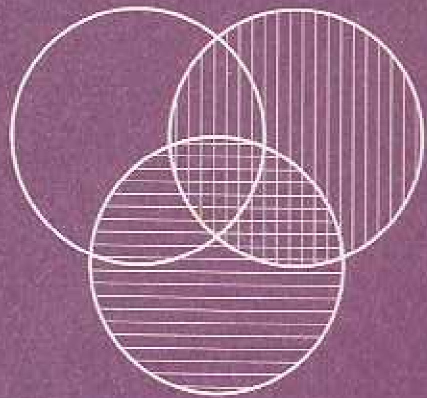
ISBN 978-9943-14-010-3

MATEMATIKA

N. HAMEDOVA, Z. IBRAGIMOVA, T. TASETOV

MATEMATIKA



O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY
VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

N. HAMEDOVA, Z. IBRAGIMOVA, T. TASETOV

MATEMATIKA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi oliy o'quv yurtlarining boshlang'ich ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik sifatida tasdiqlagan

TOSHKENT
«TURON-IQBOL»
2007

Taqrizchilar: *Z. Dadanov* — TVDPI Boshlang'ich ta'lim metodikasi fakulteti dekani, p.f.n., dotsent,
Z. Tadjiyeva — gumanitar fakultetlarda matematika kafedrasi mudiri.

H $\frac{4306020500-41}{M361(04)-2007}$ 2007

ISBN 978-9943-14-010-3

SO'ZBOSHI

«Matematika» darsligi 5141600 — Boshlag'ich ta'lim, tarbiyaviy ishlar va sport yo'nalishi bakalavriatiga mo'ljallangan bo'lib, shu yo'nalishning matematika dasturiga mos keladi. Darslik VI bob 31 paragrafdan iborat, u o'z oldiga talabalarni boshlang'ich matematika kursining nazariy asoslari va oliy matematika elementlari bilan tanishtirish maqsadini qo'yadi.

Uning I bobi boshlang'ich matematika kursini nazariy asoslash uchun kerak bo'ladigan barcha umumiy tushunchalarni o'z ichiga oladi. Bu bobda to'plamlar va ular ustida amallar, moslik va uning turlari, munosabat va uning xossalari, kombinatorika elementlari, matematik tushunchalar, mulohazalar va ular ustida amallar, predikatlar va ular ustida amallar, teoremalarning tuzilishi va isbotlash usullari haqida so'z yuritiladi.

Darslikning II bobida nomanfiy butun sonlar to'plamini qurish to'plamlar nazariyasi orqali, aksiomatika va miqdorlarni o'lchash orqali ochib beriladi. Nomanfiy butun sonlarni yozishda qo'llanadigan turli pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari va bo'linish nazariyasi haqida ham so'z yuritiladi.

III bob son tushunchasini kengaytirish masalasiga bag'ishlangan. Unda son tushunchasi arifmetik amallarning to'liq bajarilishi, miqdorlarni o'lchash masalasining hal qilinishi ehtiyojlaridan kelib chiqib butun sonlar, ratsional va haqiqiy sonlar to'plamlarigacha kengaytiriladi. Bu to'plamlarda son ta'rifi, arifmetik amallar va ularning xossalari bayon qilinadi.

IV bob algebra va analitik geometriya elementlariga bag'ishlangan bo'lib, sonli va harfiy ifoda, sonli tenglik va tengsizlik, ularning xossalari, tenglama va tengsizliklar, ularning yechimi, yechish yo'llari, ayniyatlar, tekislikda chiziq tenglamalari haqida so'z yuritiladi.

V bobda matematik analiz elementlari qaraladi. Sonli funksiyalar, ularning xossalari va grafiklari, grafiklarni chizish usullari, ketma-ketlik va uning limiti, funksiya limiti, hosilasi va integrali tushunchalari boshlang'ich ta'lim yo'nalishi talabalari uchun yetarli darajada bayon qilingan.

VI bobda geometriya elementlari va miqdorlar nazariyasi haqida gapiriladi. Bunda planimetriya va stereometriyaning aksiomalari, asosiy tushunchalari, geometrik shakllar ta'rif va xossalari, geometrik masalalar, skalar miqdor tushunchasi, miqdorlarni o'lchash, asosiy skalar miqdorlar ta'rifi va ular orasidagi bog'lanish qaraladi.

I, II, VI boblar N. Hamedova va T. Tasetov, III, IV, V boblar Z. Ibragimova tomonidan yozilgan. Mualliflar darslik sifatini yaxshilash yuzasidan bildirilgan barcha taklif va mulohazalar uchun minnatdorlik bildiradilar.

I bob. UMUMIY TUSHUNCHALAR

1-§. TO'PLAM

1.1. To'plam tushunchasi. *To'plam* tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u ta'riflanmaydi va misollar yordamida tasavvur hosil qilinadi. Masalan, auditoriyadagi talabalar to'plami, unli harflar to'plami, natural sonlar to'plami, qushlar galasi, qo'ylar podasi va h. k.

To'plamni tashkil qiluvchi obyektlar *to'plam elementlari* deyiladi. To'plamlar lotin alifbosining bosh harflari: A, B, C, ... bilan, uning elementlari lotin alifbosining kichik harflari: a, b, c ... bilan belgilanadi.

To'plam elementi $a \in A$ ko'rinishda yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi.

Agar a element A to'plamga tegishli bo'lmasa, $a \notin A$ yoki $\overline{a \in A}$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, A — juft natural sonlar to'plami bo'lsin, u holda $2 \in A$, $5 \notin A$, $628 \in A$ va $729 \notin A$ bo'ladi.

Ba'zi sonli to'plamlar o'z belgilariga ega. Barcha natural sonlar to'plami — N, barcha butun sonlar to'plami — Z, barcha ratsional sonlar to'plami — Q, barcha haqiqiy sonlar to'plami — R harflari bilan belgilanadi.

Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va $\varnothing$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan, $x^2 + 4 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami, oydagi daraxtlar to'plami, dengiz tubidagi quruq toshlar to'plami bo'sh to'plamlardir.

To'plam chekli sondagi elementlardan tashkil topsa, *chekli to'plam* deyiladi. Masalan, lotin alifbosi harflari to'plami, kamalak ranglari to'plami, raqamlar to'plami chekli to'plamlardir.

To'plam elementlari soni cheksiz bo'lsa, bunday to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi. Masalan, barcha natural sonlar to'plami, tekislikdagi nuqtalar to'plami cheksizdir.

Bir xil elementlardan tashkil topgan to'plamlar *teng to'plamlar* deyiladi. Masalan, $x^2 - 4 = 0$ tenglamaning yechimlari to'plami va $|x| = 2$ tenglamaning yechimlari to'plami teng to'plamlardir.

1.2. To'plamlarning berilish usullari. Agar har bir elementning ma'lum bir to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan bo'lsa, *to'plam berildi* deyiladi.

To'plamlar, odatda, ikki usulda beriladi:

1) to'plam elementlari ro'yxati keltiriladi.

Masalan, $A = \{a;\ o;\ i;\ u;\ o';\ e\}$; $B = \{qizil,\ sariq,\ yashil\}$; $C = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$.

2) to'plamga kirgan elementlarning yagona xarakteristik xossasi ko'rsatiladi.

Masalan, yuqoridagi to'plamlarni xarakteristik xossa bilan bersak:

A — o'zbek alifbosining unli harflari to'plami;

B — svetofor ranglari to'plami;

C — bir xonali natural sonlar to'plami bo'ladi.

Sonli to'plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan berish qulay.

Bu holda, odatda, katta qavslar ichiga to'plam elementi belgisi, vertikal chiziq va undan keyin to'plam elementiga tegishli xossa yoziladi. Masalan: «M — 6 sonidan kichik bo'lgan natural sonlar» to'plami bo'lsin. Bu to'plam xarakteristik xossasi orqali $M = \{n\,|n \in N$ va $n < 6\}$ ko'rinishda ifodalanadi. Shunga o'xshash: $C = \{c|\ c < 9,\ C \in N\}$. «$C$ — 9 sonidan katta bo'lmagan natural sonlar» to'plami.

$X = \{x\,|\,x^2 - 4 = 0, x \in R\}$ bo'lsa, $X - x^2 - 4 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami bo'ladi.

$Y = \{y\,|\,-2 \le y \le 6,\ y \in R\}$ bo'lsa, Y — minus 2 dan 6 gacha bo'lgan butun sonlar to'plami.

1.3. Qism to'plam va universal to'plam.

1-ta'rif. *Agar A to'plamning hamma elementi B to'plamga ham tegishli bo'lsa, A to'plam B to'plamning* ***qism to'plami*** *deyiladi va $A \subset B$ ko'rinishda yoziladi.*

Ta'rifga ko'ra, istalgan to'plam o'zining qism to'plami bo'ladi: $A \subset A$; bo'sh to'plam esa, istalgan to'plamning qism to'plami bo'ladi $\varnothing \subset A$.

Qism to'plamlar ikki turga bo'linadi: xos va xosmas qism to'plamlar. To'plamning o'zi va bo'sh to'plam *xosmas qism to'plam* deyiladi. Ulardan boshqa qism to'plamlar *xos qism to'plam* deyiladi.

Masalan, $A = \{a;\ b;\ c\}$ to'plamning xos qism to'plamlari: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a;\ b\}$, $\{a;\ c\}$, $\{b;\ c\}$; xosmas qism to'plamlari: $\{a;\ b;\ c\}$ va $\varnothing$ dir.

Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa, $A = B$ bo'ladi.

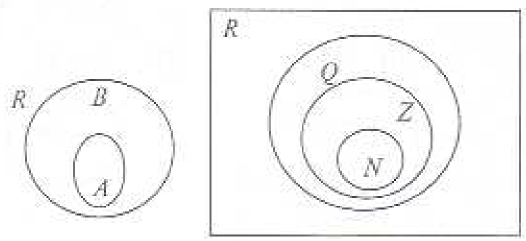
Bu xossadan ko'pincha to'plamlar tengligini isbotlashda foydalaniladi. Agar A to'plamning istalgan elementi B to'plamga tegishli ekani va B to'plamning istalgan elementi A to'plamga tegishli ekani isbotlangan bo'lsa, $A = B$, ya'ni bu to'plamlar tengligi haqida xulosa chiqariladi.

Bundan tashqari, A to'plamning istalgan elementi B to'plamga, B to'plamning istalgan elementi C to'plamga tegishli bo'lsa, A to'plamning hamma elementi C to'plamga tegishli bo'ladi, ya'ni $A \subset B$ va $B \subset C$ bo'lsa, $A \subset C$ bo'ladi.

2-ta'rif. *Agar A_1, A_2, ..., A_n to'plamlar A to'plamning qism to'plami bo'lsa, A to'plam A_1, A_2,..., A_n to'plamlar uchun* ***universal to'plam*** *deyiladi.*

Universal to'plam, odatda, J yoki U harflari bilan belgilanadi. Masalan, N — barcha natural sonlar to'plami; Z — barcha butun sonlar to'plami; Q — barcha ratsional sonlar to'plami; R — barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, $N \subset Z \subset Q \subset R$ shartlar bajariladi va R qolgan sonli to'plamlar uchun universal to'plam vazifasini bajaradi.

1.4. Eyler — Venn diagrammalari. To'plamlar orasidagi munosabatlarni yaqqolroq tasavvur qilish uchun Eyler — Venn diagrammalaridan foydalaniladi. Bunda to'plamlar doira, oval yoki biror yopiq soha shaklida, universal to'plam esa, odatda, to'g'ri to'rtburchak shaklida tasvirlanadi (I.1-rasm).



I.1-rasm.

1.5. To‘plamlarning kesishmasi.

3-t a ’ r i f. *A va B to‘plamlarning* ***kesishmasi*** *deb, bu to‘plamlarning ikkalasiga ham bir vaqtda tegishli bo‘lgan elementlar to‘plamiga aytiladi va $A\cap B$ ko‘rinishda belgilanadi.*

To‘plamlar kesishmasi belgilar yordamida $A\cap B = \{x \mid x\in A$ va $x\in B\}$ ko‘rinishda yoziladi.

M a s a l a n:

1) $A = \{a \mid 4\le a \le 14,\ a\in N\}$ va $B = \{b \mid 10<b<19,\ b\in N\}$ bo‘lsa, $A\cap B= \{x \mid 11\le x\le 14,\ x\in N\}$ bo‘ladi.

2) $X = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$ va $Y = \{d;\ e;\ f;\ k\}$ bo‘lsa, $X\cap Y = \{d;\ e\}$ bo‘ladi.

To‘plamlar kesishmasi ularning umumiy qismidir. Umumiy qismga ega bo‘lmagan to‘plamlar kesishmasi bo‘sh to‘plamdir. Bu holda A va B to‘plamlar *kesishmaydi* deyiladi va $A\cap B = \varnothing$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan, juft natural sonlar to‘plami va toq natural sonlar to‘plami umumiy elementga ega emas, ya’ni kesishmaydi.

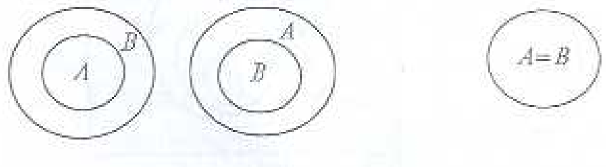
Umumiy qismga ega bo‘lgan to‘plamlar *kesishadi* deyiladi va $A\cap B \ne \varnothing$, ya’ni A va B to‘plamlar kesishmasi bo‘sh emas, deb yoziladi. Masalan, 2 ga karrali natural sonlar va 5 ga karrali natural sonlar to‘plamlari umumiy elementga ega, ya’ni kesishadi yoki kesishmasi bo‘sh emas. Bu to‘plamlar kesishmasi barcha 10 ga karrali natural sonlardan iborat bo‘ladi.

Ikki to‘plamning o‘zaro munosabatida to‘rt hol bo‘lishi mumkin (I.2-rasm):

1) to‘plamlar kesishmaydi (I.2-rasm, I);
2) to‘plamlar kesishadi (I.2-rasm, II);
3) to‘plamning biri ikkinchisining qismi bo‘ladi (I.2-rasm, III);
4) to‘plamlar ustma-ust tushadi, ya’ni teng (I.2-rasm, IV).

I. $A\cap B = \varnothing$ II. $A\cap B\ne \varnothing$

III. a) $A\subset B$ b) $B\subset A$ IV. $A = B$

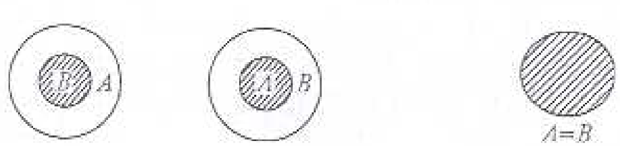


I.2-rasm.

Quyida har bir hol uchun to‘plamlar kesishmasi shtrixlab ko‘rsatilgan (I.3-rasm):

I. $A\cap B = \varnothing$ II. $A\cap B\ne \varnothing$

III. a) $A\cap B=B$ b) $A\cap B =A$ IV. $A\cap B = A=B$



I.3-rasm.

To‘plamlar kesishmasi quyidagi xossalarga ega:

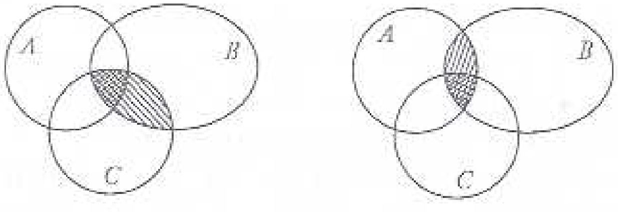
1°. $B\subset A$ bo‘lsa, $A\cap B = B$ bo‘ladi. Bu xossa to‘plamlar kesishmasi ta’rifidan kelib chiqadi.

2°. $A\cap B = B\cap A$ (kommutativlik xossasi).

3°. $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C = A\cap B\cap C$ (assotsiativlik xossasi).

Assotsiativlik xossasi $A\cap B\cap C$ kesishmani qavslarsiz yozishga imkon beradi va istalgan sondagi to‘plamlar kesishmasini topishda qulaylik tug‘diradi. Bu xossani Eyler — Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlaymiz (I.4-rasm):

I.4-*a* rasmda tenglikning chap qismi; I.4-*b* rasmda tenglikning o‘ng qismi tasvirlangan, ikki marta shtrixlangan sohalar ikkala rasmda ham bir xil bo‘lgani uchun $(A\cap B)\cap C$ va $A\cap(B\cap C)$ to‘plamlar teng degan xulosaga kelamiz.



a) *b)*

I.4-rasm.

4°. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).

5°. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

6°. $A \cap A = A$.

1.6. To'plamlarning birlashmasi.

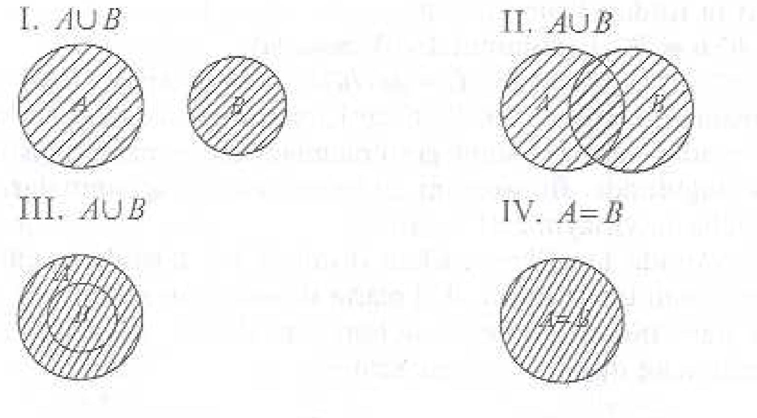
4-ta'rif. *A va B to'plamlarning* ***birlashmasi*** *deb, bu to'plamlarning hech bo'lmaganda biriga tegishli bo'lgan elementlar to'plamiga aytiladi va $A \cup B$ ko'rinishida belgilanadi.*

To'plamlar birlashmasi belgilar yordamida $A \cup B = \{x \mid x \in A$ yoki $x \in B\}$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan: 1) A — barcha juft sonlar to'plami, ya'ni $A = \{a \mid a = 2n,\ n \in N\}$ va B — barcha toq sonlar to'plami, ya'ni $B = \{b \mid b = 2n - 1,\ n \in N\}$ bo'lsa, ularning birlashmasi $A \cup B = N$ bo'ladi.

2) $X = \{m;\ n;\ p;\ k;\ l\}$ va $Y = \{p;\ r;\ s;\ n\}$ bo'lsa, ularning birlashmasi $X \cup Y = \{m;\ n;\ p;\ k;\ l;\ r;\ s\}$ bo'ladi.

To'plamlar birlashmasining tasviri va xossalari (I.5-rasm):



I.5-rasm.

1°. $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$.

2°. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik xossasi).

3°. $A \cup (B \cup A) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ (assotsiativlik xossasi).

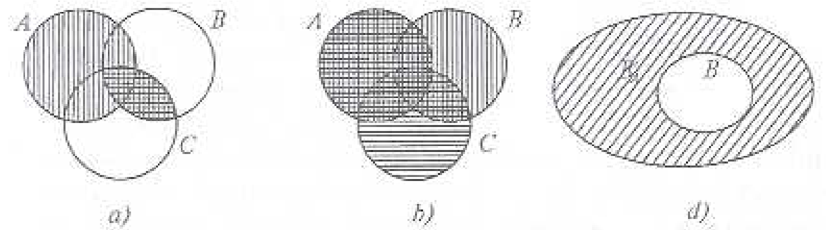
4°. $A \cup \varnothing = A$.

5°. $A \cup A = A$.

6°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).

7°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi).

7-xossani Eyler — Venn diagrammalarida tasvirlab ko'rsataylik. I.6-*a* rasmda tenglikning chap qismi ($(B \cap C)$ kesishma gorizontal va $A \cup (B \cap C)$ birlashma vertikal shtrixlangan, I.6-*b* rasmda $A \cup B$ vertikal, $A \cup C$ gorizontal shtrixlangan, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ esa ikki marta shtrixlangan soha bilan) tasvirlangan. a) rasmdagi barcha shtrixlangan soha bilan, b) rasmdagi 2 marta shtrixlangan sohalar bir xil bo'lgani uchun $A \cup (B \cap C)$ va $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ to'plamlar teng deyish mumkin.



I.6-rasm.

1.7. To'plamlar ayirmasi. To'ldiruvchi to'plam.

5-ta'rif. *A va B to'plamlarning* ***ayirmasi*** *deb, A to'plamning B to'plamga kirmaydigan elementlari to'plamiga aytiladi va $A \setminus B$ ko'rinishda belgilanadi.*

$(A \setminus B)$ ayirmani belgilar yordamida $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ va $x \bar{\in} B\}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Masalan: 1) $A = \{a \mid |a| < 4,\ a \in R\} = \{a \mid -4 < a < 4,\ a \in R\}$, $B = \{b \mid\ |b| \le 2,\ a \in R\} = \{b \mid -2 \le b \le 2;\ \ b \in R\}$ bo'lsa, $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2 \cup 2 < x < 4\}$.

2) $X = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$, $Y = \{d;\ e;\ f;\ k;\ l\}$ bo'lsa, $X \setminus Y = \{a;\ b;\ c\}$ va $Y \setminus X = \{f;\ k;\ l\}$.

6-ta'rif. *B to'plamning A to'plamga* ***to'ldiruvchi to'plami*** *deb shunday B_A' to'plamga aytiladiki, bu to'plamning B to'plam bilan birlashmasi A to'plamga teng bo'ladi* (I.6-*d* rasm).

A va B to'plamlarni universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plamlar A' va B' bilan belgilanadi.

To'plamlar ayirmasining xossalari va tasviri (I.7-rasm):

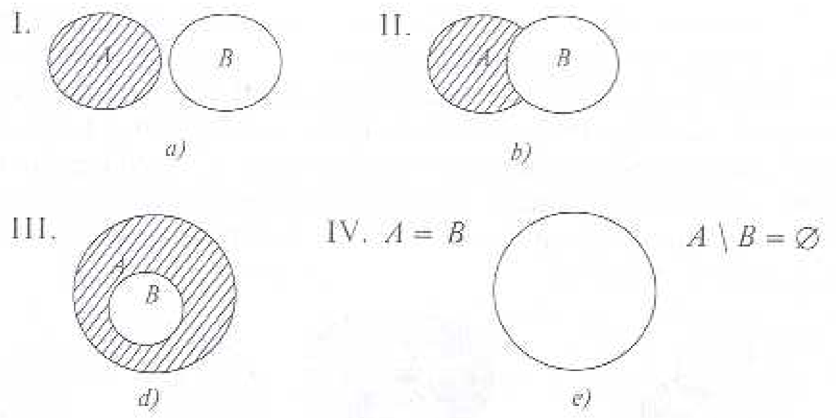
1°. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \setminus B = A$ (I.7-*a* rasm).

2°. $B \subset A \Rightarrow A \setminus B = B_A'$ (I.7-*d* rasm).

3°. $A = B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ (I.7-*e* rasm).

4°. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus B \setminus C$.

5°. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.



I.7-rasm.

6°. $(A\cap B)' = A'\cup B'$.

7°. $(A\cup B)' = A'\cap B'$.

6- va 7-xossalar *De-Morgan qonunlari* deyiladi.

4- va 5-xossalarning o'rinli ekanligiga Eyler — Venn diagrammalarida tasvirlash orqali ishonch hosil qilish mumkin.

