x \leqslant M \quad \forall x \in E$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_1 \in E$ такая, что выполняются неравенства

$$M - \varepsilon < x_1 \leqslant M.$$

Говоря другими словами, $\sup E = M$ есть наименьшая из верхних границ (мажорант).

Пусть множество E ограничено снизу.

Число m (конечное) называется *точной нижней гранью* множества E, если для него выполняются два условия:

1) $m \leqslant x \ \forall x \in E$,

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_1 \in E$ такая, что

$$m \leqslant x_1 < m + \varepsilon,$$

т. е. $\inf E = m$ есть наибольшая из нижних границ.

Очевидно, если в множестве E действительных чисел имеется наибольшее (наименьшее) число, т. е. существует $\max E$ $(\min E)$, то

$$\sup E = \max E \qquad (\inf E = \min E).$$

sup, inf — сокращения латинских слов supremum — наивысший, infimum — наинизший. Эта терминология не совсем удачна, потому что, например, $\sup E$ не всегда есть наивысший элемент в множестве E.

Пример 1. Множество

$$E = \left\{\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{3}{4}, \ \ldots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

имеет наименьшее число, равное $1/2$ $(\min E = 1/2)$. Однако оно не имеет наибольшего, потому что $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots$. Все же оно ограничено сверху числом 1 или любым числом, бóльшим 1. Но число 1 играет исключительную роль — оно есть точная верхняя грань E $(\sup E = 1)$.

В самом деле:

1) $\frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

2) для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}$: $1 - \varepsilon < \frac{n_1}{n_1+1} < 1$.

Мы дали определение точной верхней (нижней) грани для множества, ограниченного сверху (снизу).

Если множество E не ограничено сверху (снизу), то его точной верхней (нижней) гранью естественно назвать символ $+\infty$ $(-\infty)$: $\sup E = +\infty$ (соответственно $\inf E = -\infty$).

Иногда, когда нет опасности путаницы, вместо $+\infty$ пишут ∞.

Примеры. Для множеств 1)—6), приведенных выше, имеет место

$$\begin{array}{ll} \sup \mathbf{Z} = +\infty, & \inf \mathbf{Z} = -\infty, \\ \sup \mathbf{N} = \infty, & \inf \mathbf{N} = \min \mathbf{N} = 1, \\ \sup \mathbf{N}_- = \max \mathbf{N}_- = -1, & \inf \mathbf{N}_- = -\infty, \\ \sup (a, b) = b, & \inf (a, b) = a, \end{array}$$

где a и b могут быть конечными и бесконечными числами.

Можно дать общее определение точной верхней (нижней) грани множества, которое годится для любого множества (ограниченного и неограниченного).

Число M (соответственно m), конечное или бесконечное, называется *точной верхней* (*нижней*) *гранью* множества E (рис. 9 и 10), если выполняются условия:

1) $x \leqslant M$ $(m \leqslant x)$ $\forall x \in E$;

2) для любого (конечного!) $M_1 < M$ $(m_1 > m)$ существует $x_1 \in E$ такое, что $M_1 < x_1 \leqslant M$ $(m \leqslant x_1 < m_1)$.

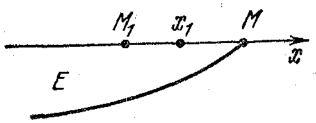

Рис. 9.

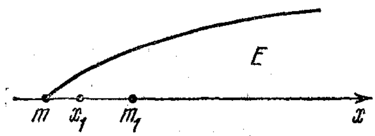

Рис. 10.

В этой формулировке не приходится употреблять разность $M - \varepsilon$ (сумму $m + \varepsilon$), это не имеет смысла при $M = +\infty$ $(m = -\infty)$.

Справедлива теорема принципиального значения.

Теорема 1. *Если не пустое множество E действительных чисел ограничено сверху (снизу) конечным числом K (соответственно k), то существует число $M \leqslant K$ $(m \geqslant k)$, являющееся точной верхней (нижней) гранью E.*

Доказательство. Так как E — не пустое множество, то оно содержит в себе по крайней мере одну точку x_0. Рассмотрим отрезок $\sigma_0=[a, b]$, где $a < x_0$, $b=K$.

По условию правее σ_0 нет точек E. Разделим σ_0 на две равные части (два отрезка) и обозначим через σ_1 самую правую половину, содержащую в себе хотя бы одну точку E. Это надо понимать в том смысле, что если обе половины содержат в себе точки E, то σ_1 есть правая из них, а если только одна из них содержит точки E, то именно она обозначается через σ_1.

Обозначим через x_1 какую-либо точку из E, принадлежащую к σ_1. Таким образом, $x_1\in\sigma_1$, но правее σ_1 нет точек E. Делим теперь σ_1 на два равных отрезка и обозначаем через σ_2 самый правый из них, содержащий в себе хотя бы одну точку E, которую обозначим через x_2. Правее σ_2 нет точек E.

Продолжив этот процесс по индукции, получим последовательность вложенных отрезков $\sigma_n=[a_n, b_n]$ $(\sigma_n\supset\sigma_{n+1})$, длины которых

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\longrightarrow 0, \quad n\longrightarrow\infty.$$

При этом при любом $n\in\mathbb{N}$ правее σ_n нет точек E, но σ_n содержит в себе некоторую точку $x_n\in E$.

На основании принципа вложенных отрезков существует единственная точка, которую мы обозначим через M, принадлежащая ко всем отрезкам σ_n $(M\in\sigma_n, \forall n)$.

Докажем, что

$$M=\sup E. \tag{1}$$

В самом деле:

1) имеет место неравенство $x\leqslant M$, $\forall x\in E$, потому что если x — какая-либо точка, принадлежащая к E, то $x\leqslant b_n$, $\forall n$, переходя к пределу при $n\longrightarrow\infty$, получим

$$x\leqslant M=\lim_{n\to\infty} b_n \quad \forall x\in E;$$

2) для любого $\varepsilon>0$ $\exists x'\in E$

$$M-\varepsilon < x'\leqslant M. \tag{2}$$

Действительно, точки x_n, определенные выше, принадлежат соответственно к σ_n и к E, т. е. $a_n\leqslant x_n\leqslant M$, и так как $a_n\longrightarrow M$, $n\longrightarrow\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ $\exists n_0$

$$M-\varepsilon < a_{n_0}\leqslant x_{n_0}\leqslant M,$$

и мы получили (2), если будем считать $x'=x_{n_0}$.

Соответствующая теорема, утверждающая существование точной нижней грани у ограниченного снизу множества E, доказывается аналогично, отправляясь от сегмента $\sigma=[a, b]$, содержащего в себе некоторую точку $x_0\in E$ такого, что $a=k$ и $x_0<b$. Делим σ_0 на два равных отрезка и через σ_1 обозначаем теперь самую левую половинку, содержащую в себе точки E, находим в σ_1 точку $x_1\in E$ и продолжаем далее этот процесс по индукции.

Сказанное выше приводит нас к следующему утверждению: *всякое множество E имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Если E ограничено сверху, то* $\sup E<\infty$, *если же E не ограничено сверху, то* $\sup E = \infty$. *Аналогично, если E ограничено снизу, то* $\inf E > -\infty$, *и если E не ограничено снизу, то* $\inf E = -\infty$.

Задачи

1. Пусть даны множества действительных чисел $X=\{x\}$, $Y=\{y\}$. Под множеством $\{x+y\}$ будем понимать всевозможные суммы чисел $x \in X$ и $y \in Y$. Доказать, что

$$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}, \quad \inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}.$$

2. Под множеством $\{xy\}$ будем понимать всевозможные произведения неотрицательных чисел $x \in X$ и $y \in Y$. Доказать, что

$$\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}, \qquad \inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\} \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$$

3. Доказать, что

$$\sup_{x \in A}(-x) = -\inf_{x \in A} x, \quad \inf_{x \in A}(-x) = -\sup_{x \in A} x.$$

§ 2.9. Теорема Больцано—Вейерштрасса[1])

Пусть задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\}$. Выберем из нее бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < \ldots$. Тогда получим новую последовательность $\{x_{n_k}\}$, которая называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$. Таких подпоследовательностей можно выделить из данной последовательности бесконечное множество.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится (к конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$), то очевидно, что и любая ее подпоследовательность тоже сходится и притом к тому же числу (конечному, $+\infty$ или $-\infty$).

Последовательность

$$\{1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\} \tag{1}$$

может служить примером не сходящейся последовательности чисел. Все же мы видим, что эта последовательность содержит в себе подпоследовательность

$$\{1,\ 1,\ 1,\ \ldots\},$$

сходящуюся (к 1). Возникает вопрос, всегда ли это так, всякая ли последовательность действительных чисел содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к некоторому числу (конечному, $+\infty$, $-\infty$). Положительный ответ на этот вопрос дает

---

[1]) Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик, К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

Теорема 1. *Из всякой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному числу, или к $+\infty$, или к $-\infty$.*

В случае, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху (снизу), она, очевидно, содержит в себе подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ (к $-\infty$), что доказывает теорему. Если же последовательность ограничена, то теорема 1 сводится к следующей теореме.

Теорема 2 (Больцано—Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу.*

Доказательство. Так как последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена, то все они принадлежат к некоторому отрезку $[a, b]$, который обозначим через σ_0. Разделим σ_0 на два равных отрезка и обозначим через σ_1 самый правый из них, содержащий в себе бесконечное число элементов x_n. Один из этих элементов обозначим через x_{n_1}. Правее σ_1, если есть, то конечное число точек x_n. Разделим σ_1 на два равных отрезка и обозначим через σ_2 самый правый из них, содержащий в себе бесконечное число элементов x_n. Выберем среди этих элементов один x_{n_2} с номером $n_2 > n_1$. Правее σ_2, если есть точки x_n, то их конечное число.

Продолжим этот процесс по индукции. В результате получим последовательность вложенных друг в друга отрезков $\sigma_k = [a_k, b_k]$, длины которых $b_k - a_k \to 0$, $k \to \infty$, и подпоследовательность точек нашей последовательности таких, что $x_{n_k} \in \sigma_k$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$. При этом правее каждого из отрезков имеется не более чем конечное число элементов x_n.

На основании принципа вложенных отрезков существует точка c, принадлежащая к любому из отрезков σ_k. Очевидно, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет своим пределом c $(x_{n_k} \to c)$, и мы доказали теорему.

§ 2.10. Верхний и нижний пределы

Если задана произвольная последовательность действительных чисел $\{x_n\}$, то, согласно теореме 1 § 2.9, возможно рассматривать порождаемые ею различные сходящиеся последовательности.

Пределы этих подпоследовательностей принято называть *частичными пределами* последовательности $\{x_n\}$.

По определению *верхним пределом последовательности* $\{x_n\}$ (или *переменной* x_n) называется число M (конечное, $+\infty$ или $-\infty$), обладающее следующими двумя свойствами.

1) Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к M:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M.$$

2) Для любой сходящейся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant M.$$

Верхний предел последовательности $\{x_n\}$ обозначают одним из символов

$$M = \overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то, очевидно,

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

В последовательности $\{(-1)^n\}$ переменная x_n имеет $\overline{\lim}\, x_n = 1$.

Вот еще пример:

$$\{n^{(-1)^n}\} = \left\{1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ \ldots\right\}.$$

Эта последовательность (переменная) не ограничена сверху. Следовательно, ее верхний предел

$$\overline{\lim}\, n^{(-1)^n} = +\infty.$$

Для ограниченной сверху последовательности $\{x_n\}$ ее верхний предел M может быть определен также следующим образом: для всякого $\varepsilon > 0$ правее $M+\varepsilon$ имеется разве что конечное число точек x_n, правее же $M-\varepsilon$ заведомо имеется бесконечное число точек x_n.

Отметим, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет обычный (конечный) предел $\lim x_n = M$, то, как мы знаем, для любого $\varepsilon > 0$ неравенства $M-\varepsilon < x_n < M+\varepsilon$ выполняются для всех x_n, за исключением их конечного числа. Таким образом, правее $M+\varepsilon$ имеется не более чем конечное число элементов x_n, а правее $M-\varepsilon$ — заведомо бесконечное их число.

Это показывает также, что $M = \overline{\lim}\, x_n$.

Итак, если $M = \lim x_n$, то и $\overline{\lim}\, x_n = \lim x_n = M$.

Но разница между обычным пределом и верхним пределом заключается в том, что в случае предела левее $M-\varepsilon$ имеется не более чем конечное число точек x_n, а в случае верхнего предела левее $M-\varepsilon$ может быть и бесконечное число точек x_n.

По определению *нижним пределом последовательности* $\{x_n\}$ (или *переменной* x_n) называется число m (конечное, $+\infty$ или $-\infty$), обладающее следующими двумя свойствами:

1) Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к m:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = m.$$

2) Для любой сходящейся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant m.$$

Нижний предел переменной x_n обозначают одним из символов

$$m = \underline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n = \lim_{n\to\infty}\ \inf_{k>n}\ x_k.$$

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то, очевидно,

$$\underline{\lim}\, x_n = -\infty.$$

Для ограниченной снизу последовательности нижний предел m можно определить также следующим образом: для всякого $\varepsilon > 0$ левее $m - \varepsilon$ имеется разве что конечное число точек (элементов) x_n, левее же $m + \varepsilon$ заведомо имеется бесконечное число точек (элементов) x_n.

Очевидно, что

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел (конечный, $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, и тогда $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.*

Заметим, что если $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$, то в силу (1) $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, и по теореме 1

$$\lim x_n = -\infty.$$

Очевидно также, что из равенства $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ вытекает, что

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim x_n = +\infty.$$

Замечание. Можно показать, что число c, которое мы получили при доказательстве теоремы Больцано—Вейерштрасса, является верхним пределом x_n:

$$\overline{\lim}\, x_n = c.$$

Это вытекает из того, что правее каждого отрезка σ_n имеется не больше чем конечное число точек x_n.

С другой стороны, если бы мы видоизменили процесс, выбирая на каждом этапе деления σ_n на два равных отрезка не самый правый, а самый левый из них, содержащий бесконечное число точек x_n, то мы бы получили, возможно, другую точку c', содержащуюся во всех σ_n, и эта точка была бы нижним пределом x_n ($\underline{\lim}\, x_n = c'$).

Если переменная x_n не имеет предела, то заведомо $c' < c$, если же предел x_n существует, то оба процесса необходимо приведут к одному и тому же числу $c = c'$.

§ 2.11. Условие Коши сходимости последовательности

Пусть задана последовательность действительных чисел $\{x_n\}$, сходящаяся к конечному пределу a:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall n > n_0.$$

Наряду с натуральным числом $n > n_0$ можно подставить в это неравенство другое натуральное число $m > n_0$:

$$|x_m - a| < \varepsilon/2 \quad \forall m > n_0.$$

Тогда

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n,\ m > n_0.$$

Мы получили следующее утверждение: *если переменная x_n имеет конечный предел, то для нее выполняется условие* (Коши[1]): *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \forall n,\ m > n_0.$$

Последовательность чисел, удовлетворяющая условию Коши, называют еще *фундаментальной последовательностью.*

Оказывается, что имеет место также обратное утверждение: *если последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ фундаментальная, т. е. удовлетворяет условию Коши, то она имеет предел, т. е. существует число a (конечное) такое, что $x_n \to a$, $n \to \infty$.*

Доказательство. Начнем с того, что докажем, что фундаментальная последовательность ограничена. В самом деле, положим $\varepsilon = 1$ и подберем, согласно условию Коши, число $n_0 = n_0(1)$ так, что

$$|x_n - x_m| < 1 \quad \forall n,\ m > n_0,$$

---

[1]) О. Л. Коши (1789—1857) — французский математик. В его трудах впервые определены основные понятия математического анализа (предел, непрерывность, интеграл, ...) так, как это принято в современной математике.

откуда

$$1 > |x_n - x_m| \geqslant |x_n| - |x_m|$$

или

$$1 + |x_m| \geqslant |x_n| \qquad \forall n,\ m > n_0. \tag{1}$$

Зафиксируем $m > n_0$ и обозначим

$$M = \max_{n \leqslant n_0} \{1 + |x_m|,\ |x_n|\},$$

т. е. максимум чисел $|x_n|$, где $n \leqslant n_0$, и числа $1 + |x_m|$. Тогда в силу (1)

$$M \geqslant |x_n| \qquad \forall n \in N,$$

и ограниченность последовательности $\{x_n\}$ доказана.

По теореме Больцано—Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому (конечному) числу a, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Покажем, что в данном случае не только эта подпоследовательность, но и вся последовательность имеет предел a:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

В самом деле, согласно условию Коши, которому удовлетворяет наша последовательность, для любого $\varepsilon > 0$ найдется n_0 такое, что

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \qquad \forall n,\ m > n_0. \tag{2}$$

С другой стороны, в силу того что $x_{n_k} \longrightarrow a$, $k \longrightarrow \infty$, можно указать такое k_0, что

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 \qquad \forall k > k_0.$$

Учитывая, что $n_k \longrightarrow \infty$ при $k \longrightarrow \infty$, можно найти такое $k_1 > k_0$, что $n_{k_1} > n_0$. Поэтому

$$|x_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

В силу (2), где надо положить $m = n_{k_1}$, и (3) имеем

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_{k_1}} + x_{n_{k_1}} - a| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n > n_0,$$

и мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a.

Итак доказана

Теорема 1 (критерий Коши существования предела). *Для того чтобы последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной (удовлетворяла условию Коши).*

§ 2.12. Полнота и непрерывность множества действительных чисел

В предыдущих параграфах мы доказали ряд свойств действительных чисел, важнейшие из которых мы перечисляем:

1) Существование предела у ограниченной монотонной последовательности (§ 2.5, теорема 1).

2) Принцип вложенных отрезков (§ 2.7, теорема 1).

3) Существование точной верхней грани у произвольного ограниченного множества (§ 2.8, теорема 1).

4) Сходимость фундаментальной последовательности к пределу (критерий Коши, § 2.11, теорема 1).

Хотя перечисленные свойства и выглядят различно, на самом деле между ними имеется глубокая внутренняя связь. Не так уж трудно показать, что утверждения 1)—4) (при наличии свойств I—IV числа) эквивалентны между собой, т. е. из любого из них следуют три остальные. В этой книге было показано, что из 1) (или, что все равно, свойства V, см. § 1.6) и свойств I—IV следуют 2), 3), 4).

Свойства 1)—4) называются еще *свойствами непрерывности* или *полноты* множества всех действительных чисел.

Чтобы уяснить их роль, рассмотрим множество только рациональных чисел, которое обозначим через **Q**.

Свойства I—IV для рациональных чисел выполняются. Однако свойство V и, следовательно, любое из свойств 1)—4) для рациональных чисел, вообще говоря, не выполняются.

Поясним это на примере. Для этого нам будет удобно оперировать также и множеством всех действительных чисел, которое обозначим через **R**.

Зададим бесконечную непериодическую десятичную дробь

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Таким образом, a—иррациональное число, т. е. $a \in \mathbf{R}$, но $a \overline{\in} \mathbf{Q}$. Дробь a порождает последовательность срезок

$$a^{(n)} = a_0, a_1 \ldots a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

— рациональных чисел,— не убывающую и ограниченную сверху целым числом $a_0 + 1$ Не существует рационального числа, к которому наша последовательность рациональных чисел $\{a^{(n)}\}$ сходится. В самом деле, мы знаем, что переменная $a^{(n)}$ сходится к a (см. пример 9 § 2.1), т. е. к иррациональному числу, а к другому числу она сходиться не может.

Мы показали, что свойство 1) в **Q**, вообще говоря, не выполняется.

Нетрудно показать, что и свойства 2), 3), 4) в **Q**, вообще говоря, не выполняются.

Множество действительных чисел называется *полным* в силу того, что для него выполняется свойство 4), заключающееся в том, что любая фундаментальная последовательность чисел сходится к некоторому действительному числу.

Множество **Q** рациональных чисел не является полным. Оно содержит фундаментальные последовательности, не сходящиеся к рациональным числам. Добавляя к **Q** иррациональные числа, мы получаем пространство действительных чисел, уже полное.

ГЛАВА 3

ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Функция

3.1.1. Функция от одной переменной. Пусть E — множество чисел и пусть в силу некоторого вполне определенного закона каждому числу x из E приведено в соответствие (одно) число y; тогда говорят, что на E задана *функция*, которую записывают так:

$$y = f(x) \qquad (x \in E). \tag{1}$$

Говорят еще, что y есть функция *одной переменной* x, заданная на E, потому что можно, как мы увидим ниже, рассматривать функции многих переменных. Это определение функции предложено Н. И. Лобачевским и Дирихле[1]). Множество E называют областью задания или определения функции $f(x)$. Говорят также, что задана *независимая переменная* x, которая может принимать частные значения x из множества E, и каждому $x \in E$ в силу упомянутого закона приведено в соответствие определенное значение (число) другой переменной y, называемой *функцией* или *зависимой переменной*. Независимую переменную называют *аргументом*.

Для выражения понятия функции употребляют геометрический язык. Говорят, что задано множество E точек x действительной прямой — *область определения* или *задания функции* — и закон, в силу которого каждой точке $x \in E$ приводится в соответствие число $y = f(x)$.

Если мы хотим говорить о функции как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому числу $x \in E$ некоторое число y, то достаточно ее обозначить одной

---

[1]) Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Лежен Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

буквой f. Символ $f(x)$ обозначает число y, которое в силу закона f соответствует значению $x \in E$. Если, например, число 1 принадлежит области E задания функции f, то $f(1)$ есть *значение функции* f в точке $x=1$. Если 1 не принадлежит E ($1 \overline{\in} E$), то говорят, что функция f *не определена* в точке $x=1$.

Множество E_1 всех значений $y=f(x)$, где $x \in E$, называется *образом* множества E при помощи функции f. Иногда пишут в таком случае $E_1=f(E)$. Но это обозначение надо употреблять с осторожностью, по возможности разъясняя его всякий раз, когда оно употребляется, чтобы не было путаницы с обозначением $y=f(x)$, где x есть произвольная точка (число), принадлежащая множеству E, а y — соответствующая ей при помощи функции (закона f) точка множества E_1. Говорят еще, что функция f *отображает* множество E *на* множество E_1.

Если образ $E_1=f(E) \subset A$, где A — множество чисел, вообще не совпадающее с E_1, то говорят, что функция f *отображает* E *в* A.

Для функций f и φ, заданных на одном и том же множестве E, определяются *сумма* $f+\varphi$, *разность* $f-\varphi$, *произведение* $f\varphi$, *частное* f/φ. Это новые функции, значения которых выражаются соответствующими формулами

$$f(x)+\varphi(x), \quad f(x)-\varphi(x), \quad f(x)\varphi(x), \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad (x \in E), \tag{2}$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x) \neq 0$ на E.

Для обозначения функции употребляют и любые другие буквы: E, Φ, Ψ, ..., так же как вместо x, y можно писать z, u, v, ...

Если функция f отображает множество E в E_1, а функция F отображает множество E_1 в множество E_2, то функцию $z=F(f(x))$ называют *функцией от функции*, или *сложной функцией*, или *суперпозицией* f и F. Она определена на множестве E и отображает E в E_2.

Возможна сложная функция, в образовании которой участвует n функций: $z=F_1(F_2(F_3(\dots(F_n(x))\dots)))$.

Практика доставляет нам много примеров функций. Например, площадь S круга есть функция его радиуса r, выражаемая формулой $S=\pi r^2$. Эта функция определена, очевидно, на множестве всех положительных чисел r.

Можно, не связывая вопрос с площадью круга, говорить о зависимости между переменными S и r, выраженной формулой $S=\pi r^2$. Функция $S=\varphi(r)$, заданная этой формулой, определена на всей действительной оси, т. е. для всех действительных чисел r, не обязательно только положительных.

Ниже приводятся примеры функций, заданных формулами:

$$1)\ y=\sqrt{1-x^2},\quad 2)\ y=\lg(1+x),\quad 3)\ y=x-1,$$
$$4)\ y=\frac{x^2-1}{x-1},\quad 5)\ y=\arcsin x.$$

Мы имеем в виду действительные функции, принимающие действительные значения y для действительных значений аргумента x. Нетрудно видеть, что областями определения приведенных функций являются соответственно:

1) отрезок $[-1,\ 1]=\{-1\leqslant x\leqslant 1\}$;

2) множество $x>-1$;

3) вся действительная ось;

4) вся действительная ось, из которой исключена точка $x=1$;

5) отрезок $[-1,\ 1]$.

Функции, определяемые в примерах 1) и 2), можно рассматривать как функции от функции: 1) $y=\sqrt{u}$, $u=1-v$, $v=x^2$; 2) $y=\lg u$, $u=1+x$.

Важным средством задания функции является график. Зададим прямоугольную систему координат x, y (рис. 11), на оси x отметим отрезок $[a, b]$ и изобразим любую кривую Γ, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка $x\in[a,\ b]$, прямая, проходящая через нее параллельно оси y, пересекает кривую Γ в одной точке A. Такую заданную в прямоугольной (декартовой) системе координат кривую Γ мы будем называть *графиком*. График определяет функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Если x есть произвольная точка отрезка $[a,\ b]$, то соответствующее значение $y=f(x)$ определяется как ордината точки A (см. рис. 11). Следовательно, при помощи графика дается вполне определенный закон соответствия между x и $y=f(x)$.

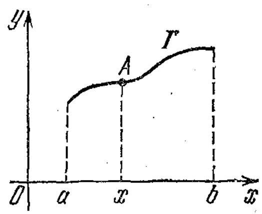

Рис. 11.

Мы задали функцию при помощи графика на множестве E, являющемся отрезком $[a,\ b]$. В других случаях E может быть интервалом, полуинтервалом, всей действительной осью, множеством рациональных точек, принадлежащих к данному интервалу, и т. д.

Зададим на некотором интервале (a, b) функцию $f(x)$ и произвольное (постоянное) число $\alpha \neq 0$. С помощью α и f можно сконструировать ряд функций: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x)+\alpha$; 3) $f(x-\alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Функции 1) и 2) определены на том же интервале (a, b). Ординаты графика функции 1) увеличены в α раз сравнительно с соответствующими ординатами $f(x)$. График функции 2) получается из графика f поднятием последнего на величину α, если $\alpha > 0$ и опусканием на $|\alpha|$, если $\alpha < 0$; график же функции 3) получается из графика f путем сдвига последнего вправо на величину α, если $\alpha > 0$ и влево на $|\alpha|$, если $\alpha < 0$. Наконец, функция 4) при $\alpha > 0$ определена, очевидно, на интервале $(a/\alpha, b/\alpha)$; график ее получается из графика f путем равномерного его сжатия в α раз.

Функцию f называют *четной* или *нечетной*, если она определена на множестве, симметричном относительно нулевой точки, и обладает на нем свойством $f(-x) = f(x)$ или свойством $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции, очевидно, симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, x^{2k} (k — натуральное), $\cos x$, $\lg|x|$, $\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$ — четные функции, а x^{2k+1} ($k \geq 0$ — целое), $\sin x$, $x\sqrt{1+x^2}$, $xf(|kx|)$ — нечетные функции.

Нетрудно видеть, что *произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.*

Конечно, большинство функций не четны и не нечетны.

График функции $y = f(x)$, $x \in E$, можно определить еще как совокупность точек $(x, f(x))$ с абсциссой x и ординатой $f(x)$, где $x \in E$.

Функция f называется *возрастающей* (*неубывающей*) на E, если для любых x_1, $x_2 \in E$, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$.

Функция f называется *убывающей* (*невозрастающей*) на E, если для любых x_1, $x_2 \in E$, для которых $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Функция f называется *ограниченной* (*неограниченной*) на E, если ее образ $E_1 = f(E)$ при помощи f есть ограниченное (неограниченное) множество.

Например, функция $y=1/x$ убывает и не ограничена на $(0, \infty)$, но ограничена на $[1, \infty)$.

Функция f, определенная на всей вещественной оси, называется *периодической с периодом* $T>0$, если $f(x)=f(x+T)$ $\forall x$.

Можно говорить также о функции, периодической с периодом T на интервале (a, b) (сегменте $[a, b]$), если равенство

$$f(x)=f(x+T)$$

верно для всех таких $x\in(a, b)$ (или $[a, b]$), для которых $x+T\in(a, b)$ ($[a, b]$).

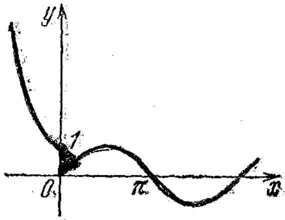

Рис. 12.

Например, функция $\sin x$ периода 2π. Функция $\sin mx$, где $m\in\mathbb{N}$, тоже периода 2π, но она также имеет меньший период $T=2\pi/m$.

Пример 6. Функция (*сигнум* x или *знак* x)

$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

задана на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$. Она нечетная. Образ ее есть множество, состоящее из трех точек: 1, 0, -1.

Пример 7. Функция

$$y=\begin{cases} x^2+1, & x\leqslant 0, \\ \sin x, & x>0, \end{cases}$$

имеет график, изображенный на рис. 12. Она убывает на $(-\infty, 0)$ и имеет период 2π на $(0, \infty)$. Эта функция на различных частях области ее определения задана различными формулами.

Функция может быть задана в виде таблицы. Например, мы могли бы измерять температуру T воздуха через каждый час. Тогда каждому моменту времени $t=0, 1, 2, \ldots, 24$ соответствовало бы определенное число T в виде таблицы:

t	0	1	.....	24
T	T_0	T_1	...	T_{24}

Таким образом, мы получили бы функцию $T=f(t)$, определенную на множестве целых чисел от 0 до 24, заданную таблицей.

Если функция $y=f(x)$ задана на некотором множестве E формулой, то всегда можно считать, что ей соответствует вполне определенный график, определяющий геометрически эту функцию. Обратное совсем не ясно: если функция задана произвольным графиком, то может ли она быть выражена некоторой формулой? Это очень сложный вопрос. Чтобы ответить на него, надо отдать себе отчет в том, какой смысл мы вкладываем в слово формула. Выше, когда мы говорили, что данная функция $y=f(x)$ выражается формулой, мы молчаливо считали, что при этом y получается из x при помощи конечного числа таких операций, как сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня той или иной степени, логарифмирование, взятие операции sin, cos, arcsin и других алгебраических и тригонометрических операций.

Математический анализ дает средства для значительного расширения понятия формулы. Весьма важным таким средством является разложение функции в бесконечный ряд по элементарным функциям.

Многие, а может быть и все, встречающиеся на практике функции могут быть изображены формулой, представляющей собой некоторый бесконечный ряд, членами которого являются элементарные функции, которые будут определены ниже. Но сейчас об этом говорить не время. Мы еще не готовы к этому.

Так или иначе, задана ли функция $f(x)$ формулой или же другим каким-либо способом, например при помощи графика, она уже может служить объектом изучения средствами математического анализа, если она удовлетворяет некоторым дополнительным общим свойствам, таким, как непрерывность, монотонность, выпуклость, дифференцируемость и др. Но об этом будет идти речь впереди.

Важнейшим средством изучения функции является понятие предела, являющееся основным понятием математического анализа. Данная глава посвящена этому понятию.

Если каждому числу x, принадлежащему данному множеству E чисел, в силу некоторого закона соответствует определенное множество e_x чисел y, то говорят, что этим законом определена *многозначная функция* $y=f(x)$. Если окажется, что e_x для каждого $x \in E$ состоит только из одного числа y, то мы получим *однозначную функцию*.

Однозначную функцию называют просто «функцией» без добавления прилагательного «однозначная», если только это не приводит к недоразумениям.

Алгебра и тригонометрия доставляют нам примеры многозначных функций; такими являются функции $\pm\sqrt{x}$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arctg} x$, ...

Функция $\pm\sqrt{x}$ определена для $x \geqslant 0$. Она двузначна для $x > 0$: каждому положительному x соответствует два действительных числа (отличающихся друг от друга знаками), квадраты которых равны x. Впрочем, символ $\sqrt[k]{x}$ $(k=2, 3, \ldots)$ мы будем понимать всюду, если это не оговорено особо, как арифметическое значение корня k-й степени из $x \geqslant 0$, т. е. как неотрицательное число, k-я степень которого равна x (см. § 3.8). Что же касается функции $\operatorname{Arcsin} x$, то она бесконечнозначная. Она приводит в соответствие каждому значению x из отрезка $[-1, 1]$ бесконечное множество значений y, которые могут быть записаны по формуле

$$y = (-1)^k \arcsin x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3.1.2. Функции многих переменных. Выше мы говорили о функциях от одной переменной. Но можно говорить также о функциях двух, трех и вообще n переменных.

Функция от двух переменных определяется следующим образом. Рассматривается множество E пар чисел (x, y). При этом имеются в виду *упорядоченные* пары. Это значит, что две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными (совпадающими) тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Если в силу некоторого закона каждой паре $(x, y) \in E$ приведено в соответствие число z, то говорят, что этим определена на множестве E *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных* x *и* y.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости, где введена декартова система координат, точка с абсциссой x и ординатой y, и, наоборот, каждой точке, таким образом, соответствует пара (x, y), то можно говорить, что наша функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Функцию $z = f(x, y)$ от двух переменных изображают в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат x, y, z, в виде геометрического места точек $(x, y, f(x, y))$, проекции которых (x, y) принадлежат множеству E определения f.

Например, таким геометрическим местом для функции

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (x^2+y^2 \leqslant 1),$$

является верхняя половина шаровой поверхности радиуса 1 с центром в нулевой точке.

В этом же духе можно определить функцию трех переменных. Областью ее определения может теперь служить некоторое множество упорядоченных троек чисел (x, y, z) или, что все равно, соответствующих им точек трехмерного пространства, где введена декартова система координат.

Если каждой тройке чисел (точке трехмерного пространства) $(x, y, z) \in E$ в силу некоторого закона соответствует число u, то говорят, что этим на E определена функция $u=F(x, y, z)$.

Аналогично можно рассматривать множество E упорядоченных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ из n чисел, где n — заданное натуральное число. Опять, если каждой такой системе, принадлежащей E, соответствует в силу некоторого закона число z, то говорят, что z есть *функция от переменных* $x_1, \ldots, x_n$, определенная на множестве E, и записывается эта функция в виде $z=F(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае $n>3$ в нашем распоряжении уже нет реального n-мерного пространства, чтобы использовать его для изображения систем $(x_1, \ldots, x_n)$ в виде принадлежащих ему точек. Но математики выдумали n-мерное пространство, и оно им благополучно служит, и притом не хуже, чем реальное трехмерное пространство. Именно, *n-мерным пространством* называется множество всевозможных систем n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$.

Если две функции f и φ от n переменных заданы на одном и том же множестве E систем $(x_1, \ldots, x_n)$ — точек n-мерного пространства, — то можно определить сумму $f+\varphi$, разность $f-\varphi$, произведение $f\varphi$ и частное f/φ как функции, определенные на E при помощи равенств, аналогичных равенствам (2), где надо только числа x заменить системами $(x_1, \ldots, x_n)$. Естественным образом определяются также сложные функции такие, как $f(\varphi(x, y), \psi(x, y, z))=F(x, y, z)$, где (x, y, z) — тройки чисел, принадлежащих некоторому множеству троек.

Ниже приводится несколько примеров функций многих переменных, заданных посредством элементарных формул.

Пример 8. $u=Ax+By+Cz+D$, где A, B, C, D — заданные постоянные действительные числа, есть линейная функция от трех переменных (x, y, z). Она задана на всем трехмерном пространстве. Более общая линейная функция от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой $u=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, где $a_1, \ldots, a_n$, b — заданные постоянные числа. Эта функция определена в любой точке $(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, или, как еще говорят, на всем n-мерном пространстве.

Пример 9. $z=\lg\sqrt{1-x^2-y^2}$. Эта действительная функция задана на области, представляющей собой круг радиуса 1 с центром в $(0, 0)$, из которого удалены все граничные точки, т. е. точки окружности радиуса 1 с центром $(0, 0)$. Для этих точек наша функция не определена, потому что $\lg 0$ не имеет смысла.

Пример 10. Функция

$$z=f(x, y)=\begin{cases} 0 & \text{для } y \geqslant 0, \\ 1 & \text{для } y<0 \end{cases}$$

геометрически изображается двумя параллельными полуплоскостями, не связанными между собой. Расположение их по отношению к системе координат x, y, z очевидно.

Функция от одной переменной может быть задана *неявным образом* при помощи равенства

$$F(x, y)=0, \tag{3}$$

где F есть функция от двух переменных x и y.

Пусть на некотором множестве G точек (x, y) задана функция F. Равенство (3) определяет некоторое подмножество Ω множества G, на котором функция F равна нулю. Конечно, в частности, Ω может быть пустым множеством. Пусть Ω — непустое множество, и пусть E — множество (очевидно, непустое) таких значений x (чисел), которым соответствует хотя бы одно y так, что пара x, y принадлежит Ω. Таким образом, E есть множество всех чисел x, каждому из которых соответствует непустое множество e_x чисел y так, что $(x, y)\in\Omega$, или, что все равно, так, что для указанной пары (x, y) выполняется равенство (3). Этим определена на множестве E некоторая функция $y=\varphi(x)$ от x, вообще говоря, многозначная. В таком случае говорят, что функция φ *определена неявно* при помощи равенства (3). Для нее, очевидно, выполняется тождество

$$F(x, \varphi(x))\equiv 0 \quad \text{для всех} \quad x\in E.$$

По аналогии можно также определить функцию $x=\psi(y)$ от переменной y, определяемую неявно при помощи равенства (3). Для нее выполняется тождество

$$F(\psi(y),\ y) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad y \in E_1,$$

где E_1 — некоторое множество чисел. Говорят еще, что функция $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$) удовлетворяет уравнению (3). Функцию $x = \psi(y)$ называют *обратной* по отношению к функции $y = \varphi(x)$.

Пример 11. Уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

где $r > 0$, неявно определяет двузначную функцию от одной переменной:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leqslant x \leqslant r);$$

впрочем, при $x = \pm r$ она однозначна. Естественно считать, что эта двузначная функция распадается на две непрерывные однозначные функции $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$. Графики их (полуокружности) в совокупности дают окружность радиуса r с центром в начале координат. Эта окружность есть геометрическое место точек, координаты $(x,\ y)$ которых удовлетворяют уравнению (4). Но можно, пользуясь формулой (4), конструировать различные однозначные (разрывные) функции, удовлетворяющие уравнению (4). Например, такой является функция

$$y = \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x^2}, & -r \leqslant x < 0, \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant r. \end{cases}$$

3.1.3. Полярная система координат. В плоскости зададим луч OL *(полярную ось)*, выходящий из точки O — *полюса полярной системы координат* (рис. 13, *a*).

Положение произвольной точки A (отличной от точки O) плоскости однозначно определяется парой чисел $(\theta,\ \rho)$ — ее *полярными координатами*, где ρ — расстояние A до O, а θ — выраженный в радианах угол между OA и OL. Если угол θ отсчитывается против часовой стрелки от прямой OL, то он считается *положительным* и может изменяться от 0 до $+\infty$. Если угол θ отсчитывается по часовой стрелке, то он считается *отрицательным* и может изменяться от $-\infty$ до 0. Точка O исключительная. Она определяется парой $(\theta,\ 0)$, где θ — произвольное число.

Пусть в плоскости, наряду с прямоугольной системой координат $x,\ y$ с началом в точке O, введена полярная система координат θ, ρ, так что полярная ось и положительная ось x совпадают. Тогда полярные координаты (θ, ρ) произвольной точки A плоскости преобразуются

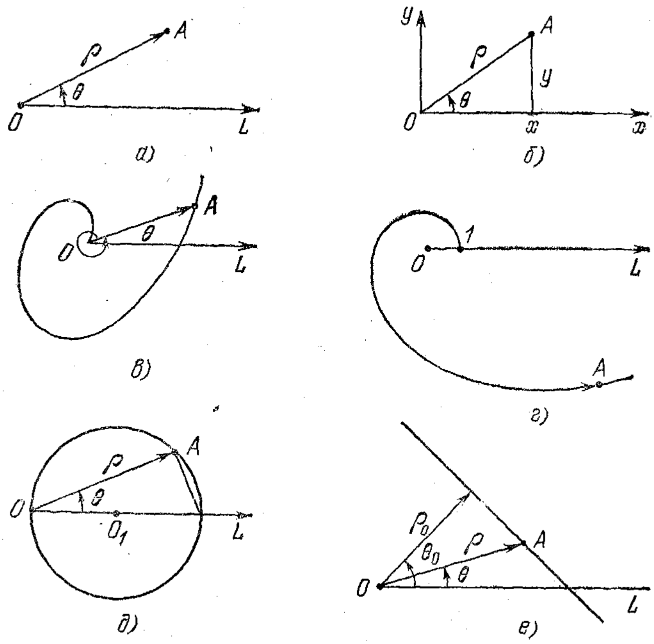

Рис. 13.

в декартовы координаты (x, y) этой точки по формулам (рис. 13, *б*)

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{5}$$

Равенства (5) называют *формулами преобразования полярных координат в декартовы.*

Функциональную зависимость $\rho = f(\theta)$, заданную на некотором множестве E значений θ, можно интерпретировать как множество точек (θ, ρ) плоскости в полярной системе координат, где $\theta \in E$, $\rho = f(\theta)$.

Многие кривые на плоскости могут быть описаны в полярных координатах соответствующими функциями $\rho = f(\theta)$ (многозначными или однозначными). Ясно, что в область определения функции $\rho = f(\theta)$ входят только те значения угла θ, при которых $f(\theta) \geqslant 0$.

Построение графика функции $\rho=f(\theta)$ можно осуществить по точкам. При данном θ проводим луч из точки O под углом θ к полярной оси и затем на этом луче отмечаем точку $A=(\theta, f(\theta))$ графика функции, находящуюся на расстоянии $\rho=f(\theta)$ от точки O.

Простейшей функцией в полярной системе координат является постоянная функция $\rho=c$. Очевидно, что ее графиком является окружность радиуса c с центром в точке O.

Другой пример $\rho=\theta$ $(0\leqslant\theta<\infty)$ (рис. 13, *в*). Это спираль, раскручивающаяся из полюса O.

Функция $\rho=2^\theta$ $(-\infty<\theta<\infty)$ описывает в полярных координатах спираль Архимеда (рис. 13, *г*). Отметим, что здесь при $\theta\to-\infty$ $\rho\to 0$. Стрелка на графике указывает направление движения точки графика при увеличении угла θ.

Функция $\rho=2\cos\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ описывает окружность радиуса единица с центром в точке $O_1=(0, 1)$ (см. рис. 13, *д*).

Наконец, функция

$$\rho=\frac{\rho_0}{\cos(\theta-\theta_0)}\qquad\left(\theta\in\left(\theta_0-\frac{\pi}{2},\ \theta_0+\frac{\pi}{2}\right),\ \rho_0>0\right)$$

описывает такую прямую, что опущенный на нее из полюса O перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол θ_0 (рис. 13, *е*).

§ 3.2. Предел функции

Число A называется *пределом функции* f *в точке* a, если она определена на некоторой окрестности a, т. е. на некотором интервале (c, d), где $c<a<d$, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого $\varepsilon>0$ можно указать зависящее от него $\delta>0$ такое, что для всех x, для которых $0<|x-a|<\delta$, имеет место неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел f в точке a, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ или } f(x)\to A \quad (x\to a).$$

Другое определение предела функции в точке может быть высказано в терминах пределов последовательностей.

Число A называется *пределом функции в точке* a, если она определена на некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и если предел последовательности $\{f(x_n)\}$ существует и равен A, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к a и такая, что $x_n \neq a$ для всех n. Таким образом,

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A.$$

Здесь считается, как и в других подобных случаях, само собой разумеющимся, что сходящаяся к a переменная x_n пробегает значения, для которых $f(x)$ определена.

Высказанные определения эквивалентны. В самом деле, пусть функция f имеет предел в смысле первого определения, и пусть задана переменная x_n, не равная ни при каком n числу a и стремящаяся к a. Зададим ε и подберем δ так, как это сказано в первом определении. Затем подберем натуральное n_0 так, чтобы $|x_n - a| < \delta$ для $n > n_0$. Но тогда

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n > n_0,$$

а это значит, что последовательность чисел $\{f(x_n)\}$ стремится к A, и так как это свойство верно для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, лишь бы $x_n \neq a$ и все x_n принадлежали к области определения функции, то доказано, что из первого определения предела следует второе.

Наоборот, пусть функция $f(x)$ имеет предел в смысле второго определения. Допустим, что при этом она не имеет предела в смысле первого определения. Это значит, что существует хотя бы одно ε, которое мы обозначим через ε_0, для которого нельзя подобрать нужное δ, т. е. для *любого* δ среди x, удовлетворяющих соотношениям $0 < |x - a| < \delta$, должно найтись хотя бы одно $x = x^{(\delta)}$ такое, что для него $|f(x^{(\delta)}) - A| \geqslant \varepsilon_0$.

В качестве δ мы берем все числа вида $\delta = 1/k$ ($k = 1, 2, \ldots$) и для каждого из них найдем точку $x_k = x^{(\delta)}$, для которой

$$0 < |x_k - a| < 1/k \quad (x_k \neq a)$$

и

$$|f(x_k) - A| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из этих соотношений видно, что $x_k \to a$ ($x_k \neq a$), в то время как $f(x_k)$ заведомо не стремится к числу A. Таким образом, допущение, что из второго определения предела не следует первое, приводит к противоречию.

Эквивалентность двух определений доказана.

Выражение *предел функции в точке a* часто заменяют выражением *предел функции при x, стремящемся к a* или, короче, *предел функции при $x \to a$*. Если угодно, это выражение больше соответствует духу понятия предела потому, что выражение $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ говорит о поведении функции в малой окрестности точки a, из которой выбрасывается точка a. Оно говорит о том, что если x приближается к a по любому закону, оставаясь не равным a, то соответствующее значение $f(x)$ в свою очередь приближается к A, т. е. делается как угодно близким к A.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$. Она определена для всех $x \neq 2$. Попробуем найти ее предел при $x \to 2$. Для любого $x \neq 2$ $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$, а так как при определении предела при $x \to 2$ совсем не принимаются во внимание значения f в точке $x=2$, то

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2).$$

Это равенство пока написано в том смысле, что если один из пределов существует, то существует и второй и равен ему. Таким образом, вместо того чтобы вычислять предел более сложной функции $(x^2-4)/(x-2)$, достаточно вычислить предел более простой функции $x+2$. Этот последний при $x \to 2$, очевидно равен 4. Ведь если подставить в $x+2$ вместо x произвольную переменную x_n, стремящуюся к 2, то независимо от способа стремления ее к 2

$$\lim_{x_n \to 2} (x_n+2) = 2+2 = 4.$$

Вычисления, связанные с нахождением данного предела, обычно располагают следующим образом:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = \lim_{x \to 2} x+2 = 4.$$

Подчеркнем, что функции $f(x) = (x^2-4)/(x-2)$ и $\varphi(x) = x+2$ являются разными функциями. Первая из них определена для $x \neq 2$, в то время как вторая определена для всех x. Однако при вычислении предела функций при $x \to 2$ нас совершенно не интересует, определены или не определены эти функции в самой точке $x=2$, и так как

$f(x)=\varphi(x)$ для $x \neq 2$, то

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\varphi(2).$$

Пример 2. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$, потому что, если $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, то $\lim x_n^2=\lim x_n \cdot \lim x_n=1\cdot 1=1$. Этот факт можно доказать и на языке ε и δ. Определим какой-либо интервал, содержащий точку 1, например (1/2, 3/2). Для любого x, принадлежащего ему, очевидно, выполняется неравенство

$$|x^2-1|=|x+1||x-1| \leqslant \frac{5}{2}|x-1|.$$

Зададим теперь произвольное $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$, будет иметь место соотношение

$$|x^2-1| \leqslant \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\varepsilon=\varepsilon.$$

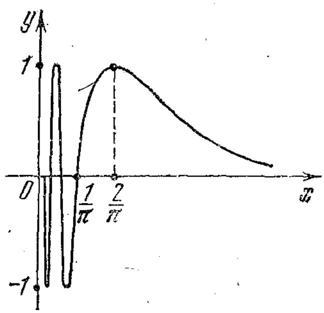

Рис. 14.

Пример 3. Функция $\sin(1/x)$ определена для всех значений $x\neq 0$ и является нечетной (график ее для $x>0$ изображен на рис. 14). Она определена, таким образом, в окрестности точки $x=0$, за исключением самой точки $x=0$. Эта функция не имеет предела при $x\to 0$, потому что последовательность отличных от нуля значений $x_k=2/\pi(2k+1)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ стремится к нулю и в то же время

$$f(x_k)=(-1)^k$$

не стремится при $k\to\infty$ ни к какому пределу.

Введем еще следующее определение. Будем писать

$$A=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

и говорить, что *число A есть предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, если f определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>K$ при некотором $K>0$, и для любого $\varepsilon>0$ можно найти число

$M > K$ такое, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$.

Можно доказать, что это определение эквивалентно следующему.

Число A *есть предел функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если функция $f(x)$ определена для всех x с $|x| > M$ при некотором M и

$$\lim_{x_n \to \infty} f(x_n) = A$$

для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство эквивалентности этих двух определений проводится по той же схеме, что и в разобранном выше случае предела f в конечной точке a.

Вообще, многие свойства пределов $f(x)$ при $x \to a$, где a—конечное число, и при $x \to \infty$ являются аналогичными. Можно изложить эти свойства единым образом, так что изложение будет одновременно относиться как к случаю $x \to a$, где a—конечное число, так и к случаю $x \to \infty$. Для этого под буквой a надо понимать либо число (конечное), либо символ ∞. Если a есть число, то под окрестностью точки a понимается любой интервал (c, d), содержащий в себе точку a. Таким образом, *окрестность (конечной) точки* a есть множество всех точек x, удовлетворяющих неравенствам $c < x < d$. Если же $a = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$), то под окрестностью a мы условимся понимать множество всех x, удовлетворяющих неравенству

$$|x| > M \quad (\text{или } x > M, \text{ или } x < -M, \ M > 0).$$

Мы будем писать

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

где a может быть конечным числом или ∞ (или $+\infty$, или $-\infty$), если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a (эта оговорка нужна только в случае конечной точки a), и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих к ней и отличных от a, имеет место неравенство

$$|f(x)-A| < \varepsilon.$$

Это определение объединяет в себе, очевидно, оба разобранных выше случая предела f: когда x стремится к конечному числу a и когда x стремится к ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Функция f, для которой $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, называется *бесконечно малой при $x \to a$.*

Приступим к изложению свойств функции $f(x)$, имеющей пределы при $x \to a$, где a есть число или ∞, $+\infty$, $-\infty$. Условимся произвольную окрестность a обозначать символом $U(a)$. Легко проверить, что *пересечение двух окрестностей $U_1(a)$ и $U_2(a)$ есть снова некоторая окрестность $U(a)$.*

Теорема 1. *Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A — конечное число, то на некоторой окрестности $U(a)$ функция $f(x)$ ограничена, т. е. существует положительное число M такое, что*

$$|f(x)| \leqslant M \text{ для всех } x \in U(a), \quad x \neq a.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование окрестности $U(a)$, такой, что

$$1 > |f(x) - A| \geqslant |f(x)| - |A| \quad (x \in U(a), \quad x \neq a).$$

Отсюда для указанных x

$$|f(x)| \leqslant 1 + |A|,$$

где надо считать $M = 1 + |A|$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $A \neq 0$ — конечное число, то существует окрестность $U(a)$ такая, что*

$$|f(x)| > |A|/2 \quad (x \in U(a), \quad x \neq a).$$

Более того, для указанных x

$$f(x) > A/2, \text{ если } A > 0,$$

и

$$f(x) < A/2, \text{ если } A < 0.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование для $\varepsilon = |A|/2$ окрестности $U(a)$ такой, что

$$|A|/2 > |A - f(x)| \geqslant |A| - |f(x)| \quad (x \in U(a), \quad x \neq a),$$

откуда $|f(x)| > |A|/2$ для указанных x. Первое из этих неравенств можно заменить следующими:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

При $A>0$ отсюда следует

$$\frac{A}{2}=A-\frac{|A|}{2}<f(x),$$

а при $A<0$ следует

$$f(x)<A+\frac{|A|}{2}=\frac{A}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=A_1, \quad \lim_{x\to a} f_2(x)=A_2$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x\neq a$,

$$f_1(x)\leqslant f_2(x),$$

то $A_1\leqslant A_2$.

Доказательство. Пусть $x_n\to a$, $x_n\neq a$; тогда для достаточно большого n_0 имеет место неравенство

$$f_1(x_n)\leqslant f_2(x_n) \quad (n>n_0)$$

и после перехода к пределу неравенство $A_1\leqslant A_2$.

Теорема 4. *Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=A, \quad \lim_{x\to a} f_2(x)=A \tag{1}$$

и на некоторой окрестности $U(a)$, $x\neq a$,

$$f_1(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant f_2(x), \tag{2}$$

то

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x_n\to a$, $x_n\neq a$; тогда при достаточно большом n_0 для $n>n_0$

$$f_1(x_n)\leqslant\varphi(x_n)\leqslant f_2(x_n)$$

и в силу (1) существует предел $\varphi(x_n)$, равный A, а так как $\{x_n\}$ есть произвольная сходящаяся к a последовательность, то имеет место (3).

Теорема 5 (критерий Коши существования предела). *Для того чтобы существовал предел (конечный)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была определена в окрестности* a, *за исключением, быть может, самой точки* a, *и для всякого* $\varepsilon>0$

существовала такая окрестность $U(a)$, что, каковы бы ни были точки x', $x'' \in U(a)$, x', $x'' \neq a$,

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где A — конечное число; тогда существует окрестность a, где $f(x)$ определена, за исключением, быть может, самой точки a. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(a)$, что если $x \in U(a)$, $x \neq a$, то $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Пусть x', $x'' \in U(a)$ и x', $x'' \neq a$; тогда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы получили, что условие теоремы необходимо.

Докажем достаточность этого условия. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и пусть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать окрестность $U(a)$ такую, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для всех $x', x'' \in U(a), x', x'' \neq a$. Зададим произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, стремящуюся к a. Тогда, согласно критерию Коши, для последовательности, стремящейся к пределу, найдется число n_0 такое, что для n, $m > n_0$ будет x_n, $x_m \in U(a)$. Но тогда

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \qquad (n,\ m > n_0),$$

и последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Мы доказали следующее свойство рассматриваемой функции f: для любой сходящейся к a последовательности чисел $x_n \neq a$ существует $\lim f(x_n)$. Из этого свойства автоматически следует, что пределы $\lim f(x_n)$, соответствующие разным сходящимся к a последовательностям, равны между собой. Но тогда существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. В самом деле, пусть $x_n \longrightarrow a$, $x_n' \longrightarrow a$; x_n, $x_n' \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда по доказанному существуют числа A и A' такие, что $f(x_n) \longrightarrow A$ и $f(x_n') \longrightarrow A'$. Составим новую последовательность: $\{x_1, x_1', x_2, x_2', x_3 \ldots\}$. Она сходится к числу a. По доказанному выше должна сходиться к некоторому числу и соответствующая последовательность $\{f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2'), \ldots\}$. Но это возможно, только если $A = A'$. Таким образом, $A = A'$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = B,$$

где A и B — конечные числа. Тогда

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B, \quad \lim_{x \to a} [f(x)\varphi(x)] = AB$$

и при условии, что $B \neq 0$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Докажем для примера второе равенство. Пусть $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда

$$\lim f(x_n) = A, \quad \lim \varphi(x_n) = B,$$

но так как предел произведения двух переменных, пробегающих последовательности, равен произведению их пределов, то

$$\lim [f(x_n)\varphi(x_n)] = \lim f(x_n) \lim \varphi(x_n) = AB.$$

Это равенство доказано для любой переменной $x_n \to a$, $x_n \neq a$, поэтому $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\varphi(x)] = AB$.

По определению $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, если функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности a, за исключением, быть может, самой точки a, и если для всякого положительного числа M найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, что

$$|f(x)| > M \qquad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Функцию, для которой $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, называют *бесконечно большой при* $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и в некоторой окрестности точки a функция $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$), то еще пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty\right)$.

Легко доказать следующие теоремы.

Теорема 7. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет на некоторой окрестности* a *неравенству*

$$|f(x)| > M > 0,$$

а для функции $\varphi(x)$ *имеет место*

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 \quad (\varphi(x) \neq 0 \text{ для } x \neq a),$$

то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

Теорема 8. *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ (A — *число*), *то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Следствие. *Если* $\varphi(x) \to 0$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty,$$

и если $\varphi(x) \to \infty$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, *то*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

Можно еще определить предел функции f в точке a (конечной) справа (слева).

По определению число A называется пределом функции f в точке a справа (слева), если она определена на некотором полуинтервале $(a, b]$ $([b, a))$ и для нее существует

$$\lim_{\substack{x_n\to a\\ x_n>a}} f(x_n) = A \quad \left(\text{соответственно } \lim_{\substack{x_n\to a\\ x_n<a}} f(x_n) = A\right)$$

для любой указанной последовательности $\{x_n\}$.

Предел справа (слева) функции f в точке a принято обозначать так:

$$f(a+0) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), \tag{4}$$

$$f(a-0) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x). \tag{5}$$

Если f определена на интервале (a, b), то в точке a может иметь смысл только число $f(a+0)$, а в точке b — только число $f(b-0)$.

Замечание. Равенства

$$f(a+0) = f(a-0) = A \tag{6}$$

эквивалентны существованию предела

$$\lim_{x\to a} f(x) = A. \tag{7}$$

В самом деле, (6) можно выразить так: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x$: $0 < |x-a| < \delta$, $x > a$; $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x$: $0 < |x-a| < \delta$, $x < a$. Но это можно выразить более кратко: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x$: $0 < |x-a| < \delta$, что эквивалентно (7).

§ 3.3. Непрерывность функции

На рис. 15, *а* изображен график функции $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Его естественно назвать непрерывным графиком, потому что он может быть нарисован одним движением карандаша без отрыва от бумаги. Зададим произвольную точку (число) $x\in[a, b]$. Близкая к ней другая

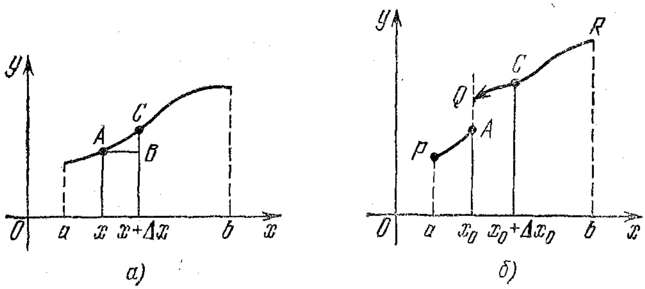

Рис. 15.

точка $x'\in[a, b]$ может быть записана в виде $x'=x+\Delta x$, где Δx есть число положительное или отрицательное, называемое *приращением* x. Разность

$$\Delta f=\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

называется *приращением функции* f в точке x, соответствующим приращению Δx. Здесь имеется в виду Δx такое, что $x+\Delta x\in[a, b]$. На рис. 15, *а* Δy равно длине отрезка BC.

Будем стремить Δx к нулю; тогда для рассматриваемой функции, очевидно, и Δy будет стремиться к нулю:

$$\Delta y\to 0 \quad (\Delta x\to 0). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь график, изображенный на рис. 15, *б*. Он состоит из двух непрерывных кусков PA и QR. Однако эти куски не соединены непрерывно, и потому график естественно назвать разрывным. Чтобы график изображал однозначную функцию $y=F(x)$ в точке x_0, условимся, что $F(x_0)$ равно длине отрезка, соединяющего A и x_0; в знак этого точка A изображена на графике кружком, в то время как у точки Q нарисована стрелка, указывающая, что Q не принадлежит графику. Если бы точка Q принадлежала графику, то функция F была бы двузначной в точке x_0.

Придадим теперь x_0 приращение Δx_0 и определим соответствующее приращение функции:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

Если мы будем Δx_0 стремить к нулю, то теперь уже нельзя сказать, что ΔF будет стремиться к нулю. Для отрицательных Δx_0, стремящихся к нулю, это так, но для положительных вовсе не так: из рисунка видно, что если Δx_0, оставаясь положительным, стремится к нулю, то соответствующее приращение ΔF при этом стремится к положительному числу, равному длине отрезка AQ.

После этих рассмотрений естественно *функцию f, заданную на отрезке $[a, b]$, называть непрерывной в точке x этого отрезка, если приращение ее в этой точке, соответствующее приращению Δx, стремится к нулю при любом способе стремления Δx к нулю.* Это (свойство непрерывности f в x) записывается в виде соотношения (1) или еще так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{2}$$

Запись (2) читается так: предел Δy равен нулю, когда Δx стремится к нулю по любому закону. Впрочем, выражение «по любому закону» обычно опускают, подразумевая его.

Если определенная на $[a, b]$ функция f не является непрерывной в точке $x \in [a, b]$, т. е. если для нее не выполняется свойство (2) хотя бы при одном способе стремления Δx к нулю, то она называется *разрывной* в точке x.

Функция, изображенная на рис. 15, *а*, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, функция же, изображенная на рис. 15, *б*, очевидно, непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$, за исключением точки x_0, потому что для последней соотношение (2) не выполняется, когда $\Delta x \to 0$, оставаясь положительным.

Функция, непрерывная в любой точке отрезка (интервала), называется *непрерывной на* этом *отрезке* (*интервале*).

Непрерывная функция математически выражает свойство, с которым нам приходится часто встречаться на практике, заключающееся в том, что малому приращению независимой переменной соответствует малое же приращение зависимой от нее переменной (функции). Прекрасными примерами непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимости пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, при этом тот или иной закон движения $s=f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути.

К абстракции непрерывности человек пришел, наблюдая окружающие его так называемые сплошные среды—твердые, жидкие или газообразные, например металлы, воду, воздух. На самом деле, всякая физическая среда представляет собой скопление большого числа отделенных друг от друга движущихся частиц. Однако эти частицы и расстояния между ними настолько малы по сравнению с объемами сред, с которыми приходится иметь дело в макроскопических физических явлениях, что многие такие явления можно достаточно хорошо изучать, если считать приближенно массу изучаемой среды непрерывно распределенной без всяких просветов в занятом ею пространстве. На таком допущении базируются многие физические дисциплины, например гидродинамика, аэродинамика, теория упругости. Математическое понятие непрерывности, естественно, играет в этих дисциплинах, как и во многих других, большую роль.

Непрерывные функции образуют основной класс функций, с которым оперирует математический анализ.

Примерами непрерывных функций могут служить элементарные функции (см. ниже § 3.8). Они непрерывны на интервалах изменения x, где они определены.

Разрывные функции в математике отражают скачкообразные процессы, встречающиеся в природе. При ударе, например, величина скорости тела меняется скачкообразно. Многие качественные переходы сопровождаются скачками. Например, зависимость $Q=f(t)$ между температурой одного грамма воды (льда) и количеством Q калорий находящегося в ней тепла, когда t изменяется между -10° и $+30^\circ$, если принять условно, что при -10° величина $Q=0$, выражается следующими формулами:

$$Q(t)=\begin{cases} 0{,}5t+5, & -10\leqslant t<0, \\ t+85, & 0<t\leqslant 30. \end{cases}$$

Мы считаем, что теплоемкость льда равна 0,5. При $t=0$ эта функция оказывается неопределенной—многозначной; можно для удобства условиться, что при $t=0$ она принимает вполне определенное значение, например $f(0)=45$. Функция $Q=f(t)$, очевидно, разрывная при $t=0$, изображена на рис. 16.

Дадим определение непрерывности функции f в точке.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки, в том числе в самой точке x_0, и если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx, стремится к нулю при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \tag{3}$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то получим следующее эквивалентное определение непрерывности f в x_0: *функция f непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки, в том числе в самой точке x_0, и если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0); \tag{4}$$

или еще на языке ε, δ: если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall x\colon\ |x - x_0| < \delta.$$

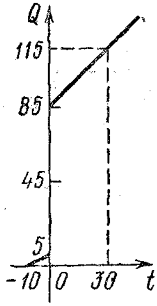

Рис. 16.

Равенство (4) можно еще записать следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right). \tag{4'}$$

Оно показывает, что *под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.*

Пример 1. Постоянная $y = C$ есть функция, непрерывная в любой точке x. В самом деле, точке x соответствует значение функции $y = C$, точке $x + \Delta x$ соответствует то же значение $y(x + \Delta x) = C$. Поэтому $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = C - C = 0$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Пример 2. Функция $y = x$ непрерывна для любого значения x, потому что $\Delta y = \Delta x$ и, следовательно, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Пример 3. Функция $y = \sin x$ непрерывна для любого x.

В самом деле,

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left|2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 |\sin(\Delta x/2)|. \tag{5}$$

Но для любого α имеет место неравенство

$$|\sin\alpha| < |\alpha|. \tag{6}$$

Если $0 < \alpha < \pi/2$, то это следует из рис. 17, где изображена окружность радиуса 1 (дуга длины 2α больше стягиваемой ею хорды, имеющей длину $2\sin\alpha$). При $\alpha = 0$ неравенство (6) обращается в равенство. Если же $0 < |\alpha| < \pi/2$, то $|\sin\alpha| = \sin|\alpha| \leqslant |\alpha|$. Наконец, если $|\alpha| > \pi/2$, то $|\sin\alpha| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant |\alpha|$. Из (5) на основании (6) следует

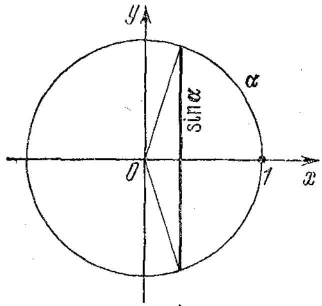

Рис. 17.

$$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|,$$

т. е.

$$|\Delta y| \leqslant |\Delta x|.$$

Но тогда, очевидно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Можно еще сказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, именно $\delta = \varepsilon$ такое, что

$$|\Delta y| < \varepsilon \quad \forall \Delta x\colon\ |\Delta x| < \delta = \varepsilon.$$

Отметим важную теорему.

Теорема 1. *Если функции f и φ непрерывны в точке $x = a$, то непрерывны также в этой точке их сумма, разность, произведение и частное (при $\varphi(a) \neq 0$).*

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 6 § 3.2, если учесть, что в данном случае

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x), \qquad \varphi(a) = \lim_{x\to a} \varphi(x).$$

Справедлива также важная теорема о непрерывности функции от функции (сложной функции).

Теорема 2. *Пусть задана функция $f(u)$, непрерывная в точке $u = A$, и еще другая функция $u = \varphi(x)$, непрерывная в точке $x = a$, и пусть $\varphi(a) = A$. Тогда сложная функция $F(x) = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x = a$.*

Доказательство. Заметим, что по определению непрерывности функции f в точке A следует, что она определена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому

$$\lim_{x\to a} F(x)=\lim_{x\to a} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to A} f[u]=f(A)=f[\varphi(a)]=F(a).$$

Здесь введена подстановка $u=\varphi(x)$ и учтена непрерывность φ в точке $x=a$: $\varphi(x)\xrightarrow[x\to a]{}\varphi(a)=A$.

Пример 4. Функция

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

где a_k — постоянные коэффициенты, называется *многочленом* степени n. Она непрерывна для любого x. Ведь чтобы получить $P(x)$, надо, исходя из постоянных чисел $a_0, \ldots$ $\ldots, a_n$ и функции x, произвести конечное число арифметических действий — сложения, вычитания и умножения. Но постоянная есть непрерывная функция (см. пример 1), а функция $y=x$ тоже непрерывна (см. пример 2), поэтому непрерывность $P(x)$ следует из теоремы 1.

Пример 5. Функция $y=\cos x$ непрерывна. Она является композицией двух непрерывных функций: $y=$ $=\sin u$, $u=\frac{\pi}{2}-x$.

Пример 6. Функция

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad \left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\right),$$

непрерывна для указанных x, потому что (см. теорему 1) она равна частному от деления непрерывных функций и при этом делитель не равен нулю (при указанных x).

Пример 7. Функция

$$y=\sin^3 x^5$$

непрерывна для любого x, потому что она является композицией непрерывных функций: $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=x^5$ (см. теорему 2).

Пример 8. Функция $y=|x|$ непрерывна $\forall x$, потому что

$$|\Delta y|=||x+\Delta x|-|x||\leqslant|x+\Delta x-x|=|\Delta x|\to 0$$
$$\text{при } \Delta x\to 0.$$

Пример 9. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то непрерывна также в этой точке и функция $|f(x)|$.

Это следует из теоремы 2 и примера 8, потому что функция $|f(x)|$ есть композиция двух непрерывных функций: $y=|u|$, $u=f(x)$.

Отметим еще две теоремы, которые непосредственно следуют из соответствующих теорем 1 и 2 § 3.2 для предела функции.

Теорема 3. *Если функция f непрерывна в точке a, то существует окрестность $U(a)$ этой точки, на которой f ограничена.*

Теорема 4. *Если функция f непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a, на которой*

$$|f(x)| > |f(a)|/2.$$

Больше того, если $f(a) > 0$, то

$$f(a)/2 < f(x) \quad (x \in U(a)),$$

а если $f(a) < 0$, то

$$f(x) < f(a)/2 \quad (x \in U(a)).$$

§ 3.4. Разрывы первого и второго рода

По определению функция f *непрерывна в точке $x = a$ справа (слева), если*

$$f(a) = f(a+0) \quad (\text{соответственно } f(a) = f(a-0))$$

(см. конец § 3.2).

Непрерывность f в точке a можно определить также следующим образом: *функция f непрерывна в точке $x = a$,*

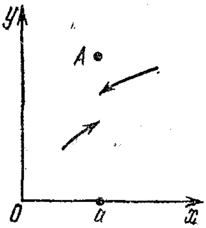

Рис. 18.

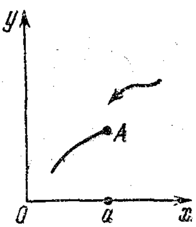

Рис. 19.

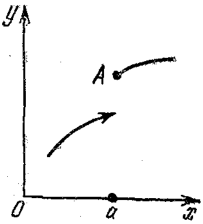

Рис. 20.

если она определена в некоторой окрестности этой точки, в том числе и в самой точке $x = a$, и существуют пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$ такие, что

$$f(a) = f(a+0) = f(a-0). \tag{1}$$

Если функция f такова, что для нее существуют пределы $f(a+0)$, $f(a-0)$, однако равенства (1) не выполняются, то, очевидно, она *разрывна* (не непрерывна) в точке a. В этом случае говорят, что функция f в точке a имеет *разрыв первого рода*.

На рис. 18—23 приведены шесть графиков функций, имеющих разрыв первого рода в точке a. Буква A обозначает точку $A=(a, f(a))$ графика функций. Стрелка на конце куска кривой обозначает, что концевая точка, где находится стрелка, выброшена.

На рис. 18—21 даны графики функций, для которых все три числа $f(a)$, $f(a+0)$, $f(a-0)$ имеют смысл. На рис. 18 три числа $f(a)$, $f(a+0)$, $f(a-0)$ попарно различны—функция не только разрывна в a, но разрывна также справа и слева. На рис. 19 функция непрерывна слева в a, но разрывна справа. На рис. 21 $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$. В этом случае говорят, что функция f имеет в точке a *устранимый разрыв*—ведь ее можно видоизменить в точке a, положив $f(a)=f(a+0)=f(a-0)$, и она сделается непрерывной в этой точке. На рис. 22 функция не определена в точке a. На рис. 23 функция тоже не определена в точке a, но $f(a+0)=f(a-0)$, поэтому, если доопределить f в этой точке, положив $f(a)=f(a+0)=f(a-0)$, то функция f станет непрерывной в точке a.

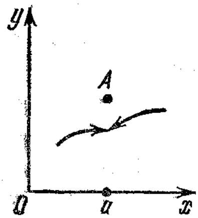

Рис. 21.

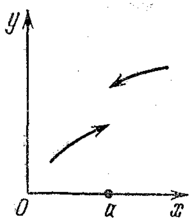

Рис. 22.

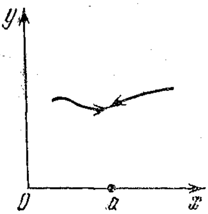

Рис. 23.

В случаях рис. 22 и 23 функция f определена в окрестности точки, за исключением самой точки a. В таких случаях часто говорят, что f разрывна в a, хотя идея непрерывности и разрывности в точке a есть идея сопоставления $f(a)$ с $f(x)$ при x, близких к a.

Если у функции f не существует правого предела или левого предела в точке a, или не существует как правого, так и левого предела, или же эти пределы бесконечны, то говорят, что она имеет *разрыв второго рода в этой точке*.

Пример 1. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

в точке $x=0$ не имеет правого и левого пределов (см. пример 3 § 3.2). Следовательно, она имеет разрыв второго рода в точке $x=0$.

Пример 2. Функция

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

очевидно, непрерывна для $x\neq 0$, а в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода. При этом $\operatorname{sign}(0+0)=1$, $\operatorname{sign}(0-0)=-1$.

Пример 3. Функция $[x]$ — целая часть x — для $x\geqslant 0$ имеет график, изображенный на рис. 24. Она непрерывна для нецелых x, а если x целое, то $[x+0]=x=[x]$ и $[x-0]=x-1$, и, следовательно, имеет место разрыв первого рода.

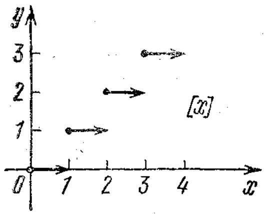

Рис. 24.

Пример 4. Функция

$$y=\begin{cases}1/x, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$

непрерывна для $x\neq 0$. Правый и левый пределы в точке $x=0$ равны бесконечности, поэтому функция имеет разрыв второго рода в этой точке. В этом случае также говорят, что функция имеет *бесконечный разрыв в этой точке.*

Теорема 1. *Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, то существуют пределы $f(a+0)\geqslant f(a)$ и $f(b-0)\leqslant f(b)$.*

Доказательство. Из условия следует, что

$$f(x)\leqslant f(b)\qquad \forall x\in[a, b),$$

т. е. f ограничена сверху числом $f(b)$ на полуинтервале $[a, b)$. Но тогда существует точная верхняя грань f на этом полуинтервале:

$$\sup_{x\in[a, b)} f(x)=M\leqslant f(b).$$

В силу свойства точной верхней грани для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $x_0 \in [a, b)$ такое, что

$$M-\varepsilon < f(x_0) \leqslant M, \tag{2}$$

а в силу того, что f не убывает, имеет место

$$f(x_0) \leqslant f(x) \quad \forall x\colon\ x_0 < x < b. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$M-\varepsilon < f(x) \leqslant M \quad \forall x\colon\ x_0 < x < b,$$

и мы доказали, что существует левый предел f в точке b:

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = f(b-0) = M \leqslant f(b).$$

Аналогично, рассматривая неравенство $f(a) \leqslant f(x)$ для $x \in (a, b]$, докажем существование

$$f(a+0) = \inf_{x\in(a,b]} f(x) \geqslant f(a).$$

Следствие. *Если функция f не убывает на отрезке $[a, b]$, то в любой точке $x \in [a, b)$ существует правый предел $f(x+0) \geqslant f(x)$ и в любой точке $x \in (a, b]$ существует левый предел $f(x-0) \leqslant f(x)$.*

В самом деле, для точек $x = a, b$ это утверждение доказано в теореме 1. Пусть $x \in (a, b)$. На отрезках $[a, x]$ и $[x, b]$ функция f не убывает, поэтому по теореме 1 существуют пределы $f(x-0)$, $f(x+0)$ и $f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$.

В данном случае, очевидно, что для того чтобы функция f была непрерывной в точке x, необходимо и достаточно, чтобы $f(x-0) = f(x+0)$.

Если $f(x-0) < f(x+0)$, то функция f имеет в точке x разрыв первого рода.

Теорема 2. *Множество точек разрыва функции f, неубывающей на отрезке $[a, b]$, не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть функция f имеет больше чем одну точку разрыва, и пусть x' и x'' ($x' < x''$) — две какие-либо из них. Так как

$$f(x'+0) = \inf_{x\in(x',x'')} f(x), \quad f(x''-0) = \sup_{x\in(x',x'')} f(x),$$

то

$$f(x'+0) \leqslant f(x''-0)$$

и интервалы $(f(x'-0), f(x'+0))$, $(f(x''-0), f(x''+0))$ оси y не пересекаются, Каждой точке x' разрыва функции f соответствует интервал $(f(x'-0),\ f(x'+0))$. Внутри его выберем одну рациональную точку $\alpha_{x'}$. После сказанного ясно, что разным точкам разрыва x' соответствуют разные точки $\alpha_{x'}$. Но множество всех рациональных чисел счетно. Поэтому множество всех точек $\alpha_{x'}$, так же как и множество всех точек x' (разрыва f), не более чем счетно. Теорема доказана.

§ 3.5. Функции, непрерывные на отрезке

Функция f называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна во всех точках интервала (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств, к изложению которых мы сейчас приступим.

Сначала мы сформулируем теоремы, выражающие эти свойства, и разъясним их на графиках и примерах, а затем докажем их формально.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем, т. е. существует константа $K > 0$ такая, что выполняется неравенство*

$$|f(x)| \leqslant K \quad \forall x \in [a, b].$$

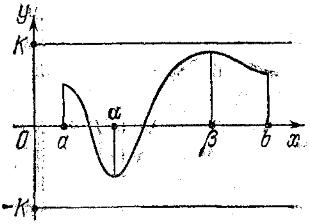

Рис. 25.

На рис. 25 изображен график Γ непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$. Очевидно, существует число $K > 0$ такое, что Γ находится ниже прямой $y = K$, но выше прямой $y = -K$. В этом и заключается теорема 1.

Заметим, что если функция непрерывна на интервале (a, b) или на полуинтервале $[a, b)$ или $(a, b]$, то она не обязательно ограничена на нем. Например, функция $1/x$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем.

Если эту функцию доопределить, положив $f(0) = 0$, то она будет *конечной* в любой точке отрезка $[0, 1]$, однако, не ограниченной на нем.

Теорема 2 (Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то существует ее минимум и максимум на $[a, b]$, т. е. существуют точки $\alpha, \beta \in [a, b]$ такие, что $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$ для всех $x \in [a, b]$. Иначе говоря,*

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(\alpha), \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta).$$

Непрерывная функция $y=f(x)$, изображенная на рис. 25, достигает своего минимума на $[a, b]$ в точке $x=\alpha$ и максимума в точке $x=\beta$. В данном случае обе точки α и β принадлежат к интервалу (a, b) $(\alpha, \beta \in (a, b))$. Непрерывная функция $y=f(x)$, изображенная на рис. 26, достигает минимума на отрезке $[a, b]$ на левом его конце и максимума — в некоторой внутренней точке β этого отрезка.

Замечание 1. По теореме 1 непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция ограничена на нем. Следовательно, существуют конечные точные нижняя и верхняя грани f на этом отрезке:

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leqslant \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Теорема 2 утверждает, что эти грани на $[a, b]$ достигаются, т. е. здесь inf и sup можно заменить соответственно на min и max (минимум и максимум).

Замечание 2. Функция $y=x$ непрерывна на интервале $(0, 1)$ и ограничена на нем; верхняя ее грань $\sup\limits_{x \in (0, 1)} x=1$ не достигается, т. е. нет такого $x_0 \in (0, 1)$, для которого эта функция равна 1. Таким образом, в теореме 2 условие непрерывности f *на замкнутом* (содержащем в себе оба его конца a и b) *отрезке* существенно.

Очевидно, что $\sup\limits_{x \geqslant 0} \operatorname{arctg} x=\pi/2$. Однако нет такого x на луче $x \geqslant 0$, для которого функция $\operatorname{arctg} x$ принимает значение $\pi/2$, и она не достигает максимума на $x \geqslant 0$.

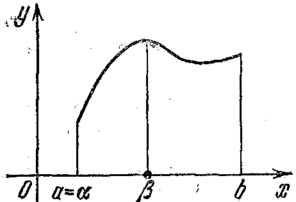

Рис. 26.

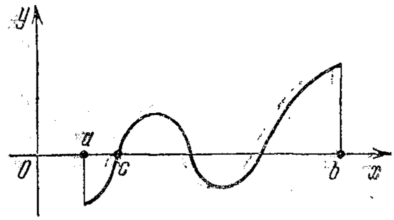

Рис. 27.

В данном случае условия теоремы не выполняются: область задания непрерывной функции $\operatorname{arctg} x$ неограничена.

Если функция f разрывна на $[a, b]$, то она не обязательно достигает своей точной верхней грани. Примером может служить функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1/2, \\ 0, & 1/2\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и числа $f(a)$ и $f(b)$ не равны нулю и имеют разные знаки, то на интервале (a, b) имеется по крайней мере одна точка c такая, что $f(c)=0$.*

Функция, график Γ которой изображен на рис. 27, удовлетворяет условиям теоремы 3. Она непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)<0$, $f(b)>0$. Из геометрических соображений очевидно, что график Γ должен пересечь ось x по крайней мере в одной точке $c\in(a, b)$. Это и утверждает теорема 3.

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$ $(A\neq B)$ и C — произвольное число, находящееся между числами A и B, то на интервале (a, b) найдется по крайней мере одна точка c, для которой $f(c)=C$.*

Это следствие можно сформулировать и так: *непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка $[a, b]$.*

Доказательство. Определим новую функцию $F(x)=f(x)-C$, где C — константа — число, находящееся между A и B. Так как f — непрерывная на $[a, b]$ функция, то и F — непрерывная на $[a, b]$ функция. При этом, очевидно, F принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков. Тогда по теореме 3 должна найтись на (a, b) такая точка c, что $F(c)=0$ или $f(c)-C=0$, т. е. $f(c)=C$. Это и требовалось доказать.

Следствие 2. *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее наименьшим и наибольшим значениями* (которые существуют по теореме 2).

Для доказательства достаточно применить следствие 1 к $[\alpha, \beta]$, где α, β — точки, в которых функция $f(x)$ достигает своих наименьших и наибольших значений.

Пример 1. Уравнение $x-\cos x=0$ имеет корень на интервале $(0, \pi)$.

В самом деле, функция $f(x)=x-\cos x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и на концах его принимает значения разных знаков: $f(0)=-1$, $f(\pi)=\pi+1$.

Ниже мы доказываем теоремы 1—3 формально.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что f не ограничена на $[a, b]$. Тогда для каждого натурального числа n найдется точка $x_n \in [a, b]$ такая, что

$$|f(x_n)| > n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена (a и b — конечные числа!) и из нее можно выделить последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу $\alpha \in [a, b]$ (см. следствие из теоремы 4 § 2.1). Но в точке α функция f непрерывна (если $\alpha = a$ ($\alpha = b$), то в этой точке f непрерывна справа (слева)), и потому

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha). \tag{2}$$

Свойство (2) противоречит свойству (1). Поэтому f может быть только ограниченной на $[a, b]$.

Доказательство теоремы 2. По предыдущей теореме непрерывная на $[a, b]$ функция ограничена, следовательно, она ограничена сверху некоторым числом K:

$$f(x) \leqslant K \quad (x \in [a, b]).$$

Но тогда существует точная верхняя грань f на $[a, b]$:

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M. \tag{3}$$

Число M обладает следующим свойством: для любого натурального числа n найдется на $[a, b]$ точка x_n такая, что

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{x_n\}$, как принадлежащая к $[a, b]$, ограничена, и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу β, которое заведомо принадлежит $[a, b]$. Но функция f непрерывна в точке β, и потому

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\beta).$$

С другой стороны, $M - \dfrac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Но так как $f(x_{n_k})$ может стремиться только к одному пределу, то $M = f(\beta)$. Верхняя грань (3), таким образом, достигается в точке β, т. е., как говорят, *функция f достигает в точке β своего максимума на отрезке* $[a, b]$. Мы доказали, что существует точка $\beta \in [a, b]$, для которой

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta).$$

Доказательство другой части теоремы о минимуме аналогично, но его можно свести к доказательству первой части теоремы, учитывая, что

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = -\max_{x \in [a, b]} \{-f(x)\}.$$

Доказательство теоремы 3. Обозначим отрезок $[a, b]$ через σ_0. Разделим σ_0 на две равные части. Если в середине σ_0 функция равна нулю, то теорема доказана; если этого нет, то одна из половинок σ_0, такова, что на концах ее наша функция принимает значения разных знаков. Обозначим именно эту половинку через σ_1 и разделим ее на две равные части. Может случиться, что в середине σ_1 наша функция равна нулю, и тогда теорема доказана. Если нет, то обозначим через σ_2 ту из половинок, на концах которой f принимает значения разных знаков. Рассуждая так по индукции, мы либо наткнемся на очередном этапе рассуждений на точку $c \in (a, b)$, для которой $f(c) = 0$, и тогда теорема доказана, либо получим последовательность (бесконечную) вложенных друг в друга отрезков $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \sigma_2 \supset \ldots$, на каждом из которых f имеет значения разных знаков. Тогда существует точка c, принадлежащая всем σ_n, следовательно, и $[a, b]$. Очевидно, $f(c) = 0$, потому что, если допустить, например, что $f(c) > 0$, то нашлась бы окрестность $U(c)$ точки c такая, что для всех x из $[a, b]$, принадлежащих $U(c)$, функция $f(c)$ была бы положительной, но этого не может быть, потому что при достаточно большом n отрезок $\sigma_n \subset U(c)$, а f не сохраняет знак на σ_n. Теорема доказана.

§ 3.6. Обратная непрерывная функция

Рассмотрим непрерывную строго возрастающую на отрезке $[a, b]$ функцию $y = f(x)$ (рис. 28). Пусть

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta.$$

График этой функции есть непрерывная кривая. Из его рассмотрения видно, что если x непрерывно возрастает от a до b, то y при этом тоже непрерывно возрастает от α до β, пробегая все значения на отрезке $[\alpha, \beta]$ по одному разу. Но тогда каждому значению $y \in [\alpha, \beta]$ соответствует единственное значение $x \in [a, b]$ такое, что $y = f(x)$. Этим определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция

$$x = g(y), \quad y \in [\alpha, \beta],$$

называемая *функцией, обратной* к функции $y = f(x)$.

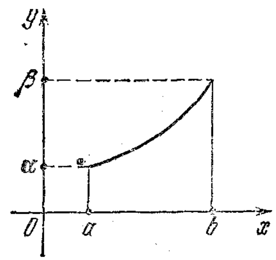

Рис. 28.

Очевидно, функция $x = g(y)$ строго возрастает на отрезке $[\alpha, \beta]$ и отображает этот отрезок на $[a, b]$; выполняются тождества

$$f[g(y)] = y \quad \forall y \in [\alpha, \beta],$$
$$g[f(x)] = x \quad \forall x \in [a, b].$$

График функции $x = g(y)$ можно получить, повернув на $180°$ рассматриваемую плоскость вокруг биссектрисы первого координатного угла системы x, y. Так как в результате поворота график остается непрерывным, то это показывает, что функция $x = g(y)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Таким образом, пользуясь чисто геометрическими соображениями, мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, строго возрастает на нем и $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.*

Тогда: 1) *образ отрезка $[a, b]$ при помощи f есть отрезок $[\alpha, \beta]$,* 2) *существует обратная к f функция $x = g(y)$, однозначная, строго возрастающая и непрерывная на $[\alpha, \beta]$.*

Формальное доказательство теоремы 1 будет основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть строго возрастающая функция $y = f(x)$ отображает отрезок $[a, b]$ на отрезок $[\alpha, \beta]$, т. е. $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$. Тогда f непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Зададим произвольную точку x_0, принадлежащую пока интервалу (a, b) $(a < x_0 < b)$. В силу того, что f строго возрастает, соответствующая точка $y_0 = f(x_0)$ будет принадлежать интервалу (α, β) $(\alpha < y_0 < \beta)$.

Зададим $\varepsilon > 0$, настолько малое, что $\alpha < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < \beta$. По условию найдутся точки x_1, $x_2 \in (a, b)$ $(x_1 < x_0 < x_2)$ такие, что $y_0 - \varepsilon = f(x_1)$, $y_0 + \varepsilon = f(x_2)$.

Интервал (x_1, x_2) можно рассматривать как окрестность точки x_0 $(x_0 \in (x_1, x_2))$.

Вследствие того, что функция f возрастает, при $x \in (x_1, x_2)$ будет $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$ или $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, т. е.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

и мы доказали непрерывность функции f в точке x_0.

Если $x_0 = a$ или $x_0 = b$, то аналогично доказываем одностороннюю непрерывность функции f.

Доказательство теоремы 1. Пусть $Y = f([a, b])$ есть образ $[a, b]$ при помощи f. Так как $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ и f возрастает, то $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ $\forall x \in [a, b]$, откуда следует, что

$$Y \subset [\alpha, \beta]. \tag{1}$$

С другой стороны, если y — произвольная точка отрезка $[\alpha, \beta]$, то она принадлежит к Y на основании теоремы 3 § 3.5 о промежуточном значении непрерывной функции, т. е.

$$[\alpha, \beta] \subset Y. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует утверждение 1):

$$Y = [\alpha, \beta].$$

Утверждение 2) теперь следует из леммы 1. В самом деле, так как f строго возрастает, то на $Y = [\alpha, \beta]$ существует обратная функция $g(y)$, строго возрастающая, и она отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$. Но тогда по лемме 1 функция $g(y)$ непрерывна. Теорема доказана.

Незначительно изменяя приведенные выше рассуждения, можно доказать следующий аналог теоремы 1.

Теорема 1'. *Пусть функция f непрерывна и строго возрастает на (a, b) (или на $[a, b)$, или $(a, b]$) и*

$$\alpha = \inf_{x \in (a, b)} f(x), \quad \beta = \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

Тогда образ интервала (a, b) (соответственно $[a, b)$, $(a, b]$) есть интервал (α, β) (соответственно $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$) и обратная к f функция $x = g(y)$ однозначна, строго возрастает и непрерывна на (α, β) ($[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$).

Замечание. Строго убывающая непрерывная на $[a, b]$ (на (a, b)) функция $f(x)$ имеет обратную строго убывающую непрерывную функцию на $[\beta, \alpha]$, где $\alpha = f(a)$,

$\beta=f(b)$. Это легко устанавливается, если рассмотреть функцию $-f(x)$ или же функцию $f(-x)$.

Если же непрерывная на $[a, b]$ функция $y=f(x)$ не является строго монотонной на $[a, b]$, то можно определить для нее обратную функцию, но эта последняя уже будет *многозначной* во всяком случае для некоторых y.

Пример. Функция

$$y=\sin x \quad (x\in(-\infty, \infty)),$$

непрерывна, но не монотонна. Множество ее значений y заполняет отрезок $[-1, 1]$. Каждому y из этого отрезка соответствует бесконечное число значений x, для которых $y=\sin x$.

Впрочем, например, на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ функция $y=\sin x$ непрерывна и строго возрастает и имеет обратную непрерывную функцию, которая, как мы знаем, обозначается так:

$$x=\arcsin y \quad (-1\leqslant y\leqslant 1).$$

§ 3.7. Равномерная непрерывность функции

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ (или интервале, полуинтервале). Тогда для каждой точки x_0 этого отрезка (интервала, полуинтервала) по заданному $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

как только

$$|x-x_0|<\delta, \quad x\in[a, b]$$

(или (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$).

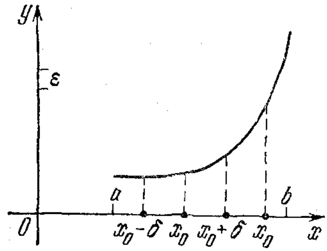

Рис. 29.

При изменении x_0 при постоянном ε число δ, вообще говоря, изменяется — оно зависит не только от ε, но и от x_0. Как видно из рис. 29, число δ, пригодное на участке с пологим графиком, может оказаться слишком большим для участка с круто поднимающимся графиком.

В связи с этим естественно выделить те непрерывные функции, для которых при данном $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$, пригодное сразу для всех x, принадлежащих тому множеству, где задана функция.

Начнем с определения.

Определение 1. *Функция f, определенная на множестве X, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что*

$$|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$$

для всех $x', x'' \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''|<\delta$.

Легко видеть, что если функция равномерно непрерывна на множестве X, то тем более она равномерно непрерывна на любом его подмножестве X' ($X' \subset X$). Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 1. *Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется пара точек $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x'-x''| < \delta$, для которых

$$|f(x')-f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

Зададим стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел δ_n $(n=1, 2, \ldots)$. Для каждого δ_n найдутся точки $x_n', x_n'' \in [a, b]$ такие, что

$$|x_n'-x_n''| < \delta_n, \text{ но } |f(x_n')-f(x_n'')| \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Так как точки последовательности $\{x_n'\}$ принадлежат к $[a, b]$, то эта последовательность ограничена и из нее по теореме Больцано — Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}'\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Так как $x_{n_k}'-x_{n_k}'' \to 0$, $k \to \infty$, то подпоследовательность $\{x_{n_k}''\}$ тоже сходится к точке x_0. По условию функция f непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, непрерывна в точке x_0. Конечно, если $x_0=a$ или $x_0=b$, то надо считать, что f непрерывна в x_0 справа или соответственно слева. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}') = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}'') = f(x_0).$$

После перехода к пределу в (1) при $k \to \infty$ получим

$$\varepsilon \leqslant \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')| = |f(x_0)-f(x_0)| = 0, \tag{2}$$

и мы пришли к противоречию: $\varepsilon \leqslant 0$.

Заметим, что в (2) мы воспользовались непрерывностью функции $|u|$ (см. § 3.3, пример 8). Теорема доказана.

Пример 1. Функция

$$y = \sin(1/x)$$

непрерывна на отрезке $[\delta, 1]$ $\forall \delta > 0$, поэтому на основании теоремы 1 она равномерно непрерывна на этом отрезке.

С другой стороны, на полуинтервале $(0, 1]$ эта функция хотя и непрерывна, но не является равномерно непрерывной. Это показывает, что требование в теореме 1, чтобы непрерывная функция была задана на отрезке, а не на интервале, существенно.

Убедимся в том, что наша функция не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$. Точки $x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), очевидно, принадлежат полуинтервалу $(0, 1]$, и для них

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\sin\frac{\pi(2k+3)}{2} - \sin\frac{\pi(2k+1)}{2}\right| = \\ = |(-1)^{k+1} - (-1)^k| = 2.$$

Если задать $\varepsilon = 1$, то при любом $\delta > 0$ найдется такое k, что

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{4}{\pi(2k+3)(2k+1)} < \delta,$$

между тем как

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Из сказанного следует, что нашу функцию нельзя продолжить на отрезок $[0, 1]$, доопределив ее в точке $x=0$ так, чтобы она стала непрерывной на $[0, 1]$, потому что тогда, согласно теореме 1, она была бы равномерно непрерывной на $[0, 1]$, а следовательно, и на $(0, 1]$, чего быть не может.

§ 3.8. Элементарные функции

Функции C (постоянная), x^n, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$ мы будем называть *простейшими элементарными функциями*.

Применяя к этим функциям арифметические действия или операции функции от функции (суперпозиции) в конечном числе, мы будем получать новые более сложные функции, которые называются *элементарными функциями*.

Например, $y=\ln(e^x+\sin^2 x+1)$ — элементарная функция.

Элементарные функции нам известны из школьной математики. Там уделялось большое внимание их свойствам, но определялись они не всегда строго, полагаясь на интуицию учащегося.

Нам будет полезно уделить некоторое внимание этим вопросам с точки зрения общих фактов математического анализа, которыми мы уже успели овладеть.

а) Постоянная функция C. Каждому действительному числу (точке) x она приводит в соответствие одно и то же число C. График ее есть прямая, параллельная оси x, отстоящая от этой оси на расстояние $|C|$ выше этой оси, если $C>0$, и ниже, если $C<0$. Это непрерывная функция на всей действительной оси (см. § 3.3, пример 1).

б) Степенная функция x^n (n — постоянная). При натуральном $n\in\mathbf{N}$ эта функция определена на всей действительной оси. Чтобы вычислить ее (теоретически!), разлагаем x в десятичную дробь $(x=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots)$ и перемножаем эту дробь саму на себя n раз, применяя каждый раз правило умножения десятичных дробей (см. § 1.6, (11)) и правило знаков.

Функция x^n непрерывна, потому что она есть произведение непрерывных функций ($y=x$), взятых в конечном числе. Она строго возрастает на $[0, \infty)$, что видно из соотношений

$$x_2^n-x_1^n=(x_2-x_1)(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+\ldots+x_1^{n-1})>0$$

при $x_1<x_2$. Кроме того, она стремится к $+\infty$ при $x\to+\infty$. В самом деле, если $x\geqslant 1$, то $x^n=x^{n-1}x\geqslant x$ $(n>1)$ и при $x\to\infty$, $x^n\to\infty$.

Итак функция $\varphi(x)=x^n$ при натуральном n непрерывна, строго возрастает на $[0, \infty)$ и для нее $\varphi(0)=0$, $\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\varphi(x)=+\infty$. Но тогда на основании теоремы 1′ § 3.6 функция $y=x^n$ отображает полуинтервал $X=[0, \infty)$ на полуинтервал $Y=[0, \infty)$ и существует обратная к ней однозначная непрерывная строго возрастающая функция. Эту функцию обозначают так:

$$x=y^{1/n}=\sqrt[n]{y}\quad (y\geqslant 0)$$

и называют *арифметическим значением корня n-й степени из y.*

Отметим, что при $y > 1$ $(n \geqslant 1)$

$$\sqrt[n]{y} > \sqrt[n]{1} = 1. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что *если a есть произвольное неотрицательное число $(0 \leqslant a < \infty)$, то для него на основании сказанного существует и притом единственное неотрицательное число $b = a^{1/n}$ (арифметическое значение корня n-й степени из a) такое, что $b^n = a$.*

Мы сейчас *доказали существование корня n-й степени из $a (a \geqslant 0)$.*

Этого утверждения в школьной математике не хватало. Там вводилось понятие корня n-й степени из a $(a \geqslant 0)$ и изучались свойства корней n-й степени, однако не доказывалось, что такие корни существуют—факт существования считался само собой разумеющимся.

Отметим, что если $n = 2k + 1$ — число нечетное $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то функция $y = x^n$ нечетная $((-x)^n = -x^n)$. Она непрерывна, очевидно, строго возрастает на $(-\infty, \infty)$ и обладает свойствами

$$\inf_{x \in (-\infty, \infty)} x^n = -\infty, \qquad \sup_{x \in (-\infty, \infty)} x^n = +\infty.$$

Поэтому на основании теоремы 1′ § 3.6 функция $y = x^{2k+1}$ отображает $(-\infty, \infty)$ на $(-\infty, \infty)$ и имеет на $(-\infty, \infty)$ обратную непрерывную строго возрастающую функцию

$$x = \sqrt[n]{y} \, (y \in (-\infty, \infty), \; n = 2k + 1).$$

Здесь выражение $\sqrt[n]{y}$ при $y > 0$ понимается как арифметическое значение корня n-й степени из y, т. е. как положительное число, n-я степень которого есть y. Если же $y < 0$, то

$$\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{|y|},$$

где в правой части корень понимается в смысле арифметического значения.

Для четного $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ $y = x^n$ есть четная непрерывная функция. Она отображает интервал $(-\infty, +\infty)$ на полуинтервал $[0, \infty)$. Но она не монотонна на $(-\infty, +\infty)$ и обратная к ней функция двузначна:

$$x = \pm \sqrt[n]{y} \quad (y \geqslant 0).$$

Значение $y=0$ единственное, для которого она однозначна.

На рис. 30 и 31 изображены графики некоторых функций x^n, $x^{1/n}$.

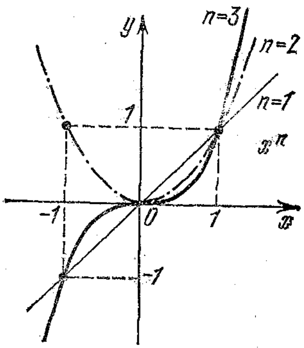

Рис. 30.

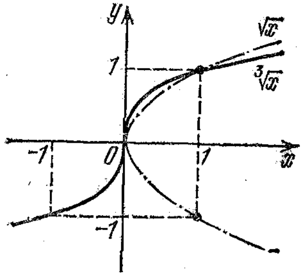

Рис. 31.

В школьной математике функция x^n определяется и для рациональных n. Пусть $p, q \in \mathbf{N}$. Полагают для $x \geqslant 0$

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

и доказывают, что

$$x^{p/q} = x^{sp/sq} = (\sqrt[q]{x})^p \quad (x \geqslant 0).$$

Полагают также

$$x^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}} \quad (x > 0)$$

и еще

$$x^0 = 1.$$

При этом доказывают для любого рационального n свойство, характерное для степенной функции:

$$(xy)^n = x^n y^n \quad (x,\ y > 0).$$

Отметим, что функция $y = x^{p/q}$ $(p,\ q \in \mathbf{N})$, как это нетрудно установить, непрерывна и строго возрастает на полуинтервале $[0, \infty)$ и отображает $[0, \infty)$ на $[0, \infty)$, поэтому она имеет обратную непрерывную строго возрастающую функцию, определяемую, очевидно, равенством

$$x = y^{q/p} \quad (0 \leqslant y < \infty).$$

Что же касается функции $y=x^{-p/q}$ $(p,\ q\in\mathbb{N})$, то она строго убывает и непрерывна на интервале $(0,\ \infty)$ и отображает $(0,\ \infty)$ на $(0,\ \infty)$. Поэтому она имеет на $(0,\ \infty)$ обратную строго убывающую непрерывную функцию, определяемую равенством

$$x=y^{-q/p}\quad (y>0).$$

Очевидно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-p/q}=+\infty,\quad \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} y^{-q/p}=+\infty.$$

Степенная функция x^n может быть определена (для $x>0$, а при $n\geqslant 0$ и для $x=0$) также и для иррациональных n, но это лучше сделать при помощи показательной функции a^x (см. ниже в)).

Отметим, что нас интересовали только действительные корни уравнения $y=x^n$. Но если бы мы искали комплексные корни, то для каждого $y\neq 0$ нашли бы n различных корней (см. ниже § 5.3).

Пример 1. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \tag{2}$$

В самом деле, на основании формулы бинома Ньютона при $\lambda>0$

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2+\ldots>1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

Если в этом неравенстве считать $\lambda=\sqrt[n]{n}-1$ $(>0$ при $n\geqslant 2$, см. (1)), то получим

$$n>1+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

или

$$\frac{2}{n}>(\sqrt[n]{n}-1)^2>0\quad (n\geqslant 2).$$

Извлекая квадратный корень (в смысле арифметического значения!), в силу строгой монотонности функции $\sqrt{x}$ получим

$$\sqrt{2/n}>\sqrt[n]{n}-1>0$$

или

$$\sqrt{2/n}+1>\sqrt[n]{n}>1\quad (n\geqslant 2). \tag{3}$$

Наконец, пользуясь непрерывностью функции $\sqrt{x}$ в точке $x=0$, после перехода к пределу при $n\to\infty$ из (3) получим равенство (2) (см. теорему 5 § 2.1).

в) Показательная функция a^x $(a>0,\ a\neq 1)$. В дальнейшем будем рациональные числа обозначать греческими буквами α, β, γ, ... Пусть пока $a>1$.

Что такое a^x при x рациональном нам известно из школьной математики (см. еще б)).

Нам известно также из школьного курса математики, что:

1_1) $a^\alpha>0$,
2_1) $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$,
3_1) $a^\alpha<a^\beta$ $(\alpha<\beta,\ a>1)$,
4_1) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

Добавим еще

5_1) $a^{\alpha_n}\to+\infty$, $\alpha_n\to+\infty$, $a>1$.

Свойство 5_1) мы сейчас докажем. Запишем a в виде $a=1+\lambda$ $(\lambda>0\ !)$. Тогда

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\ldots>1+n\lambda.$$

Правая часть этого неравенства стремится к бесконечности при $n\to\infty$, следовательно, и левая. Далее, считая, что $[\alpha_n]$ есть целая часть α_n, будем иметь

$$a^{\alpha_n}\geqslant a^{[\alpha_n]},$$

и если $\alpha_n\to+\infty$, то $[\alpha_n]\to+\infty$, следовательно, $a^{[\alpha_n]}\to+\infty$. Но тогда $a^{\alpha_n}\to+\infty$.

Пусть x — произвольное рациональное число. Докажем, что *число a^x можно определить как точную верхнюю грань*

$$\sup_{\alpha<x}a^\alpha=a^x \tag{4}$$

чисел a^α, распространенную на все рациональные числа $\alpha<x$.

В самом деле, на основании 3_1)

$$a^\alpha<a^x\quad\forall\alpha<x, \tag{5}$$

т. е. выполняется первое свойство точной верхней грани. С другой стороны, построим какую-либо строго возрастающую последовательность рациональных чисел α_n, стремящуюся к x $(\alpha_n\to x)$. Для нее $a^{\alpha_n}\to a^x$, $n\to\infty$. Это свойство доказывается ниже (см. (8)). Поэтому для любого

$\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что

$$a^x - \varepsilon < a^{\alpha_n} < a^x, \tag{6}$$

т. е. выполнено второе свойство точной верхней грани. Из (5) и (6) следует (4).

Пусть теперь x — произвольное иррациональное число, и пусть m — натуральное число, большее x ($m > x$). Имеет место очевидное неравенство

$$\underset{\alpha < x}{a^\alpha} < a^m,$$

т. е. множество чисел a^α, распространенное на рациональные числа $\alpha < x$, ограничено. Но тогда существует точная верхняя грань этого множества

$$\sup_{\alpha < x} a^\alpha.$$

Это есть вполне определенное число, которое мы обозначим через a^x:

$$a^x = \sup_{\alpha < x} a^\alpha. \tag{7}$$

Этим функция a^x определена для всех действительных x ($x \in (-\infty, \infty)$). Она называется *показательной функцией*.

Итак *функция* a^x определяется как точная верхняя грань чисел a^α, *распространенная на все рациональные* $\alpha < x$.

Если x — рациональное, то это определение совпадает со старым (дает одно и то же число), при иррациональных же x оно дает новые числа a^x.

Можно доказать, что функция a^x, определенная при помощи равенства (7), обладает следующими важными свойствами:

1) $a^x > 0$,
2) $a^x a^y = a^{x+y}$,
3) $a^x < a^y$ ($x < y$, $a > 1$),
4) $a^x \to 1$, $x \to 0$,
5) $a^x \to \infty$, $x \to \infty$ ($a > 1$),
6) $a^x \to 0$, $x \to -\infty$ ($a > 1$),
7) $a^{xy} = (a^x)^y$.

Отметим, что из свойств 2) и 4) следует непрерывность функции a^x для любого значения $x_0 \in (-\infty, \infty)$:

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| \to 0 \tag{8}$$

при $x - x_0 \to 0$.

В дальнейшем будем считать, что $a > 1$.

Доказательство 1). Для любого x существует $\alpha_0 < x$, и потому

$$0 < a^{\alpha_0} < \sup_{\alpha < x} a^{\alpha} = a^x, \quad \text{т. е.} \quad 0 < a^x.$$

Доказательство 2). Пусть $\alpha < x$ и $\beta < y$; тогда $\alpha+\beta < x+y$. С другой стороны, пусть γ есть произвольное рациональное число, удовлетворяющее неравенству

$$\gamma < x+y. \tag{9}$$

Покажем, что γ можно записать в виде

$$\gamma = \alpha+\beta, \quad \text{где} \quad \alpha < x, \ \beta < y. \tag{10}$$

Из (9) следует, что

$$\gamma - y < x.$$

Подберем рациональное α, для которого

$$\gamma - y < \alpha < x, \tag{11}$$

и положим

$$\beta = \gamma - \alpha. \tag{12}$$

Тогда из первого неравенства (11) следует, что

$$\beta < y. \tag{13}$$

Таким образом, множество всех сумм $\alpha+\beta$, где $\alpha < x$, $\beta < y$, равно множеству всех $\gamma < x+y$:

$$\{\alpha+\beta\}_{\substack{\alpha<x\\ \beta<y}} = \{\gamma\}_{\gamma<x+y}.$$

Поэтому

$$a^{x+y} = \sup_{\gamma < x+y} a^{\gamma} = \sup_{\substack{\alpha<x\\ \beta<y}} a^{\alpha+\beta} = \sup_{\substack{\alpha<x\\ \beta<y}} (a^{\alpha}a^{\beta}) = \sup_{\alpha<x} a^{\alpha} \sup_{\beta<y} a^{\beta} = a^x a^y$$

(см. § 2.8, задача 2).

Доказательство 3). Пусть $x < y$ и β_1 и β_2 — какие-либо рациональные числа, для которых $x < \beta_1 < \beta_2 < y$. Тогда

$$a^x = \sup_{\alpha<x} a^{\alpha} \leqslant \sup_{\alpha<\beta_1} a^{\alpha} = a^{\beta_1} < a^{\beta_2} \leqslant \sup_{\beta<y} a^{\beta} = a^y,$$

и мы доказали, что

$$a^x < a^y.$$

Доказательство 4). Для натурального $n > a$ $(a > 1!)$

$$1 < a^{1/n} < n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(см. пример 1 п. б)) и мы доказали пока, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1. \tag{14}$$

Зададим теперь произвольную последовательность положительных чисел $x_n < 1$, стремящуюся к нулю ($x_n \to 0$, $x_n > 0$). Пусть $k_n = [1/x_n]$ — целая часть $1/x_n$. Тогда $0 < x_n \leqslant 1/k_n$ и

$$1 = a^0 < a^{x_n} \leqslant a^{1/k_n}.$$

Поэтому в силу (14)

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n}=1.$$

В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$, где $x_n>0$, этим доказано, что существует правый предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a^x=1; \tag{15}$$

но тогда существует и левый предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} a^x=\lim_{\substack{-x\to 0\\ -x>0}}\frac{1}{a^{-x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} a^u}=\frac{1}{1}=1. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ (см. § 3.2, (6), (7)). Этим свойство 4) доказано полностью.

Доказательство 5). Зададим как угодно большое число $M>0$. Существует рациональное число α такое, что $a^\alpha>M$, поэтому

$$M<a^\alpha<a^x \quad \forall x>\alpha.$$

Следовательно, $a^x\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

Доказательство 6).

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=\lim_{-x\to+\infty}\frac{1}{a^{-x}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to+\infty} a^u}=0.$$

Доказательство 7). Отметим, что при натуральном m, в силу 2),

$$a^{xm}=\underbrace{a^x\ldots a^x}_{m}=(a^x)^m;\quad \left(a^{\frac{x}{m}}\right)^m=\underbrace{a^{\frac{x}{m}}\ldots a^{\frac{x}{m}}}_{m}=a^{\frac{x}{m}\cdot m}=a^x;$$

$$a^{\frac{x}{m}}=(a^x)^{\frac{1}{m}}.$$

Для рационального числа $\frac{p}{q}>0$

$$(a^x)^{\frac{p}{q}}=(a^x)^{\frac{1}{q}\cdot p}=\left(a^{\frac{x}{q}}\right)^p=a^{x\frac{p}{q}}.$$

Далее, если y — произвольное положительное число и $\alpha_n\to y$, где α_n — рациональные числа, то в силу непрерывности показательной функции

$$a^{xy}=\lim_{n\to\infty} a^{x\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{\alpha_n}=(a^x)^y,$$

и мы доказали 7) для $y>0$.

Если $y<0$, то $(y=-|y|)$

$$a^{xy}=a^{-x|y|}=\frac{1}{a^{x|y|}}=\frac{1}{(a^x)^{|y|}}=(a^x)^{-|y|}=(a^x)^y.$$

Если $0 < a < 1$, то полагаем

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}.$$

Свойства 1), 2), 4) при этом сохраняются. Свойство 3) имеет вид $a^x > a^y$ $(x < y)$.

Свойство 5): $a^x \to 0$, $x \to +\infty$.

Свойство же 6) имеет вид $a^x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

г) Функция $\log_a x$. Будем считать $a > 1$. Так как функция $y = a^x$ непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, \infty)$ и отображает интервал $(-\infty, \infty)$ на интервал $(0, \infty)$, то существует обратная к ней функция, непрерывная и строго возрастающая на $(0, \infty)$. Ее называют *логарифмом y при основании a* и обозначают символом

$$x = \log_a y, \quad y \in (0, \infty).$$

Из сказанного следует, что (мы заменяем y на x)

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty.$$

При $a < 1$ рассуждения аналогичны. Функция a^x также отображает действительную ось $(-\infty, \infty)$ на полуось $(0, \infty)$, но строго убывая. Обратная функция $\log_a x$, определенная на $(0, \infty)$, также будет строго убывать, и теперь

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty.$$

Имеют место тождества (см. § 3.6)

$$a^{\log_a x} = x \quad (0 < x < +\infty), \qquad \log_a a^x = x \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{17}$$

$(a \neq 1)$. Отсюда на основании свойств функции a^x при $x, y > 0$ имеем

$$a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

и

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Если в этом равенстве заменить x на x/y, то получим

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x/y).$$

Далее (см. 7))

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x} \quad (x > 0),$$

поэтому

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (a \neq 1,\ x > 0). \tag{18}$$

Наконец, отметим, что для положительных не равных 1 чисел a и b имеет место

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

и, следовательно,

$$\log_a b \log_b a = 1.$$

Логарифм числа a при основании e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается так: $\log_e a = \ln a$.

д) Вернемся к степенной функции

$$y = x^n \quad (0 < x < \infty).$$

После изложенного выше мы можем сказать, что эта функция имеет смысл не только для рациональных n, но и для иррациональных. Ее можно записать (см. (17) и (18)) так:

$$x^n = e^{n \ln x}, \tag{19}$$

откуда видно, что она непрерывна, как суперпозиция непрерывных функций.

При $n > 0$ она строго возрастает и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty.$$

При $n > 0$ естественно считать, что $0^n = 0$, тогда функция делается непрерывной справа в точке $x = 0$.

При $n < 0$ функция x^n непрерывна и строго убывает на положительной полуоси и обладает свойствами

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = 0.$$

Из формулы (19) следует характерное свойство степенной функции

$$(xy)^n = e^{n \ln (xy)} = e^{n \ln x} e^{n \ln y} = x^n y^n$$

$(x,\ y > 0)$.

е) Функция $y = u(x)^{v(x)}$. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ заданы в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой этой точки, $u(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to a} u(x) = A > 0$,

$\lim\limits_{x\to a} v(x) = B$ (A и B — конечные числа). Тогда

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = A^B. \tag{20}$$

В самом деле (см. (17), (18)),

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to a} v(x) \lim\limits_{x\to a} \ln u(x)} = e^{B\ln A} = A^B.$$

Во втором равенстве этой цепи использована непрерывность функции e^z, а в четвертом — непрерывность функции $\ln z$.

Если $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке $x=a$ и $u(a)>0$, то в некоторой окрестности этой точки $u(x)>0$ (см. § 3.3, теорема 4) и $A=u(a)$, $B=v(a)$. Поэтому в силу (20)

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u(a)^{v(a)}.$$

Отметим интересные случаи, не предусмотренные равенством (20), когда (при $x\to a$, $u>0$) $u\to+\infty$, $v\to 0$; $v\to\infty$, $u\to 1$; $v\to 0$, $u\to 0$.

В этих случаях не действует теорема о пределе $v\ln u$. Заранее, не имея более точной информации о характере стремления u и v к указанным пределам, невозможно дать формулу для $\lim\limits_{x\to a} u^v$. Эти случаи дают для выражения u^v в окрестности точки a неопределенности вида ∞^0, 1^∞, 0^0.

ж) Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др. известны читателю из курса тригонометрии. Они определяются там из геометрических соображений. Мы будем тоже базироваться на этих определениях.

Можно было бы дать чисто аналитическое определение тригонометрических функций, но мы этого делать не будем.

Отметим, что функция $y=\sin x$ непрерывна (см. § 3.3, пример 3) и строго возрастает на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, отображая этот отрезок на отрезок $[-1, 1]$. Но тогда она имеет обратную однозначную непрерывную функцию

$$x = \arcsin y \quad (y\in[-1, 1]).$$

Однако функция $y=\sin x$, рассматриваемая на всей оси $(-\infty, \infty)$, имеет многозначную, даже бесконечнозначную, обратную функцию $\operatorname{Arcsin} y$, все значения которой вычисляются по формуле

$$x = \operatorname{Arcsin} y = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k=0, \pm1, \pm2, \ldots), \tag{21}$$

т. е. каждому $y \in [-1, 1]$ соответствует множество e_y значений x, определяемых формулой (21).

Подобным образом для функций

$$y = \cos x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi),$$
$$y = \operatorname{tg} x \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$$

обратными будут функции

$$x = \arccos y \quad (y \in [-1, 1]),$$
$$x = \operatorname{arctg} y \quad (y \in (-\infty, \infty)),$$

а для этих же функций, рассматриваемых на действительной оси, обратные функции имеют соответственно вид

$$x = \operatorname{Arccos} y = \pm \arccos y + 2k\pi,$$
$$x = \operatorname{Arctg} y = \operatorname{arctg} y + k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

з) Гиперболические функции. Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическим синусом, косинусом, тангенсом* и *котангенсом*. Начертим их графики

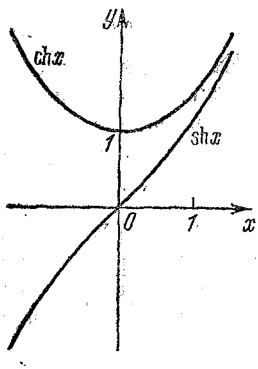

Рис. 32.

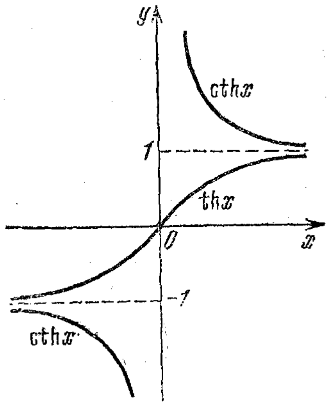

Рис. 33.

(рис. 32 и 33). Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ определены на $(-\infty, \infty)$, а $\operatorname{cth} x$ — на этом же интервале, за исключением точки $x = 0$.

Легко проверить, что для этих функций имеют место формулы, подобные формулам обычной тригонометрии (но не всегда совпадающие). Например,

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

Полагая в последнем равенстве $y=-x$, получим

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

Отметим, что все рассмотренные здесь функции непрерывны в своих областях определения. Для $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{th}x$ существуют обратные функции *ареасинус гиперболический* $x=\operatorname{Arsh}y$ и *ареатангенс гиперболический* $x=\operatorname{Arth}y$, которые однозначны. Обратная функция для $\operatorname{ch}x$ при $x\geqslant 0$ также однозначна.

§ 3.9. Замечательные пределы

Теорема 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. Так как функция $y=\sin x$ является непрерывной, то $\sin x\to\sin 0=0$ при $x\to 0$. Поэтому выражение $\frac{\sin x}{x}$ представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Раскроем эту неопределенность. Из определения тригонометрических функций и геометрических соображений имеем (рис. 34)

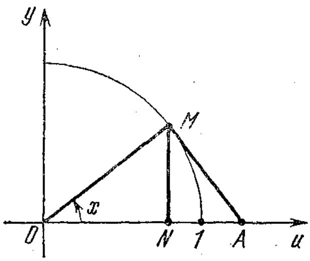

Рис. 34.

$$0<\sin x<x<\operatorname{tg}x$$

при $0<x<\pi/2$ ($MN=\sin x$, $AM\perp OM$, $AM=\operatorname{tg}x$, $OM=1$. Сравните площади треугольника OMN, сектора $OM1$ и треугольника OMA). Отсюда, деля на $\sin x>0$, получаем

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\text{или}\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x. \qquad (1)$$

Неравенства (1) верны и для $-\pi/2<x<0$, так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные. Далее функция $\cos x$ непрерывна, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1,$$

и, следовательно, переходя к пределу в (1), в силу теоремы 4 § 3.2 получим, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Теорема 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2}$$

Доказательство. В силу определения предела функции мы должны показать, что

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e\quad \forall x_n\to\infty. \tag{3}$$

Если $x_n=n$ — натуральное, то это уже доказано. Чтобы доказать (2), достаточно убедиться в том, что (2) верно в двух случаях: когда $x_n\to+\infty$ и когда $x_n\to-\infty$, пробегая не обязательно целые значения (см. замечание в конце § 3.2).

Пусть x_n — произвольная переменная, стремящаяся к $+\infty$ ($x_n\to+\infty$), и пусть $[x_n]=k_n$ — целая часть числа x_n. Тогда $k_n\leqslant x_n<k_n+1\leqslant x_n+1<k_n+2$ и

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}<\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+2}<e\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^2.$$

При $x_n\to+\infty$ $[x_n]=k_n\to+\infty$, откуда первый и последний члены цепочки неравенств стремятся к e. Поэтому

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1}\to e,$$

и так как при этом $1+\frac{1}{x_n}\to 1$, то мы доказали (3) для $x_n\to+\infty$.

Если теперь $x_n \to -\infty$, то $x'_n = -x_n \to +\infty$ и

$$\lim_{x_n \to -\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{x'_n \to +\infty}\left(1-\frac{1}{x'_n}\right)^{-x'_n} = \lim_{x'_n \to +\infty}\left(\frac{x'_n}{x'_n-1}\right)^{x'_n} =$$

$$= \lim_{x'_n \to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n-1}\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)\right] = e,$$

т. е. (2) доказано.

Пример 2.

$$\lim_{u \to 0}(1+u)^{1/u} = e.$$

Получается из (2) заменой $1/x = u$.

Пример 3.

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}, \quad \lim_{u \to 0}(1+\alpha u)^{1/u} = e^{\alpha} \quad \forall\alpha.$$

При $\alpha = 0$ это выражение сводится к пределу $\lim\limits_{x \to \infty} 1^x = 1 = e^0$, потому что по определению считается, что $1^x = 1$.

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Если $x \to \infty$, то $\frac{x}{\alpha} \to \infty$ и

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x/\alpha}\right]^{\alpha} = u^{\alpha} \underset{u \to e}{\longrightarrow} e^{\alpha}.$$

Надо учесть, что степенная функция u^{α} непрерывна в точке $u = e$ (см. § 3.8, д)).

Пример 4.

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Так как $\ln u$ есть непрерывная функция на $(0, \infty)$, то (см. пример 2)

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Пример 5.

$$\lim_{x \to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a > 0), \quad \lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

В самом деле, положим $a^x - 1 = u$. В силу непрерывности показательной функции $u \to 0$ при $x \to 0$. Далее, $x\ln a = \ln(1+u)$, поэтому (см. пример 4)

$$\lim_{x \to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{u \to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\ln a = \ln a \cdot \lim_{u \to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = \ln a.$$

§ 3.10. Порядок переменной. Эквивалентность

Будем рассматривать две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданные в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Точка a может быть конечная или бесконечная ($+\infty$, $-\infty$, или ∞). Будем считать еще, что $\psi(x) \neq 0$ на $U(a)$. Если

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0, \tag{1}$$

то будем этот факт записывать так:

$$\varphi(x)=o(\psi(x)), \quad x\to a, \tag{1'}$$

и говорить, что $\varphi(x)$ *есть о-малое от* $\psi(x)$ *при* $x\to a$.

Например:

$$\begin{array}{ll}
x^2=o(x), & x\to 0; \\
x^n=o(x^m), & x\to 0, \ \text{если } m<n; \\
x^n=o(x^m), & x\to\infty, \ \text{если } m>n; \\
(x-a)^4=o((x-a)^3), & x\to a; \\
1-\cos x=o(x), & x\to 0, \ \text{потому что } \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0.
\end{array}$$

Выражение $o(1)$, $x\to a$, обозначает бесконечно малую при $x\to a$, т. е. некоторую функцию $\varphi(x)$, которая стремится к нулю при $x\to a$ ($\varphi(x)\to 0$, $x\to a$). Например, $\varphi(x)=\frac{1}{\ln x}=o(1)$, $x\to+\infty$.

Свойство (1), очевидно, выражает тот факт, что функцию $\varphi(x)$ можно записать в виде $\varphi(x)=\varepsilon(x)\psi(x)$, где $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to a$.

Если функции φ и ψ, участвующие в соотношении (1) (или, что все равно, в (1')), суть бесконечно малые при $x\to a$, то говорят еще, употребляя более старинную терминологию, что $\varphi(x)$ *при* $x\to a$ *есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к* (бесконечно малой) $\psi(x)$. Если же φ и ψ в (1) бесконечно большие при $x\to a$, то говорят, что $\varphi(x)$ при $x\to a$ *есть бесконечно большая более низкого порядка, чем* $\psi(x)$, или еще что $\psi(x)$ *есть бесконечно большая более высокого порядка, чем* $\varphi(x)$.

Будем еще писать

$$\varphi(x)\approx\psi(x), \quad x\to a \tag{2}$$

и называть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ *эквивалентными* (*асимптотически равными*) *при* $x \to a$, если выполняется свойство

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1. \tag{2'}$$

Например,

$$\sin x \approx x, \quad x \to 0, \tag{3}$$

или еще (см. примеры 1, 4, 5 § 3.9)

$$1 - \cos x \approx x^2/2, \quad x \to 0, \tag{4}$$

$$\ln(1 + x) \approx x, \quad x \to 0, \tag{5}$$

$$e^x - 1 \approx x, \quad x \to 0, \tag{6}$$

$$a^x - 1 \approx x \ln a, \quad x \to 0. \tag{7}$$

Отметим, что если

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \neq 0,$$

то это эквивалентно факту

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{A} = 1,$$

что мы условились обозначать также так:

$$f(x) \approx A, \quad x \to a \quad (A \neq 0). \tag{8}$$

Терминология, которую мы здесь ввели, нужна для того чтобы упрощать вычисления и сокращать записи формул. Важно при этом усвоить несколько простых свойств асимптотически равных (эквивалентных) функций, которые выражены в теоремах ниже.

Теорема 1. *Если*

$$\varphi(x) \approx \psi(x), \quad x \to a, \tag{9}$$

то

$$\psi(x) \approx \varphi(x), \quad x \to a. \tag{10}$$

Доказательство. Дело в том, что если $\psi(x) \neq 0$ на $U(a)$ и выполняется (9), то, очевидно, и $\varphi(x) \neq 0$, быть может, на несколько уменьшенной окрестности. Но тогда

$$\lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Теорема 2. *Для выполнения свойства* (9) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(x)=\psi(x)+o(\psi(x)), \quad x\to a. \tag{11}$$

Равенство (11) надо читать следующим образом: слагаемое, которое добавляется к $\psi(x)$, чтобы получить $\varphi(x)$, обладает следующим свойством: если разделить его на $\psi(x)$, то полученное частное будет стремиться к нулю, если устремить x к a.

Доказательство. Пусть имеет место (9). Тогда

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1+\varepsilon(x), \quad \text{где } \varepsilon(x)\to 0 \text{ при } x\to a.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)=\psi(x)+\varepsilon(x)\psi(x)=\psi(x)+o(\psi(x)), \quad x\to a,$$

и мы доказали (11).

Обратно, если верно (11), то

$$\varphi(x)=\psi(x)+o(\psi(x))=\psi(x)+\varepsilon(x)\psi(x),$$

где $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to a$. Поэтому

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1+\varepsilon(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}1,$$

и мы получили (9).

Теорема 3. *Если*

$$\psi(x)\approx\psi_1(x), \quad x\to a,$$

то

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi(x)]=\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi_1(x)], \tag{12}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}. \tag{13}$$

Эти равенства надо понимать в том смысле, что если существует в них предел справа, то существует предел и слева, и они равны, и обратно.

Отсюда следует, что если какой-либо из этих пределов не существует, то не существует и второй.

Доказательство. Приведем только одно из этих рассуждений. Пусть существует предел справа в (12).

Тогда

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi(x)]=\lim_{x\to a}\left[\varphi(x)\psi_1(x)\frac{\psi(x)}{\psi_1(x)}\right]=$$
$$=\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi_1(x)]\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\psi_1(x)}=\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi_1(x)]\cdot 1=$$
$$=\lim_{x\to a}[\varphi(x)\psi_1(x)].$$

Пример 1. $\operatorname{tg} x\approx x,\ x\to 0$, потому что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{0}{1}=0.$$

Определение. *Если для функции $\varphi(x)$ можно подобрать числа A и m, где $A\neq 0$, такие, что*

$$\varphi(x)\approx A(x-a)^m,\quad x\to a,$$

то говорят, что функция $A(x-a)^m$ есть главный степенной член функции $\varphi(x)$ в окрестности точки a.

Правые части соотношений (3)—(7) суть, очевидно, главные степенные члены левых частей при $x\to 0$.

Будем говорить, что f на множестве E имеет *порядок* φ или еще f есть *O-большое от* φ на E и при этом будем писать

$$f(x)=O(\varphi(x)) \text{ на } E, \tag{14}$$

если

$$|f(x)|\leqslant C|\varphi(x)|\quad \forall x\in E,$$

где C — не зависящая от x положительная константа.

В частности, равенство

$$f(x)=O(1) \text{ на } E$$

обозначает тот факт, что f ограничена на E.

Примеры:

1) $\sin x=O(1)$, $\sin x=O(x)$ на $(-\infty,\ \infty)$;
2) $x=O(x^2)$ на $[1,\ \infty)$;
3) $x^2=O(x)$ на $[0,\ 1]$.

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 4.1. Производная

Понятие производной — важнейшее понятие математического анализа наряду с понятием интеграла.

Производной от функции f в точке x называется предел отношения ее приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю.

Производную принято обозначать так:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Но широко употребляются и другие обозначения: y', $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$. Удобство того или иного из них читатель впоследствии оценит сам.

При фиксированном x величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть функция от Δx:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

Для существования производной от f в точке x необходимо, чтобы функция f была определена в некоторой окрестности точки x, в том числе в самой точке x. Тогда функция $\psi(\Delta x)$ определена для достаточно малых не равных нулю Δx, т. е. для Δx, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\Delta x| < \delta$, где δ достаточно мало.

Конечно, не для всякой функции f, определенной в окрестности точки x, существует предел (1). Обычно, когда говорят, что функция f имеет в точке x производную $f'(x)$, подразумевают, что она конечна, т. е. предел

(1) конечный. Однако может случиться, что существует бесконечный предел (1), равный $+\infty$, $-\infty$, или ∞. В этих случаях полезно говорить, что функция f имеет в точке x *бесконечную производную* (равную $+\infty$, $-\infty$, или ∞).

Если в формуле (1) предполагается, что $\Delta x \to 0$, принимая только положительные значения ($\Delta x > 0$), то соответствующий предел (если он существует) называется *правой производной от f в точке x*. Его можно обозначить так: $f'_{\text{пр}}(x)$.

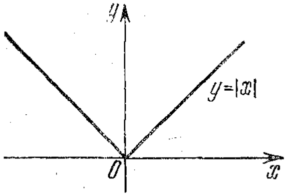

Рис. 35.

Аналогично предел (1), когда $\Delta x \to 0$, пробегая отрицательные значения ($\Delta x < 0$), называется *левой производной от f в x* ($f'_{\text{л}}(x)$).

Конечно, для вычисления $f'_{\text{пр}}(x)$ (соответственно $f'_{\text{л}}(x)$) необходимо только, чтобы функция f была задана в точке x и справа от нее в некоторой ее окрестности (соответственно в x и слева от x).

Типичным является случай, когда f задана на отрезке $[a, b]$ и имеет во всех внутренних точках этого отрезка, т. е. в точках интервала (a, b), производную, в точке же a имеет правую производную, а в точке b — левую. В таких случаях говорят, что *функция f имеет производную на отрезке* $[a, b]$, не оговаривая, что на самом деле в точке a она имеет только правую производную, а в точке b — только левую.

Нетрудно видеть, что если функция f имеет правую и левую производные в точке x и они равны, то f имеет *производную* в x:

$$f'_{\text{пр}}(x) = f'_{\text{л}}(x) = f'(x).$$

Но если правая и левая производные в x существуют и не равны между собой ($f'_{\text{пр}}(x) \neq f'_{\text{л}}(x)$), то *производная в x не существует*.

Пример. Рассмотрим функцию $y = |x|$ (рис. 35). Для нее

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Если $x > 0$, то $x + \Delta x > 0$ для достаточно малых Δx и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (x > 0).$$

Если $x<0$, то $x+\Delta x<0$ для достаточно малых Δx и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1 \quad (x<0).$$

Таким образом,

$$|x|'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\ \ 1, \text{ если } x>0,\\ -1, \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Пусть теперь $x=0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\operatorname{sign}\Delta x\frac{\Delta x}{\Delta x}=\operatorname{sign}\Delta x=\begin{cases}\ \ 1, \text{ если } \Delta x>0,\\ -1, \text{ если } \Delta x<0.\end{cases}$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1, \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

Таким образом, функция $|x|$ имеет в точке $x=0$ правую производную, равную 1, и левую — равную -1, что показывает, что в точке $x=0$ функция $|x|$ *производной* не имеет.

Мы знаем (см. § 3.3, пример 8), что $|x|$ есть непрерывная функция для всех значений x, в том числе и в точке $x=0$, поэтому она может служить примером непрерывной всюду функции, не имеющей в некоторой точке производной. В математике известны примеры функций, непрерывных на всей действительной оси и не имеющих в любой точке оси производной.

С другой стороны, *всякая функция, имеющая производную (конечную!) в точке x, непрерывна в этой точке.*

В самом деле, пусть предел (1) существует в точке x и конечен. Этот факт можно записать следующим образом:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x), \tag{2}$$

где $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е. $\varepsilon(\Delta x)$ есть бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Из (2) следует:

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\Delta x\cdot\varepsilon(\Delta x).$$

Переходя в этом равенстве к пределу, когда $\Delta x\to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

что показывает, что f непрерывна в точке x.

Отметим некоторые важные приложения производной.

Мгновенная скорость. Пусть функция $s=f(t)$ выражает закон движения точки на прямой, которая рассматривается как координатная ось s. Здесь s — координата движущейся точки в момент времени t. Путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$, равен

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t).$$

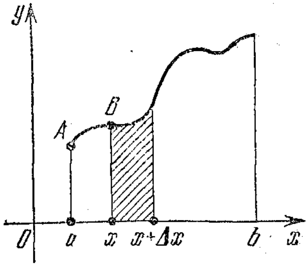

Рис. 36.

Средняя ее скорость в этом промежутке времени равна

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Истинную же (*мгновенную*) *скорость* в момент времени t естественно определить как предел

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=f'(t).$$

Сила тока. Пусть $Q=f(t)$ есть количество электричества, проходящее через сечение провода за время t. Тогда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

есть средняя сила тока за промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$. А предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=Q'=I$$

есть сила тока в момент времени t.

Плотность распределения массы. Пусть (рис. 36) на отрезке $[a,\ b]$ оси x распределена масса вообще неравномерно, так что количество массы, нагруженной на отрезок $[a,\ x]$, равно

$$M=F(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Это количество пропорционально площади фигуры $aABx$. Таким образом, M есть функция от x $(M=F(x))$. Количество массы, приходящееся на отрезок $[x,\ x+\Delta x]$, очевидно, равно

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Средняя ее плотность на этом отрезке равна $\frac{\Delta F}{\Delta x}$, а предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x) = \mu$$

есть *истинная плотность распределения массы в точке* x.

§ 4.2. Геометрический смысл производной

Пусть на интервале (a, b) задана непрерывная функция $y = f(x)$. Ее график называется *непрерывной кривой*. Обозначим его через Γ. Зададим на Γ точку $A = (x, f(x))$ (рис. 37 и 38) и поставим целью определить касательную

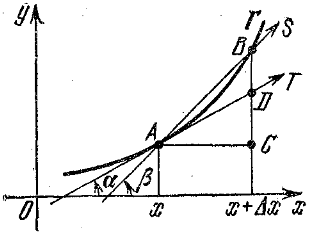

Рис. 37.

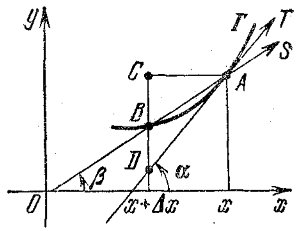

Рис. 38.

к Γ в этой точке. Для этого введем на Γ другую точку $B = (x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$, где $\Delta x \neq 0$ (на рис. 37 изображен случай $\Delta x > 0$, а на рис. 38 — случай $\Delta x < 0$). Прямую, проходящую через точки A и B, направленную в сторону возрастания x (отмеченную стрелкой), назовем *секущей* и обозначим через S. Угол, который S образует с положительным направлением оси x, обозначим через β. Мы считаем, что $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. При $\beta > 0$ угол отсчитывается от оси x против часовой стрелки, а при $\beta < 0$ — по часовой стрелке. На данных рисунках $\beta > 0$. На рис. 37 $\Delta x = AC$, $\Delta y = CB$, а на рис. 38 $\Delta x = -AC$, $\Delta y = -CB$. В обоих случаях $\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \beta$.

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$ и точка B, двигаясь по Γ, стремится к A. Если при этом угол β стремится к некоторому значению α, отличному от $\pi/2$ и $-\pi/2$, то существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

равный производной (конечной) от f в точке x:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Обратно, если существует (конечная) производная $f'(x)$, то $\beta \to \alpha = \operatorname{arctg} f'(x)$.

При стремлении β к α секущая S стремится занять положение направленной прямой T, проходящей через точку A и образующей угол α с положительным направлением оси x.

Направленная прямая T называется *касательной к кривой* Γ *в ее точке* A.

Определение. *Касательной к кривой* Γ $(y=f(x))$ *в ее точке* $A=(x, f(x))$ *называется направленная прямая* T, *к которой стремится секущая* S *(направленная в сторону возрастания* x *прямая), проходящая через* A *и точку* $B=(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) \in \Gamma$, *когда* $\Delta x \to 0$.

Мы доказали, что *если непрерывная функция* $y=f(x)$ *имеет конечную производную* $f'(x)$ *в точке* x, *то ее график* Γ *в соответствующей точке имеет касательную с угловым коэффициентом* $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$. Обратно, существование предела

$$\lim \beta = \alpha \quad (-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$$

влечет за собой существование конечной производной $f'(x)$ и справедливость равенств (1), (2).

Может случиться, что f имеет в точке x правую и левую производные, отличные между собой:

$$f'_{\text{л}}(x) \neq f'_{\text{пр}}(x).$$

Тогда A есть *угловая* точка Γ. В этом случае касательная к Γ в A не существует, но можно говорить, что существуют правая и левая касательные с разными угловыми коэффициентами:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{\text{л}}(x), \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{\text{пр}}(x).$$

На рис. 39 приведен пример такого случая.

Пусть теперь производная от f в точке x бесконечна:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty.$$

Отметим четыре важных случая:

1) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \qquad \beta \to \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 40).

2) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \qquad \beta \to -\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 41).

3) $$f'_л(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \qquad \beta \to -\frac{\pi}{2}.$$

$$f'_{пр}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \qquad \beta \to \frac{\pi}{2}.$$

Левая касательная перпендикулярна оси x и направлена вниз. Правая касательная перпендикулярна оси x и

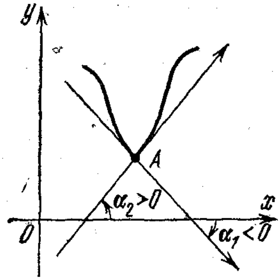

Рис. 39.

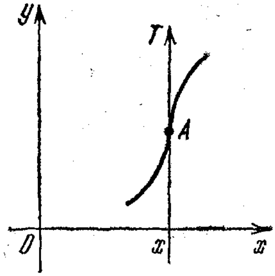

Рис. 40.

направлена вверх (рис. 42).

4) $$f'_л(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \beta \to \frac{\pi}{2},$$

$$f'_{пр}(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \quad \beta \to -\frac{\pi}{2}.$$

Левая и правая касательные направлены параллельно оси y, первая вверх, вторая вниз (рис. 43).

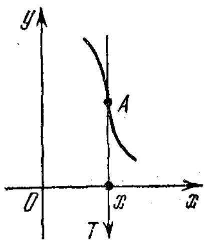

Рис. 41.

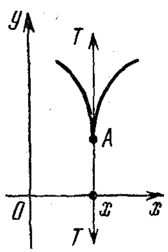

Рис. 42.

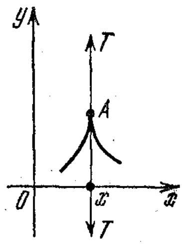

Рис. 43.

П р и м е ч а н и е. Обычное определение касательной к кривой Г следующее: касательная T к кривой Г в ее точке A есть прямая, к которой стремится секущая S, проходящая через точку A и другую точку $B \in \Gamma$, когда последняя, двигаясь по Γ, стремится к A.

В этом определении не предполагается, что S и T — направленные прямые. Это определение вполне корректно в случае касательной не параллельной оси y. Однако если применить его, например, к случаю 4) (см. рис. 43, где A — угловая точка), то получим, что данная кривая имеет в точке A единственную касательную. Это не вяжется с нашим представлением о гладкости кривой, имеющей касательную.

Приведенное нами определение дает в точке A две касательные (сливающиеся), имеющие противоположные направления. Угол между ними равен π.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение прямой (в плоскости), проходящей через точку (x_0, y_0) под углом α к положительному направлению оси x $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$, имеет вид[1] $y-y_0=m(x-x_0)$ $(m=\operatorname{tg}\alpha)$. Отсюда уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y-y_0=y_0'(x-x_0), \tag{3}$$

где $y_0=f(x_0)$, $y_0'=f'(x_0)$.

Прямая, проходящая через точку $A \in \Gamma$ перпендикулярно к касательной к Γ в этой точке, называется *нормалью к Γ в точке A*. Ее уравнение, очевидно, имеет вид

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0). \tag{4}$$

Пример 1[2]. Найти уравнение касательной к кривой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (-a \leqslant x \leqslant a) \tag{5}$$

в некоторой ее точке (x_0, y_0), т. е. $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$.

Кривая (5) называется *эллипсом*. Очевидно, что эллипс расположен симметрично относительно осей координат, так как его уравнение не меняется при замене x на $(-x)$ и y на $(-y)$. При выводе уравнения касательной будем

---

[1] См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 8.

[2] Примеры 1, 2, 3 можно рассмотреть в § 4.8 после овладения техникой дифференцирования.

считать, что $-a \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Из (5) имеем

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{5'}$$

Отсюда $y' = \dfrac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$.

Вычислим функцию y и производную y' в точке x_0:

$$y_0 = y(x_0) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}, \quad y'(x_0) = \frac{-bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}},$$

$$y_0 y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}x_0. \tag{6}$$

Уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0):

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0). \tag{7}$$

Умножая (7) на y_0/b^2, в силу (6) будем иметь

$$\frac{Yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = y'(x_0)\left(\frac{Xy_0}{b^2} - \frac{x_0y_0}{b^2}\right), \quad \frac{Yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Так как у нас $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, то уравнение касательной запишется:

$$\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Таким образом, чтобы получить уравнение касательной к эллипсу в его точке (x_0, y_0), нужно в уравнении эллипса (5) заменить x^2 на Xx_0 и y^2 на Yy_0.

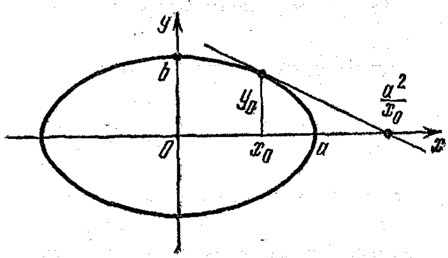

Рис. 44.

При отрицательных значениях y $(-b \leqslant y < 0)$ рассуждения те же самые и (8) будет уравнением касательной в любой точке эллипса (x_0, y_0). Из уравнения (8) видно, что касательная к эллипсу в его точке (x_0, y_0) пересекает ось x в точке с абсциссой a^2/x_0, т. е. при $x_0 > 0$ эта точка пересечения находится правее эллипса, а при $x_0 < 0$ — левее (рис. 44).

Пример 2. Найти уравнение касательной к кривой

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (|x| \geqslant a) \tag{9}$$

в некоторой ее точке (x_0, y_0) $\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1\right)$.

Кривая (9) называется *гиперболой*. Эта кривая также симметрична относительно осей координат.

Проводя рассуждения, как в примере 1, получим уравнение касательной к гиперболе в виде

$$\frac{Xx_0}{a^2} - \frac{Yy_0}{b^2} = 1 \quad (|x_0| \geqslant a).$$

Точка пересечения этой касательной с осью x имеет абсциссу a^2/x_0 $\left(0 < \frac{a^2}{|x_0|} \leqslant a\right)$, т. е. эта точка пересечения находится в $(0, a]$ для $x_0 \geqslant a$ и в $[-a, 0)$ для $x_0 \leqslant -a$ (рис. 45).

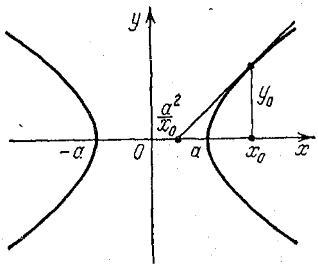

Рис. 45.

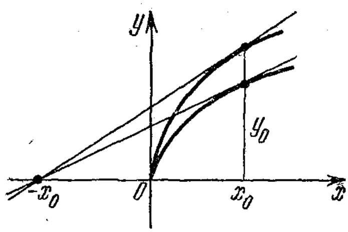

Рис. 46.

Пример 3. Найти уравнение касательной к кривой

$$y^2 = 2px \quad (x \geqslant 0, \ p > 0) \tag{10}$$

в некоторой ее точке (x_0, y_0) $(y_0^2 = 2px_0)$.

Данная кривая называется *параболой*. Она расположена симметрично относительно оси x (т. е. в (10) x является четной функцией от y). В силу этого достаточно рассмотреть верхнюю половину параболы ($y > 0$). Из (10) имеем

$$y = \sqrt{2px}. \tag{10'}$$

Отсюда

$$y'=\frac{p}{\sqrt{2px}},\quad y_0=\sqrt{2px_0},\quad y'(x_0)=\frac{p}{\sqrt{2px_0}}=\frac{p}{y_0}.$$

Уравнение касательной к параболе в точке $(x_0,\ y_0)$:

$$Y-y_0=y'(x_0)(X-x_0)$$

или

$$Y-y_0=\frac{p}{y_0}(X-x_0),\quad Yy_0-y_0^2=pX-px_0.$$

Так как $y_0^2=2px_0$, то

$$Yy_0=p(X+x_0). \tag{11}$$

Таким образом, чтобы получить уравнение касательной к параболе в ее точке $(x_0,\ y_0)$, нужно в уравнении параболы (10) заменить y^2 на Yy_0, а $2x$ на $X+x_0$.

Касательная (11) к параболе (10′) в ее точке $(x_0,\ y_0)$ пересекает ось x в точке с абсциссой $(-x_0)$ (рис. 46) независимо от величины p, т. е. касательные к любым параболам $y^2=2px$ в точке $(x_0,\ \sqrt{2px_0})$ пересекают ось x в одной и той же точке $(-x_0)$.

§ 4.3. Производные элементарных функций

Постоянная C — каждому x соответствует одно и то же значение $y=C$. Таким образом, значению $x+\Delta x$ соответствует значение функции $y+\Delta y=C$. Следовательно,

$$C'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0. \tag{1}$$

Степенная функция x^n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

$$(x^n)'=nx^{n-1}, \tag{2}$$

потому что

$$\frac{1}{\Delta x}[(x+\Delta x)^n-x^n]=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\ldots+\Delta x^n-x^n\right]=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}nx^{n-1}.$$

Справедливы формулы

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{3}$$

$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{4}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{5}$$

Здесь предполагается, что $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции от x, имеющие производную в точке x. В случае (5) дополнительно предполагается, что $v(x) \neq 0$. Утверждается, что в таком случае в точке x существуют производные, стоящие слева в равенствах (3), (4), (5), и эти равенства верны.

В самом деле, зададим Δx. Новому значению $x + \Delta x$ аргумента соответствуют новые значения наших функций $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ и

$$\Delta(u \pm v) = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v,$$

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Далее (пояснения ниже),

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v,$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= uv' + vu' + 0v' = uv' + vu'.$$

Надо учесть, что функция u, как имеющая производную, непрерывна, и потому $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Наконец,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{(v + \Delta v)\,v\,\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)\,v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Снова надо учесть, что $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$, потому что функция v, как имеющая производную, непрерывна.

Рассмотрим функцию $\sin x$. Тогда

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{6}$$

потому что

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Надо учесть, что функция $\cos x$ непрерывна.

Аналогично доказывается, что

$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{7}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{8}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}. \tag{9}$$

В самом деле, например,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Для функции $y = \log_a x$ $(x > 0)$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Используя замечательный предел

$$\lim_{u \to 0} \frac{\log_a(1+u)}{u} = \log_a e,$$

получаем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \tag{10}$$

В частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{10'}$$

§ 4.4. Производная сложной функции

Теорема 1. *Если функция $x=\varphi(t)$ имеет производную в точке t, а функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то сложная функция*

$$y=F(t)=f[\varphi(t)] \tag{1}$$

имеет производную (по t) в точке t и справедливо равенство

$$F'(t)=f'(x)\varphi'(t) \tag{2}$$

или

$$y'_t=y'_x x'_t. \tag{3}$$

Доказательство. Зададим t, ему соответствует значение $x=\varphi(t)$. Придадим t приращение $\Delta t\neq 0$, это вызовет приращение $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$. Так как функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то на основании равенства (2) § 4.1, имеем

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x, \tag{4}$$

где $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Будем считать, что $\varepsilon(0)=0$. Равенство (4) при этом соглашении выполняется, т. к. если подставить в него $\Delta x=$ $=0$, то получится $0=0$.

Разделим теперь равенство (4) на $\Delta t\neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5}$$

Пусть Δt стремится к нулю. Тогда $\Delta x\to 0$, потому что функция $x(t)\equiv\varphi(t)$ имеет производную в точке t и, следовательно, непрерывна.

Переходим в равенстве (5) к пределу при $\Delta t\to 0$. Тогда $\Delta x\to 0$ и $\varepsilon(\Delta x)\to 0$, поэтому получим

$$y'_t=f'(x)x'(t)+0\cdot x'(t)=f'(x)x'(t)=y'_x x'_t.$$

Теорема доказана.

Формула (1) может быть усложнена. Например, если $z=f(y)$, $y=\varphi(x)$, $x=\psi(\xi)$ и все три функции имеют производные в соответствующих точках, то $z'_\xi=z'_y y'_x x'_\xi$.

Пример 1. $y=\ln\sin^2 x$ ($x\neq k\pi$, k—целое).

Полагаем $y=\ln u$, $u=v^2$, $v=\sin x$. Тогда

$$y'_x=y'_u u'_v v'_x=\frac{1}{u}2v\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}=2\operatorname{ctg} x.$$

Пример 2. $y=\sin(x^2+2x-1)$.

Полагаем $u=x^2+2x-1$. Тогда

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot(2x+2)=2(x+1)\cos(x^2+2x-1).$$

Обычно при вычислениях вспомогательные переменные u, v, ... не вводят, а только подразумевают их.

В случае примера 1 вычисления выглядят так:

$$y'_x=\frac{1}{\sin^2 x}(\sin^2 x)'=\frac{1}{\sin^2 x}2\sin x(\sin x)'=\frac{2}{\sin x}\cos x=2\operatorname{ctg} x.$$

Или еще короче

$$y'_x=\frac{1}{\sin^2 x}2\sin x\cos x=2\operatorname{ctg} x.$$

§ 4.5. Производная обратной функции

Пусть функция $y=f(x)$ строго возрастает, непрерывна на интервале (a, b) и имеет конечную не равную нулю производную $f'(x)$ в некоторой точке $x\in(a, b)$. Тогда обратная для f функция $x=f^{-1}(y)=g(y)$ также имеет производную в соответствующей точке, определяемую равенством

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \tag{1}$$

или

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}. \tag{1'}$$

Доказательство. Как нам известно, обратная функция $x=g(y)$ строго возрастает и непрерывна на интервале (A, B), где

$$A=\inf_{x\in(a,\, b)} f(x),\quad B=\sup_{x\in(a,\, b)} f(x)$$

(см. § 3.6, теорема 1').

Дадим рассматриваемому y приращение $\Delta y\neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, также не равное нулю в силу строгой монотонности f. Поэтому

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь $\Delta y\to 0$, то в силу непрерывности $g(y)$ приращение Δx также $\to 0$; но при $\Delta x\to 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to f'(x)\neq 0$, следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

Этим формула (1) доказана.

Примечание. *Если $f'(x)\neq 0$ непрерывна на (a, b), то $g'(y)$ непрерывна на (A, B).*

Это следует из (1), где можно положить $x=g(y)$:

$$g'(y)=\frac{1}{f'[g(y)]}\quad (y\in(A, B)).$$

Ведь сложная функция $f'[g(y)]$, состоящая из непрерывных функций f' и g, непрерывна.

§ 4.6. Производные элементарных функций (продолжение)

1. $y=a^x$. Отсюда $x=\log_a y$ — обратная функция. Поэтому

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a,\quad \text{т. е.}\quad (a^x)'=a^x\ln a.$$

В частности,

$$(e^x)'=e^x,\quad (e^{-x})'=-e^{-x}.$$

2. $y=\arcsin x$ $(|x|<1,\ -\pi/2<y<\pi/2)$, $x=\sin y$ — обратная функция. Поэтому

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е.

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем поставлен знак $+$, потому что $\cos y>0$ на $(-\pi/2, \pi/2)$.

3.

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$ — обратная функция $(-\infty<x<\infty,\ -\pi/2<y<\pi/2)$. Тогда

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. Совершенно аналогично доказывается, что

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. *Производная от степенной функции* x^α ($x > 0$, α — произвольное действительное число). Имеем

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Так как функции e^u и $\alpha \ln x$ имеют производную, то по теореме о производной сложной функции получим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким образом,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Этот результат согласуется с формулой (2) § 4.3 для производной от функции x^n ($x \in (-\infty, \infty)$), где n — натуральное число.

7. *Функция* $y = u(x)^{v(x)}$ ($u > 0$). Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют производную, то этим же свойством обладает функция

$$u^v = e^{v \ln u} \tag{1}$$

и

$$(u^v)' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right). \tag{2}$$

Выражение

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{3}$$

называется *логарифмической производной функции* f.

Так как

$$\ln u^v = v \ln u,$$

то в силу формулы (3)

$$\frac{(u^v)'}{u^v} = (v \ln u)' = v' \ln u + \frac{vu'}{u},$$

откуда следует (2).

8. *Гиперболические функции.*

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0).$$

9. $y = \operatorname{Arsh} x$ — обратная функция для функции $x = \operatorname{sh} y$. Отсюда

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(см. далее § 4.12, пример 2).

§ 4.7. Дифференциал функции

4.7.1. Дифференцируемые функции. Пусть функция f имеет производную в точке x (конечную):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для достаточно малых Δx можно записать в виде суммы $f'(x)$ и некоторой функции, которую мы обозначим через $\varepsilon(\Delta x)$ и которая обладает тем свойством, что она стремится к нулю вместе с Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \qquad (\varepsilon(\Delta x) \to 0, \quad \Delta x \to 0)$$

и приращение f в точке x может быть записано в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \qquad (\varepsilon(\Delta x) \to 0, \quad \Delta x \to 0)$$

или

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}. \tag{1}$$

Ведь выражение $\underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}$ понимается как функция от Δx такая, что ее отношение к Δx стремится к нулю вместе с Δx.

Определение. *Функция f называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение Δy в этой точке может быть представлено в виде*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}, \tag{2}$$

где A не зависит от Δx, но вообще зависит от x.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция f была дифференцируемой в точке x, т. е. чтобы ее приращение в этой точке представлялось по формуле* (2), *необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную в этой точке. И тогда $A = f'(x)$.*

Таким образом, сказать, что f имеет производную в точке x или f дифференцируема в точке x—это одно и то же. Поэтому процесс нахождения производной называют еще *дифференцированием функции.*

Доказательство теоремы 1. Достаточность условия доказана выше: из существования конечной производной $f'(x)$ следовала возможность представления Δy в виде (1), где можно положить $f'(x) = A$.

Необходимость условия. Пусть функция f дифференцируема в точке x. Тогда из (2), предполагая $\Delta x \neq 0$, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \underset{\Delta x \to 0}{\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}} = A + \underset{\Delta x \to 0}{o(1)}.$$

Предел правой части при $\Delta x \to 0$ существует и равен A:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Это означает, что существует производная

$$f'(x) = A.$$

4.7.2. Дифференциал функции. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x: т. е. для ее приращения Δy в этой точке выполняется равенство (2). Тогда Δy есть сумма двух слагаемых. Первое из них $A\Delta x$ пропорционально Δx, а в таких случаях говорят, что оно есть линейная однородная функция от Δx. Второе—$\underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}$ является бесконечно малой функцией высшего порядка малости сравнительно с Δx. Если $A \neq 0$, то второе слагаемое стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем первое. В связи с этим первое слагаемое $A\,\Delta x = f'(x)\,\Delta x$ называется *главным членом приращения* Δy (при $\Delta x \to 0$!. См. определение в конце § 3.10). Это слагаемое называют *дифференциалом функции* и обозначают символом dy. Итак, по определению

$$dy = df = f'(x)\,\Delta x.$$

На рис. 47 изображен график Г функции $y = f(x)$; T — касательная к Г в точке A, имеющей абсциссу x; $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный касательной с осью x;

$$dy = f'(x)\,\Delta x = \operatorname{tg}\alpha\,\Delta x = CD,$$
$$DB = \Delta y - dy = \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x).$$

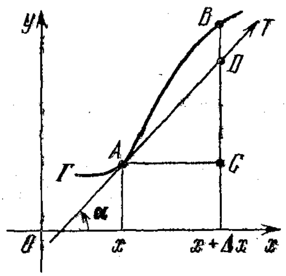

Рис. 47.

Таким образом, *дифференциал функции y в точке x, соответствующий приращению Δx, есть приращение ординаты точки, лежащей на касательной* ($dy = CD$).

Вообще говоря, $dy \neq \Delta y$, ибо $\Delta y = dy + \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x)$, а второй член этой суммы, вообще говоря, не равен нулю. Только для линейной функции $y = Ax + B$ имеет место равенство $\Delta y = A\,\Delta x = dy$ для любого x. В частности, для $y = x$, $dy = dx = \Delta x$, т. е. *дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой* ($dx = \Delta x$). Поэтому дифференциал произвольной функции f обычно записывают так:

$$dy = f'(x)\,dx,$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т. е. *производная функции f в точке x равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной x.*

Это объясняет, что выражение dy/dx (дэ игрек по дэ икс) употребляется как символ для обозначения производной.

Надо иметь в виду, *что дифференциал dx независимой переменной не зависит от x, он равен Δx — произвольному приращению аргумента x. Что же касается дифференциала dy функции y (отличной от x), то он зависит от x и dx.*

Отметим формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{3}$$

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du, \tag{4}$$

$$d(cu) = c\,du \quad (c\text{— постоянная}), \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{6}$$

где предполагается, что u и v — дифференцируемые функции в рассматриваемой точке x.

Например, формула (6) доказывается так:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{vu'\,dx - uv'\,dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

4.7.3. Приближенное выражение приращения функции. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то на основании формулы (1) ее приращение, соответствующее приращению Δx, можно записать следующим образом:

$$\Delta y = dy + \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x).$$

Отсюда следует, что дифференциал функции при достаточно малых Δx может служить хорошим приближением приращения функции. В этом смысле пишут приближенное равенство

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx, \tag{7}$$

которым широко пользуются.

Пусть надо вычислить значение функции f в точке x, т. е. число $f(x)$. Однако появилась необходимость заменить x его приближенным значением $x + \Delta x$:

$$x \approx x + \Delta x.$$

Возникает приближенное равенство

$$f(x) \approx f(x + \Delta x).$$

Его абсолютная погрешность равна

$$|\Delta y| = |f(x + \Delta x) - f(x)|.$$

Если функция f дифференцируема в точке x, то из формулы (7) следует, что при малых Δx можно считать, что абсолютная погрешность рассматриваемого приближения равна приближенно абсолютной величине дифференциала функции:

$$|\Delta y| \approx |dy|,$$

вычисленного для соответствующего приращения Δx.