6-xossani quyidagicha isbotlaymiz. $x\in(A\cap B)'$ bo'lsin. Bundan $x\in A\cap B$ ekani kelib chiqadi. Kesishma ta'rifiga ko'ra $x\notin A$ yoki $x\notin B$ degan xulosaga kelamiz, bundan esa $x\in A'$ yoki $x\in B'$ ekani kelib chiqadi. $x\in A'$ yoki $x\in B'$ bo'lsa, birlashma ta'rifiga ko'ra $x\in A'\cup B'$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan $x\in A'\cup B'$ bo'lsin. U holda birlashma ta'rifiga ko'ra $x\in A'$ yoki $x\in B'$ ekani kelib chiqadi, $x\in A'$ ekanidan $x\notin A$ va $x\in B'$ ekanidan $x\notin B$ degan xulosaga kelamiz, $x\notin A$ va $x\notin B$ bo'lsa, $x\notin A\cap B$ bo'ladi, bu esa $x\in(A\cap B)'$ ekanligini ko'rsatadi. Demak, $(A\cap B')$ va $A'\cup B'$ to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan va shuning uchun ham teng ekan.

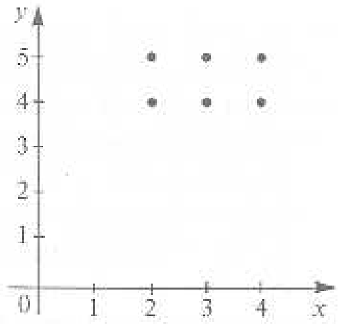
7°-xossa ham xuddi shunday isbotlanadi.

1.8. To'plamlarning dekart ko'paytmasi. A va B *to'plamlarning dekart ko'paytmasi* deb, 1-elementi A to'plamdan, 2-elementi B to'plamdan olingan $(a;\, b)$ ko'rinishdagi barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi. Dekart ko'paytma $A\times B$ ko'rinishda belgilanadi: $A\times B = \{(a;\, b)\mid a\in A \text{ va } b\in B\}$.

Masalan: $A = \{2;\, 3;\, 4;\, 5\}$, $B = \{a;\, b;\, c\}$ bo'lsa, $A\times B = \{(2;\, a)$, $(2;\, b)$, $(2;\, c)$, $(3;\, a)$, $(3;\, b)$, $(3;\, c)$, $(4;\, a)$, $(4;\, b)$, $(4;\, c)$, $(5;\, a)$, $(5;\, b)$, $(5;\, c)\}$ bo'ladi.

Sonli to'plamlar dekart ko'paytmasini koordinata tekisligida tasvirlash qulay. Masalan, $A = \{2;\, 3;\, 4\}$, $B = \{4;\, 5\}$ bo'lsin, u holda $A\times B = \{(2;\, 4)$, $(2;\, 5)$, $(3;\, 4)$, $(3;\, 5)$; $(4;\, 4)$, $(4;\, 5)\}$ bo'ladi.

Koordinata tekisligida shunday koordinatali nuqtalarni tasvirlaymizki, bunda A to'plam Ox o'qida va B to'plam Oy o'qida olinadi.



I.8-rasm.

Dekart ko'paytmaning xossalari:

1°. $A\times B \neq B\times A$.

2°. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

3°. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$.

Ikkitadan ortiq to'plamlarning dekart ko'paytmasini ham qarash mumkin. Umumiy holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Ularning dekart ko'paytmasi $A_1\times A_2\times \ldots \times A_n = \{(a_1;\, a_2;\, \ldots, a_n)\mid a_1\in A_1,\, a_2\in A_2,\, \ldots,\, a_n\in A_n\}$ dan iborat bo'ladi. $(a_1;\, a_2;\, \ldots, a_n)$ *tartiblangan n lik* deyiladi. (Masalan, uchlik, to'rtlik va h.k.). bunday tartiblangan n lik *n o'rinli kortej* deb ham ataladi. Yana n o'rinli kortejlar faqat bitta to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lishi ham mumkin, bu holda u to'plamni o'z-o'ziga n marta dekart ko'paytmasi elementidan iborat bo'ladi.

1.9. To'plamni sinflarga ajratish. Hayotda ko'pincha to'plamlarni qismlarga ajratishga to'g'ri keladi. Masalan, maktab o'quvchilari o'zlashtirishi bo'yicha a'lochi, a'lo va yaxshi baholarga o'quvchi, yaxshi va o'rta baholarga o'quvchi va o'zlashtirmovchi o'quvchilarga ajraladi. O'quvchilarni ularning qaysi sinfda o'qishlariga qarab 1-sinf o'quvchilari, 2-sinf o'quvchilari, ..., 9-sinf o'quvchilari qism to'plamlariga ajratish mumkin. Bunda 9 yillik maktab o'quvchilari 9 ta qismga ajraladi. O'z-o'zidan ma'lumki, bu qismlar umumiy elementga ega bo'la olmaydi, ya'ni biror o'quvchi bir vaqtda ikkita sinfda o'qimaydi. Matematikada to'plamni bunday o'zaro kesishmaydigan qismlarga ajratish — *to'plamni sinflarga ajratish* deb ataladi.

7-ta'rif. *Agar A to'plam chekli yoki cheksiz sondagi juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsa, A to'plam $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$* ***sinflarga ajratilgan*** *deyiladi.*

Demak, to'plamni sinflarga ajratishning ikkita sharti bor ekan:

1) $A = A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n\cup \ldots$;

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$, bu yerda $i; j = 1, 2, ..., n, ...$ va $i \neq j$.

Masalan, barcha natural sonlar to'plami bir necha usul bilan sinflarga ajratilishi mumkin:

1) tub sonlar va murakkab sonlar sinfi;

2) juft va toq sonlar sinfi;

3) bir xonali, ikki xonali, uch xonali ... sonlar sinfi.

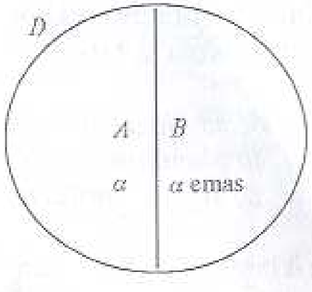
1- va 2-holda sinflar soni chekli bo'lsa, 3-holda sinflar soni cheksizdir.

To'plamni sinflarga ajratish masalasi fanda tasniflash (klassifikatsiya) deb ataladi. Siz botanikada o'simliklar, zoologiyada hayvonlar, kimyo fanida kimyoviy elementlar, geometriyada geometrik shakllar tasnifi bilan tanishgansiz.

Xulosa qilib aytganda, to'plamni sinflarga ajratishning ikkita sharti bor ekan: *1) qism to'plamlar (sinflar) umumiy elementga ega bo'lmaydi; 2) barcha qism to'plamlar (sinflar) birlashmasi berilgan to'plamga teng.* Demak, to'plam sinflarga ajratilgan bo'lsa, uning har bir elementi albatta biror sinfga tegishli bo'ladi.

1.10. To'plamni elementlarining bitta, ikkita va uchta xossasiga ko'ra sinflarga ajratish. To'plamni sinflarga ajratish ko'pincha, elementlarining xossalariga qarab amalga oshiriladi. To'plamni sinflarga ajratishga oid uch xil masalani ko'rib chiqaylik.

I. D to'plam va biror α xossa berilgan bo'lsin. D to'plam elementlari α xossaga ega bo'lishi ham, ega bo'lmasligi ham mumkin. Bu holda D to'plam ikkita o'zaro kesishmaydigan A va B qism to'plamlarga ajraladi. A to'plam D to'plamning α xossaga ega bo'lgan elementlari to'plami, B esa D to'plamning α xossaga ega bo'lmagan elementlari to'plami. $A \cup B = D$ va $A \cap B = \varnothing$ ekanligi ravshan. Agar D to'plamning hamma elementi α xossaga ega bo'lsa, $B = \varnothing$, agar D to'plamning birorta ham elementi α xossaga ega bo'lmasa, $A = \varnothing$ bo'ladi.



I.9-rasm.

Agar A va B to'plamlar bo'sh bo'lmasa, D to'plamni I.9-rasmdagi kabi tasvirlash mumkin.

Masalan, D — sinfdagi o'quvchilar to'plami, α — uy vazifani bajarganlik xossasi bo'lsa, A — uy vazifani bajarib kelgan va B — uy vazifani bajarmagan o'quvchilar to'plami bo'ladi.

II. D to'plam va uning elementlari ega bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin bo'lgan α va β xossalar berilgan bo'lsin. Bu ikki xossa D to'plamni ko'pi bilan to'rt sinfga ajratishi mumkin:

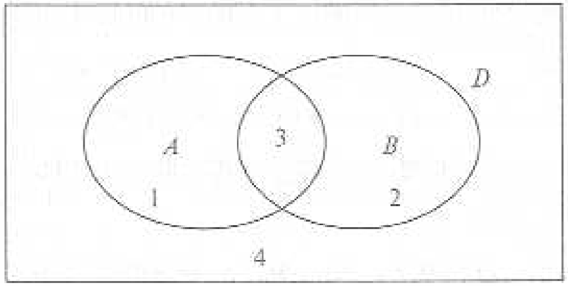
1-sinf: α xossaga ega bo'lgan va β xossaga ega bo'lmagan elementlar to'plami.

2-sinf: α xossaga ega bo'lmagan va β xossaga ega bo'lgan elementlar to'plami.

3-sinf: α va β xossalarga ega bo'lgan elementlar to'plami.

4-sinf: α va β xossalarga ega bo'lmagan elementlar to'plami.

Bu sinflarning birortasi bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Umumiy holda D to'plamni ikkita xossaga ko'ra sinflarga ajratishni I.10-rasmdagi kabi tasvirlash mumkin.



I.10-rasm.

Bu yerda: A — α xossaga ega bo'lgan; B — β xossaga ega bo'lgan elementlar to'plami.

Masalan, D — sinf o'quvchilari to'plami, α — «a'lo o'qish», β — «intizomli bo'lish» xossalari bo'lsin. U holda A — sinfdagi a'lochi; B — sinfdagi intizomli o'quvchilar to'plami bo'ladi. Bunda $A \backslash B$ — sinfdagi a'lochi, lekin intizomsiz o'quvchilar; $B \backslash A$ — intizomli, lekin a'lochi bo'lmagan o'quvchilar; $A \cap B$ — ham a'lochi, ham intizomli o'quvchilar; $D \backslash (A \cup B)$ — a'lochi bo'lmagan va intizomsiz o'quvchilar to'plami bo'ladi.

III. D to'plamni α, β, γ xossalar yordamida ajratish mumkin bo'lgan sinflarni ko'rsating va bu sinflarni Eyler — Venn diagrammasi yordamida tasvirlang.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi to'plamlarning xarakteristik xossasini toping:
   a) barcha musbat butun sonlar to'plami;
   b) barcha manfiy butun sonlar to'plami.
2. $20;\ \sqrt{15};\ 3;\ \sqrt{2};\ 0;\ -20;\ 45;\ \frac{7}{8};\ -2$ sonlari berilgan. Ulardan qaysilari:
   a) butun sonlar; b) nomanfiy butun sonlar; d) ratsional sonlar; e) haqiqiy sonlar to'plamiga tegishli bo'ladi?
3. Agar $A=\{a;\ o;\ e;\ u;\ i;\ o'\}$, $B=\{11,\ 22,\ 33,\ 44,\ 55,\ 66,\ 77,\ 88,\ 99\}$, $C=\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$ to'plamlar berilgan bo'lsa, ular elementlarining xarakteristik xossasini aniqlang.
4. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'plamlarni ko'rsating:
   a) 3 dan kichik sonlar; b) 3 dan katta bo'lmagan sonlar;
   d) 3 dan katta bo'lgan sonlar; e) 3 dan kichik bo'lmagan sonlar.
5. Quyidagi to'plamlarni koordinata o'qida tasvirlang:
   a) $X=\{x\mid x\in R,\ -3\le x\le 6\}$; d) $X=\{x\mid x\in R,\ x\le -3\}$;
   b) $Y=\{y\mid y\in R,\ y<9\}$; e) $Y=\{y\mid y\in R,\ -8\le x\le 4\}$.
6. Quyidagi sonli to'plamlarni elementlarining xarakteristik xossasi yordamida bering:
   a) $]2;\ 6[$; b) $]-\infty;\ 4]$; d) $]-\infty;\ -1]$; e) $[-7{,}2;\ 5]$;
   f) $[-3;\ +\infty[$; g) $]3{,}1;\ +\infty[$; h) $\left[1;\ 5\frac{1}{4}\right[$; i) $]-2;\ 5]$.
7. Quyidagilarni o'qing va ulardan rostlarini ko'rsating:
   a) $2\in]2;\ 21]$; b) $-0{,}7\in[-0{,}1;\ 2]$; d) $0\in]-\infty;\ 0]$;
   e) $7\in]8;\ +\infty[$;
   f) $21\in Q$; g) $5{,}3\in Z$; h) $-3\in N$; i) $-0{,}2\in Z$; j) $\frac{1}{5}\in R$.
8. Agar $A=\{27;\ 32;\ 36;\ 54;\ 232;\ 108;\ 324\}$ bo'lsa, A to'plamning quyidagi sonlardan tuzilgan qism to'plamlarini toping:
   a) 4 ga bo'linadi; b) 9 ga bo'linadi; d) 5 ga bo'linmaydi; e) 10 ga bo'linadi.
9. $B=\{a;\ b;\ c;\ d\}$ to'plamning barcha qism to'plamlarini yozing va ular sonini aniqlang.
10. Agar $A=\{x\mid x\in N,\ x\le 24\}$ bo'lsa, shu to'plamning
    a) 6 ga karrali;
    b) 2 ga karrali;
    d) 5 ga karrali bo'lmagan;
    e) 2 ga va 3 ga karrali sonlarda tuzilgan qism to'plamlarini aniqlang.
11. Agar $A=\{a\mid a\in N,\ 17\le a\le 23\}$, $B=\{b\mid b\in N,\ 8\le b\le 21\}$ bo'lsa, to'plamlar kesishmasi va birlashmasini aniqlang.
12. «Mustaqillik» va «Istiqlol» so'zlarini tashkil qilgan harflar to'plamining birlashmasi va kesishmasini toping.
13. Agar C — «Ikki xonali juft sonlar» to'plami;
    D — «10 ga karrali ikki xonali sonlar» to'plami bo'lsa, ularning kesishmasi va birlashmasini toping.
14. Agar $A=\{a\mid a\in N,\ a\le 20\}$, $B=\{b\mid b\in N,\ 18\le b\le 27\}$ bo'lsa,
    a) $17\in A\cap B$, b) $13\in A\cup B$, d) $5\in A\cup B$, e) $21\in A\cup B$,
    f) $18\in A\notin A\cup B$, g) $20\in A\cup B$ tasdiqlar to'g'rimi?

15. Agar $A=[-2;\ 4]$, $B=[-3;\ 6]$, $C=[-3;\ +\infty[$ bo'lsa, a) $A\cup B\cup C$ va b) $A\cup B\cap C$ larni koordinata o'qida tasvirlang.
16. Agar $A=\{a\mid a\in N,\ 10\le a\le 14\}$ bo'lsa,
    1) $(A\cap B)\cap C$; 2) $A\cap(B\cap C)$; 3) $A\cup(B\cap C)$; 4) $A\cup(B\cup C)$;
    5) $A\cup B\cap C$; 6) $A\cap(B\cup C)$ larni toping.
17. Agar R — universal to'plam bo'lsa, quyidagilarning to'ldiruvchilarini aniqlang:
    a) $]-\infty;\ 3[$; b) $]-\infty;\ 3]$; d) Q; e) R; f) $[2;\ 6]$; g) $]-2;\ 6]$;
    h) $]4;\ +\infty[$; i) $[4;\ +\infty[$.
18. Har qanday A va B to'plamlar uchun $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ekanligini isbotlang.
19. Agar $C=\{c\mid c\in N,\ 2\le c\le 10\}$; $D=\{d\mid d\in N,\ 8\le d\le 23\}$ — bo'lsa, $C\setminus D$ va $D\setminus C$ ni toping.
20. Agar A — natural sonlar to'plami, B — beshga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa, quyidagilar to'g'rimi:
    1) $25\in A\setminus B$; 2) $50\in B\setminus A$; 3) $15\in B\setminus A$; 4) $23\in A\setminus B$; 5) $22\in B\setminus A$?
21. Quyidagilarni aniqlang:
    a) natural sonlar to'plamining butun sonlar to'plamiga to'ldiruvchisi;
    b) butun sonlar to'plamining ratsional sonlar to'plamiga to'ldiruvchisi;
    d) ratsional sonlar to'plamining haqiqiy sonlar to'plamiga to'ldiruvchisini.
22. O'zbek alifbosidagi harflar to'plamini qanday sinflarga ajratish mumkin?
23. Universitet kutubxonasidagi kitoblar to'plamini qanday sinflarga ajratish mumkin?
24. Natural sonlar to'plamini qanday sinflarga ajratish mumkin? Misollar keltiring.
25. $A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$, $B=\{k;\ l;\ m\}$ bo'lsa, $A\times B$ ni toping va uni jadval ko'rinishida tasvirlang.
26. Agar
    1) $A=[-2;\ 3]$, $B=\{2;\ 3;\ 4\}$;
    2) $A=[-2;\ 3]$, $B=\{2;\ 4\}$;
    3) $A=R$, $B=[2;\ 4]$ bo'lsa, $A\times B$ ni to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida tasvirlang.
27. A to'plamda 8 ta element bor. Agar, $A\times B$ da: 1) 56 ta; 2) 8 ta; 3) 0 ta; 4) 24 ta element bo'lsa, B to'plamda nechta element bor?

2-§. MOSLIK VA MUNOSABAT

2.1. Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik tushunchasi. Moslik so'zi kundalik hayotda ko'p ishlatiladi. «Ob-havoga mos kiyim», «Bolaning yoshiga mos o'yinchoq», «Dasturga mos darslik», «Mahsulotning naviga mos baho» va hokazo. Keltirilgan misollardan ko'rinadiki, moslik ko'pincha ikki turli obyektlar to'plamlari orasida o'rnatiladi. Masalan, «Bolaning yoshiga mos o'yinchoq» deganda, bola rivojlanishining turli davrlari bilan barcha bolalar uchun chiqarilgan o'yinchoqlar to'plami orasidagi moslik ko'zda tutiladi. Yoki talabalar bilan ularning imtihonda olishi mumkin bo'lgan ballari to'plami orasida moslik berilgan bo'lsa, imtihondan so'ng har bir talaba o'z bilim darajasiga mos ballga ega bo'ladi.

Matematikada ikki to'plam orasidagi moslik «*binar moslik*» deb ataladi. «Binar» so'zi lotincha bis — «ikki marta» so'zidan olingan. Binar moslik elementlari berilgan to'plamlarning bir-biriga mos kelgan elementlari juftligidan iborat bo'ladi. Juftlik o'z navbatida ikki to'plam orasidagi dekart ko'paytma elementi ekanini ham hisobga olsak, moslikka quyidagicha ta'rif berish mumkin. Bunda moslikni lotin alifbosining $f, r, s, t, \ldots$ kabi harflaridan biri bilan belgilaymiz.

1-t a ' r i f. *X va Y to'plamlar orasidagi f moslik deb, $X\times Y$ dekart ko'paytma va uning istalgan G_f qism to'plami juftligi $f = (X\times Y, G_f)$ ga aytiladi.*

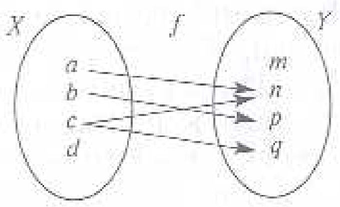
Sizga ma'lum bo'lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo'la oladi.

X to'plam *moslikning birinchi to'plami* deyiladi. X to'plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami esa, *moslikning aniqlanish sohasi* deyiladi.

Y to'plam *moslikning ikkinchi to'plami* deyiladi. Y to'plamning moslikda qatnashgan elementlari to'plami moslikning *qiymatlar to'plami* deyiladi.

2.2. Moslikning grafi va grafigi. $G_f\subset X\times Y$ to'plam moslikning *grafigi* deyiladi. Ikki to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo'nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar *moslikning grafi* deyiladi (graf lotincha «grafo» — «yozaman» so'zidan olingan) (I.11-rasm).

Bunda: $X = \{a; b; c; d; e\}$ — moslikning 1-to'plami, $Y = \{m; n; p; q\}$ — moslikning 2-to'plami, $G_f = \{(a; n), (b; p), (c; n), (c; q), (d; p)\}$ — moslikning grafigi, $\{a; b; c; d\}$ — aniqlanish sohasi, $\{n; p; q\}$ — qiymatlar to'plami bo'ladi.



I.11-rasm.

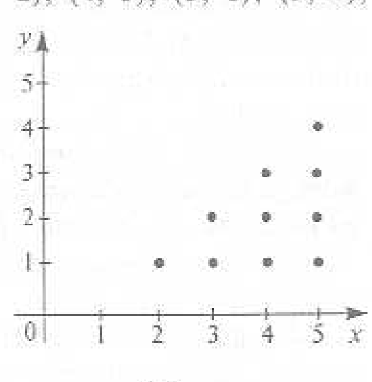
Moslik grafida aniqlanish sohasining har bir elementidan kamida bitta strelka chiqadi va qiymatlar to'plamining har bir elementiga hech bo'lmaganda bitta strelka keladi.

Sonli to'plamlar orasidagi moslik ikki o'zgaruvchili tenglama va tengsizlik ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Masalan, $X, Y\subset R$ va f moslik $x + y = 4$ tenglama bilan aniqlansin. G_f — cheksiz to'plam bo'lgani uchun uning ba'zi elementlarini sanab o'tamiz: $(-2; 6), (0; 4), (4; 0); (2; 2), \ldots$, bunda istalgan x songa $y = 4 - x$ soni mos keladi.

Sonli to'plamlar orasidagi moslik grafigini koordinata tekisligida tasvirlash qulay. f: $x + y = 4$ moslik grafigini $x, y\in R$ va $x, y\in N$ hollar uchun tasvirlab ko'ring.

Sonli to'plamlar orasidagi moslik ikki o'zgaruvchili tengsizlik ko'rinishida ifodalanishi mumkin. $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ to'plamda berilgan $x > y$ moslikni ko'raylik. Bu yerda $x, y\in M$, bu holda moslik ikkita bir-biriga teng to'plamlar orasida berilgan bo'ladi, ya'ni $X = Y = M$. (Moslikning bunday turi haqida keyingi paragrafda alohida so'z yuritamiz.) $x > y$ moslik grafi $x > y$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $(x; y)\in M\times M$ juftliklardan iborat, $G = \{(2; 1), (3; 1) (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3); (5; 4)\}$. Chunki $2 > 1; 2 > 1; 3 > 2; 4 > 1, \ldots$

Bu grafik koordinata tekisligida I.12-rasmda ko'rsatilgandek tasvirlanadi.



I.12-rasm.

2.3. Moslik turlari.

2-t a ' r i f. *Agar $f(X\times Y; G_f)$ moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik* ***hamma yerda aniqlangan*** *deyiladi.*

Bunday moslik grafida X to'plamning har bir elementidan hech bo'lmaganda bitta strelka chiqadi.

Masalan, X — tekislikdagi barcha kvadratlar, Y — barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Har bir kvadratga uning yuzini ifodalovchi haqiqiy sonni mos qo'ysak, bunday moslik hamma yerda aniqlangan bo'ladi, chunki har qanday kvadrat o'z yuzasiga ega.

3-t a ' r i f. *Agar $f = (X\times Y; G_f)$ moslikning qiymatlar to'plami ikkinchi to'plam Y bilan ustma-ust tushsa, f moslik* ***syuryektiv*** *deyiladi.*

Bunday moslik grafida (agar uni chizish mumkin bo'lsa) 2-to'plamning har bir elementiga hech bo'lmaganda bitta strelka keladi. Masalan, avvalgi misoldagi moslik syuryektiv bo'la olmaydi, chunki R dagi manfiy sonlarga mos kvadratlar mavjud emas, kvadrat yuzasi musbat son bilan ifodalanadi. Agar shu misolda 2-to'plamni barcha musbat haqiqiy sonlar to'plami bilan almashtirsak, f moslik syuryektiv moslik bo'ladi.