Относительная же погрешность приближенно выражается следующим образом:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| \qquad (y = f(x) \neq 0).$$

Пример 1. Если считать, что

$$\sqrt[3]{8{,}001} \approx \sqrt[3]{8} = 2,$$

то погрешность приближенно равна дифференциалу функции $y = x^{1/3}$ в точке $x = 8$, соответствующему приращению $\Delta x = 0{,}001$:

$$dy = \frac{1}{3} x^{-2/3} \Delta x = \frac{1}{3} 8^{-2/3} \cdot 0{,}001 = \frac{1}{12\,000}.$$

Вопрос о том, насколько точны эти наши рассуждения, может быть решен методами, которые мы будем еще изучать (см. § 4.14).

§ 4.8. Другое определение касательной

В случае, когда производная $f'(x_0)$ конечна, возможно дать другое, эквивалентное определение касательной.

Зададим произвольную прямую L, $y - y_0 = m(x - x_0)$, проходящую через точку $A = (x_0, f(x_0))$ кривой Γ: $y = f(x)$. Пусть $B = (x, f(x))$ — другая точка кривой Γ. Расстояние от B до L в направлении оси y равно

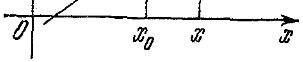

Рис. 48

$$\rho(x) = |f(x) - y_0 - m(x - x_0)|. \tag{1}$$

На рис. 48 $\rho(x) = BD$.

Прямая L называется касательной к Γ в точке A, если

$$\rho(x) = \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0). \tag{2}$$

Если прямая L есть касательная к Γ в точке A в смысле первого определения, то $m = f'(x_0)$. Так как f дифференцируема, то

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

откуда

$$\rho(x) = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| = o(x - x_0), \qquad x \to x_0,$$

т. е. прямая L является касательной в смысле второго определения.

Обратно, пусть L является касательной в смысле второго определения. Тогда (см. (1) и (2))

$$\rho(x)=|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|=o(x-x_0),\quad x\to x_0,$$

или, что все равно,

$$f(x)-f(x_0)=m(x-x_0)+o(x-x_0)\quad \text{при}\quad x\to x_0.$$

Это показывает, что функция f дифференцируема в точке x_0 и $m=f'(x_0)$. Но тогда L есть касательная в смысле первого определения и ее уравнение имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Замечание. Из сказанного следует, что кривая $y=f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0, f(x_0))$ тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема в точке x_0.

§ 4.9. Производная высшего порядка

Пусть на интервале (a, b) задана функция f. Ее производная, если она существует на интервале (a, b), есть некоторая функция $f'(x)$. Мы ее будем еще называть *первой производной*. Но может случиться, что первая производная имеет в свою очередь производную на интервале (a, b). Эта последняя называется *второй производной от* f или *производной от* f *второго порядка* и обозначается так:

$$f''(x)=f^{(2)}(x)=(f'(x))'\quad \text{или}\quad y''=(y')'.$$

Вообще, *производной от функции* f *порядка* n *называется первая производная от производной от* f *порядка* $n-1$ и обозначается так:

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'\quad \text{или так:}\quad y^{(n)}=(y^{(n-1)})'.$$

Если речь идет об определенном фиксированном значении x, то символ $f^{(n)}(x)$ обозначает производную n-го порядка от f в точке x. Для ее существования необходимо существование производной $f^{(n-1)}$ не только в x, но и в некоторой окрестности x.

Примеры.

1°. $(e^x)^{(n)}=e^x$.

2°. $(a^x)'=a^x\ln a,\quad (a^x)''=a^x\ln^2 a,\quad \ldots,\quad (a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a.$

3°. $(x^m)'=mx^{m-1},\quad (x^m)''=m(m-1)x^{m-2},\quad \ldots$

$$\ldots,\ (x^m)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Если m натуральное, то, очевидно,

$$(x^m)^{(m)}=m!\quad \text{и}\quad (x^m)^{(n)}=0\quad (n>m).$$

4°. $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\sin x)'' = \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

5°. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Однако далеко не для всякой функции удается найти общие формулы для их n-х производных.

Упражнение. Используя метод математической индукции, доказать формулу (Лейбница) для производной n-го порядка от произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где u и v имеют производные до порядка n включительно,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad 0! = 1.$$

§ 4.10. Дифференциал высшего порядка. Инвариантное свойство дифференциала первого порядка

Если на интервале (a, b) задана функция $y=f(x)$, то ее, очевидно, можно представить бесконечным числом способов как сложную функцию

$$y=\varphi(z), \quad z=\psi(x).$$

Таким образом, y можно рассматривать как функцию от x $(y=f(x))$ и как функцию от z $(y=\varphi(z))$, где z в свою очередь есть функция от x $(z=\psi(x))$.

Аргумент x мы будем называть *независимым*, подчеркивая этим, что на протяжении наших рассуждений x не будет рассматриваться как функция какой-то переменной. Аргумент же z будем называть *зависимым* (от x!).

Дифференциал от функции $y=f(x)$ в точке x есть, как мы знаем, произведение производной от f в этой точке на дифференциал независимого переменного:

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Здесь dx есть произвольное число. *Оно не зависит от* x. Это сказывается в том, что производная от dx по x равна нулю:

$$(dx)' = 0.$$

Дифференциал от функции называют еще *первым дифференциалом*.

По определению *вторым дифференциалом от функции* $y = f(x)$ *в точке* x *называется дифференциал от первого дифференциала в этой точке* и обозначается так:

$$d^2y = d(dy).$$

Чтобы вычислить второй дифференциал, надо взять производную по x от произведения $f'(x)\,dx = dy$, считая, что dx есть постоянная (не зависящая от x!), и результат помножить на dx:

$$d^2y = d[f'(x)\,dx] = dx\,d[f'(x)] = f''(x)\,dx^2.$$

Вообще, по определению *дифференциалом порядка* n *функции* $y = f(x)$ *называется первый дифференциал от дифференциала* $(n-1)$*-го порядка этой функции* и обозначается через

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Очевидно,

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n, \tag{1}$$

потому что эта формула верна при $n = 1$, а если допустить, что она верна для $n-1$, то

$$d^ny = d[f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}] = dx^{n-1}\,d[f^{(n-1)}(x)] = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Конечно, для существования дифференциала порядка n функции $y = f(x)$ в точке x необходимо, чтобы она имела производную $f^{(n)}(x)$ порядка n в этой точке.

В силу (1) имеем

$$y_x^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \tag{2}$$

т. е. *производная* n*-го порядка от функции* y *по независимой переменной* x *равна частному от деления* n*-го дифференциала* y *на* $dx^n = (dx)^n$.

В дальнейшем мы узнаем, что формула (2) неверна, если в ней независимую переменную x заменить на зависимую z (см. далее (4)).

Мы определили дифференциалы первого и, вообще говоря, высшего порядка от функции $y=f(x)$, где x есть *независимая переменная*. Но функцию y, как это было отмечено выше, можно еще записать в виде

$$y=\varphi(z),$$

где z есть некоторая функция от x ($z=\psi(x)$, $f(x)=\varphi[\psi(x)]$). Возникает вопрос, как выражаются введенные нами дифференциалы на языке (зависимой) переменной z.

Для первого дифференциала этот вопрос решается следующим образом:

$$dy=y'_x\,dx=y'_z z'_x dx=y'_z\,(z'_x dx)=y'_z dz.$$

Мы видим, что дифференциал функции y равен произведению ее производной y'_z на dz:

$$dy=y'_z dz, \tag{3}$$

т. е. *первый дифференциал функции y выражается по одной и той же формуле независимо от того, будет ли y рассматриваться как функция от независимой переменной x или от зависимой переменной z.*

Форма первого дифференциала (см. (3)) сохраняется, поэтому говорят, что *первый дифференциал имеет инвариантную форму* или еще *имеет инвариантное свойство.*

С дифференциалом высшего порядка дело обстоит уже не так. В самом деле, если рассматривать y как функцию от z ($y=\varphi(z)$), то получим (см. § 4.7, (4))

$$d^2y=d\,(dy)=d\,[\varphi'(z)\,dz]=dz\,d\,(\varphi'(z))+\varphi'(z)\,d\,(dz)=$$
$$=\varphi''(z)\,dz^2+\varphi'(z)\,d^2z. \tag{4}$$

В последнем равенстве мы применили инвариантное свойство первого дифференциала, в силу которого $d\,(\varphi'(z))=\varphi''(z)\,dz$. Кроме того, учтено что $d\,(dz)=d^2z$. Величиной d^2z, вообще говоря, нельзя пренебрегать, ведь она определяется равенством $d^2z=\psi''(x)\,dx^2$. Правая его часть равна нулю (для всех x!) только, если $\psi(x)$ есть линейная функция ($\psi(x)=Ax+B$).

Мы видим, что (выраженная через z) форма второго дифференциала не сохранилась — к числу $\varphi''(z)\,dz^2$ добавилось слагаемое $\varphi'(z)\,d^2z$, вообще говоря, не равное нулю.

§ 4.11. Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть зависимость y от x выражена через параметр t:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\}, \qquad t \in (a, b). \tag{1}$$

Это надо понимать в том смысле, что существует обратная функция для функции $x=\varphi(t)$ и можно написать явную форму зависимости y от x:

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]. \tag{2}$$

Будем искать производную от y по x через производные от x и y по t. Будем употреблять обозначения y'_x, y''_x, $x'_t, \ldots, x''_t$, y''_t, где буква внизу означает, по какой переменной берется производная. В силу инвариантности формы дифференциала первого порядка $y'_x=dy/dx$. Но $dy=y'_t dt$, $dx=x'_t dt$. Поэтому

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \qquad (x'_t \neq 0). \tag{3}$$

Для производной второго порядка получаем

$$y''_x=\frac{d}{dx}\,y'_x=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{x'_t y''_t-y'_t x''_t}{(x'_t)^3}. \tag{4}$$

Подобным образом можно получить формулы для производных $y_x^{(n)}$ по x порядка $n>2$ через производные от x и y по t.

§ 4.12. Теоремы о среднем значении

По определению *функция f достигает в точке $x=c$ локального максимума* (*минимума*), *если существует окрестность этой точки $U(c)=(c-\delta, c+\delta)$, на которой выполняется неравенство*

$$f(c) \geqslant f(x) \qquad \forall x \in U(c) \tag{1}$$

$$(\text{соответственно } f(x) \geqslant f(c) \qquad \forall x \in U(c)). \tag{1'}$$

Локальный максимум или минимум называется *локальным экстремумом*. Точка c называется *точкой локального экстремума*.

Замечание 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и достигает на нем максимума (минимума) в точке $c \in (a, b)$, то, очевидно, c является в то же время точкой локального максимума (минимума) f. Другое дело, если максимум (минимум) f на $[a, b]$ достигается в одной из концевых точек отрезка. Такая точка не является точкой локального максимума (минимума) f, потому что f не определена в полной ее окрестности (справа от нее и слева).

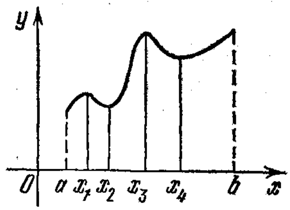

Рис. 49.

На рис. 49 изображен график функции $y = f(x)$, непрерывной на $[a, b]$. Точки x_2 и x_4 — это точки локального минимума f, а x_1, x_3 — точки локального максимума f. Конечно, можно сказать, что b есть точка локального одностороннего максимума f, а a — локального одностороннего минимума f. Но a не есть точка локального минимума, а b не есть точка локального максимума.

Теорема 1 (Ферма[1]). *Если функция f имеет производную в точке c и достигает в этой точке локального экстремума, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что f имеет в точке c локальный максимум. По оптеделению производной имеем

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Так как у нас $f(c) \geqslant f(x)$ $\forall x \in U(c)$, то для достаточно малых $\Delta x > 0$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0,$$

откуда в пределе при $\Delta x \to 0$ получим, что

$$f'(c) \leqslant 0. \tag{2}$$

Если же $\Delta x < 0$, то

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

поэтому, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в этом неравенстве, получаем, что

$$f'(c) \geqslant 0. \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) вытекает, что $f'(c) = 0$.

---

[1] П. Ферма (1601—1665) — французский математик.

Теорема 2 (Ролля[1]). *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a)=f(b)$, то существует точка $\xi \in (a, b)$, такая, что $f'(\xi)=0$.*

Доказательство. Если f постоянна на $[a, b]$, то для всех $\xi \in (a, b)$ производная $f'(\xi)=0$.

Будем теперь считать, что f непостоянна на $[a, b]$. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $x_1 \in [a, b]$, в которой f достигает максимума на $[a, b]$ (см. § 3.5, теорема 2) и существует точка $x_2 \in [a, b]$, в которой f достигает минимума на $[a, b]$. Обе точки не могут быть концевыми точками отрезка $[a, b]$, потому что иначе

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(a) = f(b)$$

и f была бы постоянной на $[a, b]$. Следовательно, одна из точек x_1, x_2 принадлежит к интервалу (a, b). Обозначим ее через ξ. В ней достигается локальный экстремум. Кроме того, $f'(\xi)$ существует, потому что по условию $f'(x)$ существует для всех $x \in (a, b)$. Поэтому по теореме Ферма $f'(\xi)=0$.

Замечание 2. Теорема Ролля сохраняет силу также для интервала (a, b), лишь бы выполнялось соотношение

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x).$$

Замечание 3. Теорема Ролля теряет силу, если хотя бы в одной точке (a, b) $f'(x)$ не существует. Пример: $y=|x|$ на $[-1, 1]$. В теореме также нельзя заменить непрерывность на $[a, b]$ на непрерывность на (a, b). Примером является функция

$$y = \begin{cases} 1, & x=0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Точка $x=0$ — точка разрыва.

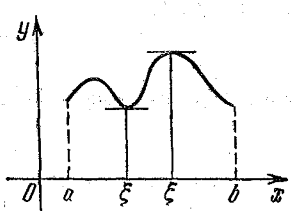

Рис. 50.

Замечание 4. Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл. Если выполнены условия теоремы, то на графике (рис. 50) функции $y=f(x)$ существует точка $(\xi, f(\xi))$, касательная в которой параллельна оси x.

[1] М. Ролль (1652—1719) — французский математик, доказавший эту теорему для многочленов.

Теорема 3 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), и $g'(x) \neq 0$ в (a, b), то существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4}$$

Доказательство. Отметим, что $g(b)-g(a) \neq 0$, так как в противном случае, по теореме Ролля нашлась бы точка ξ такая, что $g'(\xi)=0$, чего быть не может по условию теоремы. Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

В силу условия теоремы эта функция F непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $F(a)=0$, $F(b)=0$. Применяя теорему Ролля, получим, что существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой $F'(\xi)=0$. Но

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x),$$

поэтому, подставляя вместо x точку ξ, получаем утверждение теоремы.

Замечание 5. В формуле (4) Коши, как нетрудно видеть, не обязательно считать $a < b$. Но тогда $[a, b]$ и (a, b) обозначают соответственно множества точек x, для которых $b \leqslant x \leqslant a$, $b < x < a$.

Как следствие из теоремы Коши, при $g(x)=x$ получим теорему Лагранжа.

Теорема 4 (о среднем Лагранжа[1]). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b). Тогда существует на интервале (a, b) точка c, для которой выполняется равенство*

$$f(b)-f(a) = (b-a) f'(c) \quad (a < c < b). \tag{5}$$

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл, если записать ее в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b).$$

Левая часть этого равенства есть тангенс угла наклона к оси x хорды, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$

[1]) Ж. А. Лагранж (1736—1813) — французский математик.

графика функции $y=f(x)$, а правая часть есть тангенс угла наклона касательной к графику в некоторой промежуточной точке с абсциссой $c\in(a, b)$. Теорема Лагранжа утверждает, что если кривая (рис. 51) есть график непрерывной на $[a, b]$ функции, имеющей производную на (a, b), то на этой кривой существует точка, соответствующая некоторой абсциссе c $(a<c<b)$ такая, что касательная к кривой в этой точке параллельна хорде, стягивающей концы кривой $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

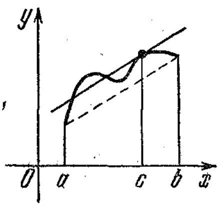

Рис. 51.

Равенство (5) называется *формулой* (*Лагранжа*) *конечных приращений*. Промежуточное значение c удобно записывать в виде

$$c=a+\theta(b-a),$$

где θ есть некоторое число, удовлетворяющее неравенствам $0<\theta<1$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \quad (0<\theta<1). \tag{6}$$

Она верна, очевидно, не только для $a<b$, но и для $a\geqslant b$.

Теорема 5. *Функция, непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *где* $a<b$, *и имеющая неотрицательную* (*положительную*) *производную на интервале* (a, b), *не убывает* (*строго возрастает*) *на* $[a, b]$.

Действительно, пусть $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$; тогда на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдется на интервале (x_1, x_2) точка c, для которой

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c) \quad (x_1<c<x_2).$$

Если по условию $f'\geqslant 0$ на (a, b), то $f'(c)\geqslant 0$ и

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0; \tag{7}$$

если же $f'>0$ на (a, b), то $f'(c)>0$ и

$$f(x_2)-f(x_1)>0. \tag{8}$$

Так как неравенства (7) и (8) имеют место, каковы бы ни были x_1, x_2, где $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$, то в первом случае f не убывает, а во втором f строго возрастает на отрезке $[a, b]$.

Пример 1. Возвратимся к примеру 1 § 4.7, где надо было оценить величину $\lambda=\sqrt[3]{8{,}001}-\sqrt[3]{8}$. Применим формулу Лагранжа к функции $\psi(x)=x^{1/3}$. Имеем

$$\lambda=\psi(8{,}001)-\psi(8)=0{,}001\cdot\psi'(c)=0{,}001\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3}\Big|_{x=c}=$$
$$=\frac{1}{3000}c^{-2/3}<\frac{1}{3000}8^{-2/3}=\frac{1}{12\,000}.$$

В примере 1 § 4.7 мы получили такой же результат, но сейчас он получил полное обоснование.

Пример 2. Функция $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ имеет непрерывную производную

$$(\operatorname{sh}x)'=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\operatorname{ch}x>0\quad\forall x\in(-\infty,\ \infty),$$

и обладает свойствами

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sh}x=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{sh}x=+\infty.$$

Следовательно, она строго возрастает и непрерывно дифференцируема на $(-\infty,\ \infty)$ и отображает интервал $(-\infty,\ \infty)$ на $(-\infty,\ \infty)$. Поэтому она имеет обратную однозначную непрерывно дифференцируемую функцию, обозначаемую так: $x=\operatorname{Arsh}y$, $y\in(-\infty,\ \infty)$.

Теорема 6. *Если функция имеет на интервале (a, b) производную, равную нулю, то она постоянна на (a, b).*

В самом деле, на основании теоремы Лагранжа имеет место равенство

$$f(x)-f(x_1)=(x-x_1)f'(c),$$

где x_1—фиксированная точка интервала (a, b), x—произвольная его точка (она может находиться справа и слева от x_1) и c—некоторая, зависящая от x_1 и x точка, находящаяся между x_1 и x. Так как по условию $f'(x)\equiv0$ на (a, b), то $f'(c)=0$ и $f(x)=f(x_1)=C$ для всех $x\in(a, b)$.

Заметим, что в приведенных теоремах ослабление налагаемых в них условий может привести к неверности утверждений (см. замечания 1, 2 к теореме Ролля).

Определение. *Будем говорить, что функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, если существует число $\delta>0$ такое, что*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}>0\ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}<0\right)\quad \textit{при}\quad 0<|\Delta x|<\delta.$$

Очевидно, что если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b), то она возрастает (убывает) в каждой точке $x \in (a, b)$.

Теорема 7. *Если* $f'(x_0) > 0$ (< 0), *то функция* $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *в точке* x_0.

Доказательство. Так как $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то, задав $\varepsilon > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, что $f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon$ при $|\Delta x| < \delta$. Пусть $f'(x_0) > 0$. Взяв $\varepsilon < f'(x_0)$, получаем, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ при $|\Delta x| < \delta$, т. е. функция f возрастает в точке x_0.

Замечание 6. Если функция f имеет производную и не убывает на (a, b), то $f'(x) \geqslant 0$ на этом интервале. При сказанных условиях невозможно, чтобы в какой-либо точке $x \in (a, b)$ производная от f была отрицательной — это бы противоречило теореме 7.

Если f имеет производную и строго возрастает на (a, b) и если у нас других сведений об f нет, то все равно придется заключить, что $f'(x) \geqslant 0$ на (a, b), потому что строго возрастающая функция в отдельных точках (a, b) может иметь производную, равную нулю. Такой, например, является функция x^3, строго возрастающая на $(-\infty, \infty)$ и имеющая при $x = 0$ производную, равную нулю.

Замечание 7. Если функция возрастает в точке x_0, то она не обязательно возрастает в некоторой окрестности точки x_0.

Примером может служить функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x}{2} - x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2} - x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2},$$

и $F(x)$ возрастает в точке $x = 0$. Однако эта функция не монотонна, так как производная $F'(x) = \frac{1}{2} - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ в любой малой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения (см. теорему 5). Для $x_k = 1/k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ при k четном она равна $3/2$, а при k нечетном она равна $-1/2$.

Теорема 8. *Если функция* $f(x)$ *четная* (*нечетная*) *и дифференцируема на* $[-a, a]$, *то* $f'(x)$ *нечетная* (*четная*) *функция*.

Доказательство. Так как $f(x) \equiv f(-x)$ $\forall x \in [-a, a]$, то производные левой и правой части также совпадают: $f'(x) \equiv -f'(-x)$, т. е. $f'(x)$ — нечетная функция. (Этот же факт можно доказать, исходя из определения производной.)

§ 4.13. Раскрытие неопределенностей

Будем говорить, что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Раскрыть эту неопределенность — это значит найти $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $g(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Доказательство. Будем считать, что a — конечное число. (В случае $a = \infty$ см. ниже замечание 3.) Доопределим функции f и g в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке a. Рассмотрим отрезок $[a, x]$, где $x > a$ или $x < a$ (см. замечание 5 § 4.12). На $[a, x]$ функции f и g непрерывны, а на (a, x) дифференцируемы, поэтому по теореме Коши существует точка ξ такая, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \; (\xi \in (a, \; x)) \quad \text{или} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Когда $x \to a$, то и $\xi \to a$, поэтому в силу условия теоремы имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2}$$

при условии, что предел в правой части равенства существует.

Этим теорема доказана.

Замечание 1. Если предел справа в (1) не существует, то предел слева может существовать.

Пример 1. Так как $\sin x \approx x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Однако

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

не существует.

Замечание 2. Если выражение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и функции $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условию теоремы 1, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

При этом эти равенства надо понимать в том смысле, что если существует третий предел, то существует и второй и первый.

Теорема 2 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. *Пусть f и g определены и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $g(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности, тогда, если*

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ то } \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

и

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Замечание 3. Если $a = \infty$, то замена $x = 1/t$ сводит дело к $a = 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{(f(1/t))'}{(g(1/t))'} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Выражаемые теоремами 1, 2 правила, в силу которых вычисление предела отношения функций может быть сведено к вычислению предела отношения их производных, называют *правилом Лопиталя*, по имени математика, который сформулировал это правило, правда, для весьма простых случаев. Впрочем, это правило было известно И. Бернулли до Лопиталя[1]).

Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0 \quad \forall\alpha>0, \quad a>1.$$

Здесь мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя k раз ($k\geqslant\alpha$, при α натуральном $k=\alpha$), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{cx^{\alpha-k}}{a^x(\ln a)^k}=0.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0 \quad \forall\alpha>0.$$

Функции x^α и $\ln x$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Кроме рассмотренных неопределенностей, встречаются неопределенности вида $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$, 1^∞, определение которых очевидно. Эти неопределенности сводятся к неопределенностям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ алгебраическими преобразованиями.

а. *Неопределенность* $0\cdot\infty$ ($f(x)g(x)$, $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to a$). Ясно, что

$$f(x)g(x)=\frac{f}{1/g}\left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{или} \quad f\cdot g=\frac{g}{1/f}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

---

[1]) Г. Ф. Лопиталь (1661—1704) — французский математик. И. Бернулли (1667—1748) — швейцарский математик.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0 \quad \forall\alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0.$$

б. *Неопределенности вида* 1^∞, 0^0, ∞^0 для выражения f^g сводятся к неопределенности $0\cdot\infty$. Согласно определению этой функции $f^g = e^{g\ln f}$ $(f > 0)$.

Если

$$\lim_{x\to a} g\ln f = k,$$

то

$$\lim_{x\to a} f^g = e^k.$$

в. *Неопределенность* $\infty - \infty$ $(f(x) - g(x),\ f \to +\infty,\ g \to +\infty$ при $x \to a)$. Легко видеть, что

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}\left(\frac{0}{0}\right).$$

§ 4.14. Формула Тейлора[1]

Рассмотрим произвольный многочлен степени n:

$$P_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k,$$

где, таким образом, b_k — постоянные числа — коэффициенты многочлена. Пусть x_0 — любое фиксированное число. Полагая $x = (x - x_0) + x_0$, получим

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k [(x - x_0) + x_0]^k, \tag{1}$$

откуда, возводя в степени квадратные скобки и приводя подобные по степеням $x - x_0$, получим выражение для $P_n(x)$

---

[1]) Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

в следующей форме:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k, \tag{2}$$

называемое *разложением многочлена* $P_n(x)$ *по степеням* $(x-x_0)$. Здесь $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числа, зависящие от b_l и x_0 — коэффициенты разложения P_n по степеням $x-x_0$. Например, $a_0=b_0+b_1x_0+\ldots+b_nx_0^n$. Из (1) очевидно, что $P_n(x)$ на самом деле от x_0 не зависит.

Найдем последовательные производные $P_n(x)$:

$$\left.\begin{aligned}
&P'_n(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1},\\
&P''_n(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+\ldots+n(n-1)\ldots\\
&\qquad\qquad\ldots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)}(x)=1\cdot 2\ldots na_n.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Производные порядка выше n равны нулю. Полагая в формулах (2) и (3) $x=x_0$, получаем

$$P_n(x_0)=a_0,\quad P'_n(x_0)=a_1,$$
$$P''_n(x_0)=1\cdot 2a_2,\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x_0)=k!\,a_k,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$$

или

$$a_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \tag{4}$$

где мы считаем $0!=1$, $P_n^{(0)}(x)=P_n(x)$.

Формулы (4) показывают, что один и тот же многочлен $P_n(x)$ степени n можно разложить по степеням $x-x_0$ единственным образом, т. е. если для всех значений x

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n}\beta'_k(x-x_0)^k,$$

где β_k и β'_k — постоянные, то $\beta_k=\beta'_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$. Ведь как числа β_k, так и β'_k вычисляются по одной и той же формуле (4).

В силу (4) формулу (2) можно переписать так:

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (2')$$

Формула (2′) называется *формулой Тейлора для многочлена* $P_n(x)$ *по степеням* $(x-x_0)$. Отметим, что правая часть (2′) фактически не зависит от x_0.

Пример 1. Пусть $P_n(x)=(a+x)^n$ и $x_0=0$. Тогда в силу (2′)

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

где в данном случае

$$P_n^{(k)}(x)=n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$
$$P_n^{(k)}(0)=n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k},$$

и мы получили известную формулу *бинома Ньютона*

$$(a+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k. \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь любую функцию $f(x)$, которая имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го в некоторой окрестности точки x_0. Мы можем формально составить многочлен

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad (6)$$

которой называется *многочленом Тейлора n-й степени* или *n-м многочленом Тейлора функции f по степеням $x-x_0$*.

Многочлен $Q_n(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в точке x_0, но для всех x он не равен $f(x)$ (если $f(x)$ не является многочленом степени n). Кроме того,

$$Q_n'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots,\ Q_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0). \qquad (7)$$

Положим

$$f(x)=Q_n(x)+r_n(x). \qquad (8)$$

Формула (8) носит название *формулы Тейлора для функции* $f(x)$; $r_n(x)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора*,— подробнее, *n-м остаточным членом формулы Тейлора функции f по степеням $x-x_0$*. Функция $r_n(x)$ показывает, какую погрешность мы допускаем при замене $f(x)$ на многочлен Тейлора (6).

Найдем выражение для $r_n(x)$ через производную $f^{(n+1)}(x)$.

В силу (7) и (8) $r_n(x_0)=r'_n(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0$. Положим $\varphi(x)=(x-x_0)^{n+1}$. Ясно, что $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\ldots$ $\ldots=\varphi^{(n)}(x_0)=0$. Применяя теорему Коши к функциям $r_n(x)$ и $\varphi(x)$, будем иметь

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{r'_n(x_1)}{\varphi'(x_1)}=\frac{r'_n(x_1)-r'_n(x_0)}{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_0)}=\frac{r''_n(x_2)}{\varphi''(x_2)}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)}=\frac{r_n^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

$(x_1\in(x_0,\ x)$ и $x_{k+1}\in(x_0,\ x_k),\ k=1,\ 2,\ \ldots\ n)$.

Но $\varphi^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, $r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0=f^{(n+1)}(x)$. Следовательно,

$$r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \tag{9}$$

где $c=x_{n+1}$ — некоторая точка, лежащая между x_0 и x.

Таким образом, формулу (8) можно записать в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{8'}$$

Формула (8′) называется формулой Тейлора с остаточным членом в *форме Лагранжа.*

Мы доказали важную теорему.

Теорема 1. *Если функция f имеет в окрестности точки x_0 непрерывную производную $f^{n+1}(x)$, то для любого x из этой окрестности найдется точка $c\in(x_0,\ x)$ такая, что $f(x)$ можно записать по формуле* (8′).

Здесь c зависит от x и n.

Если точка $x_0=0$, то формулу (8) называют *формулой Маклорена.*

Известны и другие формы остаточного члена формулы Тейлора. Так, большое значение имеет *форма Коши*

$$r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)), \tag{10}$$

где $\theta\,(0<\theta<1)$ зависит от n и x. Вывод этой формулы будет дан в § 6.5.

Уменьшая окрестность точки x_0, получим, что производная $f^{(n+1)}(x)$ есть непрерывная функция от x на *замкнутом* отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$. Но тогда она ограничена на этом отрезке:

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_n \quad (x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta) \tag{11}$$

(см. § 3.5, теорема 1). Здесь M_n — положительное число, не зависящее от указанных x, но, вообще говоря, зависящее от n. Тогда

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{M_n|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |x-x_0|<\delta. \tag{12}$$

Неравенство (12) можно использовать в двух целях: для того чтобы исследовать поведение $r_n(x)$ при фиксированном n в окрестности точки x_0 и для того, чтобы исследовать поведение $r_n(x)$ при $n\to\infty$.

Из (12), например, следует, что при фиксированном n имеет место свойство

$$r_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right), \quad x\to x_0, \tag{13}$$

показывающее, что если $r_n(x)$ разделить на $(x-x_0)^n$, то полученное частное будет продолжать стремиться к нулю при $x\to x_0$.

В силу (13) из (8′) следует:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right). \tag{14}$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в смысле Пеано*[1]). Она приспособлена для изучения функции f в окрестности точки x_0.

Теорема 2 (единственности). *Пусть одна и та же функция f из различных соображений оказалась представленной в окрестности точки x_0 в виде*

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right),\\ f(x)&=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n+\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

[1]) Д. Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

Тогда

$$a_k=b_k \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{16}$$

Доказательство. Если приравнять правые части (15) и перейти к пределу при $x \longrightarrow x_0$, то получим $a_0=b_0$. Теперь в этом равенстве можно сократить на $(x-x_0)$ $(x \neq x_0)$ и опять перейти к пределу при $x \longrightarrow x_0$. Тогда получим $a_1=b_1$. И так продолжаем до тех пор, пока получим $a_n=b_n$.

Пример 2. Мы знаем, что

$$\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (x \neq 1).$$

Поэтому

$$\psi(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n} x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n). \tag{17}$$

С другой стороны, функция ψ имеет в окрестности точки $x=0$ производные любого порядка, поэтому для нее имеет место формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n). \tag{18}$$

Сопоставляя формулы (17) и (18), на основании теоремы единственности получим

$$1=\frac{\psi^k(0)}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{19}$$

Поведению остаточного члена формулы Тейлора при $n \longrightarrow \infty$ посвящен следующий параграф.

§ 4.15. Ряд Тейлора[1])

Выражение

$$a_0+a_1+\ldots \tag{1}$$

или еще

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \tag{1'}$$

где a_k — числа, зависящие от индекса k, называется *рядом*. Конечные суммы

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

---

[1]) И. Бернулли получил ряды, которые мы связываем с именем Тейлора, в 1694 г., а Тейлор получил их позднее — в 1715 г. (см. Известия ИМН АН, 1896, VII, № 4, Н. Я. Сонин).

называются *частичными суммами* ряда (1) (или (1')). Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{2}$$

то говорят, что ряд (1) сходится к числу S и называют S *суммой* ряда. При этом пишут

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

Если предел частичных сумм S_n (при $n \to \infty$) ряда (1) не существует или равен ∞, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Пусть теперь функция f имеет производные любого порядка в окрестности точки x_0. Для такой функции можно составить ряд следующего вида:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \tag{3}$$

или короче

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{3'}$$

Для каждого отдельного значения x этот ряд может сходиться или расходиться. Множество точек x, для которых ряд (3) сходится, называется *областью сходимости этого ряда*. Независимо от того, сходится или расходится этот ряд, он называется *рядом Тейлора* функции f по степеням $x - x_0$. Если $x_0 = 0$, то соответствующий ряд называют иногда *рядом Маклорена*.

Особый интерес представляет тот случай, когда ряд Тейлора функции f по степеням $(x - x_0)$ сходится в некоторой окрестности точки x_0 и притом к самой функции $f(x)$. Если это имеет место, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)),$$

т. е. функция $f(x)$ есть сумма ее ряда Тейлора в некоторой окрестности точки x_0, иначе говоря, для любого значения $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. В этом случае говорят, что *функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$, сходящийся к ней.*

Теорема 1. *Если функция f имеет на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ производные любого порядка и остаток ее формулы Тейлора стремится к нулю при $n\to\infty$*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \qquad (x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]) \tag{4}$$

на этом отрезке, то f разлагается в сходящийся к ней ряд Тейлора на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция f имеет на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ производные любого порядка. Тогда эти производные непрерывны на $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, потому что, если f имеет производную $f^{(k)}$ на $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, то производная $f^{(k-1)}$ непрерывна на $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$.

Поэтому для нашей функции имеет смысл формула Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x) \qquad \forall n,\ x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta].$$

Тогда в силу (4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim_{n\to\infty}[f(x)-r_n(x)]=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty} r_n(x)=f(x),$$

т. е. в этом случае многочлен Тейлора функции $f(x)$ (по степеням $x-x_0$) стремится при $n\to\infty$ к самой функции:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(x) \qquad (x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]). \tag{5}$$

А это означает, что ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится на $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ и имеет своей суммой $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема дает простой достаточный критерий сходимости остатка формулы Тейлора к нулю.

Теорема 2. *Если функция f имеет на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом ($|f^{(n)}(x)|\leqslant M$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$*

$x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$), *то остаток ее формулы Тейлора на этом отрезке стремится при* $n\to\infty$ *к нулю*:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Лагранжа остаточного члена, получим

$$|r_n(x)|=\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(c)|\leqslant\frac{M\cdot\delta^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{7}$$

($c\in(x_0,\ x)$, $M\geqslant|f^{(n+1)}(x)|$ $\forall n$ и $|x-x_0|<\delta$).

Так как правая часть (7) стремится к нулю при $n\to\infty$ (см. § 2.5, (5)), то имеет место (6).

§ 4.16. Формулы и ряды Тейлора элементарных функций

1. $f(x)=e^x$. Эта функция бесконечно дифференцируема (имеет производные любого порядка) на $(-\infty,\ \infty)$. При этом

$$f^{(k)}(x)=e^x,\qquad f^{(k)}(0)=1\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots),\qquad f^{(n+1)}(c)=e^c.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+r_n(x),\qquad r_n(x)=\frac{e^cx^{n+1}}{(n+1)!},\qquad c\in(0,\ x), \tag{1}$$

где x может быть положительным и отрицательным. На отрезке $[-A,\ A]$, $A>0$,

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{e^AA^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2}$$

Это показывает (см. теорему 1 § 4.15), что функция e^x разлагается на $[-A,\ A]$ в сходящийся к ней ряд Тейлора по степеням x (ряд Маклорена):

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{3}$$

Но $A>0$ — произвольное число, поэтому это равенство имеет место на всей действительной оси ($x\in(-\infty,\ \infty)$). В данном случае $|f^{(k)}(x)|=|e^x|\leqslant e^A$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ на отрезке $[-A,\ A]$, и чтобы получить равенство (3), можно было бы воспользоваться теоремой 2 § 4.15.

Вычислим число e с точностью до 0,001. Имеем (см. (1))

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+r_n(1), \tag{4}$$

где

$$r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!} \qquad (0<c<1). \tag{5}$$

Надо подобрать n настолько большим, чтобы

$$r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}\leqslant 0{,}001 \qquad (0<c<1).$$

Так как $e^c<3$, то для этого достаточно решить неравенство $3/(n+1)!\leqslant 0{,}001$. Оно выполняется при $n=6$. Следовательно,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{6!}=2{,}718$$

с точностью до 0,001.

Примечание. Так как $1<e^c<3$ при $0<c<1$, то при $n>2$ $e^c/(n+1)=\theta$, где $0<\theta<1$. Поэтому равенство (4) можно записать в следующем виде:

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{n!}.$$

Эта формула была использована (в § 2.6, формула (3)) для доказательства иррациональности числа e.

2. $y=\sin x$. Данная функция имеет производную любого порядка и

$$|(\sin x)^{(k)}|=\left|\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1 \qquad \forall k.$$

Поэтому по теореме 2 § 4.15 функция $\sin x$ разлагается в сходящийся к ней на $(-\infty, \infty)$ ряд Тейлора по степеням x:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Надо учесть, что

$$(\sin x)^{(n)}|_{x=0}=\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases} 0 & \text{при } n=2k,\\ (-1)^k & \text{при } n=2k+1.\end{cases}$$

Формула Тейлора функции $\sin x$ по степеням x имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + r_{2\nu}(x), \tag{6}$$

где

$$r_{2\nu}(x) = \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \sin\left(\theta x + (2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Отсюда следует, что

$$r_{2\nu}(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^{2\nu})$$

и

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu+1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2\nu}).$$

3. $y = \cos x$. Совершенно аналогично можно получить, что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \tag{7}$$

поэтому

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3} \underset{x \to 0}{=} -\frac{1}{3!} + \underset{x \to 0}{o(1)} \to -\frac{1}{3!},$$

т. е.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

На самом деле в (7) остаток имеет вид $\underset{x \to 0}{o}(x^4)$. Но для наших целей достаточно $\underset{x \to 0}{o}(x^3)$. Надо иметь в виду, что если некоторая функция от x есть $\underset{x \to 0}{o}(x^4)$, то она есть также $\underset{x \to 0}{o}(x^3)$ (но вообще не наоборот!).

4. *Функция* $f(x) = \ln(1+x)$ определена и сколько угодно раз дифференцируема для $x > -1$. Поэтому для нее формулу Тейлора можно написать для любого $n = 1, 2, \ldots$ при $x > -1$. Так как

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!,$$

то формула Тейлора имеет вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+r_n(x).$$

Используя формы Лагранжа и Коши остаточного члена, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \quad \text{при} \quad -1<x\leqslant 1.$$

В самом деле, используя форму Лагранжа остаточного члена, имеем для $0\leqslant x\leqslant 1$:

$$|r_n(x)|=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\leqslant\frac{1}{n+1}\to 0 \qquad (n\to\infty,\ 0<\theta<1);$$

используя форму Коши остаточного члена (см. § 4.14, (10)), имеем для $-1<x<0$:

$$|r_n(x)|=\left|(-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\to 0 \qquad (n\to\infty,\ 0<\theta<1).$$

Поэтому функция $\ln(1+x)$ разлагается в указанном промежутке в ряд Тейлора по степеням x:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

5. *Функция* $f(x)=(1+x)^m$. Для этой функции

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Формула Тейлора по степеням x имеет вид

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Можно доказать, что при любом m

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \qquad (-1<x<1).$$

Поэтому для любого действительного m имеет место разложение функции $(1+x)^m$ в ряд Тейлора по степеням x

$$(1+x)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k \qquad (-1<x<1). \tag{8}$$

Если m натуральное, то функция $(1+x)^m$ есть многочлен. В этом случае $r_n(x)\equiv 0$ для $n>m$, и ряд справа в (8) представляет собой конечную сумму — многочлен Тейлора (см. § 4.14).

При $x=\pm 1$ исследование поведения остаточного члена (в форме Коши или Лагранжа) требует больших усилий. Отметим лишь, что при $x=1$ ряд Тейлора (8) сходится при $m>-1$, а при $x=-1$ для $m>0$.

Приведем частные случаи ряда (8) при $m=-1$, $m=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad (-1<x<1)$$

— обыкновенная геометрическая прогрессия, расходящаяся при $x=\pm 1$;

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-$$
$$-\frac{5}{128}x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n+\ldots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1);$$

здесь ряд справа сходится при $x=\pm 1$.

Пример 2. Вычислить предел ($m\neq n$, $m\neq 0$, $n\neq 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{m}+o(x)-\left(1+\frac{x}{n}+o(x)\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+o(1)\right]=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x(1+x)^\alpha}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x(1+\alpha x+o(x))}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}-\alpha+o(1)\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}-\alpha.$$

§ 4.17. Локальный экстремум функции

Определение локального экстремума было дано в начале § 4.12. Очевидно, ему можно придать и следующую форму.

Функция $y=f(x)$ достигает в точке c локального максимума (минимума), если можно указать такое $\delta>0$, что ее приращение Δy в точке c удовлетворяет неравенству

$$\Delta y=f(x)-f(c)\leqslant 0 \qquad \forall x\in(c-\delta,\ c+\delta)$$

(соответственно $\Delta y=f(x)-f(c)\geqslant 0 \quad \forall x\in(c-\delta,\ c+\delta)$).

По теореме Ферма (см. § 4.12), если функция f достигает в точке x_0 локального экстремума и в этой точке производная $f'(x_0)$ существует, то последняя равна нулю:

$$f'(x_0)=0.$$

По определению точка x_0 называется *стационарной для функции* f, если в ней производная от f существует и равна нулю ($f'(x_0)=0$).

Если задана на некотором интервале (a, b) функция f и надо найти все ее точки локального экстремума, то их, очевидно, надо искать среди, во-первых, стационарных точек, т. е. таких, в которых производная f' существует и равна нулю и, во-вторых, среди точек, где f не имеет производной, если таковые на самом деле имеются. Стационарные точки находятся из уравнения

$$f'(x)=0, \tag{1}$$

которое надо решить. Конечно, не всякая стационарная точка функции f есть точка локального экстремума f.

Условие (1) является *необходимым* для того, чтобы дифференцируемая функция f имела в точке x локальный экстремум, но недостаточным. Например, $x=0$ есть стационарная точка функции x^3, но в ней эта функция возрастает.

Очевидно также, что не всякая точка, где f не имеет производной, есть точка локального экстремума f.

Так или иначе, если нам уже известно, что x_0 есть стационарная точка или точка, где производная от f не существует, нам нужны критерии распознавания, будет ли действительно эта точка точкой локального экстремума, а если будет, то какого — максимума или минимума.

Ниже мы приводим достаточные критерии локального экстремума.

Теорема 1. *Пусть x_0 — стационарная точка функции f (т. е. $f'(x_0)=0$) и f имеет вторую непрерывную производную в окрестности x_0. Тогда:*

если $f''(x_0)<0$, то x_0 есть точка локального максимума f;

если же $f''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка локального минимума f.

Доказательство. Разложим f по формуле Тейлора по степеням $(x-x_0)$ при $n=1$. Так как $f'(x_0)=0$, то формула Тейлора функции f в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(c) \qquad (c \in (x_0,\ x)). \tag{2}$$

В этой формуле может быть $x \gtrless x_0$.

Пусть $f''(x_0) < 0$. Так как производная f'' по условию непрерывна в окрестности x_0, то найдется $\delta > 0$ такое, что

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta).$$

Но тогда остаточный член в формуле (2)

$$\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(c) \leqslant 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta),$$

что показывает, что

$$\Delta y = f(x)-f(x_0) \leqslant 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta),$$

т. е. f имеет в x_0 локальный максимум.

Аналогично, если $f''(x_0) > 0$, то $f''(x) > 0$ в некоторой окрестности x_0 и $f''(c) > 0$. Поэтому остаточный член формулы (2) в окрестности x_0 неотрицательный, а вместе с ним и $\Delta y = f(x)-f(x_0) \geqslant 0$, т. е. f имеет в x_0 локальный минимум.

Пример 1. $y=x^2+5$, $y'=2x$, $x=0$—стационарная точка; $y''=2>0$ для всех x, следовательно, и в точке $x=0$. Значит, в точке $x=0$—локальный минимум.

Замечание 1. Если

$$f'(x_0)=0 \quad \text{и} \quad f''(x_0)=0, \tag{3}$$

то функция f может иметь и не иметь экстремума в x_0. Например, функции x^3 и x^4 удовлетворяют условиям (3) в точке $x_0=0$, но первая из них не имеет экстремума в этой точке, а вторая—имеет, а именно, минимум.

Теорема 2. *Пусть $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0$ и $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, и непрерывна в окрестности точки x_0, тогда:*

если $(n+1)$—четное и $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то f имеет в x_0 локальный максимум;

если $(n+1)$—четное и $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то f имеет в x_0 локальный минимум;

если $(n+1)$ — нечетное и $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, то f заведомо не имеет в x_0 локального экстремума.

Доказательство этой теоремы снова основано на применении формулы Тейлора. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\quad (c\in(x_0,\ x)). \tag{4}$$

В случае, если $(n+1)$ — четное, рассуждаем в точности так же, как в случае формулы (2). Пусть теперь $(n+1)$ — нечетное, и пусть, как было предположено, $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. Вследствие непрерывности $f^{(n+1)}$ в окрестности x_0 существует интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, на котором $f^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак $f^{(n+1)}(x_0)$. Если x будет возрастать в окрестности x_0 слева направо, то $(x-x_0)^{n+1}$ при переходе через x_0 переменит знак, а $f^{(n+1)}(c)$ будет сохранять один и тот же знак. Это показывает, что правая часть (4) и, следовательно, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ при переходе x через x_0 меняет знак и экстремум в x_0 невозможен.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ и имеет производную $f'(x)$ отдельно на интервалах $(x_0-\delta,\ x_0)$ и $(x_0,\ x_0+\delta)$. При этом*

$$f'(x)\geqslant 0\quad (\leqslant 0)\quad \textit{на}\quad (x_0-\delta,\ x_0), \tag{5}$$

$$f'(x)\leqslant 0\quad (\geqslant 0)\quad \textit{на}\quad (x_0,\ x_0+\delta). \tag{6}$$

Тогда x_0 есть точка локального максимума (минимума) функции f.

Здесь не обязательно предполагается, что $f'(x_0)$ существует.

Доказательство. Из непрерывности f на отрезке $[x_0-\delta,\ x_0]$ и свойства (5) следует (см. теорему 5 § 4.12), что f не убывает (не возрастает) на этом отрезке и, следовательно,

$$f(x_0)-f(x)\geqslant 0\quad (\leqslant 0)\quad \text{для}\ x\in[x_0-\delta,\ x_0]. \tag{7}$$

А из непрерывности f на $[x_0,\ x_0+\delta]$ и свойства (6) следует (см. ту же теорему 5 § 4.12)

$$f(x)-f(x_0)\leqslant 0\quad (\geqslant 0)\quad \text{для}\quad x\in[x_0,\ x_0+\delta]. \tag{8}$$

Но тогда из (7) и (8) следует:

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (f(x)\geqslant f(x_0))\quad \forall x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta],$$

и мы доказали теорему 3.

Теорема 3 утверждает, что если первая производная функции f при переходе через точку x_0 меняет знак, то f имеет в точке x_0 минимум (рис. 52), если знак меняется (при возрастании x!) с — на +, и максимум (рис. 53), если он меняется с + на —. При этом не обязательно,

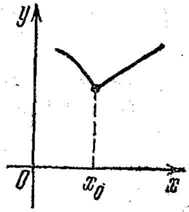

Рис. 52.

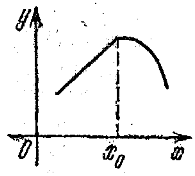

Рис. 53.

чтобы $f'(x_0)$ существовала. Но требуется, чтобы f была непрерывна в точке x_0 $\left(\text{рассмотреть функцию } f(x) = \begin{cases} 1+x, & x<0, \\ -x, & x \geqslant 0 \end{cases}\right)$.

Пример 2. Функция $y = \frac{1}{1+x^2}$; $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Мы видим, что $y' > 0$ при $x < 0$, $y' < 0$ при $x > 0$ и, кроме того, y непрерывна в точке $x=0$, поэтому по теореме 3 функция y имеет локальный максимум в точке $x=0$. Других локальных экстремумов функция не имеет.

Пример 3. Функция $y = 2 - x^2\left(1 - \sin\frac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$, $y(0) = 2$, непрерывна в точке $x=0$ и имеет локальный максимум: $y(x) \leqslant 2 = y(0)$, $\forall x$. Однако *нельзя выделить окрестность точки* $x=0$ так, чтобы в ней при $x<0$ функция возрастала, а при $x>0$ убывала. В самом деле,

$$y' = -2x\left(1 - \sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2 - x^2\left(1 - \sin\frac{1}{x}\right) - 2}{x} = -\lim_{x\to 0} x\left(1 - \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

При малых x слагаемое $2x\left(1 - \sin\frac{1}{x}\right)$ как угодно мало, поэтому знак производной y' зависит от $\cos\frac{1}{x}$. При $x \to 0$ $\cos\frac{1}{x}$ принимает значения ± 1 сколько угодно раз. Значит, во всякой окрестности точки $x=0$ функция колеблющаяся.

Теорема 4. *Пусть функция f удовлетворяет условиям $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$ (<0). Тогда f в точке x_0 имеет локальный минимум (максимум).*

Доказательство. Так как

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

то на основании теоремы 2 § 3.2 $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ в достаточно малой окрестности точки x_0, т. е. $f'(x)<0$ для $x<x_0$ и $f'(x)>0$ для $x>x_0$. По теореме 3 заключаем, что в точке x_0 локальный минимум. Случай $f''(x_0)<0$ исследуется аналогично.

Замечание 1. Теорема 4 содержит в себе теорему 1 как частный случай, потому что в ней не предполагается, что $f''(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0. Требуется лишь существование $f''(x_0)$.

§ 4.18. Экстремальные значения функции на отрезке

Пусть надо найти максимум (минимум) функции f, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Тот факт, что f достигает максимума (минимума) на $[a, b]$ в некоторой точке $x_0\in$ $\in[a, b]$, доказан в теореме 2 § 3.5.

Могут быть только три возможности: 1) $x_0=a$, 2) $x_0=b$, 3) $x_0\in(a, b)$.

Если $x_0\in(a, b)$, то, согласно сказанному в предыдущем § 4.17, точка x_0 будет точкой локального экстремума, и ее следует искать либо среди стационарных точек, либо среди точек, где производная не существует.

Если указанные точки образуют конечное множество $x_1, \ldots, x_m$, то

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_m)\}$$
$$\left(\min_{x\in[a,b]} f(x)=\min\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_m)\}\right).$$

Отметим, что нет необходимости выяснять характер стационарных точек, если мы поставили себе только задачу найти максимум (минимум) функции f на $[a, b]$.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$\psi(x)=\sin x+\cos x \quad \text{на} \quad [0, \pi].$$

Находим производную: $\psi'(x)=\cos x-\sin x$. Приравниваем ее нулю:

$$\cos x-\sin x=0.$$

Это уравнение имеет на отрезке $[0, \pi]$ единственное решение $x=\pi/4$. Так как $\psi(0)=1$, $\psi(\pi/4)=\sqrt{2}$, $\psi(\pi)=-1$, то

$$\max_{x\in[0,\pi]}\psi(x)=\sqrt{2},\quad \min_{x\in[0,\pi]}\psi(x)=-1.$$

Пример 2. Пусть электрическая лампа может передвигаться по вертикали OB (оси h). На плоскости, перпендикулярной OB, возьмем точку A (на оси x). На какой высоте надо подвесить лампу, чтобы в точке A была наилучшая освещенность (рис. 54).

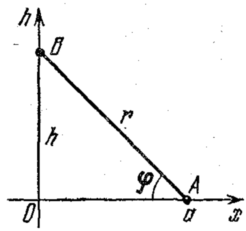

Рис. 54.

Решение. Поместим лампу в точку B, и пусть $AB=r$, $OB=h$, $OA=a$, $\angle OAB=\varphi$. Известно, что освещенность I в точке A определяется по закону $I=c\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, где c — коэффициент пропорциональности. Примем h за аргумент функции I. Так как $r^2=h^2+a^2$, $\sin\varphi=\dfrac{h}{r}$, то $I(h)=c\dfrac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}$.

По смыслу задачи $0\leqslant h\leqslant\infty$. Найдем наибольшее значение этой функции. $I(0)=I(\infty)=0$[1]. Далее

$$I'(h)=c\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}=0 \quad\text{при}\quad h=a/\sqrt{2}.$$

Так как $I(a/\sqrt{2})=2c/3\sqrt{3}a^2>0$, то наибольшее значение функция $I(h)$ принимает в точке $h=a/\sqrt{2}$.

Таким образом, лампу надо подвесить на высоте $h=a/\sqrt{2}$.

§ 4.19. Выпуклость кривой. Точка перегиба

Говорят, что *кривая $y=f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху (книзу)*, если существует окрестность x_0 такая, что для всех точек этой окрестности касательная

[1]) В данном случае $I(\infty)=\lim\limits_{h\to+\infty}I(h)$.

к кривой в точке x_0 (т. е. в точке, имеющей абсциссу x_0) расположена выше (ниже) самой кривой (на рис. 55 в точке x_1 кривая обращена выпуклостью книзу, в точке x_2 — кверху). Вместо слов «выпукла кверху (книзу)» употребляются слова *«вогнута книзу (кверху)»*.

Говорят, что точка x_0 есть *точка перегиба кривой* $y=f(x)$, если при переходе x через x_0 точка кривой (имеющая абсциссу x) переходит с одной стороны касательной на другую (на рис. 55 точка x_3 — точка перегиба). Иначе говоря, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0-\delta, x_0)$ кривая находится с одной стороны касательной в x_0, а для всех $x \in (x_0, x_0+\delta)$ — с другой.

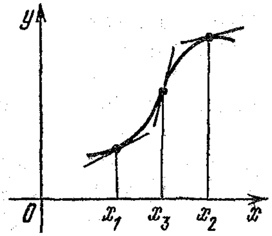

Рис. 55.

Указанные определения выделяют возможные расположения кривой относительно касательной к ней в достаточно малой окрестности точки касания. Но не нужно думать, что эти определения исчерпывают все возможные случаи такого расположения. Для функции

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0, \end{cases}$$

ось x пересекает и касается графика функции в точке $x=0$ и $x=0$ не есть точка перегиба.

Теорема 1. *Если функция f имеет в точке x_0 вторую непрерывную производную и $f''(x_0)>0$ (<0), то кривая $y=f(x)$ обращена в x_0 выпуклостью книзу (кверху).*

Доказательство. Разлагаем f в окрестности $x=x_0$ по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r_1(x),$$
$$r_1(x)=\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (0<\theta<1).$$

Запишем уравнение касательной к нашей кривой в точке, имеющей абсциссу x_0:

$$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Тогда превышение кривой f над касательной к ней в точке x_0 равно

$$f(x)-Y=r_1(x).$$

Таким образом, остаток $r_1(x)$ равен величине превышения кривой f над касательной к ней в точке x_0. В силу непрерывности f'', если $f''(x_0)>0$, то и $f''(x_0+\theta(x-x_0))>0$ для x, принадлежащих достаточно малой окрестности точки x_0, а потому, очевидно, и $r_1(x)>0$ для любого отличного от x_0 значения x, принадлежащего к указанной окрестности.

Значит, график функции лежит выше касательной и кривая обращена в точке x_0 выпуклостью книзу.

Аналогично, если $f''(x_0)<0$, то $r_1(x)<0$ для любого отличного от x_0 значения x, принадлежащего к некоторой окрестности точки x_0, т. е. график функции лежит ниже касательной и кривая обращена в x_0 выпуклостью кверху.

Следствие. *Если x_0 есть точка перегиба кривой $y=f(x)$ и в ней существует вторая производная $f''(x_0)$, то последняя необходимо равна нулю* ($f''(x_0)=0$).

Этим пользуются на практике: при нахождении точек перегиба дважды дифференцируемой кривой $y=f(x)$ ищут их среди корней уравнения $f''(x)=0$.

Достаточное условие для существования точки перегиба у кривой дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Если функция f такова, что производная f''' непрерывна в x_0, а $f''(x_0)=0$ и $f'''(x_0)\neq 0$, то кривая $y=f(x)$ имеет в x_0 точку перегиба.*

Доказательство. В этом случае

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r_2(x),$$

$$r_2(x)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x+\theta(x-x_0)).$$

В силу непрерывности f''' в x_0 и того факта, что $f'''(x_0)\neq 0$, следует, что $f'''(x_0+\theta(x-x_0))$ сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0; он один и тот же справа и слева от точки x_0. С другой стороны, множитель $(x-x_0)^3$ меняет знак при переходе x через x_0, а вместе с ним и величина $r_2(x)$ (равная превышению точки кривой над касательной в x_0) меняет знак при переходе x через x_0. Это доказывает теорему.

Сформулируем более общую теорему:

Теорема 3. *Пусть функция f обладает следующими свойствами:*

$$f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0,$$

$f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в x_0 и $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$.

Тогда, если n — нечетное число, то кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью вверх или вниз в зависимости от того, будет ли $f^{(n+1)}(x_0)<0$ или $f^{(n+1)}(x_0)>0$, а если n—четное, то x_0 есть точка перегиба кривой.

Доказательство основано на том, что при указанных условиях имеет место разложение по формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

В заключение заметим, что говорят также, что кривая $y=f(x)$ имеет точку перегиба в точке x, где производная f' равна $+\infty$ или $-\infty$ (см. рис. 40 и 41 § 4.2).

По определению кривая $y=f(x)$ называется *выпуклой кверху (книзу) на отрезке* $[a, b]$, если любая дуга этой кривой с концами в точках с абсциссами x_1, x_2 $(a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$ расположена не ниже (не выше) стягивающей ее хорды (рис. 56 и 57).

Замечание. Если f дифференцируема на $[a, b]$, то приведенное определение выпуклости на отрезке эквивалентно следующему: кривая $y=f(x)$ называется *выпуклой кверху (книзу) на отрезке* $[a, b]$, если она выпукла кверху (книзу) в каждой точке x интервала (a, b).

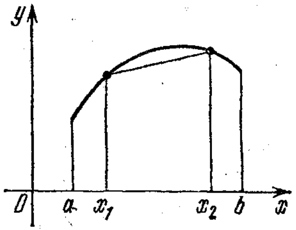

Рис. 56.

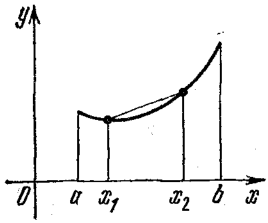

Рис. 57.

Теорема 4. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет вторую производную на (a, b).*

Для того чтобы кривая $y=f(x)$ была выпуклой кверху (книзу) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''(x)\leqslant 0$ $(f''(x)\geqslant 0)$ для всех $x\in(a, b)$.

Эту теорему мы не будем доказывать.

Пример 1. Функция $y=\sin x$ имеет непрерывную первую производную и вторую производную $(\sin x)''=-\sin x\leqslant 0$ на $[0, \pi/2]$. Поэтому хорда OA, стягивающая дугу кривой $y=\sin x$ на $[0, \pi/2]$, ниже синусоиды (рис. 58). Так как уравнение хорды $y=(2/\pi)x$, то мы получили неравенство

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$$

часто употребляемое в математическом анализе.

Пример 2. $y=x^3+3x^2=x^2(x+3)$; $y'=3x^2+6x$, $y'=0$ при $x=0$, $x=-2$; $y''=6x+6$, $y''(0)=6>0$,

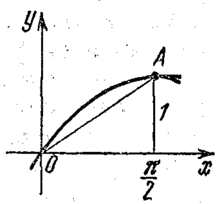

Рис. 58.

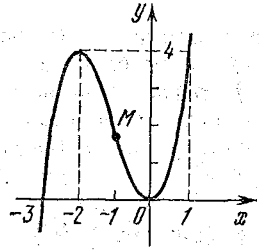

Рис. 59.

$y''(-2)=-6<0$, $y''=0$ при $x=-1$; $y'''=6\neq 0$. Так как $y'''(x)=6\neq 0$, то в точке $x=-1$ — перегиб. Далее $y''(x)>0$ при $x>-1$, $y''(x)<0$ при $x<-1$. Значит, график функции (рис. 59) выпуклый кверху на $(-\infty, -1)$ и выпуклый книзу на $(-1, \infty)$; $x=0$ — точка минимума, $x=-2$ — точка максимума.

§ 4.20. Асимптота графика функции

Говорят, что прямая $x=a$ является *вертикальной асимптотой* графика непрерывной функции $y=f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$

равен ∞.

Если функция $y=f(x)$ задана для $x>M$ $(x<M)$, то говорят, что прямая $Y=kx+b$ является *наклонной асимптотой* непрерывной кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ (x\to-\infty)}} \alpha(x)=0$, (т. е. $|f(x)-kx-b|$ — бесконечно малая функция при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$).

Пример 1. $y=1/x$ (рис. 60); $x=0$—вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty.$$

Пример 2. $y=x+\frac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, то прямая $Y=x$ (рис. 61) есть наклонная асимптота при $x\to+\infty$ (и при $x\to-\infty$).

Пример 3. $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$. Ясно, что $\sqrt{x}-kx-b$ не стремится к нулю при $x\to+\infty$ ни при каких k и b, значит, функция $y=\sqrt{x}$ наклонных асимптот не имеет.

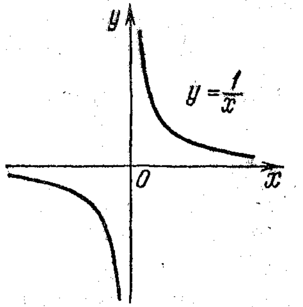

Рис. 60.

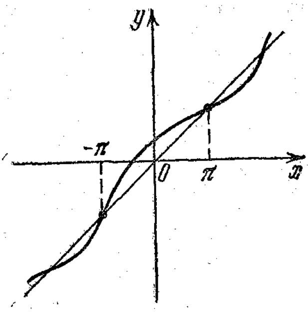

Рис. 61.

Теорема. *Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b, \tag{1}$$

и тогда прямая $Y=kx+b$ есть асимптота.

Доказательство. 1) Пусть функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x\to+\infty$, $Y=kx+b$. Тогда $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$, $x\to+\infty$. Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b.$$

2) Пусть указанные в теореме пределы при $x\to+\infty$ существуют, тогда из второго равенства, по определению

предела, имеем

$$f(x)-kx-b=\alpha(x), \text{ где } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to+\infty,$$

т. е. $f(x)=kx+b+\alpha(x)$. Значит, прямая $Y=kx+b$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$. Такое же рассуждение и при $x\to-\infty$.

Если $k=0$, то *асимптота* называется *горизонтальной*.

Замечание. Существование двух *конечных* пределов (1) существенно, ибо для функции $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0=k, \text{ но } \lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x}-0\cdot x]=\infty, \text{ т. е. } b=\infty,$$

и эта функция асимптот не имеет.

Можно дать также следующее эквивалентное определение наклонной асимптоты.

Если расстояние $\rho(x)$ от точки $A(x, f(x))$ непрерывной кривой $y=f(x)$ до прямой $y=kx+b$ стремится к нулю при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то данная прямая называется наклонной асимптотой этой кривой при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

В самом деле, из аналитической геометрии известно, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до прямой $y=kx+b$ выражается формулой

$$\rho(x)=|f(x)-kx-b|/\sqrt{1+k^2},$$

откуда из того, что $|f(x)-kx-b|\to 0$, следует, что $\rho(x)\to 0$, и наоборот.

Пример 4. Выяснить, имеются ли асимптоты у гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (|x|\geqslant a,\ a\geqslant b>0).$$

Разрешая данное уравнение относительно y, будем иметь

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\right]=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-a^2}-x]=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

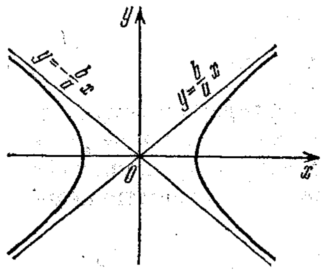

Рис. 62

Таким образом, на основании доказанной теоремы прямые

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

являются асимптотами нашей гиперболы, причем знак $+$ относится к правой верхней половине гиперболы, а знак $-$ относится к правой нижней половине гиперболы.

В силу симметрии ясно, что эти прямые являются асимптотами и при $x\to-\infty$. В этом случае знак $+$ отвечает части гиперболы, находящейся в третьей четверти, а знак $-$ относится к части гиперболы, находящейся во второй четверти (рис. 62).

§ 4.21. Непрерывная и гладкая кривая

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\quad (a<t<b), \tag{1}$$

где φ и ψ — непрерывные функции на $(a,\ b)$, определяют *непрерывную кривую, заданную при помощи параметра* t, т. е. геометрическое место точек $(\varphi(t),\ \psi(t))$, упорядоченных при помощи параметра $t\in(a,\ b)$. При возрастании t точка $(\varphi(t),\ \psi(t))$ движется по плоскости. Не исключено, что разным t (t_1 и t_2) — соответствует одна и та же точка плоскости: $(\varphi(t_1),\ \psi(t_1))=(\varphi(t_2),\ \psi(t_2))$.

Непрерывная кривая (1) называется *гладкой на* $(a,\ b)$ (*на* $[a,\ b]$), если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывную производную на $(a,\ b)$ (на $[a,\ b]$) и выполняется неравенство

$$\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2>0\quad \forall t\in(a,\ b)\quad (\forall t\in[a,\ b]). \tag{2}$$

Обозначим кривую (1) через Г. Пусть $t_0\in(a,\ b)$. В силу условия (2) одно из чисел $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ отлично от нуля. Пусть для определенности $\varphi'(t_0)\neq 0$. Но тогда в силу непрерывности $\varphi'(t)$ существует интервал $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$, на котором $\varphi'(t)$ сохраняет знак $\varphi'(t_0)$. Следовательно, $\varphi(t)$ строго монотонна на $[t_0-\delta,\ t_0+\delta]$ и, кроме того, как мы знаем, непрерывно дифференцируема. В таком случае функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную

$$t=\varphi^{-1}(x)=g(x) \quad (x\in(c,\ d)), \tag{3}$$

строго монотонную и непрерывно дифференцируемую на некотором интервале $(c,\ d)$ — окрестности точки $x_0=\varphi(t_0)$.

Подставляя выражение для t во второе уравнение (1), получим, что кусок γ нашей кривой Г, соответствующий интервалу $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$, описывается непрерывно дифференцируемой функцией (см. § 4.4, теорема 1)

$$y=F(x)=\psi[\varphi^{-1}(x)] \quad (x\in(c,\ d)), \tag{4}$$

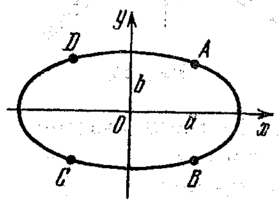

Рис. 63.

и потому в любой точке γ существует касательная, не параллельная оси y. Очевидно, точки γ взаимно однозначно проектируются на ось x.

Если теперь $\psi'(t_0)\neq 0$, то, рассуждая аналогично, получим, что кусок γ_1 кривой Г, соответствующий достаточно малому интервалу $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$, описывается непрерывно дифференцируемой функцией

$$x=\Phi(y)=\varphi[\psi^{-1}(y)] \quad (y\in(c_1,\ d_1)). \tag{5}$$

Отсюда следует, что и в этом случае в любой точке γ_1 существует касательная, но теперь она не параллельна оси x.

Таким образом, в любой точке гладкой кривой Г существует касательная, которая может быть параллельной одной из осей координат.

Пример. Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t \end{aligned}\right\} \quad (-\infty<t<\infty)$$

определяют в параметрической форме кривую — эллипс с полуосями a и b (рис. 63).

Это гладкая кривая, потому что функции $x=a\cos t$ и $y=b\sin t$ имеют непрерывные производные, одновременно не равные нулю:

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2=(a\sin t)^2+(b\cos t)^2\geqslant$$
$$\geqslant b^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=b^2>0 \qquad (0<b\leqslant a).$$

Точки A, B, C, D (см. рис. 63) делят эллипс на четыре гладких куска, каждый из них проектируется взаимно однозначно либо на ось x, либо на ось y.

§ 4.22. Схема построения графика функции

Если нужно в общих чертах представить себе график функции $y=f(x)$, могут помочь следующие указания.

1. Найти область Ω значений x, где функция f определена.

2. Найти точки $x_1, x_2, \ldots$, где $f'(x)=0$ или производная не существует, в частности равна ∞. Вычислить значения f в этих точках: $f(x_1), f(x_2), \ldots$, если они существуют, и определить, не являются ли они точками максимума, минимума. Если f не определена в какой-либо из точек x_k, то важно знать пределы $f(x_k-0)$, $f(x_k+0)$, важно также определить пределы

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

если они имеют смысл.

3. Область Ω разделяется точками x_k на интервалы (a, b), на каждом из которых $f'(x)\neq 0$. Среди них могут быть бесконечные интервалы (вида $(-\infty, c)$ или (d, ∞)).

Будем считать, что производная $f'(x)$ непрерывна на каждом таком интервале (a, b). Тогда $f'(x)$ на (a, b) сохраняет знак. Важно выяснить этот знак, тогда будет известно, будет ли f возрастать или убывать на (a, b).

4. Важно отметить на каждом интервале (a, b) точки

$$x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots \quad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

где $f''(x)=0$, и определить соответствующие значения функции

$$f(x_{k,1}), f(x_{k,2}), \ldots .$$

В этих точках могут быть точки перегиба кривой $y=f(x)$. Эти точки в свою очередь делят (a, b) на интервалы, на которых вторая производная, если она существует, сохраняет знак.

Выяснение знака $f''(x)$ дает возможность узнать направление выпуклости кривой (вверх или вниз).

5. Если возможно, надо решить уравнение $f(x)=0$ и выяснить интервалы, на которых f сохраняет знак ($f(x)>0$ или $f(x)<0$).

6. Выяснить вопрос о существовании асимптот, т. е. найти пределы

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = b,$$

если они существуют.

На основе этих сведений желательно составить таблицу, примерно следующего вида:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	>0	0	<0	—	<0	0	>0
y	возрастает асимптота $y=x-1$	-4	убывает	вертикальная асимптота	убывает	0	возрастает, асимптота $y=x-1$
y''	<0	<0	<0	—	>0	>0	>0
y	выпукла кверху	max	выпукла кверху	—	выпукла книзу	min	выпукла книзу

Эта таблица составлена для функции $y = f(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

На основании данных этой таблицы график функции $y = f(x)$ имеет вид, как на рис. 64.

Пример. Построить кривую, заданную параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= te^t, \\ y &= te^{-t} \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < t < \infty). \tag{1}$$

Решение. Построим сначала график функции $x = te^t$. Эта функция задана на всей оси, неограниченная, непрерывная и дифференцируемая на $(-\infty, \infty)$; $x > 0$ при $t > 0$; $x < 0$ при $t < 0$; $x = 0$ при $t = 0$. Далее $x' = (1 + t)e^t$. Уравнение $x'(t) = 0$ имеет единственный корень $t = -1$. При этом, очевидно, $x' > 0$ при $t > -1$; $x' < 0$ при $t < -1$. Таким образом, функция $x(t)$ возрастает при $t > -1$ и убывает при $t < -1$. В точке $t = -1$ функция $x(t)$ имеет локальный минимум, $x(-1) = -e^{-1}$. На самом деле это, очевидно, минимум на $(-\infty, \infty)$.

Исследуем функцию на выпуклость: $x''=(2+t)e^t$; $x''>0$ при $t>-2$; $x''<0$ при $t<-2$; $x''(-2)=0$. Значит, на $(-\infty, -2)$ график выпуклый кверху, а на $(-2, \infty)$ выпуклый книзу, $t=-2$ — точка перегиба.

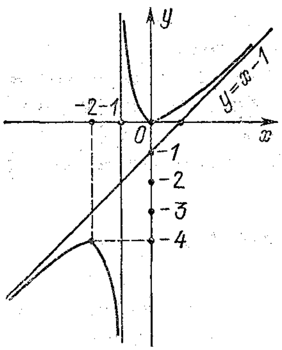

Рис. 64.

Далее,

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{te^t}{t}=0, \qquad \lim_{t\to-\infty}[te^t-0]=0,$$

т. е. $x=0$ — горизонтальная асимптота.

На основании этого график функции имеет вид как на рис. 65. Область значений функции $X=[-e^{-1}, \infty)$.

Совершенно аналогично можно построить график функции $y=te^{-t}$ (рис. 66). Область значений этой функции $Y=(-\infty, e^{-1})$. На $(-\infty, 1)$ функция $y=te^{-t}$ строго возрастает от $-\infty$ до $y=e^{-1}$, в точке $t=1$ достигает максимума (локального и на $(-\infty, \infty)$). На интервале $(1, \infty)$ она строго убывает к нулю при $t\to+\infty$ и имеет, таким образом, асимптоту $y=0$ при $t\to+\infty$. Отмечена еще точка $t=2$, в которой кривая имеет перегиб. На $(-\infty, 2)$ кривая обращена выпуклостью кверху и на $(2, \infty)$ — книзу.

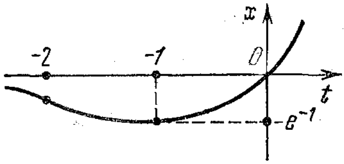

Рис. 65.

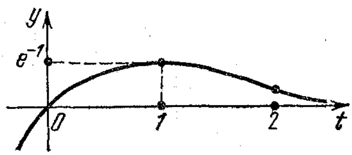

Рис. 66.

Теперь мы переходим к более трудной задаче — начертить схематический график кривой (1). Обозначим ее через Г. Функции, определяющие Г, непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз. Мы используем только тот факт, что эти функции дважды непрерывно дифференцируемы. Отметим, что Г гладкая кривая, потому что производные (по t) от функций $x=\varphi(t)=te^t$ и $y=\psi(t)=te^{-t}$ одновременно не равны нулю.

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 ветви Γ, на которых соответственно $x'_t < 0$ и $x'_t > 0$. Таким образом (см. рис. 65 и 66),

Γ_1 соответствует изменению $t \in (-\infty, -1)$;

Γ_2 соответствует изменению $t \in (-1, \infty)$.

На Γ_1 функция $x = \varphi(t)$ строго убывает от $\varphi(-\infty) = 0$ до $\varphi(-1) = -e^{-1}$, и ее можно обратить, а функция $y = \psi(t)$ строго возрастает от $\psi(-\infty) = -\infty$ до $\psi(-1) = -e$. Отсюда следует, что ветвь Γ_1 описывается явной функцией

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \qquad (x \in (-e^{-1}, 0)).$$

Она изображена на рис. 67—ниже точки A. Когда t возрастает от $-\infty$ до -1, абсцисса x точки Γ_1 убывает от 0 до $-e^{-1}$, а ордината y возрастает от $-\infty$ до $-e$. Так

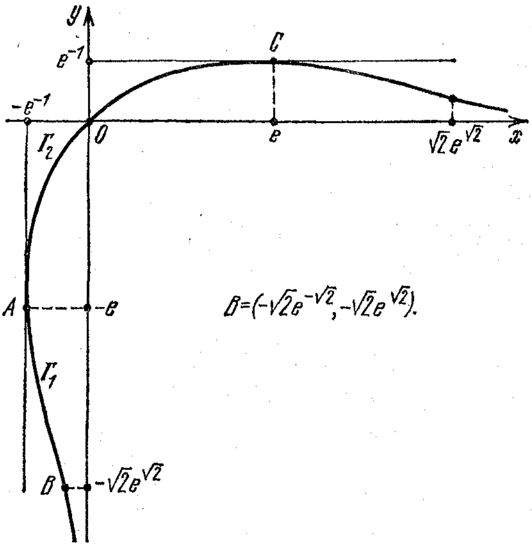

Рис. 67.

как $x'(-1) = 0$ и $y'(-1) \neq 0$, то касательная в точке A параллельна оси y. К тому же Γ расположена правее касательной—ведь из рис. 65 видно, что все точки Γ имеют абсциссу $x \geqslant -e^{-1}$.

В любой точке t кривой Γ, отличной от A, т. е. при $t \neq -1$ производная $x'(t) \neq 0$ и

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-t}{1+t} e^{-2t}, \tag{2}$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\left(\frac{1-t}{1+t} e^{-2t}\right)'}{(1+t)\, e^t} = 2\frac{t^2-2}{(1+t)^3} e^{-3t}. \tag{3}$$

Отсюда

$$y''_x\big|_{t=\pm\sqrt{2}} = 0. \tag{4}$$

Нас сейчас интересует значение $t = -\sqrt{2}$, которому соответствует точка $B = (-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}) \in \Gamma_1$.

Из (3) видно, что если $t < -\sqrt{2}$ (т. е. на части Γ_1 ниже точки B), то $y''_x < 0$ и Γ_1 обращена выпуклостью кверху. Если же $-\sqrt{2} < t \leqslant -1$ (т. е. на дуге $\breve{AB}$), то $y''_x > 0$ и Γ_1 обращена выпуклостью книзу. Таким образом, B есть точка перегиба Γ_1.

Переходим теперь к Γ_2 $(-1 < t < \infty)$. Как видно из рис. 65 и 66, на интервале $-1 < t < 1$ функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ строго возрастают, но тогда и функция от x

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \qquad (-e^{-1} < x < e)$$

строго возрастает. К тому же ее график на этом интервале обращен выпуклостью кверху (см. (3)). Это изображено дугой $\breve{AC} \subset \Gamma_2$. Что же касается точки C, то в ней $y'_x = 0$ $\left(y'_x(e) = \frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{0}{x'(1)} = 0\right)$, и так как в ней к тому же график обращен выпуклостью кверху, то C есть точка локального максимума функции $y(x)$. При $x > e$ (т. е. $t > 1$) $x(t)$ возрастает, а $y(t)$ убывает к нулю. Это показывает, что $y(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ убывая. При этом $x(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ — точка перегиба графика $y(x)$. Слева от этой точки график обращен выпуклостью кверху, а справа — книзу (см. (3)).

§ 4.23. Вектор-функция. Векторы касательной и нормали

В плоскости зададим прямоугольную систему координат (x, y). Уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (a < t < b), \tag{1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции на интервале (a, b) определяют *непрерывную кривую* Γ — геометрическое множество точек $(x(t), y(t))$ плоскости, где $t \in (a, b)$. Говорят еще, что кривая Γ задана при помощи параметра t. Ее уравнение можно задать в векторной форме

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} \quad (a < t < b), \tag{1'}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ — единичные орты соответственно осей x, y, а $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор точки Γ, соответствующей значению t параметра (рис. 68)

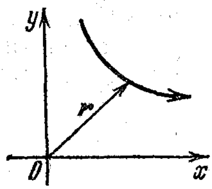

Рис. 68.

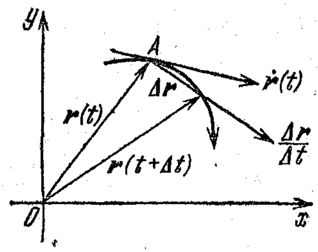

Рис. 69.

Вектор $\boldsymbol{r}(t)$ называют *вектор-функцией* (определенной для $t \in (a, b)$).

Говорят в связи с этим, что кривая Γ есть *годограф* вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ — геометрическое место концов векторов $\boldsymbol{r}(t)$, выходящих из нулевой точки O.

Кривая Γ называется *гладкой* на (a, b), если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на (a, b), одновременно не равные нулю.