4-ta'rif. *Agar f moslikda birinchi to'plamning har bir elementiga ikkinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa, f moslik* ***funksional*** *deyiladi.*

Matematika kursida funksional mosliklar *funksiya* deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, 1-to'plamning har bir elementiga 2-to'plamdan faqat bitta element mos keladi yoki birorta ham element mos kelmaydi. Maktab kursidan sizga tanish har bir funksiya funksional moslikka misoldir.

Funksional moslikka hayotiy misollar ham ko'p.

Masalan, teatrda tomoshabinlar ust kiyimlarini ilish uchun kiyim ilgichlar nomerlangan bo'ladi. Har bir ilingan palto uchun nomer beriladi. O'z-o'zidan ma'lumki, ilinmagan ust kiyimga nomer berilmaydi. Lekin bitta nomerga bir necha ust kiyim ilinishi ham mumkin. Ust kiyimlar va ilgich nomerlari orasidagi moslik funksionaldir. Agar bo'sh ilgichlar qolmasa, bu moslik syuryektiv ham bo'ladi.

5-ta'rif. *Agar f moslikda ikkinchi to'plamning har bir elementiga birinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos qo'yilgan bo'lsa, f moslik* ***inyektiv*** *deyiladi.*

Bunday moslik grafida 2-to'plamning har bir elementiga ko'pi bilan bitta strelka keladi.

Masalan, tekislikdagi har bir aylanaga unga ichki chizilgan uchburchak mos qo'yilgan bo'lsin. Bu moslik inyektiv bo'ladi, chunki har bir uchburchakka faqat bitta tashqi aylana chizish mumkin. Lekin bu moslik funksional emas, chunki har bir aylanaga istalgancha ichki uchburchaklar chizish mumkin bo'ladi. Moslikning syuryektivligi va hamma yerda aniqlangan bo'lishi haqida o'ylab ko'ring.

6-ta'rif. *Syuryektiv va inyektiv moslik bir so'z bilan* ***biyektiv*** *deyiladi.*

Biyektiv moslikda 2-to'plam elementlari faqat bir martadan ishtirok etadi, moslik grafida (agar chizish mumkin bo'lsa), 2-to'plamning har bir elementiga bittadan strelka keladi.

Masalan, $X = \{$kvadrat, romb, doira, oval, uchburchak$\}$,

$Y = \{$sariq, qizil, yashil, ko'k$\}$.

Agar $G_f = \{$(kvadrat; ko'k), (romb; sariq), (oval; yashil), (oval; ko'k), (uchburchak; qizil)$\}$ bo'lsa, f — moslik biyektiv moslikdir.

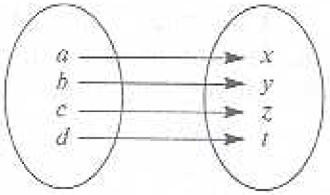
7-ta'rif. *Hamma yerda aniqlangan funksional moslik* ***akslantirish*** *deyiladi.*

Akslantirishda 1-to'plamning har bir elementiga 2-to'plamning bittadan elementi mos keladi. Agar akslantirishning grafini chizish mumkin bo'lsa, X to'plamning har bir elementidan bittadan strelka chiqadi, ya'ni ular moslikda faqat bir martadan ishtirok etadi.

Masalan, $X = \{a; b; c; d; e\}$;

$Y = \{3; 2; 1; 0\}$ $G_f = \{(a; 3), (b; 0); (c; 3), (d; 2); (e; 0)\}$ bo'lsa, f moslik akslantirishdir.

8-ta'rif. *X va Y to'plamlar orasidagi f moslik biyektiv akslantirish bo'lsa, X va Y to'plamlar orasida o'zaro* ***bir qiymatli moslik o'rnatilgan*** *deyiladi.*



1.13-rasm.

Masalan:

$X = \{a; b; c; d\}$;

$Y = \{x; y; z; t\}$; $G_f = \{(a; x), (b; y)$; $(c; z), (d; t)\}$ bo'lsa, f moslik X va Y to'plamlar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi.

Chekli va cheksiz to'plamlar elementlari soni *to'plam quvvati* deb yuritiladi va $n(A)$, $n(B)$, $n(N)$ kabi yoziladi. Masalan, $A = \{a; b; c; d\}$ bo'lsa, $n(A) = 4$ bo'ladi. O'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yordamida chekli va cheksiz to'plamlar elementlari sonini taqqoslash mumkin.

9-ta'rif. *X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar* ***teng quvvatli*** *yoki* ***ekvivalent*** *deyiladi va $X \sim Y$ ko'rinishda yoziladi.* Bu holda $n(X) = n(Y)$ bo'ladi.

10-ta'rif. *Barcha natural sonlar to'plami N ga teng quvvatli to'plamlar* ***sanoqli to'plam*** *deyiladi.*

Agar istalgan cheksiz to'plamning har bir elementiga biror qoida yordamida bittadan natural sonni mos keltira olsak, bu to'plam elementlari natural sonlar yordamida nomerlab chiqilgan bo'ladi va bunday to'plam sanoqli to'plam hisoblanadi. Natural sonlar to'plamining istalgan cheksiz qism to'plami sanoqlidir.

Masalan, barcha juft sonlarni quyidagicha nomerlab chiqamiz:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \end{array}$$

Hatto barcha butun sonlar to'plami ham sanoqli ekanini ko'rsatish mumkin.

2.4. To'plam elementlari orasidagi munosabat. Xususiy holda teng to'plamlar orasidagi moslik X to'plam elementlari orasidagi *binar munosabat* deyiladi. Binar munosabatlar P, Q, R va boshqa lotin harflari bilan belgilanadi.

11-ta'rif. *X to'plam elementlari orasidagi **munosabat** deb $R = (X \times X,\ G_R)$ juftlikka aytiladi*, bu yerda $G_R \subset X \times X$.

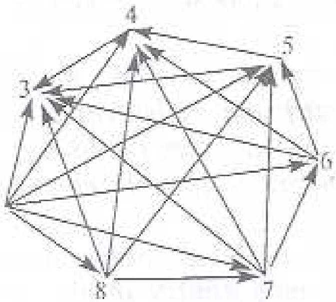
Agar X to'plamda berilgan R munosabatda $a \in X$ elementga $b \in X$ element mos kelsa, «a element b element bilan R munosabatda» deyiladi va aRb deb yoziladi, bu yerda $(a;\ b) \in G_R$.

X odamlar to'plami bo'lsa, unda «do'st bo'lmoq», «bitta shaharda yashamoq», «qarindosh bo'lmoq» kabi munosabatlar bo'ladi. Sonlar orasida «teng», «katta», «kichik», «karrali», «katta emas», «bo'luvchisi» va h. k. munosabatlar, geometrik shakllar to'plamida «tengdoshlik», «parallellik», «perpendikularlik» va boshqa munosabatlar haqida gapirish mumkin.

Matematikada binar munosabatlar «=», «<», «>», «≠», «||», «⊥» kabi belgilar orqali beriladi.

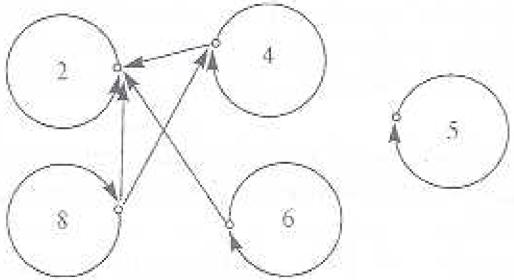
Munosabat grafi chekli to'plamlar uchun quyidagicha chiziladi: to'plam elementlari nuqtalar bilan belgilanadi, mos elementlar strelkalar bilan tutashtiriladi. Masalan, $X = \{3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ to'plam elementlari orasida P: «$x > y$» munosabat berilgan. U quyidagi juftliklar to'plami orqali ifoda qilinadi:

$G = \{(4;\ 3),\ (5;\ 3),\ (5;\ 4),\ (6;\ 3),\ (6;\ 4),\ (6;\ 5),\ (7;\ 3),\ (7;\ 4),\ (7;\ 5),\ (7;\ 6),\ (8;\ 3),\ (8;\ 4),\ (8;\ 5),\ (8;\ 6),\ (8;\ 7),\ (9;\ 3),\ (9;\ 4),\ (9;\ 5),\ (9;\ 6),\ (9;\ 7)\}$.



I.14-rasm.

Uning grafi I.14-rasmdagi ko'rinishda bo'ladi. Yoki $Y = \{2;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8\}$ to'plamda Q: «x soni y soniga karrali» («$x \vdots y$») munosabati berilgan bo'lsin. Munosabat grafida birinchisi ikkinchisiga karrali sonlar juftligidan iborat bo'ladi. $G = \{(2;\ 2),\ (4;\ 2),\ (4;\ 4),\ (5;\ 5),\ (6;\ 2),\ (6;\ 6),\ (8;\ 2),\ (8;\ 4),\ (8;\ 8)\}$ munosabat grafida (2; 2) juftlikni ko'rsatuvchi strelkaning boshi ham, oxiri ham bitta nuqtada bo'ladi, bunday strelkani «halqa» deb ataymiz. Munosabat grafi I.15-rasmdagi kabi chiziladi:



I.15-rasm.

2.5. Munosabat xossalari.

12-ta'rif. *Agar X to'plamning har bir elementi o'z-o'zi bilan R munosabatda bo'lsa (ya'ni, xRx bajarilsa), u holda R munosabat X to'plamda **refleksiv** deyiladi.*

Masalan, «$x = y$», «$a \parallel b$», «$x \vdots y$» munosabatlar refleksivdir.

Refleksiv munosabat grafida har bir element atrofida halqa bo'ladi (2.5-banddagi 2-misol).

13-ta'rif. *Agar X to'plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, u holda R munosabat X to'plamda **antirefleksiv** deyiladi.*

Masalan, «$a < b$», «$a > b$», «$a \perp b$» munosabatlar antirefleksivdir.

Antirefleksiv munosabat grafida birorta ham halqa bo'lmaydi (2.5-banddagi 1-misol).

14-ta'rif. *Agar X to'plamda R munosabat berilgan bo'lib, xRy va yRx bir vaqtda bajarilsa, R **simmetrik munosabat** deyiladi.*

Masalan, «$a \parallel b$», «$a \perp b$», «$a = b$» munosabatlari simmetrikdir. Simmetrik munosabat grafida har bir strelkaga parallel qaytuvchi strelka bo'ladi.

15-ta'rif. *Agar X to'plamda berilgan R munosabatda xRy va yRx shartlardan faqat bittasi o'rinli bo'lsa, R munosabat **asimmetrik munosabat** deyiladi.*

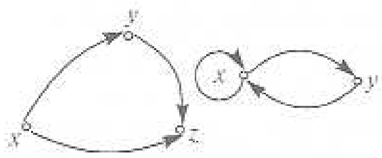
Masalan, «$a > b$», «$a < b$» munosabatlari asimmetrikdir.

Asimmetrik munosabat grafida birorta ham halqa va qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

16-ta'rif. *Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar faqat $x = y$ bo'lgan holda bajarilsa, u holda R **antisimmetrik munosabat** deyiladi.*

Masalan, «$a \geq b$», «$a \leq b$», «$a \vdots b$», «a soni b sonining bo'luvchisi» kabi munosabatlar antisimmetrik munosabat bo'ladi. Antisimmetrik munosabat grafida halqalar bo'ladi, lekin qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

17-ta'rif. *Agar X to'plamda berilgan R munosabat uchun xRy va yRz ekanligidan xRz ekanligi kelib chiqsa, u holda R munosabat* ***tranzitiv*** *deyiladi.*



I.16-rasm.

Masalan, «$a \geq b$», «$a = b$», «$a \,||\, b$», «$a \vdots b$» kabi munosabatlar tranzitivdir. Tranzitiv munosabat grafida x dan y ga, y dan z ga boruvchi strelkalar bo'lsa, albatta x dan z ga boruvchi strelka ham bo'lishi kerak (I.16-rasm).

18-ta'rif. *Har qanday R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda R* ***ekvivalentlik munosabati*** *deyiladi.*

Masalan, «$a \,||\, b$», «$a = b$» kabi munosabatlar ekvivalentlik munosabati bo'ladi. Ekvivalentlik munosabati to'plamni sinflarga ajratadi.

Masalan, sinf o'quvchilari orasida «bir oyda tug'ilgan» munosabati berilgan bo'lsin. Bu munosabat refleksiv, chunki har bir A o'quvchi o'zi o'zi bilan bir oyda tug'ilgan. Munosabat simmetrik, chunki A o'quvchi B bilan bir oyda tug'ilgan bo'lsa, B ham A bilan bir oyda tug'ilgan bo'ladi. Munosabat tranzitiv, chunki A o'quvchi B bilan, B o'quvchi C bilan bir oyda tug'ilgan bo'lsa, A bilan C ning ham tug'ilgan oyi bir xil bo'ladi. Demak, bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'lar ekan. U sinf o'quvchilarini «bir oyda tug'ilgan o'quvchilar» sinflariga ajratadi. Bunday sinflar soni ko'pi bilan 12 ta bo'lishi mumkin.

Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plamida parallellik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'lishini ko'rsatamiz. Tekislikdagi to'g'ri chiziqlar kesishmasa yoki ustma-ust tushsa, parallel hisoblanishini eslatib o'tamiz.

Parallellik munosabati:

a) refleksiv, chunki ixtiyoriy a to'g'ri chiziq uchun $a \,||\, a$ bo'ladi;

b) simmetrik, chunki $a \,||\, b$ bo'lsa, $b \,||\, a$ bo'ladi;

d) tranzitiv, chunki $a \,||\, b$ va $b \,||\, c$ bo'lsa, $a \,||\, c$ bo'ladi (parallel to'g'ri chiziqlar xossasiga ko'ra).

Parallellik munosabati tekislikdagi barcha to'g'ri chiziqlarni parallel to'g'ri chiziqlar sinfiga ajratadi. Bu sinflar geometriyada parallel to'g'ri chiziqlar dastasi deb ataladi.

2.6. Tartib munosabati.

19-ta'rif. *Agar X to'plamda berilgan simmetrik bo'lmagan R munosabat tranzitiv bo'lsa, u holda R* ***tartib munosabati*** *deyiladi.*

Masalan, «<», «>», «$\leq$», «$\geq$» lar tartib munosabati bo'ladi.

Simmetrik bo'lmagan munosabatlar o'z navbatida asimmetrik va antisimmetrik munosabatlarga bo'linar edi.

Agar R munosabat X to'plamda asimmetrik va tranzitiv bo'lsa, u *qat'iy tartib munosabati* deyiladi.

Masalan, sonlar to'plamida «katta», «kichik», daraxtlar to'plamida «balandroq», kesmalar to'plamida «uzunroq», odamlar to'plamida «yoshi katta», «bo'yi baland» kabi munosabatlar qat'iy tartib munosabati sanaladi.

Agar R munosabat X to'plamda antisimmetrik va tranzitiv bo'lsa, u *noqat'iy tartib munosabati* deyiladi.

Masalan, haqiqiy sonlar to'plamida «$a \geq b$», «$a \leq b$», natural sonlar to'plamida «$a \vdots b$» va «a soni b sonining bo'luvchisi» kabi munosabatlar noqat'iy tartib munosabati bo'ladi. Qat'iy va noqat'iy tartib munosabatlari to'plamni tartiblaydi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. $M = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ va N — natural sonlar to'plami berilgan. Bu to'plamlar orasida R moslik: «m sonning kvadrati n soniga teng», bunda $m \in M$, $n \in N$ berilgan. R moslik juftliklari to'plamini aniqlang.
2. $X = \{x \in n, x \leq 7\}$, $Y = \{y \mid y \in N, 15 \leq y \leq 19\}$ to'plam elementlari orasida C: «x soni y sonining bo'luvchisi, bunda $x \in X$, $y \in Y$ moslik berilgan bo'lsa, uning grafigini yasang.
3. $A = \{1; 2; 3; 4; 6\}$, $B = \{5; 7\}$ to'plamlar elementlari orasida «kichik» mosligi o'rnatilgan. Bu moslik grafigini quring.
4. Kundalik hayotdan mosliklarga misollar keltiring.
5. $X = \{x \mid x \in N, x \leq 9\}$, $Y = \{y \mid y \in N, y \leq 4\}$ to'plamlar elementlari orasida R: «x soni y soniga karrali» mosligi berilgan (bunda $x \in X$, $y \in Y$). R va R^{-1} mosliklar grafigini quring.
6. O'zaro bir qiymatli moslikka misollar keltiring.
7. Quyidagi to'plamlardan qaysilari $A = \{0; 3; 6; 9; 12, 1\}$ to'plam elementlari orasidagi munosabat bo'ladi:

1) $G_1 = \{(6; 3); (9; 3); (12; 3); (12; 6); (15; 3); (3; 3); (6; 6); (9; 9); (12; 12); (15; 15)\}$;

2) $G_2 = \{(0; 3); (3; 6); (6; 9); (9; 12); (12; 15)\}$;
3) $G_3 = \{(3; 3); (3; 6); (3; 9); (3; 12); (3; 15); (6; 6); (9; 9); (12; 12); (15; 15)\}$;
4) $G_4 = \{(3; 6); (6; 12); (9; 18)\}$?

8. $\{0; 3; 5; 7\}$ to'plamda berilgan «kichik yoki teng» munosabati grafigini yasang.
9. $X = \{1; 2; 4; 8; 12; 16\}$ to'plamda «x soni y sonining bo'luvchisi» munosabati berilgan. Bu munosabat grafigini yasang va xossalarini aniqlang.
10. $C = \{7; 14; 28; 25\}$ to'plamda aniqlangan «karrali» munosabati refleksivlik xossasiga egami? Bu munosabat uchun simmetriklik xossasi o'rinlimi? Javobingizni asoslang.
11. Natural sonlar to'plamida «x son bevosita y sonidan keyin keladi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u tartib munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.
12. Natural sonlar to'plamida «5 ga bo'lganda bir xil qoldiq chiqadi» munosabati o'rnatilgan bo'lsa, u ekvivalentlik munosabati bo'ladimi? Javobingizni asoslang.
13. $B=\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{10}; \frac{25}{50}; \frac{6}{8}; \frac{4}{7}\right\}$ to'plamda «x kasr y kasrga teng» munosabati berilgan. Quyidagilarni aniqlang:
1) bu munosabat ekvivalentlilik munosabati bo'ladimi? Agar bo'lsa, hosil bo'ladigan ekvivalentlik sinflarini ko'rsating;
2) B to'plamda birorta tartib munosabatini aniqlang.

3-§. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

3.1. Kombinatorika masalasi. Elementlarning turli kombinatsiyalari va ularning sonini topish bilan bog'liq masalalar *kombinatorika masalalari* deyiladi. Bunday masalalar matematika fanining tarmog'i — kombinatorikada o'rganiladi. Kombinatorika asosan, XVII—XIX asrlarda mustaqil fan sifatida yuzaga kelgan bo'lib, uning rivojiga B. Paskal, P. Ferma, G. Leybnis, Y. Bernulli, L. Eyler kabi olimlar katta hissa qo'shganlar.

Kombinatorikada, asosan, chekli to'plamlar, ularning qism to'plamlari, chekli to'plam elementlaridan tuzilgan kortejlar va ularning sonini topish masalalari o'rganilgani uchun uni to'plamlar nazariyasining bir qismi sifatida qarash mumkin.

3.2. Yig'indi qoidasi. Kombinatorikada to'plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi *yig'indi qoidasi* deb ataladi.

1) Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \tag{1}$$

bo'ladi. Ya'ni kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasi elementlari soni shu to'plamlar elementlari sonlarining yig'indisiga teng.

2) Agar $A \cap B \neq \varnothing$ bo'lsa,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{2}$$

bo'ladi. Ya'ni umumiy elementga ega ikki to'plam birlashmasi elementlari soni to'plamlarning har biri elementlari sonlari yig'indisidan ularning umumiy elementlari sonining ayrilganiga teng. (2) formula (1) formulaning umumiy holi bo'lib, (1) formulada $n(A \cap B) = 0$, ya'ni to'plamlarning umumiy elementi yo'q.

3) Yig'indi qoidasi umumiy elementga ega bo'lgan uchta A, B, C to'plam uchun quyidagicha yoziladi: agar $A \cap B \cap C = \varnothing$ bo'lsa,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \tag{3}$$

bo'ladi.

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: *agar x elementni k usul, y elementni m usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, «x yoki y» elementni k + m usul bilan tanlash mumkin.*

Masalan, savatda 8 ta olma va 10 ta nok bor bo'lsa, 1 ta mevani $8 + 10 = 18$ usul bilan tanlash mumkin.

(2) formula bilan yechiladigan masala: 40 talabadan 35 tasi matematika imtihonini, 37 tasi rus tili imtihonini topshira oldi. 2 talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

Y e c h i s h. A — matematika fanidan «2» olgan, B — rus tili fanidan «2» olgan talabalar to'plami bo'lsin.

$n(A) = 40 - 35 = 5$ $\qquad$ $n(A \cap B) = 2$.
$n(B) = 40 - 37 = 3$ $\qquad$ $n(A \cup B) = 5 + 3 - 2 = 6$.

J a v o b: 6 ta qarzdor talaba bor.

3.3. Ko'paytma qoidasi. Chekli to'plamlarning dekart ko'paytmasi elementlari sonini topishga imkon beradigan qoida *ko'paytma qoidasi* deyiladi.

$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2 ..., b_m\}$ to'plamlar elementlaridan nechta tartiblangan $(a_i; b_j)$ juftlik tuzish mumkinligini ko'raylik. Barcha juftliklarni tartib bilan quyidagicha joylashtiramiz:

$$\begin{array}{l} (a_1; b_1), (a_1; b_2), \ldots, (a_1; b_m), \\ (a_2; b_1), (a_2; b_2), \ldots, (a_2; b_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_n; b_1), (a_n; b_2), \ldots, (a_n; b_m). \end{array}$$

Bu jadvalda n ta qator va m ta ustun bo'lib, undagi barcha juftliklar soni nm ga teng. Bu yerda $n = n(A)$ va $m = n(B)$.

Ko'paytma qoidasi $n(A\times B) = n(A)\cdot n(B)$ ko'rinishda yoziladi.

Ko'paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko'rinishi: «Agar x elementni m usul, y elementni n usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, $(x; y)$ tartiblangan juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Ikkitadan ortiq to'plamlar uchun bu formula quyidagicha yoziladi:

$$n(A_1\times A_2\times \ldots \times A_n) = n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot \ldots \cdot n(A_n),\ (n > 2).$$

Masalan, A shahardan B shaharga 3 yo'l bilan, B shahardan C shaharga ikki yo'l bilan borish mumkin bo'lsa, A shahardan C shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo'lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo'l bilan o'tish mumkin bo'lsa, umumiy yo'lni $3\cdot 2 = 6$ usul bilan o'tish mumkin.

Umumlashgan ko'paytma qoidasi: *«Agar x elementni m usul bilan, y elementni, x ni tanlab bo'lgandan so'ng, n usul bilan tanlash mumkin bo'lsa,* $(x\cdot y)$ *juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».*

M a s a l a. Nechta turli raqamlar bilan yozilgan ikki xonali sonlar bor?

Y e c h i s h. 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, ..., 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o'nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. Hammasi bo'lib $9\cdot 9 = 81$ ta shunday son bor ekan.

3.4. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar.

M a s a l a. m elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar sonini toping.