Если t придать приращение Δt, то вектор $\boldsymbol{r}$ получит приращение (рис. 69)

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) =$$
$$= [x(t+\Delta t) - x(t)]\boldsymbol{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\boldsymbol{j} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j},$$

откуда, деля на скаляр Δt, получим

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}.$$

Для гладкой кривой

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x', \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'.$$

Вектор $x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}$ называют *производной от* $\boldsymbol{r}$ (в точке t) и записывают так:

$$\dot{\boldsymbol{r}}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}.$$

Можно производную $\dot{\boldsymbol{r}}$ определить также как такой вектор, для которого

$$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}-\dot{\boldsymbol{r}}\right|\to 0, \qquad \Delta t\to 0.$$

В самом деле,

$$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}-\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}-x'\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}-y'\right)^2\to 0, \qquad \Delta t\to 0.$$

Пишут

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

и говорят, что вектор $\dot{\boldsymbol{r}}$ есть *предел вектора* $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ *при* $\Delta t\to 0$. Из рис. 69 видно, что вектор $\dot{\boldsymbol{r}}$ направлен по касательной к Γ в точке t в сторону возрастания t.

Вектор $\dot{\boldsymbol{r}}$ называют *вектором касательной* к Γ. Длина его равна

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Единичный вектор касательной есть

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j} \qquad (|\dot{\boldsymbol{r}}|>0),$$

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad \sin\alpha=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \tag{2}$$

где α — угол между $\boldsymbol{\tau}$ и положительным направлением оси x.

Единичный вектор нормали к Γ, т. е. единичный вектор перпендикулярный к $\boldsymbol{\tau}$, определяется равенством

$$\boldsymbol{\nu}=(\nu_1, \nu_2),$$

$$\nu_1=\mp\sin\alpha, \quad \nu_2=\pm\cos\alpha \tag{3}$$

или

$$\nu_1=\mp\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \nu_2=\pm\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}. \tag{3'}$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \mp\sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Верхние знаки соответствуют случаю, когда пара векторов $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ ориентирована так же, как оси $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ (рис. 70), а нижние—когда пара $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ ориентирована противоположным образом (рис. 71).

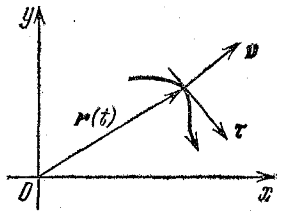

Рис. 70.

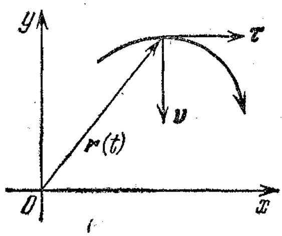

Рис. 71.

Вторая производная от вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ (см. (1')) определяется как предел

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\Delta t} = x''(t)\boldsymbol{i} + y''(t)\boldsymbol{j}.$$

На рис. 72 изображена кривая Г; точка A соответствует значению t, а точка B—значению $t+\Delta t$. К этим точкам приложены касательные векторы $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t)$. Второй вектор мы перенесли так, чтобы он был приложен к точке A. На рисунке обозначена разность $\Delta\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t)$ и вектор $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}/\Delta t$, имеющий то же направление, что и $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}$. Наконец, отмечен предельный вектор $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. *Вектор* $\ddot{\boldsymbol{r}}$ *направлен в сторону вогнутости* Г.

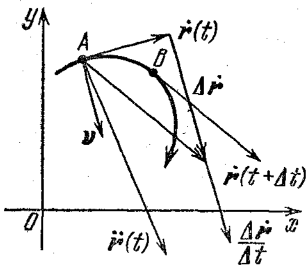

Рис. 72.

Точно эти слова надо понимать следующим образом: *вектор* $\ddot{\boldsymbol{r}}$ *образует острый угол с вектором* $\boldsymbol{\nu}$ *нормали к* Г, *направленной в сторону вогнутости* Г.

Пример. В векторной форме уравнение (см. § 4.21) эллипса имеет вид

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}b\sin t \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Соответственно вектор касательной

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{i}a\sin t + \boldsymbol{j}b\cos t,$$

а вектор нормали

$$\boldsymbol{n} = \mp \boldsymbol{i}b\cos t \mp \boldsymbol{j}a\sin t.$$

В данном случае $\boldsymbol{n}$, вообще говоря, не единичный вектор.

Вектор-функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в окрестности точки t_0 можно разложить по формуле Тейлора (или разложить в векторный ряд Тейлора). Пусть

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j},$$

где $x(t)$ и $y(t)$ имеют необходимое число производных в окрестности точки t_0. Тогда, разлагая эти функции по формуле Тейлора, получаем

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + R_n(t), \qquad (4)$$

$$y(t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \overline{R}_n(t), \qquad (5)$$

где $R_n(t)$, $\overline{R}_n(t)$ — остаточные члены в какой-либо форме (Лагранжа, Коши и т. д.). Умножая (4) на $\boldsymbol{i}$, а (5) на $\boldsymbol{j}$ и складывая, получим формулу Тейлора для вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + \frac{\boldsymbol{r}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \boldsymbol{r}_n(t),$$

где остаток

$$\boldsymbol{r}_n(t) = R_n(t)\,\boldsymbol{i} + \overline{R}_n(t)\,\boldsymbol{j}.$$

Отметим, что если остатки $R_n(t)$ и $\overline{R}_n(t)$ записываются в форме Лагранжа или Коши, то входящие в них производные $(n+1)$-го порядка функций $x(t)$ и $y(t)$ вычисляются, вообще говоря, в разных точках.

ГЛАВА 5

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 5.1. Неопределенный интеграл. Таблица интегралов

В предыдущей главе мы ввели понятие производной и научились находить производную от элементарных функций. Здесь мы будем решать обратную задачу, а именно: известна производная $f'(x)$ от функции $f(x)$, требуется найти саму функцию $f(x)$.

С точки зрения механической это означает, что по известной скорости движения материальной точки необходимо восстановить закон ее движения.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на (a, b) и $F'(x)=f(x)$.*

Аналогично можно определить понятие первообразной и на отрезке $[a, b]$, но в точках a и b надо рассматривать односторонние производные.

Пример 1. $F(x)=\sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0, \infty)$, так как $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 2. $F(x)=\sin 2x$ есть первообразная для функции $f(x)=2\cos 2x$ на $(-\infty, \infty)$, так как $(\sin 2x)'=2\cos 2x$.

Теорема 1. *Если $F(x)$—первообразная для функции $f(x)$ на (a, b), то $F(x)+C$—также первообразная, где C—любое постоянное число.*

Доказательство. Имеем $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$.

Теорема 2. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$—две первообразные для $f(x)$ на (a, b), то $F_1(x)-F_2(x)=C$ на (a, b), где C—некоторая постоянная.*

Доказательство. По условию $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$. Составим функцию $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Очевидно, что

$$\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0 \quad \forall x\in(a, b).$$

Отсюда по известной теореме (см. теорему 6 § 4.12) заключаем, что $\Phi(x)\equiv C$, т. е. $F_1(x)-F_2(x)=C$, что и требовалось доказать.

Таким образом, из теорем 1, 2 вытекает, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на (a, b), то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на (a, b) имеет вид

$$\Phi(x)=F(x)+C, \tag{1}$$

где C — некоторая постоянная (рис. 73).

Определение. *Произвольная первообразная для $f(x)$ на (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$* и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Знак $\int$ называется *интегралом*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Если $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, то, согласно сказанному

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{3}$$

где C — соответствующим образом подобранная постоянная.

Операцию нахождения неопределенного интеграла будем называть *интегрированием* функции $f(x)$.

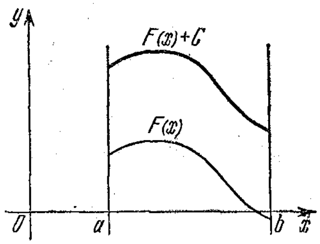

Рис. 73.

Отметим, что если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то подынтегральное выражение $f(x)\,dx = F'(x)dx=dF(x)$ является дифференциалом первообразной $F(x)$.

Позже мы докажем (см. § 6.3), что *если $f(x)$ непрерывна на (a, b), то для нее существует первообразная на (a, b)*, а следовательно, и неопределенный интеграл.

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1°. $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$. В самом деле, $\int f(x)dx=F(x)+C$, отсюда

$$d\int f(x)\,dx=d(F(x)+C)=dF(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx.$$

2°. $\int dF(x)=F(x)+C$, т. е. $\int$ и d также взаимно сокращаются, но к $F(x)$ нужно добавить некоторую постоянную C. Имеем $\int dF(x)=\int F'(x)\,dx=$(по определению)$=$ $=F(x)+C$.

3°. $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx+C$, где A — постоянное число, C — некоторая постоянная.

4°. $\int [f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx+C$, где C — некоторая постоянная.

В самом деле,

$$\left(\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\right)'=\left(\int f(x)\,dx\right)'+\left(\int g(x)\,dx\right)'=$$
$$=(\text{по определению})=f(x)+g(x).$$

С другой стороны,

$$\left(\int [f(x)+g(x)]\,dx\right)'=(\text{по определению})=f(x)+g(x).$$

Таким образом, функция $\int f\,dx+\int g\,dx$ и функция $\int [f+g]\,dx$ являются первообразными для одной и той же функции $f+g$. Но тогда они отличаются на некоторую постоянную C, что и написано в равенстве 4°.

5°. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

В самом деле,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]'=\frac{1}{a}\cdot aF'(ax+b)=f(ax+b).$$

Запишем таблицу интегралов, вытекающую из основных формул дифференциального исчисления.

1. $\int 0\cdot dx=C$.

2. $\int x^{\alpha}\,dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad \forall\alpha\neq-1$.

3. $\int x^{-1}\,dx=\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$, на интервале, не содержащем $x=0$.

4. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a,\ a\neq 1)$, $\int e^x\,dx=e^x+C$.

5. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$, $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на интервале, где подынтегральная функция непрерывна.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (-1 < x < 1).$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$

9. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0)$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{Arsh} x + C,$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{Arch} x + C \quad (|x| > 1).$$

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \quad (|x| \neq 1).$

Слева в каждом равенстве стоит произвольная (но определенная) первообразная функция для соответствующей подынтегральной функции, справа же—одна определенная первообразная, к которой еще прибавляется константа C такая, чтобы выполнялось равенство между этими функциями.

Докажем формулу 3. Так как при $x \neq 0$ $|x|' = \operatorname{sign} x$ и $x \operatorname{sign} x = |x|$, то

$$(\ln|x| + C)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

и формула 3 доказана.

Докажем еще формулу 11:

$$(\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C)' = \frac{\operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2+1})}{|x + \sqrt{x^2+1}|} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{(x + \sqrt{x^2+1}) \operatorname{sign}(x + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}\, |x + \sqrt{x^2+1}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

и формула 11 доказана.

С другой стороны, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsh} x + C$, поэтому по теореме 2 $\operatorname{Arsh} x = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$. Но так как $\operatorname{Arsh} 0 = 0$, то $\ln|x + \sqrt{x^2+1}| = \operatorname{Arsh} x$ (см. § 4.6, п. 9).

Применяя свойство 5°, можно написать более сложную таблицу интегралов. Например:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

Отметим, что если операция дифференцирования элементарных функций снова приводит к элементарным функциям, то операция интегрирования уже может привести к неэлементарным функциям, т. е. функциям, которые не выражаются через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

Например, доказано, что следующие интегралы не интегрируются в элементарных функциях:

$\int e^{-x^2}\,dx$ — интеграл Пуассона,

$\int \cos x^2\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$ — интегралы Френеля,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ — интегральный логарифм,

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ — интегральный косинус,

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ — интегральный синус.

Указанные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Имеются другие способы для их вычисления. Например, интегральный синус можно представить в виде бесконечного степенного ряда (см. § 4.16)

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \dots .$$

§ 5.2. Методы интегрирования

Основную роль в интегральном исчислении играет формула замены переменных (или подстановки)

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt + C = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) + C. \qquad (1)$$

В этой формуле предполагается, что $x=\varphi(t)$ есть непрерывно дифференцируемая (имеющая непрерывную производную) функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ — непрерывная функция на соответствующем интервале или отрезке оси x. Первое равенство (1) утверждает, что левая его часть тождественно равна правой, если в ней (после интегрирования!) сделать подстановку $x=\varphi(t)$ и подобрать соответствующую константу C. Докажем это утверждение. Слева в (1) стоит функция, которая является первообразной от $f(x)$. Ее производная по t равна

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dx=\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Следовательно, если ввести в этой функции подстановку $x=\varphi(t)$, то получится первообразная от функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Интеграл же справа есть, по определению, некоторая первообразная от $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Но две первообразные для одной и той же функции отличаются на некоторую постоянную C. Это и записано в виде первого равенства (1). Что касается второго, то оно носит формальный характер—мы просто условливаемся писать

$$\int F(t)\,\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,d\varphi(t). \tag{2}$$

Например,

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx+C=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2+C=$$
$$=\frac{1}{2}\int e^u\,du+C_1=\frac{1}{2}e^u+C_2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_2\quad(u=x^2). \tag{3}$$

Первое равенство написано в силу 3° § 5.1, второе в силу (2), третье—в силу (1) (постоянная изменилась) и четвертое—в силу формулы из таблицы (постоянная изменилась). Однако в практике вычислений в членах, содержащих неопределенный интеграл, константы C не пишут, и тогда цепочка (3) упрощается:

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C,$$

к тому же мы опустили очевидные 3-е и 4-е равенства.

Вот еще пример: $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$. Такого интеграла нет в таблице. Если положить $x=a\sin t$, то $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t$ и $dx=a\cos t\,dt$. Следовательно,

$$I=\int a\cos t\,a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$
$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C.$$

Но $t=\arcsin\frac{x}{a}$, поэтому

$$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+$$

$$+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Итак

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Приведем еще примеры, которые все равно нам понадобятся в теории интегрирования рациональных дробей:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m}=\frac{1}{(x-a)^{m-1}(1-m)}+C\quad(m\neq 1);\qquad(4)$$

$$\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C;\qquad(5)$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x+(p/2))^2}=$$

$$=\int\frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2}=-\frac{1}{x+(p/2)}+C\quad\left(q-\frac{p^2}{4}=0\right);$$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x+(p/2))^2+(q-(p^2/4))}=$$

$$=\int\frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x+(p/2)}{a}\right)}{1+\left(\frac{x+(p/2)}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+(p/2)}{a}+C\quad\left(q-\frac{p^2}{4}=a^2,\ a>0\right);\qquad(6)$$

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2-a^2}=$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+(p/2)-a}{x+(p/2)+a}\right|+C\quad\left(q-\frac{p^2}{4}=-a^2,\ a>0\right);$$

$$\int\frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}=\ln|x^2+px+q|+C;$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+(2B/A)}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{A}{2}\int\frac{(2B/A)-p}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+D\int\frac{dx}{x^2+px+q},\qquad(7)$$

$\left(A\neq 0,\ D=\frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A}-p\right)\right)$ (далее см. (6)).

Для теории интегрирования рациональных дробей важно, что вычисление интегралов типа (4)—(7), где a, A, B, p, q—константы, приводит к элементарным функциям (рациональным, ln и arctg).

Перейдем к *формуле интегрирования по частям*:

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx + C \tag{8}$$

или, что все равно,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

Так как в (8) справа есть неопределенный интеграл, то постоянную C обычно опускают.

В данной формуле предполагается, что $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Справедливость формулы (8) вытекает из того факта, что производные от левой и правой частей равны:

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Формула (8) сводит вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$. Вычисление по формуле (8) носит название *метода интегрирования по частям.*

Пример 1. Вычислить $\int x \ln x\,dx$. Положим

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \ln x, \\ x\,dx &= dv, \end{aligned}\right| \begin{aligned} du &= \frac{dx}{x}, \\ v &= \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 2. Вычислить интегралы $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$, $I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, где a, b—постоянные числа. В данном случае подынтегральное выражение можно представить в виде произведения $u(x)$ и $dv(x)$ двояким образом: $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$ или $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}\,dx$.

Итак, пусть

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{ax}, \\ \sin bx\,dx &= dv, \end{aligned}\right| \begin{aligned} du &= ae^{ax}\,dx, \\ v &= -\frac{\cos bx}{b}. \end{aligned}$$

Тогда по правилу интегрирования по частям имеем

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I_1. \tag{9}$$

К интегралу I_1 снова применим метод интегрирования по частям, полагая $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Тогда

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем систему для определения I и I_1

$$\left.\begin{aligned} I - \frac{a}{b} I_1 &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx, \\ \frac{a}{b} I + I_1 &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получим

$$I = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \quad I_1 = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int \arcsin x\, dx$. Полагая $u = \arcsin x$, $dv = dx$, получим

$$I = x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Пример 4. Приведем еще пример, который будет нужен для теории интегрирования рациональных дробей. Пусть $k > 1$ — натуральное и $a > 0$; тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}} = a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} + \frac{1}{2} \int \frac{x \cdot 2x\, dx}{(x^2 + a^2)^k} =$$

$$= \left(u = x, \ dv = \frac{2x\, dx}{(x^2 + a^2)^k} \right) =$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{(1 - k)(x^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1 - k} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}} \right\},$$

откуда

$$a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} = \frac{x}{2(k-1)(x^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k - 3}{2(k-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}}.$$

Теперь (если $k > 2$) к интегралу в правой части можно применить тот же процесс, приводящий к понижению на единицу показателя степени в знаменателе подынтегральной дроби. В конце концов придем к интегралу от $(x^2+a^2)^{-1}$ (приводящему к arctg).

Таким образом, при $q-(p^2/4)=a^2>0$ и натуральном k интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} + C \quad \left(u = x + \frac{p}{2}\right) \qquad (11)$$

берется в элементарных функциях.

Пример 5. Вычислить интегралы

$$\int P_n(x) \begin{Bmatrix} e^{bx} \\ \cos bx \\ \sin bx \end{Bmatrix} dx,$$

где $P_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$—алгебраический многочлен степени n.

Данные интегралы вычисляются n-кратным применением метода интегрирования по частям, последовательно полагая $u=P_n(x)$, затем $u=P_n'(x)$, ... Получающиеся интегралы будут упрощаться, так как производная от алгебраического многочлена $P_n(x)$ будет алгебраическим многочленом степени, на единицу меньшей.

Так как характер первообразной для рассматриваемых здесь функций легко угадывается, то эти интегралы можно вычислять так называемым *методом неопределенных коэффициентов*.

Например, для $\int P_n(x)e^{bx}\,dx$ первообразная имеет вид $Q_n(x)e^{bx}+C$, где $Q_n(x)=b_nx^n+\ldots+b_1x+b_0$ и $b_0, \ldots, b_n$ — пока неизвестные коэффициенты. Эти коэффициенты мы находим из условия, что

$$(Q_n(x)e^{bx}+C)'=P_n(x)e^{bx} \quad \text{или} \quad Q_n'(x)+bQ_n(x)=P_n(x).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, мы и найдем все числа $b_0, \ldots, b_n$. Этот способ называется *методом неопределенных коэффициентов*. Здесь мы воспользовались тем фактом, что два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при соответствующих степенях x (см. § 4.14, теорема 2).

Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере:

$$\int (x^2+1)e^x\,dx=(ax^2+bx+c)e^x+C.$$

В данном случае

$$P_2(x)=x^2+1, \quad Q_2(x)=ax^2+bx+c,$$

где коэффициенты a, b, c надо найти. Имеем

$$(Q_2(x)e^x)' = [ax^2 + (2a+b)x + b + c]e^x = (x^2+1)e^x,$$

откуда $ax^2+(2a+b)x+b+c=x^2+1$. Так как это равенство должно быть верно для всех x, то коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой его части равны между собой (§ 4.14, (15)): $a=1$, $2a+b=0$, $b+c=1$. Таким образом,

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2-2x+3)e^x + C.$$

§ 5.3. Комплексные числа

Комплексными числами называются выражения

$$z = a + bi = a + ib,$$

где a, b — действительные числа, а i — специальный символ; при этом для комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ введены понятия равенства и арифметические операции по следующим правилам:

1) $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$; $a + 0i = a$, $0 + bi = bi$, $1 \cdot i = i$.

2) $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$.

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ $(a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$.

Из 1) и 3) следует, что

$$i^2 = -1.$$

Таким образом введенные операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности ($z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1z_2 = z_2z_1$), ассоциативности ($(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$), дистрибутивности ($(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$).

Можно еще сказать, что с комплексными числами можно оперировать в точности так же, как мы привыкли оперировать с буквенными выражениями в алгебре, но при этом операции упрощаются тем, что $i^2 = -1$.

Из свойства $a + 0i = a$ следует, что множество комплексных чисел содержит в себе как часть множество всех действительных чисел. При этом легко видеть, что применение арифметических действий 2), 3), 4) к выражениям

$z_1=a_1+0i$, $z_2=a_2+0i$ приводит соответственно к $a_1 \pm \pm a_2+0i=a_1 \pm a_2$, $a_1a_2+0i=a_1a_2$, $\frac{a_1}{a_2}+0i=\frac{a_1}{a_2}$ $(a_2 \neq 0)$.

Число $\bar{z}=a-ib$ называется *сопряженным к комплексному числу* $z=a+ib$. Действительное число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем комплексного числа* z. Очевидно, что $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+ +|z_2|$.

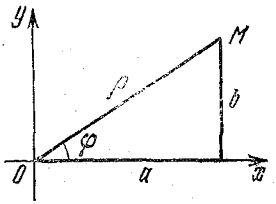

Рис. 74

Если комплексное число $z= =a+ib$ трактовать как точку (вектор) $M(a, b)$ плоскости xOy, то $|z|$ равен расстоянию точки $M(a, b)$ от начала координат (рис. 74).

Если на плоскости ввести полярные координаты (ρ, φ), то

$$\begin{aligned} a&=\rho\cos\varphi=|z|\cos\varphi, \\ b&=\rho\sin\varphi=|z|\sin\varphi \end{aligned} \qquad (|z|>0). \tag{1}$$

В силу этого комплексное число z можно записать в форме

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где ρ — модуль числа z, φ — угол (в радианах), который составляет вектор $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси x. Этот угол называют еще *аргументом комплексного числа* z и обозначают символом $\varphi=\arg z$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

Очевидно, $\varphi=\arg z$ есть однозначная функция от $z \neq 0$. Вводят еще и многозначную функцию (*аргумент* z с большой буквы)

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$$
$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

которая дает все значения φ, для которых для данного $z \neq 0$ удовлетворяются два равенства (1).

Число $z=0$ единственное, для которого не имеет смысла его аргумент, но зато его можно определить как число, модуль которого равен нулю ($|z|=0$).

$\arg z$ (с малой буквы) называют еще *аргументом в приведенной форме*. Иногда бывает удобно считать аргументом в приведенной форме угол, принадлежащий к другому полуинтервалу $[\alpha, \alpha+2\pi)$ длины 2π, например $[-\pi, \pi)$.

Числа a и b называют *действительной* и *мнимой* частями z и обозначают символами $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$. Таким образом,

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Если $z = x + iy$, то множество точек z плоскости xOy, удовлетворяющих равенству $|z| = R$ $(\sqrt{x^2 + y^2} = R)$, есть окружность радиуса R с центром в начале координат.

По определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (-\infty < \varphi < \infty). \tag{3}$$

Очевидно, что $e^{i\varphi}$ есть комплексная функция[1]) (принимающая комплексные значения) от действительного аргумента φ. Ясно, что $e^{i\varphi}$ — периодическая функция периода 2π: $e^{i(\varphi + 2\pi)} = e^{i\varphi}$.

Так как $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, то при непрерывном изменении φ на полуинтервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, точка $e^{i\varphi}$ непрерывно описывает окружность радиуса 1 с центром в точке $z = 0$.

Справедливы равенства

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \qquad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}. \tag{4}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \\ &= (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ &+ i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1) = \\ &= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1) = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi = \\ &= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Для произвольной комплексной переменной $z = x + iy$ функция e^z определяется при помощи равенства

$$e^z = e^x e^{iy}, \quad z \neq 0.$$

Отсюда в силу (3)

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{5}$$

На основании (2), (3) всякое комплексное число z можно представить в форме

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (\rho \geqslant 0), \tag{6}$$

[1]) См. нашу книгу «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного», § 6.1.

где неотрицательное число $\rho=|z|$ для данного z единственно, а при $\rho>0$ угол

$$\varphi=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$$

определен с точностью до $2k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$).

Выражения (2) и (6) называются соответственно *тригонометрической и показательной формами комплексного числа* z.

Приведем примеры комплексных чисел, записанных в показательной форме (считая $\varphi=\arg z$):

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4},$$

$$i=0+1\cdot i=e^{i\pi/2},\quad 1=e^{0i},\quad -1=e^{\pi i}.$$

Из равенств (3), (4) легко получаем формулу Муавра

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=e^{in\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{7}$$

Справедливо также равенство

$$z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

т. е. при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются независимо от того, в какой форме они взяты — в приведенной или нет.

Операция построения сопряженного комплексного числа обладает следующими простыми свойствами:

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar z_1\pm\bar z_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar z_1\bar z_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar z_1}{\bar z_2}\ (z_2\neq 0). \tag{8}$$

В самом деле,

$$\overline{(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)}=\overline{(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i}=$$
$$=(a_1\pm a_2)-i(b_1\pm b_2)=(a_1-b_1i)\pm(a_2-b_2i)=$$
$$=\overline{(a_1+b_1i)}\pm\overline{(a_2+b_2i)};$$

далее, так как

$$\overline{\rho e^{i\varphi}}=\overline{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-i\varphi},$$

то

$$\overline{z_1z_2}=\overline{\rho_1e^{i\varphi_1}\rho_2e^{i\varphi_2}}=\overline{\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}=\rho_1\rho_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}=$$
$$=\rho_1e^{-i\varphi_1}\rho_2e^{-i\varphi_2}=\overline{\rho_1e^{i\varphi_1}}\cdot\overline{\rho_2e^{i\varphi_2}}=\bar z_1\cdot\bar z_2.$$

Подобное доказательство имеет место и в случае частного.

Рассмотрим задачу о вычислении корня n-й степени из числа $a=\rho e^{i\theta}$ ($\rho>0$). Требуется, таким образом, найти все числа $b=re^{i\varphi}$ такие, что $b^n=a$. Но тогда $r^n e^{in\varphi}=\rho e^{i\theta}$ (r, $\rho>0$) и, вследствие единственности представления комплексного числа в показательной форме, $\rho=r^n$, $n\varphi=\theta+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Из первого равенства следует $r=\sqrt[n]{\rho}$ (r — арифметическое значение корня n-й степени из положительного числа ρ). Из второго же, что $\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$ ($k=0, \pm 1, \ldots$).

Так как функция $e^{i\varphi}$ периодическая с периодом 2π, то значения φ, дающие существенно различные корни n-й степени из a, соответствуют только n значениям k:

$$\varphi_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Остальным целым k соответствуют значения φ, отличающиеся от одного из значений (9) на величину, кратную 2π.

Мы доказали, что у комплексного числа $a\neq 0$ существует n (и только n) корней степени n, записываемых по формуле

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\varphi_k} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1),$$

где φ_k определяются равенствами (9).

Примеры:

1°. $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{e^{0i}}=e^{\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}$ $(k=0, 1, 2)$.

2°. $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}$ $(k=0, 1, 2)$.

3°. $\sqrt[6]{1+i}=\sqrt[12]{2}\sqrt[6]{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[12]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{2k\pi}{6}\right)}$
$(k=0, 1, \ldots, 5)$.

4°. $\sqrt{-1}=\sqrt{e^{i\pi}}=e^{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)i}=\pm i$ $(k=0, 1)$.

§ 5.4. Теория многочлена n-й степени

Многочленом n-й степени называется функция вида

$$Q_n(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n=\sum_{k=0}^{n} a_kz^k, \tag{1}$$

где a_k — постоянные коэффициенты действительные или комплексные, а z — переменная, вообще говоря, комплексная, которая может принимать любые комплексные значения ($z=x+iy$) или, выражаясь геометрическим языком, z может быть любой точкой комплексной плоскости.

Каждой точке z комплексной плоскости при помощи формулы (1) приводится число $Q_n(z)$, вообще говоря, комплексное. В дальнейшем будем считать, что $a_n \neq 0$. Если $Q_n(a)=0$, то число a называется *корнем* или *нулем* многочлена $Q_n(z)$.

Рассуждая в точности так же, как в начале § 4.14, где рассматривался многочлен от действительного переменного, можно показать, что, каково бы ни было комплексное число z_0, многочлен $Q_n(z)$ разлагается по степеням $z-z_0$ и притом единственным образом, т. е. представляется в виде

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k (z-z_0)^k,$$

где b_k — постоянные числа, вообще говоря, комплексные. Очевидно, $Q_n(z_0)=b_0$. Отсюда следует, что для того, чтобы точка z_0 была корнем многочлена Q_n, необходимо и достаточно, чтобы нулевой коэффициент b_0 разложения Q_n по степеням $z-z_0$ был равен нулю ($b_0=0$). Но если $b_0=0$, то Q_n можно представить в виде

$$Q_n(z)=(z-z_0)\,Q_{n-1}(z) \quad \forall z, \tag{2}$$

где Q_{n-1} есть некоторый многочлен степени $n-1$. Наоборот, если Q_n можно представить в виде (2), иначе говоря, если $Q_n(z)$ можно разделить на $z-z_0$ без остатка, то, очевидно, z_0 есть корень Q_n.

Мы доказали теорему Безу:

Для того чтобы многочлен $Q_n(z)$ имел (комплексный) корень z_0, необходимо и достаточно, чтобы он делился на $z-z_0$, т. е. чтобы его можно было представить в виде произведения (2), где Q_{n-1} — некоторый многочлен степени $n-1$.

Пусть z_0 есть корень Q_n, и, таким образом, имеет место представление (2). Если при этом $Q_{n-1}(z_0)\neq 0$, то на основании теоремы Безу, примененной к Q_{n-1}, многочлен $Q_{n-1}(z)$ не делится на $z-z_0$, а $Q_n(z)$ хотя и делится на $z-z_0$, но не делится на $(z-z_0)^2$. В этом случае говорят, что z_0 есть *простой корень* (*нуль*) многочлена Q_n. Пусть теперь $Q_{n-1}(z_0)=0$, тогда по теореме Безу, примененной к $Q_{n-1}(z)$, многочлен $Q_{n-1}(z)$ делится на $z-z_0$, и мы получим равенство $Q_n(z)=(z-z_0)^2 Q_{n-2}(z)$, где $Q_{n-2}(z)$ есть некоторый многочлен степени $n-2$. Если $Q_{n-2}(z_0)\neq 0$, то $Q_n(z)$ делится на $(z-z_0)^2$, но не делится на $(z-z_0)^3$, и тогда число z_0 называется корнем (нулем) кратности 2. В общем случае для некоторого натурального $s\leqslant n$ имеет место

$$Q_n(z)=(z-z_0)^s Q_{n-s}(z), \quad Q_{n-s}(z_0)\neq 0,$$

где $Q_{n-s}(z)$—многочлен степени $n-s$, и тогда говорят, что z_0 *есть корень* (*нуль*) *многочлена* Q_n *кратности* s.

Справедлива теорема существования комплексного корня у многочлена.

Основная теорема. *Всякий многочлен n-й степени имеет по крайней мере один комплексный корень* (*нуль*).

Мы не даем здесь доказательства этой теоремы.

Из нее вытекает важное следствие.

Следствие. *Многочлен n-й степени Q_n со старшим не равным нулю коэффициентом* ($a_n\neq 0$) *имеет n комплексных корней с учетом кратности, иначе говоря $Q_n(z)$ представляется в виде произведения*

$$Q_n(z)=a_n(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\ldots(z-z_l)^{p_l}, \tag{3}$$
$$p_1+p_2+\ldots+p_l=n,$$

где $z_1, \ldots, z_l$—различные корни Q_n кратностей, соответственно $p_1, \ldots, p_l$.

Доказательство. Согласно основной теореме многочлен Q_n имеет по крайней мере один корень. Обозначим его через z_1, а его кратность—через p_1. Таким образом,

$$Q_n(z)=(z-z_1)^{p_1} Q_{n-p_1}(z) \qquad (Q_{n-p_1}(z_1)\neq 0).$$

Если $n-p_1=0$, т. е. $p_1=n$, то необходимо $Q_{n-p_1}(z)=a_n$, и теорема доказана. В этом случае $Q_n(z)=a_n(z-z_1)^n$.

Если же $p_1<n$, то $Q_{n-p_1}(z)$ есть многочлен степени $n-p_1$, не делящийся на $z-z_1$, и его старший коэффициент не равен нулю. К нему можно применить основную теорему, в силу которой он имеет комплексный корень. Обозначим его через z_2, а его кратность—через p_2. В результате получим

$$Q_n(z)=(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2} Q_{n-p_1-p_2}(z)$$
$$(Q_{n-p_1-p_2}(z_j)\neq 0, \quad j=1, 2).$$

Если $n-p_1-p_2=0$, то $Q_{n-p_1-p_2}(z)=a_n$. Если нет, то процесс можно продолжить. Однако этот процесс после конечного числа (не большего n) этапов закончится, и мы получим формулу (3). Если в правую часть (3) подставить вместо z число, отличное от $z_1, \ldots, z_l$, то она не обратится в нуль. Это показывает, что других корней, кроме найденных, многочлен Q_n не имеет и представление (3) единственно.

§ 5.5. Действительный многочлен n-й степени

Многочлен

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

называется *действительным*, если его коэффициенты a_k — действительные числа. Это название объясняется тем, что действительный многочлен, если его рассматривать только для действительной переменной $z=x$, принимает действительные значения. Конечно, для комплексных z действительный многочлен принимает, вообще говоря, комплексные значения.

Лемма. *Для действительного многочлена $Q_n(z)$ имеет место равенство*

$$Q_n(\bar{z})=\overline{Q_n(z)} \quad \forall z.$$

Доказательство. Наши рассуждения будут базироваться на равенствах (8) § 5.3 и том факте, что для действительных a_k имеет место $a_k=\bar{a}_k$.

Имеем

$$Q_n(\bar{z})=\sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k=\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k=\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k}=\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}=\overline{Q_n(z)}, \tag{2}$$

что и требовалось.

Теорема 1. *Если $z_0=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ есть комплексный корень ν-й кратности действительного многочлена Q_n, то $\bar{z}_0=\alpha-i\beta$ есть тоже корень Q_n и той же кратности, и тогда*

$$Q_n(z)=[(z-\alpha)^2+\beta^2]^\nu Q_{n-2\nu}(z), \tag{3}$$

где $Q_{n-2\nu}(z)$ — действительный многочлен степени $n-2\nu$, не равный нулю при $z=z_0$ и $z=\bar{z}_0$.

Доказательство. Пусть $z_0=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ есть корень Q_n. Тогда $\bar{z}_0=\alpha-i\beta$ — тоже корень Q_n, потому что в силу (2) $Q_n(\bar{z}_0)=\overline{Q_n(z_0)}=\bar{0}=0$. Числа z_0 и $\bar{z}_0$ не равны друг другу и $Q_n(z)$ делится на

$$(z-\alpha-i\beta)(z-\alpha+i\beta)=(z-\alpha)^2+\beta^2, \tag{4}$$

т. е. на действительный многочлен второй степени. Таким образом,

$$Q_n(z)=[(z-\alpha)^2+\beta^2]\,Q_{n-2}(z),$$

где $Q_{n-2}(z)$ — многочлен степени $n-2$, очевидно, действительный. Ведь частное от деления действительных многочленов есть действительный многочлен.

Если z_0 — корень Q_n кратности ν и $\nu > 1$, то z_0 — корень Q_{n-2} кратности $\nu-1$, поэтому, повторяя наши рассуждения в отношении $Q_{n-2}(z)$, можно из него выделить множитель (4). Второй же множитель будет действительный многочлен Q_{n-4} степени $n-4$. Повторив этот процесс ν раз, получим представление $Q_n(z)$ в виде (3), где $Q_{n-2\nu}(z)$ — действительный многочлен степени $n-2\nu$, обладающий свойством $Q_{n-2\nu}(z_0) \neq 0$. Но тогда и $Q_{n-2\nu}(\bar{z}_0) \neq 0$. Ведь если бы $\bar{z}_0$ был корнем действительного многочлена $Q_{n-2\nu}$, то неминуемо z_0 тоже был бы корнем этого многочлена.

З а д а ч а. Доказать, что многочлен $Q_5(z) = z^5 - 3z^2 + 2z$ имеет не менее трех действительных корней.

Т е о р е м а 2. *Действительный многочлен $Q_n(z)$ со старшим коэффициентом $a_n \neq 0$ может быть представлен в виде произведения*

$$Q_n(z) = a_n (z-c_1)^{\mu_1} \dots (z-c_r)^{\mu_r} [(z-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{\nu_1} \dots$$
$$\dots [(z-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{\nu_s} = a_n \prod_{j=1}^{r} (z-c_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{s} [(z-\alpha_j)^2+\beta_j^2]^{\nu_j}, \quad (5)$$

где $\beta_j > 0$, $\mu_1 + \dots + \mu_r + 2(\nu_1 + \dots + \nu_s) = n$, $c_1, \dots, c_r$ — действительные корни Q_n кратностей соответственно $\mu_1, \dots, \mu_r$, а $\alpha_1 \pm \beta_1 i, \dots, \alpha_s \pm \beta_s i$ — попарно сопряженные комплексные корни Q_n кратностей соответственно $\nu_1, \dots, \nu_s$.

З а м е ч а н и е. Действительные многочлены второй степени, входящие в произведение (5), можно преобразовать так:

$$(z-\alpha_j)^2+\beta_j^2 = z^2 - 2\alpha_j z + (\alpha_j^2+\beta_j^2) = z^2 + p_j z + q_j,$$
$$p_j = -2\alpha_j, \quad q_j = \alpha_j^2 + \beta_j^2.$$

Поэтому формулу (5) можно записать еще в следующем виде:

$$Q_n(z) = a_n \prod_{j=1}^{r} (z-c_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{s} (z^2+p_j z+q_j)^{\nu_j}, \quad (5')$$

где $z^2 + p_j z + q_j$ — действительные многочлены второй степени, имеющие комплексные корни $\alpha_j \pm i\beta_j$ ($\beta_j > 0$, $p_j^2 - 4q_j = -4\beta_j^2 < 0$).

Доказательство. На основании формулы (3) § 5.4

$$Q_n(z)=\prod_{j=1}^{r}(z-c_j)^{\mu_j}Q_m(z),$$

где $Q_m(z)$ — действительный многочлен степени $m=n-\mu_1-\ldots-\mu_r$. Если $m=0$, то, очевидно, $Q_m(z)=a_n$; в общем случае применяем последовательно теорему 1 к комплексным корням Q_m.

Отметим, что основная теорема доказывает только существование корня (вообще комплексного) у многочлена n-й степени, не давая эффективных методов нахождения его в общем случае. Впрочем, доказательство этой теоремы проводится методами математического анализа, а не алгебры. Мы не доказываем здесь эту теорему. Она связана органически с теорией функций комплексного переменного.

Существуют формулы решения общих уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Для уравнений степени $n>4$ таких формул нет. Абель[1]) доказал, что они не могут существовать. Это надо понимать в том смысле, что при $n>4$ корни уравнения $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0=0$ ($a_n\neq 0$) не выражаются через коэффициенты a_k посредством функций от этих коэффициентов, представляющих собой результат конечного числа операций только следующего вида: сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня.

§ 5.6. Интегрирование рациональных выражений

Отношение двух алгебраических многочленов

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

$$P_m(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m,$$
$$Q_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

b_m, $a_n\neq 0$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, называется *рациональной функцией* и еще *рациональной дробью*.

Будем считать, что *рациональная дробь f действительная*, т. е. P_m и Q_n — действительные многочлены. Кроме того, будем считать, что x — действительная переменная.

[1]) Н. Г. Абель (1802—1829) — выдающийся норвежский математик.

Рациональные функции вида

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{A}{x-a}, \quad \dfrac{A}{(x-a)^k}\ (k\geqslant 2), \quad \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\\ \dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\ (k\geqslant 2),\end{array}\right\} \tag{2}$$

где A, B, a, p, q — действительные числа, k — натуральное число, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, будем называть *простейшими дробями*.

В § 5.2 мы показали, как вычисляются интегралы от простейших дробей (см. (4), (5), (6), (7), (11) § 5.2).

Пусть надо найти неопределенный интеграл от рациональной функции $f(x)$ (см. (1)). Если $m\geqslant n$, то простым делением выделяем из f целую часть:

$$f(x) = \text{многочлен} + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)} \quad (m_1 < n).$$

Интегрирование многочлена не представляет труда и трудность свелась к интегрированию рациональной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Будем поэтому считать, что наша рациональная дробь $f(x)$ *правильная*, т. е. степень ее числителя меньше степени знаменателя ($m<n$).

Теорема 1. *Пусть знаменатель правильной действительной рациональной дроби разложен по формуле* (5′) § 5.5:

$$Q_n(x) = a_n(x-c_1)^{\mu_1}\ldots(x-c_r)^{\mu_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}\ldots$$
$$\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}.$$

Тогда дробь (1) *можно представить и притом единственным образом в виде следующей суммы простейших дробей:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{\mu_1}} + \frac{A_{1,2}}{(x-c_1)^{\mu_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1,\mu_1}}{x-c_1} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{A_{r,1}}{(x-c_r)^{\mu_r}} + \frac{A_{r,2}}{(x-c_r)^{\mu_r-1}} + \ldots + \frac{A_{r,\mu_r}}{x-c_r} +$$
$$+ \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1-1}} + \ldots + \frac{B_{1,\nu_1}x+C_{1,\nu_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{B_{s,1}x+C_{s,1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}} + \frac{B_{s,2}x+C_{s,2}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s-1}} + \ldots + \frac{B_{s,\nu_s}x+C_{s,\nu_s}}{x^2+p_sx+q_s}, \tag{3}$$

где A, B, C (с соответствующими индексами) — постоянные числа.

Эта теорема утверждает, что для любой правильной рациональной действительной дроби существуют постоянные числа A, B, C с указанными индексами так, что имеет место тождество (3) для всех x, исключая значения $x = c_1, \ldots, c_r$, для которых обе части (3) не определены. Эту теорему можно аккуратно доказать, но мы здесь ее доказывать не будем.

Поясним формулировку теоремы 1 на примере. Согласно теореме 1 имеет место равенство

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}, \tag{4}$$

где A_1, A_2, M, N — вполне определенные постоянные числа. Чтобы найти их, приводим (4) к общему знаменателю и приравниваем числители левой и правой частей:

$$2x^3+x^2+x+2 = A_1(x-1)(x^2+x+1) + \\ + A_2(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2. \tag{5}$$

Раскрывая скобки в правой части (5), группируем члены с одинаковыми степенями x и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x обеих частей (см. § 4.14, теорема 2):

$$\left.\begin{aligned} 2 &= A_1 + M, \\ 1 &= A_2 + N - 2M, \\ 1 &= A_2 + M - 2N, \\ 2 &= -A_1 + A_2 + N. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Мы получили четыре линейных уравнения с четырьмя неизвестными A_1, A_2, M, N. Эта система по теореме 1 имеет решение и притом единственное. Решая систему (6), получим $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $N = M = 1$, и потому

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}. \tag{7}$$

В общем случае, если мы нашли коэффициенты A, B, C в (3), для интегрирования дроби P_m/Q_n у нас все готово: неопределенный интеграл от левой части (3) равен сумме неопределенных интегралов от всех членов правой плюс некоторая постоянная C. Выше уже было отмечено, что интегралы от любого из членов (3) мы умеем вычислять.

В случае примера (7)

$$\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Замечание 1. Равенство (5) верно для любого $x \neq 1$. Но оно тогда верно и при $x=1$, потому что слева и справа в (5) стоят непрерывные функции от x. Подставив в (5) $x=1$, получим $6=3A_2$, т. е. $A_2=2$ и, положив $x=0$, получим $2=-A_1+A_2+N$, т. е. $N=A_1$. Эти данные ($A_2=2$, $N=A_1$) сильно упрощают систему (6). На практике подобными соображениями не надо пренебрегать.

Замечание 2. Принципиально всякая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях. Практически полное интегрирование (1) можно довести до конца в случае, если известны все корни Q_n и их кратности. Но мы уже говорили в § 5.5, что это не всегда удается узнать. В связи с этим всякого рода упрощения интеграла от рациональной дроби (1) являются очень ценными.

С этой точки зрения заслуживает большого внимания метод Остроградского[1]), обычно излагаемый в более полных учебниках[2]).

§ 5.7. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим случаи, когда заменой переменной можно свести интегрирование нерациональных функций к интегрированию рациональных функций (т. е., как говорят, рационализировать интеграл).

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция своих аргументов x и y, т. е. над x и y совершаются только арифметические операции, чтобы получить $R(x, y)$. Например,

$R(x, y) = \dfrac{axy+y^2}{cx+x^{10}y}$ — рациональная функция, а

$f(x, y) = \sqrt{x+y}+x^2$ — не является рациональной.

I. Вычислить $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где a, b, c, d —

---

[1]) В. М. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик.

[2]) См., например, «Курс математического анализа» С. М. Никольского, т. I, § 8.7.

постоянные числа, m — натуральное число, $ad-bc\neq 0$, $R(x, y)$ — рациональная функция.

Функцию вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ называют *дробно-линейной иррациональностью.*

Покажем, что замена $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ рационализирует интеграл. В самом деле, $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$, откуда $x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a}$ — рациональная функция от t. Далее,

$$dx=\frac{mt^{m-1}[ad-bc]}{(ct^m-a)^2}dt.$$

Поэтому

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=$$
$$=\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right)\frac{mt^{m-1}[ad-bc]}{(ct^m-a)^2}dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция по t, интегрировать которую мы умеем.

Пример 1. Вычислить $\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$. Здесь $R(x, y)=\frac{y}{(x-1)^2}$. Полагая $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, получим $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=\frac{-6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$, $x-1=\frac{2}{t^3-1}$. Таким образом,

$$\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\cdot\frac{(t^3-1)^2}{4}dt=-\frac{3}{2}\int t^3\,dt=$$
$$=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4+C.$$

Пример 2.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^2+(\sqrt[6]{x})^3}=(\sqrt[6]{x}=t)=\int\frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3}=$$
$$=6\int(t^2-t+1)\,dt-\ln|1+t|=$$
$$=2t^3-3t^2+6t-\ln|1+t|+C.$$

II. Вычислить $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где a, b, c — постоянные числа. Функцию $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ будем называть *квадратичной иррациональностью.*

Если трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1, x_2, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ и

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})=R\left(x, (x-x_1)\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}a}\right)=$$
$$=R_1\left(x, \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right),$$

и дело сводится к случаю I.

Поэтому будем считать, что ax^2+bx+c не имеет действительных корней и $a>0$. Тогда рационализация интеграла может быть достигнута с помощью подстановки Эйлера[1]):

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.$$

Отсюда $ax^2+bx+c=t^2-2x\sqrt{a}t+ax^2$, т. е. $x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$ — рациональная функция от t. Но тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}=t-\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}\sqrt{a}$$

— также рациональная функция от t. Поэтому

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int R_1(t)\,dt.$$

Замечание. Если $a<0$, а $c>0$ $(ax^2+bx+c\geqslant 0)$, то можно сделать замену

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$. Бином x^2+a^2 не имеет действительных корней. Поэтому полагаем

$$t=\sqrt{x^2+a^2}+x,\quad x^2+a^2=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-a^2}{2t}$$

и

$$\sqrt{x^2+a^2}=t-x=\frac{t^2+a^2}{2t}.$$

Отсюда

$$x\sqrt{x^2+a^2}=\frac{t^4-a^4}{4t^2},\qquad dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt.$$

---

[1]) Эту подстановку можно применять и в случае действительных корней при $a>0$ на интервале, где $ax^2+bx+c\geqslant 0$.

В силу этого

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{t^2+a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int\left[t+\frac{2a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3}\right]dt =$$
$$= \frac{a^2}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{8} - \frac{a^4}{8t^2} + C = \frac{a^2}{2}\ln|t| + \frac{t^4-a^4}{8t^2} + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + C.$$

III. Интегрирование выражений $R(\cos x, \sin x)$. Рационализация $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ достигается с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$ $(-\pi < x < \pi)$, которая называется *универсальной*. В самом деле,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

поэтому

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt.$$

Если функция $R(x, y)$ обладает свойствами четности или нечетности по переменным x или y, то могут употребляться и другие подстановки, также рационализирующие интеграл.

Пусть

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} \qquad (u = \cos x, \quad v = \sin x),$$

где P и Q — многочлены от u и v.

1) Если один из многочленов P, Q четный по v, а другой — нечетный по v, то подстановка $t = \cos x$ рационализирует интеграл.

2) Если один из многочленов P, Q четный по u, а другой — нечетный по u, то подстановка $t = \sin x$ рационализирует интеграл.

3) Если P и Q: а) оба не изменяются при замене u, v соответственно на $-u$, $-v$ или б) оба меняют знак, то интеграл рационализируется подстановкой $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$).

Примеры:

1°. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$
$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$2^\circ.\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x\,d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,d(\cos x) =$$
$$= (t = \cos x) = -\int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt.$$

В данном случае $R(u,\ v) = \frac{v^3}{u^4} = \frac{v^3}{u^4 v^0}$, т. е. числитель нечетный относительно v, а знаменатель четный по v, и мы имеем дело со случаем 1).

$$3^\circ.\ \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int \frac{dx}{(a^2 + b^2\,\mathrm{tg}^2\,x)\cos^2 x} =$$
$$= (t = \mathrm{tg}\,x) = \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}.$$

Здесь числитель $P(u,\ v) = 1$, а знаменатель $Q(u,\ v) = a^2u^2 + b^2v^2$. Оба не меняются при замене u, v соответственно на $-u$, $-v$, т. е. мы имеем дело со случаем 3а).

ГЛАВА 6

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 6.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, и его определение

а) Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b — конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. График ее изображен на рис. 75. Поставим задачу: требуется определить понятие площади фигуры, ограниченной кривой

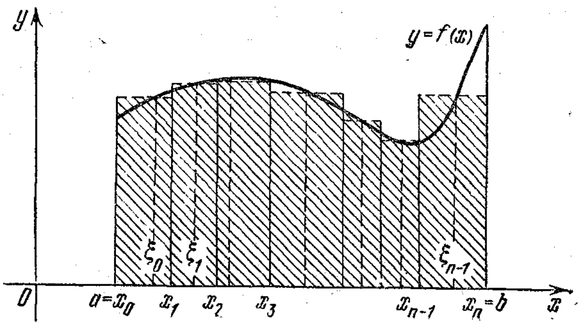

Рис. 75.

$y=f(x)$, осью x, прямыми $x=a$ и $x=b$, и вычислить эту площадь. Поставленную задачу естественно решить так.

Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b, \qquad (1)$$

выберем на каждом из полученных частичных отрезков

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j=0, 1, \ldots, n-1) \qquad (2)$$

по произвольной точке $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, определим значения функции f в этих точках и составим сумму

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \qquad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

которую называют *интегральной суммой* и которая, очевидно, равна сумме площадей заштрихованных прямоугольников (см. рис. 75).

Будем теперь стремить все Δx_j к нулю и притом так, чтобы максимальный (самый большой) частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способов разбиения (1) и выбора точек ξ_j на частичных отрезках, то естественно величину S называть *площадью нашей криволинейной фигуры*. Таким образом,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \tag{4}$$

Итак, мы дали определение площади нашей криволинейной фигуры (трапеции). Возникает вопрос, имеет ли каждая такая фигура площадь, иначе говоря, стремится ли на самом деле к конечному пределу ее интегральная сумма S_n, когда $\Delta x_j \to 0$? В дальнейшем будет доказано, что этот вопрос решается положительно: каждая определенная выше криволинейная фигура, соответствующая некоторой непрерывной функции $f(x)$, действительно имеет площадь в смысле сделанного определения, выражаемую, таким образом, зависящим от этой фигуры числом S.

Другой возникающий здесь вопрос, насколько естественно данное определение площади, как всегда в таких случаях, решается практикой. Мы скажем только, что практика полностью оправдала это определение. У нас будет много случаев убедиться в правильности сделанного определения.

б) Дан линейный неоднородный стержень, лежащий на оси x в пределах отрезка $[a, b]$. Требуется определить массу этого стержня. Пусть плотность распределения массы вдоль стержня есть некоторая непрерывная функция от x: $\rho(x)$.

Для определения массы стержня разобьем его на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В пределах каждой части $[x_i, x_{i+1}]$ выберем по произвольной точке ξ_i.

Так как в пределах $[x_i, x_{i+1}]$ функция $\rho(x)$ изменяется мало, то массу части стержня, соответствующей отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, можно считать приближенно равной $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Масса же m всего стержня приближенно равна

$$\rho(\xi_0)\Delta x_0 + \rho(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + \rho(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

Точное значение массы, очевидно, получим в пределе, когда наибольший частичный отрезок стремится к нулю, т. е.

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i. \tag{4'}$$

Обе рассмотренные задачи привели нас к одной и той же математической операции над функциями различного происхождения, заданными на отрезке $[a, b]$. Нам встретится много других конкретных задач, решение которых сводится к подобной операции над функцией, заданной на отрезке. Эта операция называется *операцией интегрирования функции на отрезке*, а ее результат — число — называется *определенным интегралом от функции на отрезке*.

Определение 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разделим $[a, b]$ на части произвольными точками:*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

и будем говорить, что этим произведено разбиение R отрезка $[a, b]$. На каждом частичном отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ разбиения выберем произвольную точку $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ и составим сумму

$$\sigma_R = \sigma_R(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j \qquad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j),$$

называемую интегральной суммой функции f, соответствующей разбиению R.

Обозначим через

$$\lambda_R = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \Delta x_j$$

максимальную длину частичных отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ разбиения R.

Предел (если он существует), к которому стремится интегральная сумма σ_R, когда $\lambda_R \to 0$, называется определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x)\, dx \quad (a < b). \tag{5}$$

Число a называется *нижним пределом* определенного интеграла, а число b — *верхним* его *пределом*.

Определение 1 эквивалентно следующему.

Определение 1′. *Определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется число I, удовлетворяющее следующему свойству: для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R отрезка $[a, b]$, у которого $\lambda_R = \max_j \Delta x_j < \delta$, выполняется неравенство*

$$|\sigma_R - I| = \left| \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j - I \right| < \varepsilon$$

при произвольном выборе точек $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$.

Понятие определенного интеграла так, как мы его определили, было введено для непрерывных функций французским математиком Коши и в общем случае Риманом[1] — для функций не обязательно непрерывных (интегрируемых по Риману). Обычно предел (5) называют *интегралом Римана* и функцию, для которой этот предел существует, называют *интегрируемой в смысле Римана.*

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то для нее всегда, как мы узнаем, предел (5) существует.

Говорят также, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция *интегрируема* на нем *в смысле Коши.*

В п. а) мы определили (см. рис. 75) площадь плоской фигуры, ограниченную сверху графиком непрерывной функции $y = f(x) \geqslant 0$, снизу осью x и с боков прямыми $x = a$ и $x = b$. Мы можем теперь сказать, что площадь этой фигуры равна определенному интегралу от f на отрезке $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

[1]) Б. Ф. Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик.

Мы можем еще сказать, что масса стержня, о котором шла речь в п. б), равна определенному интегралу от его линейной плотности $\rho(x)$ в пределах $[a, b]$:

$$m = \int_a^b \rho(x)\, dx.$$

Итак, по определению *определенным интегралом от функции f на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы* (5), *когда максимальный частичный отрезок разбиения R стремится к нулю.*

В этом определении, которое теперь уже не связано с задачей о нахождении площади, функция f не обязательно непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Надо отметить, что это определение не утверждает существование определенного интеграла для всякой функции f, заданной на $[a, b]$, т. е. существования предела (5). Оно только говорит, что если этот предел существует для заданной на $[a, b]$ функции f, то он называется определенным интегралом от f на $[a, b]$.

Следует иметь в виду также, что когда говорят, что указанный предел I существует, то подразумевают, что он не зависит от способов разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора на полученных частичных отрезках точек ξ_j.

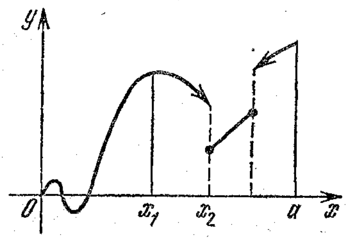

Рис. 76.

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (5) связано с трудностями — интегральные суммы сколько-нибудь сложных функций имеют громоздкий вид и зачастую не легко преобразовать их к виду, удобному для вычисления пределов. Во всяком случае, на этом пути не удалось создать общих методов. Интересно отметить, что впервые задачу этого рода решил Архимед. При помощи рассуждений, которые отдаленно напоминают современный метод пределов, он вычислил площадь сегмента параболы. В дальнейшем на протяжении веков многие математики решали задачи на вычисление площадей фигур и объемов тел. Все же еще в XVII веке постановка таких задач и методы их решения носили сугубо частный характер. Существенный сдвиг в этом вопросе внесли Ньютон и Лейбниц[1]), указавшие общий метод решения таких задач. Они показали, что вычисление определенного интеграла от функции может быть сведено к отысканию ее первообразной.

Как было отмечено выше, непрерывная на $[a, b]$ функция интегрируема на $[a, b]$. Это будет доказано в § 6.7.

Будет также доказано, что монотонная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем. Надо учесть, что монотонная функция может иметь разрывы в конечном или даже счетном числе (см. теорему 2 § 3.4).

На рис. 76 изображен график функции $y=f(x)$, заданной на отрезке $[0, a]$. Эта функция непрерывна на $[0, x_1]$, убывает на $[x_1, x_2]$ и возрастает на $[x_2, a]$. Следовательно, она интегрируема на каждом из этих отрезков. Но тогда, на основании аддитивных свойств интеграла, о которых речь будет впереди, наша функция интегрируема на всем отрезке $[0, a]$ (см. § 6.2, теорема 3).

Таким образом, если отрезок $[a, b]$, на котором задана функция $y=f(x)$, можно разрезать на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых она непрерывна или монотонна, то такая функция интегрируема на $[a, b]$.

Ньютон и Лейбниц доказали теорему, связывающую два важных понятия математического анализа — интеграла и производной. Эта теорема выражается соотношением (формулой Ньютона — Лейбница)

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Здесь $f(x)$ есть произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция, а $F(x)$ — какая-либо ее первообразная на $[a, b]$ $(F'(x)=f(x))$.

Таким образом, *для того чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$, надо узнать ее первообразную функцию $F(x)$ и взять разность $F(b)-F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a, b]$.*

Если уже считать известным, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на нем и что для этой функции существует первообразная $F(x)$, то формулу (6) можно вывести без труда.

[1]) И. Ньютон (1643—1727) — гениальный английский физик и математик. Г. В. Лейбниц (1646—1716) — великий немецкий математик.

Пусть R есть произвольное разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$ на части. Тогда (пояснения ниже)

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \ldots$$

$$\ldots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow[\lambda_R \to 0]{} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (7)$$

откуда и следует формула (6).

В четвертом равенстве (7) мы применили теорему Лагранжа о среднем

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

в силу которой ξ_k есть некоторая точка интервала (x_k, x_{k+1}). Последнее соотношение следует из того факта, что функция f непрерывна на $[a, b]$, следовательно, интегрируема на $[a, b]$, и потому ее любая интегральная сумма и, в частности, полученная нами применением теоремы Лагранжа, стремится при $\lambda_R \to 0$ к определенному интегралу от f на $[a, b]$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Неограниченная на отрезке $[a, b]$ функция не интегрируема на этом отрезке.*

Таким образом, *для того чтобы функция f была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо, чтобы она была ограниченной на этом отрезке.*

Однако это условие не является достаточным.

Пример. Функция

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррациональное,} \end{cases}$$

ограничена: $|\psi(x)| = 1$, но не интегрируема на любом отрезке $[a, b]$ $(a < b)$.

В самом деле, если в ее интегральной сумме за точки ξ_j выбрать рациональные числа, то

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} \psi(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_j = b - a.$$

Если же выбрать ξ_j иррациональными, то

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)\Delta x_j = -(b - a).$$

Это показывает, что σ_R не может иметь один и тот же предел при любом выборе ξ_j, и, следовательно, функция ψ не интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\sigma_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

есть интегральная сумма функции f, соответствующая некоторому разбиению R: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Если допустить, что функция f не ограничена на $[a, b]$, то она необходимо не ограничена на одном из частичных отрезков, пусть на $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. Зафиксируем $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ для всех $i \neq i_0$, а ξ_{i_0} будем пока считать переменной. Слагаемое $f(\xi_{i_0})(x_{i_0+1} - x_{i_0})$ не ограничено на $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, а сумма остальных слагаемых есть определенное число. Но тогда $|\sigma_R|$ можно сделать как угодно большим при соответствующем подборе точки $\xi_{i_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ и функция f не может быть интегрируемой на $[a, b]$. Ведь из интегрируемости функции f на $[a, b]$ следует, что ее интегральные суммы ограничены при любом выборе ξ_i.

Впрочем, в дальнейшем будет введено понятие несобственного интеграла. Некоторые неограниченные на отрезке функции интегрируемы в несобственном смысле. Но об этом будет речь позднее.

§ 6.2. Свойства определенных интегралов

В этом параграфе мы будем изучать свойства интегрируемых функций. Выше уже отмечалось, что непрерывные и монотонные на отрезке $[a, b]$ функции интегрируемы на нем. Это будет доказано позднее в § 6.7.

Теорема 1. *Если M — константа, то*

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a). \tag{1}$$

В самом деле, интегральная сумма функции $f(x) = M$ для любого разбиения R отрезка $[a, b]$ равна

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} M\,\Delta x_j = M \sum_{j=0}^{n-1} \Delta x_j = M(b-a).$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = M(b-a).$$

Теорема 2. *Для функции*

$$\psi_c(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b], \quad x \neq c, \\ A, & x = c, \end{cases}$$

$$\int_a^b \psi_c(x)\,dx = 0.$$

В самом деле, зададим произвольное разбиение R отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Один из полуинтервалов этого разбиения, пусть $[x_m, x_{m+1})$, содержит в себе точку c: $x_m \leqslant c < x_{m+1}$. Поэтому интегральная сумма

$$\sigma_R(\psi_c) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_c(\xi_k)\,\Delta x_k = \psi_c(\xi_{m-1})\,\Delta x_{m-1} + \psi_c(\xi_m)\,\Delta x_m$$

(остальные слагаемые заведомо равны нулю). Так как $|\psi_c(x)| \leqslant |A|$, то

$$|\sigma_R(\psi_c)| \leqslant |A|\,(\Delta x_{m-1} + \Delta x_m) \to 0$$

при $\lambda_R \to 0$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Если функция f интегрируема на каждом из отрезков $[a, c]$, $[c, b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a, b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2}$$

(*аддитивное свойство определенного интеграла*).

Доказательство. Зададим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$

$$R\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

однако такое, что одна из точек R, пусть x_m, совпадает с точкой c $(x_m = c)$. Тогда R индуцирует (наводит) на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ определенные разбиения R_1 и R_2:

$$R_1\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c,$$
$$R_2\colon\ c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$$

и

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j + \sum_{j=m}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2},$$

т. е. $\sigma_R = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2}$. Пусть

$$\lambda_R = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} |\Delta x_j| \to 0.$$

Тогда и подавно $\lambda_{R_1} \to 0$ и $\lambda_{R_2} \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = \lim_{\lambda_{R_1} \to 0} \sigma_{R_1} + \lim_{\lambda_{R_2} \to 0} \sigma_{R_2} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Это равенство доказано пока для разбиений R, содержащих в себе точку c. Но тогда оно верно и для любых разбиений R (см. лемму 1 ниже). Следовательно, интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует и имеет место (2).

По определению

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad (b < a), \tag{4}$$

где f интегрируема на $[b, a]$.

Нетрудно видеть, если учесть соглашения (3), (4), что равенство (2) верно для любых чисел a, b, c, лишь бы f была интегрируема на максимальном из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.

Например, в случае, если $c < a < b$, на основании теоремы 3

$$\int_c^b f\,dx = \int_c^a f\,dx + \int_a^b f\,dx$$

или

$$\int_a^b f\,dx = \int_c^b f\,dx - \int_c^a f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx,$$

и мы получили (2).

Теорема 4. *Если функции f_1 и f_2 интегрируемы на $[a, b]$ и A, B — произвольные числа, то*

$$\int_a^b (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_a^b f_1\,dx + B\int_a^b f_2\,dx. \tag{5}$$

В частности, при $B = 0$ получим равенство

$$\int_a^b Af_1\,dx = A\int_a^b f_1\,dx, \tag{6}$$

показывающее, что постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

При $A=1$, $B=\pm 1$ *получим*

$$\int_a^b (f_1 \pm f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx \pm \int_a^b f_2\,dx. \qquad (7)$$

Доказательство. Для произвольного разбиения R имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1} [Af_1(\xi_j)+Bf_2(\xi_j)]\,\Delta x_j = A\sum_{j=0}^{n-1} f_1(\xi_j)\,\Delta x_j + B\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

Отсюда, перейдя к пределу при $\lambda_R \to 0$, получим равенство (5). Оно, очевидно, верно и при $b \leqslant a$.

Теорема 5. *Если интегрируемую на* $[a, b]$ *функцию* f *видоизменить в точке* $c \in [a, b]$, *то для полученной после видоизменения функции* f_1 *имеет место равенство*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Видоизменение функции f только в точке c сводится к тому, что к $f(x)$ прибавляется функция вида

$$\psi_c(x) = \begin{cases} 0, & x\in[a, b], \quad x\neq c, \\ A, & x=c, \end{cases}$$

где A — некоторое число. Тогда

$$f_1(x) = f(x) + \psi_c(x).$$

При этом по теореме 2

$$\int_a^b \psi_c(x)\,dx = 0.$$

Поэтому в силу теоремы 4

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \psi_c(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из теоремы 5 мы видим, что интегрируемость функции f не зависит от того, какие значения она принимает в некоторой определенной точке.

Например, функция $\psi(x) = (\sin x)/x$ определена на полуинтервале $(0, 1]$. Если положить ее равной 1 при $x=0$ $(\psi(0)=1)$, то она будет непрерывной, следовательно, интегрируемой на отрезке $[0, 1]$. Но она останется интегрируемой, и ее интеграл $\int\limits_0^1 \psi(x)\,dx$ будет равен тому же значению, если положить, что $\psi(0)=A$, где A — любое число.

Теорема 6. *Если функции f и φ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяют на нем неравенству*

$$f(x) \leqslant \varphi(x),$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \quad (a \leqslant b). \tag{8}$$

Доказательство. Для любого разбиения R

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\xi_j)\,\Delta x_j$$

потому, что $\Delta x_j > 0$. Поэтому после перехода к пределу при $\lambda_R \to 0$ получим (8).

Теорема 7. *Справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \quad (a \leqslant b) \tag{9}$$

или, если a не обязательно меньше b, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|, \tag{9'}$$

где f и $|f|$ интегрируемы на $[a, b]$.

Доказательство. Очевидно,

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad \forall x \in [a, b].$$

Но тогда на основании теоремы 6

$$\int\limits_a^b (-|f(x)|)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \quad (a < b)$$

или

$$-\int\limits_a^b |f|\,dx \leqslant \int\limits_c^b f\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f|\,dx,$$

или

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \qquad (a<b),$$

что и требовалось доказать.

При $a<b$ правые части (9) и (9′) равны между собой. Если же $b<a$, то в силу (4)

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f|\,dx = \left|\int_a^b |f|\,dx\right|,$$

т. е. имеет место (9′).

Наконец, случай $a=b$ сводится к очевидному соотношению $0\leqslant 0$. Этим доказано (9).

Замечание 2. Интегрируемость f на $[a, b]$ влечет за собой интегрируемость $|f|$ на $[a, b]$ (см. ниже § 6.7, замечание 2). Для конкретных функций это всегда очевидно. Например, если функция f кусочно-непрерывна на $[a, b]$ (она, как будет доказано, интегрируема), тогда и $|f|$ кусочно-непрерывна.

Обратно, из интегрируемости $|f(x)|$, вообще говоря, не следует интегрируемость $f(x)$ на $[a, b]$.

Например, функция $\psi(x)$, приведенная в примере § 6.1,

$$\psi(x) = \begin{cases} \ \ 1 \text{ для рациональных } x, \\ -1 \text{ для иррациональных } x, \end{cases}$$

не интегрируема на $[a, b]$. Между тем $|\psi(x)|=1$ на $[a, b]$ и есть интегрируемая на $[a, b]$ функция.

Теорема 8. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на $[a, b]$ и существует точка $c\in[a, b]$ непрерывности f, для которой $f(c)>0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \qquad (a<b). \tag{10}$$

Доказательство. Будем считать, что $c\in(a, b)$. Так как f непрерывна в точке c и $f(c)>0$, то существует отрезок $[c-\delta, c+\delta]$ такой, что (см. § 3.3, теорема 4)

$$f(x) > \frac{f(c)}{2} = \eta > 0 \qquad \forall x\in[c-\delta, c+\delta].$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx > 0,$$

потому что

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \geqslant 0, \qquad \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \geqslant 0,$$

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \eta\,dx = 2\delta\eta > 0.$$

Если $c=a$ или $c=b$, то вместо $[c-\delta, c+\delta]$ придется рассматривать отрезок $[a, a+\delta]$, соответственно $[b-\delta, b]$.

Лемма 1. *Пусть R_* обозначает произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ содержащее в себе в качестве точки деления точку c.*

Функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, и для ее интегральных сумм, соответствующих только разбиениям вида R_*, имеет место

$$\lim_{\lambda_{R_*} \to 0} \sigma_{R_*} = I.$$

Тогда функция f интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = I = \lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R.$$

Доказательство. Пусть R есть произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, не содержащее точку c:

$$R:\ a=x_0 < x_1 < \ldots < x_m < x_{m+1} < \ldots < x_n = b,$$

где $x_m < c < x_{m+1}$.

Добавляя к R точку c, получим разбиение R_*. Если $\lambda_R \to 0$, то и $\lambda_{R_*} \to 0$.

Если выбросить из σ_R слагаемое $f(\xi_m)(x_{m+1}-x_m)$ и прибавить $f(\xi_m')(c-x_m)+f(\xi_m'')(x_{m+1}-c)$, то получим интегральную сумму σ_{R_*}. При этом

$$\sigma_R = \sigma_{R_*} + \mu,$$

где $\mu = f(\xi_m)(x_{m+1}-x_m) - f(\xi_m')(c-x_m) - f(\xi_m'')(x_{m+1}-c)$, $x_m \leqslant \xi_m' \leqslant c$, $c \leqslant \xi_m'' \leqslant x_{m+1}$. Очевидно,

$$|\mu| \leqslant M(x_{m+1}-x_m) + M(c-x_m) + M(x_{m+1}-c) = \\ = 2M(x_{m+1}-x_m) \xrightarrow[\lambda_R \to 0]{} 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = \lim_{\lambda_{R_*} \to 0} \sigma_{R_*} + \lim_{x_{m+1}-x_m \to 0} \mu = I + 0 = I.$$

§ 6.3. Интеграл как функция верхнего предела

Заметим, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

т. е. не имеет значения, по какой букве — x или u — интегрировать на отрезке $[a, b]$. Ведь в обоих случаях любая интегральная сумма f имеет вид

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\Delta x_j.$$

Пусть задана интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция f. Тогда, каково бы ни было x, удовлетворяющее неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, функция f интегрируема также на отрезке $[a, x]$.

Это утверждение требует доказательства, но мы не будем его доказывать. В конкретных случаях, как правило, это утверждение очевидно. Например, непрерывная (монотонная) функция на отрезке $[a, b]$ в свою очередь непрерывна (монотонна) на $[a, x]$, следовательно, интегрируема на $[a, x]$.

Зададим произвольное значение $x \in [a, b]$. Нас будет интересовать определенный интеграл от f на отрезке $[a, x]$. Это есть некоторая функция от x. Обозначим ее через $F(x)$. Итак

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du. \qquad (1)$$

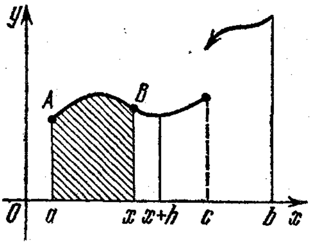

Рис. 77.

Мы употребляем букву u в качестве переменной интегрирования, чтобы отличить ее от верхнего предела интегрирования x.

На рис. 77 изображен график ограниченной кусочно-непрерывной функции f с точкой разрыва c. Число $F(x)$ для заданного x выражается на рисунке площадью фигуры $ABxa$. При изменении x на $[a, b]$ изменяется $F(x)$.

Теорема 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция F, определенная по формуле* (1), *непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$.*

Доказательство. Зададим произвольную точку x и придадим ей приращение h (на рис. 77 изображено положительное h). Имеем

$$|F(x+h) - F(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du\right| = \left|\int_x^{x+h} f(u)\,du\right| \leqslant M|h|$$

$(M \geqslant |f(u)| \ \forall u \in [a, b])$.

Мы получили неравенство

$$|F(x+h)-F(x)| \leqslant M|h|,$$

из которого следует:

$$\lim_{h\to 0} [F(x+h)-F(x)]=0,$$

т. е. F непрерывна в точке x.

Подчеркнем, что x может быть точкой непрерывности и точкой разрыва f, и все равно функция $F(x)$ непрерывна в этой точке.

Теорема 2. *Если интегрируемая на* $[a, b]$ *функция* f *непрерывна в точке* $x \in [a, b]$, *то в этой точке существует производная от* F (см. (1)):

$$F'(x)=f(x). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть x — точка непрерывности f. Имеем

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(u)\,du-\int_a^x f(u)\,du\right]=$$
$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\{f(x)+[f(u)-f(x)]\}\,du=$$
$$=\frac{1}{h}f(x)h+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du=$$
$$=f(x)+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du. \tag{3}$$

При получении (3) мы использовали доказанные выше свойства определенного интеграла. В четвертом равенстве мы воспользовались тем фактом, что $f(x)$ не зависит от u и при интегрировании по u надо считать $f(x)$ как постоянный множитель (см. теорему 1 § 6.2).

Докажем, что

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \tag{4}$$

Функция f непрерывна в точке x, поэтому для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что если $|h|<\delta$, то

$$|f(u)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall u\in[x, x+h].$$

Поэтому для $|h|<\delta$

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du\right| \leqslant \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(u)-f(x)|\,du\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon\,du\right| = \left|\frac{1}{h}\varepsilon h\right| = \varepsilon,$$

и мы обосновали свойство (4).

Из (3), переходя к пределу при $h\to 0$, на основании (4) получим, что существует производная $F'(x)$, равная

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

Этим теорема 2 доказана.

Обратим внимание на то, что в теореме 2 хотя и позволялось функции f быть разрывной на отрезке $[a, b]$, но в той точке x, в которой утверждалось существование производной от F, предполагалось, что функция f непрерывна. Иначе теорема, вообще говоря, была бы неверна.

Теорема 2, в частности, утверждает, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $F(x)$ имеет производную на этом отрезке, равную $f(x)$ ($F'(x)=f(x)\quad \forall x\in[a, b]$).

Таким образом, *если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для нее существует первообразная на этом отрезке. При этом в качестве одной из первообразных можно взять интеграл* (1).

Отсюда следует, что *неопределенный интеграл от функции f, непрерывной на $[a, b]$*, равен

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(u)\,du+C,\quad x\in[a, b],$$

где C — некоторая постоянная.

§ 6.4. Формула Ньютона—Лейбница

Эта формула имеет вид

$$\int_a^b f(u)\,du=\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}. \qquad (1)$$

Здесь $f(u)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, а $\Phi(u)$ — какая-либо ее первообразная на этом отрезке.

Формула Ньютона — Лейбница была уже доказана в § 6.1. Там предполагалось известным, что непрерывная на $[a, b]$ функция f интегрируема и имеет первообразную на $[a, b]$.

Теперь мы уже знаем из § 6.3, что интегрируемость непрерывной на $[a, b]$ функции влечет за собой существование у нее первообразной на $[a, b]$.

Приведем другое доказательство формулы Ньютона—Лейбница. Вернемся к функции

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du. \tag{2}$$

Заметим, что

$$F(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0 \quad \text{и} \quad F(b) = \int_a^b f(u)\,du. \tag{3}$$

Кроме того, мы знаем, что $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на $[a, b]$. Поэтому, если $\Phi(x)$ есть какая-либо, вообще другая, первообразная, то существует константа C такая, что

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{4}$$

Из (2), (3), (4) получим

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du,$$

и мы доказали формулу (1).

Пример 1.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Это показывает, что площадь (рис. 78) заштрихованной фигуры, лежащей под параболой $y = x^2$, равна $1/3$.

Пример 2.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

Таким образом, площадь фигуры (рис. 79), ограниченной сверху синусоидой $y = \sin x$ и снизу—осью x, равна 2.

Пример 3. Функция

$$\varphi(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, за исключением точки $x=0$. Отрезок $[-1, 1]$ можно разрезать на два отрезка $[-1, 0]$,

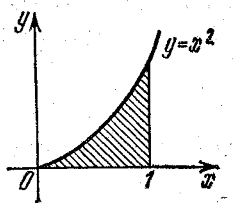

Рис. 78.

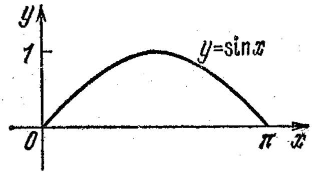

Рис. 79.

$[0, 1]$, где она монотонна, следовательно, интегрируема. Поэтому $\varphi(x)$ интегрируема на $[-1, 1]$. Справедлива формула

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\, du = -1 + |x| \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \tag{5}$$

В самом деле, на полуинтервале $[-1, 0)$ функция $\varphi(x)$ непрерывна: $\varphi(x) = -1$. Ее первообразная на этом полуинтервале равна $-x$. Поэтому, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\int_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\, du = \int_{-1}^{x} (-1)\, du = -u\Big|_{-1}^{x} = -1 - x \quad (-1 \leqslant x < 0). \tag{6}$$

В силу теоремы 1 $F(x)$ непрерывна, в частности, в точке $x=0$, поэтому

$$F(0) = \lim_{x \to 0} (-1 - x) = -1. \tag{7}$$

Для $x > 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\, du = \int_{-1}^{0} \operatorname{sign} u\, du + \int_{0}^{x} 1 \cdot du = -1 + u\Big|_{0}^{x} = -1 + x. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) следует (5).

Более элегантная формула получится, если интегрировать от точки $x=0$:

$$\int_0^x \operatorname{sign} u\, du = |x|. \qquad (9)$$

Под интегралом в (9) стоит разрывная в точке $x=0$ ограниченная функция, интеграл как функция верхнего предела $F(x)=|x|$, есть непрерывная функция, в том числе и в точке $x=0$, что согласуется с теоремой 1 § 6.3. Однако производная $F'(0)$ не существует, и это не противоречит теореме 2 § 6.3, которая гарантирует существование производной $F'(x)$, только если f непрерывна в точке x.

Теорема 1 (о замене переменной). *Имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (10)$$

где функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, $a=\varphi(c)$, $b=\varphi(d)$ и $f(x)$ непрерывна на $[A, B]=\varphi([c, d])$ — образе отрезка $[c, d]$ при помощи функции φ.

Доказательство. Пусть $F(x)$ и $\Phi(t)$ — первообразные функции соответственно $f(x)$ и $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Тогда (см. § 5.2, (1) и ниже) справедливо тождество $\Phi(t) = F[\varphi(t)]+C$, $c \leqslant t \leqslant d$, где C — некоторая постоянная. Поэтому

$$F(b)-F(a)=F[\varphi(d)]-F[\varphi(c)]=\Phi(d)-\Phi(c). \qquad (11)$$

Но на основании формулы Ньютона — Лейбница левая часть (11) равна левой части (10), а правая часть (11) — правой части (10), а это доказывает формулу (10).

Пример 4.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = (x=a\sin t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}.$$

Замечание. Верхний предел интегрирования по t можно взять равным $\frac{5\pi}{2}$, а результат будет тот же, и это согласуется с теоремой 1.