Y e c h i s h. k o'rinli kortej $\underbrace{X\times X\times\ldots\times X}_{k \text{ marta}}$ dekart ko'paytmaning elementi bo'lib, tartiblangan k-likni (kalik deb o'qiladi) bildiradi. Masalani yechish uchun $X\times X\times \ldots \times X$ dekart ko'paytma elementlari sonini topish kerak. Bu son $n(X) = m$ bo'lgani uchun

$$n(X\times X\times\ldots\times X) = n(X)\cdot n(X)\cdot\ldots\cdot n(X) = m\cdot m\cdot\ldots\cdot m = m^k$$

ga teng.

Demak, m elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan k o'rinli kortejlar soni m^k ga teng ekan. Kombinatorikada bunday kortejlarni *m elementdan k tadan takrorlanadigan o'rinlashtirishlar* deyiladi. Ularning soni $\bar{A}_m^k$ bilan belgilanadi. (A — fransuzcha arrangement — «o'rnashtirish, joylashtirish ma'nosini bildiradi.) $\bar{A}_m^k = m^k$.

M a s a l a. 6 raqamli barcha telefon nomerlari sonini toping.

Y e c h i s h. Telefon nomerlari 0 dan 9 gacha bo'lgan 10 ta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartiblangan 6 o'rinli kortejlar sonini topamiz:

J a v o b: $\bar{A}_{10}^{\,6} = 10^6 = 1000000$. 6 raqamli telefon nomerlari soni 10^6 ga teng.

3.5. Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar.

1. Agar chekli X to'plam elementlari biror usul bilan nomerlab chiqilgan bo'lsa, X to'plam *tartiblangan* deyiladi.

Masalan, $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$.

Bitta to'plamni turli usullar bilan tartiblash mumkin.

Masalan, sinf o'quvchilarini yoshiga, bo'yiga, og'irligiga qarab yoki o'quvchilar familiyalari bosh harflarini alifbo bo'yicha tartiblash mumkin.

m elementli X to'plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin degan savolga javob beraylik.

Tartiblash — bu elementlarni nomerlash demakdir. 1-nomerni m ta elementning istalgan biriga berish mumkin. Shuning uchun 1-elementni m usul bilan, 2-elementni 1-element tanlanib bo'lgandan so'ng $m - 1$ usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi, xolos. Tartiblashlarning umumiy soni $m(m - 1)(m - 2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = m!$ ga teng.

$m!$ — dastlabki m ta natural son ko'paytmasi (*m faktorial* deb o'qiladi). Masalan, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$, $m! = P_m$ bilan belgilanadi va *takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar soni* deb ataladi.

3.6. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar. Umumiyroq masalani ko'rib chiqaylik: m elementli X to'plamdan nechta tartiblangan k elementli to'plamlar tuzish mumkin?

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tartiblash k elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni

$$m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)$$

ko'paytmaga teng. U A_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan *takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar soni* deb ataladi:

$$A_m^k = m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

$A_m^m = P_m = m!$; $0! = 1$ deb qabul qilinadi.

Masalan, sinfdagi 20 o'quvchidan tozalik va davomat uchun javob beruvchi 2 o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20\cdot19 = 380$ (usul bilan).

3.7. Takrorlanmaydigan guruhlashlar. «m elementli X to'plamning nechta k elementli qism to'plamlari bor?» — degan masalani hal qilaylik.

Masalan, 4 elementli $A = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ to'plamning nechta 3 elementli qism to'plami borligini ko'raylik. Ular $\{a;\ b;\ c\}$, $\{a;\ b;\ d\}$, $\{a;\ c;\ d\}$, $\{b;\ c;\ d\}$. Demak, 4 ta shunday qism to'plam bor ekan. Bunday qism to'plamlar *takrorlanmaydigan guruhlashlar* deb ataladi. Bu qism to'plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko'proq 3 o'rinli kortejlarga ega bo'lamiz.

Masalan, $\{a;\ b;\ c\}$ ni tartiblasak: $(a;\ b;\ c)$, $(a;\ c;\ b)$, $(b;\ a;\ c)$, $(b;\ c;\ a)$, $(c;\ a;\ b)$, $(c;\ b;\ a)$ tartiblangan uchliklarga ega bo'lamiz, tartiblanishlar soni $3! = 6$ marta ko'p. Bu bog'lanishdan foydalanib, guruhlashlar sonini topish formulasini keltirib chiqarish mumkin.

m elementli to'plamning k elementli qism to'plamlari soni C_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan *takrorlanmaydigan guruhlashlar soni* deyiladi. (C — fransuzcha combinaison — «birikma» so'zidan olingan.) Takrorlanmaydigan guruhlashlar soni uchun

$$A_m^k = C_m^k\cdot P_m \Rightarrow C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

formulaga ega bo'lamiz.

M a s a l a. Sinfdagi 20 o'quvchidan ko'rikda ishtirok etish uchun uch o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Y e c h i s h. Ko'rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 20 elementli to'plamning 3 elementli qism to'plamlari soni nechtaligini topamiz:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3} = 3\cdot19\cdot20 = 1140.$$

J a v o b: 3 o'quvchini 1140 usul bilan tanlash mumkin ekan.

3.8. C_m^k ko'rinishdagi sonlarning xossalari.

1°. $C_m^k = C_m^{m-k}$. 2°. $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$. 3°. $C_m^0 = C_m^m = 1$.

1-xossani isbot qilish uchun $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ formuladan foydalanamiz:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!(m-m+k)!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = C_m^k.$$

Xossaga ko'ra, $C_{20}^3 = C_{20}^{17}$; $C_5^2 = C_5^3$ va h. k.

2-xossaning i s b o t i.

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-1)-(k-1)!} + \frac{(m-1)!}{k!(m-1-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!(m-k-1)!} = \frac{(m-1)!k}{(k-1)!k(m-k)} +$$

$$+ \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k-1)!(m-k)} = \frac{(m-1)!k}{k!(m-k)} + \frac{(m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!k + (m-1)!(m-k)}{k!(m-k)!} = \frac{(m-1)!(k+m-k)}{k!(m-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!m}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_m^k$$

2°- va 3°-xossalardan foydalanib, C_m^k ko'rinishdagi sonlarning qiymatini ketma-ket hisoblash mumkin.

3°-xossaga ko'ra $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = C_2^0 = C_2^2 = 1$. Bundan 2° ga ko'ra $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$.

C_m^k ko'rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko'rinishida joylashtirish mumkin:

$$\begin{array}{ccc} C_0^0 & \qquad & 1 \\ C_1^0 C_1^1 & & 1\ 1 \\ C_2^0 C_2^1 C_2^2 & & 1\ 2\ 1 \\ C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3 & & 1\ 3\ 3\ 1 \\ C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4 & & 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ & & 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \end{array}$$

Har bir son o'zining tepasidagi ikkita son yig'indisidan iborat. Har bir qatordagi sonlar $(a + b)^m$ ko'phadning yoyilmasidagi binomial koeffitsiyentlarga teng. Ularning yig'indisi m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini beradi.

Masalan, $1 + 2 + 1 = 4$. Demak, 2 elementli to'plamning hammasi bo'lib 4 ta qism to'plami bor ekan. Ular 1 ta 0, 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli (ya'ni X to'plamning o'zi) qism to'plamdan iborat.

3.9. Chekli to'plam qism to'plamlari soni. Umumiy holda chekli m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topish masalasini qo'yaylik. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda X to'plamni tartiblaymiz. So'ng har bir qism to'plamini m o'rinli kortej sifatida shifrlaymiz: qism to'plamga kirgan element o'rniga 1, kirmagan element o'rniga 0 yozamiz. Shunda qism to'plamlar soni 2 ta {0; 1} elementdan tuzilgan barcha m o'rinli kortejlar soniga teng bo'ladi: $\overline{A}_2^m = 2^m$. Masalan, 2 elementli to'plam to'plamostilari soni $2^2 = 4$ ga, 3 elementli to'plamning to'plamostilari soni $2^3 = 8$ ga teng. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4-qatoridagi sonlar yig'indisiga ham teng, ya'ni $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1+3+3+1=8$.

Umumiy holda: $C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Fizika ma'ruzasiga 20 ta, astronomiya ma'ruzasiga 30 ta talaba qatnashadi. Fizika yoki astronomiya ma'ruzalariga nechta talaba qatnashishini aniqlang, agar:
   a) ma'ruzalar bir vaqtda o'tkazilsa;
   b) turli vaqtlarda o'tkazilsa va 10 talaba har ikki ma'ruzaga qatnashsa.
2. 100 kishidan 85 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o'rganadi. Ikkala tilni o'rganuvchilar soni nechta?
3. 100 kishidan 35 tasi ingliz, 45 tasi nemis tilini o'rgansa, ikkala tilni o'rganuvchilar soni nechta bo'lishi mumkin? Ikki tildan birortasini ham o'rganmaydiganlar soni-chi?

4. Uydan universitetga 3 yo'l bilan, universitetdan kutubxonaga 2 yo'l bilan borish mumkin bo'lsa, uydan universitet orqali kutubxonaga necha xil usul bilan borish mumkin?
5. 1, 2, 3, 4, 5 sonlaridan nechta ikki xonali son tuzish mumkin. Ularning nechtasida raqamlar takrorlanmaydi?
6. Uchburchak uchlarini lotin alifbosining katta harflari yordamida necha xil usul bilan belgilash mumkin?
7. 6 raqamli telefon nomerlarining nechtasida raqamlar takrorlanmaydi?
8. Savatchadagi 12 ta olmadan 5 tasini necha usul bilan tanlash mumkin?
9. Bir vaqtda 4 bemor vrach qabuliga necha xil usul bilan navbatga turishi mumkin?
10. 12 ta fizik va 15 ta kimyogar olimdan 4 tadan kishini konferensiyaga necha xil usul bilan yuborish mumkin?

4-§. MATEMATIK TUSHUNCHA

4.1. Tushuncha. Atrofimizdagi olam turli *obyektlardan* iborat. Ular o'ziga xos xossalar va o'zaro munosabatlarga ega. Bu obyektlarni o'rganganimizda ularni o'xshashligi va umumiy xossalariga qarab *sinflarga* ajratamiz. Bu obyektlar va sinflar ma'lum bir nom bilan nomlanadi. Masalan, «daraxt», «chumchuq», «mushuk», «uy», «avtobus» yoki «o'simlik», «qush», «hayvon», «bino», «mashina» va hokazo. Obyektlar yoki obyektlar sinfining nomlanishi inson ongida ular haqida tushuncha paydo bo'lganini bildiradi. Chunki har bir nom atalishi bilan ongimizda u bilan bog'liq tasavvurlar paydo bo'ladi. Biz bu obyekt yoki obyektlar sinfining eng muhim xossalarini eslaymiz: rangi, shakli, o'lchami, hidi, tuzilishi va h. k.

Demak, *tushuncha* — bu narsalar va hodisalarni ba'zi bir muhim alomatlariga ko'ra farqlash yoki umumiylashtirish natijasi ekan. Alomatlar esa narsa yoki hodisalarning bir-biriga o'xshashligi yoki farqlanishini bildiruvchi xossalardir.

Muhim xossa deb, faqat shu obyektga tegishli va bu xossasiz obyekt mavjud bo'la olmaydigan xossalarga aytiladi. Obyektning mavjudligiga ta'sir qilmaydigan xossalar *muhim bo'lmagan xossalar* deb sanaladi.

Agar biror obyektning barcha muhim xossalari to'plangan bo'lsa, bu obyekt haqida tushuncha bor deyiladi.

Fan rivojlanishi natijasida *abstrakt tushunchalar* yuzaga kela boradi. Bunday tushunchalar insoniyat to'plagan katta tajribani umumlashtirish natijasida yuzaga keladi va moddiy dunyoning tub mohiyatini aks ettiradi, lekin real obyektlarning ko'pgina xossalaridan ko'z yumgan holda, ularni ideallashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Masalan, bir jismni geometrik shakl sifatida qarasak, bizni uning shakli, o'lchamlari qiziqtiradi, lekin uning nimadan yasalgani, rangi, og'irligi qandayligi biz uchun ahamiyat kasb etmaydi. Ko'pincha abstrakt, ideal obyekt ega bo'lgan xossalar real obyektga tegishli bo'la olmaydi. Masalan, geometriyada kesmani cheksiz bo'lish mumkin deb hisoblanadi, real hayotda biror jismni cheksiz ko'p bo'lakka bo'lish mumkin emas, chunki u chekli sondagi atomlardan iborat bo'ladi.

4.2. Tushunchaning hajmi va mazmuni. Har qanday tushuncha nom, mazmun va hajmga ega bo'ladi.

Obyektning barcha muhim xossalari to'plami *tushunchaning mazmunini* tashkil qiladi. Masalan, «son» tushunchasi mazmuniga sonlarni taqqoslash, yozuvda ifodalash, son o'qida tasvirlash, sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish kabi xossalar kiradi.

Bir xil muhim xossalarga ega obyektlar to'plami tushuncha hajmini tashkil etadi. Masalan, «son» tushunchasi hajmini natural, nomanfiy, butun, kasr, ratsional, irratsional, haqiqiy, mavhum va kompleks sonlar tashkil etadi.

Demak, tushuncha hajmi bitta tushuncha bilan nomlanishi mumkin bo'lgan obyektlar to'plami ham ekan. Tushuncha mazmuni uning hajmini aniqlaydi va aksincha.

Lekin tushuncha hajmi va mazmuni orasida teskari bog'lanish mavjud. Tushunchaning hajmi qancha «katta» bo'lsa, mazmuni shuncha «kichik» va aksincha bo'ladi. Masalan, «to'g'ri to'rtburchak» tushunchasi mazmuniga «tomonlari teng bo'lgan» xossasi qo'shilsa, uning hajmi kamayadi va faqat kvadratlardan iborat bo'ladi, lekin «burchaklari to'g'ri bo'lishi» xossasi olib tashlansa, hajm kengayib, barcha parallelogrammlardan iborat bo'lib qoladi.

Agar biror tushuncha hajmi ikkinchi tushuncha hajmiga kirsa, ikkinchi tushuncha birinchi tushunchaga nisbatan *umumiy*, birinchi tushuncha ikkinchisiga nisbatan *xususiy* deyiladi.

Masalan, «uchburchak» tushunchasi «to'g'ri burchakli uchburchak» tushunchasi uchun umumiy, «to'g'ri burchakli

uchburchak» tushunchasi esa «uchburchak» tushunchasining xususiy holidir.

4.3. Tushunchani ta'riflash. Tushunchalarni o'rganishda ularni umumiyroq bo'lgan tushuncha orqali tushuntirish yoki, boshqacha aytganda, ta'riflashga harakat qilinadi. Shu umumiyroq tushuncha ham ilgariroq tushuntirilgan yoki ta'riflangan bo'lishi kerak. Lekin har bir uchraydigan tushunchani ilgari ma'lum bo'lgan tushunchani topib ta'rif beraverish murakkab va mumkin bo'lmagan jarayondir. Shuning uchun ba'zi tushunchalar ta'riflanmaydi va *boshlang'ich tushuncha* deb qabul qilinadi.

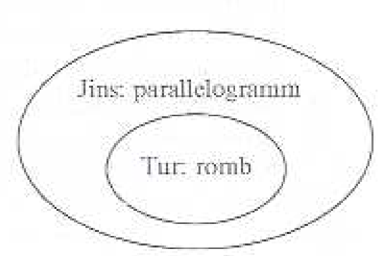
Masalan, siz tanishgan «to'plam» tushunchasi butun matematika kursining asosiy tushunchalaridan biridir.

Tushunchaga ta'rif berishning bir necha usuli bor. Shulardan biri *oshkor ta'rif* bo'lib, unda, ta'riflanayotgan tushunchaga nisbatan umumiyroq tushunchani ko'rsatib, shu umumiy tushuncha bilan nomlangan obyektlardan ta'riflanayotgan tushuncha qanday xossalari bilan ajralib turishi ko'rsatiladi.

Masalan, «barcha tomonlari teng parallelogramm — romb deyiladi», ta'rifida parallelogramm umumiy tushuncha bo'lib, romb qolgan parallelogrammlardan tomonlarining tengligi bilan ajralib turadi. Bunday ta'rif odatda *jins* va *tur orqali ta'riflash* deyiladi. Ta'riflanayotgan tushuncha hajmi unga nisbatan umumiyroq bo'lgan tushuncha hajmining qism to'plami bo'ladi va Eyler — Venn diagrammalarida 1.17-rasmda ko'rsatilgani kabi tasvirlanadi.

Oshkormas ta'rif: bunga *aksiomatik ta'riflash* kiradi va bunday ta'rifda ta'rif berilayotgan tushuncha obyekti aniq ko'rsatilmaydi. Aksiomatik ta'riflar bilan siz «Nomanfiy butun sonlar to'plamining aksiomatik qurilishi» bobida tanishasiz.

Matematikada *qarama-qarshilik* orqali ta'rif berish usuli ham bor: «X to'plamda R munosabat refleksiv bo'lmasa, u antirefleksiv munosabat deyiladi», «A va B to'plamlar umumiy elementga ega bo'lmasa, ular kesishmaydi, deyiladi» va h. k.



1.17-rasm.

Ko'pincha matnda biror obyektni nomlash, biror atama yoki belgini tushuntirish uchun *nominal ta'riflar*-

dan foydalaniladi. Masalan, «C_n^k — bu n elementdan k tadan takrorlashsiz guruhlashlar soni»; «M — sinfdagi barcha o'quvchilar to'plami», «5 — besh soni yozuvi» va h. k.

4.4. Tushuncha ta'rifiga qo'yiladigan talablar. Tushuncha ta'rifiga qo'yiladigan talablar quyidagilardan iborat. Tushuncha ta'rifi:

1) ta'riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga imkon berishi;

2) avval ma'lum bo'lgan tushunchalarga asoslanishi;

3) yolg'on doiraga, ya'ni tushunchaning o'zi yoki shu tushuncha bilan ta'riflangan tushuncha orqali ta'riflashga yo'l qo'ymasligi;

4) ortiqcha xossalarni (qolganlaridan keltirib chiqarish mumkin bo'lganlarni) ko'rsatmasligi kerak.

Demak, ta'rifda qisqa va ixcham shaklda ta'riflanayotgan tushuncha haqida aniq ma'lumot berilishi kerak ekan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Kimyo, fizika, geografiya, tarix fanlariga oid tushunchalarni ayting, bu fanlar uchun umumiy bo'lgan tushunchalarni toping.
2. Biror tushunchani tanlab, uning muhim va muhim bo'lmagan xossalarini ayting.
3. Parallelogramm» tushunchasining muhim va muhim bo'lmagan xossalari qanday?
4. «Aylana» tushunchasining hajmi va mazmunini ayting.
5. Biror tushuncha misolida hajm va mazmun orasidagi teskari bog'lanishni ko'rsating.
6. Biri ikkinchisi uchun umumiy bo'ladigan tushunchalar ketma-ketligini tuzing. Kvadrat, to'g'ri to'rtburchak, romb, parallelogramm, to'rtburchak tushunchalari shunday ketma-ketlikka misol bo'la oladimi?
7. O'rta maktab darsliklaridan tur va jins orqali ta'rifga misol bo'ladigan to'rtta ta'rifni topib yozing, undagi umumiy tushunchani va ta'riflanayotgan tushunchani farqlovchi xossani ko'rsating.
8. Boshqa ta'riflash usullariga oid misollar keltiring.
9. Ta'riflashdagi «yolg'on doiraga» misol keltiring.
10. Biror tushuncha bir ta'rifda ta'riflanuvchi, boshqa ta'rifda ta'riflovchi bo'lishi mumkinmi? Misol keltiring.

5-§. MULOHAZALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

5.1. Mulohazalar haqida umumiy tushuncha. Ma'lumki, o'zbek tilidagi gaplar to'plami 3 ta sinfga ajratiladi.

1. D — «Darak gaplar» to'plami.

2. C — «So'roq gaplar» to'plami.

3. X — «His-hayajon gaplar» to'plami.

Haqiqatan ham, $D \cup C \cup X$ — gaplar to'plami va $D \cap C \cap X = \varnothing$ bo'ladi.

O'z navbatida «darak gaplar» to'plamini ham 3 ta to'plamga ajratish mumkin.

I. Rost yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan darak gaplar. Masalan:

a) Toshkent shahri O'zbekiston Respublikasining poytaxti — rost;

b) London shahri Germaniyaning poytaxti — yolg'on;

d) 2 — tub son — rost;

e) $5 > 6$ — yolg'on;

f) «3 soni 15 sonining bo'luvchisi» — rost.

II. Tarkibida o'zgaruvchi ishtirok etgan darak gaplar.

Masalan:

a) X shahar O'zbekiston Respublikasida joylashgan;

b) y — 6 dan kichik tub son;

d) x — 5 dan kichik natural son;

e) x — o'zbek tilidagi unli tovush.

III. Rost yoki yolg'onligini aniqlash mumkin bo'lmagan darak gaplar.

Masalan:

a) Men bugun mehmonga bormoqchiman.

b) Bugun yomg'ir yog'sa kerak.

d) Men tadbirkor bo'lmoqchiman.

e) Matematika qiyin fan.

1-ta'rif. *Rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gaplar* ***mulohaza*** *deyiladi.*

So'roq yoki his-hayajon gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Noma'lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi. Mulohazalar lotin alifbosining bosh harflari: A, B, C, D, ... orqali belgilanadi. Mulohazalar *sodda* va *murakkab* bo'ladi.

Murakkab mulohazalarni sodda mulohazalarga ajratish mumkin.

Masalan, a) «5 tub son va u 10 sonining bo'luvchisi».

b) «2 eng kichik tub son va u juft son».

d) «Agar sonning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsa, u holda shu sonning o'zi ham 3 ga bo'linadi».

e) «$3^2 = 9$ yoki 9 soni 3 ga bo'linadi».

f) «Agar sonning oxirgi yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugasa, u faqat va faqat shundagina 5 ga bo'linadi» — murakkab mulohazalardir.

Bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg'on bo'lgan mulohazalar *ekvivalent mulohazalar* deyiladi. Ekvivalent mulohazalar $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

Matematik mantiq fanini mulohazani bayon qilish shakli emas, faqat rost yoki yolg'onligi qiziqtiradi. Bundan buyon rost mulohazani «R» yoki «1», yolg'on mulohazani «Y» yoki «0» bilan belgilaymiz.

5.2. Mulohaza inkori.

2-ta'rif. *A mulohaza **inkori** deb, A rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda rost bo'luvchi mulohazaga aytiladi.*

A mulohaza inkori $\bar{A}$ ko'rinishda belgilanadi va «A emas», «A ekanligi yolg'on» deb o'qiladi. Masalan, A: «$3^2 = 6$» bo'lsa, $\bar{A}$: «$3^2 \neq 6$»;

A: «Hozir yoz fasli» bo'lsa, uning inkori: «hozir yoz fasli emas» yoki «hozir yoz fasli ekanligi yolg'on» kabi ifodalanadi.

Mulohaza inkorining rostlik jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

A	$\bar{A}$
R	Y
Y	R

Mulohaza inkorining xossasi: $\bar{\bar{A}} = A$ bo'ladi.

Masalan, A: «17 — tub son»;

$\bar{A}$ «17 — tub son emas»;

$\bar{\bar{A}}$: «17 — tub son emasligi yolg'on» yoki «17 — tub son».

5.3. Mulohazalar konyunksiyasi.

3-ta'rif. *Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A va B» mulohazaga mulohazalar **konyunksiyasi** deyiladi.*

A	B	$A \wedge B$
R	R	R
R	Y	Y
Y	R	Y
Y	Y	Y

Mulohazalar konyunksiyasi uning tarkibiga kirgan mulohazalar rost bo'lganda, rost bo'ladi va «$A \wedge B$» yoki «$A \& B$» ko'rinishda yoziladi hamda «A va B» kabi o'qiladi.

Konyunksiyaning rostlik jadvali 38-betdagi ko'rinishda bo'ladi:

Masalan, a) A: «5 — tub son» — (R); B: «$5 > 6$» — (Y) bo'lsin, u holda $A \wedge B$: «5 — tub son va u 6 dan katta» — yolg'on mulohaza bo'ladi.

b) A: «$3 < 8$» — (R), B: «$8 < 11$» — (R), $A \wedge B$: «$3 < 8 \wedge 8 < 11$» yoki «$3 < 8 < 11$», ya'ni tengsizliklar konyunksiyasini qo'sh tengsizlik ko'rinishida yozish mumkin va aksincha; ta'rifga ko'ra «$3 < 8 < 11$» — rost mulohaza.

Mulohazalar konyunksiyasining xossalari:

1°. $A \wedge B = B \wedge A$ (kommutativlik);

2°. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$ (assotsiativlik);

3°. $A \wedge \bar{A} \equiv$ Y ($A \wedge \bar{A}$ — aynan yolg'on mulohaza).

Mulohazalar konyunksiyasi xossalarining to'g'riligini rostlik jadvallari tuzish va mos kataklardagi murakkab mulohazalar qiymatlarini taqqoslab tekshirish mumkin.

5.4. Mulohazalar dizyunksiyasi.

4-ta'rif. *Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A yoki B» mulohazaga mulohazalar dizyunksiyasi deyiladi.*

Mulohazalar dizyunksiyasi «$A \vee B$» ko'rinishda yoziladi, «A yoki B» deb o'qiladi va uning tarkibiga kirgan mulohazalarning hech bo'lmaganda bittasi rost bo'lganda, rost bo'ladi. Dizyunksiyaning rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	$A \vee B$
R	R	R
R	Y	Y
Y	R	Y
Y	Y	Y

Masalan: a) A: «Varshava shahri Germaniyaning poytaxti» — Y.

B: «Varshava shahri Polshaning poytaxti» — R.

$A \vee B$: «Varshava shahri Germaniyaning yoki Polshaning poytaxti» — R.

b) A: «10 — juft son» — R.

B: «π — irratsional son» — R.

$A \vee B$: «10 — juft son yoki π — irratsional son» — R.

d) A: «15 — juft son» — Y.

B: «Kvadrat to'g'ri to'rtburchak emas» — Y.

$A \vee B$: «15 — juft son yoki kvadrat to'rtburchak emas» — Y.

Mulohazalar dizyunksiyasining xossalari:

1°. $A \vee B = B \vee C$ (kommutativlik).

2°. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$ (assotsiativlik).

3°. $A \vee \bar{A} \equiv R$ ($A \vee A$ — aynan rost mulohaza).

4°. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — dizyunksiyaning konyunksiyaga nisbatan distributivligi).

5°. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ — konyunksiyaning dizyunksiyaga nisbatan distributivligi.

6°. $\left.\begin{array}{l} \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B} \\ \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B} \end{array}\right\}$ De-Morgan qonunlari (De-Morgan — shotland matematigi (1806—1871)).

Tengliklarning to'g'riligi rostlik jadvalini tuzib isbot qilinishi mumkin.

De-Morgan qonunlarini olaylik. a) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$, ya'ni mulohazalar konyunksiyasi inkori mulohazalar inkorlarining dizyunksiyasi bilan ekvivalent.

Rostlik jadvalini tuzamiz.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
R	R	Y	Y	P	Y	Y
R	Y	Y	R	Y	R	R
Y	R	R	Y	Y	R	R
Y	Y	R	R	Y	R	R

Jadvalning oxirgi ikki ustuni A va B mulohazalar qiymatlarining turli kombinatsiyalarida bir xil. Demak, $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ ekanligi to'g'ri.

Misol keltiraylik.

A — «Men shaxmat o'ynayman».

B — «Men tennis o'ynayman».

$\overline{A \wedge B}$ — «Mening shaxmat va tennis o'ynashim yolg'on».

$\bar{A} \vee \bar{B}$ — «Men shaxmat yoki tennis o'ynamayman».

5.5. Mulohazalar implikatsiyasi.

5-ta'rif. *Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «Agar A bo'lsa, B bo'ladi» ko'rinishidagi mulohaza A va B mulohazalarning* ***implikatsiyasi*** *deyiladi* va «$A \Rightarrow B$» ko'rinishda belgilanadi.

$A \Rightarrow B$ implikatsiya faqat A rost B yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'ladi. A — implikatsiya sharti, B — xulosasi deyiladi. A ni B uchun yetarli, B ni A uchun zaruriy shart deb ham ataladi. Implikatsiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

A	B	$A \Rightarrow B$
R	R	R
R	Y	Y
Y	R	R
Y	Y	R

Masalan, a) A: «15 soni 3 ga bo'linadi» — R; B: «15 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» — R. $A \Rightarrow B$: «Agar 15 soni 3 ga bo'linsa, u holda 15 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» — R.

b) A: «$5 \cdot 5 = 25$», B: «$5 + 5 = 15$» bo'lsin. $A \Rightarrow B$: «Agar $5 \cdot 5 = 25$ bo'lsa, u holda $5 + 5 = 15$ bo'ladi» — Y.

d) A: «25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamaydi» — R. B: «25 soni 10 ga bo'linadi» — Y. $A \Rightarrow B$: «Agar 25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamasa, u holda 25 soni 10 ga bo'linadi» — Y.

Agar $A \Rightarrow B$ implikatsiya berilgan bo'lsa, $B \Rightarrow A$ unga teskari, $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ esa qarama-qarshi, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ esa *qarama-qarshiga teskari implikatsiyalar* deyiladi.

Mulohazalar implikatsiyasining xossalari:

1°. $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$.

2°. $A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (kontrapozitsiya qonuni).

5.6. Mulohazalar ekvivalensiyasi.

6-ta'rif. *Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «A faqat va faqat B bo'lgandagina bo'ladi» ko'rinishdagi mulohaza A va B ning* ***ekvivalensiyasi*** *deyiladi va «$A \Leftrightarrow B$» ko'rinishda yoziladi.*

$A \Leftrightarrow B$ ekvivalensiya A va B mulohazalarning qiymatlari bir xil bo'lganda rost bo'ladi. Ekvivalensiyaning rostlik jadvali:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
R	R	R
R	Y	Y
Y	R	Y
Y	Y	R

Masalan, «129 soni 3 ga faqat va faqat uning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsagina bo'linadi».

$$129:3 \Leftrightarrow (1+2+9):3. \text{ — Rost}$$

1. Mulohazalarga misollar keltiring. Ularning rost yoki yolg'onligini aniqlang.
2. Quyidagi jumlalar orasidan mulohazalarni ajrating va ularning rostlik qiymatini toping:
a) 9 — butun son; b) 48 ni 5 ga bo'lganda 4 qoldiq qoladi; d) so'roq gap mulohaza bo'ladi; e) $x \leq 7$; f) $17 \cdot 2 - 21 = 13$; g) $x^2 + 4 = 13$; h) 24 — tub son.
3. Quyidagi mulohazalar inkorini tuzing va ularning rostlik qiymatini toping:
a) 225 soni 9 ga bo'linadi; e) 21 soni 7 ga bo'linadi;
b) 7,6 — natural son; f) Praga—Bolgariyaning poytaxti;
d) $7 < 3$; g) $27 : 3 + 2 \cdot 3 - 18$ ifodaning qiymati 0 ga teng.
4. A: «$4 < 7$», B: «Toshkent O'zbekistonning poytaxti» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning konyunksiyasini tuzing va rostlik qiymatini toping. Shuningdek, $\overline{A}\wedge B$, $\overline{A}\wedge\overline{B}$, $A\wedge\overline{B}$ fikrlarini so'z orqali ifodalang.
5. A: «$26 : 2 + 11 = 28$», B: «3 — tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, $A\vee B$, $B\vee A$, $\overline{A}\vee B$, $A\vee B$, $A\vee\overline{B}$ larni so'z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.
6. C: «3 — toq son», B: «7 soni 28 ning bo'luvchisi» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning implikatsiyasini ifodalang va rostlik qiymatini toping.
7. A: «111201 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» B: «111201 soni 3 ga bo'linadi» mulohazalari berilgan. Ularning ekvivalensiyasini so'z yordamida ifodalang va rostlik qiymatini toping.
8. A: «9 — tub son», B: «17 — toq son», C: «18 soni 3 ga bo'linadi», D: «24 — tub son» sodda mulohazalar berilgan bo'lsa, quyidagi murakkab mulohazalarni so'z yordamida ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.
a) $A\vee B$; b) $A\wedge B$; d) $A\vee\overline{A}$; e) $A\Rightarrow B$; f) $C\Leftrightarrow D$;
g) $A\wedge C\Rightarrow\overline{D}$; h) $A\wedge D\Rightarrow\overline{C}$; i) $\overline{A}\vee\overline{D}$; j) $(A\wedge B\wedge C)\vee D$.
9. A: «7 soni 56 ning bo'luvchisi», B: «4 soni toq son», C: «13 soni tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, a) $A\vee B\vee C$; b) $A\wedge B\wedge C$; d) $(A\vee B)\wedge C$; e) $(A\wedge B)\vee C$; f) $(\overline{A}\vee B)\wedge(\overline{A}\vee\overline{C})$ lar uchun rostlik jadvalini tuzing.
10. A: «$7 < 12$», B = «Romb — to'rtburchak», C = «2 — tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, $\overline{A}\vee\overline{B}\neq\overline{A\wedge B}$, $\overline{A\vee B}\neq\overline{A}\wedge\overline{B}$, $\overline{A}\vee\overline{C}=\overline{A\wedge C}$, $\overline{A}\wedge\overline{C}=\overline{A\wedge B}$ larni isbotlang.

6-§. PREDIKATLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

6.1. Predikatlar haqida umumiy tushuncha. Mulohazalar algebrasining asosiy masalalaridan biri sodda mulohazalarning rostlik qiymatlariga tayangan holda, ulardan tuzilgan murakkab mulohazalarning rostlik qiymatlarini topishdan iborat ekanligini biz ko'rib chiqdik. Lekin mulohazalar algebrasi fan va amaliyotning murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarish uchun yetarli emas. Bunday murakkab

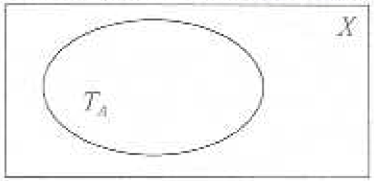
mantiqiy xulosalarni chiqarishda mulohazalar algebrasini ham o'z ichiga oluvchi *predikatlar algebrasi* muhim o'rin tutadi.

1-ta'rif. *O'zgaruvchi qatnashgan va o'zgaruvchi o'rniga qiymatlar qo'yilgandagina rost yoki yolg'on mulohazaga aylanadigan darak gap* ***predikat*** *deyiladi.*

Predikatlar tarkibiga kirgan o'zgaruvchilar soniga qarab *bir o'rinli, ikki o'rinli* va hokazo bo'ladi. Biz ko'proq bir o'rinli predikat haqida gapiramiz, uni $A(x)$, $B(y)$, ... ko'rinishda belgilaymiz.

Predikat tarkibiga kirgan o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami *predikatning aniqlanish sohasi* deyiladi. Aniqlanish sohasi X, Y, Z, ... kabi belgilanadi.

O'zgaruvchi o'rniga qo'yilganda predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi qiymatlar predikatning *rostlik to'plami* deyiladi. $A(x)$ predikatning aniqlanish sohasi X to'plam bo'lsa, rostlik to'plami T_A bilan belgilanadi va $x \in X \wedge T_A \subset X$ bo'ladi (1.18-rasm).



1.18-rasm.

Ta'rifga ko'ra istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo'ladi. Masalan:

a) $A(x)$: «x shahar — O'zbekiston Respublikasining poytaxti». Bunda X = {Toshkent, Buxoro, Xiva, Moskva, ...} bo'lib, T_A = {Toshkent} bo'ladi.

b) $B(x)$: $5 < x < 11 \wedge x \in N$.
$X = N$ bo'lib, $T_B = \{6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$ bo'ladi.

d) $C(y)$: «y — 10 sonning bo'luvchisi» bo'lsa, $Y = N$ bo'lib, $T_C = \{1;\ 2;\ 5;\ 10\}$ bo'ladi.

e) $D(z)$: «$z^2 + 2z - 1 = 0$», $z \in R = Z$. $T_z = \{1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\}$.

6.2. Kvantorlar. Yuqorida ko'rdikki, istalgan tenglama va tengsizlik predikat bo'lar ekan, chunki ularni mulohazaga aylantirish mumkin. Buning uchun o'zgaruvchi o'rniga qiymat qo'yish yetarli.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli *kvantorlardan* foydalanishdir. Ikki xil kvantor bor bo'lib, ularning biri «umumiylik», ikkinchisi *«mavjudlik»* kvantori deb ataladi.

Umumiylik kvantori «$\forall$» belgisi bilan belgilanadi va «har bir», «hamma», «barcha» so'zlari bilan ifodalanadi. $\forall$ inglizcha «All» so'zining bosh harfidan olingan va «hamma» ma'nosini bildiradi.

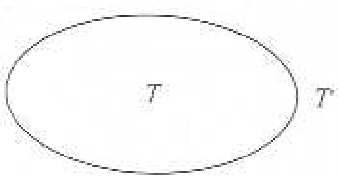
Mavjudlik kvantori «$\exists$» belgisi bilan belgilanadi, inglizcha «Exist» — «mavjud» so'zining bosh harfidan olingan va «bor», «mavjud», «topiladi» so'zlarini bildiradi.

Masalan, $A(x)$: «x son tub son» predikatini olaylik, uni kvantorlar yordamida mulohazaga aylantiramiz, bu yerda $x \in N$. «Barcha x sonlar tub son» — yolg'on mulohaza, «x soni tub son bo'ladigan qiymatlar topiladi» — rost mulohaza.

$P(x)$: «x son 5 ga karrali», $x \in N$ bo'lsin. «Barcha x sonlar 5 ga karrali» — yolg'on mulohaza, «5 ga karrali x son mavjud» — rost mulohaza.

Kvantorlar qatnashgan mulohaza $(\forall x \in X)\, P(x)$ yoki $(\exists x \in X)\, P(x)$ ko'rinishda yoziladi va «X to'plamning hamma elementlari uchun $P(x)$ bajariladi» yoki «X to'plamda $P(x)$ bajariladigan elementlar topiladi», deb o'qiladi.

6.3. Predikatlar inkori. X to'plamda $A(x)$ predikat berilgan bo'lsin. $A(x)$ rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda, rost bo'ladigan $\overline{A(x)}$ predikat $A(x)$ ning *inkori* deyiladi. $A(x)$ ning rostlik to'plami T bo'lsa, $\overline{A(x)}$ ning rostlik to'plami T' bo'ladi (I.19-rasm).



I.19-rasm.

Masalan: a) $A(x)$: «x son 5 raqami bilan tugaydi» bo'lsa, $\overline{A(x)}$: «x son 5 raqami bilan tugamaydi» bo'ladi.

b) $X = \{x \in N,\ x < 20\}$ to'plamda $A(x)$: «x tub son» predikati berilgan bo'lsin. U holda $T_A = \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19\}$ bo'ladi. $\overline{A(x)}$: «x tub son emas» va $T_{\bar{A}} = T_A' = \{1;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10;\ 12;\ 14;\ 15;\ 18\}$ bo'ladi.

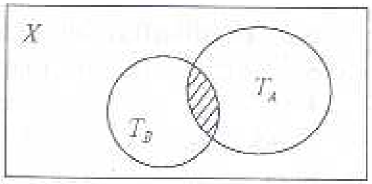
d) $X = \{\forall x \in N,\ x \leq 15\}$ da $A(x)$: «x soni 15 ning bo'luvchisi» predikat berilgan bo'lsin. U holda $T = \{1;\ 3;\ 5;\ 15\}$ bo'ladi. $\overline{A(x)}$: «x son 15 ning bo'luvchisi emas va $T_{\bar{A}} = \{2;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14\}$ bo'ladi.

e) X — hafta kunlari to'plami bo'lsin. Bu to'plamda $A(x)$: «x — haftaning juft kuni» predikati berilgan bo'lsa, $\overline{A(x)}$: «x — haftaning toq kuni», $T = \{$seshanba, payshanba, shanba$\}$ va $T_{\bar{A}} = \{$yakshanba, dushanba, chorshanba, juma$\}$ bo'ladi.

6.4. Predikatlar konyunksiyasi. Aytaylik, X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. *$A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan predikatga ularning konyunksiyasi deyiladi* va $A(x) \wedge B(x)$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar $A(x)$ ning rostlik to'plami T, $B(x)$ ning rostlik to'plamini T_A, $A(x) \wedge B(x)$ ning rostlik to'plamini T desak, $T = T_A \cap T_B$ bo'ladi. Uni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak (I.20-rasm), rasmdagi shtrixlangan soha $T_A \cap T_B$ dan iborat bo'ladi.



I.20-rasm.

Masalan, a) $X = \{x \in N,\ x \leq 20\}$ da $A(x)$: «x soni tub son», $B(x)$: «x soni toq son» predikatlari berilgan bo'lib, ularning konyunksiyasining rostlik to'plamini topish talab qilingan bo'lsin.

Yechish. $T_A = \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19\}$, $T_B = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17;\ 19\}$, u holda $T = T_A \wedge T_B = \{3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19\}$ bo'ladi.

b) $X = \{\forall x \in N,\ x \leq 17\}$ da $A(x)$: $\{x < 8\}$ va $B(x)$: «$x \vdots 3$» predikatlar bo'lsa, ular konyunksiyasining rostlik to'plamini toping.

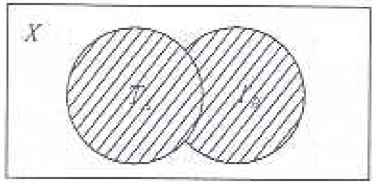
Yechish. $T_A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $T_B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ va $T = T_A \cap T_B = \{3;\ 6\}$ bo'ladi.

6.5. Predikatlar dizyunksiyasi. Aytaylik, X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. *$A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi yolg'on bo'lganda yolg'on, qolgan barcha hollarda rost bo'ladigan predikatga $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar **dizyunksiyasi** deyiladi.*

Predikatlar dizyunksiyasi «$A(x) \vee B(x)$» ko'rinishda belgilanib, «$A(x)$ yoki $B(x)$» deb o'qiladi.

$A(x)$ predikatning rostlik to'plami T_A, $B(x)$ ning rostlik to'plami T_B, $A(x) \vee B(x)$ ning rostlik to'plamini T desak, $T = T_A \cap T_B$ bo'ladi. Uni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.21-rasm).



I.21-rasm.

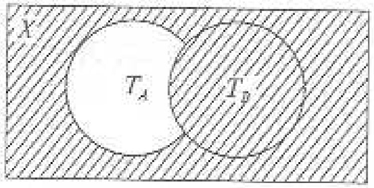
Masalan: a) $X = \{\forall x \in N,\ x \leq 20\}$ da $A(x)$: $\{8 \leq x \leq 15\}$, $B(x)$: «x soni 18 ning bo'luvchisi» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \cup B(x)$ ning rostlik to'plamini toping.

Yechish. $T_A = \{8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15\}$, $T_B = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 18\}$ bo'lgani uchun $T = T_A \cup T_B = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 18\}$ bo'ladi.

6.6. Predikatlar implikatsiyasi. X to'plamda aniqlangan $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. *$A(x)$ predikat rost bo'lib, $B(x)$ predikat yolg'on bo'lganda yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan mulohaza $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning* ***implikatsiyasi*** *deyiladi.*

Predikatlar implikatsiyasi «$A(x) \Rightarrow B(x)$» ko'rinishda belgilanadi va u $A(x)$ predikatdan $B(x)$ predikat kelib chiqadi deb o'qiladi. Bu holda $B(x)$ predikat $A(x)$ predikat uchun *«zaruriy shart»*, $A(x)$ predikat $B(x)$ predikat uchun *«yetarli shart»* deyiladi.



I.22-rasm.

$A(x)$ predikatning rostlik to'plami T_A, $B(x)$ niki T_B va $A(x) \Rightarrow B(x)$ning rostlik to'plami T bo'lsa, $T = T'_A \cup T_B$ bo'ladi. Uni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.22-rasm).

Masalan, a) $X = \{\forall x \in N, 12 \leq x \leq 21\}$ to'plamda $A(x)$: «x — tub son», $B(x)$: «x — toq son» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Rightarrow B(x)$ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{13;\ 17;\ 19\}$, $T_B = \{13;\ 15;\ 17;\ 19;\ 21\}$, $T'_A = \{12;\ 14;\ 15;\ 16;\ 18;\ 20;\ 21\}$ u holda $T = T'_A \cup T_B = \{12;\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18;\ 19;\ 20;\ 21\}$.

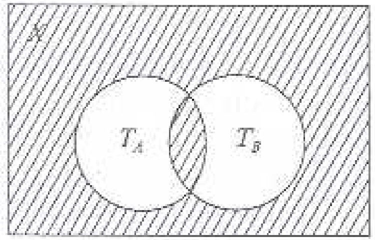
b) a) $X = \{\forall x \in N,\ x \leq 13\}$ da $A(x)$: «$12 : x$», $B(x)$: «x — juft son» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Rightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$, $T'_A = \{5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 13\}$, $T_B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12\}$ bo'lsa, $T = T'_A \cup T_B = \{2;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13\}$ bo'ladi.

6.7. Predikatlar ekvivalensiyasi. Aytaylik, X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. *$A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi yolg'on bo'lganda hamda har ikkalasi rost bo'lganda rost bo'ladigan, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza predikatlar* ***ekvivalensiyasi*** *deyiladi.*

Predikatlar ekvivalensiyasi $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ko'rinishda belgilanadi va «$A(x)$ bilan $B(x)$ teng kuchli» deb o'qiladi. Agar ikkita predikat teng kuchli, ya'ni ekvivalent bo'lsa, ularning har biri ikkinchisi uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.



I.23-rasm.

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini T desak, u $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi bir vaqtda rost va har ikkalasi bir vaqtda yolg'on bo'ladigan mulohazalarning rostlik qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi. Demak, $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning har ikkalasi rost bo'lgan holdagi rostlik to'plami $T_A \cap T_B$ dan, har ikkalasi yolg'on bo'lgan holdagi rostlik to'plami $T_A \cup T_B$ dan iborat bo'ladi. Demak, $T = (T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B)$. Buni Eyler — Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (I.23-rasm).

Masalan, a) $X = \{\forall x \in N,\ x \leq 16\}$ to'plamda $A(x)$: «x son 3 ga karrali son», $B(x)$: «x soni 12 ning bo'luvchisi» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{3;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15\}$, $T_B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$.

$T = (T_A \cap T_B) \cup (T'_A \cap T'_B) = (1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 9;\ 12;\ 15\} \cap \{3;\ 6;\ 12\}) \cup \cup (\{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11;\ 13;\ 14\} \cap \{5;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11\}) = \{3;\ 6;\ 12\} \cup \{5;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11\} = \{3;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 10;\ 11\}$.

Fikr (mulohaza), predikat va ular ustidagi amallar tushunchalari ko'p tasdiqlarning mantiqiy tuzilishini aniqlashga yordam beradi.

6.8. Teoremaning tuzilishi. Matematikani o'rganishda teoremalar deb ataluvchi jumlalar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Teoremalar mazmunan xilma-xil bo'lishiga qaramasdan, ularning hammasi isbotlashni talab qiladigan fikrlardir.

Bizga ma'lum bo'lgan matematik mantiq tushunchalaridan foydalanib, teoremaning tuzilishini aniqlashga harakat qilaylik.