Пример 5.

$$\int_0^{4\pi} \sin^3 t\, dt = -\int_0^{4\pi} (1-\cos^2 t)\, d(\cos t) = (x = \cos t) = -\int_1^1 (1-x^2)\, dx = 0,$$

потому что в полученном интеграле нижний предел равен верхнему.

Пример 6. Если f — четная функция ($f(-u) = f(u)$), то

$$\int_{-a}^{a} f(u)\, du = 2\int_0^a f(u)\, du,$$

потому, что

$$\int_{-a}^{0} f(u)\, du = (u = -x) = -\int_a^0 f(-x)\, dx = \int_0^a f(-x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(u)\, du.$$

Пример 7. Если f — нечетная функция ($f(-u) = -f(u)$), то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Пример 8. Если f — периодическая функция периода 2π ($f(x+2\pi) = f(x)$), то

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

потому, что

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(x)\, dx = (x = t + 2\pi) = \int_0^\alpha f(t+2\pi)\, dt = \int_0^\alpha f(t)\, dt = -\int_\alpha^0 f(t)\, dt,$$

и, следовательно,

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} f(x)\, dx = \int_\alpha^0 f(x)\, dx + \int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

Пример 9.

$$\int_0^{3\pi} \sin^3 t\, dt = (x = \cos t) = -\int_1^{-1} (1 - x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx =$$
$$= 2\int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Пример 10. Решим пример 5, используя примеры 8,7:

$$\int_0^{4\pi} \sin^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 t\, dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t\, dt = 0,$$

так как функция $\sin^3 t$ нечетная.

Теорема 2. *Справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла:*

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx, \qquad (12)$$

где u и v — непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции.

Доказательство. Произведение $u(x)\, v(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную

$$(u(x)\, v(x))' = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x).$$

Поэтому по теореме Ньютона — Лейбница

$$u(x)\, v(x)\Big|_a^b = \int_a^b [u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)]\, dx =$$
$$= \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx + \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx,$$

откуда следует (12).

Пример 11.

$$\int_0^1 \ln(1 + x)\, dx = (u = \ln(1 + x),\ \ dv = dx) =$$
$$= x \ln(1 + x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\, dx}{1 + x} = \ln 2 - \int_0^1 1\, dx + \int_0^1 \frac{dx}{x + 1} =$$
$$= \ln 2 - 1 + \ln(1 + x)\Big|_0^1 = -1 + 2\ln 2.$$

Теорема 3 (о среднем для определенного интеграла). *Для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{13}$$

Доказательство. Так как f непрерывна, то для нее существует первообразная Φ, поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b). \tag{14}$$

Первое равенство в (14) есть формула Ньютона — Лейбница для непрерывной на $[a, b]$ функции f. Второе равенство есть формула Лагранжа для Φ. Наконец третье следует из того, что $\Phi'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.

§ 6.5. Остаток формулы Тейлора в интегральной форме

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда в силу формулы Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = \left(\begin{array}{l|l} u = f'(t) & du = f''(t)\,dt \\ dv = dt & v = t - x \end{array}\right) =$$

$$= f(a) + (t-x) f'(t)\Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt = f(a) +$$

$$+ f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt =$$

$$= \left(\begin{array}{l|l} u = f''(t) & du = f'''(t)\,dt \\ (x-t)\,dt = dv & v = -\frac{(x-t)^2}{2!} \end{array}\right) =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\,dt.$$

Продолжая дальше процесс интегрирования по частям, получим

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+r_n(x), \tag{1}$$

где

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{2}$$

Формула (1), (2) называется *формулой Тейлора с остатком в интегральной форме.*

Применяя к интегралу (2) (по t!) теорему 3 (о среднем) § 6.4, будем иметь

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)(x-a), \quad \xi\in(a, x).$$

Полагая

$$\xi=a+\theta(x-a), \quad 0<\theta<1,$$

получаем

$$r(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)),$$

т. е. остаточный член формулы Тейлора по степеням $x-a$ в форме Коши (см. § 4.14, (10)).

§ 6.6. Суммы Дарбу[1]). Условия существования интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана ограниченная функция f ($|f(x)|\leqslant M$). Введем разбиение

$$R\colon\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b.$$

Пусть

$$m_i=\inf_{x\in[x_i,\, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i=\sup_{x\in[x_i,\, x_{i+1}]} f(x).$$

Наряду с интегральными суммами

$$\sigma_R=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

рассмотрим суммы

$$s_R=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i, \quad S_R=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i,$$

[1]) Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

которые называют *нижней и верхней суммами Дарбу*. Очевидно, что $s_R \leqslant S_R$.

Суммы Дарбу не обязательно являются интегральными суммами. Однако если $f(x)$ — непрерывная функция, то s_R и S_R являются соответственно наименьшей и наибольщей из интегральных сумм, отвечающих данному разбиению, так как по теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает минимума и максимума в каждом $[x_i, x_{i+1}]$, и поэтому можно выбрать точки $\xi_i, \xi_i' \in [x_i, x_{i+1}]$ так, что $f(\xi_i) = m_i$ и $f(\xi_i') = M_i$.

Так как $m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$ и $\Delta x_i > 0$, то

$$s_R \leqslant \sigma_R \leqslant S_R. \qquad (1)$$

При фиксированном разбиении s_R и S_R — постоянные числа, а интегральная сумма σ_R остается переменной в силу произвольности чисел ξ_i. Легко видеть, что за счет выбора точек ξ_i сумму σ_R можно сделать как угодно близкой к s_R и S_R, т. е. при данном разбиении s_R и S_R являются точной нижней и точной верхней гранями для интегральных сумм:

$$s_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \inf_{\xi_i} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad S_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sup_{\xi_i} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Пусть R_1, R_2, R_3 — разбиения $[a, b]$. Если же точки R_1 принадлежат R_2, то будем писать $R_1 \subset R_2$ и говорить, что R_2 есть продолжение R_1. Если множество точек, из которых состоит R_3, есть теоретико-множественная сумма множеств точек, из которых состоят R_1 и R_2, то будем писать $R_3 = R_1 + R_2$.

Свойства сумм Дарбу:

1°. *Если к имеющимся у разбиения R точкам деления добавить новые точки, то верхняя сумма Дарбу (S_R) не возрастает, а нижняя (s_R) не убывает:*

$$S_{R'} \leqslant S_R, \quad s_R \leqslant s_{R'} \quad \forall R \subset R'.$$

Таким образом,

$$S_{R'} - s_{R'} \leqslant S_R - s_R.$$

Доказательство. Для доказательства, очевидно, можно ограничиться случаем, когда добавляется одна новая точка деления $x' \in (x_i, x_{i+1})$. Пусть S_R — верхняя сумма Дарбу для разбиения R и $S_{R'}$ — для разбиения R'. Тогда S_R отличается от $S_{R'}$ тем, что вместо слагаемого $M_i \Delta x_i$ в сумме $S_{R'}$ будут два слагаемых:

$$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x'),$$

где

$$M_i' = \sup_{x \in [x_i, x']} f(x), \quad M_i'' = \sup_{x \in [x', x_{i+1}]} f(x).$$

Так как отрезки $[x_i, x']$, $[x', x_{i+1}]$ являются частью $[x_i, x_{i+1}]$, то $M_i' \leqslant M_i$, $M_i'' \leqslant M_i$ (при уменьшении области рассмотрения sup может только уменьшиться). Поэтому

$$M_i'(x' - x_i) + M_i''(x_{i+1} - x') \leqslant M_i(x' - x_i + x_{i+1} - x') = M_i(x_{i+1} - x_i),$$

т. е. $S_{R'} \leqslant S_R$, что и требовалось доказать.

Для нижних сумм доказательство аналогично.

2°. *Каждая нижняя сумма Дарбу не больше каждой верхней суммы Дарбу, хотя бы отвечающей другому разбиению промежутка:* $s_{R_1} \leqslant S_{R_2}$.

Доказательство. Пусть $R_3 = R_1 + R_2$. Учитывая свойство 1°, получим $s_{R_1} \leqslant s_{R_3} \leqslant S_{R_3} \leqslant S_{R_2}$.

Таким образом, мы доказали, что множество нижних сумм Дарбу $\{s_R\}$ ограничено сверху какой-либо верхней суммой $S_{R'}$ $(s_R \leqslant S_{R'})$, и потому *существует точная верхняя грань нижних сумм*:

$$I_* = \sup_R s_R \leqslant S_{R'}.$$

К тому же мы доказали, что всякая верхняя сумма $S_{R'}$ не меньше числа I_*. Это показывает, что *существует точная нижняя грань верхних сумм*

$$I^* = \inf_{R'} S_{R'} \geqslant I_*.$$

Итак $I_* \leqslant I^*$. При этом для любого разбиения R выполняются неравенства

$$s_R \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_R. \tag{2}$$

Числа I_*, I^* называются *нижним и верхним интегралами Дарбу*.

Теорема 1 (существования интеграла). *Для того чтобы определенный интеграл ограниченной функции $f(x)$ существовал, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda_R \to 0} (S_R - s_R) = \lim_{\lambda_R \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0, \tag{3}$$

где число $\omega_i = M_i - m_i$ называется колебанием функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$.

Доказательство. I. Необходимость условия. Допустим, что определенный интеграл I функции $f(x)$ существует: т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что как только $\lambda_R < \delta$, будет $I - \varepsilon < \sigma_R < I + \varepsilon$, как бы мы ни выбирали точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Выше мы установили, что s_R и S_R при данном R являются точной нижней и точной верхней гранями для интегральных сумм σ_R, если варьировать точками $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Поэтому

$$I - \varepsilon \leqslant s_R \leqslant \sigma_R \leqslant S_R \leqslant I + \varepsilon \quad \forall R \text{ с } \lambda_R < \delta,$$

т. е.

$$\lim_{\lambda_R \to 0} s_R = I, \quad \lim_{\lambda_R \to 0} S_R = I$$

и

$$\lim_{\lambda_R \to 0} (S_R - s_R) = 0.$$

II. Достаточность. Пусть условие (3) выполнено. Тогда из неравенства (2) следует, что $I_* = I^*$. Обозначим общее значение этих двух чисел через I $(I_* = I^* = I)$. Тогда

$$s_R \leqslant I \leqslant S_R. \tag{4}$$

Из (3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $|S_R - s_R| < \varepsilon$ при $\lambda_R < \delta$. Но тогда из (1) и (4) получаем

$$|I - \sigma_R| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \lambda_R < \delta,$$

т. е. I является пределом для σ_R и $f(x)$ интегрируема.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\lim\limits_{\lambda_R \to 0} s_R = \lim\limits_{\lambda_R \to 0} S_R = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, и обратно, если $\lim\limits_{\lambda_R \to 0} s_R = \lim\limits_{\lambda_R \to 0} S_R = I$, то $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

§ 6.7. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $[a, b]$ разбит на части с $\lambda_R < \delta$, то все колебания $\omega_i < \varepsilon$. Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b-a).$$

В силу произвольности ε заключаем, что $\lim\limits_{\lambda_R \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$, и по теореме 1 § 6.6 функция $f(x)$ интегрируема.

Теорема 2. *Монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Будем считать также, что $f(a) < f(b)$, иначе функция постоянна и теорема тривиальна.

Так как $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$ $\forall x \in [a, b]$, то наша функция ограничена на $[a, b]$. Введем разбиение R отрезка $[a, b]$ с $\lambda_R < \delta$. Так как в данном случае $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant \delta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = \delta\,[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})] = \delta\,[f(b) - f(a)],$$

$x_0 = a$, $x_n = b$. Выберем теперь $\delta = \varepsilon/[f(b) - f(a)]$; тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon,$$

и по теореме существования (теорема 1 § 6.6) заключаем, что $f(x)$ интегрируема. Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что монотонная функция может иметь счетное множество точек разрыва. Например, функция $y = x + \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$; $y(0) = 0$, монотонно возрастает на $[0, 1]$, имеет счетное множество точек разрыва. Следовательно, по теореме 2 она интегрируема.

Замечание 2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ $(a < b)$, то $|f(x)|$ также интегрируем.

В самом деле, $\forall x'$ и x'' из $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$||f(x')|-|f(x'')||\leqslant|f(x')-f(x'')|. \qquad (1)$$

Если ω_i^*, ω_i — колебания $|f(x)|$, соответственно $f(x)$, на $[x_i, x_{i+1}]$, то из (1) следует, что $\omega_i^*\leqslant\omega_i$ и

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\,\Delta x_i.$$

Так как $f(x)$ интегрируема, то

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\,\Delta x_i\to 0 \quad \text{при } \lambda_R\to 0,$$

но тогда

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\,\Delta x_i\to 0,$$

и, следовательно, $|f(x)|$ интегрируем.

§ 6.8. Несобственные интегралы

Зададим на конечном полуинтервале $[a, b)$ функцию f. Допустим, что она интегрируема (например, непрерывна или кусочно-непрерывна) на любом отрезке $[a, b']$, где $b'<b$ и не ограничена в окрестности точки b. Тогда ее интеграл на $[a, b)$ или, что все равно, на $[a, b]$ в обычном смысле (Римана) не может существовать, потому что интегрируемая на $[a, b]$ по Риману функция необходимо ограничена. Однако может случиться, что существует конечный предел

$$\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}f(x)\,dx.$$

Если это так, то этот предел называют *несобственным интегралом от* f на отрезке $[a, b]$ и записывают в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}f(x)\,dx. \qquad (1)$$

В таком случае говорят, что *интеграл* $\int_a^b f\,dx$ *сходится*.

В противном случае говорят, что он *расходится* или не существует как несобственный риманов интеграл.

Допустим теперь, что функция f задана на луче $[a, \infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b']$, где

$a < b' < \infty$. Если существует предел

$$\lim_{b' \to \infty} \int_a^{b'} f(x)\,dx,$$

то он называется *несобственным интегралом от f на* $[a, \infty)$ и обозначается так:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b' \to \infty} \int_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Условимся в следующей терминологии. Выражение

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

будем называть *интегралом* (*от* f) *с единственной особенностью в точке* b, если выполняются следующие условия: если b — конечная точка, то функция f интегрируема на $[a, b']$ при любом b', удовлетворяющем неравенствам $a < b' < b$, и, кроме того, не ограничена в окрестности точки b. Если же $b = +\infty$, то про функцию f предполагается лишь, что она интегрируема на $[a, b']$ при любом конечном $b' > a$.

Подобным образом определяется интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с единственной особенностью в точке a. Теперь b — конечная точка. Если точка $a < b$ тоже конечна, то f в окрестности a не ограничена и интегрируема на любом отрезке $[a', b]$, где $a < a' < b$. Если же $a = -\infty$, то функция f предполагается интегрируемой на $[a', b]$ для любого $a' < b$.

В дальнейшем мы будем для определенности рассматривать интеграл (2) с единственной особенностью в точке b, конечной или бесконечной. Все выводы по аналогии могут быть перенесены на случай интеграла с единственной особенностью в точке a.

Теорема. *Пусть задан интеграл* (2) *с единственной особенностью в точке b. Для его существования необходимо и достаточно выполнение условия (Коши): для всякого $\varepsilon > 0$ существует $b_0 < b$ такое, что*

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(t)\,dt \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

каковы бы ни были b', b'', удовлетворяющие неравенствам $b_0 < b' < b'' < b$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a < x < b).$$

Существование интеграла (2) эквивалентно существованию предела $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} F(x)$, что в свою очередь эквивалентно выполнению условия Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует b_0, где $a < b_0 < b$, такое, что выполняется неравенство $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$ для всех b' и b'', удовлетворяющих неравенствам $b_0 < b' < b'' < b$. Но

$$F(b'') - F(b') = \int_{b'}^{b''} f(t)\,dt,$$

и теорема доказана.

Пример 1. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$ — постоянное число, имеет, очевидно, единственную особенность в точке $x = 0$. Чтобы выяснить, сходится ли он, надо вычислить предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha}[1 - \varepsilon^{1-\alpha}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл (4) сходится при $\alpha < 1$ и равен $(1-\alpha)^{-1}$, и расходится при $\alpha > 1$. Если же $\alpha = 1$, то он расходится:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

Пример 2. Интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{N \to \infty} x^{1-\alpha}\Big|_1^N =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \alpha > 1 \text{ (сходится)}, \\ +\infty, & \alpha < 1 \text{ (расходится)}; \end{cases}$$

интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln N = +\infty \text{ (расходится).}$$

Пример 3. Интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$ имеет единственную особенность в точке $x=+\infty$. Он сходится и равен

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N e^{-x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^N = \lim_{N\to+\infty} [1-e^{-N}] = 1.$$

Пусть снова задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Тогда интеграл

$$\int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где $a<c<b$, также имеет единственную особенность в точке b. Условие Коши существования интегралов (5) и (6) формулируется совершенно одинаково. Поэтому эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся. Кроме того, при $a<c<b$, очевидно, имеет место

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f\,dx = \lim_{b'\to b}\left(\int_a^c f\,dx + \int_c^{b'} f\,dx\right) =$$
$$= \int_a^c f\,dx + \lim_{b'\to b} \int_c^{b'} f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx, \tag{7}$$

где $\int\limits_a^c$ — обычный риманов собственный интеграл, а интегралы $\int\limits_a^b$ и $\int\limits_c^b$ несобственные.

Отметим равенство

$$\int_a^b (Af+B\varphi)\,dx=\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}(Af+B\varphi)\,dx=$$
$$=A\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f\,dx+B\lim_{b'\to b}\int_a^{b'}\varphi\,dx=A\int_a^b f\,dx+B\int_a^b\varphi\,dx, \qquad (8)$$

где A и B — постоянные. Его надо понимать в том смысле, что если существуют интегралы в правой части, то существует также интеграл в левой и имеет место равенство (8).

Говорят, что интеграл (5) (имеющий особенность в точке b) *сходится абсолютно*, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (9)$$

от абсолютного значения $|f(x)|$.

Абсолютно сходящийся интеграл сходится. В самом деле, из сходимости интеграла (9) следует, что для любого $\varepsilon>0$ на интервале (a, b) найдется точка b_0 такая, что если $b_0<b'<b''<b$, то

$$\varepsilon>\int_{b'}^{b''}|f(x)|\,dx\geqslant\left|\int_{b'}^{b''}f(x)\,dx\right|,$$

т. е. для интеграла (5) выполняется условие Коши. Так как

$$\left|\int_a^{b'}f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^{b'}|f(x)|\,dx,$$

то после перехода к пределу при $b'\to b$ для абсолютно сходящегося интеграла (5) получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx. \qquad (10)$$

З а м е ч а н и е. Неравенство (10) верно и для не абсолютно сходящегося интеграла — в этом случае справа стоит ∞, а символ ∞ мы считаем большим любого конечного числа. Этим широко пользуются в технике вычислений. Если надо узнать, сходится или нет интеграл $\int_a^b f\,dx$, мы пишем неравенство (10) и исследуем на сходимость интеграл $\int_a^b |f|\,dx$. Если этот последний сходится, т. е. если $\int_a^b |f|\,dx < \infty$, то сходится и наш интеграл $\int_a^b f\,dx$. Конечно, если $\int_a^b |f|\,dx = \infty$, то придется к нашему интегралу применить более тонкие методы. Возможно все же, что он сходится, но только не абсолютно (см. примеры в конце § 6.9).

§ 6.9. Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b, и на промежутке $[a, b)$ интегрирования $f(x) \geqslant 0$. Тогда, очевидно, функция

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,dx \qquad (a < b' < b)$$

от b' монотонно не убывает. Поэтому, если она ограничена ($F(b') \leqslant M$, $a < b' < b$), то существует интеграл (1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M.$$

Если же F неограничена, то интеграл (1) расходится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx = +\infty.$$

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b)$, то пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \infty$$

в зависимости от того, будет ли интеграл сходиться или расходиться.

Теорема 1. *Пусть интегралы*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

имеют единственную особенность в точке b и на промежутке $[a, b)$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \tag{3}$$

Тогда из сходимости интеграла (2) следует сходимость интеграла (1) и имеет место неравенство

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx,$$

а из расходимости интеграла (1) следует расходимость интеграла (2).

Доказательство. Из (3) следует, что для $a < b' < b$

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b'} \varphi\,dx. \tag{4}$$

Если теперь интеграл (2) сходится, то правая часть (4) ограничена числом, равным интегралу (2), но тогда ограничена и левая. И так как левая часть при возрастании b' монотонно не убывает, то она стремится к пределу (интегралу):

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx.$$

Наоборот, из расходимости интеграла (1) следует, что предел левой части (4) при $b' \to b$ равен ∞, а следовательно, и предел правой равен ∞.

Теорема 2. *Пусть интегралы (1) и (2) имеют единственную особенность в точке b, подынтегральные функции положительны и существует предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0. \tag{5}$$

Тогда эти интегралы одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (5) следует, что для положительного $\varepsilon < A$ можно указать такое $c \in [a, b)$, что

$$A-\varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A+\varepsilon \quad (c < x < b),$$

и так как $\varphi(x) > 0$, то

$$(A-\varepsilon)\varphi(x) < f(x) < (A+\varepsilon)\varphi(x) \quad (c < x < b). \tag{6}$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi\, dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ и сходимость интеграла $\int\limits_c^b (A+\varepsilon)\varphi\, dx$; но тогда по предыдущей теореме сходится также интеграл $\int\limits_c^b f\, dx$, а вместе с ним интеграл $\int\limits_a^b f\, dx$. Обратно, из сходимости $\int\limits_a^b f\, dx$ следует сходимость $\int\limits_c^b \varphi\, dx$ потому, что наряду с (5) имеет место равенство

$$\lim_{x\to b} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0.$$

Замечание. Равенство (5) означает, что функция f эквивалентна функции $A\varphi$ при $x \to b$. В этом случае также говорят, что функции f и φ имеют одинаковый порядок при $x \to b$.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^\infty \sin kx e^{-x}\, dx.$$

Имеем

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin kx\, dx\right| \leqslant \int\limits_0^\infty |e^{-x}\sin kx|\, dx \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 < \infty.$$

Мы применили неравенство (10) § 6.8 и замечание к нему.

Значком $\sim$ между интегралами будем обозначать тот факт, что эти интегралы в силу теоремы 2 одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Пример 2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \infty.$

Пример 3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin \sqrt{x}} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty.$

Пример 4. $\int\limits_1^\infty \frac{x-1}{x} e^{-x}\, dx \sim \int\limits_1^\infty e^{-x}\, dx < \infty.$

Интегралы примеров 2 и 3 имеют единственную особенность в точке $x=0$. Надо учесть, что $\sin x \approx x$, $\sin\sqrt{x} \approx \sqrt{x}$, $x \to 0$.

Интеграл примера 4 имеет единственную особенность в $x=\infty$. Надо учесть, что $\frac{x-1}{x} e^{-x} \approx e^{-x}$, $x \to +\infty$.

Пример 5. $\int\limits_0^\infty (x^2-3x+5)\, e^{-x}\, dx$ сходится, потому что

$$\left|\int\limits_0^\infty (x^2-3x+5)\, e^{-x}\, dx\right| \leqslant \int\limits_0^\infty |(x^2-3x+5)\, e^{-x/2}|\, e^{-x/2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant M \int\limits_0^\infty e^{-x/2}\, dx < \infty.$$

Дело в том, что $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2-3x+5)\, e^{-x/2} = 0$, поэтому найдется $N>0$ такое, что $|(x^2-3x+5)\, e^{-x/2}| < 1\ \forall x > N$.

С другой стороны, функция $|(x^2-3x+5)\, e^{-x/2}|$ непрерывна на $[0,\ N]$, следовательно, ограничена на $[0,\ N]$ некоторым числом M_1. Таким образом, она ограничена на $[0,\ \infty)$ числом $M = \max\{1,\ M_1\}$.

§ 6.10. Интегрирование по частям несобственных интегралов

Пример 1. Несобственные интегралы

$$\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx \quad (a>0) \tag{1}$$

сходятся. В самом деле, интегрируя по частям, получим

$$\int_a^A \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^A - \int_a^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

для всех конечных $A > a$. Переходя теперь к пределу при $A \to \infty$, получим

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

где интеграл в правой части сходится и даже абсолютно:

$$\left|\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leqslant \int_a^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \leqslant \int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} < \infty.$$

Пример 2. Интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится не абсолютно (условно), ибо интеграл

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \infty \qquad (a > 0), \tag{2}$$

т. е. расходящийся. В самом деле, в силу неравенства $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$ несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$$

$$= (2x = u) = \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{1-\cos u}{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{\cos u}{u}\,du.$$

Но интеграл $\int\limits_{2a}^\infty u^{-1}\cos u\,du$ сходится, а интеграл $\int\limits_{2a}^\infty u^{-1}\,du$ расходится. Следовательно, несобственный интеграл (2) расходится.

Замечание. Сходимость интеграла (1) объясняется тем, что функция $\sin x$ периодически колеблется, принимая последовательно положительные и отрицательные значения. Накопление площади, вызываемое положительными значениями $\sin x$, компенсируется соответствующим накоплением, вызываемым отрицательными значениями.

Это явление получит объяснение в теории рядов (см. ряд Лейбница и условно сходящиеся ряды).

Приведенные примеры показывают, что интегрирование по частям может оказаться полезным средством исследования сходимости несобственных интегралов.

Ниже приводятся общие соображения, которые лучше поясняют механизм этого метода.

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$ и $\Phi(x)$ — ее первообразная. Пусть, кроме того, $g(x)$ непрерывно дифференцируемая функция на $[a, \infty)$. Тогда

$$\int_a^A \varphi(x)\, g(x)\, dx = g(x)\, \Phi(x)\Big|_a^A - \int_a^A \Phi(x)\, g'(x)\, dx =$$
$$= g(A)\, \Phi(A) - g(a)\, \Phi(a) - \int_a^A \Phi(x)\, g'(x)\, dx. \qquad (3)$$

Если

1) $\lim\limits_{A \to \infty} g(A)\, \Phi(A) = 0$,

2) интеграл $\int\limits_a^\infty \Phi(x)\, g'(x)\, dx$ сходится, то, очевидно, существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, g(x)\, dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A \varphi(x)\, g(x)\, dx = -g(a)\, \Phi(a) - \int_a^\infty \Phi(x)\, g'(x)\, dx. \qquad (4)$$

Отсюда, в частности, вытекает

Признак Дирихле сходимости интеграла (4). Если функция $\Phi(x)$ ограничена ($\Phi(x) \leqslant M$), а $g(x)$ убывает и стремится к нулю при $x \longrightarrow \infty$, то интеграл (4) сходится.

Ясно, что эти условия влекут свойство 1). Далее

$$\left| \int_a^\infty \Phi(x)\, g'(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^\infty |\Phi(x)\, g'(x)|\, dx \leqslant M \int_a^\infty |g'(x)|\, dx =$$
$$= -M \int_a^\infty g'(x)\, dx = -M \lim_{A \to \infty} \int_a^A g'(x)\, dx = -M \lim_{A \to \infty} [g(A) - g(a)] =$$
$$= g(a) \cdot M.$$

Пример 3. Интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \qquad (\alpha > 0),$$

имеющий единственную особенность в $x=\infty$, сходится при $\alpha > 0$. Это следует из признака Дирихле, где надо считать $g(x)=x^{-\alpha}$ и $\varphi(x)=\sin x$, $\Phi(x)=-\cos x$ ($|\Phi(x)|\leqslant 1$). Абсолютная же его сходимость имеет место только при $\alpha > 1$, что доказывается, как в примере 2 § 6.9.

§ 6.11. Несобственный интеграл с особенностями в нескольких точках

Пусть задан интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

т. е. пока формальное выражение (рисунок), где под знаком $\int_a^b$ стоит функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b). Таким образом, a может быть конечным числом или $-\infty$ и b — конечным числом или $+\infty$.

Допустим, что интервал (a, b) можно разбить на конечное число интервалов точками $a=c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$ $\ldots < c_N = b$ так, что каждый интеграл

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (k=0, 1, \ldots, N-1) \tag{2}$$

имеет единственную особенность либо в точке c_k, либо в точке c_{k+1}.

Если все несобственные интегралы (2) сходятся (абсолютно сходятся), то интеграл (1) называется *несобственным сходящимся* (*абсолютно сходящимся*) и символу (1) приписывается число

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Но если хотя бы один из интегралов (2) расходится, то интеграл (1) считается расходящимся.

Если $f(x) \geqslant 0$, то, так же как в случае интегралов с одной особенностью, для интеграла (1) условимся писать

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty,$$

если он сходится и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty,$$

если он расходится.

Пример 1.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx + \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \infty + 1 = \infty.$$

Этот интеграл имеет две особенности в точке $x = -\infty$ и $x = \infty = +\infty$. Соответственно мы его представили формально в виде суммы двух интегралов, каждый из которых имеет одну из указанных особенностей. Очевидно,

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \infty, \qquad \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Мы позволили себе считать, что $\infty \pm 1 = \infty$.

Пример 2. $(\alpha > 0)$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx - \begin{cases} \text{сходится условно при } 0 < \alpha \leqslant 1, \\ \text{сходится абсолютно при } 1 < \alpha < 2, \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{3}$$

В самом деле, этот интеграл имеет две особенности — в $x = 0$ и $x = \infty$, поэтому для его исследования рассмотрим формальную сумму

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx.$$

Под интегралом $\int\limits_0^1$ стоит положительная функция, поэтому он либо расходится, либо, если сходится, то абсолютно. Для его исследования нам помогут неравенства (см. § 3.3, (6) и § 4.19, пример 1)

$$\frac{2}{\pi} x^{1-\alpha} \leqslant \frac{\sin x}{x^\alpha} \leqslant x^{1-\alpha} \quad (0 < x \leqslant 1),$$

откуда

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx < \infty \quad \text{при } \alpha < 2,$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx = \infty \quad \text{при } \alpha \geqslant 2.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx - \begin{cases} \text{абсолютно сходится при } \alpha < 2, \\ \text{расходится при } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

Далее (см. § 6.10, пример 2)

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx - \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 0, \\ \text{абсолютно сходится только при } \alpha > 1. \end{cases} \tag{5}$$

ГЛАВА 7

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 7.1. Площадь в полярных координатах

Площадь S фигуры, ограниченной двумя выходящими из полярного полюса O лучами $\theta=\theta_0$, $\theta=\theta_*$ и кривой Γ, заданной в полярных координатах непрерывной функцией

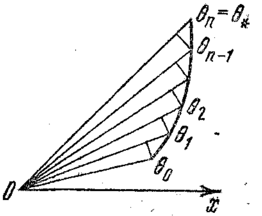

Рис. 80.

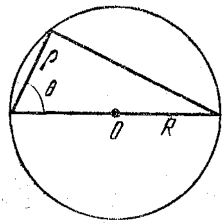

Рис. 81.

$\rho=f(\theta)$, может быть определена следующим образом (рис. 80). Производим разбиение отрезка $[\theta_0, \theta_*]$:

$$\theta_0<\theta_1 \ldots <\theta_n=\theta_*.$$

Элемент площади фигуры, ограниченной кривой Γ и лучами $\theta=\theta_k$, $\theta=\theta_{k+1}$, приближенно выражаем площадью кругового сектора, ограниченного теми же лучами и окружностью радиуса $\rho_k=f(\theta_k)$, равной

$$\frac{1}{2}\rho_k^2\Delta\theta_k, \qquad \Delta\theta_k=\theta_{k+1}-\theta_k.$$

Естественно считать, по определению,

$$S=\lim_{\max \Delta\theta_k \to 0} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k^2\Delta\theta_k=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} f^2(\theta)\,d\theta. \tag{1}$$

Мы получили формулу площади фигуры в полярных координатах. Для непрерывной функции $f(\theta)$ интеграл (1), как мы знаем, существует и, следовательно, предел любой интегральной суммы равен этому интегралу.

Пример. Изображенная на рис. 81 окружность в полярных координатах определяется уравнением $\rho = 2R\cos\theta$. В силу (1) площадь круга

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

§ 7.2. Объем тела вращения

Пусть Г есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y непрерывной положительной функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Вычислим объем V тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$, $x = b$ и поверхностью вращения кривой Г вокруг оси x.

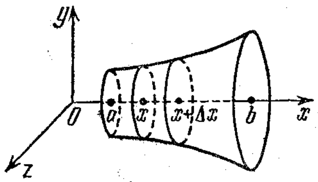

Рис. 82.

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — и считаем, что элемент ΔV объема тела, ограниченного плоскостями $x = x_k$, $x = x_{k+1}$, приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и радиуса $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi f(x_k)^2 \Delta x_k.$$

Величина $V_n = \pi \sum\limits_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\,\Delta x_k$ приближенно выражает V и

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\,\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{1}$$

Мы получили формулу объема тела вращения (рис. 82).

Пример. Эллипсоид вращения (вокруг оси x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} \leqslant 1$$

есть тело, ограниченное поверхностью вращения кривой

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (-a \leqslant x \leqslant a)$$

вокруг оси x, поэтому на основании формулы (1) его объем равен

$$V=\pi b^2\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

§ 7.3. Гладкая кривая в пространстве. Длина дуги

В § 4.21 было введено понятие плоской непрерывной кривой, заданной параметрически, в частности гладкой кривой. Мы хотим пополнить эти сведения. Но заодно будем рассматривать более общую кривую в пространстве. Три уравнения (рис. 83)

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\\ z&=\chi(t)\end{aligned}\right\}\quad (a\leqslant t\leqslant b), \tag{1}$$

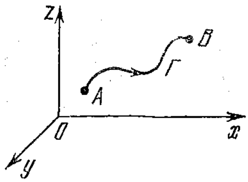

Рис. 83

где функции φ, ψ, χ непрерывны на $[a, b]$, определяют *непрерывную кривую*, которую мы обозначим через Γ. Если к тому же функции φ, ψ, χ не только непрерывны, но имеют на $[a, b]$ непрерывные производные, одновременно не обращающиеся в нуль, то Γ называется *гладкой кривой на* $[a, b]$.

Тот факт, что производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ для любого значения $t\in[a, b]$ одновременно не обращаются в нуль, можно выразить так: имеет место неравенство

$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2>0 \tag{2}$$

для всех $t\in[a, b]$.

Если мы зададим определенное значение $t=t_0$, то в силу (2) одно из слагаемых $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\chi'(t_0)$ — пусть первое — не равно нулю ($\varphi'(t_0)\neq 0$). Вследствие непрерывности φ' существует интервал $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$, на котором $\varphi'(t)$ имеет тот же знак, что и $\varphi'(t_0)$. Но тогда на этом интервале функция $x=\varphi(t)$ строго монотонна и существует обратная к ней непрерывно дифференцируемая функция $t=\varphi^{-1}(x)$, $x\in(c, d)$, где (c, d) — некоторая окрестность точки $x_0=\varphi(t_0)$. В результате мы получим, что некоторый малый кусок γ кривой Γ, содержащий в себе точку $A_0=(\varphi(t_0),\ \psi(t_0),\ \chi(t_0))$, описывается двумя непрерывно дифференцируемыми функциями от x:

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]=\psi_1(x),$$
$$z=\chi[\varphi^{-1}(x)]=\chi_1(x)$$

$(c<x<d,\ c<x_0<d,\ x_0=\varphi(t_0))$. Если, на самом деле, $\psi'(t_0)\neq 0$ или $\chi'(t_0)\neq 0$, то, рассуждая подобным образом, получим, что некоторый кусок $\gamma\subset\Gamma$ записывается уравнениями

$$x=\varphi_1(y),\ z=\chi_1(y)$$
$$(\lambda<y<\mu,\ \lambda<y_0<\mu,\ y_0=\psi(t_0))$$

или соответственно

$$x=\varphi_1(z),\ y=\psi_1(z)$$
$$(p<z<q,\ p<z_0<q,\ z_0=\chi(t_0)).$$

Уравнения (1) гладкой кривой Γ не только задают Γ (как геометрическое место точек $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t\in[a, b]$), но и определяют *ориентацию* Γ, т. е. направление, вдоль которого возрастает параметр t. На рис. 83 изображена гладкая кривая Γ, соответствующая изменению параметра t на отрезке $[a, b]$ $(a<b)$: $A=(\varphi(a), \psi(a), \chi(a))$ — начальная точка Γ, $B=(\varphi(b), \psi(b), \chi(b))$ — конечная точка Γ, стрелка указывает ориентацию Γ.

Когда параметр t непрерывно возрастает от a до b, точка $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ непрерывно двигается по Γ от начальной точки $A=(\varphi(a), \psi(a), \chi(a))$ до конечной точки $B=(\varphi(b), \psi(b), \chi(b))$. Движущаяся точка может возвратиться в прежнее положение, т. е. может случиться, что $t_1, t_2\in[a, b]$, $t_1<t_2$ и $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $\psi(t_1)=\psi(t_2)$, $\chi(t_1)=\chi(t_2)$, и тогда кривая Γ называется *самопересекающейся*. Кривая Γ называется *замкнутой*, если точки A и B совпадают.

Введем функцию $t=\lambda(\tau)$, $c\leqslant\tau\leqslant d$, имеющую непрерывную не равную нулю производную на $[c, d]$ и отображающую $[c, d]$ на $[a, b]$. Так как $\lambda'(\tau)$ не меняет знак на $[c, d]$, то может быть только два случая:

1) $\lambda'(\tau)>0$, и тогда $\lambda(c)=a$, $\lambda(d)=b$,
2) $\lambda'(\tau)<0$, и тогда $\lambda(c)=b$, $\lambda(d)=a$.

Наша гладкая кривая Γ может быть задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi[\lambda(\tau)]=\varphi_1(\tau),\\ y&=\psi[\lambda(\tau)]=\psi_1(\tau),\\ z&=\chi[\lambda(\tau)]=\chi_1(\tau)\end{aligned}\right\}\qquad(1')$$

при помощи параметра τ $(c \leqslant \tau \leqslant d)$. Одна и та же гладкая кривая Γ может быть задана параметрически посредством разных параметров $t, \tau, \ldots$.

Заметим, что условия (2) на языке τ сохраняются, потому что согласно формуле производной функции от функции

$$(\varphi_1'(\tau))^2+(\psi_1'(\tau))^2+(\chi_1'(\tau))^2= \\ =[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2](\lambda'(\tau))^2>0. \quad (3)$$

Однако при введении нового параметра τ может измениться ориентация Γ. Если $\lambda'(\tau)>0$ на $[c, d]$, то функция $t=\lambda(\tau)$ строго возрастает и $\lambda(c)=a$, $\lambda(d)=b$. В этом случае с возрастанием τ возрастает t от $\lambda(c)=a$ до $\lambda(d)=b$, т. е. ориентация Γ не меняется—уравнения (1) и (1') определяют одну и ту же гладкую кривую с той же ориентацией, только при помощи разных параметров. Если же $\lambda'(\tau)<0$ на $[c, d]$, то $\lambda(c)=b$ и $\lambda(d)=a$ и при возрастании τ параметр t убывает. В этом случае уравнения (1') определяют ту же кривую Γ, что и уравнения (1), но с противоположной ориентацией.

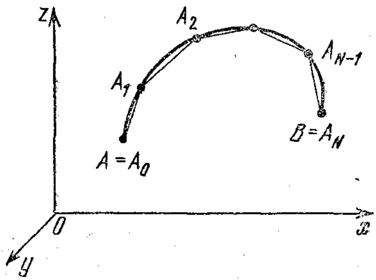

Рис. 84.

В тех вопросах, где нужно учитывать ориентацию кривой, под буквой Γ понимают не только самую кривую (геометрическое место точек), но и ее ориентацию. Надо помнить, что уравнения (1) определяют как саму кривую, так и ее ориентацию (движение точки Γ в направлении возрастания t). Если заменить параметр t на другой параметр τ $(t=\lambda(\tau))$, то получим ту же ориентированную кривую Γ, если $\lambda'(\tau)>0$. Если же $\lambda'(\tau)<0$, то получим ту же кривую, но ориентированную противоположно—ее уже (как ориентированную кривую) надо обозначить другим символом, удобно через Γ_-.

Если задана ориентированная кривая Γ посредством уравнений (1), то Γ_- можно, например, задать уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(-\tau),\\ y&=\psi(-\tau),\\ z&=\chi(-\tau),\end{aligned}\right\} \quad (-b\leqslant\tau\leqslant -a).$$

Введем понятие длины дуги непрерывной кривой Г. Пусть задана непрерывная кривая Г посредством уравнений (1). Разобьем отрезок $[a, b]$ значениями $a=t_0< < t_1 < t_2 < \ldots < t_N=b$. Каждому t_k соответствует точка $A_k \in \Gamma$ $(A_0=A,\ A_N=B)$. Соединим точки A_k последовательно отрезками A_kA_{k+1} (рис. 84). В результате получим ломаную $\Gamma_N=A_0A_1\ldots A_N$, вписанную в Г. Длина Γ_N равна сумме длин $|A_kA_{k+1}|$:

$$|\Gamma_N|=\sum_{k=0}^{N-1}|A_kA_{k+1}|. \tag{4}$$

Предел длины Γ_N, *когда максимум* $t_{j+1}-t_j$ *стремится к нулю*

$$\lim_{\max(t_{j+1}-t_j)\to 0}|\Gamma_N|=|\Gamma|, \tag{5}$$

если он существует (есть конечное число), *называется длиной дуги* Г. Мы его обозначили через $|\Gamma|$.

Можно доказать, что для любой непрерывной кривой (1) предел (5) конечный или бесконечный $(+\infty)$ существует. В случае, если этот предел конечный, кривая называется *спрямляемой*.

Теорема 1. *Гладкая на* $[a, b]$ *кривая* Г, *определяемая равенствами* (1), *спрямляема. Ее длина дуги равна*

$$|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt. \tag{6}$$

В этой формулировке важно, что уравнения Г заданы на отрезке $[a, b]$. Если бы они были заданы на интервале (a, b), где φ, ψ, χ непрерывно дифференцируемы на (a, b) и их производные одновременно не равны нулю, мы тоже сказали бы, что уравнения (1) определяют гладкую на (a, b) кривую, но она могла бы и не быть спрямляемой. Однако любой ее кусок, соответствующий некоторому отрезку $[c, d]\subset(a, b)$ спрямляем.

Доказательство теоремы 1. Применяя теорему Лагранжа к функциям φ, ψ, χ, будем иметь ($\Delta t=t_{k+1}-t_k$,

$\lambda_R = \max\limits_k \Delta t_k$)

$$\Delta\varphi = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(t_k')\,\Delta t_k,$$
$$\Delta\psi = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(t_k'')\,\Delta t_k,$$
$$\Delta\chi = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k) = \chi'(t_k''')\,\Delta t_k,$$

и следовательно (пояснения ниже),

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2 + (\Delta\chi)^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\varphi'(t_k')]^2 + [\psi'(t_k'')]^2 + [\chi'(t_k''')]^2}\,\Delta t_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\varphi'(t_k')]^2 + [\psi'(t_k')]^2 + [\chi'(t_k')]^2}\,\Delta t_k +$$
$$+ r_N \underset{\lambda_R \to 0}{\longrightarrow} \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt \qquad (7)$$

(здесь t_k', t_k'', $t_k''' \in (t_k, t_{k+1})$ — вообще различные точки), т. е. справедлива формула (6).

В самом деле, в силу непрерывности подынтегральной функции в (6)

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\varphi'(t_k')]^2 + [\psi'(t_k')]^2 + [\chi'(t_k')]^2}\,\Delta t_k =$$
$$= \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt.$$

Кроме того, заметим, что выполняется неравенство

$$\left|\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} - \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2},$$

выражающее, что разность длин двух сторон треугольника не превышает длины третьей стороны.

Далее, так как функции ψ' и χ' непрерывны на $[a, b]$, то они и равномерно непрерывны на $[a, b]$. Поэтому, если $\lambda_R < \delta$, то

$$|\psi'(t_k'') - \psi'(t_k')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad |\chi'(t_k''') - \chi'(t_k')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

и, следовательно,

$$|r_N| = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{[\varphi'(t_k')]^2 + [\psi'(t_k'')]^2 + [\chi'(t_k''')]^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{[\varphi'(t_k')]^2 + [\psi'(t_k')]^2 + [\chi'(t_k')]^2} \right] \Delta t_k \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\psi'(t_k'') - \psi'(t_k')]^2 + [\chi'(t_k''') - \chi'(t_k')]^2}\, \Delta t_k \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2(b-a)} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Это показывает, что $r_N \to 0$ при $\lambda_R \to 0$.

Применим формулу (6) к вычислению длины дуги Γ, когда она задана уравнениями (1′), при помощи параметра τ. Имеем (см. (6))

$$|\Gamma_1| = \int_c^d \sqrt{(\varphi_1'(\tau))^2 + (\psi_1'(\tau))^2 + (\chi_1'(\tau))^2}\, d\tau =$$
$$= \int_c^d \sqrt{(\varphi'(\lambda(\tau)))^2 + (\psi'(\lambda(\tau)))^2 + (\chi'(\lambda(\tau)))^2}\, \lambda'(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, dt \qquad (\lambda'(\tau) > 0).$$

В последнем равенстве этой цепи мы произвели замену переменной $t = \lambda(\tau)$ в интеграле.

Следовательно, $|\Gamma_1| = |\Gamma|$.

Мы видим, что формула (6) длины дуги выражается инвариантно через параметр дуги.

Введем функцию

$$s = \mu(t) = \int_a^t \sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 + (\chi'(u))^2}\, du \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{8}$$

от верхнего предела интеграла. Она выражает длину дуги $\breve{AC}$, где C — переменная точка дуги $\breve{AB} = \Gamma$, соответствующая значению параметра t. Под интегралом в (8) стоит непрерывная функция от u, поэтому производная длины дуги s по t равна

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}. \tag{9}$$

Так как $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ непрерывны, то ds/dt в свою очередь есть непрерывная функция от t, при этом положительная (см. § 7.3, (2)). Но тогда $s=\mu(t)$ строго возрастает на $[a, b]$ и имеет обратную непрерывно дифференцируемую функцию

$$t=\mu^{-1}(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant |\Gamma|), \tag{10}$$

обладающую свойством

$$\frac{dt}{ds}=[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2]^{-1/2}>0.$$

Но тогда переменная s может служить параметром нашей гладкой кривой Γ — уравнения Γ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi[\mu^{-1}(s)]=\varphi_*(s),\\ y&=\psi[\mu^{-1}(s)]=\psi_*(s),\\ z&=\chi[\mu^{-1}(s)]=\chi_*(s), \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant s \leqslant |\Gamma|),$$

где функции φ_*, ψ_*, χ_* непрерывно дифференцируемы на $[0, |\Gamma|]$.

Чтобы получить соответствующие результаты для плоской кривой $\Gamma=\breve{AB}$, надо в предыдущих рассуждениях положить $z=\chi(t)\equiv 0$. Тогда гладкая плоская кривая Γ определяется двумя уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t), \end{aligned}\right\} \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где φ и ψ — непрерывно дифференцируемые функции, подчиняющиеся условию

$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2>0 \quad (t \in [a, b]).$$

Длина Γ равна

$$|\Gamma|=\int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{6'}$$

Длина дуги $\breve{AC} \subset \Gamma$, где C есть точка Γ, соответствующая значению параметра $t \in [a, b]$

$$s=\int_a^t \sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}\,du, \tag{8'}$$

дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (9')$$

Если Γ задана при помощи непрерывно дифференцируемой функции

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

то можно считать, что Γ определяется параметром x:

$$\left.\begin{aligned} x &= x, \\ y &= f(x), \end{aligned}\right\} \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда в силу $(6')$

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Дифференциал же дуги Γ выражается формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой Γ: $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Имеем

$$|\Gamma| = \int_0^2 \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2}\,dx = \int_0^2 \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x\,\Big|_0^2 = \operatorname{sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}.$$

Пример 2. Найти длину окружности Γ радиуса R. Окружность в параметрическом виде можно задать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t, \\ y &= R\sin t, \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Тогда

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой Γ: $y = \int_0^x \sqrt{2t + t^2}\,dt$, когда x изменяется в пределах от 0 до 2.

Отметим, что явную зависимость y от x можно найти, если мы вычислим интеграл, используя подстановку Эйлера или рассматривая этот интеграл как дробно-линейную иррациональность. Но в данном случае нам не нужна эта явная зависимость. Имеем $y'=\sqrt{2x+x^2}$. Поэтому

$$|\Gamma|=\int_0^2\sqrt{1+2x+x^2}\,dx=\int_0^2(x+1)\,dx=\frac{(x+1)^2}{2}\Big|_0^2=4.$$

§ 7.4. Кривизна и радиус кривизны кривой. Эволюта и эвольвента

Кривизной окружности радиуса R называется число $1/R$. Это число можно также получить как отношение угла между касательными в концах какой-нибудь дуги окружности к длине этой дуги. Угол между касательными к окружности в точках A и B равен центральному углу α между радиусами OA и OB. Длина $|\breve{AB}|$ дуги $\breve{AB}$ равна $R\alpha$. Поэтому (рис. 85)

$$\frac{\alpha}{|\breve{AB}|}=\frac{\alpha}{R\alpha}=\frac{1}{R}.$$

Последнее определение кривизны окружности дает идею определения кривизны произвольной гладкой кривой Г.

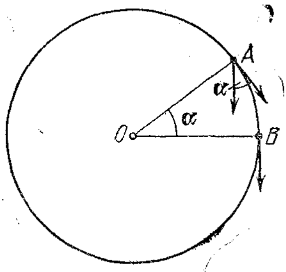

Рис. 85.

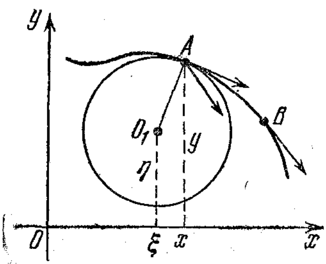

Рис. 86.

Рассмотрим произвольную гладкую кривую Г. Как мы показали в § 7.3, она спрямляема и имеет смысл говорить о длине любой ее дуги $\breve{AB}$. Угол α $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ между касательными к Г в точках A и B называется *углом смежности дуги* $\breve{AB}$. Отношение угла смежности дуги $\breve{AB}$ к ее длине называется *средней кривизной дуги* $\breve{AB}$ (рис. 86). Наконец, *кривизной кривой* Г в ее точке A называется предел (конечный или бесконечный) отношения угла смежности α дуги $\breve{AB}$ кривой к ее длине $|\breve{AB}| = |\Delta s|$, когда последняя стремится к нулю:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\alpha}{|\Delta s|}. \tag{1}$$

Таким образом, $0 \leqslant K \leqslant \infty$. По определению, величина $R = 1/K$ (где считается, что $0 = 1/\infty$, $\infty = 1/0$) называется *радиусом кривизны* Γ в точке A.

Точка O_1, лежащая на нормали к Γ в точке A на расстоянии $R = 1/K$ от A в сторону вогнутости Γ, называется *центром кривизны* Γ в точке A (рис. 87 и 88). Очевидно, что центр окружности совпадает с центром ее кривизны.

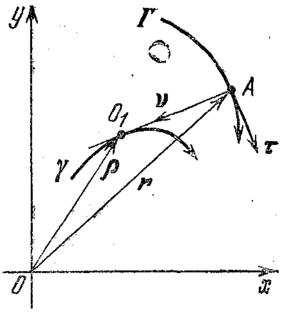

Рис. 87.

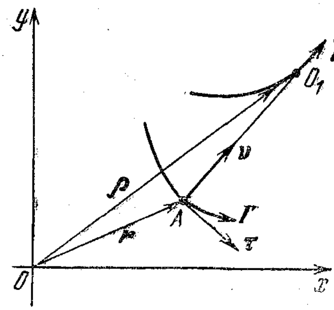

Рис. 88.

Кривая γ, являющаяся геометрическим местом центров O_1 кривизны плоской кривой Γ, называется *эволютой* Γ. Сама кривая Γ называется *эвольвентой* γ.

Пусть кривая Γ задана функцией $y = f(x)$ $(c \leqslant x \leqslant d)$, имеющей непрерывную вторую производную. Найдем ее кривизну в точке $A = (x, f(x))$. Пусть φ_1 и φ_2 — углы, которые составляют касательные к Γ в точках A и $B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ с положительным направлением оси x (см. рис. 86)

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} \varphi_1 = f'(x), \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = f'(x + \Delta x), \\ \alpha = |\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'(x + \Delta x)|. \end{gathered} \tag{2}$$

Далее,

$$\Delta s = |AB| = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du. \tag{3}$$

Поэтому из (1), применяя правило Лопиталя (по Δx), получаем

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\operatorname{arctg} f'(x)-\operatorname{arctg} f'(x+\Delta x)}{\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+(f'(u))^2}\,du}\right|=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\dfrac{f''(x+\Delta x)}{1+(f'(x+\Delta x))^2}}{\sqrt{1+(f'(x+\Delta x))^2}}\right|=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}.$$

Мы получили формулу для кривизны

$$K=\left|\frac{f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}\right|. \tag{4}$$

Если гладкая кривая Γ задана параметрически

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\end{aligned}\right\}\quad (a\leqslant t\leqslant b),$$

где φ и ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, то, пользуясь правилом дифференцирования параметрически заданных функций, получим (см. § 4.11)

$$f'(x)=\frac{y'_t}{x'_t},\qquad f''(x)=\frac{x'_t y''_t-y'_t x''_t}{(x'_t)^3},$$

$$R=\left|\frac{(x'^2_t+y'^2_t)^{3/2}}{y'_t x''_t-x'_t y''_t}\right|,\quad K=\frac{1}{R}. \tag{5}$$

Найдем параметрическое уравнение эволюты γ кривой Γ, заданной уравнением (рис. 87, 88) $y=f(x)$. Имеем (см. (4))

$$\frac{1}{R}=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}=\frac{f''(x)\operatorname{sign} f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Центр кривизны O_1 кривой Γ в ее точке $A=(x,\ f(x))$ пусть имеет координаты $(\xi,\ \eta)$. Он определяется вектором

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{r}+R\boldsymbol{\nu}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $A\in\Gamma$, а $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали, направленный в сторону вогнутости Γ. Кривая Γ имеет векторное уравнение

$$\boldsymbol{r}=(x,\ y).$$

Отсюда

$$\dot{\boldsymbol{r}}_x=(1,\ y'_x),\quad \ddot{\boldsymbol{r}}_x=(0,\ y''_x).$$

Далее (см. § 4.23, (3')),

$$\mathbf{v} = \pm\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+y_x'^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+y_x'^2}}\right).$$

Знак надо выбрать так, чтобы вектор $\mathbf{v}$ был направлен в сторону вогнутости Γ, т. е. чтобы скалярное произведение $(\mathbf{v},\ \ddot{\mathbf{r}}_x)$ имело положительный знак:

$$(\mathbf{v},\ \ddot{\mathbf{r}}_x) = \pm\frac{y''_x}{\sqrt{1+y_x'^2}} = y''_x\,(\operatorname{sign} y''_x)\,(1+y_x'^2)^{-1/2}.$$

Итак

$$\mathbf{v} = \operatorname{sign} y''_x\cdot\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+y_x'^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+y_x'^2}}\right). \tag{8}$$

Переходя в равенстве (7) к проекциям, учитывая (6) и (8), получим

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + \frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{y''_x \operatorname{sign} y''_x}\cdot\frac{-y'_x \operatorname{sign} y''_x}{(1+y_x'^2)^{1/2}} = x - \frac{y'_x(1+y_x'^2)}{y''_x},\\ \eta &= y + \frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{y''_x \operatorname{sign} y''_x}\cdot\frac{\operatorname{sign} y''_x}{(1+y_x'^2)^{1/2}} = y + \frac{1+y_x'^2}{y''_x}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Докажем, что *нормаль к кривой (эвольвенте) в точке* $A = (x,\ f(x))$ *является касательной к эволюте* γ в точке $O_1 = (\xi,\ \eta)$. Достаточно для этого доказать, что касательные к кривой Γ и к эволюте γ в соответствующих точках ортогональны (перпендикулярны):

$$x'_x\xi'_x + y'_x\eta'_x = 1\cdot\left[1 - y''_x\frac{1+y_x'^2}{y''_x} - y'_x\left(\frac{1+y_x'^2}{y''_x}\right)'\right] + \\ + y'_x\left[y'_x + \left(\frac{1+y_x'^2}{y''_x}\right)'\right] = 0.$$

Другое важное свойство эволюты заключается в следующем. *Приращение радиуса кривизны эвольвенты равно с точностью до знака приращению длины соответствующей дуги эволюты:*

$$R_2 - R_1 = \pm|\sigma_2 - \sigma_1|.$$

На доказательстве этого свойства мы не останавливаемся.

Представим себе нить, навернутую на эволюту. Пусть она сматывается с последней, будучи все время натянутой. Отделяясь от эволюты, она, очевидно, все время будет касаться эволюты. Свободный же ее конец будет описывать эвольвенту (рис. 89). Так как длина нити может быть произвольной, то эволюта порождает бесконечно много эвольвент. Длина, на которую сматывается нить с эволюты, равна, очевидно, приращению радиуса кривизны эвольвенты. Если кривая Г задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, то эволюта определяется уравнениями

$$\xi = x - y'_t \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}, \qquad \eta = y + x'_t \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_t - y'_t x''_t} \tag{10}$$

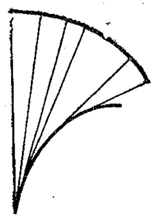

Рис. 89.

(см. § 4.11).

Пример 1. Эволюта циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ есть кривая $\xi=t+\sin t$, $\eta=-1+\cos t$. Полагая $t=\tau+\pi$, получим уравнения

$$\xi-\pi=\tau-\sin\tau, \quad \eta+2=1-\cos\tau,$$

определяющие исходную кривую, но только сдвинутую (эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная исходной, рис. 90).

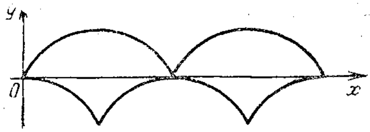

Рис. 90.

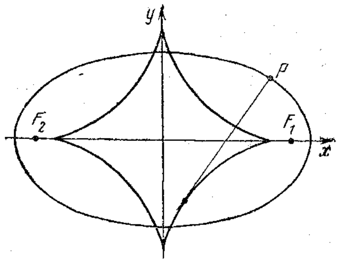

Рис. 91.

Пример 2. Эволюта эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a\geqslant b>0)$ есть астроида (рис. 91)

$$\xi=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, \qquad \eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

§ 7.5. Площадь поверхности вращения

Пусть Г есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат x, y положительной функцией $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную.

Вычислим площадь S поверхности вращения Γ вокруг оси x. Для этого произведем разбиение $a=x_0<x_1<\ldots$ $\ldots<x_n=b$, впишем в кривую Γ ломаную Γ_n с вершинами $(x_k, f(x_k))$, вычислим площадь поверхности вращения последней вокруг оси x (сумма площадей боковых поверхностей усеченных конусов):

$$S_n=\pi\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2},$$
$$\Delta y_k=f(x_{k+1})-f(x_k).$$

Число S, равное пределу S_n при $\lambda_R\to 0$, если он существует, называется *площадью поверхности вращения*. Применяя теорему Лагранжа к разности Δy_k, получим

$$S_n=\pi\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k=$$
$$=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k+R_n\to$$
$$\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

при $\lambda_R=\max\limits_k \Delta x_k\to 0$; согласно теореме Лагранжа точка $\xi_k\in(x_k, x_{k+1})$. В самом деле, так как f и f' непрерывны на $[a, b]$, то $f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$ интегрируема, поэтому

$$\lim_{\lambda_R\to 0}2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Далее

$$|R_n|=\left|\pi\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})-2f(\xi_k)]\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\,\Delta x_k\right|\leqslant$$
$$\leqslant\pi\sqrt{1+M_1^2}\sum_{k=0}^{n-1}[|f(x_k)-f(\xi_k)|+|f(x_{k+1})-f(\xi_k)|]\,\Delta x_k\leqslant$$
$$\leqslant 2\pi\sqrt{1+M_1^2}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\,\Delta x_k\xrightarrow[\lambda_R\to 0]{}0,$$

так как f интегрируема. Здесь $M_1=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$. Таким образом, площадь поверхности тела вращения равна

$$S=\lim_{\lambda_R\to 0}S_n=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{1}$$

Пример. Найти площадь S поверхности вращения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$$

вокруг оси x (площадь поверхности эллипсоида вращения).

Решение. Уравнение верхней половины эллипса

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (|x|\leqslant a), \quad y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx=(u=x\sqrt{a^2-b^2})=$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{a\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{a^4-u^2}\,du=$$

$$=\frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\left\{\frac{u}{2}\sqrt{a^4-u^2}+\frac{a^4}{2}\arcsin\frac{u}{a^2}\right\}\Bigg|_0^{a\sqrt{a^2-b^2}}=$$

$$=2\pi b^2+\frac{2\pi ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

При $b\to a$ в пределе получим, что $S=4\pi a^2$ — площадь поверхности шара радиуса a.

§ 7.6. Интерполяционная формула Лагранжа

Поставим задачу. Требуется найти алгебраический многочлен $L_n(x)$ степени не выше, чем n, который совпадал бы с функцией $f(x)$ в заданных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, должны выполняться условия

$$f(x_k)=L_n(x_k) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Многочлен $L_n(x)$ единственный. Если предположить, что существует еще один многочлен $\overline{L}_n(x)$ с теми же свойствами, то разность $L_n(x)-\overline{L}_n(x)$ обратится в нуль в $n+1$ точке $x_0, \ldots, x_n$ и будет алгебраическим многочленом степени не выше, чем n, значит, разность тождественно равна нулю и $L_n(x)\equiv\overline{L}_n(x)$.

Из единственности следует, что если исходная функция $f(x)$ сама является алгебраическим многочленом степени n, то она совпадает с $L_n(x)$ для всех x ($f(x) \equiv L_n(x)$).

Сначала найдем алгебраический многочлен степени n $Q_{n,k}(x)$, который в точках $x_i \neq x_k$ равен нулю, а в точке x_k равен единице. Очевидно, что

$$Q_{n,k}(x) = A(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n),$$

где постоянная A находится из условия

$$1 = Q_{n,k}(x_k) = A\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i), \text{ т. е. } A = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)^{-1}.$$

Таким образом, искомый многочлен имеет вид

$$Q_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}.$$

Если ввести в рассмотрение символ Кронекера

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k\neq i,\\ 1, & k=i,\end{cases}$$

то

$$Q_{n,k}(x_i) = \delta_{ki}.$$

Поставленную задачу решает многочлен

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}(x) f(x_k), \tag{1}$$

ибо

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}(x_i) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n}\delta_{ki} f(x_k) = f(x_i)$$
$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Многочлен (1) называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Так же как при получении формулы остаточного члена в формуле Тейлора можно показать, что если $f(x)$ имеет производную $(n+1)$-го порядка, то

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \tag{2}$$

где

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

и ξ — некоторая точка, принадлежащая к наименьшему отрезку, содержащему точки $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$. В самом деле, положим

$$f(x)-L_n(x)=K\omega_{n+1}(x), \tag{3}$$

где K — величина, зависящая от x. Обозначим

$$\varphi(z)=f(z)-L_n(z)-K\omega_{n+1}(z),$$

где K имеет то же значение, что и в (3), это величина, не зависящая от z. Ясно, что $\varphi(x)=0$, $\varphi(x_i)=0$ ($i=0, 1, \ldots, n$). Пусть, например, $x_0<x<x_1<\ldots<x_n$, тогда, применяя теорему Ролля к функции φ на отрезках $[x_0, x]$, $[x, x_1]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$, получим, что производная $\varphi'(x)$ обращается в нуль внутри каждого из них. Затем, применяя теорему Ролля последовательно к функциям $\varphi', \ldots$ $\ldots, \varphi^{(n)}$, получим, что существует точка ξ, принадлежащая наименьшему отрезку, содержащему в себе точки x, $x_0, x_1, \ldots, x_n$, в которой $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$, но

$$\varphi^{(n+1)}(z)=f^{(n+1)}(z)-K(n+1)!.$$

Полагая $z=\xi$, получим $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Поэтому

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

и равенство (2) доказано.

Интерполяционный многочлен Лагранжа находит применение в приближенном вычислении производных функции $f(x)$, когда ее значения известны только в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. А именно, полагают

$$f^{(k)}(x)\approx L_n^{(k)}(x).$$

Например, если $f(x)$ известна в точках x_0, x_1, то, построив по этим точкам многочлен Лагранжа $L_1(x)$, найдем, что

$$f'(x)\approx\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

В последующих параграфах мы укажем применение многочлена Лагранжа при приближенном вычислении определенного интеграла.

§ 7.7. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций

Пусть надо вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f. Если известна ее первообразная, то для этого естественно применить формулу Ньютона—Лейбница. Но далеко не всегда первообразная известна, и возникает задача о приближенном вычислении интеграла.

Простейший способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из определения последнего. Делим отрезок $[a, b]$ на равные части точками

$$x_k = a + k\frac{b-a}{N} \quad (k=0, 1, \ldots, N) \tag{1}$$

и полагаем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

где знак $\approx$ выражает приближенное равенство.

Выражение (2) называется *квадратурной формулой прямоугольников.* В случае рис. 92 искомая площадь фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x и прямыми $x=a$, $x=b$, приближенно равна сумме площадей изображенных там прямоугольников.

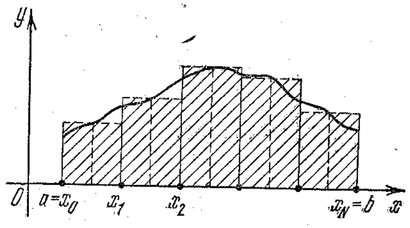

Рис. 92.

Мы знаем, что для непрерывной на $[a, b]$ функции предел при $N \to \infty$ правой части приближенного равенства (2) точно равен левой, что дает основание считать, что при большом N ошибка квадратурной формулы (2), т. е. абсолютная величина разности правой и левой ее частей, мала. Однако возникает вопрос об оценке ошибки. Ниже мы узнаем, как эту оценку получить, если потребовать, чтобы функция f, кроме непрерывности, удовлетворяла некоторым условиям гладкости (т. е. имела бы некоторое число производных).

Очень важно заметить, что если функция $f(x)=Ax+B$ есть линейная функция, то для нее *формула* (2) *точна* —

правая часть (2) в точности равна левой. Так как линейная функция есть многочлен первой степени, то мы можем сказать, что *квадратурная формула прямоугольников точна для всех многочленов не выше первой степени.*

Дадим еще второй естественный способ приближенного вычисления определенного интеграла, приводящий к *квадратурной формуле трапеций*. Он заключается в том, что отрезок $[a, b]$ делится на равные части точками системы (1) и полагается приближенно, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\right)=$$
$$=\frac{b-a}{2N}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{N-1})+f(x_N)\right].$$

В формуле трапеций площадь рассмотренной выше криволинейной фигуры приближенно исчерпывается площадями трапеций (рис. 93). Важно отметить, что *формула трапеций точна для линейных функций $Ax+B$* (A, B — постоянные), т. е. для многочленов не выше первой степени; если подставить такую функцию в (3) вместо $f(x)$, то получится точное равенство.

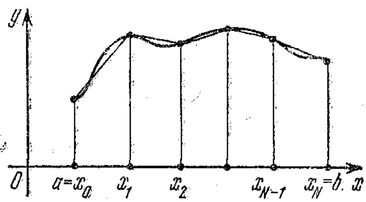

Рис. 93.

В этом смысле формула трапеций не имеет преимущества перед формулой прямоугольников, обе они точны для линейных функций.

Разность между левой и правой частями квадратурной формулы обозначим через $R_N(f)$ и будем называть *остаточным членом квадратурной формулы.*

Если функция f имеет кусочно-непрерывную производную f', удовлетворяющую неравенству $|f'(x)| \leqslant M_1$, то остаточный член формулы прямоугольников (2) подчиняется неравенству

$$|R_N(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{4N}, \qquad (2')$$

а остаточный член формулы трапеций (3) подчиняется неравенству

$$|R_N(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{4N}. \qquad (3')$$

Нужно сказать, что здесь константы вычислены точно — их нельзя уменьшить. Вывод оценки (2) приведен ниже. Остальные оценки мы даем без доказательства.

Мы видим, что в обоих случаях для класса функций, имеющих ограниченную производную $|f'(x)| \leqslant M_1$, остаточные члены имеют порядок $O(N^{-1})$ (см. § 3.10, (14)).

Для класса же функций, имеющих ограниченную вторую производную $|f''(x)| \leqslant M_2$ на $[a, b]$, имеет место оценка

$$|R_N(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12N^2},$$

верная для формул прямоугольников и трапеций. Теперь уже порядок приближения посредством обеих рассматриваемых квадратурных формул есть $O(N^{-2})$.

Оказывается, что для класса функций, имеющих ограниченную производную порядка $l > 2$, порядок приближения посредством формул прямоугольников и трапеций не улучшается — порядок остается равным $O(N^{-2})$.

Объяснение этого явления тесно связано с тем фактом, что обе квадратурные формулы — прямоугольников и трапеций — являются точными для многочленов первой степени, но они неточны для многочленов степени выше чем 1.

Если функция f имеет третью ограниченную производную, то можно придумать квадратурную формулу, дающую погрешность приближения порядка $O(N^{-3})$. Эта формула должна быть точной для многочленов второй степени. Но если она не точна для многочленов третьей степени, то для функций, имеющих ограниченную производную четвертого порядка, погрешность приближения остается имеющей порядок $O(N^{-3})$.

Явление, которое здесь описывается, будет проиллюстрировано на примере квадратурной формулы Симпсона[1]) в § 7.8.

Приведем доказательство оценки (2′). Введем обозначения: $h = \frac{b-a}{N}$, $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, x_k — точки системы (1). Тогда

$$|R_N(f)| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - h\sum_0^{N-1} f(\xi_k) \right| =$$

$$= \left| \sum_0^{N-1} \int_{\xi_k - \frac{h}{2}}^{\xi_k + \frac{h}{2}} f(x)\,dx - h\sum_0^{N-1} f(\xi_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{N-1} \left| \int_{\xi_k - \frac{h}{2}}^{\xi_k + \frac{h}{2}} f(x)\,dx - hf(\xi_k) \right| = \sum_0^{N-1} \left| \int_{\xi_k - \frac{h}{2}}^{\xi_k + \frac{h}{2}} [f(x) - f(\xi_k)]\,dx \right|,$$

1) Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

так как

$$\int\limits_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(\xi_k)\,dx = hf(\xi_k).$$

Применяя теорему Лагранжа под знаком интеграла и учитывая, что $|f'(x)| \leqslant M_1$, получаем

$$|R_N(f)| \leqslant \sum_0^{N-1} \left| \int\limits_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f'(\theta_k)(x-\xi_k)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^{N-1} \int\limits_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} |f'(\theta_k)|\,|x-\xi_k|\,dx \leqslant M_1 \sum_0^{N-1} \int\limits_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} |x-\xi_k|\,dx,$$

где θ_k — точка, лежащая между x и ξ_k. Производя замену переменной $x-\xi_k=t$, получаем

$$|R_N(f)| \leqslant M_1 \sum_0^{N-1} \int\limits_{-h/2}^{h/2} |t|\,dt = 2M_1 \cdot N \int\limits_0^{h/2} t\,dt =$$

$$= 2M_1 N \frac{t^2}{2}\Big|_0^{h/2} = \frac{M_1 N h^2}{4} = \frac{M_1 (b-a)^2}{4N}.$$

§ 7.8. Формула Симпсона

Пусть требуется приближенно вычислить интеграл от непрерывной функции $f(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Будем искать приближенное значение интеграла в виде суммы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k), \tag{2}$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ — заданные числа.

Формула (2) называется квадратурной формулой с *узлами* x_k и *весовыми коэффициентами* p_k.

При построении конкретных приближенных формул мы выставляем требование, чтобы формула (2) была точной для алгебраических многочленов степени n. Это условие будет выполнено, если в качестве приближенного значения интеграла (1) мы возьмем определенный интеграл от интерполяционного многочлена Лагранжа n-й степени функции f:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}(x) f(x_k)\,dx = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k), \qquad (3)$$

$$p_k = \int_a^b Q_{n,k}(x)\,dx \quad (k=0, 1, \ldots, n), \quad Q_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)},$$

потому что, если $f(x)$ — многочлен степени n, то $f(x) \equiv \equiv L_n(x)$.

Получим формулу (3) для случая $n=2$ и узлов $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$. В этом случае

$$Q_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-b)(2x-a-b)}{(b-a)^2} = \frac{2(x-b)^2}{(b-a)^2} + \frac{x-b}{b-a},$$

$$Q_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-4(x-a)(x-b)}{(b-a)^2} =$$

$$= -4\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} - 4\frac{x-b}{b-a},$$

$$Q_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-a)(2x-a-b)}{(b-a)^2} = \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} - \frac{x-a}{b-a}.$$

Поэтому

$$p_0 = \int_a^b Q_{2,0}(x)\,dx = \left[\frac{2(x-b)^3}{3(b-a)^2} + \frac{(x-b)^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b-a}{6}.$$

Аналогично рассуждая, получим

$$p_1 = \int_a^b Q_{2,1}(x)\,dx = \frac{2(b-a)}{3}, \qquad p_2 = \int_a^b Q_{2,2}(x)\,dx = \frac{b-a}{6}.$$

В силу этого формула (3) при $n=2$ имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \qquad (4)$$

Эта простейшая квадратурная формула Симпсона, соответствующая отрезку $[a, b]$.

С геометрической точки зрения формула (4) означает, что мы заменили площадь криволинейной трапеции, определяемой функцией $f(x)$ на $[a, b]$, на площадь, находящуюся под графиком параболы (рис. 94):

$$y = L_2(x) = f(a)\,Q_{2,0}(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)Q_{2,1}(x) + f(b)\,Q_{2,2}(x).$$

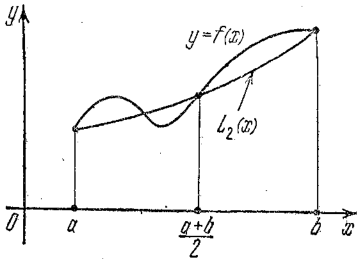

Рис. 94.

Еще раз отметим, что по построению формула (4) точна для многочленов второй степени. Однако оказывается, что она точна и для многочленов третьей степени. В самом деле, $\int\limits_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$, а правая часть формулы (4) для функции $f(x) = x^3$ также равна этому числу:

$$\frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right] = \frac{b-a}{6}\left[(a+b)(a^2-ab+b^2) + \frac{(a+b)^3}{2}\right] = \frac{b^2-a^2}{6}\left[\frac{3(a^2+b^2)}{2}\right] = \frac{b^4-a^4}{4}.$$

Таким образом, формула (4) *точна для многочленов не выше третьей степени.*

Если разделить отрезок $[a, b]$ на $2N$ равных частей точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N}k \quad (k = 0, 1, \ldots, 2N)$$

и к отрезкам $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ... применить формулу (4), то в результате получим (*усложненную*) *квадратурную формулу Симпсона*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N}\{f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \ldots \\ \ldots + 2f(x_{2N-2}) + 4f(x_{2N-1}) + f(x_{2N})\}. \qquad (5)$$

С точки зрения практических вычислений сложность вычислений по формуле Симпсона и прямоугольников одинакова. Но если функция f достаточно гладкая, то погрешность приближения по формуле Симпсона при больших N значительно меньше соответствующей погрешности при приближении методом прямоугольников.

Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ вторую непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$|f''(x)| \leqslant M_2,$$

а третью не имеет или мы не можем почему-либо ее оценить, то при вычислении интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ рекомендуется применить формулу трапеций, а еще лучше — формулу Симпсона.

Можно доказать, что погрешность приближения по формуле трапеций (§ 7.7, (3)) будет:

$$\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{N^2}M_2 \tag{6}$$

и по формуле Симпсона (5):

$$\frac{1}{81}\frac{(b-a)^3}{N^2}M_2.$$

Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ четвертую непрерывную производную, удовлетворяющую неравенству

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant M_4,$$

то в этом случае рекомендуется применить формулу Симпсона. При этом погрешность приближения будет:

$$\frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{N^4}M_4. \tag{7}$$

Если бы мы в этом случае применили формулу трапеций, то погрешность приближения по-прежнему имела бы порядок N^{-2}, т. е. была бы хуже чем (7).

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Данный интеграл (от биномиального дифференциала) не вычисляется в элементарных функциях.

Вычислим этот интеграл приближенно, деля отрезок $[0, 1]$ на десять равных частей, используя различные квадратурные формулы.

Обозначим точки деления $[0, 1]$ через $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}1$, ..., $x_9 = 0{,}9$, $x_{10} = 1$. Вычислим приближенно значения функции $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ в этих точках:

$$\begin{array}{lll}
f(0) = 1, & f(x_1) = 1{,}00005, & f(x_2) = 1{,}00080,\\
f(x_3) = 1{,}00404, & f(x_4) = 1{,}01272, & f(x_5) = 1{,}03078,\\
f(x_6) = 1{,}06283, & f(x_7) = 1{,}11360, & f(x_8) = 1{,}18727,\\
 & f(x_9) = 1{,}28690, & f(x_{10}) = 1{,}41421.
\end{array}$$

Согласно квадратурной формуле трапеций

$$I \approx \frac{1}{20}[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_9)+f(x_{10})]=\frac{21,81219}{20}=1,09061.$$

Функция $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ имеет сколько угодно непрерывных производных на промежутке $[0, 1]$. Как мы отмечали выше, наличие производных порядка выше второго не влияет на точность формулы трапеций. Поэтому погрешность формулы трапеций определим, исходя из факта существования второй непрерывной производной

$$f''(x)=2x^2(3+x^4)/(1+x^4)^{3/2}.$$

Так как $M_2=\max\limits_x f''(x)=2\sqrt{2}$, то остаточный член формулы трапеций

$$R_{10}(f)\leqslant\frac{M_2}{12N^2}=\frac{2\sqrt{2}}{12\cdot 10^2}\approx 0,002357.$$

Итак,

$$I=1,0906\pm 0,0024.$$

По формуле Симпсона $(2N=10)$

$$I\approx\frac{1}{30}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+4f(x_5)+$$

$$+2f(x_6)+4f(x_7)+2f(x_8)+4f(x_9)+f(x_{10})]=\frac{32,68473}{30}=1,08949.$$

Остаточный член формулы Симпсона можно определить, учитывая, что $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка (наличие производных порядка выше четвертого не влияет на точность формулы Симпсона)

$$f^{(4)}(x)=12(1-14x^4+5x^8)/(1+x^4)^{7/2}.$$

Так как $M_4=\max\limits_x|f^{(4)}(x)|\leqslant 15\sqrt{2}$, то

$$R_5(f)\leqslant\frac{M_4}{2880N^4}\leqslant\frac{15\sqrt{2}}{2880\cdot 5^4}\leqslant 0,000012<0,00002.$$

Таким образом,

$$I=1,08949\pm 0,00002,$$

т. е. формула Симпсона значительно точнее формулы трапеций для достаточно гладких функций и большого N.

Замечание. Все вычисления производились при помощи ручного микрокалькулятора «Электроника БЗ—18М».

ГЛАВА 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 8.1. Предварительные сведения

Понятие функции многих переменных введено в § 3.1.2. Нам предстоит построить дифференциальное исчисление для функций многих переменных. Основные сведения мы излагаем для функций двух переменных. Полученные результаты легко распространяются по аналогии на случай большего числа переменных. Мелким шрифтом излагается n-мерный случай.

Итак, мы будем рассматривать пространство (плоскость) R_2 точек (x, y). Зададим в R_2 точку (x_0, y_0).

Множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < a^2 \qquad (a>0),$$

называется *открытым кругом радиуса a с центром в точке* (x_0, y_0).

Множество же точек (x, y), координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|x-x_0|<a, \quad |y-y_0|<b \qquad (a, b>0),$$

называется *открытым прямоугольником*.

Если $a=b$, то открытый прямоугольник обращается в *открытый квадрат с центром в точке* (x_0, y_0) *с длиной стороны* $2a$:

$$|x-x_0|<a, \quad |y-y_0|<a.$$

Любой открытый круг радиуса $\varepsilon>0$ или квадрат со стороной длины 2ε с центром в точке (x_0, y_0) называется *окрестностью* или *ε-окрестностью этой точки*.

Если задана последовательность точек

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ (x_3,\ y_3),\ \ldots,$$

то будем еще говорить, что *переменная точка*

$$(x_k,\ y_k) \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

пробегает значения этой последовательности.