Masalan, «Agar nuqta burchak bissektrisasida yotsa, u burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan bo'ladi» teoremasini qaraylik. Bu teoremaning sharti «Nuqta burchak bissektrisasida yotadi» va xulosasi «Nuqta burchak tomonlaridan teng uzoqlashgan». Teoremaning sharti ham, xulosasi ham tekislikda yotgan barcha nuqtalarning P to'plamida aniqlangan predikatlardan iborat. Bu predikatlarni, mos ravishda, $A(x)$ va $B(x)$ deb belgilasak (bu yerda $x \in P$, ya'ni x — tekislikning ixtiyoriy nuqtasi), teoremani $A(x) \Rightarrow B(x)$ ko'rinishdagi implikatsiya shaklida yozish mumkin va bu implikatsiya P to'plamning ixtiyoriy x nuqtasi uchun o'rinli, ya'ni $(\forall x \in P)(A(x) \Rightarrow B(x))$. Shunga ko'ra ko'pincha teoremalar tuzilishi uch qismdan iborat bo'ladi:

1) teorema sharti — $A(x)$;
2) teorema xulosasi — $B(x)$;
3) tushuntirish qismi — $\forall x \in P$ va P ning qanday to'plam ekani.

Tushuntirish qismida teoremada so'z yuritilayotgan obyektlar to'plami tasvirlanadi. Agar bunday to'plam alohida ko'rsatilmagan bo'lsa, teorema mazmunidan uni bilib olish mumkin bo'ladi.

Teoremaning isboti bu fikrlar ketma-ketligi bo'lib, u qaralayotgan nazariyaning aksiomalariga yoki avvalroq isbot qilingan teoremalarga asoslanadi.

$B(x)$ predikat teoremaning yetarli sharti deyiladi, chunki uning to'g'riligi $A(x)$ predikatning to'g'riligidan kelib chiqadi. $A(x)$ ni $B(x)$ uchun *zaruriy shart* deyiladi.

Masalan, «Rombning diagonallari o'zaro perpendikular» teoremasini qaraylik. Uni implikatsiya ko'rinishiga keltiramiz: «Agar to'rtburchak romb bo'lsa, uning diagonallari perpendikular bo'ladi». Agar X — tekislikdagi barcha to'rtburchaklar to'plami va x — tekislikdagi ixtiyoriy to'rtburchak bo'lsa, teoremani umumiy ko'rinishda $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$ deb yozish mumkin bo'ladi. Bu yerda $A(x)$: «x to'rtburchak — romb», $B(x)$: «x to'rtburchak diagonallari o'zaro perpendikular».

Zaruriy shart: «To'rtburchak romb bo'lishi uchun uning diagonallari perpendikular bo'lishi zarur».

Yetarli shart: «To'rtburchak diagonallari perpendikular bo'lishi uchun uning romb bo'lishi yetarli».

Teoremalarning turlari. Berilgan

$$(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x)) \tag{1}$$

teoremaga ko'ra bir nechta yangi teoremalarni hosil qilish mumkin.

A) Teoremaning sharti va xulosasi o'rni almashsa, berilgan teoremaga *teskari teorema* hosil bo'ladi:

$$(\forall x \in X)(B(x) \Rightarrow A(x)). \tag{2}$$

Teskari teorema har doim ham to'g'ri bo'lavermaydi. Agar berilgan teoremaga teskari teorema to'g'ri bo'lsa, teoremani

$(\forall x \in X)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ ekvivalensiya ko'rinishida yozish mumkin bo'ladi. $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar bir-biri uchun zarur va yetarli shart bo'lib xizmat qiladi.

Masalan, «Agar natural son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linsa, sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi».

Teskari teorema: «Agar natural son 9 ga bo'linsa, uning raqamlari yig'indisi ham 9 ga bo'linadi». Teskari teorema to'g'ri bo'lgani uchun bu ikki teoremani bittaga birlashtirish mumkin: «Natural son 9 ga bo'linishi uchun uning raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linishi zarur va yetarli».

B) Agar $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremaning sharti va xulosasi ularning inkorlari bilan almashtirilsa, berilgan teoremaga qarama-qarshi teorema hosil bo'ladi:

$$(\forall x \in X)\ \overline{A}(x) \Rightarrow \overline{B}(x). \tag{3}$$

Masalan, «Sonning o'nli yozuvi 0 raqami bilan tugasa, son 5 ga bo'linadi» teoremaga qarama-qarshi teorema «Sonning o'nli yozuvi 0 raqami bilan tugamasa, son 5 ga bo'linmaydi» ko'rinishida bo'ladi va bu teorema noto'g'ridir. Lekin qarama-qarshi teorema to'g'ri bo'ladigan hollar ham bo'ladi.

D) $$(\forall x \in X)(\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}) \tag{4}$$

teorema berilgan teoremaga teskari teoremaga *qarama-qarshi teorema* deyiladi.

Masalan, yuqoridagi teoremaga teskari teoremaning qarama-qarshisi: «Son 5 ga bo'linmasa, uning o'nli yozuvi 0 bilan tugamaydi» ko'rinishida bo'ladi va u berilgan teoremaga teng kuchlidir. Umuman olganda (1) va (4) teoremalar hamda (2) va (3) teoremalar o'zaro teng kuchlidir.

Matematikada (1) berilgan teorema o'rniga (4) teorema to'g'riligini isbotlash usulidan ham keng foydalaniladi va buni isbotning *kontrapozitsiya metodi* deyiladi.

O'rta maktab geometriya kursidan quyidagi teoremani qaraylik.

Teorema. ***Agar ikki to'g'ri chiziq uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni*** $(a \parallel c \wedge b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel b)$.

Isbot. $a \parallel c$ va $b \parallel c$ berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa parallel bo'lmasin. U holda, ular biror

C nuqtada kesishadi. Teorema shartiga ko'ra bitta C nuqtadan c to'g'ri chiziqqa ikkita parallel to'g'ri chiziq o'tgan bo'ladi. Bu esa B aksiomaga zid. Demak, farazimiz noto'g'ri.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. $A = \{4; 5; 6; 8; 9; 10\}$ to'plamda $C(x)$: «$2x - 1 < 15$» predikat berilgan bo'lsa:

   a) $C(4)$, $C(5)$, $C(6)$, $C(8)$, $C(9)$, $C(10)$ fikrlarning rostlik qiymatini toping;

   b) olingan javoblarga asoslanib, $(\forall x \in A)\ C(x)$ predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.
2. $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 6\}$ to'plamda $B(x)$: «$x^2 - 3 < 18$» predikat berilgan bo'lsa:

   a) $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$ fikrlarning rostlik qiymatini toping;

   b) olingan javoblarga asoslanib, $B(x)$ predikat $(\forall x \in A)$da rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.
3. $A = \{x \mid x \in N,\ x \le 7\}$ to'plamda «$x^2 - 13 < 0$» predikat berilgan. Uning rostlik to'plamini toping.
4. $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 21\}$ to'plamda $B(x)$: «x — tub son» predikat berilgan. Uning inkorining rostlik to'plamini toping.
5. $Y = \{y \mid y \in N,\ x \le 18\}$ to'plamda $A(x)$: «X — tub son», $B(x)$: «x — toq son» predikatlar berilgan bo'lsa, $\overline{A(x)}$, $\overline{B(x)}$, $A(x) \vee B(x)$ $A(x) \wedge B(x)$ larning rostlik to'plamini toping.
6. $X = \left\{-2; -1; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{5}{3}; 2\right\}$ to'plamda $C(x)$: «x — natural son», $D(x)$: «x — kasr son» predikatlar berilgan bo'lsa,

   a) $C(1) \wedge D(1)$; b) $C(-2) \vee D(-2)$; d) $C(0) \wedge D\left(\frac{5}{3}\right)$; e) $C(2) \wedge D(0)$ larni so'z orqali ifodalang va rostlik qiymatini toping.
7. $X = \left\{-2; -1; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{5}{3}; 2\right\}$ to'plamda $C(x)$: «x — butun son», $D(x)$: «x — kasr son» degan predikatlar berilgan bo'lsa,

   a) $\frac{1}{2} \notin T_{C \vee D}$; b) $2 \in T_{C \vee D}$; d) $2 \notin T_{C \wedge D}$; e) $\frac{1}{2} \in T_{C \wedge D}$ larning rostligini aniqlang.
8. Butun sonlar to'plamida $D(x)$: «$x : 3$» va $C(x)$: «x sonini 3 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi» predikatlari berilgan. $x = 4$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 9$, $x = 10$ bo'lgandagi predikatlar qiymatini toping va ularni solishtiring. $C(x)$ va $D(x)$ predikatlar biri ikkinchisining inkori bo'ladimi? Olingan ma'lumotlarga asoslanib javobingizni asoslang.

7-§. ALGEBRAIK OPERATSIYA

7.1. Algebraik operatsiya tushunchasi. Avvalgi boblarda siz to'plam, mulohaza va predikat tushunchalari bilan tanishdingiz. Ular ustida ma'lum amallar bajarilishi, bu amallarning o'ziga xos xossalari borligini bildingiz. Ularning ba'zilarining nomi esa sizga maktab matematika kursidan ma'lum edi. Bu xossalar orasida o'xshashlari bor. Mazkur bobda mana shu umumiylik haqida so'z ketadi.

Maktab matematika kursida sonlar ustida turli amallar qaraladi: qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish kabilar. Sonlar ustida har bir operatsiyani bajarish natijasida yana sonlar hosil bo'ladi. Masalan: $5 + 9 = 14$, $5 \cdot 9 = 45$. $5 - 9$ amali natijasi esa natural sonlar to'plamida aniqlangan emas. Agar bu amal (ayirish) butun sonlar (Z) to'plamida berilsa, aniqlangan, ya'ni $5 - 9 = -4$. Nihoyat, $5 : 9$ esa Q to'plamda aniqlangan. *Demak, har bir operatsiyani bajarishda ikkita element uchun shu to'plamdan uchinchi elementni topish kerak ekan.* Boshqacharoq qilib aytganda, biror X to'plamdan olingan har bir tartiblangan juftga shu to'plamdan bitta element mos keltirildi. Bunday moslik *algebraik operatsiya* deyiladi.

1-ta'rif. *Agar X to'plamdan olingan har bir $(x; y)$ juftlikka yana shu to'plamdan z element mos kelsa, u holda bu moslik X da berilgan* ***binar algebraik operatsiya*** *deyiladi, ya'ni* $(\forall (x; y) \in X, \exists z \in X)[(x; y) = z]$.

Misol. Qo'shish N to'plamda algebraik operatsiya bo'ladi. Haqiqatan ham, $(\forall (a; b) \in N, \exists c \in N)(a + b = c)$.

2-ta'rif. *Agar X to'plamdan olingan ba'zi $(x; y)$ — juftliklarga shu to'plamdan bitta z element mos kelsa, u holda bu moslik* ***qisman algebraik operatsiya*** *deyiladi*, ya'ni $(\forall (x; y) \in X, \exists z \in X)((x; y) = z)$.

Masalan, ayirish va bo'lish N da qisman algebraik operatsiya bo'ladi.

3-ta'rif. *X to'plamda algebraik operatsiya berilgan bo'lsin. Agar X to'plamning biror A qism to'plamidan olingan ixtiyoriy $(x; y)$ juftlikka mos z ham A ga tegishli bo'lsa, A to'plam berilgan algebraik operatsiyaga nisbatan* ***yopiq*** *deyiladi.*

7.2. Algebraik operatsiya xossalari. X to'plamda $*$ va $\bullet$ algebraik operatsiyalari berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. *Agar X to'plamdan olingan istalgan x, y, z elementlar uchun $(x * y) * z = x * (y * z)$ shart bajarilsa, u holda «$*$»*

operatsiyasi ***assotsiativ*** *deyiladi, ya'ni* $(\forall x, y, z \in X)((x*y)*z = x*(y*z))$.

Masalan, «+» operatsiyasi N da assotsiativ algebraik operatsiyadir. Chunki $(\forall a, b, c \in N)((a+b)+c = a+(b+c))$.

Shu kabi to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi, mulohaza va predikatlar dizyunksiyasi va konyunksiyasi ham assotsiativ algebraik operatsiya bo'ladi.

Agar algebraik operatsiya assotsiativlik xossasiga ega bo'lsa, faqat shu operatsiya qatnashgan ifodalarni qavslarsiz yozish mumkin: $(a*b)*c = a*(b*c) = a*b*c$.

5-ta'rif. *Agar X dan olingan istalgan x, y elementlar uchun* $x*y = y*x$ *shart bajarilsa, u holda (*) operatsiyasi* ***kommutativ*** *deyiladi.*

Qisqacha: $(\forall x, y \in X)(x*y = y*x)$ kabi yoziladi.

Masalan, (+) operatsiyasi N da kommutativdir, chunki $(\forall a, b \in N)(a+b = b+a)$.

6-ta'rif. *Agar X dan olingan istalgan x, y, z elementlar uchun* $x*(y \bullet z) = (x*y) \bullet (x*z)$ *shart bajarilsa, u holda (*) operatsiya (•) ga nisbatan* ***distributiv*** *deyiladi.*

Qisqacha $(\forall x, y, z \in X)$ $(x*(y \bullet z) = (x*y) \bullet (x*z))$ yoziladi.

Masalan, N da ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv bo'ladi. Haqiqatdan $(\forall a, b, c \in N)(a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c)$.

7-ta'rif. *Agar X dan olingan istalgan x, y lar uchun shunday bir* $a \in X$ *topilib,* $x*a = y*a$ *dan* $x = y$ *kelib chiqsa, u holda (*) operatsiya* ***qisqaruvchan*** *deyiladi.*

Qisqacha: $(\forall x, y \in X, \exists a \in X)$ $(a*x = a*y \Rightarrow x = y)$ kabi yoziladi.

Masalan, $a + x = a + y \Rightarrow x = y$ demak, «+» qisqaruvchan operatsiya.

7.3. Algebraik operatsiyaning neytral, simmetrik, yutuvchi elementlari.

8-ta'rif. *Agar istalgan* $x \in X$ *uchun shunday* $e \in X$ *topilsaki, natijada* $xTe = eTx = x$ *shart bajarilsa, u holda e shu «T» operatsiyasi uchun* ***neytral element*** *deyiladi.*

Qisqacha $(\forall x \in X, \exists e \in X)(xTe = eTx = x)$ kabi yoziladi.

9-ta'rif. *Agar X to'plamda berilgan (*) operatsiyaga nisbatan* $e \in X$ *neytral element bo'lsa va* $x * \bar{x} = \bar{x} * x = e$ *shart bajarilsa, u holda* $\bar{x} \in X$ ***simmetrik element*** *deyiladi.*

Masalan, $-a$ element a ga qo'shishga nisbatan simmetrik bo'ladi, chunki $a + (-a) = 0$.

10-ta'rif. *Agar X to'plamda berilgan (*)ga nisbatan* $a * e = e * a = e$ *shart bajarilsa, u holda e —* ***yutuvchi element*** *deyiladi.*

Masalan, 0 element ko'paytirishga nisbatan yutuvchidir.

7.4. Gruppa, halqa va maydon tushunchalari.

11-ta'rif. *Agar X to'plamda binar algebraik operatsiya berilgan bo'lsa, u holda X to'plam* ***gruppoid*** *deyiladi.*

12-ta'rif. *Assotsiativ operatsiya berilgan gruppoid* ***assotsiativ***, *kommutativ operatsiya berilgan gruppoid* ***kommutativ*** *gruppoid deyiladi.*

13-ta'rif. *Agar gruppoid assotsiativ bo'lsa, u holda* ***yarim gruppa*** *deyiladi.*

14-ta'rif. *Agar neytral elementga ega bo'lgan A yarim gruppada istalgan* $a \in A$ *uchun simmetrik element mavjud bo'lsa, u holda A to'plam* ***gruppa*** *deyiladi.*

Misol. Z to'plam qo'shishga nisbatan gruppa tashkil qiladi. Haqiqatan ham:

1. Z da «+» assotsiativ algebraik operatsiya.
2. $0 \in Z$, «+» uchun neytral element mavjud.
3. Simmetrik element ham mavjud, $a + (-0) = 0$.

15-ta'rif. *G to'plam «*» operatsiyasiga nisbatan gruppa bo'lsa va* $a*b = b*a$ *shart bajarilsa, u holda G* ***kommutativ*** *yoki* ***Abel gruppasi*** *deyiladi.*

16-ta'rif. *Agar X to'plamda ikkita binar algebraik operatsiya (+, *) berilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa:*

1) *X qo'shishga nisbatan kommutativ gruppa;*

2) *ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv, ya'ni* $a(b+c) = a*b + a*c$, $(b+c)*a = b*a + c*a$ *bo'lsa, u holda X to'plam* ***halqa*** *deyiladi.*

Misol. Z to'plam halqadir. Chunki:

1) Z da qo'shish va ko'paytirish algebraik operatsiya;
2) Z qo'shishga nisbatan kommutativ gruppa;
3) Z da ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv.

17-ta'rif. *Agar M halqaning noldan tashqari barcha elementlari ko'paytirishga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qilsa, u holda M* ***maydon*** *deyiladi.*

Misol. Q ratsional sonlar to'plami maydondir. Chunki:

1) Q halqa kommutativ.
2) Ko'paytirishga nisbatan kommutativ gruppa (nolsiz).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi to'plamlarning qaysilari qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish operatsiyalariga nisbatan yopiq to'plam hisoblanadi: a) natural sonlar; b) toq sonlar; d) musbat ratsional sonlar; e) $\{0\}$; f) $\{0; 1\}$; g) $\{3n+1 \mid nOZ\}$?
2. Qaysi $(*, X)$ juftliklar uchun X da algebraik operatsiya bo'ladi, degan mulohaza to'g'riligini aniqlang:
   a) $*$ — qo'shish $X = Z_-$; b) $*$ — bo'lish $X = R_+$;
   d) $*$ — bo'lish $X = R_-$; e) $*$ — ko'paytirish $X = \{3k \mid k \in Z\}$;
   f) $*$ — EKUB, $X = \{2n \mid n \leq N\}$; g) $*$ — EKUK, $X = \{2k+1 \mid k \in N\}$.
3. Barcha butun sonlar to'plami Z da assotsiativ yoki kommutativ bo'ladigan algebraik operatsiyalarni aniqlang:
   a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e) $a * b = 3a - 2b$.
4. Barcha natural sonlar to'plami N da assotsiativ yoki kommutativ operatsiyalarni aniqlang:
   a) qo'shish; b) ayirish; d) ko'paytirish; e) bo'lish; f) $B(a; b)$
   g) $K(a; b)$, $a * b = a^b$.
5. X to'plamda $*$ operatsiya 0 operatsiyaga nisbatan distributiv, degan mulohaza qaysi $(*, 0)$ juftliklar uchun to'g'ri ekanligini aniqlang:
   a) R da $*$ — bo'lish, 0 — qo'shish;
   b) R da $*$ — qo'shish, 0 — ko'paytirish;
   d) $*$ — to'plamlar birlashmasi, 0 — kesishmasi;
   e) Z da $*$ — yig'indi, 0 — ayirma;
   f) $*$ — mulohazalar dizyunksiyasi, 0 — konyunksiyasi.
6. To'plamlar kesishmasining yutuvchi elementi bormi, simmetrik yoki neytral elementlari-chi?
7. Butun sonlar to'plamida qo'shishga nisbatan 8 ning, -7 ning simmetrik elementlarini ayting.
8. Ratsional sonlar to'plami qo'shishga nisbatan gruppa tashkil qilishini ko'rsating.
9. X to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami to'plamlar kesishmasiga nisbatan gruppa tashkil qiladimi?
10. Quyidagi to'plamlar halqa bo'ladimi:
    a) 5 ga karrali butun sonlar to'plami;
    b) toq natural sonlar to'plami;
    d) barcha haqiqiy sonlar to'plami;
    e) $a + b\sqrt{2}$ ko'rinishdagi sonlar to'plami; bu yerda $a, b \in R$. Bu to'plamlarning qaysilari maydon bo'la oladi?

8-§. ALGORITM TUSHUNCHASI

8.1. Algoritm tushunchasi va uning xossalari. Algoritm tushunchasi fundamental matematik tushunchalardan bo'lib, matematikaning «Algoritmlar nazariyasi» deb ataluvchi maxsus bo'limining tadqiqot obyekti hisoblanadi.

Algoritm — bu biror jarayonni aniq tasvirlash va uni bajarish uchun ko'rsatmadir.

«Algoritm» so'zi IX asrda yashagan O'rta osiyolik matematik Al-Xorazmiy ismining Yevropa tillariga tarjima qilinishi natijasida kelib chiqqan. Al-Xorazmiy arifmetik amallarni bajarish qoidasini (algoritmni) ko'rsatib bergan.

Bu algoritmlar hozirgi vaqtda ham maktab amaliyotida ishlatilib kelinmoqda. Algoritmlashtirishning vazifasi algoritmlarni tuzishga (yozishga) o'rgatishdan iborat bo'lib, bajaruvchi (odam, robot, EHM) algoritmlarni bajarish qoidasiga rioya qilgan holda yagona natijaga erishmog'i lozim. Bu esa algoritmlarni yozish qoidasiga ba'zi talablar qo'yadi. Bular quyidagi xossalar ko'rinishida ifodalanadi:

1°. Aniqlik xossasi. Algoritm ko'rsatmalari bir ma'noli bo'lishi zarur. Algoritm bajariladigan amallarning zarur ketma-ketligini aniq belgilab beradi. Algoritmning amalga oshish jarayoni konkret hisobchiga bog'liq bo'lmaydi.

2°. Ommaviylik xossasi. Algoritmning boshlang'ich ma'lumotlarning ruxsat etilgan ixtiyoriy qiymatlarida yaroqli bo'lishi zarur.

3°. Natijaviylik xossasi. Izlanayotgan natijani boshlang'ich ma'lumotlarning ruxsat etilgan qiymatlari uchun chekli sondagi yetarlicha sodda qadamlardan so'ng olish mumkin bo'lishi kerak.

8.2. Algoritmlarni yozish usullari. Bir nechta misollar keltiraylik:

1. $y = \frac{7x-4}{5x+3}$ 1. y ning qiymatini toping.

№	Amalni bajarish tavsifi
1	X ni 7 ga ko'paytir.
2	(1) ning natijasidan 4 ni ayir.
3	X ni 5 ga ko'paytir.
4	(3) ning natijasiga 3 ni qo'sh.
5	(2) ning natijasini (4) ning natijasiga bo'l.

yoki $y = \frac{7x-4}{5x+3}$ ni hisoblash algoritmi quyidagicha yozilishi mumkin:

№	Amalni bajarish tavsifi
1	$a := x * 7$
2	$b := a - 4$
3	$c := x * 5$
4	$d := c + 3$
5	$y = b : d$

2. Kesmani teng ikkiga bo'lish (sirkul va chizg'ich yordamida) algoritmi:

№	Harakatlarni bajarish tartibi
1	Sirkul ninasini A nuqtaga qo'y.
2	Sirkul oyoqlarini AB ga teng qilib och.
3	Aylana o'tkaz.
4	Sirkul ninasini B nuqtaga qo'y.
5	Aylana o'tkaz.
6	Aylanalarning kesishgan nuqtalaridan to'g'ri chiziq o'tkaz.
7	To'g'ri chiziq va kesma kesishgan nuqtani belgila.

3. $y = 5^n, n \in Z$.

1	Agar $n>1$ bo'lsa, 4 ga o'tadi, aks holda 2 ga.
2	Agar $n=1$ bo'lsa, 5 ga o'tadi, aks holda 3 ga.
3	Agar $n=0$ bo'lsa, 6 ga o'tadi, aks holda 7 ga.
4	$y = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5}_{n \text{ marta}}$, 8 ga o'tadi.
5	$y = 5$, 8 ga o'tadi.
6	$y = 1$, 8 ga o'tadi.
7	$y = \dfrac{1}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5}_{n \text{ marta}}}$
8	Tamom.

8.3. Boshlang'ich sinflarda qo'llaniladigan algoritmlar. Boshlang'ich sinf matematika darslarida quyidagi kabi sodda algoritmlarni qo'llaymiz.