Говорят также, что *последовательность точек* $\{(x_k,\ y_k)\}$ или переменная точка $(x_k,\ y_k)$ *стремится к точке* $(x_0,\ y_0)$ *при* $k \to \infty$, если расстояние между этими точками стремится к нулю при $k \to \infty$:

$$\sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} \to 0 \qquad (k \to \infty). \tag{1}$$

При этом пишут

$$(x_k,\ y_k) \to (x_0,\ y_0) \qquad (k \to \infty).$$

Свойство (1) эквивалентно, очевидно, следующим двум свойствам:

$$x_k \to x_0, \quad y_k \to y_0 \quad (k \to \infty), \tag{1'}$$

которые должны выполняться одновременно.

Свойство (1) можно выразить еще такими словами: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что точка $(x_k,\ y_k)$ окажется в открытом круге радиуса ε с центром в $(x_0,\ y_0)$ для всех $k > N$.

Свойство же (1') можно выразить так: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что точка $(x_k,\ y_k)$ окажется в открытом квадрате со стороной длины 2ε и центром $(x_0,\ y_0)$ для всех $k > N$.

Обе эти формулировки можно объединить, сказав, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что точка $(x_k,\ y_k)$ окажется в ε-окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ для всех $k > N$.

В n-мерном евклидовом пространстве R_n расстояние между точками $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$ определяется по формуле

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

В R_n множество точек $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2 < a^2 \qquad (a > 0),$$

называесся *n-мерным открытыт шаром радиуса a с центром в точке* $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Множество же точек x, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|x_1-x_1^0|<a_1, \ldots, |x_n-x_n^0|<a_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные положительные числа, называется *n-мерным открытым прямоугольником* (параллелепипедом).

Если

$$a_1=a_2=\ldots=a_n=a,$$

то параллелепипед превращается в *n-мерный открытый куб с центром в точке* $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *и ребром длины* 2ε.

Любой открытый n-мерный шар радиуса ε или куб с центром в точке x^0 и длиной ребра 2ε называется *n-мерной* ε-*окрестностью точки* x^0.

Последовательность точек в R_n

$$x^1=(x_1^1, \ldots, x_n^1), \quad x^2=(x_1^2, \ldots, x_n^2), \quad x^3=(x_1^3, \ldots, x_n^3), \ldots$$

определяет *переменную точку*

$$x^k=(x_1^k, \ldots, x_n^k) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Переменная точка x^k *стремится к точке* $x^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если расстояние между этими точками стремится к нулю при $k\to\infty$:

$$|x^k-x^0|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^k-x_j^0)^2}\to 0 \qquad (k\to\infty). \tag{2}$$

Свойство (2) эквивалентно следующим n свойствам, которые должны выполняться одновременно:

$$x_1^k\to x_1^0, \quad x_2^k\to x_2^0, \ldots, x_n^k\to x_n^0 \qquad (k\to\infty). \tag{2'}$$

Свойство (2) или (2′) можно выразить еще словами: для всякого $\varepsilon>0$ можно указать натуральное число N такое, что для всех $k>N$ переменная точка x^k окажется принадлежащей ε-окрестности точки x^0.

§ 8.2. Предел функции

В § 3.2 рассматривалось понятие предела функции одной переменной. Здесь это понятие обобщается на случай функции многих переменных.

Ограничимся случаем двух переменных x, y. По определению функция $f(x, y)$ имеет *предел в точке* (x_0, y_0), равный числу A, обозначаемый так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \tag{1}$$

(пишут еще $f(x, y) \to A$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$), если она определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), за исключением, быть может, самой этой точки и если существует предел

$$\lim_{\substack{x_k \to x_0 \\ y_k \to y_0}} f(x_k, y_k) = A, \tag{2}$$

какова бы ни была стремящаяся к (x_0, y_0) последовательность точек (x_k, y_k).

Так же, как в случае функции одной переменной, можно ввести другое эквивалентное определение предела функции двух переменных: функция f имеет в точке (x_0, y_0) предел, равный A, если она определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) за исключением, быть может, самой этой точки, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

для всех (x, y), удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta. \tag{4}$$

Это определение, в свою очередь, эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ-окрестность точки (x_0, y_0) такая, что для всех (x, y) из этой окрестности, отличных от (x_0, y_0), выполняется неравенство (3).

Так как координаты произвольной точки (x, y) окрестности точки (x_0, y_0) можно записать в виде $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то равенство (1) эквивалентно следующему равенству:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A.$$

Рассмотрим некоторую функцию, заданную в окрестности точки (x_0, y_0), кроме, быть может, самой этой точки.

Пусть $\omega = (\omega_x, \omega_y)$ — произвольный вектор длины единица ($|\omega|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = 1$) и $t > 0$ — скаляр. Точки вида

$$(x_0 + t\omega_x, y_0 + t\omega_y) \quad (0 < t)$$

образуют *луч, выходящий из* (x_0, y_0) *в направлении вектора* ω. Для каждого ω можно рассматривать функцию

$$f(x_0 + t\omega_x, y_0 + t\omega_y) \qquad (0 < t < \delta)$$

от скалярной переменной t, где δ — достаточно малое число.

Предел этой функции (одной переменной t)

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x_0+t\omega_x,\ y_0+t\omega_y),$$

если он существует, естественно называть *пределом f в точке (x_0, y_0) по направлению ω.*

Пример 1. Функции

$$f(x, y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\quad \varphi(x, y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

определены на плоскости (x, y) за исключением точки $x_0=0$, $y_0=0$. Имеем (учесть, что $x^3\leqslant(x^2+y^2)^{3/2}$ и $y^3\leqslant\leqslant(x^2+y^2)^{3/2}$):

$$|f(x, y)|\leqslant\frac{2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2}=2(x^2+y^2)^{1/2}\to 0\quad (x\to 0,\ y\to 0).$$

Отсюда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0$$

(для $\varepsilon>0$ полагаем $\delta=\varepsilon/2$ и тогда $|f(x, y)|<\varepsilon$, если $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$).

Далее, считая, что k — постоянная, имеем для $y=kx$ равенство

$$\varphi(x, kx)=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

из которого видно, что предел φ в точке $(0, 0)$ по разным направлениям вообще различен (единичный вектор луча $y=kx$, $x>0$, имеет вид $\omega=\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)\Big)$.

Пример 2. Рассмотрим в R_2 функцию

$$f(x, y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}\qquad (x^4+y^2\neq 0).$$

Данная функция в точке $(0, 0)$ на любой прямой $y=kx$, проходящей через начало координат, имеет предел, равный нулю:

$$f(x, kx)=\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\frac{kx}{x^2+k^2}\to 0\quad\text{при}\quad x\to 0.$$

Однако эта функция не имеет предела в точке (0, 0), ибо при $y=x^2$

$$f(x,\ x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,\ x^2)=\frac{1}{2}.$$

Будем писать

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=\infty,$$

если функция f определена в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$, за исключением, быть может, самой точки $(x_0,\ y_0)$ и для всякого $N>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$|f(x,\ y)|>N,$$

коль скоро $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$.

Можно также говорить о пределе f, когда $x,\ y\to\infty$:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,\ y)=A. \tag{5}$$

Например, в случае конечного числа A равенство (5) надо понимать в том смысле, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $N>0$, что для всех $x,\ y$, для которых $|x|>N$, $|y|>N$, функция f определена и имеет место неравенство

$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon.$$

Справедливы равенства

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,\ y)\pm\varphi(x,\ y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,\ y), \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x,\ y)\cdot\varphi(x,\ y))=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,\ y), \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,\ y)}{\varphi(x,\ y)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,\ y)} \qquad \Bigl(\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,\ y)\neq 0\Bigr), \tag{8}$$

где может быть $x\to\infty$, $y\to\infty$. При этом, как обычно, пределы (конечные) в их левых частях существуют, если существуют пределы f и φ.

Докажем для примера (7).

Пусть $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$ $((x_k, y_k) \neq (x_0, y_0))$; тогда

$$\lim_{(x_k, y_k)\to(x_0, y_0)} (f(x_k, y_k)\cdot\varphi(x_k, y_k)) = \lim_{(x_k, y_k)\to(x_0, y_0)} f(x_k, y_k) \times$$
$$\times \lim_{(x_k, y_k)\to(x_0, y_0)} \varphi(x_k, y_k) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)\cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x, y). \qquad (9)$$

Таким образом, предел в левой части (9) существует и равен правой части (9), а так как последовательность (x_k, y_k) стремится к (x_0, y_0) по любому закону, то этот предел равен пределу функции $f(x, y)\cdot\varphi(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Теорема 1. *Если функция $f(x, y)$ имеет предел, не равный нулю в точке (x_0, y_0), т. е.*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A \neq 0,$$

то существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, y, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta, \qquad (10)$$

она удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| > \frac{|A|}{2}. \qquad (11)$$

Больше того, она сохраняет там знак числа A.

В самом деле, положив $\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0$, найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для (x, y), удовлетворяющих неравенствам (10), выполнялось

$$|f(x, y) - A| < \frac{|A|}{2}. \qquad (12)$$

Поэтому для таких (x, y)

$$\frac{|A|}{2} > |A - f(x, y)| > |A| - |f(x, y)|,$$

т. е. имеет место (11). Из (12) для указанных (x, y) следует

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x, y) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда

$$\frac{A}{2} < f(x, y) \quad \text{при} \quad A > 0$$

и

$$f(x,\ y) < \frac{A}{2} \qquad \text{при} \quad A < 0$$

(сохранение знака).

Замечание. В § 8.12 будет дано более общее определение предела функции, заданной на произвольном множестве.

По определению *функция* $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет предел в точке* $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, равный числу A, обозначаемый так:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1, \ldots, n)}} f(x_1, \ldots, x_n) = A$$

(пишут еще $f(\boldsymbol{x}) \to A$ $(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0)$), если она определена на некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и если существует предел

$$\lim_{\substack{|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^0| \to 0 \\ \boldsymbol{x}^k \neq \boldsymbol{x}^0}} f(\boldsymbol{x}^k) = A,$$

какова бы ни была стремящаяся к $\boldsymbol{x}^0$ последовательность точек $\boldsymbol{x}^k$ из указанной окрестности ($k = 1, 2, \ldots$), отличных от $\boldsymbol{x}^0$ (см. § 8.1).

Другое эквивалентное определение заключается в следующем: *функция* f *имеет в точке* $\boldsymbol{x}^0$ *предел, равный* A, если она определена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$, за исключением, быть может, ее самой, и *для любого* $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\boldsymbol{x}) - A| < \varepsilon \tag{13}$$

для всех $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| < \delta.$$

Это определение в свою очередь эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U(\boldsymbol{x}^0)$ точки $\boldsymbol{x}^0$ такая, что для всех $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}^0)$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$, выполняется неравенство (13).

Очевидно, что если число A есть предел $f(\boldsymbol{x})$ в $\boldsymbol{x}^0$, то A есть предел функции $f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h})$ от $\boldsymbol{h}$ в нулевой точке:

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}) = A,$$

и наоборот.

Рассмотрим некоторую функцию f, заданную во всех точках окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$, кроме, быть может, точки $\boldsymbol{x}^0$; пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — произвольный вектор длины единица ($|\boldsymbol{\omega}| = 1$) и $t > 0$ — скаляр. Точки вида $\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}$ $(0 < t)$ образуют выходящий из $\boldsymbol{x}^0$ *луч в направлении вектора* $\boldsymbol{\omega}$. Для каждого $\boldsymbol{\omega}$ можно рассматривать функцию

$$f(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}) = f(x_1^0 + t\omega_1, \ \ldots, \ x_n^0 + t\omega_n) \qquad (0 < t < \delta_\omega)$$

от скалярной переменной t, где δ_ω есть число, зависящее от $\boldsymbol{\omega}$. Предел этой функции (от одной переменной t)

$$\lim_{t \to 0,\ t > 0} f(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{\omega}) = \lim_{t \to 0,\ t > 0} f(x_1^0 + t\omega_1, \ \ldots, \ x_n^0 + t\omega_n),$$

если он существует, естественно назвать *пределом* f *в точке* $\boldsymbol{x}^0$ *по направлению вектора* ω.

Будем писать $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x})=\infty$, если функция f определена в некоторой окрестности $\boldsymbol{x}^0$, за исключением, быть может, $\boldsymbol{x}^0$, и для всякого $N>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|f(\boldsymbol{x})|>N$, коль скоро $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|<\delta$.

Можно говорить о пределе f, когда $\boldsymbol{x}\to\infty$:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty} f(\boldsymbol{x})=A. \tag{14}$$

Например, в случае конечного числа A равенство (14) надо понимать в том смысле, что для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $N>0$, что для точек $\boldsymbol{x}$, для которых $|\boldsymbol{x}|>N$, функция f определена и имеет место неравенство $|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$.

Итак, предел функции $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных определяется по аналогии так же, как для функции от двух переменных.

Равенства (6), (7), (8) и теорема 1 непосредственно распространяются на n-мерный случай.

§ 8.3. Непрерывная функция

По определению функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0), если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе в самой точке (x_0, y_0), и если предел $f(x, y)$ в этой точке равен ее значению в ней:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0). \tag{1}$$

Условие непрерывности f в точке (x_0, y_0) можно записать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0, y_0), \tag{1'}$$

т. е. функция f непрерывна в точке (x_0, y_0), если непрерывна функция $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ от переменных Δx, Δy при $\Delta x=\Delta y=0$.

Можно ввести приращение Δu функции

$$u=f(x, y)$$

в точке (x, y), соответствующее приращениям Δx, Δy аргументов

$$\Delta u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

и на этом языке определить непрерывность f в (x, y): функция f непрерывна в точке (x, y), если

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta u = 0. \tag{1''}$$

Из формул (6)—(8) § 8.2 непосредственно следует

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке* (x_0, y_0) *функций* f *и* φ *есть непрерывная функция в этой точке, если, конечно, в случае частного* $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$.

Постоянную c можно рассматривать как функцию

$$f(x, y) = c$$

от переменных x, y. Она непрерывна по этим переменным, потому что

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |c - c| = 0 \underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{\longrightarrow} 0.$$

Следующими по сложности являются функции $f(x, y) = x$ и $f(x, y) = y$. Их тоже можно рассматривать как функции от (x, y), и при этом они непрерывны. Например, функция $f(x, y) = x$ приводит в соответствие каждой точке (x, y) число, равное x. Непрерывность этой функции в произвольной точке (x, y) может быть доказана так:

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)| = |(x+\Delta x) - x| = |\Delta x| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\longrightarrow} 0.$$

Если производить над функциями x, y и постоянными действия сложения, вычитания и умножения в конечном числе, то будем получать функции, называемые *многочленами* от x, y. На основании сформулированных выше свойств *многочлены от переменных x, y суть непрерывные функции* от этих переменных для всех точек $(x, y) \in R_2$.

Отношение P/Q двух многочленов от (x, y) есть *рациональная функция* от (x, y), очевидно, непрерывная всюду на R_2, за исключением точек (x, y), где $Q(x, y) = 0$.

Функция

$$P(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 y - 4$$

может быть примером многочлена от (x, y) третьей степени, а функция

$$P(x, y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

есть пример многочлена от (x, y) четвертой степени.

Приведем пример теоремы, утверждающей непрерывность функции от непрерывных функций.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в точке (x_0, y_0, z_0) пространства R_3 (точек (x, y, z)), а функции*

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

непрерывны в точке (u_0, v_0) пространства R_2 (точек (u, v)). Пусть, кроме того,

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0), \quad z_0 = \chi(u_0, v_0).$$

Тогда функция

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)]$$

непрерывна (по (u, v)) в точке (u_0, v_0).

Доказательство. Так как знак предела можно внести под знак характеристики непрерывной функции, то

$$\lim_{(u, v)\to(u_0, v_0)} F(u, v) = \lim_{\substack{\varphi(u, v)\to x_0 \\ \psi(u, v)\to y_0 \\ \chi(u, v)\to z_0}} f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)] =$$

$$= f(x_0, y_0, z_0) = f[\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0)] = F(u_0, v_0).$$

Функцию мы будем называть *элементарной функцией* от переменных $x_1, \ldots, x_n$, если она может быть получена из этих переменных и констант c при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операций φ, где φ — элементарная функция от одной переменной (см. § 3.8). Функции

$$1)\ \sin\ln\sqrt{1 + x^2 + y^2} = f_1, \quad 2)\ \sin^2 x + \cos^3(x + y) = f_2,$$

$$3)\ \ln\frac{x-y}{x+y} = f_3$$

могут служить примерами элементарных функций.

Легко проверить, пользуясь теоремами 1 и 2, что функции f_1 и f_2 непрерывны на плоскости (x, y), функция же f_3, очевидно, определена и непрерывна в тех точках (x, y), для которых дробь $(x-y)/(x+y)$ положительна и конечна.

Из теоремы 1 § 8.2 и определения непрерывности функции в точке непосредственно следует

Теорема 3. *Функция $f(x, y)$, непрерывная в точке (x_0, y_0) и не равная нулю в этой точке, сохраняет знак числа $f(x_0, y_0)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).*

По определению функция $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *непрерывна в точке* $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если она определена в некоторой ее окрестности, в том числе и в самой точке $\boldsymbol{x}^0$, и если предел ее в точке $\boldsymbol{x}^0$ равен ее значению в ней:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^0). \tag{2}$$

Условие непрерывности f в точке $\boldsymbol{x}^0$ можно написать в эквивалентной форме:

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}^0), \tag{2'}$$

т. е. функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x}^0$, если непрерывна функция $f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h})$ от $\boldsymbol{h}$ в точке $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$.

Можно ввести приращение f в точке $\boldsymbol{x}^0$, соответствующее приращению $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) = f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^0)$$

и на его языке определить непрерывность f в $\boldsymbol{x}^0$: *функция f непрерывна в $\boldsymbol{x}^0$, если*

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0) = \lim_{h_1, \ldots, h_n \to 0} [f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)] = 0. \tag{2''}$$

Из формул (6) — (8) § 8.2 непосредственно следует

Теорема 1'. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке $\boldsymbol{x}^0$ функций $f(\boldsymbol{x})$ и $\varphi(\boldsymbol{x})$ есть непрерывная функция в этой точке, если, конечно, в случае частного $\varphi(\boldsymbol{x}^0) \neq 0$.*

Замечание. Приращение $\Delta_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}^0)$ называют также *полным приращением функции* f в точке $\boldsymbol{x}^0$.

В пространстве R_n точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ зададим множество точек G.

По определению $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ есть *внутренняя точка множества* G, если существует открытый шар с центром в нем, полностью принадлежащий к G.

Множество $G \subset R_n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Говорят, что функции

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

непрерывные на отрезке $[a, b]$, определяют *непрерывную кривую* в R_n, соединяющую точки $\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ и $\boldsymbol{x}^2 = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$, где $x_1^1 = \varphi_1(a), \ \ldots, \ x_n^1 = \varphi_n(a), \ x_1^2 = \varphi_1(b), \ \ldots, \ x_n^2 = \varphi_n(b)$. Букву t называют *параметром кривой*.

Множество G называется *связным*, если любые его две точки $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей G. Связное открытое множество называется *областью*.

Теорема 4. *Пусть функция $f(\boldsymbol{x})$ определена и непрерывна на R_n (во всех точках R_n). Тогда множество G точек $\boldsymbol{x}$, где она удовлетворяет неравенству $f(\boldsymbol{x}) > c$ (или $f(\boldsymbol{x}) < c$), какова бы ни была постоянная c, есть открытое множество.*

В самом деле, функция $F(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - c$ непрерывна на R_n, и множество всех точек $\boldsymbol{x}$, где $F(\boldsymbol{x}) > 0$, совпадает с G. Пусть $\boldsymbol{x}^0 \in G$; тогда существует шар

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| < \delta,$$

на котором $F(\boldsymbol{x}) > 0$, т. е. он принадлежит к G и точка $\boldsymbol{x}^0 \in G$ — внутренняя для G.

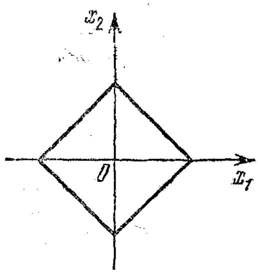

Рис. 95.

Случай $f(\boldsymbol{x}) < c$ доказывается аналогично.

Пример. Функции

$$f_1(\boldsymbol{x}) = \sum_1^n \frac{x_k^2}{a_k} \quad (a_k > 0); \quad f_2(\boldsymbol{x}) = \sum_1^n |x_k|,$$

определены и непрерывны на R_n.

В таком случае множества значений $\boldsymbol{x}$, для которых выполняются неравенства $f_i(\boldsymbol{x}) < c$ $(i = 1, 2)$, — открытые множества. Первое из них есть внутренность эллипсоида в n-мерном пространстве; второе при $n = 2$ суть внутренность квадрата, изображенного на рис. 95.

Неравенства $f_i(\boldsymbol{x}) > c > 0$ определяют внешности указанных фигур.

Можно установить, что указанные множества связны, т. е. они являются областями. При $n = 2, 3$ это непосредственно видно.

§ 8.4. Частные производные и производная по направлению

Назовем *приращением функции $f(x, y)$ в точке (x, y) по переменной x с шагом h величину*

$$\Delta_{xh} f = f(x + h, y) - f(x, y),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл.

Частной производной по x в точке (x, y) называется предел

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh} f}{h},$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ есть обычная производная от функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция только от переменной x при фиксированном y.

Функция $z=f(x, y)$ от двух переменных изображается в трехмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат x, y, z, поверхностью — геометрическим местом точек $(x, y, f(x, y))$, где (x, y) принадлежит области задания функции $f(x, y)$. Очевидно, что *величина* $f'_x(x_0, y_0)$ (если она существует) *равна тангенсу угла наклона к оси x касательной к сечению этой поверхности плоскостью $y=y_0$ в точке, имеющей абсциссу x_0.*

Совершенно аналогично можно определить частную производную по y в точке (x, y):

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_{yh}f}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x, y+h)-f(x, y)}{h}.$$

Если функция $z=f(x, y)$, заданная на множестве $G\subset R_2$, имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках $(x, y)\in G$, то эти производные можно рассматривать как новые функции, заданные на G.

Поэтому можно поставить вопрос о существовании частных производных у этих функций по какому-либо переменному в точке $(x, y)\in G$.

Если у функции $\frac{\partial f}{\partial x}$ существует частная производная снова по переменной x, то ее называют *частной производной второго порядка от функции $f(x, y)$ по переменной x* и обозначают $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}.$$

Если существует частная производная от функции $\frac{\partial f}{\partial x}$ по переменной y, то эту производную называют *смешанной частной производной второго порядка от функции* $f(x, y)$ и обозначают символом

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}.$$

Для функции от двух переменных $f(x, y)$ можно рассматривать четыре производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Если производные второго порядка (все или какая-либо одна) существуют для всех $(x, y)\in G$, то может возникнуть вопрос о существовании частных производных третьего порядка.

Вообще, *частной производной n-го порядка* будем называть частную производную по какому-нибудь переменному от некоторой производной $(n-1)$-го порядка. Например,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right\}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}.$$

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ будем называть *частными производными первого порядка*, а саму функцию f — *частной производной нулевого порядка*.

Для частных производных будем также употреблять символику:

$$D_x f=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad D_xD_y f=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{x^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}.$$

Назовем *приращением f в точке $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_j с шагом h величину*

$$\Delta_{x_j h}f=f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+h, x_{j+1}, \ldots, x_n)-f(x_1, \ldots, x_n),$$

где h — действительное число, достаточно малое, чтобы эта величина имела смысл. *Частной производной по x_j в точке $\boldsymbol{x}$* называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_{x_j h}f}{h},$$

если он существует. Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ есть обычная производная от функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматриваемой как функция только от переменной x_j при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

Если $\boldsymbol{r}=(r_1, \ldots, r_n)$ — вектор с неотрицательными целыми координатами, то пишут

$$D^{\boldsymbol{r}} f=D_{x_1}^{r_1}\ldots D_{x_n}^{r_n}f=\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_n}f}{\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_n^{r_n}},$$

Пример. Найти $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}$ от функции $f(x, y)=x^2+\sin xy$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2\sin xy,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=-2x\sin xy-x^2y\cos xy.$$

Естественно возникает вопрос, будут ли равны между собой частные производные, если они взяты по одним и тем же переменным, одно и то же число раз, но в разном порядке.

Например, равны ли

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y^2\, \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}\ ?$$

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Однако имеет место следующая теорема, которую мы сформулируем для функции от двух переменных.

Теорема (о смешанных производных). *Пусть функция $u = f(x, y)$ определена вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ в некоторой окрестности точки $P_0 = (x_0, y_0)$, причем $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ непрерывны в точке P_0; тогда*

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y\, \partial x},$$

т. е. в этом случае результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned}\Delta_{xh}[\Delta_{yh} f(x_0, y_0)] &= \Delta_{xh}[f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)] = \\ &= [f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)] = \\ &= \Delta_{yh}[\Delta_{xh} f(x_0, y_0)] \qquad \forall h. \qquad (1)\end{aligned}$$

Отсюда, применяя теорему Лагранжа по переменной x к функции $f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$ на промежутке $[x_0+h, x_0]$, получаем:

$$\Delta_{xh}[\Delta_{yh} f(x_0, y_0)] = h[f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0+\theta h, y_0)] \qquad (0 < \theta < 1). \qquad (2)$$

Законность применения теоремы Лагранжа обусловлена существованием частной производной f'_x в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0).

Так как по условию теоремы существует частная смешанная производная f''_{yx} в окрестности точки (x_0, y_0), то снова применяя теорему Лагранжа, из (2) получаем:

$$\Delta_{xh}[\Delta_{yh} f(x_0, y_0)] = h^2 f''_{yx}(x_0+\theta h, y_0+\theta_1 h) \qquad (0 < \theta_1 < 1). \qquad (3)$$

Кроме того, по условию f''_{yx} непрерывна в точке (x_0, y_0), поэтому из (3) имеем

$$\Delta_{xh}[\Delta_{yh}f(x_0, y_0)] = h^2[f''_{yx}(x_0, y_0) + \varepsilon], \tag{4}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$.

Из (4) следует, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh}[\Delta_{yh} f(x_0, y_0)]}{h^2} = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{5}$$

Совершенно аналогично, пользуясь непрерывностью f''_{xy} в точке (x_0, y_0), доказывается равенство

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{yh}[\Delta_{xh} f(x_0, y_0)]}{h^2} = f''_{xy}(x_0, y_0). \tag{6}$$

На основании (5) и (6), в силу равенства (1), заключаем, что утверждение теоремы верно.

Замечание 1. По индукции легко распространить эту теорему на любые непрерывные смешанные частные производные, которые отличаются друг от друга только порядком дифференцирования. Например,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} =$$
$$= \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}.$$

Замечание 2. Если условие непрерывности отсутствует, то смешанные производные могут быть различными в точке P_0. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ и } f(0, 0) = 0.$$

Легко подсчитать, что

$$f'_x(x, y) = y\frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ при } x^2 + y^2 \neq 0$$

и

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0;$$

$$f'_y(x, y) = x^3\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ при } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ и } f'_y(0, 0) = 0.$$

Далее, по определению,

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0,$$

т. е.

$$f''_{xy}(0,\ 0) \neq f''_{yx}(0,\ 0).$$

Отметим, что частные производные f''_{xy} и f''_{yx} разрывны в точке $(0, 0)$, например, $f''_{yx}(x,\ y) = \frac{x^6+6x^4y^2-3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$ при $x^2+y^2 \neq 0$, откуда видно, что

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x = y}} f''_{yx}(x, y) = \frac{1}{2} \neq f''_{yx}(0,\ 0) = 0.$$

Можно еще ввести понятие *производной по направлению*. В случае функции от одной переменной оно не употребляется.

Пусть $\omega = (\omega_x,\ \omega_y)$ есть произвольный единичный вектор. *Производной от функции f в точке $(x,\ y)$ по направлению ω* называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x+t\omega_x,\ y+t\omega_y) - f(x,\ y)}{t}$$

(если он существует). Подчеркнем, что при вычислении этого предела предполагается, что t стремится к нулю, принимая *положительные* значения, поэтому можно еще сказать, что $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial \omega}$ *есть правая производная в точке $t=0$ от функции $f(x+t\omega_x,\ y+t\omega_y)$ по t.*

Можно, как в случае функций от одной переменной, говорить о правой и левой частных производных по x. Надо учесть, что *производная по направлению положительной оси x совпадает с правой частной производной по x, однако производная по направлению отрицательной оси x имеет знак, противоположный знаку левой производной по x.*

§ 8.5. Дифференцируемые функции

Для простоты будем рассматривать трехмерный случай; в n-мерном случае рассуждения аналогичны. Случай $n=1$ был специально рассмотрен в § 4.7.

Пусть на открытом множестве $G \subset R_3$ (определение открытого множества см. § 8.3, мелкий шрифт) задана функция $u = f(x,\ y,\ z)$, имеющая в точке $(x,\ y,\ z) \in G$ непрерывные частные производные первого порядка. Отсюда автоматически следует, что эти частные производные существуют в некоторой окрестности (x, y, z), хотя, быть может, они в точках, отличных от (x, y, z), не являются непрерывными. Рассмотрим приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, где $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z|$ меньше δ и δ достаточно мало, чтобы точка $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ не выходила из указанной окрестности. Имеют место равенства (пояснения ниже):

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z) = \qquad (1)$$

$$= f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) + \qquad (2)$$

$$+ f(x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z+\Delta z) + \qquad (3)$$

$$+ f(x,\ y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z) = \qquad (4)$$

$$= f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\,\Delta x +$$

$$+ f'_y(x,\ y+\theta_2\Delta y,\ z+\Delta z)\,\Delta y + f'_z(x,\ y,\ z+\theta_3\Delta z)\,\Delta z = \qquad (5)$$

$$= (f'_x(x,\ y,\ z)+\varepsilon_1)\,\Delta x + (f'_y(x,\ y,\ z)+\varepsilon_2)\,\Delta y +$$

$$+ (f'_z(x,\ y,\ z)+\varepsilon_3)\,\Delta z = \qquad (6)$$

$$= f'_x(x,\ y,\ z)\,\Delta x + f'_y(x,\ y,\ z)\,\Delta y + f'_z(x,\ y,\ z)\,\Delta z + o(\rho) \qquad (7)$$

$$(\rho \to 0),$$

$$0 < \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 < 1,\ \rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2},\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3 \to 0 \qquad (8)$$

$$(\rho \to 0).$$

Переход от (2) к первому члену (5) обосновывается так: функция $f(\xi, y+\Delta y, z+\Delta z)$ от ξ (при фиксированных $y+\Delta y$, $z+\Delta z$) имеет по условию производную (по ξ) на отрезке $[x, x+\Delta x]$, и к ней применима теорема Лагранжа о среднем. Аналогичные пояснения ко второму и третьему членам (5). Переход от (5) к (6) чисто формальный: мы положили, например,

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f'_x(x,\ y,\ z)+\varepsilon_1.$$

Но не формален здесь факт, что $\varepsilon_1 \to 0$ при $\rho \to 0$. Он следует из предположенной непрерывности f'_x в (x, y, z). Наконец, переход от (6) к (7) сводится к утверждению, что имеет место равенство

$$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z = o(\rho) \qquad (\rho \to 0).$$

В самом деле, так как $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z| \leqslant \rho$, то при $\rho \to 0$

$$|\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z|/\rho \leqslant |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3| \to 0.$$

Мы доказали важную теорему:

Теорема 1. *Если функция $u=f$ имеет непрерывные частные производные (первого порядка) в точке (x, y, z),* *то ее приращение в этой точке, соответствующее достаточно малому приращению* $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, *можно записать по формуле*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{9}$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

где частные производные взяты в точке (x, y, z).

Так как значения частных производных в правой части (9) не зависят от Δx, Δy, Δz, то из условий теоремы 1 следует, что приращение f в (x, y, z), соответствующее приращению $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, может быть записано по формуле

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{10}$$

где числа A, B, C не зависят от Δx, Δy, Δz.

Сделаем следующее определение: если приращение функции f в точке (x, y, z) для достаточно малых $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ может быть записано в виде суммы (10), где A, B, C — числа, не зависящие от Δx, Δy, Δz, то говорят, что функция f *дифференцируема в точке* (x, y, z). Таким образом, *дифференцируемость функции f в (x, y, z) заключается в том, что ее приращение Δf в этой точке можно записать в виде суммы двух слагаемых: первое слагаемое есть линейная функция* $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ *от* $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — *она называется главной линейной частью приращения* Δf, *второе же слагаемое вообще сложно зависит от приращений* Δx, Δy, Δz, *но если стремить их к нулю, то оно будет стремиться к нулю быстрее, чем* $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Легко видеть, что если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), т. е. представляется равенством (10), то она имеет в этой точке частные производные первого порядка, равные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = C. \tag{11}$$

Например, первое равенство (11) доказывается так. Пусть приращение f в (x, y, z) записывается по формуле (10). Если считать в последней $\Delta x = h$, $\Delta y = \Delta z = 0$, то получим равенство $\Delta_{xh} u = Ah + o(h)$ $(h \to 0)$. После деления его на h и перехода к пределу получим

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh} u}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

Из сказанного следует

Теорема 2. *Для того чтобы функция f была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные, и достаточно, чтобы она имела в этой точке непрерывные частные производные.*

Напомним, что для функции f одной переменной существование у нее производной в точке x является необходимым и достаточным, чтобы она была дифференцируемой в этой точке.

Из (10) следует, что *если функция дифференцируема в точке, то она обязательно непрерывна в этой точке.*

Пример 1. Функция $f(x, y, z)$, равная нулю на координатных плоскостях $x=0$, $y=0$, $z=0$ и единице в остальных точках R_3, имеет, очевидно, частные производные, равные нулю в точке (0, 0, 0), но она, очевидно, разрывна в этой точке и потому не может быть в ней дифференцируемой. Таким образом, одного существования частных производных в точке недостаточно для дифференцируемости и даже непрерывности в этой точке.

Отметим отличие многомерного случая от одномерного. При $n=1$ свойство дифференцируемости f в x записывается в виде равенства $\Delta f = A\,\Delta x + o(\Delta x)$, следовательно, если $A \neq 0$, то остаток стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее главной части. При $n > 1$ это уже не так, например при $n=3$, каковы бы ни были числа A, B, C, одновременно не равные нулю, всегда можно стремить Δx, Δy, Δz к нулю так, чтобы при этом постоянно выполнялось равенство $A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z = 0$, но тогда в (10) остаточный член $o(\rho)$ вообще больше главного. Впрочем, если мы заставим Δx, Δy, Δz стремиться к нулю так, чтобы выполнялась пропорциональность $\Delta x:\Delta y:\Delta z = A:B:C$, то тогда главная часть приращения будет величиной, имеющей строго порядок ρ, и остаток будет стремиться к нулю быстрее главной части.

Пример 2. Функция $u = |x|(y+1)$ непрерывна в точке (0, 0). Однако легко видеть, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ не существует в этой точке. Следовательно, u не дифференцируема в точке (0, 0).

Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то главная линейная часть ее приращения в этой точке называется еще *дифференциалом f в этой точке, соответствующим приращениям $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ независимых переменных.* Он записывается так:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z.$$

О других обозначениях мы будем еще говорить в § 8.9.

§ 8.6. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Рассмотрим для примера функцию

$$z=f(x,\ y)$$

от двух переменных, которую будем предполагать дифференцируемой.

Мы хотим вычислить эту функцию в точке $(x,\ y)$, где

$$x=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ \ldots,$$
$$y=\pm\beta_0,\beta_1\beta_2\ \ldots$$

Приближенные значения этих чисел запишем в виде конечных десятичных дробей

$$x+\Delta x=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_k,$$
$$y+\Delta y=\pm\beta_0,\beta_1\beta_2\ \ldots\ \beta_l.$$

Таким образом, имеют место приближенные равенства

$$x\approx x+\Delta x,\qquad y\approx y+\Delta y$$

с абсолютными погрешностями приближения, удовлетворяющими неравенствам

$$|\Delta x|\leqslant 10^{-k},\qquad |\Delta y|\leqslant 10^{-l}.$$

Подставив в функцию f вместо x, y соответственно $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, получим приближенное равенство

$$f(x,\ y)\approx f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$$

с абсолютной погрешностью

$$|\Delta z|=|f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)|,$$

которую при достаточно малых Δx, Δy можно приближенно заменить дифференциалом функции f в точке $(x,\ y)$:

$$|\Delta z|\approx|dz|,\qquad dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Отсюда получаем неравенство

$$|\Delta z|\leqslant\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|. \tag{1}$$

На самом деле это неравенство приближенное, потому что мы получили его, пренебрегая некоторой величиной, правда, значительно меньшей, чем Δx, Δy.

Обратим внимание на тот факт, что конечные десятичные дроби $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ при уменьшении $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ становятся все более и более громоздкими. Поэтому при вычислении числа $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ мы должны беспокоиться не только о том, чтобы оно приближало $f(x,\ y)$ должным образом, но и чтобы производимые при этом вычисления совершались возможно экономно. В силу этого замечания из неравенства (1) следует, что если нужно, чтобы абсолютная погрешность $|\Delta z|$ не превышала данную малую величину, которую мы обозначим через 2λ, то этого мы достигнем, взяв числа $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|\leqslant\lambda,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\lambda, \tag{2}$$

т. е. чтобы погрешность $|\Delta z|$ распределялась между слагаемыми в правой части неравенства (1) поровну.

Из неравенств (2) видно, что вычисления будут наиболее экономными, если в качестве $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ (на самом деле 10^{-k}, 10^{-l}) взять наибольшие возможные числа, удовлетворяющие этим неравенствам.

Пример 1. Функция $z=\ln(xy)$ имеет для $x>0$, $y>0$ непрерывные частные производные, равные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}.$$

Поэтому приближенное равенство

$$z=\ln xy\approx\ln[(x+\Delta x)(y+\Delta y)]$$

имеет абсолютную погрешность, которая при малых приращениях Δx, Δy, если пренебречь величинами, значительно меньшими этих приращений, удовлетворяет неравенству

$$|\Delta z|\leqslant\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\quad (x,\ y>0).$$

Если требуется, чтобы гарантированная погрешность была меньше 2λ, надо подобрать Δx, Δy так, чтобы

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\leqslant\lambda,\quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\leqslant\lambda.$$

Мы видим, что числа Δx, Δy не обязательно должны быть равными. Если, например, x значительно меньше, чем y, то соответственно надо взять Δx меньшим, чем Δy. Иначе наши вычисления были бы неэкономными. Если бы, например, было, что

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leqslant \lambda_1, \quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \leqslant \lambda_2,$$

где $\lambda_1 < 0{,}1$, $\lambda_2 < 0{,}0001$, то оказалось бы, что

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| < 0{,}1001,$$

и при этом на вычисление второго слагаемого $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$, ввиду излишней малости Δy, мы потратили бы излишнюю работу. Между тем вычисления упростятся, если взять возможно большие $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \leqslant 0{,}05, \quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \leqslant 0{,}05.$$

Пример 2. Функция $z = xy$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$. Поэтому приближенное равенство

$$z = xy \approx (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

имеет абсолютную погрешность $|\Delta z|$, которая при малых приращениях Δx, Δy, если пренебречь величинами, значительно меньшими этих приращений, удовлетворяет соотношениям

$$|\Delta z| \approx |dz| \leqslant |y\Delta x| + |x\Delta y|.$$

Соответственно относительная погрешность удовлетворяет соотношениям

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{dz}{z}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Мы видим, что при малых Δx и Δy можно считать, что *относительная погрешность произведения не превышает сумму относительных погрешностей сомножителей.*

Пример 3. Функция $z = \frac{x}{y}$ для $y \neq 0$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Поэтому приближенное равенство

$$z = \frac{x}{y} \approx \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}$$

имеет абсолютную погрешность $|\Delta z|$, которая при малых приращениях Δx, Δy, если пренебречь величинами, значительно меньшими, чем Δx, Δy, удовлетворяет соотношениям

$$|\Delta z| \approx |dz| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{y}\right| + \left|\frac{\Delta x}{y^2}\Delta y\right|.$$

Соответственно относительная погрешность удовлетворяет соотношениям

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{dz}{z}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Таким образом, при малых Δx и Δy можно считать, что *относительная погрешность частного не превышает сумму относительных погрешностей делимого и делителя.*

Примечание. Вопрос о точных оценках величин, которыми мы пренебрегали, решается на основании формулы Тейлора для функций многих переменных. Об этом будет идти речь в § 8.10.

§ 8.7. Касательная плоскость. Геометрический смысл дифференциала

Пусть задана поверхность S, описываемая функцией

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

имеющей непрерывные частные производные на некоторой области плоскости x, y (можно считать, что f дифференцируема в каждой точке области).

Касательной плоскостью к поверхности S в ее точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ называется плоскость, имеющая уравнение

$$Z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0), \tag{2}$$

где X, Y, Z — текущие координаты, а $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ — значения частных производных от f в точке $P_0 = (x_0, y_0)$.

Обозначим плоскость (2) через Π. Она проходит через точку M_0 поверхности S и обладает свойством, отличающим ее от других плоскостей, проходящих через M_0.

Пусть $P = (x, y)$ есть точка плоскости x, y, близкая к $P_0 = (x_0, y_0)$ (рис. 96). Прямая, проходящая через P параллельно оси z, пересекает Π в точке T, а поверхность S — в точке M. Аппликата M равна

$$z = f(x, y),$$

аппликата же T равна

$$Z = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

Расстояние между точками M и T равно

$$|MT| = \left| f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) \right|. \quad (3)$$

Расстояние же между точками P и P_0 равно

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Так как функция f по условию имеет непрерывные частные производные в точке (x_0, y_0), то она дифференцируема в этой точке. Поэтому правая часть (3) стремится к нулю быстрее, чем ρ, т. е.

$$|MT| = o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

Мы доказали, что *касательная плоскость* Π *к поверхности* S *в ее точке* $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *проходит через эту точку и обладает свойством: расстояние в направлении оси* z *от произвольной точки* $(x, y, f(x, y))$ *поверхности* S *до* Π *есть* $o(\rho)$ $(\rho \to 0)$, *где* ρ — *расстояние между точками* (x, y) *и* (x_0, y_0) *плоскости* x, y.

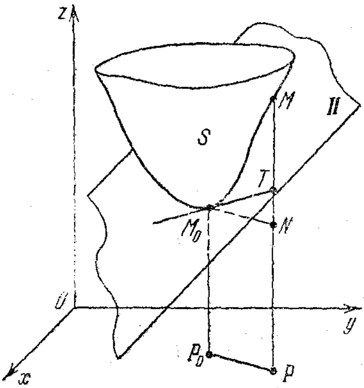

Рис. 96.

Это свойство является характерным, для касательной плоскости, потому что если некоторая плоскость Π' вида

$$Z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \qquad (z_0 = f(x_0, y_0))$$

обладает этим свойством, т. е. если для нее выполняется равенство

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0) = o(\rho) \qquad (\rho \to 0)$$

или, что все равно, равенство

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(\rho) \qquad (\rho \to 0),$$

то, как мы знаем, f дифференцируема в (x_0, y_0) и

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0,$$

т. е. плоскость Π' есть касательная плоскость к S $(\Pi' = \Pi)$.

Таким образом, для того чтобы поверхность S имела касательную плоскость в ее точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была дифференцируемой в точке $P_0=(x_0, y_0)$.

Правая часть уравнения (2) есть дифференциал f в точке (x_0, y_0)

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0),$$

соответствующий приращениям $(x-x_0, y-y_0)$. Левая же часть (2) есть соответствующее приращение аппликаты касательной плоскости П.

Таким образом, с геометрической точки зрения дифференциал функции f в точке (x_0, y_0) для приращений $(x-x_0, y-y_0)$ есть приращение аппликаты точки касательной плоскости к поверхности $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) для тех же приращений.

Замечание. Если функция $z=f(x, y)$ не дифференцируема в точке (x_0, y_0), хотя и имеет в ней частные производные, то плоскость (2) не имеет смысла называть касательной плоскостью к поверхности $z=f(x, y)$ в указанной точке—для нее разность $f(x, y)-Z$ не стремится к нулю при $\rho\to 0$ быстрее ρ. Например, если функция $z=f(x, y)$ равна нулю на осях x и y и единице в остальных точках плоскости x, y, то $f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0$ и уравнение (2) есть $Z=0$ и разность $f(x, y)-Z=f(x, y)-0=1$ для всех точек (x, y), не лежащих на осях x и y. Таким образом, эта разность даже не стремится к нулю при $\rho\to 0$.

§ 8.8. Производная сложной функции. Производная по направлению. Градиент

8.8.1. Производная сложной функции. Ограничимся рассмотрением функций трех переменных, определенных на открытом множестве $G\subset R_3$ (определение открытого множества см. § 8.3, мелкий шрифт). Распространение излагаемых здесь фактов на n-мерный случай производится аналогично.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$u=f(x, y, z) \tag{1}$$

дифференцируема в точке $(x, y, z)\in G$, а функции

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \tag{2}$$

зависящие от скалярного параметра t, имеют производную в t. Тогда производная по t от сложной функции (производная от f вдоль кривой (2)) $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ вычисляется по формуле

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + $$
$$+ f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t),$$

или, короче,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{3}$$

В самом деле, вследствие дифференцируемости f в (x, y, z), каково бы ни было достаточно малое приращение $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0). \tag{4}$$

Значению t, которому при помощи равенств (2) соответствует точка (x, y, z), придадим приращение Δt. Оно вызовет приращения Δx, Δy, Δz функций (2). Если именно их подставить в (4), то получим приращение $F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta u$ функции F в точке t. После деления (4) на Δt и перехода к пределу получим

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

т. е. (3), потому что функции (2) имеют производные, а

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t} = \varepsilon(\rho) \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \to$$
$$\to 0 \cdot \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = 0 \quad (\Delta t \to 0)$$

($\Delta t \to 0$ влечет $\rho \to 0$).

З а м е ч а н и е 1. Если функции x, y, z зависят от многих переменных, например от двух:

$$x = \varphi(t, \tau), \quad y = \psi(t, \tau), \quad z = \chi(t, \tau),$$

то, фиксируя сначала τ, а затем t, на основании (3) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

8.8.2. Производная по направлению.

Теорема 2. *Если функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то для нее имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора* $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, *выражаемая формулой*

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \tag{5}$$

(α, β, γ — *углы, которые вектор* $\boldsymbol{n}$ *составляет с осями* x, y, z).

Доказательство. Согласно определению производной по направлению (см. § 8.4) и в силу предыдущей теоремы

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma) - f(x, y, z)}{t} =$$

$$= \left[\frac{d}{dt} f(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где частные производные взяты в точке (x, y, z).

Замечание 2. Теорема 2 не обратима, т. е. если функция f имеет производную в точке (x, y, z) по всем направлениям, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. В качестве примера можно рассмотреть функцию f от двух переменных, равную нулю всюду, кроме точек $y = x^2$ $(x > 0)$, где она равна единице.

Если $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ — уравнения гладкой кривой Γ, где параметр s — длина дуги, то величины

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s), \quad \frac{dy}{ds} = \psi'(s), \quad \frac{dz}{ds} = \chi'(s)$$

суть направляющие косинусы вектора касательной к Γ. Поэтому величина

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s) + \frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s) = \frac{d}{ds} f(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)),$$

где f — дифференцируемая функция, есть производная по направлению указанного касательного вектора. Говорят еще, что $\frac{\partial f}{\partial s}$ есть производная от f вдоль Γ.

8.8.3. Градиент функции. Введем вектор

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \tag{6}$$

называемый *градиентом* функции f в точке (x, y, z).

Формула (5) говорит, что *производная от f в точке (x, y, z) по направлению единичного вектора $\boldsymbol{n}$ равна проекции градиента в этой точке на направление $\boldsymbol{n}$*:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{n}) = \operatorname{grad}_n f. \tag{7}$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial n} \leqslant |\operatorname{grad} f| \tag{8}$$

для любого вектора $\boldsymbol{n}$. Если $\operatorname{grad} f = 0$, что обычно бывает только в исключительных точках, то $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{n}$. Если же $\operatorname{grad} f \neq 0$ (одна из частных производных от f не равна нулю), то (8) есть строгое неравенство для всех единичных векторов $\boldsymbol{n}$, за исключением единичного вектора $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$, направленного в сторону $\operatorname{grad} f$ $\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_0} = |\operatorname{grad} f| > 0\right)$. Таким образом,

$$\cos\alpha_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \tag{9}$$

Из сказанного следует, что *градиент функции f в точке (x, y, z) можно определить как вектор, обладающий следующими двумя свойствами*:

1) *длина его равна максимальной величине производной по направлению* $\frac{\partial f}{\partial n}$ *в* (x, y, z) (для дифференцируемой в (x, y, z) функции этот максимум существует и есть число неотрицательное);

2) *если его длина не равна нулю, то он направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{n}$, вдоль которого производная* $\frac{\partial f}{\partial n}$ *максимальна.*

Пример 1. Пусть температура u тела G есть функция от точки (x, y, z):

$$u=f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in G \qquad (G \subset R_3)$$

и пусть $\operatorname{grad} u \neq 0$ в некоторой определенной точке (x, y, z). Выпустим из этой точки вектор, равный $\operatorname{grad} u$. Вдоль этого вектора скорость возрастания температуры u в (x, y, z) наибольшая, равная положительной величине $|\operatorname{grad} u|$.

Если же в рассматриваемой точке $\operatorname{grad} u=0$, то в любом направлении, выходящем из этой точки, скорость изменения температуры равна нулю.

Задача. Найти градиент функции $u=x^2+y^6$ в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

8.8.4. Однородные функции. Введем в рассмотрение так называемые однородные функции. Пусть задан вектор $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где λ_i — произвольные числа. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданная на R_n, называется *λ-однородной степени m*, если для всякого $t>0$ и любых $x=(x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ выполняется равенство:

$$f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)=t^{m\frac{|\lambda|}{n}} f(x_1, \ldots, x_n), \tag{10}$$

где $|\lambda|=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|$.

Если $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=1$, то f называется просто *однородной функцией степени m*. Ниже будем считать, что частные производные f'_{x_i} $(i=1, \ldots, n)$ непрерывны в R_n.

Теорема 3. *Для того чтобы функция f была λ-однородной степени m, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)=m\frac{|\lambda|}{n} f(x_1, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Если функция f однородная степени m, то мы получаем известную теорему Эйлера.

Доказательство. Необходимость. Пусть f является λ-однородной функцией степени m; тогда, дифференцируя тождество (10) по t как сложную функцию, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)}{\partial x_i} \lambda_i x_i t^{\lambda_i-1}=m\frac{|\lambda|}{n} t^{m\frac{|\lambda|}{n}-1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Полагая в этом равенстве $t=1$, получаем равенство (11).

Достаточность. Пусть теперь имеет место равенство (11). Зафиксируем точку $x=(x_1, \dots, x_n)$ и составим функцию

$$\varphi(t)=t^{-m\frac{|\lambda|}{n}} f(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n). \tag{12}$$

Дифференцируя эту функцию по t, находим:

$$\varphi'(t)=\frac{t^{m\frac{|\lambda|}{n}}\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n)\lambda_i x_i t^{\lambda_i-1}-}{t^{2m\frac{|\lambda|}{n}}}+$$

$$+\frac{-m\frac{|\lambda|}{n}t^{m\frac{|\lambda|}{n}-1}f(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n)}{t^{2m\frac{|\lambda|}{n}}}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t^{\lambda_i}x_i f'_{x_i}(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n)-m\frac{|\lambda|}{n}f(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n)}{t^{m\frac{|\lambda|}{n}+1}}=0.$$

Последнее равенство имеет место в силу (11) для точки $(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n)$.

Таким образом, $\varphi'(t)=0$ и $\varphi(t)=c$. Постоянную c находим из условия, что при $t=1$ $\varphi(1)=f(x_1, \dots, x_n)$. Значит, из (12) имеем

$$f(t^{\lambda_1}x_1, \dots, t^{\lambda_n}x_n)=t^{m\frac{|\lambda|}{n}}f(x_1, \dots, x_n),$$

т. е. функция f является λ-однородной степени m.

§ 8.9. Дифференциал функции. Дифференциал высшего порядка

Основные рассуждения в этом параграфе ведутся в n-мерном пространстве. Мы думаем, что это не затруднит читателя.

Рассмотрим функцию

$$W=f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \dots, x_n), \tag{1}$$

заданную на некотором открытом множестве $G\subset R_n$ (см. § 8.3). Ее можно бесконечным числом способов записать в виде

$$W=\varphi(\boldsymbol{u})=\varphi(u_1, \dots, u_m), \tag{2}$$

где

$$u_j=\psi_j(\boldsymbol{x}) \quad (j=1, \dots, m;\ \boldsymbol{x}\in G). \tag{3}$$

Ниже мы будем употреблять следующую терминологию: переменная W есть функция от независимой векторной переменной $\boldsymbol{x}$; эта же переменная W есть функция от *зависимой векторной переменной* $\boldsymbol{u}$. Последняя зависит от независимой переменной $\boldsymbol{x}$: каждому вектору $\boldsymbol{x}$ из G соответствует вектор $\boldsymbol{u}=(\psi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \psi_m(\boldsymbol{x}))$.

Таким образом, роль векторной переменной $\boldsymbol{x}$ здесь носит исключительный характер — она в приводимых ниже рассуждениях будет фигурировать *только как независимая переменная*.

Пусть функция f имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке $\boldsymbol{x}\in G$. Тогда, как мы знаем из § 8.5, она дифференцируема, т. е. приращение ее в этой точке может быть записано в виде

$$\Delta W=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}\Delta x_j+o(\rho)\quad(\rho\to 0), \tag{4}$$

$$\rho=|\Delta\boldsymbol{x}|=\left(\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j^2\right)^{1/2},$$

и ее дифференциал равен

$$dW=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Delta x_j. \tag{5}$$

Для независимых $x_1, \ldots, x_n$ полагают

$$\Delta x_j=dx_j\quad(j=1, \ldots, n) \tag{6}$$

и называют эти величины не только приращениями независимых переменных x_j, но и их *дифференциалами*. Мы будем их называть *независимыми дифференциалами* в знак того, что они не зависят от $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$. Формально «независимость» величин dx_j будет проявляться в том, что при дифференцировании (по $x_1, \ldots, x_n$) они будут рассматриваться как *постоянные* $(d(dx_j)=0)$.

В силу соглашения (6) дифференциал W может быть записан в форме

$$dW=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}dx_j. \tag{7}$$

Ясно, что dW есть величина, зависящая, вообще говоря, от $x_1, \ldots, x_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$.

Для любых двух функций u и v, имеющих непрерывные частные производные в точке $\boldsymbol{x}$, справедливы свойства

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{8}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{10}$$

и при этом частные производные от функций, стоящих в скобках, непрерывны в точке $\boldsymbol{x}$.

Докажем, например, третье из этих равенств

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right) dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}}{v^2} dx_j =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(v\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j - u\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Непрерывность $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right)$ видна из третьего члена цепи.

Дифференциал от функции W называют еще *дифференциалом первого порядка*, потому что приходится еще рассматривать дифференциалы высших порядков.

Пусть теперь функция W имеет вторые непрерывные частные производные. По определению *второй дифференциал* от нее, соответствующий независимым приращениям (дифференциалам) $dx_1, \ldots, dx_n$, определяется равенством

$$d^2W = d(dW), \tag{11}$$

где считается, что обе операции d в правой части (11) берутся для указанных независимых $dx_1, \ldots, dx_n$, которые должны рассматриваться как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$). Таким образом,

$$d^2W = d\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(d\frac{\partial W}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j} dx_i\,dx_j. \tag{12}$$

Так как $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j\,\partial x_i}$, то второй дифференциал представляет собой квадратичную форму относительно независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$. *Квадратичной* *формой* от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется функция вида $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$, где $a_{ik}=a_{ki}$.

Вообще дифференциал порядка l от W для независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$ определяется по индукции при помощи рекуррентного соотношения

$$d^lW = d(d^{l-1}W) \quad (l=2, 3, \ldots), \tag{13}$$

где d^l, d, d^{l-1} берутся для указанных независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$, которые к тому же рассматриваются при вычислениях как постоянные (не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$).

Рассуждая, как в (12), легко получим, что

$$d^3W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 W}{\partial x_k\,\partial x_i\,\partial x_j}\,dx_k\,dx_i\,dx_j.$$

Так как мы предполагаем, что функция f имеет непрерывные частные производные, то запись дифференциалов можно упростить.

Например, для функции от двух переменных $u=f(x, y)$ имеем

$$d^2u = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{y^2}dy^2,$$

$$d^3u = d(d^2u) = $$
$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Применяя метод математической индукции, легко получим, что

$$d^nu = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\,\partial y}dx^{n-1}dy + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}dx^{n-k}dy^k + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n.$$

Символически это можно записать так:

$$d^nu = d^nf = \left\{\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right\}^n f,$$

где в правой части мы сначала возводим выражение в степень n, а затем подписываем f при символе ∂^n.

В многомерном случае имеет место аналогичная символическая формула

$$d^m f = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right\}^m f. \tag{14}$$

Мы определили понятие дифференциала функции W в терминах независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (или независимой векторной переменной $\boldsymbol{x}$). Но пусть, как это было объяснено в начале этого параграфа, W рассматривается теперь как функция от *зависимой* векторной переменной $\boldsymbol{u}=(u_1, \ldots, u_m)$. Возникает вопрос, как выражаются дифференциалы первого и высшего порядков в терминах этой переменной $\boldsymbol{u}$. Начнем изучение этого вопроса в случае дифференциала первого порядка.

Будем предполагать, что функции $\varphi(\boldsymbol{u})$ и $\psi_j(\boldsymbol{x})$ $(j=1, \ldots, m)$, о которых шла речь в начале параграфа, имеют непрерывные частные производные. Тогда

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) dx_j =$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_l} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} dx_j = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_l} du_l, \tag{15}$$

и мы получили, как в случае одной переменной, что первый дифференциал от W выражается через зависимые переменные так же, как через независимые. В этом проявляется *инвариантность формы первого дифференциала.*

Чтобы исследовать поставленный вопрос в случае второго дифференциала, будем предполагать, что функции φ и ψ_j имеют непрерывные частные производные второго порядка.

Дифференцируя обе части (15), приняв во внимание свойства (8) и (9), получим (пояснения ниже)

$$d^2W = d(dW) = \sum_{l=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_l} du_l \right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_l} du_j du_l + \frac{\partial W}{\partial u_l} d^2 u_l \right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_l} du_j du_l + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_l} d^2 u_l. \tag{16}$$

Во втором равенстве этой цепи мы воспользовались свойством (8), в третьем же — свойством (9), и, кроме того, тем фактом, что форма первого дифференциала сохраняется и для зависимых переменных u_j. Мы видим, что второй дифференциал от W, выраженный в терминах зависимых переменных u_j, существенно распадается на два слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратичную форму, аналогичную форме (12), где d^2W выражалось через независимые переменные. Второе же слагаемое представляет собой некоторый добавок, с которым надо считаться: если u_j $(j=1, \ldots, m)$ не является линейной функцией от x_j, то этот добавок отнюдь не равен нулю.

Отметим, что из наших рассуждений следует, что если выражение (16) взято для $dx_1, \ldots, dx_n$, которые фигурируют в выражении (12), то оба эти выражения тождественно равны, каковы бы ни были $\boldsymbol{x}$, для которых существуют указанные непрерывные частные производные второго порядка и каковы бы ни были независимые dx_i.

Вычисление дифференциалов d^3W, d^4W, ... через зависимые переменные u_j производится подобным образом последовательно. Приходится считаться с тем фактом, что выражения для них становятся все более громоздкими.

§ 8.10. Формула Тейлора

Ограничимся рассмотрением функции от двух переменных. Пусть $u=f(x, y)$ имеет в окрестности точки $P_0 = (x_0, y_0)$ непрерывные производные всех порядков до l-го включительно. Возьмем в этой окрестности точку $P_1 = (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Соединим точки P_0 и P_1 отрезком прямой, уравнение которого можно записать в параметрической форме следующим образом:

$$x=x_0+t\Delta x, \quad y=y_0+t\,\Delta y \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Тогда вдоль этого отрезка наша функция $u=f(x, y)$ будет функцией от одного переменного t:

$$f(x, y)=f[x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y]=F(t). \tag{1}$$

Легко видеть, что разность

$$\Delta f(P_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=F(1)-F(0). \tag{2}$$

Формула Маклорена для функции $F(t)$ в окрестности точки $t_0=0$ имеет вид

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\ldots+\frac{F^{(l-1)}(0)}{(l-1)!}t^{l-1}+\frac{F^{(l)}(\theta)}{l!}t^l$$
$$(0<\theta<t).$$

Полагая $t=1$, получим

$$F(1)-F(0)=\sum_{k=1}^{l-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(l)}(\theta)}{l!},\quad \text{где } 0<\theta<1. \tag{3}$$

Вычислим производные функции $F(t)$ через $f(x, y)$. Из соотношения (1) имеем

$$F'(t)=\frac{\partial f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

откуда при $t=0$ получаем

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}\Delta y=df(P_0).$$

Совершенно аналогично

$$F''(t)=f''_{x^2}(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\Delta x^2+$$
$$+2f''_{xy}(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\Delta x\,\Delta y+$$
$$+f''_{y^2}(x_0+t\Delta x,\ y_0+t\Delta y)\Delta y^2,\qquad F''(0)=d^2f(P_0).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$F'''(0)=d^3f(P_0),\ \ldots,\ F^{(l-1)}(0)=d^{l-1}f(P_0).$$

В силу этого из (2) и (3) имеем

$$\Delta f(P_0)=\frac{df(P_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^{l-1}f(P_0)}{(l-1)!}+\frac{1}{l!}d^lf(x_0+\theta\Delta_x,\ y_0+\theta\Delta y). \tag{4}$$

Формула (4) называется *формулой Тейлора* для функции $u=f(x, y)$. По внешнему виду она такая же, как и для функции от одного переменного, но в развернутом виде она гораздо сложнее.

Для случая функции от n переменных ($n>2$) формула Тейлора записывается в том же виде (4).

При $l=1$ формула Тейлора для функции f от n переменных имеет вид

$$f(x)-f(x^0)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x^0+\theta(x-x^0)}(x_j-x_j^0)\quad(0<\theta<1),$$

где символ $(\ )_a$ означает, что функция в скобках вычисляется в точке $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$. Эта формула представляет собой обобщение теоремы Лагранжа о среднем на многомерный случай.

При $l=2$ и $n=2$ формула (4) в развернутом виде записывается так:

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)^2+\right.$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0))(x-x_0)(y-y_0)+$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+\theta(x-x_0),\ y_0+\theta(y-y_0))(y-y_0)^2\right].$$

При $l=2$ и произвольном n формула (4) выглядит следующим образом:

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\boldsymbol{x}^0}(x_i-x_i^0)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_{\boldsymbol{x}^0+\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0),$$

где $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

§ 8.11. Замкнутое множество

Множество $A\subset R_n=R$ называется *ограниченным*, если существует число $M>0$ такое, что

$$|\boldsymbol{x}|\leqslant M \quad \forall \boldsymbol{x}\in A,$$

иначе говоря, если существует шар в R с центром в нулевой точке, содержащий в себе A.

Множество A называется *замкнутым*, если из того, что какая-либо последовательность точек $\boldsymbol{x}^k$ $(k=1, 2, \ldots)$, принадлежащих к A, сходится к точке $\boldsymbol{x}^0\in R$ $(\boldsymbol{x}^k\to\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^k\in A)$ следует, что $\boldsymbol{x}^0$ принадлежит к A $(\boldsymbol{x}^0\in A)$.

В этом определении не утверждается, что A содержит в себе сходящуюся последовательность. В нем говорится только, что если в A существует сходящаяся последовательность, то точка, к которой она сходится, принадлежит к A.

Это показывает, что надо считать, что пустое множество замкнуто. Все пространство R_n тоже, очевидно, замкнуто, но неограничено.

Рассмотрим в качестве примера эллипсоид в трехмерном пространстве

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c>0), \tag{1}$$

т. е. множество точек $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющих уравнению (1). Обозначим это множество через B. Это ограниченное множество, потому что для любой его точки $(x,\ y,\ z)$ выполняется неравенство

$$x^2+y^2+z^2\leqslant m\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=m\cdot 1=m,$$

где $m\geqslant a^2,\ b^2,\ c^2$. Оно также замкнуто, потому что если задать произвольную последовательность точек $(x_k,\ y_k,\ z_k)\in B$, стремящуюся к точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, то эта последняя тоже принадлежит к B. Ведь из равенства

$$\frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}+\frac{z_k^2}{c^2}=1 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

после перехода к пределу при $k\to\infty$ следует равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

показывающее, что $(x_0,\ y_0,\ z_0)\in B$.

Рассмотрим теперь более обширное множество A, состоящее из точек $(x,\ y,\ z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1. \tag{2}$$

Множество A, очевидно, тоже ограничено. Оно и замкнуто, потому что если

$$(x_k,\ y_k,\ z_k)\in A \quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

т. е.

$$\frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}+\frac{z_k^2}{c^2}\leqslant 1$$

и $(x_k,\ y_k,\ z_k)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)$, то, очевидно,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}+\frac{z_k^2}{c^2}\right)=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\leqslant 1,$$

т. е. $(x_0,\ y_0,\ z_0)\in A$.

В связи с этим интересно рассмотреть еще третий пример множества A' точек (x, y, z) с координатами, удовлетворяющими строгому неравенству

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1. \tag{3}$$

Множество A' открытое (см. § 8.3), оно не замкнуто. Возьмем, например, последовательность точек $(\alpha_k, 0, 0)$, где α_k стремится к числу a, строго возрастая. Тогда $(\alpha_k, 0, 0)\in A'$ $(k=1, 2, \ldots)$ и $(\alpha_k, 0, 0)\to(a, 0, 0)$. Однако предельная точка $(a, 0, 0)$ не принадлежит к A'.

Рассмотренные примеры легко обобщаются. Пусть на всем пространстве R_n задана непрерывная функция $F(x)=F(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда множество B всех точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполняется равенство

$$F(x)=F(x_1, \ldots, x_n)=C, \tag{4}$$

где C — произвольное число, замкнуто.

В самом деле, может случиться, что нет вовсе точек x, удовлетворяющих равенству (4), т. е. B — пустое множество, но пустое множество замкнуто. Пусть теперь B не пустое множество и некоторая последовательность точек $\{x^k\}$, принадлежащих к B, сходится к точке $x^0\in R_n$ (если B состоит даже из одной точки x^0, то можно уже построить сходящуюся последовательность точек, принадлежащих к B, а именно, $\{x^0, x^0, \ldots\}$). Тогда $F(x^k)=C$ $(k=1, 2, \ldots)$, и в силу непрерывности F в точке x^0

$$\lim_{k\to\infty} F(x^k)=F(x^0)=C,$$

Но тогда $x^0\in B$, т. е. множество B замкнуто.

Подобным образом множество всех точек x, удовлетворяющих неравенству $F(x)\leqslant C$, где C — произвольное число, а F — функция, непрерывная на R_n, замкнуто, потому что из соотношений

$$F(x^k)\leqslant C \quad (k=1, 2, \ldots), \quad x^k\to x^0$$

вследствие непрерывности F на R_n следует: $F(x^0)\leqslant C$.

В силу сказанного n-мерный эллипсоид

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{a_k^2}=1 \quad (a_k>0) \tag{5}$$

есть замкнутое множество в R_n.

Замкнутым множеством в R_n является также n-мерный объемный эллипсоид

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{a_k^2}\leqslant 1. \tag{6}$$

Однако множество

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} < 1, \tag{7}$$

которое естественно назвать n-мерным открытым объемным эллипсоидом, не замкнуто. В этом можно убедиться, рассуждая, как в случае формулы (3). Это множество открытое (см. § 8.3).

Пусть A есть произвольное множество, принадлежащее к R_n, и x^0 — *произвольная точка* R_n $(A \subset R_n,\ x^0 \in R_n)$. *Может быть только три взаимно исключающих друг друга случая:*

1. Существует шар V_{x^0} (открытый) с центром в точке x^0, полностью принадлежащий к A $(V_{x^0} \subset A)$. В этом случае x^0 по определению есть *внутренняя точка множества* A (см. § 8.3).

2. Существует шар V_{x^0} с центром в x^0, все точки которого не принадлежат к A $(V_{x^0} \subset R_n \setminus A)$. В этом случае x^0 по определению есть *внешняя точка множества* A.

3. В любом шаре V_{x^0} с центром в x^0 имеются точки, принадлежащие и не принадлежащие к A. В этом случае x^0 по определению есть *граничная точка* множества A.

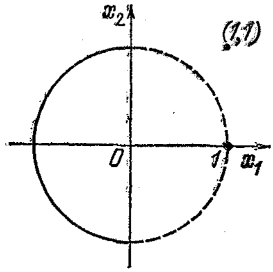

Рис. 97.

Множество A' всех внутренних точек множества A называется *открытым ядром* A. Это — открытое множество (см. § 8.3). Если A' не пусто, то каждую точку A' можно покрыть шаром с центром в ней, полностью принадлежащим к A. Если A' — пустое множество, то оно формально считается открытым.

Множество $\Gamma \equiv \partial A$ всех граничных точек A называется *границей множества* A. Это — замкнутое множество, потому что, если $x^k \to x^0$ и $x^k \in \Gamma$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то всякий открытый шар V_{x^0} с центром в x^0 содержит в себе некоторую точку x^k. Последнюю можно покрыть шаром V_{x^k} с центром в ней, полностью принадлежащим к V_{x^0} $(V_{x^k} \subset V_{x^0})$. Но в V_{x^k} имеются точки, принадлежащие и не принадлежащие к A, но тогда и в V_{x^0} имеются точки, принадлежащие и не принадлежащие к A. Следовательно, $x^0 \in \Gamma$.

Множество A'' всех внешних точек множества A, очевидно, открытое.

Граничные точки A могут принадлежать и не принадлежать к множеству A.

На рис. 97 множество $A \subset R_2$ состоит из точек (x_1, x_2):

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \quad x_1 \leqslant 0; \quad x_1^2 + x_2^2 < 1, \quad x_1 > 0; \quad x_1 = x_2 = 1.$$

Ясно, что A' — внутренность круга радиуса единица с центром в начале координат; Γ — точки окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и точка $(1, 1)$; A'' — это все точки вне окружности единичного радиуса, за исключением точки $(1, 1)$. Здесь правая половина окружности не принадлежит к A, но является частью границы Γ. Отметим, что данное множество A не является ни открытым, ни замкнутым.

Итак, если задано произвольное множество $A \subset R_n$, то по отношению к нему пространство R_n можно представить в виде суммы множеств, определенных выше, попарно не пересекающихся:

$$R_n = A' + \Gamma + A''.$$

Если в качестве множества A рассмотреть n-мерный замкнутый объемный эллипсоид (6), то A' есть открытый объемный эллипсоид (7), а Γ есть эллипсоид (5).

Если A—открытое множество, то $R_n \diagdown A$ замкнутое, и обратно. В самом деле, пусть A—открытое, и пусть $x^k \to x^0$, $x^k \in R_n \diagdown A$. Если бы точка x^0 принадлежала к A, то в силу того, что A—открытое множество, нашелся бы шар V_{x^0} (с центром в x^0), полностью принадлежащий к A. Но это невозможно, потому что в V_{x^0} имеются точки x^k, которые принадлежат к $R_n \diagdown A$. Таким образом, $x^0 \in R_n \diagdown A$ и $R_n \diagdown A$ замкнуто.

Пусть теперь A замкнуто и точка $x^0 \in R_n \diagdown A$. Если бы точка x^0 была граничной точкой A, то в любом шаре V_{x^0} с центром в x^0 были бы точки A. Тогда можно было бы построить последовательность точек $x^k \in A$, сходящуюся к x^0. Но тогда вследствие замкнутости A точка x^0 принадлежала бы к A, что противоречит предположению, что $x^0 \in R_n \diagdown A$. Мы доказали, что произвольная точка $x^0 \in R_n \diagdown A$ есть внутренняя точка $R_n \diagdown A$, т. е. что $R_n \diagdown A$—открытое множество.

Множество $A + \Gamma$ называется *замыканием* A и обозначается так:

$$\overline{A} = A + \Gamma.$$

Очевидно,

$$A' + \Gamma = A + \Gamma,$$

потому что, с одной стороны, $A' \subset A$, и, следовательно, $A' + \Gamma \subset \subset A + \Gamma$, а с другой, если $x \in A + \Gamma$, то либо $x \in \Gamma$, и тогда $x \in A' + \Gamma$, либо $x \in A$ и $\overline{x \in} \Gamma$, но тогда $x \in A' \subset A' + \Gamma$.

Далее, $\overline{A} = A + \Gamma$—замкнутое множество, потому что внешность $A + \Gamma = A' + \Gamma$—открытое множество.

Таким образом, чтобы получить $\overline{A}$, надо добавить к A все не принадлежащие к множеству A его граничные точки.

Если A замкнуто, то

$$A = A + \Gamma = \overline{A},$$

т. е. все граничные точки A принадлежат к A. Ведь $R_n \diagdown A$ открыто и каждая точка $x^0 \in R_n \diagdown A$ может быть покрыта шаром V_{x^0}, не содержащим в себе ни одной точки A. Но и обратно, если

$$A = A + \Gamma = \overline{A},$$

то A замкнуто, потому что если $x^k \to x^0$, $x^k \in A$ и если предположить, что $x^0 \overline{\in} A$, то получится противоречие, потому что тогда $x^0 \in \Gamma \subset A + \Gamma = A$.

Таким образом, *для того чтобы множество A было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы с ним совпадало его замыкание* ($A = \overline{A}$). В частности, $\overline{A}$ всегда замкнуто, и потому $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Наконец, отметим, что пустое множество и все пространство R_n являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами. Можно доказать, что в остальных случаях, если множество A открыто, то уж не замкнуто, а если замкнуто, то не открыто.

§ 8.12. Непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве

Пусть A есть пока произвольное множество пространства $R = R_n$, и пусть на A определена функция $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Может случиться, что функция f определена не на всей окрестности точки $\boldsymbol{x}^0 \in \overline{A}$ ($\overline{A}$ — замыкание A), а только на некоторой ее части. В этом случае возникает понятие предела функции f в точке $\boldsymbol{x}^0 \in \overline{A}$ по множеству A.

Число B называется пределом функции f в точке $\boldsymbol{x}^0 \in \overline{A}$ по множеству A, если

$$\lim_{\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{x}^k \in A} f(\boldsymbol{x}^k) = B,$$

какова бы ни была последовательность точек $\boldsymbol{x}^k \in A$, сходящаяся к $\boldsymbol{x}^0$.

По определению, функция f *непрерывна в точке $\boldsymbol{x}^0 \in A$ по множеству A, если имеет место равенство*

$$\lim_{\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{x}^k \in A} f(\boldsymbol{x}^k) = f(\boldsymbol{x}^0), \tag{1}$$

какова бы ни была последовательность точек $\boldsymbol{x}^k \in A$, сходящаяся к $\boldsymbol{x}^0$.

Приведенное определение непрерывности можно сформулировать и на языке ε, δ: функция f непрерывна в точке $\boldsymbol{x}^0 \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0)| < \varepsilon \quad \forall \boldsymbol{x} \in A,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| < \delta.$$

Теперь мы будем предполагать, что A есть ограниченное замкнутое множество пространства R и заданная на A функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна на этом множестве. В этих предположениях можно доказать следующие замечательные свойства:

1) Функция f ограничена на множестве A.

2) Функция f достигает на множестве A максимума и минимума, т. е. существуют в A точки $\boldsymbol{x}^0$ и $\boldsymbol{y}^0$ такие, что

$$f(\boldsymbol{x}^0) = \max_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}), \quad f(\boldsymbol{y}^0) = \min_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}).$$

3) Функция f равномерно непрерывна на множестве A, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon$$

для любых $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''\in A$, удовлетворяющих неравенствам $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta$.

Как мы видим, свойства 1), 2), 3) обобщают известные уже нам свойства непрерывной функции $f(x)$ от одной переменной x, заданной на отрезке $[a, b]$. Подчеркнем, что отрезок $[a, b]$ есть ограниченное замкнутое одномерное множество. Ведь если какая-либо последовательность точек (чисел) x_k, принадлежащих к отрезку $[a, b]$, сходится к некоторой точке (числу) x_0, то эта точка принадлежит к $[a, b]$ $(x_0\in[a, b])$.

Доказательство свойств 1), 2), 3) совершенно аналогично доказательству их для отрезка $[a, b]$, приведенному в §§ 3.5 и 3.7. Оно всецело базируется на следующей лемме, обобщающей соответствующую одномерную теорему Больцано—Вейерштрасса из § 2.9.

Лемма. *Из всякой ограниченной последовательности точек* $\boldsymbol{x}^k=(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ $(k=1, 2, \ldots)$ *можно выделить подпоследовательность* $\{\boldsymbol{x}^{k_l}\}$ $(l=1, 2, \ldots)$, *сходящуюся к некоторой точке* $\boldsymbol{x}^0$:

$$|\boldsymbol{x}^{k_l}-\boldsymbol{x}^0|\to 0 \qquad (l\to\infty).$$

Доказательство. Так как последовательность $\{\boldsymbol{x}^k\}$ ограничена, то существует число M такое, что

$$M\geqslant|\boldsymbol{x}^k|\geqslant|x_j^k| \qquad (j=1, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots).$$

Это показывает, что координаты точек $\boldsymbol{x}^k$ также ограничены. Первая координата образует ограниченную последовательность $\{x_1^k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, и на основании одномерной теоремы Больцано—Вейерштрасса найдется подпоследовательность k_{l_1} натуральных чисел и некоторое число x_1^0 такие, что $x_1^{k_{l_1}}\to x_1^0$ $(l_1\to\infty)$. Вторую координату x_2^k рассмотрим только для найденных натуральных k_{l_1}. Подпоследовательность $\{x_2^{k_{l_1}}\}$ ограничена, поэтому из нее также можно выбрать подпоследовательность $\{x_2^{k_{l_2}}\}$ и число x_2^0 такие, что $x_2^{k_{l_2}}\to x_0^2$. Так как $\{k_{l_2}\}$ есть подпоследовательность $\{k_{l_1}\}$, то имеет место одновременно $x_1^{k_{l_2}}\to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}}\to x_2^0$. Продолжая этот процесс, на n-м его этапе получим подпоследовательность натуральных чисел $k_{l_n}=k_l$ и систему чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ такие, что одновременно

$$x_1^{k_l}\to x_1^0,\quad x_2^{k_l}\to x_2^0,\ \ldots,\ x_n^{k_l}\to x_n^0 \qquad (l\to\infty).$$

Полагая $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, получим утверждение леммы.

Доказательство свойства 1). Допустим, что f не ограничена на замкнутом ограниченном множестве A. Тогда для каждого натурального числа m существует точка $\boldsymbol{x}^m\in A$ такая, что

$$|f(\boldsymbol{x}^m)|>m \qquad (m=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Так как множество A ограничено, то последовательность точек $\{x^m\}$ также ограничена и, в силу леммы, из нее можно выделить подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x^0. По условию множество A замкнуто, поэтому точка $x^0 \in A$. Но в точке x^0 функция f непрерывна и потому

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ x^{m_k}\in A}} f(x^{m_k}) = f(x^0). \tag{3}$$

Свойство (3) противоречит свойству (2). Поэтому f может быть только ограниченной на замкнутом ограниченном множестве A.

Доказательство свойства 2). По свойству 1) непрерывная на замкнутом ограниченном множестве A функция ограничена, следовательно, она ограничена сверху некоторым числом K:

$$f(x) \leqslant K \qquad (x \in A).$$

Но тогда существует точная верхняя грань f на A:

$$\sup_{x\in A} f(x) = M. \tag{4}$$

Число M обладает следующим свойством: для любого натурального m найдется в множестве A точка $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m)$ такая, что

$$M - \frac{1}{m} < f(x^m) \leqslant M \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{x^m\}$, как принадлежащая к ограниченному замкнутому множеству A, ограничена:

$$|x^m| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^m|^2} \leqslant K_1 \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

и потому из нее можно выделить подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x^0 \in A$. Последнее заключение вытекает из замкнутости множества A.

Но функция f непрерывна на множестве A, следовательно, она непрерывна в точке x^0, поэтому

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ x^{m_k}\in A}} f(x^{m_k}) = f(x^0).$$

С другой стороны,

$$M - \frac{1}{m_k} < f(x^{m_k}) \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $k \to \infty$, получаем

$$M \leqslant f(x^0) \leqslant M,$$

т. е.

$$f(x^0) = M.$$

Таким образом, верхняя грань (4) достигается в точке $x^0 \in A$, т. е. функция f достигает в точке $x^0 \in A$ максимума на множестве A.

Итак, мы доказали, что существует точка $x^0 \in A$, для которой

$$\max_{x \in A} f(x) = f(x^0).$$

Другая часть свойства 2) о минимуме доказывается аналогично.

Доказательство свойства 3). Допустим, что свойство неверно. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется пара точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} < \delta,$$

для которых

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Зададим теперь последовательность положительных чисел $\delta_m \to 0$ при $m \to \infty$. Для каждого δ_m найдутся точки $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m)$, $y^m = (y_1^m, \ldots, y_n^m) \in A$ такие, что

$$|x^m - y^m| < \delta_m, \quad \text{но} \quad |f(x^m) - f(y^m)| \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Так как точки последовательности $\{x^m\}$ принадлежат к ограниченному множеству A, то эта последовательность ограничена, и из нее, по лемме, можно выделить подпоследовательность $\{x^{m_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x^0 \in A$ (в силу замкнутости множества A).

Так как $|x^{m_k} - y^{m_k}| \to 0$ при $k \to \infty$, то подпоследовательность $\{y^{m_k}\}$ также сходится к точке x^0, потому что

$$|y^{m_k} - x^0| = |y^{m_k} - x^{m_k} + x^{m_k} - x^0| \leqslant |y^{m_k} - x^{m_k}| + |x^{m_k} - x^0|.$$

По условию функция f непрерывна на A и, следовательно, непрерывна в точке x^0.

Поэтому

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ x^{m_k} \in A}} f(x^{m_k}) = \lim_{\substack{k \to \infty \\ y^{m_k} \in A}} f(y^{m_k}) = f(x^0).$$

Теперь, переходя к пределу в (5) при $k \to \infty$, получаем

$$\varepsilon \leqslant \lim_{\substack{k \to \infty \\ x^{m_k}, y^{m_k} \in A}} |f(x^{m_k}) - f(y^{m_k})| = |f(x^0) - f(x^0)| = 0$$

и мы пришли к противоречию: $\varepsilon \leqslant 0$.

§ 8.13. Экстремумы

Пусть на области (открытое связное множество) G задана функция $u = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка G. Говорят, что функция $u = f(x)$ имеет *локальный максимум* (*минимум*) в точке x^0, если $\exists$ окрестность этой точки такая, что $\forall \boldsymbol{x}$ из этой окрестности имеет место неравенство

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}^0) \quad (f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}^0)). \tag{1}$$

Точку $\boldsymbol{x}^0$ будем называть *точкой локального максимума* (*минимума*), а соответствующее значение функции $f(\boldsymbol{x}^0)$ *максимальным* (*минимальным*) *значением функции*. Локальные максимум и минимум объединяются общим названием «*локальный экстремум*». Из определения экстремума вытекает, что в достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$ приращение функции $\Delta u = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0)$ не меняет знака:

$\Delta u \geqslant 0$ в случае локального минимума (min);

$\Delta u \leqslant 0$ в случае локального максимума (max).

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $u = f(\boldsymbol{x})$ имеет локальный экстремум в точке $\boldsymbol{x}^0$. Тогда, если существуют частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ в точке $\boldsymbol{x}^0$, то все они обращаются в нуль в этой точке*:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Доказательство. Докажем, что $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_1} = 0$. Зафиксируем переменные $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$. Тогда получим функцию $u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ от одного переменного x_1, причем эта функция имеет локальный экстремум в точке x_1^0. Поэтому в силу необходимого условия экстремума для функции от одной переменной, заключаем, что производная от этой функции по переменной x_1 должна быть равна нулю в точке x_1^0. Но эта производная является частной производной функции $f(\boldsymbol{x})$ по переменной x_1 в точке $\boldsymbol{x}^0$, т. е.

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_1} = 0.$$

Другие случаи рассматриваются аналогично.

Следствие. *Если функция $u = f(\boldsymbol{x})$ имеет экстремум в точке $\boldsymbol{x}^0$ и дифференцируема в точке $\boldsymbol{x}^0$, то $df(\boldsymbol{x}^0) = 0$ или* $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{0}$.

Данное следствие вытекает из определения дифференциала и градиента.

Замечание. Условие (2) не является достаточным для того, чтобы в точке $\boldsymbol{x}^0$ был экстремум функции f.

Например, функция $u=x^2y$ имеет частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2$, которые обращаются в нуль в точке (0, 0). Однако точка (0, 0) не является точкой экстремума, так как в любой окрестности этой точки $\Delta u=x^2y-0=x^2y$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

В дальнейшем точки, в которых существуют непрерывные частные производные от f, удовлетворяющие системе (2), будем называть *стационарными точками*.

Перейдем к получению достаточных условий экстремума. Пусть функция $u=f(\boldsymbol{x})$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по всем переменным, и пусть $\boldsymbol{x}^0$ — стационарная точка, т. е. $df(\boldsymbol{x}^0)=0$. Тогда, разлагая функцию $u=f(\boldsymbol{x})$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$, получим

$$\Delta f(\boldsymbol{x}^0)=df(\boldsymbol{x}^0)+\frac{1}{2!}d^2f(\boldsymbol{x}^0+\theta\Delta\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}d^2f(\boldsymbol{x}^0+\theta\Delta\boldsymbol{x})=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}^0+\theta\Delta\boldsymbol{x})\,\Delta x_i\Delta x_j=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}^0)+\varepsilon_{ij})\,\Delta x_i\Delta x_j=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}^0)\,\Delta x_i\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}^0)\,\Delta x_i\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta\boldsymbol{x}),$$

где $0<\theta<1$, $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, $\rho=|\Delta\boldsymbol{x}|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$, $\alpha(\Delta\boldsymbol{x})\to 0$ при $\rho\to 0$.

Так как вторые производные непрерывны, то величины ε_{ij}, зависящие от $\Delta\boldsymbol{x}$, стремятся к нулю при $\rho=|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$, но тогда и $\max\limits_{i,j}|\varepsilon_{ij}|=\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$. Поэтому, учитывая, что $\frac{|\Delta x_i|}{\rho}\leqslant 1$, получаем

$$|\alpha(\Delta\boldsymbol{x})|=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\frac{\Delta x_j}{\rho}\right|\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1\cdot 1=n^2\varepsilon\to 0$$
$$(\rho\to 0).$$

Итак, мы доказали, что

$$\Delta f(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x}^0+\xi)-f(\boldsymbol{x}^0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\xi), \quad (3)$$

где

$$a_{ij}=a_{ji}=f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{x}^0),\quad \xi_i=\Delta x_i,\quad \xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$$

и

$$\alpha(\xi)\to 0 \quad \text{при } \rho=|\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\to 0.$$

Выражение

$$A(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j \quad (a_{ij}=a_{ji}) \qquad (4)$$

есть квадратичная форма относительно $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$. По знаку этой формы можно узнать с помощью формулы (3) знак $\Delta f(\boldsymbol{x}^0)$ для достаточно малых $|\Delta\boldsymbol{x}|$.

Справедливо следующее утверждение:

1) Если форма $A(\xi)$ строго положительно определенна, т. е. $A(\xi)>0$ для всех $\xi\neq 0$, то функция f имеет в точке $\boldsymbol{x}^0$ локальный минимум.

2) Если форма $A(\xi)$ строго отрицательно определенна, т. е. $A(\xi)<0$ для всех $\xi\neq 0$, то функция f имеет в точке $\boldsymbol{x}^0$ локальный максимум.

3) Если $A(\xi)\geqslant 0$ для всех ξ или $A(\xi)\leqslant 0$ для всех ξ и имеется $\xi\neq 0$, для которого $A(\xi)=0$, то вопрос о локальном экстремуме функции f в точке $\boldsymbol{x}^0$ остается открытым.

4) Если форма $A(\xi)$ не определенна по знаку, т. е. существуют векторы ξ' и ξ'', для которых $A(\xi')>0$, $A(\xi'')<0$, то функция f в точке $\boldsymbol{x}^0$ не имеет локального экстремума.

Доказательство утверждения 1). Равенство (3) запишем следующим образом:

$$\Delta f(\boldsymbol{x}^0)=\frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\xi_i}{\rho}\frac{\xi_j}{\rho}+\alpha(\xi)\right]=$$

$$=\frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_i\eta_j+\alpha(\xi)\right]=\frac{\rho^2}{2}[A(\eta)+\alpha(\xi)], \qquad (5)$$

где мы ввели новые переменные

$$\eta_i=\xi_i/\rho \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Легко видеть, что

$$|\eta|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}{\rho}=1.$$

Таким образом, точка η при любых ξ находится на поверхности n-мерного единичного шара. Функция $A(\eta)$ непрерывна на этой поверхности, представляющей собой ограниченное замкнутое множество, и по условию положительна на этой поверхности. Но тогда $A(\eta)$ достигает своего минимума m в некоторой точке этой поверхности, который больше нуля ($m>0$) (см. § 8.12, свойство 2)). Так как $\alpha(\xi)\to 0$ при $\rho=|\xi|\to 0$, то при достаточно малом $\delta>0$

$$|\alpha(\xi)|<m \quad \forall\xi\colon |\xi|<\delta.$$

Следовательно,

$$\Delta f(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x}^0+\xi)-f(\boldsymbol{x}^0)=$$
$$=\frac{\rho^2}{2}[A(\eta)+\alpha(\xi)]\geqslant\frac{\rho^2}{2}[m+\alpha(\xi)]\geqslant 0 \qquad \forall\xi\colon |\xi|<\delta$$

и функция f имеет локальный минимум в точке $\boldsymbol{x}^0$.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

Доказательство 3). В данном случае форма $A(\xi)$ для некоторого $\xi'\neq 0$ обращается в нуль, но тогда в силу свойства однородности формы ($A(\alpha\xi)=\alpha^2 A(\xi)$) для $\xi=\alpha\xi'$, где α — число, она также должна равняться нулю. Это показывает, что для всех указанных точек ξ наша форма равна нулю и, следовательно, $f(\boldsymbol{x}^0+\xi)-f(\boldsymbol{x}^0)=\frac{1}{2}\rho^2\alpha(\xi)$. Но знак $\alpha(\xi)$ неизвестен, поэтому мы не можем сказать, имеет f в $\boldsymbol{x}^0$ экстремум или нет.

Доказательство 4). Здесь опять удобно обратиться к равенству (5). В этом случае по условию существует точка ξ', для которой форма положительна и существует точка ξ'', для которой форма отрицательна, но тогда для соответствующих им точек $\eta'=\xi'/\rho$, $\eta''=\xi''/\rho$ будут выполняться неравенства $A(\eta')>0$, $A(\eta'')<0$ и при малых ρ окажется, что $A(\eta')+\alpha(\xi')>0$, $A(\eta'')+\alpha(\xi'')<0$, т. е. в любой малой окрестности $\boldsymbol{x}^0$ имеются точки $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''$, для которых $f(\boldsymbol{x}')>f(\boldsymbol{x}^0)$ и $f(\boldsymbol{x}'')<f(\boldsymbol{x}^0)$, а это означает, что заведомо нет экстремума.

Известны[1]) условия (*Сильвестра*), выражаемые на языке коэффициентов a_{ij}, при которых квадратичная форма (4) удовлетворяет перечисленным выше условиям 1)—4). Здесь мы отметим только вытекающие из теоремы Сильвестра критерии в случае функции $u=f(x_1, x_2)$ от двух переменных.

Если $a_{11}=f''_{x_1^2}(\boldsymbol{x}^0)>0$ и

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = f''_{x_1^2}(\boldsymbol{x}^0)\, f''_{x_2^2}(\boldsymbol{x}^0)-[f''_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}^0)]^2>0$$

(в этом случае форма (4) строго положительно определенна), то функция $u=f(x_1, x_2)$ имеет локальный минимум в точке $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0, x_2^0)$.

Если

$$f''_{x_1^2}(\boldsymbol{x}^0)<0,\quad f''_{x_1^2}(\boldsymbol{x}^0)\, f''_{x_2^2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}^0)]^2>0$$

(в этом случае форма (4) строго отрицательно определенна), то функция $u=f(x_1, x_2)$ имеет локальный максимум в точке $\boldsymbol{x}^0$.

Если $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, то $d^2f(\boldsymbol{x}^0)$, как квадратичная форма, не является определенной по знаку при изменении Δx_i, поэтому в этом случае $\Delta f(\boldsymbol{x}^0)$ также не сохраняет знак в любой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$, и, следовательно, экстремум в точке $\boldsymbol{x}^0$ отсутствует.

Если выражение $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, то вопрос об экстремуме остается открытым.

Пример 1. Для функции $u=x^3-3x+y^2$ точки $(\pm 1, 0)$ являются стационарными. Исследуем их на экстремум. Имеем

$$u''_{x^2}=6x,\quad u''_{x^2}(\pm 1, 0)=\pm 6,\quad u''_{xy}=0,\quad u''_{y^2}=2.$$

Таким образом, для точки $(1, 0)$: $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=6\cdot 2-0=12>0$, $a_{11}=6>0$. Поэтому в точке $(1, 0)$ наша функция имеет локальный минимум. Для точки $(-1, 0)$: $a_{11}=-6<0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-12<0$, поэтому функция экстремума в точке $(-1, 0)$ не имеет.

Пример 2. Для функции $u=x^4+y^2$ точка $(0, 0)$ является стационарной, и легко видеть, что в этой точке функция имеет локальный минимум. Между тем $u''_{x^2}=12x^2$, $u''_{xy}=0$, $u''_{y^2}=2$, т. е. $a_{11}=0$, $a_{12}=0$, $a_{22}=2$ и $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$.

---

[1]) См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 21.

Пример 3. Для функции $u=x^3+y^2$ в стационарной точке $(0, 0)$ $a_{11}=0$, $a_{12}=0$, $a_{22}=2$, т. е. снова $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, но в данном случае функция $u=x^3+y^2$ в точке $(0, 0)$ экстремума не имеет, так как на прямой $y=0$ приращение $\Delta u=x^3$ меняет знак при переходе через точку $x=0$.

§ 8.14. Нахождение наибольших и наименьших значений функции

Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $u=f(x)$ на множестве $G\subset R_n$, представляющем собой замыкание ограниченной области, т. е. области, к которой присоединена граница ∂G. Тогда f достигает максимума и минимума в некоторых точках $\boldsymbol{x}\in G$ (см. § 8.12, свойство 3)). Эти точки могут быть внутренними и граничными. Если точка $\boldsymbol{x}$ внутренняя, то функция $f(\boldsymbol{x})$ имеет в ней локальный экстремум. Поэтому, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции, необходимо найти все стационарные точки, вычислить значение функции в этих точках и сравнить их со значениями функции на границе ∂G. Наибольшее из этих значений и будет *наибольшим значением* функции на G.

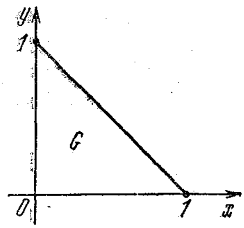

Рис. 98.

Если $G\subset R_2$ и ∂G является плоской непрерывной кривой $x=\varphi(t)$, $y=\varphi(t)$, то вдоль этой границы наша функция является функцией от одного переменного t: $f[\varphi(t), \psi(t)]$. Находить наибольшее значение этой функции мы уже умеем.

Пример. Найти наибольшее значение функции $z=1-x+x^2+2y$ в замкнутой области G, ограниченной прямыми: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ (рис. 98).

Решение. $z'_x=-1+2x=0$, $z'_y=2\neq 0$, т. е. стационарных точек нет. Исследуем функцию z на ∂G.

1) Пусть $x=0$, тогда $z=1+2y$, $0\leqslant y\leqslant 1$. На $[0, 1]$ функция $z=1+2y$ стационарных точек также не имеет, и $z(0)=1$, $z(1)=3$.

2) Пусть $y=0$, тогда $z=1-x+x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Далее, $z'_x=-1+2x=0$ при $x=1/2$, т. е. $x=1/2$ — стационарная точка. Вычисляя значение функции в этой точке и на

границе в точках $x=0$ и $x=1$, получим: $z(1/2)=3/4$, $z(0)=1$, $z(1)=1$.

3) Пусть $x+y=1$, тогда $z=3-3x+x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Так как $z'_x=-3+2x=0$ в точке $x=3/2\overline{\in}[0, 1]$, то в нашем промежутке $[0, 1]$ нет стационарных точек. Далее $z(0)=3$, $z(1)=1$.

Сравнивая все наибольшие значения функции по частям границы, мы видим, что наибольшее значение функции $z(x, y)$ на G равно 3 и достигается в точке $x^0=(0, 1)$.

§ 8.15. Теорема существования неявной функции

Зададим произвольную функцию $f(x, y)$ от двух переменных x и y. Приравняем ее нулю:

$$f(x, y)=0. \tag{1}$$

Множество всех точек (x, y), для которых выполняется равенство (1), обозначим через $\mathfrak{M}$. Пусть $(x_0, y_0)\in\mathfrak{M}$, т. е. $f(x_0, y_0)=0$.

Если не накладывать никаких условий на f, то множество $\mathfrak{M}$ может иметь самую различную природу. Например, в случае $f(x, y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из одной-единственной точки (x_0, y_0), а в случае $f(x, y)=x^2+y^2+1$ множество $\mathfrak{M}$ пусто, в случае же

$$f(x, y)=(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=(x+y-x_0-y_0)(x-y-x_0+y_0)$$

$\mathfrak{M}$ есть пара прямых, проходящих через (x_0, y_0). Однако часто имеют место случаи, когда $\mathfrak{M}$, по крайней мере в достаточно малой окрестности (x_0, y_0), представляет собой кривую, описываемую непрерывной (однозначной) функцией

$$y=\psi(x) \quad (x\in(x_0-\delta, x_0+\delta))$$

(таким образом, ψ есть функция, определяемая неявно уравнением (1), см. также § 3.1).

Возникает вопрос, как по свойствам функции f узнать, что имеет место именно этот случай?

Ниже доказываются две общие теоремы, отвечающие на поставленный вопрос.

Теорема 1. *Пусть задано уравнение*

$$f(x, y)=0, \tag{1}$$

удовлетворяющее следующим свойствам.

Функция f определена на некоторой двумерной окрестности Ω точки (x_0, y_0) плоскости x, y и непрерывна там вместе со своими частными производными первого порядка; при этом

$$f'_y(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \neq 0 \tag{2}$$

и $f(x_0, y_0) = 0$. Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек (x, y), удовлетворяющих уравнению (1) (*в частности, точка $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$*).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b\} \quad (b < b_0), \tag{3}$$

принадлежащий Ω, такой, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией (неявной функцией)

$$y = \psi(x), \quad x \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x - x_0| < a\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на ось x можно определить непрерывно дифференцируемую функцию (4), являющуюся решением уравнения (1), т. е. удовлетворяющую уравнению (1)

$$f(x, \psi(x)) \equiv 0 \quad (x \in \Delta^0). \tag{6}$$

График ее полностью принадлежит Δ. Эта функция единственна в том смысле, что любая точка $(x, y) \in \mathfrak{M}\Delta$ имеет координаты, связанные уравнением (4). В частности, $y_0 = \psi(x_0)$, потому что $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}\Delta$ (рис. 99).

Доказательство теоремы 1. Пусть для определенности $f'_y(x_0, y_0) > 0$. Так как f'_y непрерывна на Ω, то существует окрестность точки (x_0, y_0), которую мы снова обозначим через Ω, такая, что в ней $f'_y(x, y) > 0$. Введем замкнутый прямоугольник

$$\overline{\Delta} = \{|x - x_0| \leqslant \overline{a}, \quad |y - y_0| \leqslant b\} \subset \Omega \quad (b < b_0).$$

Тогда $f'_y(x, y) > 0$ на $\overline{\Delta}$ и

$$\min_{(x, y) \in \overline{\Delta}} f'_y(x, y) = m > 0. \tag{7}$$

Функция $f(x, y)$, рассматриваемая на отрезке $[y_0 - b \leqslant \leqslant y \leqslant y_0 + b, \quad x = x_0]$, как функция от y непрерывна, строго возрастает и обращается в нуль в точке $y=y_0$ (по условию теоремы $f(x_0, y_0)=0$). Значит,

$$f(x_0, y_0-b)<0, \quad f(x_0, y_0+b)>0.$$

Вследствие непрерывности f найдется достаточно малое число a, $0<a<\bar{a}$, такое, что

$$f(x, y_0-b)<0; \quad f(x, y_0+b)>0 \quad \forall x\in\Delta^0=\{|x-x_0|<a\}.$$

Обозначим через $\Delta=\{|x-x_0|<a, \ |y-y_0|<b\}$ открытый прямоугольник. Очевидно, $\Delta\subset\bar{\Delta}\subset\Omega$ и Δ^0 есть проекция Δ на ось x.

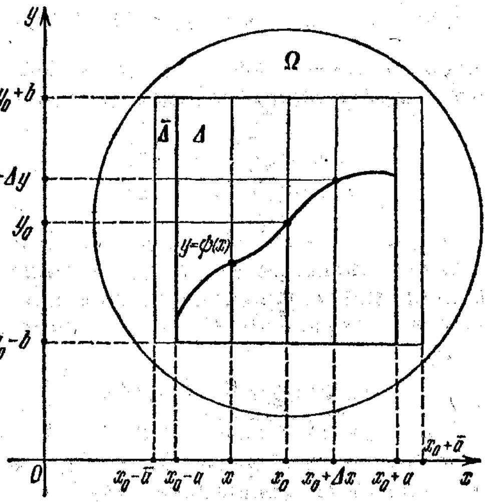

Рис. 99.

Рассмотрим теперь для произвольного и фиксированного $x\in\Delta^0$ функцию f как функцию от y на отрезке $[y_0-b, y_0+b]$. Она непрерывна, строго возрастает ($f'_y>0$!) и имеет противоположные знаки на его концах. Но тогда по теореме о промежуточном значении существует и притом единственное число y, принадлежащее интервалу (y_0-b, y_0+b), мы его обозначаем через $y=\psi(x)$, для которого $f(x, \psi(x))=0$.

Этим доказано существование определенной на Δ^0 функции $\psi(x)$, удовлетворяющей уравнению (6).

Докажем, что функция $\psi(x)$ непрерывна на Δ^0. Пусть x, $x+\Delta x\in\Delta^0$, $y=\psi(x)$, $\Delta y=\psi(x+\Delta x)-\psi(x)$. Тогда на основании формулы Тейлора (§ 8.10) имеем:

$$0=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)=$$
$$=f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\,\Delta x+f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\,\Delta y,$$

где $0<\theta<1$. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}, \tag{8}$$

где точка $(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\in\Delta$. В силу условия теоремы на замкнутом прямоугольнике $\overline{\Delta}$, а следовательно, и на прямоугольнике $\Delta\subset\overline{\Delta}$, функция f'_x ограничена ($|f'_x|\leqslant M$), а по (7) функция f'_y ограничена снизу числом $m>0$, поэтому из (8) получаем, что

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\leqslant\frac{M}{m},$$

т. е. $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, что означает непрерывность функции $y=\psi(x)$ в точке x. Так как точка x — произвольная точка Δ^0, то функция $\psi(x)$ непрерывна на Δ^0.

Теперь, переходя к пределу в (8) при $\Delta x\to 0$, получаем (по доказанному Δy также $\to 0$)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(x,\ y)}{f'_y(x,\ y)}\qquad (y=\psi(x)). \tag{9}$$

Мы доказали существование производной $\psi'(x)$ в точке x и равенство

$$\psi'(x)=-\frac{f'_x(x,\ \psi(x))}{f'_y(x,\ \psi(x))}. \tag{10}$$

Непрерывность $\psi'(x)$ непосредственно видна из (10), потому что f'_x и f'_y непрерывны на прямоугольнике Δ, а кривая $y=\psi(x)$ не выходит за его пределы и является непрерывной, как мы доказали выше.

Сформулируем теорему, аналогичную теореме 1, в случае, когда неявная функция зависит от n переменных.

Теорема 1′. *Пусть задано уравнение*

$$f(\boldsymbol{x},\ y)=f(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y)=0, \tag{1'}$$

удовлетворяющее следующим условиям.

Функция f определена на некоторой окрестности Ω точки $(\boldsymbol{x}^0,\ y^0)=(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y^0)$ пространства R_{n+1} точек

$(\boldsymbol{x}, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ и непрерывна там вместе со своими частными производными первого порядка; при этом

$$f'_y(\boldsymbol{x}^0, y^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \neq 0, \quad f(\boldsymbol{x}^0, y^0) = 0. \tag{2'}$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\boldsymbol{x}, y)$, удовлетворяющих уравнению (1′) (в частности, $(\boldsymbol{x}^0, y^0) \in \mathfrak{M}$).

Тогда, каково бы ни было $b_0 > 0$, найдется в Ω прямоугольник

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < a,\ j = 1, \ldots, n,\ |y - y^0| < b\} \quad (b < b_0), \tag{3'}$$

принадлежащий Ω, такой, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией (т. е. имеющей непрерывные частные производные)

$$y = \psi(\boldsymbol{x}) = \psi(x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{x} \in \Delta^0, \tag{4'}$$

$$\Delta^0 = \{|x_j - x_j^0| < a,\ j = 1, \ldots, n\}. \tag{5'}$$

Частные производные от функции ψ вычисляются по формуле

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = -\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{10'}$$

Если функция f (в случае теорем 1 и 1′) имеет непрерывные производные более высокого порядка l, то и неявная функция имеет производные порядка l, которые можно найти, дифференцируя l раз формулу (10) или (10′).

Пример. Пусть известно, что функция $f(x, y)$, рассмотренная в теореме 1, имеет непрерывные частные производные второго порядка. Будем исходить из равенства (10). Дифференцируя его по x, получим

$$\psi''(x) = -\frac{f'_y(f''_{x^2} + f''_{xy}\psi') - f'_x(f''_{xy} + f''_{y^2}\psi')}{(f'_y)^2}.$$

Мы использовали формулу дифференцирования сложной функции.

§ 8.16. Касательная плоскость и нормаль

Пусть поверхность S задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

в неявном виде. Будем считать, что $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция F имеет непрерывные частные производные, одновременно не равные нулю. Тогда

$$\operatorname{grad}_0 F = ((F'_x)_0,\ (F'_y)_0,\ (F'_z)_0) \neq 0. \tag{2}$$

Мы пишем $(\Phi)_0$ вместо $\Phi(x_0, y_0, z_0)$.

Для определенности предположим, что $(F'_z)_0 \neq 0$. Тогда на основании теоремы о неявной функции существует окрестность точки (x_0, y_0, z_0), в которой поверхность S описывается явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости к S в точке (x_0, y_0, z_0), как мы знаем, имеет вид

$$z - z_0 = (f'_x)_0 (x - x_0) + (f'_y)_0 (y - y_0),$$

где

$$(f'_x)_0 = -(F'_x)_0/(F'_z)_0, \quad (f'_y)_0 = -(F'_y)_0/(F'_z)_0.$$

В силу этого уравнение касательной плоскости к S в точке (x_0, y_0, z_0) запишется так:

$$(F'_x)_0 (x - x_0) + (F'_y)_0 (y - y_0) + (F'_z)_0 (z - z_0) = 0, \tag{3}$$

а уравнение нормали к S в точке (x_0, y_0, z_0) — так:

$$\frac{x - x_0}{(F'_x)_0} = \frac{y - y_0}{(F'_y)_0} = \frac{z - z_0}{(F'_z)_0}. \tag{4}$$

Те же уравнения (3), (4) мы получим, если предположить, что $(F'_x)_0 \neq 0$ или $(F'_y)_0 \neq 0$. В этих случаях в окрестности (x_0, y_0, z_0) поверхность S описывается явно соответственно уравнениями

$$x = \varphi(y, z), \quad y = \psi(x, z).$$

Мы видим, что при условии (2) некоторый кусок поверхности S, принадлежащий к достаточно малой окрестности (x_0, y_0, z_0) в любой его точке имеет касательную плоскость, непрерывно изменяющуюся при непрерывном передвижении точки (x_0, y_0, z_0). Такой кусок называют *гладким куском поверхности* S.

Другое дело, если $\operatorname{grad}_0 F = 0$. В этом случае нельзя гарантировать, что в точке (x_0, y_0, z_0) существует касательная плоскость к S. Она может существовать, а может и не существовать.

Пример. Уравнение

$$z^2 + y^2 - x^2 = 0 \tag{5}$$

определяет круговой конус с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью x (рис. 100).

Левая часть уравнения (5) имеет частные производные

$$F'_x = -2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z,$$

одновременно не равные нулю, если точка $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. В любой такой точке, которую обозначим через (x_0, y_0, z_0), касательная плоскость определяется уравнением

$$-x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0.$$

В начале же координат касательная плоскость к нашей конической поверхности не существует. В этом случае $\operatorname{grad}_0 F = 0$.

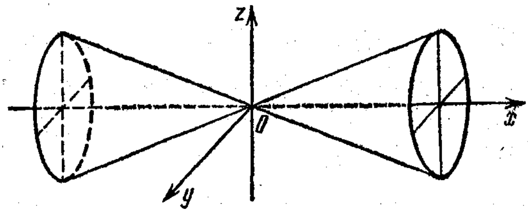

Рис. 100.

Точки (x_0, y_0, z_0), лежащие на поверхности S, в которых $\operatorname{grad}_0 F = 0$, называют *особыми точками поверхности* S.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию

$$u = f(x, y, z) \tag{6}$$

на некоторой области Ω точек (x, y, z). Пусть в точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ ее значение равно числу A:

$$A = f(x_0, y_0, z_0).$$

Если частные производные от f в точке (x_0, y_0, z_0) одновременно не равны нулю, то уравнение $A = f(x, y, z)$ определяет в окрестности этой точки некоторую гладкую поверхность S, называемую *поверхностью уровня функции* (6).

Касательная плоскость к S в точке (x_0, y_0, z_0) имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

Нормаль к S в точке (x_0, y_0, z_0), т. е. прямая, проходящая через эту точку, перпендикулярно к касательной плоскости, очевидно, имеет уравнение

$$\frac{X-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0}=\frac{Y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0}=\frac{Z-z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}.$$

Мы видим, что вектор

$$\operatorname{grad} f_0=\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\right)$$

направлен по нормали к поверхности S.

Уравнение $z=f(x, y)$, где функция f имеет непрерывные частные производные, определяет некоторую гладкую поверхность S. Положим, $A=f(x_0, y_0)$. Если в точке (x_0, y_0) частные производные $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ одновременно не равны нулю, то уравнение $A=f(x, y)$ определяет в окрестности этой точки некоторую гладкую кривую Γ (*линию уровня функции* $z=f(x, y)$).

Уравнение касательной к Γ в (x_0, y_0) имеет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)=0.$$

Вектор $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right)$ направлен по нормали к Γ (в плоскости Γ) в точке (x_0, y_0).

§ 8.17. Системы функций, заданных неявно

Выше мы рассмотрели вопрос о существовании непрерывной и дифференцируемой неявной функции, определяемой одним уравнением.

Здесь мы рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности неявных функций $y_1, \ldots, y_m$, определяемых системой уравнений

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)=0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Таким образом, мы ищем функции $y_1, \ldots, y_m$ от $x_1, \ldots, x_n$ как решения системы (1): $y_i=\psi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, \ldots, m)$.

Выясним те условия, которые обеспечивают существование решения системы (1) и дифференцируемость функций y_i.

Теорема 1. *Пусть задана система уравнений* (1), *удовлетворяющая следующим свойствам.*

Функции f_j определены на некоторой ($(n+m)$-мерной) окрестности Ω точки $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)=(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ пространства R_{n+m} точек $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ и непрерывны там вместе со своими частными производными первого порядка с якобианом (определителем Якоби[1]*)*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| = \frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0. \tag{2}$$

Кроме того, точка $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ удовлетворяет системе (1).

Пусть $\mathfrak{M}$ есть множество всех точек $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, удовлетворяющих системе (1) *(в частности, $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)\in\mathfrak{M}$).*

Тогда, каково бы ни было $b_0>0$, найдется прямоугольник

$$\Delta=\{|x_j-x_j^0|<a\ (j=1, \ldots, n),$$
$$|y_i-y_i^0|<b\ (i=1, \ldots, m)\}\ (b<b_0), \tag{3}$$

принадлежащий Ω, такой, что множество $\mathfrak{M}\Delta$ описывается непрерывно дифференцируемыми функциями

$$y_i=\psi_i(\boldsymbol{x}) \quad (i=1, \ldots, m), \quad \boldsymbol{x}\in\Delta^0, \tag{4}$$
$$\Delta^0=\{|x_j-x_j^0|<a, \quad j=1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

Другими словами, прямоугольник Δ обладает тем свойством, что на его проекции Δ^0 на координатное подпространство $(x_1, \ldots, x_n)$ можно определить непрерывно дифференцируемые функции (4), удовлетворяющие уравнениям (1):

$$f_j(\boldsymbol{x}, \psi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \psi_m(\boldsymbol{x}))\equiv 0, \quad (\boldsymbol{x}\in\Delta^0, \ j=1, \ldots, m)$$

и неравенствам $|\psi_j(\boldsymbol{x})-y_j^0|<b$. Эти функции единственны в том смысле, что любая точка $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in\mathfrak{M}\Delta$ имеет координаты, связанные уравнениями (4).

В частности $y_j^0=\psi_j(\boldsymbol{x}^0)$ $(j=1, \ldots, m)$, потому что $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)\in\mathfrak{M}\Delta$.

---

[1]) К. Г. Якоби (1804—1851)—немецкий математик.

Замечание 1. В теореме можно считать, что прямоугольник Δ и его проекция Δ^0 определяются неравенствами

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < a_j \quad (j=1, \ldots, n); \quad |y_i - y_i^0| < b_i \quad (i=1, \ldots, m)\}, \tag{3*}$$

$$\Delta^0 = \{|x_j - x_j^0| < a_j, \quad j=1, \ldots, n\}, \tag{5*}$$

с различными, вообще говоря, числами a_j, b_i. Ведь если теорема верна для прямоугольника (3*) при некоторых a_j, b_i, то, положив $b = \min b_i$, можно вследствие непрерывности функций ψ_i указать такое число $a < a_j$ $(j=1, \ldots, n)$, что точки

$$(\boldsymbol{x}, \psi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \psi_m(\boldsymbol{x})) \text{ с } \boldsymbol{x} \in \{|x_j - x_j^0| < a, \quad j=1, \ldots, n\}$$

окажутся в прямоугольнике (3).

Заметим, однако, что вообще невозможно добиться, чтобы a и b в (3) были равными, в чем легко убедиться на примере одного уравнения $F(x, y) = y - x^2 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$.

Приведем доказательство теоремы 1 только для частного случая двух уравнений

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0. \end{array}\right\} \tag{1'}$$

Нам надо доказать, что если функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M^0 = (x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R_4$, удовлетворяющей уравнениям (1'), и якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2'}$$

в M^0, то для любого $b_0 > 0$ найдется прямоугольник

$$\Delta = \{|x_1 - x_1^0| < a, \ |x_2 - x_2^0| < a, \ |y_1 - y_1^0| < b, \ |y_2 - y_2^0| < b\} \quad (b < b_0), \tag{3'}$$

принадлежащий указанной окрестности, и существуют непрерывно дифференцируемые функции

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \psi_1(x_1, x_2), \\ y_2 = \psi_2(x_1, x_2) \end{array}\right\} \quad (x_1, x_2) \in \Delta^0, \tag{4'}$$

определенные на его проекции

$$\Delta^0 = \{|x_1 - x_1^0| < a, \quad |x_2 - x_2^0| < a\} \tag{5'}$$

такие, что они удовлетворяют уравнениям (1') и обладают свойствами

$$y_1^0 = \psi_1(x_1^0, x_2^0), \quad y_2^0 = \psi_2(x_1^0, x_2^0),$$

При этом для $(x_1, x_2) \in \Delta^0$

$$(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta. \tag{6}$$

Указанные функции ψ_1, ψ_2 — единственные, описывающие все решения уравнений (1') в прямоугольнике Δ; иначе говоря, если какая-либо точка $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Delta$ удовлетворяет уравнениям (1'), то ее координаты связаны соотношениями (4').

Из того, что якобиан (2') не равен нулю в M^0, следует, что один из его элементов не равен нулю в M^0. Не нарушая общности, считаем, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \neq 0. \tag{7}$$

К этому неравенству всегда можно прийти, соответственно перенумеровав в случае необходимости f_1, f_2 и y_1, y_2.

Так как частные производные от f_1 и f_2 по условию непрерывны, то существует достаточно малая окрестность точки M^0, на которой не только якобиан (2'), но и производная $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ не равны нулю. Но тогда для первого уравнения (1'), если его рассматривать относительно неизвестной функции y_1 от (x_1, x_2, y_2), выполняются условия теоремы 1' § 8.15. Поэтому для любого b_0 существует прямоугольник

$$\Delta_1 = \{|x_1 - x_1^0| < \alpha,\ |x_2 - x_2^0| < \alpha,\ |y_2 - y_2^0| < \beta,\ |y_1 - y_1^0| < \gamma\} \quad (\gamma < b_0) \tag{8}$$

и непрерывно дифференцируемая функция

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2, y_2), \tag{9}$$

$$(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0 = \{|x_1 - x_1^0| < \alpha,\ |x_2 - x_2^0| < \alpha\ \ |y_2 - y_2^0| < \beta\},$$

удовлетворяющая первому уравнению (1'):

$$f_1(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2) = 0, \tag{10}$$

где

$$(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0, \quad (x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2) \in \Delta_1. \tag{11}$$

При этом функция φ единственна в том смысле, что любая точка (x_1, x_2, y_1, y_2), принадлежащая к Δ_1 и удовлетворяющая первому уравнению (1'), имеет координаты, связанные равенством (9); в частности,

$$y_1^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0, y_2^0). \tag{12}$$

Замечание 2. Отметим, что в (8) мы могли бы на первом этапе рассуждений считать $\alpha = \beta$. Но в дальнейшем придется числа α, β несколько уменьшить, вообще говоря, непропорционально. Уменьшенные α и β пригодны и для рассматриваемого первого этапа рассуждений.

Итак, мы получили тождество (10) верное каковы бы ни были независимые $(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0$. Но это тождество остается верным и если считать, что y_2 есть любая непрерывно дифференцируемая функция $y_2 = \psi_2(x_1, x_2)$, такая, однако, чтобы

$$(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1^0. \tag{13}$$

Но таких функций ψ_2 бесконечное множество. Цель наша выбрать среди них такую, чтобы функции

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\varphi(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2))=\psi_1(x_1, x_2), \\ y_2=\psi_2(x_1, x_2) \end{array}\right\} \tag{14}$$

тождественно удовлетворяли второму уравнению (1′). Первому уравнению (1′) они уже удовлетворяют. Итак, подставим найденную функцию φ во второе из уравнений (1′):

$$f_2(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2)=0 \tag{15}$$

и будем искать функцию y_2 от (x_1, x_2), ему удовлетворяющую. Положим

$$\Phi(x_1, x_2, y_2)=f_2(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2).$$

Функция Φ непрерывно дифференцируема для любых $(x_1, x_2, y_2)\in\Delta_1^0$ (см. (11)). Она удовлетворяет равенствам

$$\Phi(x_1^0, x_2^0, y_2^0)=f_2(x_1^0, x_2^0, \varphi(x_1^0, x_2^0, y_2^0), y_2^0)=f_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)=0$$

(см. условие теоремы и (12)). Кроме того,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\neq 0.$$

В самом деле, для точек $(x_1, x_2, y_2)\in\Delta_1^0$ (пояснения ниже)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}=\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}=\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\Big/\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}=$$
$$=\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_2}{\partial y_2}-\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)\Big/\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}\Big/\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\neq 0. \tag{16}$$

В первом равенстве (16) применено правило о производной сложной функции, во втором надо учесть, что, согласно (10),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=-\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\Big/\frac{\partial f_1}{\partial y_1}.$$

Конечно, там где мы пишем частные производные от f_1 и f_2, считается, что они вычисляются в точках $x_1=x_1$, $x_2=x_2$, $y_1=\varphi(x_1, x_2, y_2)$, $y_2=y_2$. В последнем соотношении (16) надо учесть (2′) и (7).

Мы видим, что левая часть уравнения (15) удовлетворяет всем условиям теоремы 1′ § 8.15. Поэтому в прямоугольнике Δ_1^0 (см. (9)) найдется новый, вообще говоря, меньший прямоугольник, который мы снова обозначим через Δ_1^0 (см. выше замечание 2), и найдется непрерывно дифференцируемая функция

$$y_2=\psi_2(x_1, x_2),\quad (x_1, x_2)\in\Delta^0=\{|x_1-x_1^0|<\alpha,\ |x_2-x_2^0|<\alpha\},$$
$$(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2))\in\Delta_1^0,$$

удовлетворяющая уравнению (15):

$$\Phi(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2))=f_2(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)), \psi_2(x_1, x_2))=$$
$$=f_2(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2))=0,$$
$$(x_1, x_2)\in\Delta^0,\quad (x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2))\in\Delta_1^0,\quad \psi_2(x_1^0, x_2^0)=y_2^0.$$

При этом любая точка $(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0$, удовлетворяющая уравнению (15), имеет координаты, связанные равенством $y_2 = \psi_2(x_1, x_2)$. Но тогда выполняется такое соотношение (см. (11)):

$$(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1.$$

Итак, доказано существование непрерывно дифференцируемых функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \quad (x_1, x_2) \in \Delta^0,$$

удовлетворяющих обоим уравнениям (1′) и притом так, что

$$y_1^0 = \psi_1(x_1^0, x_2^0), \quad y_2^0 = \psi_2(x_1^0, x_2^0).$$

При этом

$$(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1 \tag{17}$$

и любая точка $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Delta_1$, удовлетворяющая уравнениям (1′), имеет вид, как в (17).

Переход от Δ_1 к Δ можно осуществить с помощью замечания 1.

Замечание 3. Укажем способ нахождения частных производных $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_k}$.

Пусть все условия теоремы 1 выполнены. Тогда, подставляя функции $y_j = \psi_j(x)$ в (1), получим систему тождеств:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)) &\equiv 0, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ f_m(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)) &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Дифференцируя по x_k каждое тождество системы (18) как сложную функцию, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} &\equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k} + \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}\frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} &\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Система (19) является линейной относительно неизвестных производных $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_k} \equiv \dfrac{\partial \psi_j}{\partial x_k}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Определителем ее является якобиан

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

Поэтому система (19) имеет единственное решение:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k}=-\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(x_k,y_2,\ldots,y_m)}\Big/\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)},\ \ldots,$$
$$\frac{\partial y_m}{\partial x_k}=-\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(y_1,\ldots,y_{m-1},x_k)}\Big/\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}.$$

§ 8.18. Отображения

Пусть задана система непрерывно дифференцируемых функций

$$y_j=\varphi_j(\boldsymbol{x})=\varphi_j(x_1,\ \ldots,\ x_n),\quad \boldsymbol{x}\in\Omega\ (j=1,\ \ldots,\ m),\tag{1}$$

где Ω—открытое множество точек $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Будем говорить, что система (1) определяет *непрерывно дифференцируемое отображение*

$$y=A\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\in\Omega,\tag{1'}$$

множества Ω на некоторое множество Ω' точек $\boldsymbol{y}=(y_1,\ \ldots,\ y_m)$. Будем еще писать $\Omega'=A(\Omega)$ и называть Ω' *образом* Ω, а Ω—*прообразом* Ω' (посредством отображения A).

Наряду с A рассмотрим другое непрерывно дифференцируемое отображение B:

$$z_j=\psi_j(\boldsymbol{y})=\psi_j(y_1,\ \ldots,\ y_m),\quad \boldsymbol{y}\in\Lambda\ (j=1,\ \ldots,\ m),$$

открытого множества Λ точек $\boldsymbol{y}$ на некоторое множество точек $\boldsymbol{z}=(z_1,\ \ldots,\ z_m)$. Таким образом, $\boldsymbol{z}=B\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\in\Lambda$.

Замечание. Отметим, что если $\boldsymbol{x}^0\in\Omega$ и $\boldsymbol{y}^0=A\boldsymbol{x}^0\in\Lambda$, то в силу непрерывности A найдется окрестность V_{x^0} точки $\boldsymbol{x}^0$, образ которой посредством A принадлежит к Λ. Уменьшая Ω, положив $\Omega=V_{x^0}$, получим тогда, что $\Omega'\subset\Lambda$.

Если $\Omega'\subset\Lambda$, то имеет смысл сложное непрерывно дифференцируемое отображение $\boldsymbol{z}=BA\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$, определяемое равенствами $z_j=\psi_j(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ \varphi_m(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$ $(j=1,\ \ldots,\ m)$.

Якобианы отображений A, B, BA связаны замечательными равенствами

$$\frac{D(z_1,\ldots,z_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)}=\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right|=\left|\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right|=\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\right|\cdot\left|\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right|=$$
$$=\frac{D(z_1,\ldots,z_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}\,\frac{D(y_1,\ldots,y_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)},\tag{2}$$

доказательство которых, как мы видим, основано на применении формулы производной от сложной функции и правила умножения определителей.

В частности, если B обращает A на множестве точек $\boldsymbol{x} \in \Omega$, т. е. $\boldsymbol{x} = BA\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, есть тождественное отображение, то в силу того, что его якобиан равен 1, получим формулу

$$1 = \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \cdot \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \qquad (3)$$

Будем теперь считать, что определяемое равенствами (1) непрерывно дифференцируемое отображение $y = A\boldsymbol{x}$ имеет якобиан

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

т. е. не равный нулю всюду на открытом множестве Ω.

Приведем без доказательства следующие свойства:

1) $\Omega' = A(\Omega)$ — открытое множество (вместе с Ω!),

2) если Ω — область, то и Ω' — область,

3) отображение A локально взаимно однозначно, т. е. какова бы ни была точка $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega$, найдется шар $V \subset \Omega$ с центром в ней такой, что отображение A, рассматриваемое только на V, взаимно однозначно.

Свойство 3) утверждает только локальную взаимную однозначность. Глобальной взаимной однозначности может и не быть. Например, преобразование $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ полярных координат точек плоскости в декартовы при $\rho > 0$ и произвольном θ непрерывно дифференцируемо и имеет положительный якобиан, равный ρ. Оно отображает точки (ρ, θ) $(\rho > 0, -\infty < \theta < \infty)$ плоскости (ρ, θ) в точки (x, y), отличные от нулевой точки, локально взаимно однозначно. Однако каждой такой точке (x, y) соответствует хотя и одно ρ, но бесконечное число различных значений θ, отличающихся между собой на $2k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 8.19. Условный (относительный) экстремум

Рассмотрим в пространстве R_2 функцию $u = F(x, y) = x^2 + y^2$. С геометрической точки зрения эта функция представляет собой квадрат расстояния точки $P = (x, y)$ от начала прямоугольной системы координат x, y. Она не имеет наибольшего значения в R_2. Но если ее рассматривать только для точек (x, y) эллипса $G(x, y) \equiv \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $(b > a)$, то ясно, что она достигает наибольшего значения в точках $P_0 = (0, b)$ и $P_1 = (0, -b)$ (рис. 101).

Таким образом, функция $u = F(P)$, рассматриваемая во всей плоскости R_2, не имеет наибольшего значения, но эта же функция при условии, что точка P находится на эллипсе, принимает наибольшее значение (два раза).

Эта ситуация приводит нас к задаче об отыскании экстремума функции при условии, что ее аргументы удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям.

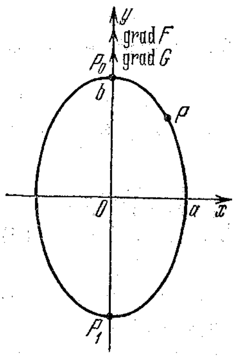

Рис. 101.

Итак, пусть дана функция

$$u = F(P) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

от $n+m$ переменных. Требуется найти экстремум функции $F(P)$ при условии, что переменные x_i, y_k связаны m соотношениями

$$\left.\begin{array}{l} G_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ G_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

которые обычно называются *уравнениями связи*.

Система уравнений (1) определяет в пространстве R_{n+m}, вообще говоря, некоторое множество, которое мы будем называть *поверхностью*.

Определение. Будем говорить, что точка $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, удовлетворяющая уравнениям (1), является *точкой локального условного* (*относительного*) *максимума* (*минимума*), если в R_{n+m} $\exists$ окрестность точки P^0 такая, что $\forall P$ из этой окрестности, удовлетворяющих уравнениям связи (1), выполняется неравенство

$$F(P) \leqslant F(P^0) \quad (F(P) \geqslant F(P^0)).$$

Точка локального условного максимума или минимума называется *точкой локального условного* (*относительного*) *экстремума*.

В рассмотренном выше примере точка $P_0 = (0, b)$ является точкой условного локального максимума, так как для всех точек P, лежащих на эллипсе, $u(P) \leqslant u(P_0)$.

Займемся сначала выяснением вопроса о необходимых условиях, чтобы точка P^0 была точкой локального относительного экстремума. Пусть P^0 — точка условного экстремума и функции $G_1, \ldots, G_m$ имеют непрерывные частные производные и якобиан

$$\frac{D(G_1, \ldots, G_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0 \qquad (2)$$

в окрестности этой точки.

Как нам известно, система (1) разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности точки P^0:

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные в точке $M^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Подставляя эти функции φ_i в F, получим, что F будет функцией только от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, независимых между собой:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n). \quad (3)$$

Очевидно, что если F достигает локального условного экстремума в точке P^0, то $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ достигает в точке $M^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ обычного локального экстремума, или, как говорят, абсолютного локального экстремума, и обратно.

Но тогда, как мы знаем, должны выполняться равенства

$$\frac{\partial \Phi(M^0)}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \text{ или } d\Phi(M^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad (4)$$

где dx_i $(i = 1, \ldots, n)$ — дифференциалы независимых переменных.

Точку $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, для которой в силу (1) (или (3)) выполняются (4), будем называть *стационарной точкой функции F при наличии связей* (1).

Мы доказали, что *для того, чтобы точка $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ была точкой локального условного экстремума, необходимо, чтобы она была стационарной точкой F при наличии связей* (1).

Дальнейшие наши рассмотрения относятся к вопросу о том, как найти указанную стационарную точку, не разрешая систему (1) относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$, хотя существование функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ мы будем предполагать. Будем писать $(F)_0$, $(\varphi_i)_0$ вместо $F(P^0)$, $\varphi_i(M^0)$.

В силу инвариантности формы дифференциала первого порядка условия (4) эквивалентны условиям

$$d\Phi(M^0) = dF(P^0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k}\right)_0 dy_k = 0, \quad (5)$$

где входящие в dF зависимые дифференциалы $dy_1, \ldots, dy_m$ соответственно равны

$$dy_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right)_0 dx_i \quad (k=1, \ldots, m).$$

Эти дифференциалы вместе с независимыми дифференциалами $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны соотношениями

$$dG_i(P^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)_0 dx_j + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_k}\right)_0 dy_k = 0 \; (i=1, \ldots, m), \tag{6}$$

которые мы получаем из уравнений связи.

Итак стационарная точка функции F при наличии связей (1) может быть определена также как такая точка $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, удовлетворяющая уравнениям (1), что для нее выполняются равенства (5) для всех $dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_m$, для которых имеют место равенства (6).

Введем $(n+m)$-мерные векторы

$$\operatorname{grad}_0 G_j = \operatorname{grad} G_j(P^0) =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial G_j}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial G_j}{\partial x_n}\right)_0, \left(\frac{\partial G_j}{\partial y_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial G_j}{\partial y_m}\right)_0\right) (j=1, \ldots, m),$$

$$\operatorname{grad}_0 F = \operatorname{grad} F(P^0) =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial y_m}\right)_0\right),$$
$$d\boldsymbol{z} = (dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_m).$$

На языке этих векторов уравнения (5) и (6) можно записать через скалярные произведения

$$(\operatorname{grad}_0 F, \; d\boldsymbol{z}) = 0, \tag{5'}$$
$$(\operatorname{grad}_0 G_j, \; d\boldsymbol{z}) = 0 \quad (j=1, \ldots, m). \tag{6'}$$

Мы получили, что точка $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ есть стационарная точка при наличии связей (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям (1), и если из того, что какой-либо вектор $d\boldsymbol{z}$ ортогонален к градиентам $\operatorname{grad}_0 G_1, \ldots, \operatorname{grad}_0 G_m$, следует, что он ортогонален к $\operatorname{grad}_0 F$. Но в таком случае (пояснения ниже) существует и притом единственная система чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$

такая, что

$$\operatorname{grad}_0 F = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}_0 G_k. \tag{7}$$

Обратное утверждение тоже верно. Если известно, что $\operatorname{grad}_0 F$ при некоторых числах $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ может быть представлен в виде (7), т. е. в виде линейной комбинации градиентов $\operatorname{grad}_0 G_k$ $(k=1, \ldots, m)$, то отсюда немедленно следует, что как только какой-либо вектор dz ортогонален к градиентам $\operatorname{grad}_0 G_k$, он автоматически ортогонален к $\operatorname{grad}_0 F$.

Убедиться в верности обратного утверждения не представляет никакого труда: из (7) и (6′) следует, что

$$(\operatorname{grad}_0 F,\ dz) = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}_0 G_k, dz\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\operatorname{grad}_0 G_k,\ dz) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot 0 = 0.$$

Что же касается прямого утверждения, то мы сошлемся на теорему из линейной алгебры[1]). Все же сделаем пояснения.

Пусть L есть линейное подпространство R_{n+m}, натянутое на векторы $\operatorname{grad}_0 G_j$ $(j=1, \ldots, m)$, т. е. множество линейных комбинаций вида (7), соответствующих всевозможным системам чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Введем подпространство L' векторов dz, ортогональное к L, т. е. L' состоит из всех векторов dz, ортогональных к L, или, что все равно, ортогональных к векторам $\operatorname{grad}_0 G_j$ $(j=1, \ldots, m)$. Если[2]) L' ортогонально к L, то и, обратно, L ортогонально к L', т. е. L состоит из всех векторов, ортогональных к L'. Как было сказано в стационарной точке P^0, градиент F ортогонален ко всем векторам dz, ортогональным к градиентам G_j, т. е. градиент F ортогонален к L'. Но тогда по указанной теореме градиент F принадлежит к L, таким образом есть некоторая линейная комбинация из градиентов G_j, единственная линейная комбинация, потому что градиенты G_j $(j=1, \ldots, m)$ образуют линейно независимую систему в R_{n+m}. Дело в том, что

[1]) См. нашу книгу «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», § 19, теоремы 1, 2 и следствие 1.

[2]) См. теорему 1 § 19 указанной выше книги.

матрица из частных производных функций G_j

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \frac{\partial G_m}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial G_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

имеет в окрестности точки P^0 ранг m, потому что мы предположили верным условие (2), но тогда строки этой матрицы определяют векторы (градиенты), образующие линейно независимую систему [1]).

Из сказанного следует, что стационарную точку функции F при наличии связей (1) можно определить еще и так: *это такая точка* $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, *удовлетворяющая уравнениям* (1), *для которой градиент F есть линейная комбинация из градиентов* G_j $(j = 1, \ldots, m)$

$$\operatorname{grad}_0 F = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad}_0 G_j. \tag{7}$$

Можно еще сказать так: *для того чтобы точка*

$$P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$$

была стационарной для функции F при наличии связей (1), *необходимо и достаточно, чтобы для нее существовали числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *для которых выполняется равенство* (7).

Так как ранг матрицы (8) в точке P^0 равен m, то каждой стационарной точке соответствует единственная система чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, для которых имеет место равенство (7). Равенство (7) эквивалентно следующему:

$$\operatorname{grad}_0 \left[F - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j \right] = 0. \tag{9}$$

Функцию, стоящую под знаком градиента в (9)

$$L(P, \lambda) = F(P) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(P), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m),$$

называют *функцией Лагранжа*, а числа λ_j *множителями Лагранжа*.

---

[1]) См. § 13 указанной на с. 361 книги.

Запишем условия (9) в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial F}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial x_j}=0 \quad (j=1, \ldots, n), \\ \frac{\partial L}{\partial y_k}=\frac{\partial F}{\partial y_k}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial G_i}{\partial y_k}=0 \quad (k=1, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

Вопрос о нахождении стационарных точек F при наличии связей (1) свелся к решению системы, состоящей из уравнений (1) и (9′).

Резюмируем сказанное.

Чтобы найти стационарную точку

$$P^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$$

функции F при наличии связей, надо составить функцию Лагранжа и систему уравнений (9′) и решить эту систему совместно с уравнениями связи (1). Всего здесь будет $n+2m$ уравнений с $n+2m$ неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. При этом решение системы относительно x_i и y_j даст точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, которая будет стационарной точкой. Точки локального условного экстремума находятся среди стационарных точек. Выяснение вопроса о том, будет ли на самом деле стационарная точка P^0 точкой условного экстремума, удобно проводить, рассматривая второй дифференциал функции Лагранжа. При выяснении знака $d^2L(P^0, \lambda)$ нужно учитывать, что дифференциалы dy_k зависят от дифференциалов dx_i.

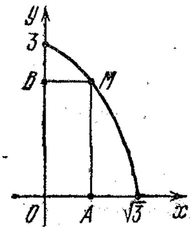

Рис. 102.

Пример. Пусть на плоскости xOy дана фигура, ограниченная осями координат и параболой $y+x^2-3=0$ $(0\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$. Вписать в эту фигуру прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, одна из вершин $M=(x, y)$ которого находится на этой параболе, так, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей (рис. 102).

Решение. Пусть x и y—координаты вершины M. Тогда площадь прямоугольника $S=xy$. Далее, так как точка M лежит на параболе, то ее координаты должны удовлетворять уравнению параболы: $y+x^2-3=0$. Таким образом, мы должны исследовать на условный экстремум функцию $S=xy$ при наличии связи $y+x^2-3=0$. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda)=xy-\lambda(y+x^2-3)$. Найдем стационарные точки задачи из уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=y-2\lambda x=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=x-\lambda \quad =0, \\ y+x^2-3=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x=1$, $y=2$, $\lambda=1$. Таким образом, точка (1, 2) стационарная и ей отвечает множитель Лагранжа $\lambda=1$. Исследуем в стационарной точке второй дифференциал функции Лагранжа

$$L(x, y, 1)=xy-y-x^2+3.$$

Имеем

$$d^2L(x, y, 1)=L''_{x^2}dx^2+2L''_{xy}dx\,dy+L''_{y^2}dy^2+L'_xd^2x+L'_yd^2y,$$

где последние два члена в правой части возникают потому, что дифференциалы dx и dy зависимы и, вообще говоря, $d^2x\neq 0$, $d^2y\neq 0$. Однако в стационарной точке (1, 2) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$.

Поэтому

$$d^2L(x, y, 1)=L''_{x^2}dx^2+2L''_{xy}dx\,dy+L''_{y^2}dy^2=2dx\,(dy-dx).$$

Если считать dx и dy как дифференциалы независимых переменных, то $d^2L(x, y, 1)$ не является определенным по знаку. Однако из уравнения связи видно, что $dy=-2x\,dx$ и в точке (1, 2) $dy=-2dx$. Таким образом,

$$d^2L(1, 2, 1)=-6dx^2<0 \quad (dx\neq 0),$$

а следовательно, и приращение функции $L(x, y, \lambda)$ в точке $x=1$, $y=2$, $\lambda=1$, соответствующее приращению x, равному $dx\neq 0$, меньше нуля ($\Delta L(1, 2, 1)<0$). Значит, функция $S=xy$ имеет в точке (1, 2) локальный условный максимум, так как на параболе $y+x^2-3=0$, $\Delta S=\Delta L$.

Итак, из всех прямоугольников указанного вида, наибольшую площадь имеет прямоугольник со сторонами $OA=1$, $OB=2$.

ГЛАВА 9

РЯДЫ

§ 9.1. Понятие ряда

Выражение

$$u_0+u_1+u_2+\ldots, \tag{1}$$

где числа u_k (*члены ряда*), вообще комплексные, зависят от индексов $k=0, 1, 2, \ldots$, называется *рядом*. Этому выражению мы не приписали никакого числа, потому что сложение бесконечного числа слагаемых не имеет смысла. Ряд (1) еще записывают так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k=\sum_0^{\infty} u_k. \tag{2}$$

Эта чисто формальная запись часто более удобна, чем запись (1).

Числа

$$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n \quad (n=0, 1, \ldots)$$

называются *n-ми частичными суммами ряда* (1).

По определению ряд (1) сходится, если существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S.$$

В этом случае пишут

$$S=u_0+u_1+u_2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$

и называют S *суммой ряда*, т. е. выражениям (1) или (2) приписывается число S. Говорят еще, что ряд (3) *сходится к* S.

Замечание. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S_n и S — комплексные, определяется так же, как для действительных S_n, S, т. е. оно обозначает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: |S_n - S| < \varepsilon$ $\forall n > N$. Здесь $|S_n - S|$ — модуль разности двух комплексных чисел S_n, S. Для комплексных переменных доказывается в точности так же, как для действительных переменных, что предел суммы, разности, произведения и частного переменных u_n, v_n равен соответственно сумме, разности, произведению, частному пределов этих переменных с обычной оговоркой в случае частного ($\lim v_n \neq 0$).

В силу условия Коши (верного и для последовательностей комплексных чисел), *для того чтобы ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое* N, *чтобы для всех натуральных* $n > N$ *и любого натурального* p *выполнялось неравенство*

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда в частности (полагая $p = 1$), следует, что если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$

Но условие (4), будучи необходимым, не является достаточным для сходимости ряда, как это будет видно из дальнейших примеров.

Рассмотрим еще ряд

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{5}$$

Так как условие Коши сходимости рядов (1) и (5) формулируется совершенно одинаково, то они одновременно либо сходятся, либо расходятся (не сходятся). Если они сходятся, то сумма ряда (5) равна

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty} (S_{n+m} - S_n) = S - S_n.$$

Ряд (5) называют *остатком* или *остаточным членом ряда* (1).

Если члены ряда (1) неотрицательны (таким образом, действительны), то его частичные суммы образуют неубывающую последовательность $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant, \ldots$, поэтому, если эта последовательность ограничена

$$S_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то ряд сходится и его сумма удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \leqslant M.$$

Если же она неограничена, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Пример. Ряд

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

имеет (при $z \neq 1$) частичную сумму $S_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1-z)$. Если $|z| < 1$, то $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$ и $z^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким образом, ряд (6) сходится и имеет сумму, равную $(1-z)^{-1}$ на открытом круге $|z| < 1$. Если же $|z| \geqslant 1$, то ряд (6) расходится, потому что в этом случае его общий член, имеющий модуль, не меньший единицы $|z^n| \geqslant 1$, не стремится к нулю при $n \to \infty$.

§ 9.2. Несобственный интеграл и ряд

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

имеющий единственную особенность в точке b. Пусть

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \quad b_k \to b.$$

Тогда можно определить ряд

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx, \tag{2}$$

k-й член которого равен

$$u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx.$$

Теорема 1. *Если интеграл* (1) *сходится, то сходится также ряд* (2) *и имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_0^\infty \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx. \qquad (3)$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_0^n \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{b_0}^{b_{n+1}} f\,dx=\int_a^b f\,dx.$$

Если f неотрицательна на $[a, b)$, то и, наоборот, из сходимости ряда (2) следует сходимость интеграла (1). В самом деле, пусть ряд сходится и имеет сумму, равную S. Для любого b', где $a<b'<b$, можно указать такое $n'=n(b')$, что $\forall n>n'$, $b'<b_n$. Поэтому, учитывая, что $f(x)\geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx\leqslant\int_a^{b_n} f\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx\leqslant S,$$

т. е. интеграл в левой части ограничен и, следовательно, несобственный интеграл (1) существует. Но тогда, как доказано выше, справедливо равенство (3).

Если же функция f не сохраняет знак на $[a, b)$, то из сходимости ряда (2) вообще не следует сходимость интеграла.

Например, ряд

$$\sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x\,dx=\sum_0^\infty 0=0$$

сходится, интеграл же $\int_0^\infty \sin x\,dx$ расходится потому, что функция от x

$$\int_0^x \sin t\,dt=1-\cos x$$

не стремится к пределу при $x\to\infty$.

Теорема 2. *Если функция $f(x) \geqslant 0$ непрерывна и не возрастает на $[0, \infty)$, то интеграл*

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \tag{3'}$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^\infty f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots \tag{4}$$

одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Имеют место неравенства

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots).$$

Суммируя их по k, получим

$$\sum_1^{n+1} f(k) = \sum_0^n f(k+1) \leqslant \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_0^n f(k).$$

Отсюда, учитывая, что все члены в этих соотношениях при возрастании n монотонно не убывают, следует утверждение теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots \tag{5}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ потому, что функция $1/(1+x)^\alpha$ при $\alpha > 0$ непрерывна и монотонно убывает на $[0, \infty)$, а

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^\alpha} \begin{cases} < \infty & (\alpha > 1), \\ = \infty & (\alpha \leqslant 1). \end{cases}$$

Ряд (5) при $0 < \alpha \leqslant 1$ может служить примером расходящегося ряда с общим членом ($u_n = n^{-\alpha}$), стремящимся к нулю.

В случае $\alpha \leqslant 0$ непосредственно видно, что ряд (5) расходится (общий член не стремится к нулю).

§ 9.3. Действия с рядами

Если ряды $\sum_0^\infty u_k$ *и* $\sum_0^\infty v_k$ *сходятся и* α — *число, то ряды* $\sum_0^\infty \alpha u_k$, $\sum_0^\infty (u_k \pm v_k)$ *также сходятся и*

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k, \tag{1}$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k. \tag{2}$$

Действительно,

$$\sum_0^\infty \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k = \alpha \sum_0^\infty u_k,$$

$$\sum_0^\infty (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n (u_k \pm v_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_0^n u_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_0^n v_k = \sum_0^\infty u_k \pm \sum_0^\infty v_k.$$

Подчеркнем, что из сходимости ряда, стоящего слева в (2), вообще не следует сходимость каждого из рядов, стоящих справа в (2). Например, ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots \tag{3}$$

сходится (все его члены равны нулю), но выражение $\sum_0^\infty 1 - \sum_0^\infty 1$ не имеет смысла — ряды, входящие в него, расходятся.

Если ряд

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{4}$$

сходится и имеет сумму S, то члены его можно любым образом сгруппировать скобками (однако не переставляя их), например, так:

$$u_0+(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\ldots,$$

образуя новый ряд, члены которого равны суммам чисел, стоящих в скобках. Новый ряд будет сходящимся и притом к S, потому что его частичные суммы образуют подпоследовательность сходящейся последовательности частичных сумм ряда (4).

Наоборот, раскрывать скобки в ряду, вообще говоря, незаконно, например, после раскрытия скобок в сходящемся ряду (3) получается расходящийся ряд $1-1+1-\ldots$. Впрочем, если внутри скобок всюду стоят только неотрицательные или неположительные числа, то раскрытие в таком ряду скобок не изменяет сходимости ряда и величины его суммы.

§ 9.4. Ряды с неотрицательными членами

Теорема 1 (признак сравнения рядов). *Пусть даны два ряда:*

$$1) \quad \sum_0^\infty u_k, \qquad 2) \quad \sum_0^\infty v_k$$

с неотрицательными членами.

а) *Если* $u_k \leqslant v_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$, *то из сходимости ряда* 2) *следует сходимость ряда* 1), *а из расходимости ряда* 1) *следует расходимость ряда* 2).

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A > 0, \tag{1}$$

то ряды 1) *и* 2) *одновременно сходятся и расходятся.*

Доказательство. Пусть ряд 2) сходится и S — его сумма. Тогда

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \leqslant S \quad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

т. е. частичные суммы ряда 1) ограничены и ряд 1) сходится. Его сумма S' удовлетворяет неравенству $S' \leqslant S$.

Пусть теперь ряд 1) расходится: тогда (см. § 9.1) его частичная сумма неограниченно возрастает вместе с n, что в силу неравенства

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \quad (n=0,\ 1,\ \ldots)$$

влечет также неограниченное возрастание частичных сумм ряда 2), т. е. расходимость последнего. Этим доказано утверждение а).

Пусть теперь имеет место (1). Зададим положительное число ε, удовлетворяющее неравенству $A-\varepsilon>0$. Из (1) следуют неравенства

$$A-\varepsilon<\frac{u_k}{v_k}<A+\varepsilon \qquad (k>N),$$

верные при достаточно большом N, или неравенства

$$(A-\varepsilon)\,v_k<u_k<(A+\varepsilon)\,v_k \qquad (k>N). \tag{2}$$

Если ряд 2) сходится, то сходится также ряд $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}(A+\varepsilon)\,v_k$, и на основании второго неравенства (2), сходится ряд $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}u_k$, а тогда и ряд 1). Обратно, сходимость ряда 1) влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}(A-\varepsilon)\,v_k$ и, следовательно, сходимость ряда 2).

Аналогично доказывается, что из расходимости одного ряда вытекает расходимость другого. Этим доказано утверждение б).

Теорема 2 (признаки Даламбера[1]). *Пусть дан ряд*

$$\sum_{0}^{\infty}u_k \tag{3}$$

с положительными членами.

а) *Если*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\leqslant q<1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

то ряд (3) *сходится; если же*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\geqslant 1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{5}$$

то расходится.

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=q, \tag{6}$$

то ряд (3) *сходится при* $q<1$ *и расходится при* $q>1$.

---

[1]) Ж. Даламбер (1717—1783) — французский математик.

Доказательство. Имеем

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

поэтому из (4) следует, что

$$u_n \leqslant u_0 q^n, \quad q < 1 \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

и так как ряд $\sum_{1}^{\infty} u_0 q^n$ сходится, то вместе с ним сходится и ряд (3). Из (5) следует, что $u_n \geqslant u_0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, и так как $u_0 > 0$, то ряд (3) расходится (общий член не стремится к нулю).

Если теперь выполняется свойство (6) и $q < 1$, то для положительного ε такого, что $q+\varepsilon < 1$, $u_{k+1}/u_k < q+\varepsilon < 1$ $(k \geqslant N)$, где N достаточно велико. В силу признака (4) в таком случае ряд $\sum_{N}^{\infty} u_k$ сходится, а вместе с ним сходится и ряд (3). Из свойства же (6) при $q > 1$ вытекает, что $u_{k+1}/u_k > 1$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N, и тогда в силу признака (5) ряд $\sum_{N}^{\infty} u_k$ расходится, а вместе с ним расходится и ряд (3).

Теорема 3 (признаки Коши). *Пусть дан ряд* (3) *с положительными членами.*

а) *Если*

$$\sqrt[k]{u_k} < q < 1 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{8}$$

то ряд (3) *сходится; если же*

$$\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{9}$$

то ряд (3) *расходится.*

б) *Если*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q, \tag{10}$$

то ряд (3) *сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$.

в) *Если*

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{u_k} = q, \tag{11}$$

то ряд (3) *сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$ *и при этом члены ряда неограничены.*

Доказательство. Из неравенства (8) следует, что $u_k < q^k$ $(q < 1,\ k = 0, 1, \ldots)$, и так как в этом случае ряд $\sum\limits_0^\infty q^k$ сходится, то сходится и ряд (3). Из неравенства (9) следует, что $u_k \geqslant 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$, т. е. не выполняется необходимое условие сходимости, и поэтому ряд (3) расходится.

Далее из свойства (10) при $q < 1$ следует, что

$$\sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon < 1 \qquad (k \geqslant N) \tag{12}$$

при достаточно большом N, откуда

$$u_k < (q + \varepsilon)^k \qquad (k \geqslant N),$$

и так как ряд $\sum\limits_N^\infty (q + \varepsilon)^k$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_N^\infty u_k$, а вместе с ним ряд (3). Из свойства (10) при $q > 1$ вытекает, что $\sqrt[k]{u_k} > 1$, т. е. $u_k > 1$ $(k \geqslant N)$ при достаточно большом N, откуда следует расходимость ряда (3).

Из свойства (11) (так же как из свойства (10)) при $q < 1$ следует (12), откуда, как уже доказано, вытекает сходимость ряда (3).

Наконец, пусть выполняется свойство (11) при $q > 1$. Подберем конечное число q_1 так, чтобы $1 < q_1 < q$. На основании свойства верхнего предела (см. § 2.10) существует подпоследовательность $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что

$$\sqrt[k_s]{u_{k_s}} > q_1 > 1 \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$u_{k_s} > q_1^{k_s}.$$

Но тогда члены u_{k_s} неограничены и ряд (3) расходится.

Замечание. Ряд с общим членом $u_n = n^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$ (см. § 9.2, (5)). При этом в обоих случаях

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1, \tag{13}$$

так же как

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1. \tag{14}$$

Таким образом, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды с признаками (13) и (14).

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ называется *гармоническим рядом* (он расходится, см. § 9.2, (5)).

Примеры.

1) $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. 2) $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}\ (\alpha>0)$. 3) $\sum\limits_{1}^{\infty}(e^{1/k}-1)$.

4) $\sum\limits_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. 5) $\sum\limits_{1}^{\infty} q^{k+\sqrt{k}}\quad (q>0)$.

Ряд 1) сходится $\forall x \geqslant 0$. При $x=0$ это очевидно, а при $x>0$ это следует из того, что $u_{k+1}/u_k = x/(k+1) \to 0$, $k\to\infty$. Более того, мы знаем, что этот ряд является рядом Тейлора функции e^x и сходится $\forall x$ к сумме, равной e^x.

Ряд же 2) сходится при $0 \leqslant x < 1$ и расходится для $x>1$, потому что при $x>0$ для него $u_{k+1}/u_k = x(k/(k+1))^\alpha \to x$, $k\to\infty$; при $x=1$ см. выше замечание. Случай $x=0$ тривиален.

Ряды 3) и 4) расходятся в силу теоремы 1 § 9.4, потому что $e^{1/k}-1 \approx 1/k$ $(k\to\infty)$ и $\ln(1+(1/k)) \approx 1/k$ $(k\to\infty)$ («$\approx$»—знак асимптотического равенства, см. § 3.9, § 3.10), а гармонический ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} k^{-1}$ расходится.

Ряд 5) сходится при $0\leqslant q<1$ и расходится при $q>1$, потому что для него $\sqrt[k]{u_k} = q^{1+(1/\sqrt{k})} \to q$ $(k\to\infty)$. При $q=1$ он тоже расходится—общий член ряда в этом случае равен 1.

Теорема 4. *Пусть ряд*

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{15}$$

с неотрицательными членами сходится и имеет сумму S. Тогда полученный в результате произвольной перестановки его членов новый (заново перенумерованный) ряд

$$u_0'+u_1'+u_2'+\ldots \tag{16}$$

также сходится и имеет ту же сумму S.

Доказательство. Пусть

$$S_n' = u_0'+u_1'+\ldots+u_n'$$

— частичная сумма ряда (16). Члены ее находятся в ряде (15) под некоторыми номерами $k_0, \ldots, k_n$. Пусть N — наибольшее число среди них и S_N есть N-я частичная сумма ряда (15). Очевидно, $S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, и так как n произвольно, то ряд (16) сходится и имеет сумму $S' \leqslant S$. Но теперь приведенное рассуждение можно провести еще раз, поменяв ряды (15) и (16) местами, и получить, что $S \leqslant S'$. Поэтому $S = S'$.

§ 9.5. Ряд Лейбница

Ряд вида

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

где числа $a_k > 0$, монотонно убывая, стремятся к нулю ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), называется *рядом Лейбница*.

Покажем, что ряд Лейбница сходится и его сумма $S \leqslant a_0$.

В самом деле, частичная его сумма S_{2n+1} с нечетным номером $2n+1$ может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

откуда, очевидно, следует, что она ограничена сверху числом a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

С другой стороны, она может быть записана в виде

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

откуда следует, что она монотонно не убывает. Но в таком случае существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0$. Очевидно также, что

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = \lim_{n \to \infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ есть, очевидно, ряд Лейбница. Таким образом, он сходится и его сумма S не превышает 1 (на самом деле, $S = \ln 2$, см. § 4.16, п. 4).

§ 9.6. Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд с комплексными членами

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_0|+|u_1|+|u_2|+\ldots \tag{2}$$

модулей его членов.

Абсолютно сходящийся ряд сходится.

В самом деле, пусть ряд (1) абсолютно сходится; тогда сходится ряд (2) и в силу признака Коши для любого $\varepsilon>0$ найдется такое N, что $\varepsilon>|u_{n+1}|+\ldots+|u_{n+p}|$ для всех p и $n>N$. Тем более, тогда $\varepsilon>|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|$. Поэтому в силу признака Коши ряд (1) сходится.

Сходящиеся ряды с неотрицательными членами тривиальным образом сходятся абсолютно. Ряд $1-\frac{1}{2^\alpha}+$ $+\frac{1}{3^\alpha}-\ldots$ $(\alpha>0)$ сходится, потому что он есть ряд Лейбница. Однако абсолютно он сходится только при $\alpha>1$.

Теорема. *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов сходимость полученного нового ряда не нарушается и его сумма остается прежней.*

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае, когда члены ряда u_k — действительные числа.

Положим (для действительных u_k)

$$u_k^+=\begin{cases} u_k, & \text{если } u_k\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } u_k<0,\end{cases}\qquad u_k^-=\begin{cases} -u_k, & \text{если } u_k\leqslant 0,\\ 0, & \text{если } u_k>0;\end{cases} \tag{3}$$

числа u_k^+ и u_k^-, очевидно, неотрицательные и

$$u_k=u_k^+-u_k^-. \tag{4}$$

Наряду с рядом (1) будем рассматривать два ряда,

$$\sum_0^\infty u_k^+ \quad \text{и} \quad \sum_0^\infty u_k^- \tag{5}$$

(с неотрицательными членами).

Пусть ряд (1) абсолютно сходится и члены его — действительные числа u_k. Тогда ряды (5) также сходятся, потому что, очевидно, $u_k^+\leqslant|u_k|$, $u_k^-\leqslant|u_k|$.

Пусть ряд, полученный после перестановки исходного ряда (1), имеет вид $v_1+v_2+v_3+\ldots$. Для его членов введем, как выше, числа v_k^+ и v_k^-. Тогда (пояснения ниже)

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (u_k^+ - u_k^-) = \sum_0^\infty u_k^+ - \sum_0^\infty u_k^- =$$
$$= \sum_0^\infty v_k^+ - \sum_0^\infty v_k^- = \sum_0^\infty (v_k^+ - v_k^-) = \sum_0^\infty v_k.$$

Первое равенство в этой цепи следует из (4), второе — из § 9.3, (2), если учесть, что ряды (5) сходятся, третье следует из того, что сходящиеся ряды с неотрицательными членами перестановочны, четвертое из § 9.3, (2), и, наконец, пятое — потому, что $v_k = v_k^+ - v_k^-$. Теорема для действительных u_k доказана.

Пусть теперь $u_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексные числа, а числа v_k имеют прежний смысл. Так как $|\alpha_k| \leqslant |u_k|$, $|\beta_k| \leqslant |u_k|$, то ряды с (действительными членами) $\sum_0^\infty \alpha_k$ и $\sum_0^\infty \beta_k$ абсолютно сходятся, и члены их, как сейчас было доказано, можно переставлять. Поэтому, считая, что $v_k = \gamma_k + i\delta_k$, получим

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_0^\infty \alpha_k + i\sum_0^\infty \beta_k =$$
$$= \sum_0^\infty \gamma_k + i\sum_0^\infty \delta_k = \sum_0^\infty (\gamma_k + i\delta_k) = \sum_0^\infty v_k.$$

Теорема доказана полностью.

§ 9.7. Условно сходящиеся ряды с действительными членами

Из предыдущего параграфа мы знаем, что абсолютно сходящийся ряд с действительными или комплексными членами после перестановки членов остается абсолютно сходящимся и имеющим прежнюю сумму.

Оказывается это свойство — не менять сумму после перестановки членов — присуще только абсолютно сходящимся рядам.

Рассмотрим ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

с действительными членами сходящийся, но не абсолютно.