Qo'shish algoritmi (o'nli sanoq sistemasida).

1) Ikkinchi qo'shiluvchini xona birliklari mos keladigan qilib birinchi qo'shiluvchi tagidan yozamiz.

2) Birliklarni qo'shamiz. Agar yig'indi 10 dan kichik bo'lsa, javobni birliklar xonasiga yozamiz va keyingi o'nlik xonaga o'tamiz.

3) Agar yig'indi 10 dan katta yoki teng bo'lsa, $10 + C_0$ kabi tasavvur qilib (C_0 — bir xonali son) C_0 ni birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo'shiluvchining o'nliklariga 1 ni qo'shamiz, so'ng o'nliklar xonasini qo'shishga o'tamiz.

4) Yuqoridagini o'nliklar bilan, so'ngra yuzliklar bilan va hokazo takrorlaymiz. Hamma xona birliklari qo'shilgandan so'ng tugatamiz.

Xuddi shu kabi ayirish, ko'paytirish va bo'lish algoritmlarini tuzib chiqishimiz mumkin.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Boshlang'ich maktab matematika kursidan algoritmlarga misollar keltiring.
2. 10 ta qo'shiluvchining yig'indisini topish algoritmini yozing.
3. Qavsli ifodalar qiymatini hisoblash algoritmini eslang, shunga ko'ra $((36 : 2 - 14)(42 \cdot 2 - 14) + 20) : 2$ ifodaning qiymatini hisoblash algoritmini tuzing.
4. Ko'p xonali sonlarni taqqoslash algoritmini eslang va yozing.
5. Boshlang'ich sinf o'quvchisi uchun masala yechish algoritmini yozing.
6. Kasrlarni umumiy maxrajga keltirish algoritmini eslang va $\frac{121}{846}$, $\frac{71}{246}$ kasrlar uchun shu algoritmni yozing.
7. Matematikadan boshqa fanlardan algoritmlarga misollar keltiring.
8. Kundalik hayotimizda algoritmlar qanday ko'rinishda uchraydi?
9. Tenglamani yechish algoritmini tuzing va unga ko'ra $(6 - 3x)4 + 2x - 1 = 3(x - 5)$ tenglamani yeching.
10. Tengsizliklarni yechishning intervallar metodini eslang, unga ko'ra $(x + 3)(x - 5)(2 - x)(4 - x) = 0$ tengsizlikni yechish algoritmini tuzing.

1-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMINI TO'PLAMLAR NAZARIYASI ASOSIDA QURISH

1.1. Nazariyani aksiomatik qurish to'g'risida. Har bir fanni bayon etishda tushunchalarga nisbatan turlicha mulohaza yuritiladi. Chunki bu tushunchalarning ayrimlari o'z-o'zidan tushuniladigan tushunchalar bo'lsa, ayrim tushunchalar esa ma'lum tushunchalarga asoslangan holda mantiqiy mulohazalar yuritish asosida ta'riflanadi.

Boshqacha aytganda, tushunchalar ta'riflanmaydigan va ta'riflanadigan tushunchalarga bo'linadi. *Ta'riflanmaydigan tushunchalar insonning ko'p asrlik amaliy-ijodiy faoliyatining natijasi bo'lib, ular boshlang'ich tushunchalar deb yuritiladi.* Bularsiz har qanday nazariyani, jumladan, matematikani fan sifatida aksiomatik tuzish mumkin emas.

Boshlang'ich tushunchalar asosida nazariyaning *aksiomalari* tuziladi. *Aksiomalar isbotlanmaydigan mulohazalar bo'lib, biri ikkinchisining natijasi sifatida kelib chiqmasligi va biri ikkinchisini inkor etmasligi zarur. Shuningdek, berilgan nazariyani aksiomatik qurishda uning teoremalarini isbotlash uchun aksiomalar yetarli bo'lishi zarur.*

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, bitta nazariya bir necha yo'llar bilan aksiomatik qurilishi mumkin. Bu yo'llar bir-biridan tanlab olingan boshlang'ich tushuncha va munosabatlari, ularga oid aksiomalar sistemasi bilan farqlanadi. Natural sonlar nazariyasi ham bir necha yo'llar bilan aksiomatik qurilgan:

1) to'plam nazariyasi asosida (sanoq sonlar nazariyasi);
2) peano aksiomalari asosida (tartib sonlar nazariyasi);
3) miqdor tushunchasi asosida (miqdor sonlar nazariyasi).

1.2. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga

kelgan. Turli-tuman chekli to'plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zarurati ham natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo'ldi.

O'zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o'tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to'plamlarni taqqoslash uchun berilgan to'plamlar orasida yoki to'plamlardan biri bilan ikkinchi to'plamning qism to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishgan, ya'ni bu bosqichda kishilar buyumlar to'plamining sanog'ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o'tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o'rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o'nli sistemasi va nol tushunchasi yaratildi. Asta-sekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar hosil bo'la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so'ng sonlar mustaqil obyektlar bo'lib qoldi va ularni matematik obyektlar sifatida o'rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustida amallarni o'rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to'plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga o'rta asrlarda Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va O'rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa Yevropalik olimlar katta hissa qo'shdilar. «Natural son» atamasini birinchi bo'lib rimlik olim A. A. Boetsiy qo'lladi.

1.3. Nomanfiy butun son tushunchasi. Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish XIX asrda G. Kantor tomonidan to'plamlar nazariyasi yaratilgandan so'ng mumkin bo'ldi. Bu nazariya asosida chekli to'plam va o'zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1-ta'rif. *Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, bu to'plamlar* ***teng quvvatli*** *deyiladi. $A \sim B$ ko'rinishda yoziladi.*

«Teng quvvatlilik» munosabati refleksiv va tranzitiv bo'lgani uchun u ekvivalentlik munosabati bo'ladi va barcha chekli to'plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfda turli elementli to'plamlar yig'ilgan bo'lib, ularning umumiy xossasi teng quvvatli ekanligidir.

2-ta'rif. ***Natural son*** *deb, bo'sh bo'lmagan chekli teng quvvatli to'plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.*

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror to'plami to'la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. A to'plam bilan aniqlanadigan a son shu to'plamning *quvvati* deyiladi va $a = n(A)$ deb yoziladi. Masalan, 3 soni uch elementli to'plamlar sinfining umumiy xossasini bildiradi va u bu sinfning istalgan to'plami bilan aniqlanadi. 3 natural sonini ekvivalent to'plamlar sinfining $A = \{a; b; s\}$, $B = \{$qizil, sariq, yashil$\}$, $C = \{\square; \nabla; \bigcirc\}$ kabi vakillarini ko'rsatish bilan aniqlash mumkin.

Har bir chekli to'plamga unga tegishli bo'lmagan biror elementni qo'shib, berilgan to'plamga ekvivalent bo'lmagan to'plamni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib, o'zaro ekvivalent bo'lmagan to'plamlarning cheksiz ketma-ketligini va shu to'plamlar bilan aniqlanadigan 1, 2, 3, ..., n, ... ko'rinishda belgilangan natural sonlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Barcha natural sonlar to'plamini $N = \{1; 2; 3; ...\}$ ko'rinishda yozishga kelishamiz.

3-ta'rif. *Bo'sh to'plamlar sinfining umumiy xossasiga esa son 0 soni deyiladi,* $0 = n(\varnothing)$.

0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to'plamini tashkil qiladi. Bu to'plam N_0 ko'rinishida belgilanadi. $N_0 = \{0\} \vee N$. Bu yerda, N — barcha natural sonlar to'plami.

1.4. Nomanfiy butun sonlarni taqqoslash. Sonlarni taqqoslash qanday nazariy asosda yuz berishini aniqlaylik. Ikkita nomanfiy butun a va b son berilgan bo'lsin hamda ular chekli A va B to'plamlar bilan aniqlansin.

4-ta'rif. *Agar a va b sonlar teng quvvatli to'plamlar bilan aniqlansa, u holda ular **teng** deyiladi.*

$a = b \Leftrightarrow A \sim B$, bu yerda $n(A) = a$; $n(B) = b$.

Agar A va B to'plamlar teng quvvatli bo'lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo'ladi.

5-ta'rif. *Agar A to'plam B to'plamning o'z qism to'plamiga teng quvvatli va $n(A) = a$; $n(B) = b$ bo'lsa, a son b sondan **kichik** deyiladi va $a < b$ kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda b son a sondan **katta** deyiladi va $b > a$ kabi yoziladi.*

$a < b \Leftrightarrow A \sim B$, bu yerda $B_1 \subset B$ va $B_1 \neq B$ $B_1 \neq \varnothing$.

1.5. Nomanfiy butun sonlar yig'indisi, uning mavjudligi va yagonaligi. To'plamlar ustida bajariladigan har bir amalga shu

to'plamlar bilan aniqlanadigan sonlar ustidagi amallar mos keladi. Masalan, o'zaro kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasidan iborat C to'plam A va B to'plamlar bilan aniqlanadigan a va b nomanfiy butun sonlarning yig'indisi deb ataluvchi c sonni aniqlaydi.

6-ta'rif. *Butun nomanfiy a va b sonlarning **yig'indisi** deb $n(A) = a$; $n(B) = b$ bo'lib, kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.*

$a + b = n(A \vee B)$, bu yerda $n(A) = a$; $n(B) = b$ va $A \wedge B = \varnothing$.

Berilgan ta'rifdan foydalanib, $5 + 2 = 7$ bo'lishini tushuntiramiz. 5 — bu biror A to'plamning elementlari soni, 2 — biror B to'plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi kerak. Masalan, $A = \{x; y; z; t; p\}$, $B = \{a; b\}$ to'plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz: $A \vee B = \{x; y; z; t; p; a; b\}$. Sanash yo'li bilan $n(A \vee B) = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $5 + 2 = 7$.

Umuman, $a + b$ yig'indi $n(A) = a$, $n(B) = b$ shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas. Bu umumiy da'voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari, butun nomanfiy sonlar yig'indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita nomanfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig'indisi — butun nomanfiy c sonni har doim topish mumkin. U berilgan a va b sonlar uchun yagona bo'ladi.

Yig'indining mavjudligi va yagonaligi ikki to'plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig'indi ta'rifidan foydalanib, «kichik» munosabatiga boshqacha ta'rif berish mumkin:

7-ta'rif. $\forall a, b \in N$ uchun $a = b + c$ bo'ladigan c son topilsa, $b < a$ (yoki $a > b$) deyiladi.

$(\forall a, b \in N)(\exists c \in N)(b < a \Leftrightarrow a = b + c)$.

1.6. Qo'shish amalining xossalari.

1°. Qo'shish amali kommutativdir:

$$(\forall a, b \in N_0) \quad (a+b=b+a),$$

ya'ni ixtiyoriy nomanfiy butun a va b sonlar uchun $a + b = b + a$ tenglik o'rinli.

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$ va $A \cap B = \varnothing$ bo'lsin,

$$a+b=n(A\cup B)=n(B\cup A)=b+a$$

(to'plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2°. Qo'shish amali assotsiativdir:

($\forall a, b, c \in N_0$) $a+(b+c)=(a+b)+c$.

Isbot: $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ bo'lsin.

$$a+(b+c)=n(A\cup(B\cup C)),$$
$$(a+b)+c=n((A\cup B)\cup C)$$

to'plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko'ra

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C.$$

Demak, $a+(b+c)=(a+b)+c$.

3°. 0 ni yutish qonuni:

$$(\forall a\in N_0)\ \ a+0=a.$$

Isbot. $a+n(A)$, $0=n(\varnothing)$, $a+0=n(A\vee\varnothing)=n(A)+a$, $A\vee\varnothing=A$ bo'lgani uchun.

4°. Qo'shish amali qisqaruvchandir:

$$(\forall a, b, c\in N_0)\ \ a=b\Leftrightarrow a+c=b+c.$$

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ bo'lsin. $A=B\Rightarrow A\vee C=$ $=B\vee C$ bo'ladi. Qo'shish amali ta'rifidan $N(A)=n(B)\Rightarrow n(A\vee C)=$ $=n(B\vee C)$, $a=b\Rightarrow a+c=b+c$.

5°. Qo'shish amali monotondir:

$$(\forall a, b, c\in N_0)\ \ a<b\Rightarrow a+c<b+c.$$

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$ bo'lsin.

$a<b\Rightarrow A\sim B_1\subset B$, bu yerda $B_1\neq B$, $B_1\neq\varnothing$, u holda $A\vee C\sim B_1\vee C\subset B\vee C\Rightarrow a+c<b+c$.

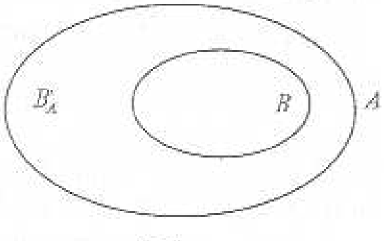
«<» munosabati N_0 to'plamda qat'iy tartib munosabati bo'lishini isbot qilamiz. Buning uchun «<» munosabatining tranzitiv va asimmetrik ekanligini ko'rsatamiz.

a) tranzitivligi: $a<b\wedge b<c$ bo'lsin, 7-ta'rifga ko'ra, shunday k va h sonlar topiladiki, $b=a+k$ va $c=b+h$ bo'ladi, bundan $c=b+h=(a+k)+h$ va qo'shishning assotsiativligiga ko'ra $c=a+(k+h)$ ekanligini yozish mumkin, bu esa $a<c$ degan xulosani beradi.

b) asimmetriklikni teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz. Faraz qilaylik, bir vaqtda $a<b$ va $b<a$ o'rinli bo'lsin. Bundan tranzitivlik xossasiga ko'ra $a<a$ ekanligi kelib chiqadi, demak, farazimiz noto'g'ri va bir vaqtda $a<b$ va $b<a$ bo'lishi mumkin emas, degan xulosaga kelamiz.

1.7. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi, uning mavjudligi va yagonaligi.

8-ta'rif. *Butun nomanfiy a va b sonlarning **ayirmasi** deb, $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B\subset A$ shartlar bajarilganda, B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam elementlari soniga aytiladi* (II.1-rasm).



II.1-rasm.

$a-b=n(B'_A)$, bu yerda $a=n(A)$, $b=n(B)$, $B\subset A$.

Misol. Berilgan ta'rifdan foydalanib, $7-4=3$ bo'lishini tushuntiramiz. 7 — biror A to'plamning elementlari soni, 4 — shu A to'plamning qism to'plami bo'lgan B to'plamning elementlari soni bo'lsin. Masalan: $A=\{x; y; z; t; p; r; s\}$, $B=\{x; y; z; t\}$ to'plamlarni olaylik. B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisini topamiz: $(B'_A)=\{p; r; s\}$, $n(B'_A)=3$. Demak, $7-4=3$ bo'lar ekan.

$a-b$ ayirma $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B\subset A$ shartlarni qanoatlantiruvchi A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas.

$a=n(A)$, $b=n(B)$ va $B\subset A$ bo'ladigan butun nomanfiy a va b sonlar berilgan bo'lsin va bu sonlarning ayirmasi B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisidagi elementlar soni bo'lsin, ya'ni $a-b=n(B'_A)$.

Eyler doiralarida A, B, $A\setminus B$ to'plamlar rasmda ko'rsatilganidek tasvirlanadi. $A=B\vee B'_A$ ekani ma'lum, bundan $n(A)=n(B\cup B'_A)$. $B\cap B'_A=0$ bo'lgani uchun biz $a=n(A)=n(B\cup B'_A)=n(B)+n(B'_A)=$ $=b+(b-a)$ ga ega bo'lamiz. Bu esa ayirmaga boshqacha ta'rif berish imkonini beradi.

9-ta'rif. *Butun nomanfiy a va b sonlarning* ***ayirmasi*** *deb shunday butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig'indisi a songa teng bo'ladi:* $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.

Shunday qilib, $a - b = c$ yozuvda a — kamayuvchi, b — ayriluvchi, c — ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo'shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkinchi ta'rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremalarni isbotlaymiz:

1-teorema. ***Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi $b \le a$ bo'lganda va faqat shunda mavjud bo'ladi.***

Isbot. Agar $a = b$ bo'lsa, u holda $a - b = 0$ bo'ladi va, demak, $a - b$ ayirma mavjud bo'ladi.

Agar $b < a$ bo'lsa, u holda «kichik» munosabati ta'rifiga ko'ra shunday natural son mavjud bo'ladiki, bunda $a = b + c$ bo'ladi. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $c = a - b$, ya'ni $a - b$ ayirma mavjud bo'ladi. Agar $a - b$ ayirma mavjud bo'lsa, u holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra shunday butun nomanfiy c son topiladiki, $a = b + c$ bo'ladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi; agar $c > 0$ bo'lsa, u holda «kichik» munosabatining ta'rifiga ko'ra $b < a$ bo'ladi. Demak, $b \le a$.

2-teorema. ***Agar butun nomanfiy a va b sonlarining ayirmasi mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir.***

Isbot. $a - b$ ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik: $a - b = c_1$ va $a - b = c_2$. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $a = b + c_1$ va $a = b + c_2$ ga ega bo'lamiz. Bundan $b + c_1 = b + c_2$ va, demak $c_1 = c_2$ ekani kelib chiqadi.

1.8. Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi. Yig'indidan sonni ayirish qoidasi: *yig'indidan sonni ayirish uchun yig'indidagi qo'shiluvchilarning biridan shu sonni ayirish va hosil bo'lgan natijaga ikkinchi qo'shiluvchini qo'shish yetarli.* Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz.

Agar, a, b, c — butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda:

a) $a \ge c$ bo'lganda $(a + b) - c = (a - c) + b$ bo'ladi;

b) $b \ge c$ bo'lganda $(a + b) - c = a + (b - c)$ bo'ladi;

d) $a \ge c$ va $b \ge c$ bo'lganda yuqoridagi formulalarning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin.

$a \ge c$ bo'lsin, u holda $a - c$ ayirma mavjud bo'ladi. Uni p orqali belgilaymiz: $a - c = p$. Bundan $a = p + c$ chiqadi. $p + c$ yig'indini $(a + b) - c$ ifodadagi a ning o'rniga qo'yamiz va uni shakl almashtiramiz:

$$(a + b) - c = (p + c + b) - c = p + b + c - c = p + b.$$

Biroq p harfi orqali $a - c$ ayirma belgilangan edi, demak, isbotlanishi talab etilgan $(a + b) - c = (a - c) + b$ ifodaga ega bo'lamiz.

Sondan yig'indini ayirish qoidasi: sondan sonlar yig'indisini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarning birini, ketidan ikkinchisini ketma-ket ayirish yetarli, ya'ni agar a, c, b — butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda $a \ge b + c$ bo'lganda $a - c(b + c) = (a - b) - c$ ga ega bo'lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi va uning nazariy-to'plam tasviri yig'indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang'ich maktabda aniq misollarda qaraladi, asoslash uchun ko'rgazmali chizmalar, tasvirlar namoyish etiladi.

Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi. Masalan, sondan yig'indini ayirish qoidasi sonni bo'laklab ayirish usuliga asos bo'ladi: $5 - 2 = 5 - (1 + 1) = (5 - 1) - 1 = 4 - 1 = 3$.

1.9. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi, uning mavjudligi va yagonaligi. $a = n(A)$ va $b = n(B)$ bo'lgan a va b nomanfiy butun sonlar berilgan bo'lsin.

10-ta'rif. *a va b nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi deb, $A \times B$ dekart ko'paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi. Bu yerda* $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ ekanini eslatib o'tamiz. Demak, ta'rifga ko'ra:

$a \cdot b = n(A \times B) = c$, bu yerda $a, b, c \in N_0$,

$a \cdot b = c$ yozuvda a – 1-ko'paytuvchi, b – 2-ko'paytuvchi, c — ko'paytma deyiladi, $c \in N_0$ sonni topish amali esa *ko'paytirish* deyiladi.

Masalan, ta'rifga ko'ra $5 \cdot 2$ ko'paytmani topaylik. Buning uchun $n(A) = 5$ va $n(B) = 2$ bo'lgan $A = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$, $B = \{1;\ 2\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzamiz:

$A \times B = \{(a;\ 1), (a;\ 2), (b;\ 1), (b;\ 2), (c;\ 1), (c;\ 2), (d;\ 1), (d;\ 2), (e;\ 1), (e;\ 2)\}$. Dekart ko'paytma elementlari soni 10 ta bo'lgani uchun $5 \cdot 2 = 10$.

3-teorema. ***Ikkita nomanfiy butun son ko'paytmasi mavjud va yagonadir.***

Ko'paytmaning mavjudligi va yagonaligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko'paytma elementlari soni to'plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog'liq emasligi bilan isbotlanadi.

1.10. Ko'paytirish amalining xossalari.

1°. Ko'paytirish amali kommutativdir:

$(\forall a, b \in N_0)\ ab = ba.$

Isbot. $a = n(A)$ va $b = n(B)$, $A \cap B = \varnothing$ bo'lsin. $A \times B \neq B \times A$, shunga qaramay, $A \times B \sim B \times A$ (bunda istalgan $(a, b) \in A \times B$ juftlikka $(b, a) \in B \times A$ juftlik mos keltiriladi):

$$A \times B \sim B \times A \Rightarrow n(A \times B) = n(B \times A),$$

$$ab = n(A \times B) = n(B \times A) = ba \Rightarrow ab = ba.$$

2°. Ko'paytirish amali assotsiativdir:

$$(\forall a, b, c \in N_0)\ (ab)c = a(bc).$$

Isboti. $(ab)c = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ va A, B, C lar juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin:

$$(ab)c = n((A \times B) \times C) \text{ va } a(bc) = n(A \times (B \times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko'paytmalar doirasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yo'li bilan $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$ ekanini ko'rsatish mumkin (kombinatorika bo'limidagi ko'paytma qoidasini eslang). Demak:

$$(ab)c = n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C)) = a(bc).$$

3°. Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi:

$$(\forall a, b, c \in N_0)\quad (a + b)c = ac + bc.$$

Isbot. $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ va A, B, C lar juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin. To'plamlar nazariyasidan ma'lumki, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ va $A \cap B = \varnothing \Rightarrow (A \times C) \cap \cap (B \times C) = \varnothing$ chunki, $A \times C$ va $B \times C$ dekart ko'paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a + b) \cdot c = n((A \cup B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C)) =$$
$$= n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc.$$

Demak, $(a + b)c = ac + bc$.

4°. Yutuvchi elementning mavjudligi:

$$(\forall a \in N_0)\quad a \cdot 0 = 0.$$

Isbot. $a = n(A)$, $0 = n(\varnothing)$ bo'lsin. $A \times \varnothing = \varnothing$ ekanligidan

$$a \times 0 = n(A \times \varnothing) = n(\varnothing) = 0.$$

5°. Ko'paytirish amalining monotonligi:

$$(\forall a, b, c \in N_0, c \neq 0)\quad a > b \Rightarrow ac > bc;$$
$$(\forall a, b, c \in N_0)\quad a \geq b \Rightarrow ac \geq bc;$$
$$(\forall a, b, c \in N_0, c \neq 0)\quad a < b \Rightarrow ac < bc.$$

Isbot. Namuna uchun 1-jumlani isbotlaymiz.
$a > b \Rightarrow B \sim A_1 \subset A$, bu yerda $n(A) = a$, $n(B) = b$, $A_1 \neq \varnothing$, $A_1 \neq A$.
U holda $B \times C \sim (A_1 \times C) \subset (A \times C)$.
Demak, $n(B \times C) = n(A_1 \times C) < n(A \times C) \Rightarrow bc < ac$.

6°. Ko'paytmaning qisqaruvchanligi:

$(\forall a, b, c \in N_0, c \neq 0)\quad ac = bc \Rightarrow a = b.$

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik: $a \neq b$ bo'lsin. U holda yoki $a < b$, yoki $a > b$ bo'lishi kerak. $a < b$ bo'lsa, $ac < bc$ bo'lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a = b$ ekan.