Можно доказать, что, каково бы ни было число S, конечное или бесконечное, т. е. удовлетворяющее неравенствам $-\infty \leqslant S \leqslant +\infty$, существует перестановка членов ряда (1), в результате которой получится ряд, сходящийся к S. Поэтому неабсолютно сходящиеся ряды называют *условно сходящимися*.

Сделаем еще следующее замечание. Пусть задан ряд (1) из действительных чисел, условно сходящийся. В ряде (1) имеется бесконечное множество положительных и отрицательных членов, и, очевидно, они в отдельности образуют расходящиеся ряды (в противном случае исходный ряд был бы абсолютно сходящимся).

§ 9.8. Последовательности и ряды функций. Равномерная сходимость

Рассмотрим последовательность функций $\{f_k(x)\}$, определенных на некотором множестве точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства. Они могут принимать комплексные значения ($f_k(x)=\alpha_k(x)+i\beta_k(x)$). Можно считать также, что x — комплексные точки ($x=\xi+i\eta$), пробегающие некоторое множество E точек комплексной плоскости, и тогда $f_k(x)$ — функции комплексной переменной x.

Пусть для каждого значения $x \in E$ последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к числу $f(x)$ (функции от x).

По определению *последовательность* $f_n(x)$ *сходится* (*стремится*) к $f(x)$ *равномерно на* E, если существует сходящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел ρ_n (не зависящих от x) такая, что

$$|f(x)-f_n(x)| \leqslant \rho_n \quad \forall x \in E. \tag{1}$$

Это определение эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что при $n > N$

$$|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in E.$$

В самом деле, если выполнено первое определение, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$\varepsilon > \rho_n \geqslant |f(x)-f_n(x)| \quad \forall x \in E, \quad n > N$$

т. е.

$$\varepsilon > |f(x)-f_n(x)| \quad \forall x \in E, \quad n > N. \tag{2}$$

Обратно, по второму определению для любого $\varepsilon > 0$ найдется N так, что выполняется (2). Но тогда

$$\varepsilon \geqslant \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| = \rho_n \quad (n > N). \tag{3}$$

Мы видим, что неотрицательные числа ρ_n не зависят от x и $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \rho_n$, $\rho_n \to 0$, т. е. выполняется первое определение.

В первом определении в качестве ρ_n можно взять точную верхнюю грань

$$\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| = \rho_n.$$

Если она стремится к нулю при $n \to \infty$ ($\rho_n \to 0$), то $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ равномерно на E, если не стремится, то не равномерно.

Можно еще дать третье определение равномерной сходимости в духе Коши: последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{4}$$

при любых $n > N$ и $p > 0$ и для всех $x \in E$.

Из того, что последовательность равномерно сходится в смысле второго определения, следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и любых p выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in E,$$

т. е. выполняется третье определение. С другой стороны, пусть выполняется третье определение; тогда для каждого отдельного значения $x \in E$ выполняется, очевидно, обычный признак Коши сходимости последовательности, поэтому она сходится к некоторой функции $f(x)$. Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и подберем N так, как указано в третьем определении. В неравенстве (4), где $n > N$ фиксировано, перейдем к пределу при $p \to \infty$; в результате получим $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ ($x \in E$), откуда

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,$$

и так как $n > N$ можно взять любым, то $\rho_n \to 0$ ($n \to \infty$), т. е. выполнено первое определение.

Изобразим в прямоугольной системе координат график функции $y=f(x)$ (*предельной функции*), которую мы считаем непрерывной на отрезке $[a, b]$ (рис. 103). Зададим $\varepsilon>0$ и определим ε-полоску толщиной 2ε, окружающую график. Произвольная точка ε-полоски с абсциссой $x \in [a, b]$ имеет ординату y, удовлетворяющую неравенствам

$$f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon.$$

Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ стремится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$, то по заданному $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что для любого $n>N$ график $y=f_n(x)$ окажется внутри ε-полоски. Если же $f_n(x)$ стремится к $f(x)$ неравномерно на $[a, b]$, то, хотя для каждого значения x $f_n(x)$ стремится к $f(x)$, все же $\forall\varepsilon>0$ невозможно указать такое N, чтобы для каждого $n>N$ все графики $y=f_n(x)$ попали в ε-полоску (см. ниже пример 3).

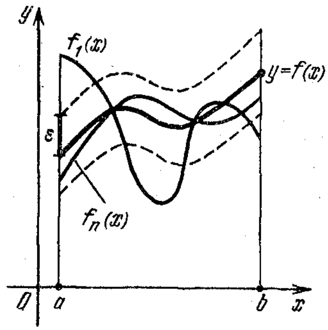

Рис. 103.

Нетрудно видеть, что если α — число, а $\{f_k(x)\}$ и $\{\varphi_k(x)\}$ — две последовательности функций, равномерно сходящиеся на E, то последовательности $\{\alpha f_k(x)\}$ и $\{f_k(x) \pm \varphi_k(x)\}$ также равномерно сходятся на E. Нетрудно также видеть, что если последовательность функций равномерно сходится на E, то она равномерно сходится и на $E' \subset E$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Заметим, что каждой последовательности функций $\{f_k(x)\}$ соответствует ряд

$$f_0(x)+[f_1(x)-f_0(x)]+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots,$$

n-е частичные суммы которого соответственно равны $f_n(x)$.

Пусть теперь задан ряд

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots, \tag{5}$$

члены которого, вообще говоря, комплексные функции от $x \in E$, где E — по-прежнему некоторое множество точек n-мерного пространства или комплексной плоскости.

По определению *ряд* (5) *равномерно сходится на множестве E к функции $S(x)$*, если последовательность $\{S_k(x)\}$ его частичных сумм равномерно сходится на E к $S(x)$.

В частности, определение равномерной сходимости ряда, очевидно, можно высказать так: ряд (5) равномерно сходится на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для $n > N$ и $p > 0$ и всякого $x \in E$ выполняется неравенство

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Следующая теорема дает важный критерий равномерной сходимости ряда.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Если члены ряда* (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$|u_k(x)| \leqslant \alpha_k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{6}$$

где $x \in E$, а α_k — числа (не зависящие от x), и если ряд с членами α_k сходится, то ряд (5) *сходится на множестве E абсолютно и равномерно.*

В самом деле, из сходимости ряда с членами α_k и из (6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при любых $n > N$ и $p > 0$ и произвольном $x \in E$

$$\varepsilon > \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} \geqslant$$
$$\geqslant |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \geqslant |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)|,$$

а это и значит, что ряд (5) равномерно сходится на E. Абсолютная его сходимость очевидна.

Теорема 2. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к функции f и f_n непрерывны в точке x^0 (относительно E), то f также непрерывна в x^0.*

На языке рядов эта теорема гласит: *сумма равномерно сходящегося на E ряда функций, непрерывных в точке $x^0 \in E$, есть непрерывная функция в этой точке*[1].

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем натуральное N так, чтобы $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in E$, что в силу равномерной сходимости f_n к f возможно. Имеем, далее,

$$|f(x) - f(x^0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x^0)| +$$
$$+ |f_N(x^0) - f(x^0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(x^0)| \tag{7}$$

[1]) См. замечание в § 9.12.

для любой точки $x \in E$. Но функция f_N непрерывна в x^0, и можно указать такое $\delta > 0$, что $|f_N(x) - f_N(x^0)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in E$ таких, что $|x - x^0| < \delta$; поэтому из (7) следует, что для таких x

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

и теорема доказана.

Пример 1. Ряд

$$1 + (x - 1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots \tag{8}$$

сходится на отрезке $[0, 1]$, но неравномерно. На отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$, он сходится равномерно.

В самом деле, n-я частичная сумма ряда (8)

$$S_n(x) = x^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Абсолютная величина разности $S(x) - S_n(x)$ (остатка ряда) равна

$$|S(x) - S_n(x)| = \begin{cases} x^n, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \tag{9}$$

На отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$,

$$|S(x) - S_n(x)| = x^n \leqslant q^n.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от $x \in [0, q]$ и стремится к нулю при $n \to \infty$ ($q^n \to 0$). Это показывает, что ряд (8) равномерно сходится на отрезке $[0, q]$, где $0 < q < 1$.

С другой стороны, из равенства (9) видно, что

$$\sup_{x \in [0, 1]} |S(x) - S_n(x)| = 1.$$

Таким образом, число 1 есть самое малое число превышающее $|S(x) - S_n(x)|$ для всех $x \in [0, 1]$. Но постоянное число 1 не стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому ряд (8) хотя и сходится на $[0, 1]$, но неравномерно.

Пример 2. Ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots \tag{10}$$

имеет n-й член, удовлетворяющий неравенству

$$\frac{|\sin nx|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

и при этом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

сходится. Поэтому по теореме Вейерштрасса ряд (10) равномерно сходится на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Так как члены ряда (10) суть непрерывные функции, то по теореме 2 сумма этого ряда есть непрерывная функция.

П р и м е р 3. На рис. 104 изображена функция $f_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$). Она линейна на каждом из отрезков $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, $[2/n, 1]$ в отдельности. Кроме того, $f_n(0)=f(2/n)=0$ и $f_n(x)=0$ на $[2/n, 1]$, $f_n(1/n)=1$. Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

потому что $f_n(0)=0 \to 0$, а если $0 < x \leqslant 1$, то $f_n(x)=0\ \forall n > 2/x$.

Далее, очевидно, что

$$\sup_{x\in[0, 1]} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in[0, 1]} f_n(x) = 1,$$

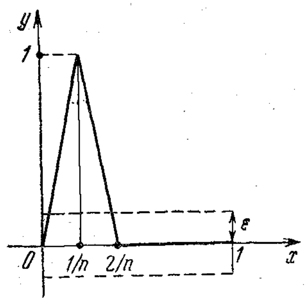

Рис. 104.

и при этом постоянное число 1 не стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, но неравномерно.

На рис. 104 пунктиром изображена ε-полоска, окружающая предельную кривую $f(x)=0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. При любом n график функции $f_n(x)$ не попадает весь в ε-полоску. Это не мешает тому, что $f_n(x) \to f(x)=0\ \forall x \in [0, 1]$.

Приведем еще более тонкие признаки равномерной сходимости рядов, основанные на применении к ряду так называемого *преобразования Абеля* (аналога операции интегрирования по частям).

Рассмотрим ряд

$$\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots, \tag{11}$$

где α_k, β_k—функции от $x \in E$ (или постоянные числа). Положим $B_k=\beta_{n+1}+\beta_{n+2}+\ldots+\beta_{n+k}$ и к усеченной сумме ряда (11) применим преобразование Абеля:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k}=\alpha_{n+1}\beta_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+p}\beta_{n+p}=$$
$$=\alpha_{n+1}B_1+\alpha_{n+2}(B_2-B_1)+\ldots+\alpha_{n+p}(B_p-B_{p-1})=$$
$$=(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})B_1+(\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3})B_2+\ldots+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})B_{p-1}+$$
$$+\alpha_{n+p}B_p=\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})B_k+\alpha_{n+p}B_p. \tag{12}$$

Теперь легко установить следующие два критерия равномерной сходимости (в случае постоянных α_k, β_k — просто сходимости) ряда (11).

Теорема 3 (признак Дирихле равномерной сходимости ряда). *Если частичные суммы ряда*

$$\beta_0+\beta_1+\beta_2+\ldots \tag{13}$$

ограничены в совокупности, а действительная функция $\alpha_k(x)$ (с возрастанием k) равномерно (относительно x) на E стремится к нулю, убывая, то ряд (11) *сходится равномерно.*

В самом деле, пусть константа M превышает модули частных (частичных) сумм σ_n ряда (13). Тогда при любых n и k

$$|B_k|=|\sigma_{n+k}-\sigma_n|\leqslant|\sigma_{n+k}|+|\sigma_n|\leqslant 2M.$$

Поэтому в силу (12) и того факта, что α_s равномерно стремится к нулю убывая, выполняется неравенство

$$\left|\sum_{1}^{p}\alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right|\leqslant 2M\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})+\alpha_{n+p}2M=2M\alpha_{n+1}<\delta$$

для любых $n>N$ и p и любых $x\in E$, если только N достаточно велико. Следовательно, ряд (11) равномерно сходится. Последнее неравенство в этой цепи верно для всех $x\in E$ в силу равномерного стремления $\alpha_{n+1}(x)$ к нулю.

Теорема 4 (признак Абеля равномерной сходимости ряда). *Если действительные функции α_k не возрастают (с возрастанием k) и ограничены в совокупности, а ряд* (13) *равномерно сходится на E, то и ряд* (11) *сходится равномерно на E.*

В самом деле, пусть $M\geqslant|\alpha_k|$ $(k=0, 1, \ldots)$ (функции α_k могут быть и отрицательными!). В силу равномерной сходимости ряда (13) для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что $|B_k|<\varepsilon$ для любых $n>N$ и k. Поэтому в силу (12) и монотонности α_s для любых $n>N$ и p

$$\left|\sum_{1}^{p}\alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})+\varepsilon|\alpha_{n+p}|=$$
$$=\varepsilon(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+p})+\varepsilon|\alpha_{n+p}|\leqslant 3\varepsilon M,$$

т. е. ряд (11) равномерно сходится.

Пример 4. Ряды

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{\alpha}},\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}\qquad(\alpha>0) \tag{14}$$

при $\alpha > 1$ равномерно и абсолютно сходятся на всей действительной оси ($-\infty < x < \infty$), потому что абсолютные величины их k-х членов не превышают $k^{-\alpha}$, а при $\alpha > 1$ ряд $\sum k^{-\alpha}$ сходится. Мы применили признак Вейерштрасса. При $\alpha \leqslant 1$ он уже не применим, так как в этом случае ряд $\sum k^{-\alpha}$ расходится. Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ наши ряды равномерно сходятся на отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, где $0 < \varepsilon < \pi$. В самом деле, частные суммы рядов

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \quad \sin x + \sin 2x + \ldots$$

соответственно равны

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad K_n(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$(n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{15}$$

В этом можно убедиться, если частные суммы рассматриваемых рядов умножить и разделить на $2\sin(x/2)$ и в числителе произвести соответствующие тригонометрические преобразования. Функции (15) ограничены в совокупности на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

$$|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sin(\varepsilon/2)}, \quad |K_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots);$$

кроме того, $n^{-\alpha} \geqslant (n+1)^{-\alpha}$ и $n^{-\alpha} \to 0$, поэтому по признаку Дирихле ряды (14) равномерно сходятся на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

§ 9.9. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов

Теорема 1. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана последовательность $\{f_n(x)\}$ (комплекснозначных) непрерывных функций, сходящаяся к функции f. Если сходимость равномерна на $[a, b]$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

равномерно на $[a, b]$. В частности (при $x = b$),

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует (см. § 9.8, теорема 2), что предельная функция f непрерывна на $[a, b]$ и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_n(t) - f(t)| = r_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^x|f_n(t)-f(t)|\,dt\leqslant\int_a^b r_n dt=(b-a)r_n,$$

где правая часть не зависит от x и стремится к нулю при $n\to\infty$, а это доказывает теорему.

Теорема 2. *Равномерно сходящийся на отрезке $[a, b]$ ряд (комплекснозначных) непрерывных функций*

$$S(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots \tag{3}$$

можно почленно интегрировать $(a\leqslant x_0\leqslant b)$:

$$\int_{x_0}^x S(t)\,dt=\int_{x_0}^x u_0(t)dt+\int_{x_0}^x u_1(t)\,dt+\ldots \tag{4}$$

Полученный при этом ряд (4) *равномерно сходится на* $[a, b]$.

В частности,

$$\int_a^b S(t)\,dt=\int_a^b u_0(t)\,dt+\int_a^b u_1(t)\,dt+\ldots. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что $S(x)$, как сумма равномерно сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда непрерывных функций, есть в свою очередь непрерывная функция на $[a, b]$. Пусть

$$S_n(x)=\sum_0^n u_k(x).$$

Так как ряд (3) равномерно сходится к $S(x)$, то

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|S_n(x)-S(x)|=r_n\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Поэтому

$$\left|\int_{x_0}^x S(t)\,dt-\sum_0^n\int_{x_0}^x u_k(t)\,dt\right|=\left|\int_{x_0}^x S(t)\,dt-\int_{x_0}^x S_n(t)dt\right|=$$
$$=\left|\int_{x_0}^x[S(t)-S_n(t)]\,dt\right|\leqslant\int_a^b|S(t)-S_n(t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant(b-a)r_n\to 0 \qquad (n\to\infty),$$

и теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *задан ряд*

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots \tag{6}$$

(комплекснозначных) функций, имеющих непрерывную производную.

Если ряд (6) *сходится в некоторой точке* $x_0 \in [a, b]$ *и, кроме того, формально продифференцированный ряд*

$$u_0'(x)+u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots \tag{7}$$

равномерно сходится на $[a, b]$, *то ряд* (6) *равномерно сходится на* $[a, b]$ *и производная от его суммы* $S(x)$ *есть сумма ряда* (7).

Таким образом,

$$S(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots, \tag{8}$$

$$S'(x)=u_0'(x)+u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{9}$$

Доказательство. По условию ряд (7) равномерно сходится на $[a, b]$ и его члены — непрерывные функции на $[a, b]$, поэтому его сумма, которую мы обозначим пока через $\varphi(x)$, непрерывная функция на $[a, b]$. На основании теоремы 2 ряд (7) можно интегрировать почленно и получить равномерно сходящийся на $[a, b]$ ряд

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} u_0'(t)\,dt+\int_{x_0}^{x} u_1'(t)\,dt+\ldots \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Применяя теорему Ньютона—Лейбница, будем иметь

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt=\sum_{0}^{\infty}[u_k(x)-u_k(x_0)]. \tag{10}$$

Ряд справа в (10) с членами, равными функциям в квадратных скобках, равномерно сходится на $[a, b]$, ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} u_k(x_0)$ по условию сходится, и так как его члены постоянны, то его надо рассматривать как равномерно сходящийся ряд на $[a, b]$; но тогда ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} u_k(x)$ также сходится и притом равномерно на $[a, b]$ как сумма двух равномерно сходящихся рядов; обозначим его сумму через $S(x)$. Тогда равенство (10) можно переписать так:

$$S(x)=S(x_0)+\int_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt.$$

Но функция $S(x)$ имеет производную, равную $S'(x)=\varphi(x)$, и теорема доказана.

Пример 1. Ряд

$$S(x)=\frac{\cos x}{1^\alpha}+\frac{\cos 2x}{2^\alpha}+\frac{\cos 3x}{3^\alpha}+\ldots \qquad (11)$$

при $\alpha>1$ равномерно сходится на всей действительной оси по признаку Вейерштрасса потому, что

$$|n^{-\alpha}\cos nx|\leqslant n^{-\alpha}\quad \forall x\in(-\infty,\ \infty)$$

и

$$\sum_1^\infty n^{-\alpha}<\infty\quad (\alpha>1).$$

Продифференцируем ряд (11) формально:

$$\varphi(x)=\frac{-\sin x}{1^{\alpha-1}}-\frac{\sin 2x}{2^{\alpha-1}}-\frac{\sin 3x}{3^{\alpha-1}}-\ldots. \qquad (12)$$

Этот ряд сходится равномерно на $(-\infty,\ \infty)$ уже при $\alpha>2$. Но тогда при $\alpha>2$

$$S'(x)=\varphi(x). \qquad (13)$$

Рассмотрим случай $1<\alpha\leqslant 2$. В этом случае признак Вейерштрасса к ряду (12) неприменим. Однако ряд (12) равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon>0$ (см. § 9.8, пример 4). Так как к тому же сходится на этом отрезке и ряд (11), то можно утверждать на основании теоремы 3, что имеет место равенство (13) на отрезке $[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon]$, как бы ни было мало $\varepsilon>0$, но тогда, очевидно, и на интервале $(0,\ 2\pi)$.

Если учесть, что члены ряда (11) имеют период 2π, то мы доказали, что при условии $1<\alpha\leqslant 2$ ряд (11) законно дифференцировать почленно для всех значений $x\in(-\infty,\ \infty)$, исключая точки $x_k=2k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

Пример 2. Пусть функция $f_n(x)$ является непрерывной на $[0,\ 1]$, линейной на каждом из отрезков $[0,\ 1/2n]$ и $[1/2n,\ 1/n]$ и такой, что $f_n(0)=f(1/n)=0$, $f_n(1/2n)=\alpha_n$, $f_n(x)\equiv 0$ на $[1/n,\ 1]$, где α_n — любая последовательность чисел (рис. 105). Тогда, очевидно, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ для всех $x\in[0,\ 1]$, а

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^{1/2n} 2n\alpha_n x\,dx+\int_{1/2n}^{1/n} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n}-x\right)dx=\frac{\alpha_n}{2n}.$$

Очевидно, далее, что

$$r_n=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-0|=\alpha_n,$$

поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_n\to 0$. Равенство

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx\to\int_0^1 f(x)\,dx \qquad (f(x)\equiv 0) \tag{14}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_n/2n\to 0$ $(n\to\infty)$.

Мы видим, что из равномерной сходимости f_n к $f=0$ на $[0,\ 1]$ (т. е. когда $\alpha_n\to 0$) следует сходимость интегралов (14), что согласуется с теоремой 2. Но последовательность $\{f_n\}$ может сходиться *неравномерно*, в то время как свойство (14) все же соблюдается, например, при $\alpha_n=1$. Это показывает, что равномерная сходимость последовательности является достаточным, но не необходимым условием сходимости последовательности интегралов к интегралу от предельной функции. Далее, при $\alpha_n=n$ последовательность $\{f_n\}$ не только сходится к нулю неравномерно, но и свойство (14) не соблюдается.

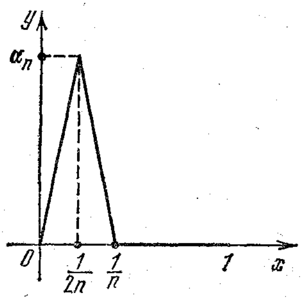

Рис. 105.

Таким образом, если последовательность $\{f_n\}$ сходится неравномерно, то возможно, что последовательность интегралов $\int_a^b f_n(x)\,dx$ сходится к интегралу от предельной функции $\int_a^b f(x)\,dx$, а возможно, что сходится к другому числу (при $\alpha_n=n$ сходится к 1/2, а не к нулю) или же не сходится вовсе.

Пример 3. Из равенства $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+\ldots$ $(z=\rho e^{i\theta}$, $\rho<1)$ следует, что

$$\frac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})}=\frac{1}{2}+\rho e^{i\theta}+\rho^2e^{2i\theta}+\ldots,$$

а отделяя действительную и мнимую части, получим

$$P(\rho, \theta)=\frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}=\frac{1}{2}+\rho\cos\theta+\rho^2\cos 2\theta+\ldots, \tag{15}$$

$$Q(\rho, \theta)=\frac{\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}=\rho\sin\theta+\rho^2\sin 2\theta+\ldots. \tag{16}$$

Функция $P(\rho, \theta)$ называется *ядром Пуассона*[1]), а $Q(\rho, \theta)$ — *ему сопряженной функцией.*

Эти функции являются гармоническими функциями (для $\rho<1$), т. е. удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа[2]) в полярных координатах

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0. \tag{17}$$

В самом деле, каждый член ряда (15) является гармонической функцией

$$(\rho^n\cos n\theta)'_\rho=n\rho^{n-1}\cos n\theta, \quad (\rho^n\cos n\theta)''_\rho=n(n-1)\rho^{n-2}\cos n\theta,$$

$$(\rho^n\cos n\theta)''_\theta=-n^2\rho^n\cos n\theta,$$

$$\Delta(\rho^n\cos n\theta)=\rho^{n-2}\cos n\theta\,[n(n-1)+n-n^2]=0.$$

Аналогично $\Delta(\rho^n\sin n\theta)=0$.

Законность почленного дифференцирования рядов (15) и (16) обусловлена тем, что эти ряды и формально продифференцированные (один или два раза) ряды равномерно сходятся при $0\leqslant\rho\leqslant\rho_0$, где ρ_0 — любое положительное число, меньшее единицы.

Заметим, что функция $u(x, y)$, где x и y — декартовы координаты, называется *гармонической в области* Ω точек (x, y), если она удовлетворяет в этой области дифференциальному уравнению

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$$

В полярных координатах это уравнение имеет вид (17).

§ 9.10. Перемножение абсолютно сходящихся рядов

Рассмотрим два абсолютно сходящихся ряда

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}u_k, \quad \sigma=\sum_{l=0}^{\infty}v_l \tag{1}$$

---

[1]) С. Д. Пуассон (1781—1840) — французский математик и физик.
[2]) П. С. Лаплас (1749—1827) — французский математик и физик.

с действительными или комплексными членами. Перенумеруем пары (k, l), где $k=0, 1, 2, \ldots, l=0, 1, 2, \ldots,$ каким-нибудь способом

$$(k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), \ldots . \tag{2}$$

Здесь важно, что каждая указанная пара (k, l) входит в последовательность (2) в качестве ее элемента один раз. Она имеет в этой последовательности определенный номер. Докажем, что

$$S\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} u_{k_i} v_{l_i}, \tag{3}$$

и при этом ряд справа в (3) абсолютно сходится.

Таким образом, если из всевозможных произведений $u_k v_l$, взятых в любом порядке, составить ряд, то этот ряд абсолютно сходится и имеет сумму, равную $S\sigma$.

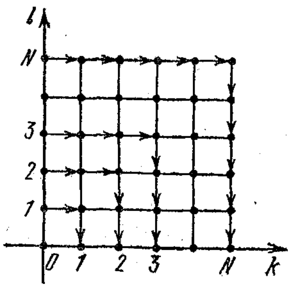

Рис. 106.

Чтобы доказать это утверждение, составим ряды из модулей $|u_k|$ и $|v_l|$:

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|, \quad \overline{\sigma} = \sum_{l=0}^{\infty} |v_l|. \tag{1'}$$

Положим

$$\overline{S}_N = \sum_{k=0}^{N} |u_k|, \quad \overline{\sigma}_N = \sum_{l=0}^{N} |v_l|.$$

Пары (k, l) упорядочим сначала следующим образом (рис. 106): $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$, $\ldots$, тогда

$$\overline{S}\overline{\sigma} = \lim_{N\to\infty} \overline{S}_N \lim_{N\to\infty} \overline{\sigma}_N = \lim_{N\to\infty} (\overline{S}_N \cdot \overline{\sigma}_N) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} (|u_0|\cdot|v_0| + |u_0|\cdot|v_1| + |u_1|\cdot|v_1| + |u_1|\cdot|v_0| + |u_0|\cdot|v_2| +$$
$$+ |u_1|\cdot|v_2| + |u_2|\cdot|v_2| + |u_2|\cdot|v_1| + |u_2|\cdot|v_0| + \ldots + |u_N|\cdot|v_0|). \tag{4'}$$

Это показывает, что сумма справа стремится при $N\to\infty$ к пределу, равному $\overline{S}\overline{\sigma}$, и так как члены ее неотрицательные, то число $\overline{S}\overline{\sigma}$ есть сумма ряда

$$\overline{S}\overline{\sigma} = |u_0|\cdot|v_0| + |u_0|\cdot|v_1| + |u_1|\cdot|v_1| + \ldots . \tag{5'}$$

Так как члены этого ряда неотрицательные, то их можно переставлять как угодно, не изменяя его сходимости и суммы $\bar{S}\bar{\sigma}$.

Мы доказали наше утверждение пока для рядов (1′). Пусть теперь

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k, \quad \sigma_N = \sum_{l=0}^{N} v_l.$$

Как в (4′) в силу сходимости рядов (1) будем иметь

$$S\sigma = \lim_{N\to\infty} (S_N\sigma_N) = \\ = \lim_{N\to\infty} (u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + \ldots + u_Nv_0). \quad (4)$$

Таким образом, существует предел справа в (4) при $N \to \infty$, равный $S\sigma$. Но мы уже доказали, что ряд (5′) сходится. Это показывает, что и ряд

$$u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + \ldots \quad (5)$$

сходится и притом абсолютно.

В силу же (4) сумма этого ряда равна $S\sigma$:

$$S\sigma = u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + \ldots .$$

Мы, таким образом, доказали равенство (3) пока для одного определенного способа нумерации пар (k, l). Но в силу абсолютной сходимости ряда (5) равенство (3) сохранится и при любом другом способе нумерации.

Пример. Ряд

$$\psi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad (6)$$

абсолютно сходится для любого комплексного значения z или, как говорят, абсолютно сходится на всей комплексной плоскости. В этом легко убедиться, если к ряду с общим членом $|z|^n/n!$ применить признак Даламбера.

Для любых двух комплексных чисел u и v имеем (пояснения ниже)

$$\psi(u)\psi(v) = \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + v + \frac{v^2}{2!} + \ldots\right) = \\ = 1 + u + v + \frac{u^2}{2!}\cdot 1 + u\cdot v + 1\cdot\frac{v^2}{2!} + \frac{u^3}{3!}\cdot 1 + \frac{u^2}{2!}v + u\frac{v^2}{2!} + \\ + 1\cdot\frac{v^3}{3!} + \ldots = 1 + (u+v) + \frac{1}{2!}(u^2 + 2uv + v^2) + \\ + \frac{1}{3!}(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + \ldots = \\ = 1 + (u+v) + \frac{(u+v)^2}{2!} + \frac{(u+v)^3}{3!} + \ldots = \psi(u+v). \quad (7)$$

Во втором равенстве мы расположили произведения $\frac{u^k}{k!}\frac{l^l}{l!}$ в порядке, который можно усмотреть из рис. 107

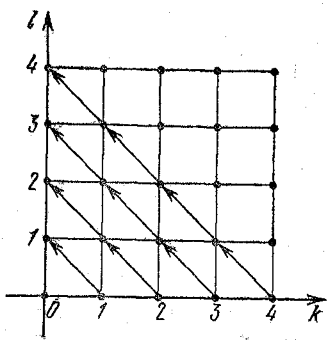

Рис. 107.

и воспользовались равенством (3) для абсолютно сходящихся рядов. Полученный при этом ряд, как было доказано в общем случае, абсолютно сходится. Отдельные группы членов сходящегося ряда законно объединить скобками, не нарушая его сходимость. Это и сделано в последующих равенствах.

Мы доказали важное равенство

$$\psi(u+v)=\psi(u)\cdot\psi(v) \qquad (8)$$

для любых комплексных u и v. О нем еще будет идти речь в § 9.13.

§ 9.11. Степенные ряды

Ряд вида

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots, \qquad (1)$$

где a_k—постоянные числа, а z—переменная, называется *степенным рядом*. При этом a_k и z могут быть комплексными, мы так и будем считать в дальнейшем, иногда только переходя в область действительного переменного. Буква z будет обозначать, вообще говоря, комплексное переменное число (точку комплексной плоскости), а буква x—действительное переменное число (точку действительной оси x).

В теории степенных рядов центральное место занимает следующая основная теорема.

Теорема 1 (основная). *Для степенного ряда* (1) *существует неотрицательное число R, конечное или бесконечное* ($0\leqslant R\leqslant\infty$), *обладающее следующими свойствами*:

1) *Ряд сходится и притом абсолютно в открытом круге комплексной плоскости $|z|<R$ и расходится в точках z с $|z|>R$.*

2) *Число R определяется по формуле*

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}},\tag{2}$$

где в знаменателе стоит верхний предел (см. § 2.10).

Мы позволяем себе при этом считать, что

$$\frac{1}{0}=\infty,\quad \frac{1}{\infty}=0.$$

Таким образом, если указанный верхний предел равен 0, то $R=\infty$, если же он равен ∞, то $R=0$.

Открытый круг $|z|<R$ называется *кругом сходимости степенного ряда.* При $R=\infty$ он превращается во всю комплексную плоскость. При $R=0$ степенной ряд имеет только одну точку сходимости, именно точку $z=0$; R называют *радиусом сходимости ряда* (1).

Замечание 1. Число R, удовлетворяющее утверждению 1) теоремы 1, очевидно, единственно.

Замечание 2. Если для степенного ряда (1) существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$. Поэтому

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Читатель, не ознакомившийся с понятием верхнего предела, может проследить за ходом доказательства теоремы 1, предположив, что для рассматриваемого степенного ряда указанный предел существует. В этом случае всюду в производимых ниже рассуждениях надо заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

Доказательство теоремы 1. Пусть число R определяется по формуле (2). В точке $z=0$ степенной ряд сходится. Будем далее считать, что $|z|>0$. Наряду с рядом (1) введем второй ряд, составленный из его модулей,

$$|a_0|+|a_1z|+|a_2z^2|+\ldots.\tag{1'}$$

Общий член ряда (1′) обозначим через

$$u_n=|a_nz^n|\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\tag{3}$$

Согласно обобщенному признаку Коши сходимости ряда (см. § 9.4, теорема 3, в)),

$$\text{если } \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1, \text{ то ряд } (1') \text{ сходится,}$$

$$\text{если же } \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1, \text{ то ряд } (1') \text{ расходится}$$

и при этом переменная u_n неограничена, но

$$\varlimsup \sqrt[n]{u_n} = \varlimsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \varlimsup \left(|z| \sqrt[n]{|a_n|}\right) = \\ = |z| \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

Здесь мы вынесли за знак верхнего предела конечное число $|z| > 0$.

Из сказанного следует: если $|z| < R$, т. е. $|z|/R < 1$, то ряд (1′) сходится, а вместе с ним сходится и притом абсолютно ряд (1); если же $|z| > R$, т. е. $|z|/R > 1$, то ряд (1′) расходится и его общий член $|a_n z^n|$ неограничен, поэтому общий член ряда (1) $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ и для него не выполняется необходимый признак (см. § 9.1). Это показывает, что ряд (1) расходится.

Итак, мы доказали, что определяемое из равенства (2) число R обладает следующим свойством:

если $|z| < R$, то ряд (1) сходится и притом абсолютно,
если же $|z| > R$, то ряд (1) расходится.

Основная теорема доказана.

Будем в дальнейшем для краткости обозначать через σ_q замкнутый круг $|z| \leqslant q$ комплексной плоскости.

Заметим, что степенной ряд сходится на открытом круге $|z| < R$, вообще говоря, неравномерно. Однако верна следующая теорема.

Теорема 2. *Степенной ряд* (1) *абсолютно и равномерно сходится на любом круге* $\sigma_q = \{z : |z| \leqslant q\}$, *где* $q < R$, *а* R — *радиус сходимости ряда* (1).

Доказательство. В самом деле, пусть $q < R$, тогда q есть действительная, т. е. лежащая на оси x точка, принадлежащая открытому кругу сходимости ряда (1). Поэтому в этой точке наш степенной ряд абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n| < \infty.$$

С другой стороны, для $z \in \sigma_q$ имеем

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n q^n| \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Так как правые части этих неравенств не зависят от $z \in \sigma_q$ и ряд, составленный из правых частей, сходится, то по признаку Вейерштрасса (см. § 9.8, теорема 1) степенной ряд (1) сходится на σ_q абсолютно и равномерно.

Теорема 3. *Сумма*

$$S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

степенного ряда есть непрерывная функция на его открытом круге сходимости $|z| < R$.

В самом деле, члены нашего ряда — непрерывные функции от z, а сам ряд равномерно сходится на круге σ_q, $q < R$. Следовательно, по известной теореме из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 9.8, теорема 2) сумма ряда $S(z)$ есть непрерывная функция на σ_q, но тогда и на всем круге $|z| < R$, потому что $q < R$ произвольно.

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда в нашем распоряжении имеется формула (2), но часто на практике при вычислении R удобно бывает воспользоваться признаком Даламбера.

Пусть существует предел (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \tag{4}$$

который мы пока обозначим через $1/R_1$. Тогда (см. (3))

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{R_1}$$

и, согласно признаку Даламбера (§ 9.4, теорема 2), если $|z| < R_1$, то ряд (1'), а вместе с ним и ряд (1), сходится, если же $|z| > R_1$, то $|u_n| \to \infty$ и ряд (1) расходится. Но число R с такими свойствами может быть только единственным, поэтому $R_1 = R$ (см. теорему 1).

Итак мы доказали, что если существует предел (4), то он равен $1/R$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}, \tag{5}$$

где R — радиус сходимости степенного ряда (1).

Заметим, что мы окольным путем доказали, что если предел (4) (конечный или бесконечный) существует, то он равен верхнему пределу $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Замечание 3. В нашей учебной литературе обычно начинают изложение теории степенных рядов с теоремы Абеля, которая гласит:

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке $z_0 \neq 0$ комплексной плоскости, то он сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $|z| \leqslant q$, где q — любое число, удовлетворяющее неравенствам $0 < q < |z_0|$.*

Доказательство. Эта теорема теперь уже является следствием из теорем 1 и 2. В самом деле, так как z_0 есть точка сходимости ряда (1), то $|z_0|$ не может быть большим, чем R. Поэтому $|z_0| \leqslant R$, $0 < q < |z_0| \leqslant R$ и $q < R$. Но тогда по теореме 2 степенной ряд (1) сходится на круге $|z| \leqslant q$ абсолютно и равномерно.

Примеры.

$$1 + z + z^2 + \dots, \tag{6}$$

$$1 + \frac{z}{1^\alpha} + \frac{z^2}{2^\alpha} + \frac{z^3}{3^\alpha} + \dots \quad (\alpha > 0), \tag{7}$$

$$1 + z + 2!\,z^2 + 3!\,z^3 + \dots . \tag{8}$$

С помощью формулы (2) или (5) заключаем, что радиус сходимости рядов (6) и (7) равен 1; для ряда (8) он равен 0.

Сумма ряда (6) (геометрическая прогрессия) в открытом круге $|z| < 1$ равна $(1-z)^{-1}$, а остаток

$$r_n(z) = \sum_{n+1}^{\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Однако сходимость на указанном круге неравномерна. Неравномерность сходимости имеет место уже для положительных $z = x$ на интервале $0 < x < 1$; неравенство

$$\varepsilon > \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{9}$$

при любом заданном n нельзя удовлетворить для всех указанных x.

Ведь если x взять очень близким к 1, то числитель в правой части будет тоже близок к 1, а знаменатель близок к нулю и дробь в правой части (9) можно, таким образом, сделать большей чем ε.

Ряд (7) при $\alpha > 1$ равномерно сходится на замкнутом круге $|z| \leqslant 1$ его сходимости, так как при $|z| \leqslant 1$

$$|z^\alpha k^{-\alpha}| \leqslant k^{-\alpha} \quad \text{и} \quad \sum k^{-\alpha} < \infty.$$

Если $\alpha=1$, то в точке $z=1$, лежащей на границе круга сходимости, ряд (7) расходится.

Ряд (8) сходится только в точке $z=0$.

§ 9.12. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1. *Радиусы сходимости степенного ряда*

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \tag{1}$$

и ряда

$$a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots, \tag{2}$$

полученного из него формальным дифференцированием, совпадают.

Замечание. Определение непрерывности и производной от функции комплексного переменного $f(z)$ такое же, как и в случае функции от действительной переменной. Необходимо лишь иметь в виду, что δ-окрестность точки z_0 есть открытый круг радиуса δ с центром в точке z_0. Исходя из этого определения, производная от степенной функции z^n вычисляется по формуле $(z^n)'=nz^{n-1}$.

Доказательство теоремы 1. Будем считать, что R есть радиус сходимости ряда (1), а R' — радиус сходимости ряда (2). Докажем теорему в предположении, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R} \tag{3}$$

конечный или бесконечный существует. Имеем

$$\frac{1}{R'}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{R}=\frac{1}{R},$$

следовательно, $R=R'$.

В общем случае, когда предел (3) не существует, имеет место

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

и тогда

$$\frac{1}{R'}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n\,|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1\cdot\frac{1}{R}=\frac{1}{R}.$$

Но требуется обоснование второго равенства — надо доказать, что если α_n, $\beta_n > 0$ и $\alpha_n \to 1$, то

$$\overline{\lim}\,(\alpha_n\beta_n) = \overline{\lim}\,\beta_n. \tag{4}$$

В самом деле, существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$\overline{\lim}\,\beta_n = \lim \beta_{n_k} = \lim \alpha_{n_k}\cdot\lim \beta_{n_k} = \lim\,(\alpha_{n_k}\beta_{n_k}) \leqslant \overline{\lim}\,(\alpha_n\beta_n). \tag{5}$$

Существует также подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$\overline{\lim}\,(\alpha_n\beta_n) = \lim\,(\alpha_{n_k}\beta_{n_k}) = \frac{\lim\,(\alpha_{n_k}\beta_{n_k})}{\lim \alpha_{n_k}} = \lim \beta_{n_k} \leqslant \overline{\lim}\,\beta_n. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует (4).

Теорема 2. *Степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad (|z| < R) \tag{7}$$

законно формально дифференцировать в пределах его (открытого) круга сходимости $|z| < R$, т. е. верна формула

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots \quad (|z| < R). \tag{8}$$

Доказательство. Эту теорему мы докажем только в предположении, что $z = x$ есть действительная переменная, что даст нам возможность свести вопрос к хорошо известному факту из теории действительных рядов.

Итак, степенной ряд (7) для действительной переменной имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (-R < x < R). \tag{7'}$$

Этот ряд теперь уже имеет не круг, а интервал сходимости $(-R,\ R)$. Соответствующий формально продифференцированный ряд имеет вид

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \tag{8'}$$

Его сумму мы пока обозначили через $\varphi(x)$. Он сходится на интервале $(-R,\ R)$ на основании предыдущей теоремы. Оба ряда, как мы знаем, равномерно сходятся на отрезке $[-q,\ q]$, где $q < R$. При этом члены второго ряда непрерывны и являются производными от соответствующих членов первого. Но тогда на основании теоремы из теории равномерно сходящихся рядов (см. § 9.9, теорема 3) выполняется равенство

$$\varphi(x) = f'(x) \tag{9}$$

на отрезке $[-q, q]$, следовательно, и на интервале $(-R, R)$, потому что $q < R$ произвольно.

Отметим, что в силу доказанной теоремы 2 ряд (1) законно почленно дифференцировать сколько угодно раз. На k-м этапе мы получим равенство

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + (k+1)\,k\ldots 2a_{k+1}z + \ldots,$$

справедливое для всех z с $|z| < R$. Если положить в нем $z = 0$, то получим

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

или

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда, в частности, следует, что *разложение функции $f(z)$ в степенной ряд* (см. (1)) *в некотором круге $|z| < R$ (или в интервале $(-R < x < R)$, если речь идет о функции $f(x)$ действительного переменного x) единственно.*

Таким образом, сумму $f(z)$ степенного ряда (7), имеющего радиус сходимости $R > 0$, можно записать еще следующим образом:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k. \qquad (10)$$

Ряд справа в (10) называется *рядом Тейлора функции $f(z)$ по степеням z.*

Мы получили, что *если степенной ряд* (1) *имеет радиус сходимости $R > 0$, то он является рядом Тейлора своей суммы $f(z)$.*

Вопрос о почленном интегрировании степенных рядов во всей его полноте потребовал бы введения криволинейного интеграла от функции комплексного переменного. Мы ограничимся рассмотрением этого вопроса только для степенных рядов

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \qquad (11)$$

от действительной переменной x $(z = x)$.

Зададим степенной ряд (11), имеющий интервал сходимости $(-R, R)$, где $0 < R \leqslant \infty$. Числа a_k могут быть действительными и комплексными. Зададим фиксированную точку $x_0 \in (-R, R)$ и переменную точку $x \in (-R, R)$ и подберем $q > 0$ так, чтобы

$$-R < -q < x_0,\ x \leqslant q \leqslant R.$$

Степенной ряд (11) равномерно сходится на отрезке $[-q, q]$, находящемся строго внутри интервала сходимости ряда, и, следовательно, его можно почленно интегрировать (см. § 9.9, теорема 2) от x_0 до x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x^2-x_0^2)+\frac{a_2}{3}(x^3-x_0^3)+\ldots \quad (12)$$

$$(R < x,\ x_0 < R).$$

В частности, при $x_0=0$ получим

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots \qquad (-R<x<R). \quad (13)$$

Пример 1. Очевидно, что

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots$$

Этот ряд сходится на интервале $(-1, 1)$ $(R=1)$. Поэтому, если $x\in(-1, 1)$, то законно почленное интегрирование этого ряда от нуля до x (ряд равномерно сходится на любом отрезке, принадлежащем к интервалу сходимости):

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad (-1<x<1).$$

Полученный ряд сходится и при $x=+1$ (как ряд Лейбница). Можно доказать, что он сходится к $\operatorname{arctg} 1=\pi/4$, т. е. $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ (см. далее § 9.14, с. 409).

Пример 2. Ряд Тейлора для функции e^{-t^2} имеет вид (см. § 4.16)

$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots,$$

причем для него $R=\infty$. Поэтому этот ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots,$$

т. е. мы получили выражение интеграла Пуассона через степенной ряд.

Пример 3. Ряд Тейлора функции $y=\sin x$ имеет вид (см. § 4.16)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .$$

Он сходится на всей оси. Отсюда при $x \neq 0$ имеем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots . \tag{14}$$

Считая, что $\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0} = 1$, получаем, что равенство (14) верно и при $x=0$. Ряд (14) равномерно сходится на любом конечном интервале действительной оси. Интегрируя этот степенной ряд, получаем:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots .$$

Пример 4. Ряд Тейлора для функции $y=\cos x^2$ имеет вид (см. § 4.16)

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots .$$

Он сходится на $(-\infty, \infty)$. Интегрируя этот степенной ряд, получим интеграл Френеля

$$\int_0^x \cos t^2\,dt = x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \ldots .$$

Пример 5. Так как

$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{если } n = 2k, \\ \operatorname{ch} x, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

то

$$\left.(\operatorname{sh} x)^{(n)}\right|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ 1, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

поэтому ряд Тейлора функции $\operatorname{sh} x$ запишется так:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots . \tag{15}$$

Так как этот степенной ряд сходится на всей действительной оси (применить признак Даламбера), то можно его почленно дифференцировать:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{16}$$

(ряд справа в (16) равномерно сходится на любом конечном интервале).

§ 9.13. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ от комплексного переменного

Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ от действительной переменной x определены на всей действительной оси $(-\infty < x < \infty)$.

Из § 4.16 мы знаем, что эти функции разлагаются в степенные ряды:

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

сходящиеся на $(-\infty, \infty)$.

Это есть ряды Тейлора этих функций по степеням x.

В § 5.3 было дано определение функции e^{ix}, где x — действительная переменная, посредством формулы Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{2}$$

Подставим в правую часть (2) вместо $\cos x$ и $\sin x$ их степенные ряды, тогда получим разложение e^{ix} по степеням x

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \\ = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots$$

Функцию e^z для любого комплексного $z = x + iy$ естественно определить следующим образом:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Отсюда

$$e^z = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots\right) = \\ = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

Во втором равенстве мы воспользовались свойством (перемножение абсолютно сходящихся рядов), которое было уже выведено ранее (см. § 9.10, (7)).

Мы получили, что функция e^z от комплексного переменного z разлагается в степенной ряд по степеням z

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{3}$$

сходящийся к ней на всей комплексной плоскости.

Ряд (3) есть ряд Тейлора функции e^z по степеням z.

Радиус сходимости ряда (3) $R=\infty$, и уже из общих свойств степенных рядов (см. § 9.10) следует, что ряд (3) абсолютно сходится для любого комплексного z, при этом он равномерно сходится (к e^z) на круге $|z| \leqslant q$ как бы ни было велико положительное число q.

Функции $\cos z$ и $\sin z$ от комплексной переменной z естественно определить как суммы следующих степенных рядов:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.$$

Оба эти ряда имеют радиус сходимости $R=\infty$ и, таким образом, обе соответствующие функции определены для любого комплексного z.

Легко проверяется сравнением соответствующих степенных рядов, что

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{4}$$

для любого комплексного z.

Теперь, пользуясь свойствами показательной функции e^u (от комплексного u), легко получаем формулы

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v,$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v,$$

верные для любых комплексных u и v.

Эти формулы, таким образом, обобщают хорошо известные формулы тригонометрии, где считалось, что u и v — действительные переменные. Отметим, что функции $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости обладают не всеми свойствами обычных функций $\sin x$ и $\cos x$. В частности, эти функции неограничены на комплексной плоскости.

В силу (4) при действительном x

$$\cos ix = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x \to \infty, \quad x \to \infty, \tag{5}$$

$$\sin ix = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = i \operatorname{sh} x \to \infty, \quad x \to \infty. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6), между прочим, устанавливают связь между «комплексной тригонометрией» и «гиперболической тригонометрией».

Функция $z = \ln w$ от комплексной переменной w определяется как обратная функция к функции

$$w = e^{z}. \tag{7}$$

Если записать $w \neq 0$ в показательной форме

$$w = \rho e^{i\theta} \qquad (\rho = |w| > 0),$$

то равенство (7) запишется в виде

$$\rho e^{i\theta} = e^{x} e^{iy} \qquad (z = x + iy),$$

откуда

$$\rho = e^{x}, \qquad \theta = y - 2k\pi,$$

т. е.

$$x = \ln \rho, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} z = \ln w = x + iy = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi) = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \\ = \ln|w| + i \arg w + i2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\ln|w|$ ($|w| > 0$) понимается в обычном смысле. Из (8) видно, что $\ln w$ ($w \neq 0$) есть многозначная функция от w вместе с $\operatorname{Arg} w$, независимо от того, будет ли w действительным или комплексным.

Например, с точки зрения этой теории (функций комплексного переменного) $\ln 1$ равен одному из чисел $2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). В действительном анализе для выражения $\ln 1$ выбирается среди этих чисел единственное действительное число 0.

Но мы не будем углубляться дальше в теорию функций комплексного переменного — это не наша задача. Сделаем только замечание по поводу формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (-1 < x \leqslant 1).$$

которая была выведена в § 4.16 для действительных x. Если подставить в ряд в правой части вместо x комплексное z с

$$|z|<1,$$

то ряд останется сходящимся. Можно сказать, что его сумма равна $\ln(1+z)$, так как мы его определили выше, точнее, равна одной из однозначных ветвей многозначной функции

$$\ln(1+z).$$

Функции комплексного переменного, разлагающиеся в степенные ряды (ряды Тейлора), называются *аналитическими функциями*. Они изучаются в разделе математики, называемом теорией аналитических функций или теорией функций комплексного переменного[1]).

Наконец отметим, что если в степенном ряде по степеням u

$$a_0+a_1u+a_2u^2+\dots$$

с кругом сходимости $|u|<R$ положить $u=z-z_0$, где z_0—фиксированное число (вообще говоря, комплексное), то получим ряд

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots,$$

называемый *степенным рядом по степеням* $z-z_0$.

Он сходится в круге (сходимости) $|z-z_0|<R$ и расходится для z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|>R$.

§ 9.14. Ряды в приближенных вычислениях

В этом параграфе мы будем заниматься приближенным вычислением значений элементарных функций.

Простейшая элементарная функция—это многочлен

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n.$$

Вычисление этой функции при $x=x_0$ сводится к производству конечного числа сложений и умножений. Значение этой функции в точке x_0 может быть легко найдено с любой степенью точности. Если использовать ЭВМ (электронную вычислительную машину), то это можно сделать весьма быстро.

---

[1]) См. нашу книгу «Дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы. Функции комплексного переменного».

Другие элементарные функции, такие как $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, ..., как мы показали выше, разлагаются в ряд Тейлора по степеням x.

Погрешность, которую мы допускаем при замене функции (суммы ряда), на многочлен Тейлора, можно узнать, оценивая остаточный член ряда.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots \qquad (-R<x<R) \tag{1}$$

с интервалом сходимости $(-R, R)$. Строго внутри интервала сходимости он сходится к $f(x)$ со скоростью убывающей геометрической прогрессии.

В самом деле, пусть q_1 и q — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $0<q_1<q<R$. Тогда ряд (1) сходится в точке $x=q$ и его члены образуют ограниченную последовательность ($|c_nq^n|\leqslant M, \forall n$). Поэтому для всех $x\in[-q_1, q_1]$

$$|c_nx^n|=\left|c_nq^n\left(\frac{x}{q}\right)^n\right|\leqslant M\left(\frac{q_1}{q}\right)^n,$$

где $q_1/q<1$.

Мы видим, что степенным рядом выгодно пользоваться для вычисления значений функции $f(x)$ в точках, лежащих строго внутри интервала сходимости.

Если же точка x есть один из концов интервала $(-R, R)$, то в этой точке, если ряд и сходится, то медленнее, чем убывающая геометрическая прогрессия. Обычно настолько медленнее, что нецелесообразно пользоваться непосредственно степенным рядом (1) для вычисления значения f в указанной концевой точке. Ниже мы проиллюстрируем эти факты на конкретных примерах.

Начнем с *вычисления числа* π.

В § 9.12 в примере 1 показано, что

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots \qquad (-1<x<1). \tag{2}$$

В точке $x=1$ этот ряд также сходится. Докажем, что он сходится именно к $\operatorname{arctg} 1=\pi/4$. В § 9.12 этот факт мы не доказывали.

Рассмотрим тождество

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Интегрируя это тождество на [0, 1] имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2\,dx + \ldots + (-1)^n \int_0^1 x^{2n} dx +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \alpha_n,$$

где

$$\alpha_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

Легко видеть, что

$$|\alpha_n| \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \operatorname{arctg} 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

т. е. $\operatorname{arctg} 1$ является суммой ряда

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

или

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \tag{3}$$

Мы видим, что этот ряд сходится медленнее любой убывающей геометрической прогрессии.

Для того чтобы вычислить число π с помощью ряда (3), с точностью до 10^{-6}, надо взять столько слагаемых ряда (3), чтобы остаток был меньше 10^{-6}. Так как ряд (3) есть ряд Лейбница, то его остаток меньше модуля первого его члена

$$|R_n| = \left| 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| < \frac{4}{2n+3}.$$

Отсюда видно, что при $n = 2 \cdot 10^6$, $|R_n| < 10^{-6}$. Таким образом, нужно взять два миллиона слагаемых ряда (3), чтобы гарантировать значение числа π с требуемой точностью.

Вручную такую работу выполнять бессмысленно. На ЭВМ эту работу можно выполнить, но и на ЭВМ эта работа будет не производительной, если мы будем пользоваться рядом (3).

Укажем ряд более быстро сходящийся к числу π. С этой целью рассмотрим число α такое, что

$$\operatorname{tg}\alpha = 1/5.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg}(\pi/4)}{1+\operatorname{tg} 4\alpha\cdot\operatorname{tg}(\pi/4)} = \frac{1}{239}.$$

Отсюда

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1/239),$$

$$\pi = 16\alpha - 4\operatorname{arctg}(1/239) = 16\operatorname{arctg}(1/5) - 4\operatorname{arctg}(1/239).$$

Используя теперь ряд (2), получаем

$$\pi = 16\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,5^{2k+1}} - 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,239^{2k+1}}.$$

Последние два ряда сходятся довольно быстро (быстрее убывающей геометрической прогрессии).

Легко проверить, что остаток первого ряда уже при $n=4$ меньше 10^{-6}. Поэтому, вычисляя четыре слагаемых первого ряда и два слагаемых второго ряда (с точностью до седьмого знака), в результате получим

$$\pi \approx 3{,}141592,$$

причем первые пять десятичных знаков точные.

Вычисление логарифмов. Ряд Тейлора для функции $y = \ln(1+x)$ можно получить, интегрируя тождество

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad (|x| < 1),$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. \tag{4}$$

При $x=1$ данный ряд сходится и притом к $\ln 2$. В самом деле, интегрируя тождество

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

по $[0, 1]$, получаем

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\beta_n,$$

где

$$|\beta_n|=\left|\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx\right|\leqslant\int_0^1 x^{n+1}\,dx=\frac{1}{n+2}\to 0, \quad n\to\infty.$$

Ряд (4) при $x=1$, так же как и ряд (3), сходится медленно.

Заменяя в (4) x на $-x$, получаем

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}. \tag{5}$$

Вычитая (5) из (4), имеем

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{6}$$

Это равенство и используется для вычисления логарифмов от натуральных чисел. Например, полагая $x=1/3$, получаем

$$\ln 2=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\,3^{2k+1}}, \tag{7}$$

где ряд справа сходится даже быстрее геометрической прогрессии.

Для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-5} достаточно взять пять слагаемых ряда (7):

$$\ln 2\approx 0{,}693146$$

(каждое слагаемое ряда вычисляем с шестью знаками после запятой).

Вообще, полагая

$$x=\frac{1}{2m+1},$$

m — натуральное число, получим

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{m+1}{m},$$
$$\ln(m+1)=\ln m+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2m+1)^{2k+1}}. \tag{8}$$

Полагая последовательно $m=2, 3, \ldots$, найдем $\ln 3$, $\ln 4$, ... Ряд справа в (8) сходится очень быстро.

Вычисление корней. Ряд Тейлора для функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ мы получили в § 4.16:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \tag{9}$$

Ряд (9) называют *биномиальным*. Известно, что ряд (9) при $x=\pm 1$ не всегда сходится, а если сходится, то медленно. Поэтому, если, например, надо вычислить $\sqrt{2}$, то не рационально воспользоваться формулой (9) при $x=1$, $\alpha=1/2$. Но вот как можно поступить. Обычно преобразуют подкоренное выражение так, чтобы оно мало отличалось от единицы:

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{2\cdot 25\cdot 49}{25\cdot 49}}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2},$$

или

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\frac{1}{\sqrt{49/50}}=\frac{7}{5}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-1/2}=\frac{7}{5}\left(1-\frac{2}{100}\right)^{-1/2}. \tag{10}$$

Нахождение чисел 25 и 49 можно производить так: выписываем квадраты натуральных чисел

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ \ldots, \tag{11}$$

затем выписываем ряд чисел, получаемых из (11) умножением на подкоренное выражение, в данном случае на два:

$$2,\ 8,\ 18,\ 32,\ 50,\ 72,\ 98,\ 128,\ \ldots . \tag{12}$$

В строках (11) и (12) ищем числа таким образом, чтобы их отношение было близким к единице. Среди выписанных чисел это и будут числа 49 и $50=2\cdot 25$.

Если эти строки продолжить, то можно найти еще близкие числа 289 и 288, т. е.

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{2\cdot 144\cdot 289}{144\cdot 289}}=\frac{17}{12}\sqrt{\frac{288}{289}}=\frac{17}{12}\left(1+\frac{1}{288}\right)^{-1/2}. \tag{13}$$

Теперь уже можно использовать ряд (9). Например, в силу (13), при $x=1/288$ получаем

$$\sqrt{2}=\frac{17}{12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\frac{1}{288^k}. \qquad (14)$$

Ряд справа в (14) сходится очень быстро. Кроме того, он знакочередующийся, т. е. остаток ряда меньше модуля первого члена этого остатка.

Запишем ряд (14) в развернутом виде:

$$\sqrt{2}=\frac{17}{12}\left\{1-\frac{1}{2\cdot 288}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\,288^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\,288^3}+\ldots\right\}. \qquad (15)$$

Третий член ряда (15) меньше $8\cdot 10^{-6}<10^{-5}$, поэтому

$$\sqrt{2}\approx\frac{17}{12}\left(1-\frac{1}{576}\right)=1,414207\ldots$$

с точными четырьмя знаками.

Отметим, что вычисление $\sqrt{2}$, исходя из (10), очень удобно, так как в знаменателе мы сразу получаем степени 10. Если взять три первых слагаемых этого ряда, то $\sqrt{2}\approx 1,41421$.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,01.

Выпишем кубы натуральных чисел

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \mathbf{125},\ 216,\ \ldots$$

и ряд этих чисел, умноженных на 5,

$$5,\ 40,\ \mathbf{135},\ 320,\ 625,\ 1080,\ \ldots .$$

Отсюда

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\frac{5\cdot 27\cdot 125}{27\cdot 125}}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{10}{125}\right)^{1/3}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{8}{100}\right)^{1/3}=$$
$$=\frac{5}{3}\left\{1+\frac{8}{3\cdot 10^2}-\frac{2\cdot 8^2}{3^2\cdot 2!\,10^4}+\frac{2\cdot 5\cdot 8^3}{3^3\cdot 3!\,10^6}-\ldots\right\},$$

третий член ряда

$$\frac{5\cdot 8^2}{3^3\cdot 10^4}<0,01,$$

поэтому

$$\sqrt[3]{5}\approx\frac{5}{3}\left(1+\frac{8}{300}\right)=1,71\ldots$$

с точностью до 0,01.

§ 9.15. Понятие кратного ряда

Выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}, \tag{1}$$

где a_{kl} — числа (действительные или комплексные), зависящие от пар индексов k, $l=0, 1, 2, \ldots$, называется *двойным* или *двукратным рядом*. Числа a_{kl} называются *членами ряда*, а числа

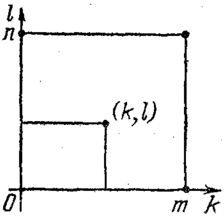

Рис. 108.

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \tag{2}$$

частичными (частными) суммами ряда (1).

Пары целых неотрицательных индексов (k, l) можно рассматривать как точки плоскости с целыми неотрицательными координатами. Тогда в частную сумму S_{mn} входят члены ряда (1) с индексами k, l, соответствующими точкам (k, l) прямоугольника $[0 \leqslant k \leqslant m,\ 0 \leqslant l \leqslant n]$ (рис. 108). В силу этого частичные суммы S_{mn} называют еще *прямоугольными частичными суммами ряда* (1). Количество членов ряда (1) в S_{mn} будет $N=(m+1)(n+1)$.

По определению ряд (1) *сходится по прямоугольникам* к числу S, называемому *суммой ряда* (1), если существует

$$\lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn} = S, \tag{3}$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N_0(\varepsilon)$, что

$$|S_{mn} - S| < \varepsilon$$

для всех m, $n > N_0(\varepsilon)$. В этом случае пишут

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}.$$

Остановимся на случае, когда члены ряда (1) — неотрицательные числа ($a_{kl} \geqslant 0$). Положим

$$\Lambda = \sup_{m,\, n} S_{mn}. \tag{4}$$

Если $\Lambda < \infty$ — конечное число, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется пара m_0, n_0 такая, что $\Lambda - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leqslant \Lambda$, а вследствие неотрицательности a_{kl}

$$S_{m_0 n_0} \leqslant S_{mn}, \quad m, n > N_0 = \max(m_0, n_0).$$

Поэтому $\Lambda - \varepsilon < S_{mn} < \Lambda + \varepsilon$, $m, n > N_0$, и существует предел

$$\lim_{m,\, n\to\infty} S_{mn} = \Lambda.$$

Если же $\Lambda = \infty$, то, очевидно (при $a_{kl} \geqslant 0$!), $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} S_{mn} = \Lambda = \infty$. В этом случае пишут

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \infty.$$

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится (по прямоугольникам) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}|.$$

Как и в случае обычных рядов, доказывается, что абсолютно сходящийся ряд сходится. Доказательство базируется на критерии Коши: *для того чтобы ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $N(\varepsilon)$ *такое, что*

$$|S_{mn} - S_{pq}| < \varepsilon,$$

каковы бы ни были $m, n, p, q > N(\varepsilon)$.

Обоснование критерия Коши производится так же, как и в случае обычных однократных рядов.

Наряду с рядом (1) можно рассматривать еще выражение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right),$$

которому естественно приписать число A (если только оно существует), получаемое следующим образом: если для каждого $k = 0, 1, \ldots$ ряд, заключенный в скобки, сходится и имеет сумму A_k и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ сходится к числу A, то полагаем

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{5}$$

Теорема 1. *Если ряд* (1) *абсолютно сходится, то имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{6}$$

Доказательство. Допустим сначала, что a_{kl} неотрицательны. Пусть левая часть (6) равна числу S.

Для любых неотрицательных s и n при $s \leqslant m$

$$\sum_{l=0}^{n} a_{sl} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant S, \tag{7}$$

откуда ряды $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_{sl}$ $(s = 0, 1, \ldots)$ сходятся; поэтому, если во втором неравенстве в (7) зафиксировать m и перейти к пределу при $n \to \infty$, получим, что

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right) \leqslant S$$

для любого m, откуда следует существование числа A (см. (5)) и тот факт, что $A \leqslant S$.

С другой стороны, если число A конечно, то при любых m, n

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{n} a_{kl} \right) \leqslant A,$$

и потому

$$S = \sup_{m, n} S_{mn} \leqslant A.$$

Равенство (6) при $a_{kl} \geqslant 0$ доказано.

Пусть теперь a_{kl} — действительные произвольные числа. Положим

$$a_{kl}^{+} = \begin{cases} a_{kl} & (a_{kl} \geqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} < 0), \end{cases} \qquad a_{kl}^{-} = \begin{cases} -a_{kl} & (a_{kl} \leqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} > 0). \end{cases}$$

Тогда

$$a_{kl} = a_{kl}^{+} - a_{kl}^{-}, \qquad |a_{kl}| = a_{kl}^{+} + a_{kl}^{-}.$$

Поэтому из сходимости ряда $\sum\sum |a_{kl}|$ следует сходимость рядов $\sum\sum a_{kl}^{+}$, $\sum\sum a_{kl}^{-}$ с неотрицательными членами и потому

$$\sum\sum a_{kl}=\sum\sum a_{kl}^{+}-\sum\sum a_{kl}^{-}=$$
$$=\sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{+}\right)-\sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}^{-}\right)=\sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

Наконец, если $a_{kl}=\alpha_{kl}+i\beta_{kl}$—комплексные числа и ряд $\sum\sum|a_{kl}|$ сходится, то сходятся также ряды $\sum\sum|\alpha_{kl}|$, $\sum\sum|\beta_{kl}|$, где α_{kl} и β_{kl}—действительные числа; поэтому

$$\sum\sum a_{kl}=\sum\sum\alpha_{kl}+i\sum\sum\beta_{kl}=$$
$$=\sum_{k}\left(\sum_{l}\alpha_{kl}\right)+i\sum_{k}\left(\sum_{l}\beta_{kl}\right)=\sum_{k}\left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

Теорема доказана полностью.

Пример 1. Исследовать, при каких $\alpha>0$ сходится двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(k+l)^{-\alpha}.$$

Решение. В силу теоремы 1 исследование можно свести к сходимости обычных (однократных) рядов

$$\sum_{l=1}^{\infty}(k+l)^{-\alpha}=A_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}A_k.$$

Как мы знаем (см. § 9.2, теорема 2), сходимость первого ряда $\sum_{l=1}^{\infty}(k+l)^{-\alpha}$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int_0^{\infty}(k+y)^{-\alpha}\,dy$, который сходится при $\alpha>1$:

$$A_k=\sum_{l=1}^{\infty}(k+l)^{-\alpha}\leqslant\int_0^{\infty}(k+y)^{-\alpha}\,dy=\frac{1}{1-\alpha}(k+y)^{1-\alpha}\Big|_0^{\infty}=$$
$$=\frac{1}{\alpha-1}k^{1-\alpha}\quad(\alpha>1).$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\leqslant\frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\alpha-1}k^{1-\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\alpha-1}+\int_1^{\infty}\frac{1}{\alpha-1}x^{1-\alpha}\,dx.$$

Последний интеграл сходится при $\alpha - 1 > 1$, т. е. при $\alpha > 2$. Поэтому исходный двойной ряд сходится по прямоугольникам при $\alpha > 2$.

Рассмотрим еще новый вопрос. Пусть двойной ряд (1) сходится и притом абсолютно. Его сумму S, так же как сумму S' ряда, составленного из его абсолютных величин, можно записать в виде пределов последовательностей

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \sum_0^n a_{kl} = \lim_{n\to\infty} S_{nn}, \quad S' = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \sum_0^n |a_{kl}| = \lim_{n\to\infty} S'_{nn}$$

обычных, зависящих только от одного индекса n. Последовательностям $\{S_{nn}\}$, $\{S'_{nn}\}$ соответствуют сходящиеся ряды

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + (a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{12} + a_{02}) + \\ + (a_{30} + \ldots) + \ldots, \quad (8)$$

$$S' = |a_{00}| + (|a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}|) + \\ + (|a_{20}| + |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{12}| + |a_{02}|) + \ldots \quad (9)$$

с членами, равными суммам чисел, стоящих в скобках. Но в скобках второго ряда стоят неотрицательные числа, поэтому сходимость его не изменяется, если в нем скобки вычеркнуть:

$$|a_{00}| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}| + |a_{20}| + \ldots \,. \quad (10)$$

Но тогда ряд

$$a_{00} + a_{10} + a_{11} + a_{01} + a_{20} + \ldots, \quad (11)$$

полученный вычеркиванием в (8) всех скобок, абсолютно сходится, следовательно, сходится, очевидно, к S.

Мы доказали, что если двойной ряд (1) сходится к числу S и притом абсолютно, то полученный из него обычный (однократный) ряд (11) сходится тоже к S и тоже абсолютно. Но члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять как угодно, не нарушая его сходимости и не изменяя суммы.

Этим доказана следующая

Теорема 2. *Если члены двойного ряда* (1), *сходящегося к числу S и притом абсолютно, перенумеровать любым способом* ($v_0, v_1, v_2, \ldots$) *при помощи одного индекса и составить ряд $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, то последний будет сходиться к тому же числу S абсолютно.*

Докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть заданы два абсолютно сходящихся (однократных) ряда* $\sum_0^\infty u_k$, $\sum_0^\infty v_l$ *и пусть всевозможные произведения* $u_k v_l$ $(k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ *перенумерованы:* $w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots$ *любым способом при помощи одного индекса. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_0^\infty u_k \times \sum_0^\infty v_l = \sum_0^\infty w_k,$$

где ряд справа абсолютно сходится.

Доказательство. В самом деле, пусть $\sum_0^\infty |u_k| = M$, $\sum_0^\infty |v_l| = N$. Двойной ряд $\sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty u_k v_l$ абсолютно сходится потому, что при любых m, n

$$\sum_0^m \sum_0^n |u_k v_l| = \sum_0^m |u_k| \times \sum_0^n |v_l| \leqslant M \cdot N.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^\infty u_k \times \sum_{l=0}^\infty v_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n u_k \times \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^n v_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n u_k v_l =$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty u_k v_l = \sum_{j=0}^\infty w_j,$$

где последнее равенство справедливо в силу предыдущей теоремы.

Замечание 1. Отметим, что теорема 3 по сути дела доказана в § 9.13. Здесь мы привели доказательство, использующее понятие сходимости двойного ряда.

В заключение заметим, что можно рассматривать n-кратные ряды $(n \geqslant 3)$

$$\sum_{k_1=0}^\infty \cdots \sum_{k_n=0}^\infty a_{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n}.$$

Замечание 2. Выше мы ввели понятие прямоугольных частичных сумм S_{mn}, содержащих N членов ряда (1) $(N=(m+1)(n+1))$. Любую сумму, состоящую из конечного числа N слагаемых ряда (1), принято также называть частичной суммой этого ряда.

В случае кратного ряда (1) частичные суммы, содержащие N членов ряда, которые мы будем обозначать через S_N, можно строить различными способами. Например, можно взять частную сумму, содержащую члены ряда с индексами k, l, отвечающими точкам плоскости (k, l), принадлежащим кругу радиуса R с центром в начале координат (рис. 109)

$$S_N = S_R = \sum_{k^2+l^2 \leqslant R^2} a_{kl}.$$

Отметим, что числа N и R связаны соотношением $N = O(R^2)$ (можно доказать, что количество точек (k, l) с целочисленными координатами, находящихся в круге радиуса R, пропорционально площади этого круга).

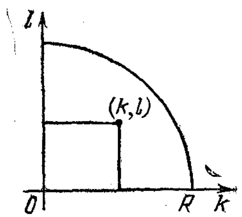

Рис. 109.

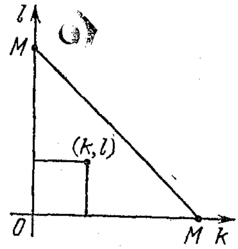

Рис. 110.

Сумма S_R называется *круговой (сферической) частичной суммой ряда* (1).

Для n-кратного ряда ($n \geqslant 3$) сферическая сумма имеет вид

$$S_R = \sum_{k_1^2+\ldots+k_n^2 \leqslant R^2} a_{k_1, \ldots, k_n}.$$

Если в частичную сумму включить члены ряда (1) с индексами (k, l), удовлетворяющими условию

$$0 \leqslant k + l \leqslant M \quad (k \geqslant 0, \ l \geqslant 0),$$

то соответствующая частная сумма $S_N = S_M$ ($N = O(M^2)$) называется *треугольной* (рис. 110) *частичной суммой ряда* (1).

В зависимости от характера частичных сумм можно определить различные виды сходимости ряда (1) (по сферам, треугольникам, и т. п.).

Ряд (1) называется *сходящимся к числу S по сферам*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon)$ такое, что при $R > N_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|S_R - S| < \varepsilon.$$

Аналогично определяется сходимость по треугольникам. Представляет интерес вопрос о том, как связаны между собой различные виды сходимости кратного ряда (1), но мы не будем на этом останавливаться.

Задачи

1. Исследовать, при каких $\alpha > 0$ сходится тройной (трехкратный) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (k+l+m)^{-\alpha}.$$

Ответ: $\alpha > 3$.

2. Исследовать, при каких $\alpha > 0$ сходится n-кратный ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1+\dots+k_n)^{-\alpha}.$$

Ответ: $\alpha > n$.

3. Исследовать, при каких $\alpha > 0$ сходится двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (k^2+l^2)^{-\alpha}.$$

Ответ: $\alpha > 1$.

4. Исследовать, при каких α, β_1, $\beta_2 > 0$, сходится двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (k^{\beta_1}+l^{\beta_2})^{-\alpha}.$$

Ответ: $\alpha > \frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}$.

5. Исследовать, при каких α, β_1, ..., $\beta_n > 0$ сходится n-кратный ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left(k_1^{\beta_1}+\dots+k_n^{\beta_n}\right)^{-\alpha}.$$

Ответ: $\alpha > \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j}$.

§ 9.16. Суммирование рядов и последовательностей

Пусть задан числовой ряд

$$u_0+u_1+u_2+\dots \tag{1}$$

и последовательность его частичных сумм

$$S_n = u_0+u_1+\dots+u_n. \tag{2}$$

Ряд (1) может быть сходящимся или расходящимся. Последовательность

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}[S_0 + S_1 + \ldots + S_n] \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{3}$$

называется *последовательностью средних арифметических* последовательности $\{S_n\}$ или ряда (1). Легко подсчитать, что

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k.$$

Таким образом, члены суммы σ_n отличаются от соответствующих членов частной суммы ряда (1) тем, что последние умножаются на числа $\lambda_k = 1 - \frac{k}{n+1}$, меньшие единицы. Поэтому, если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то может случиться, что последовательность $\{\sigma_n\}$ все же сходится.

По определению ряд (1) (или последовательность $\{S_n\}$) *суммируется методом средних арифметических к числу* σ, если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma. \tag{4}$$

Теорема. *Если ряд* (1) *сходится к числу* S, *то он суммируется методом средних арифметических и притом к тому же числу* S.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится; тогда существует такое число M, что

$$|S_j| \leqslant M \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{5}$$

и такое достаточно большое натуральное число n, которое мы будем считать фиксированным (а k, и в дальнейшем p-переменными), что

$$|S_{n+k} - S| < \varepsilon \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

Имеем, далее,

$$S - \sigma_{n+p} = \left(S - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} S_{n+k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p} S_{n+k} - \frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n} S_k =$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}(S-S_{n+k})+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p}S_{n+k}-$$

$$-\frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n}S_k,$$

откуда, учитывая, что

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{n+1}{p(n+p+1)},$$

получим

$$|S-\sigma_{n+p}|<\varepsilon+\frac{n+1}{n+p+1}M+\frac{n+1}{n+p+1}M<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

$$(p>P_0),$$

если P_0 достаточно велико. Следовательно, $\sigma_{n+p}\to S$ $(p\to\infty)$ или, что все равно, $\sigma_j\to S$ $(j\to\infty)$, т. е. теорема верна.

Пример 1. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}=2$. Здесь

$$S_0=1,\ S_1=1+\frac{1}{2},\ \ldots,\ S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}.$$

Отсюда

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}[S_0+\ldots+S_n]=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(2-\frac{1}{2^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[2(n+1)-2+\frac{1}{2^n}\right]=2-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{2^n(n+1)}\to 2$$

$$(n\to\infty).$$

Пример 2. Ряд $1-1+1-\ldots$ расходится, но он суммируется к числу 1/2 методом средних арифметических.

В самом деле, для данного ряда $S_0=1$, $S_1=0$, ..., $S_{2n}=1$, $S_{2n+1}=0$, ...

Поэтому

$$\sigma_{2n}=\frac{1}{2n+1}[S_0+\ldots+S_{2n}]=\frac{1}{2n+1}[1+0+\ldots+0+1]=$$

$$=\frac{n+1}{2n+1}\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty);$$

$$\sigma_{2n+1}=\frac{1}{2n+2}[S_0+\ldots+S_{2n}+S_{2n+1}]=\frac{n+1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

$$(n\to\infty).$$

Наряду с последовательностью $\{\sigma_n\}$ средних арифметических ряда (1) можно рассматривать произвольные *средние* $\{t_n\}$ ряда (1), определяемые равенством

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k, \tag{7}$$

где λ_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ — произвольная последовательность действительных чисел, вообще говоря, зависящая от n. Эти числа можно было бы обозначить через $\lambda_k^{(n)}$. Однако ради краткости будем писать λ_k вместо $\lambda_k^{(n)}$.

Если $\lambda_k=1-\frac{k}{n+1}$, то $t_n=\sigma_n$.

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} t_n=T, \tag{8}$$

то говорят, что ряд (1) суммируем методом средних $\{t_n\}$ к числу T.

Естественно возникает вопрос, при каких λ_k сходящийся к S ряд (1) суммируется методом $\{t_n\}$ к числу S.

Чтобы ответить на этот вопрос, будем считать, что $\lambda_0=1$; $\lambda_k=0$ при $k\geqslant n+1$; $\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k+1}$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k=(\lambda_0-\lambda_1)+(\lambda_1-\lambda_2)+\ldots+(\lambda_n-\lambda_{n+1})=\lambda_0=1. \tag{9}$$

Имеет место преобразование Абеля следующего вида (см. также § 9.8):

$$\sum_{k=0}^{n}a_k b_k=\sum_{k=0}^{n}(a_k-a_{k+1})B_k,$$

где $B_k=b_0+\ldots+b_k$, $a_{n+1}=0$.

Тогда

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_k S_k, \tag{10}$$

где S_k — частичные суммы ряда (1).

Далее, используя (9), имеем

$$t_n-S=\sum_{0}^{n}\Delta\lambda_k(S_k-S). \tag{11}$$

Применяя в (11) неравенство Буняковского, получим

$$|t_n-S| \leqslant \left(\sum_0^n |\Delta\lambda_k|^2 \sum_0^n (S_k-S)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left((n+1)\sum_0^n |\Delta\lambda_k|^2\right)^{1/2} \left(\frac{1}{n+1}\sum_0^n (S_k-S)^2\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Теперь, если ряд (1) сходится к числу S (сумме ряда), то последовательность $\{(S_k-S)^2\}$ сходится к нулю. Средние арифметические этой последовательности, по доказанному выше, также сходятся к нулю.

Поэтому из (12) получаем следующее утверждение: *если числа λ_k таковы, что*

$$(n+1)\sum_0^n |\Delta\lambda_k|^2 \leqslant c, \qquad (13)$$

то сходящийся ряд (1) *суммируется методом средних $\{t_n\}$ к своей сумме.*

Заметим, что для средних арифметических $\{\sigma_n\}$ условие (13) выполнено:

$$\Delta\left(1-\frac{k}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}; \quad (n+1)\sum_0^n \left|\Delta\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\right|^2 =$$

$$=(n+1)\sum_0^n \frac{1}{(n+1)^2}=1.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Яков Степанович Бугров

Сергей Михайлович Никольский

Высшая математика

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *Т. А. Панькова*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Т. Г. Егорова, И. Я. Кришталь*

ИБ № 32572

Печать с матриц. Подписано к печати 16.12.87. Формат $84 \times 108/_{32}$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 22,68. Усл. кр.-отт. 22,68. Уч.-изд. л. 23,78. Тираж 92 000 экз. Заказ № 8-16. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 113054 Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц на Киевской книжной фабрике, 252054, Киев, Воровского, 24.