Ko'paytmaga yig'indi orqali ta'rif berish ham mumkin.

11-ta'rif. *$a, b \in N_0$ bo'lsin. a sonning b soniga **ko'paytmasi** deb, har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisiga aytiladi.*

$$ab = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{b \text{ marta}}.$$

Bundan $a \cdot 1 = a$ va $a \cdot 0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta'rif $a = n(A)$, $b = n(B)$, $A \wedge B = \varnothing$ bo'lgan $A \times B$ dekart ko'paytma elementlarini sanash ma'lum bir qonuniyatga asoslanishiga bog'liq.

Misol. $A = \{a; b; c\}$, $B = \{x; y; z; t\}$.

$A \times B$ dekart ko'paytmani quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz:

$(a; x)$	$(a; y)$	$(a; z)$	$(a; t)$
$(b; x)$	$(b; y)$	$(b; z)$	$(b; t)$
$(c; x)$	$(c; y)$	$(c; z)$	$(c; t)$

Dekart ko'paytma elementlarini ustunlar bo'yicha sanasak, $3\times4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ga ega bo'lamiz.

1.11. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasi, uning mavjudligi va yagonaligi. Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'lish amalini ta'riflash uchun to'plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foydalaniladi.

Quvvati a ga teng bo'lgan A to'plamni teng quvvatli sinflarga ajratish mumkin bo'lsin.

12-ta'rif. *Agar b soni A to'plamni qismlarga ajratishdagi qism to'plamlar soni bo'lsa, a va b nomanfiy butun sonlar* ***bo'linmasi*** *deb, har bir qismdagi elementlar soni c ga aytiladi.*

Agar b soni A to'plamni sinflarga ajratishdagi har bir qism elementlari soni bo'lsa, a va b sonlar *bo'linmasi* deb, qism to'plamlar soni c ga aytiladi.

Nomanfiy butun a va b sonlar bo'linmasini topish amali *bo'lish*, a — *bo'linuvchi*, b — *bo'luvchi*, $a : b$ — *bo'linma* deyiladi. Bo'lish ta'rifiga ko'ra bo'lishga oid masalalar ikki turga ajraladi: 1) mazmuniga ko'ra bo'lish; 2) teng qismlarga ajratish.

1-turga oid masala: 48 ta qalam 6 ta qutichaga baravardan solingan bo'lsa, har bir qutichaga nechtadan qalam joylangan?

2-turga oid masala: 48 ta qalam 6 tadan qilib qutichalarga solingan bo'lsa, nechta quticha kerak bo'ladi?

Bo'lishni ko'paytirishga teskari amal sifatida ham ta'riflash mumkin:

13-ta'rif. *a va b* ***nomanfiy butun sonlar bo'linmasi*** *deb, $a = bc$ tenglik bajariladigan c nomanfiy butun songa aytiladi.*

Bo'lishning mavjudligi haqidagi masala $n(A) = a$ bo'lgan A to'plamni teng quvvatli qism to'plamlarga ajratish mumkinligi masalasi bilan bog'liq. Agar A to'plamni berilgan b sondagi yoki quvvatdagi sinflarga ajratish mumkin bo'lsa, a ning b songa bo'linmasi mavjud bo'ladi.

4-teorema. ***a sonining b songa bo'linmasi mavjud bo'lsa, u yagonadir.***

Isbot. Haqiqatan ham, $a : b = c$ va $a : b = d$ va d son c sondan farqli bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $a = bc$ va $a = bd$. Bundan $bc = bd$ va ko'paytmaning qisqaruvchanligiga ko'ra $c = d$ ekanligi kelib chiqadi.

5-teorema. ***a nomanfiy butun son b natural songa bo'linishi uchun a son b sondan kichik bo'lmasligi zarur.***

Isboti. a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsin, ya'ni $a = bc$ shartni qanoatlantiruvchi c natural soni topilsin.

Istalgan c natural son uchun $1 \le c$ da'vo o'rinli. Ko'paytmaning monotonligiga ko'ra $b \cdot 1 \le b \cdot c$, $bc = a \wedge b$ $1 = b$ ekani hisobga olinsa, $b \le a$ ekani kelib chiqadi.

Lekin $b \le a$ shartning bajarilishi $a : b$ bo'linma mavjud bo'lishi uchun yetarli emas.

Masalan, $3 \le 19$, lekin 19 soni 3 ga bo'linmaydi. Bunday hollarda qoldiqli bo'lish haqida gapiriladi. Agar $b \le a$ va a soni b ga bo'linmasa, shunday q, r natural sonlar topiladiki, $r < b$ bo'lib, $a = bq + r$ va tenglik bajariladi. $(a;\ b)$ juftlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi $(q;\ r)$ sonlarning topilishi a ni b ga qoldiqli bo'lish deyiladi. Bu yerda q — *to'liqsiz bo'linma* va r — *qoldiq deyiladi*, $a : b = q$ (r qoldiq) shaklida yoziladi.

0 ni va 0 ga bo'lish masalasiga alohida to'xtab o'tamiz. $a = 0$ va $b \ne 0$ holida $0 : b = 0$ tenglik bajariladi, chunki $0 = b0$. Demak, 0 ning 0 dan farqli istalgan songa bo'linmasi 0 ga teng. Lekin 0 ga bo'lish amali aniqlanmagan. Faraz qilaylik, noldan farqli a sonning 0 ga bo'linmasi mavjud va u c songa teng bo'lsin, ya'ni $a \ne 0 \wedge a : c$. Bundan $a = 0 \cdot c = 0$ qarama-qarshilik kelib chiqadi. $0 : 0 = c$ bo'lsin, bu holda $0 = 0\,c$ tenglik istalgan c son uchun o'rinli bo'ladi, bu esa amal natijasi yagona bo'lish shartiga zid.

1.12. Bo'lish qoidalari.

1) Yig'indini songa bo'lish qoidasi. *Yig'indini songa bo'lish uchun, agar bo'linsa, har bir qo'shiluvchini shu songa bo'lib, natijalarni qo'shish kerak:*

$$(a + b) : c = a : c + a : b$$
$$48 : 3 = (30 + 18) : 3 = 30 : 3 + 18 : 3 = 10 + 6 = 16.$$

2) Ko'paytmani songa bo'lish qoidasi. *Ko'paytmani songa bo'lish uchun, agar bo'linsa, ko'paytuvchilardan birini shu songa bo'lib, natijani ikkinchi songa ko'paytirish kerak:*

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$$
$$75 : 5 = (3 \cdot 25) : 5 = 3 \cdot (25 : 5) = 3 \cdot 5 = 15.$$

3) Sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasi. *Sonni ko'paytmaga bo'lish uchun, agar bo'linsa, sonni avval ko'paytuvchilardan biriga, so'ng ikkinchisiga bo'lish yetarli.*

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$$
$$105 : (5 \cdot 7) = (105 : 5) : 7 = 21 : 7 = 3.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. To'plam nazariyasiga asoslanib $4 < 5$, $7 > 3$, $4 = 4$ ekanligini ko'rsating.
2. Arifmetik amallarning to'plam nazariyasiga ko'ra ta'rifiga asoslanib, $2 + 4$, $6 - 4$, $3 \cdot 4$ $10 : 2$ ni hisoblash yo'lini ko'rsating.
3. Ifoda qiymatini eng qulay usul bilan hisoblang va bunda arifmetik amallarning qanday qoidalaridan foydalanganingizni tushuntiring:

a) $76+19+24+81$	e) $2 \cdot 13 \cdot 5$
b) $(3828+1562)-828+1438$	f) $4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 125$
d) $76 : 4$	g) $87 \cdot 11$

4. Quyidagi masalalarni yechish amalining tanlanishini tushuntiring:
   a) 3 qiz atlas ko'ylakda, 4 qiz oq ko'ylakda raqsga tushdi. Bu raqsda nechta qiz qatnashdi?
   b) 1-«A» sinfda a'lochi o'quvchilar 5 ta, 1-«B» sinfda undan 3 ta ortiq. «B» sinfda nechta a'lochi o'quvchi bor?
   d) Maktab bog'iga 10 tup ko'chat o'tqazildi. Shundan 7 tasi olma, qolgani o'rik daraxti. Nechta o'rik daraxti o'tqazilgan?
   e) To'qish to'garagiga 12 o'quvchi qatnashadi, naqsh to'garagiga qatnashuvchilar undan 3 ta kam. Naqsh to'garagiga nechta o'quvchilar qatnashadi?
   f) Bitta paltoga 6 ta tugma qadaladi. 4 ta shunday palto uchun nechta tugma kerak bo'ladi?
   g) Nigorada 5 ta rangli qalam bor, Sardorda undan 3 marta ko'p. Sardorda nechta qalam bor?
   h) 10 ta daftar 5 o'quvchiga teng bo'lib berildi. Har bir o'quvchi nechtadan daftar olgan?
   i) Durdona 12 tuvakda gul o'stirmoqda. Hilolaning gullari undan 3 marta kam. Hilolada nechta gul bor?

2-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMINI AKSIOMATIK QURISH

2.1. Peano aksiomalari. Natural sonlar nazariyasini aksiomatik qurishda Peano (1858—1932) ta'riflanmaydigan tushuncha sifatida «natural son» va ta'riflanmaydigan munosabat sifatida «...dan keyin keladi» degan munosabatni asos qilib olgan.

Peano aksiomalari quyidagilar:

I. *Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud.*

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plamida birinchi element aniqlangan bo'lib, u 1 sonidan iboratdir.

II. *Har qanday a son uchun undan keyin keladigan birgina a' soni mavjud. Ya'ni $a = b$ bo'lsa, $a' = b'$ bo'ladi.*

Bu aksioma natural sonlar to'plamining cheksiz ekanligini ifodalaydi. Haqiqatan ham, natural sonlar to'plami cheksiz, chunki istalgan natural sondan bevosita keyin keladigan natural son mavjud.

III. *Istalgan son bevosita bittadan ortiq bo'lmagan sondan keyin keladi, ya'ni $a' = b'$ dan $a = b$ ekanligi kelib chiqadi.*

Bu aksiomadan ko'rinadiki, berilgan natural sondan navbatdagi songa bir necha marta o'tilganda ham bari bir faqat va faqat bitta sonning o'zi keladi, chunki aks holda navbatdagi son hech bo'lmaganda ikkita sonning ketidan kelgan bo'lar edi. Demak, natural sonlar to'plami qat'iy tartiblangan to'plamdir.

IV. *Agar biror S qoida 1 soni uchun o'rinli ekanligi isbotlangan bo'lsa va uning n natural soni uchun o'rinli ekanligidan navbatdagi natural son $n + 1$ uchun to'g'riligi kelib chiqsa, bu S qoida barcha natural sonlar uchun o'rinli bo'ladi.*

Bu aksioma *matematik induksiya* aksiomasi deyiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi.

Natural sonlar to'plamidagi barcha sonlar uchun «tenglik» munosabati quyidagi xossalarga ega:

1°. Refleksivlik xossasi. *Har qanday natural son o'z-o'ziga tengdir, ya'ni*

$$(\forall a \in N)\ (a = a).$$

2°. Simmetriklik xossasi. *Agar har qanday a natural son b natural songa teng bo'lsa, u holda b natural son a natural songa teng bo'ladi, ya'ni*

$$(\forall a,\ b \in N)\ (a = b \Rightarrow b = a).$$

3°. Tranzitivlik. *Agar a natural son b natural songa, b natural son c natural songa teng bo'lsa, u holda a natural son c natural songa teng bo'ladi, ya'ni*

$$(\forall a,\ b,\ c \in N)\ (a = b,\ b = c \Rightarrow a = c).$$

2.2. Matematik induksiya metodi. Matematik induksiya metodini bilish matematika fanini chuqur egallash, uning ichki sirlarini chuqur anglab yetishda muhim o'rin tutadi. Deduktiv va induktiv mulohaza yuritish umumiy xulosa chiqarishda har doim ham qo'l kelavermaydi. Chunki ko'p hollarda cheksiz ko'p xususiy hollarni ko'rib chiqqandan so'nggina, umumiy xulosa chiqarish mumkin bo'ladi. Umumiy xulosa chiqarishda matematik induksiya metodi eng qulay va oson metod hisoblanadi. U quyidagilardan iboratdir:

I. $n = 1$ *uchun berilgan $A(n)$ predikatning rostligi tekshiriladi.* (Agar $n = 1$ uchun berilgan $A(n)$ predikat rost bo'lsa, navbatdagi qadamga o'tiladi, aksincha bo'lsa, u holda berilgan predikat barcha n lar uchun yolg'on deb, umumiy xulosa chiqariladi.)

II. $n = k$ *uchun $A(n)$ predikat rost deb faraz qilinadi.*

III. $n = k + 1$ *uchun $A(n)$ predikatning rostligi, ya'ni $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$ isbotlanadi. Shundan so'ng, $A(n)$ predikat n ning barcha qiymatlarida rost deb umumiy xulosa chiqariladi.*

Misollar. a) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ predikat berilgan bo'lsin. Uni $A(n)$ deb belgilaymiz va barcha natural sonlar uchun rostligini isbot qilamiz.

Isbot. I. $n = 1$ uchun tekshiramiz, u holda

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow 1 = 1.$$

Demak, $n = 1$ uchun $A(n)$ predikat rost.

II. $n = k$ uchun $1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$ ni, ya'ni $A(k)$ predikatni rost deb faraz qilamiz.

III. $n = k + 1$ uchun $A(k + 1)$ predikatning rostligini, ya'ni

$$1+2+3+...+k+k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

to'g'riligini isbotlaymiz:

$$1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$
$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Bu esa $A(k + 1)$ mulohazaning o'zidan iboratdir. Demak, $A(n)$ predikat n ning barcha qiymatlarida rost.

b) $(n^3 + 2n)\vdots 3$ ekanligini matematik induksiya metodi yordamida isbotlang.

Yechish. I. $n = 1$ da $1^3 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow 3\vdots 3$.

II. $n = k$ da $(k^3 + 2k)\vdots 3$ deb faraz qilaylik.

III. $n = k + 1$ da $\left[(k+1)^3 + 2(k+1)\right]\vdots 3$ ekanligini isbotlaymiz.

Isbot.

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 =$$
$$= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) = (k^3 + 2k) + 3 \cdot (k^2 + k + 1).$$

Bu yig'indi 3 ga karrali, chunki birinchi qo'shiluvchi $(k^3 + 2k)\vdots 3$ — farazga asosan, ikkinchi qo'shiluvchi 3 ga karrali ekanligi ko'rinib turibdi: $3 \cdot (k^2 + k + 1)\vdots 3$. Demak, $(n^3 + 2n)\vdots 3$ bo'ladi.

d) $(n^3 + 11n)\vdots 6$ bo'lsa, uni matematik induksiya metodi yordamida isbotlang.

Yechish. I. $n = 1$ da $1^3 + 11 \cdot 1 = 1 + 11 = 12 \Rightarrow 12\vdots 6$.

II. $n = k$ da $(k^3 + 11k)\vdots 6$ deb faraz qilaylik,

III. $n = k + 1$ da $[(k+1)^3 + 11(k+1)]\vdots 6$ ni isbotlaymiz.

Isbot. $(k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 1k + 11 = = (k^3 + 12k) + (3k^2 + 3k + 12) = (k^3 + 12k) + 3(k^2 + k + 4)$.

Bunda $(k + 12)\vdots 6$ — farazga asosan, $3 \cdot [k^2 + k + 4]$ — bu ifodaning 3 ga karrali ekanligi ko'rinib turibdi, $(k^2 + k + 4)$ ifoda esa 2 ga karrali. Demak, $(n^3 + 11n)\vdots 6$ bo'ladi.

2.3. Natural sonlarni qo'shish va uning xossalari. Qo'shish amalining ta'rifi German Grossman (1809—1877) tomonidan berilgan qo'shish amalining induktivlik ta'rifiga asoslanadi. Bu ta'rif ikki qismdan iborat bo'lib, quyidagicha:

1) *ixtiyoriy a natural songa 1 ni qo'shish, bevosita a dan keyin keladigan sonni beradi. Ya'ni* $(\forall a \in N)$ $(a + 1 = a')$.

2) *$a + b'$ amali, a songa bevosita b sondan keyin keladigan b' sonni qo'shish natijasida $a + b$ sondan bevosita keyin keladigan natural $(a + b)'$ sonni beradi. Ya'ni* $(\forall a,\ b \in N)$ $[(a + b)' = = (a + b) + 1]$.

Peanoning ikkinchi aksiomasidan ma'lumki, n — natural son bo'lsa, $n + 1$ ham albatta natural son bo'ladi. Bunda a va $a + b$ lar natural son bo'lganda $a + b' = (a + b)'$ ham natural son bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek, $a + 1 = a'$ dan Peanoning

4-aksiomasiga asosan a natural son bilan b natural sonning yig'indisi to'la aniqlangan va natural sondan iborat bo'ladi.

Demak, qo'shish amali natural sonlar to'plamida hamma vaqt bajariladigan bir qiymatli amal ekan.

Natural sonlarni qo'shish ta'rifidan ko'rinadiki, har qanday natural son o'zidan oldingi natural son bilan birning yig'indisiga teng bo'lar ekan. Ya'ni

$$\begin{array}{ll} 2 = 1 + 1, & 6 = 5 + 1, \\ 3 = 2 + 1, & 7 = 6 + 1, \\ 4 = 3 + 1, & 8 = 7 + 1, \\ 5 = 4 + 1, & 9 = 8 + 1 \end{array}$$

bo'ladi. Natijada biz 1 ni qo'shish jadvalini hosil qildik.

Endi 2 ni qo'shish jadvalini tuzaylik:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Demak, 2 ni qo'shish jadvali:

$$\begin{array}{l} 1+2=1+(1+1)=(1+1)+1=2+1=3, \\ 2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=3+1=4, \\ 3+2=3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5, \\ 4+2=4+(1+1)+(4+1)+1=5+1=6. \end{array}$$

3 ni qo'shish jadvalini tuzsak:

$$\begin{array}{l} 1+3=1+(2+1)=(1+2)+1=3+1=4, \\ 2+3=2+(2+1)=(2+2)+1=4+1=5, \\ 2+4=2+(3+1)=(2+3)+1=5+1=6. \end{array}$$

Xuddi shu yo'l bilan bir xonali sonlarni qo'shish jadvalini tuzishimiz mumkin. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar natural sonlar qatorida a dan bevosita keyin keladigan b ta sonni sanasak, natijada oxiri sanalgan son a va b sonlarning yig'indisi bo'ladi va u $a + b$ ko'rinishda belgilanadi. Bunda a — *birinchi qo'shiluvchi*, b — *ikkinchi qo'shiluvchi*, $a + b$ esa *yig'indi* deb yuritiladi.

Qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Guruhlash (assotsiativlik) xossasi.

$$(\forall a, b, c \in N)\ [(a+b+c) = a+(b+c)].$$

Bu xossani matematik induksiya metodi yordamida isbotlaylik.

Isbot. 1) $c = 1$ bo'lsin. U holda $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ (ta'rifga asosan).

Demak, $c = 1$ uchun guruhlash xossasi o'rinli.

2) $c = n$ uchun $(a + b) + n = a + (b + n)$ o'rinli deb faraz qilaylik.

3) $c = n + 1$ uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaylik.

$(a + b) + (n + 1) = [(a + b) + n] + 1 =$ (ta'rifga asosan).

$= [a + (b + n)] + 1 =$ (farazga asosan)

$= a + [(b + n) + 1] =$ (ta'rifga asosan)

$a = [b + (n + 1)]$ (ta'rifga asosan).

Demak, $(a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)]$.

Peanoning 4-aksiomasiga asosan, $(a + b) + c = a + (b + c)$ ekanligi kelib chiqadi.

2°. O'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$(\forall a, b \in N)\ (a + b = b + a).$$

Bu xossani ham matematik induksiya metodidan foydalangan holda isbotlaymiz.

Isbot. 1) $a = 1$ bo'lsa, $1 + b = b + 1$ bo'lishini isbotlaylik. $b = 1$ bo'lsa, $1 + 1 = 1 + 1$ bo'ladi. Demak, $b = 1$ uchun $1 + b = b + 1$ tenglik to'g'ri.

$b = n$ uchun $1 + n = n + 1$ to'g'ri deb faraz qilaylik.

$b = n + 1$ uchun $1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$ to'g'riligini isbotlaymiz.

$1 + (n + 1) = (1 + n) + 1 =$ (ta'rifga asosan)

$= (n + 1) + 1$ (farazga asosan).

Demak, $1 + (n + 1) = (n + 1) + 1$ bo'ladi.

Endi yuqoridagi xossa $\forall a \in N$ uchun o'rinli ekanligini isbotlaylik.

$a = 1$ uchun o'rinli ekanligini ko'rdik.

$a = m$ uchun $m + b = b + m$ deb faraz qilaylik.

$a = m + 1$ uchun $(m + 1) + b = b + (m + 1)$ ekanligini isbotlaylik. U holda

$(m + 1) + b = m + (1 + b) = m + (b + 1) = $ (1°-xossaga asosan)

$= (m + b) + 1 =$ (ta'rifga asosan)

$= (b + m) + 1 = b + (m + 1)$ (farazga asosan).

Demak, $a + b = b + a$ (4-aksiomaga asosan).

2.4. Ayirish amalining ta'rifi va xossalari. Aytaylik, bizga ikkita qo'shiluvchining yig'indisi a va qo'shiluvchilardan biri b berilgan holda ikkinchi qo'shiluvchini topish talab qilinsin. Demak, shunday x sonini topish kerakki, bunda $a = b + x$ bo'lsin.

1-ta'rif. *Berilgan a sondan b sonni **ayirish** deb, b ga qo'shganda a hosil bo'ladigan x sonni topishga aytiladi.*

Bunda: *a — kamayuvchi; b — ayiriluvchi; x — ayirma deb yuritiladi va $x = a - b$ ko'rinishda yoziladi.*

Ta'rifdan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchi bilan ayirmaning yig'indisidan iborat bo'ladi. Demak, $a - b = x \Rightarrow a = b + x$. Bundan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchidan katta bo'ladi, ya'ni $a > b$. Nomanfiy butun sonlar to'plamida kamayuvchi ayiriluvchidan katta yoki unga teng bo'lgan holdagina ayirish amali aniqlangan bo'ladi. Ya'ni $a \geq b$ bo'lgan holda $a - b$ ayirma mavjud bo'ladi.

Ayirish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. *Agar ikki sonning ayirmasiga ayiriluvchi qo'shilsa, kamayuvchi hosil bo'ladi, ya'ni $a - b = c$ bo'lsa, $a = b + c$ bo'ladi.*

Isbot. Ta'rifga asosan $a = b + c$ yoki $c + b = a$. Lekin

$$c = a - b \Rightarrow c + b = (a - b) + b = a.$$

2°. *Agar ikki son yig'indisidan qo'shiluvchilardan biri ayirilsa, ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi, ya'ni*

$$(\forall a,\ b \in N)[(a + b) - b = a].$$

3°. *Berilgan songa ikki sonning ayirmasini qo'shish uchun kamayuvchini qo'shib, ayiriluvchini ayirish kifoya, ya'ni*

$$(\forall a,\ b,\ c \in N)[a + (b - c) = (a + b) - c].$$

4°. *Berilgan sondan yig'indini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarni birin-ketin ayirish kifoya, ya'ni*

$$(\forall a,\ b,\ \in N)[(a - (b + c) = a - b - c].$$

5°. *Berilgan sondan ayirmani ayirish uchun kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo'shish kifoya, ya'ni*

$$(\forall a,\ b,\ c \in N)[a - (b - c) = (a - b) + c].$$

2.5. Natural sonlarni ko'paytirish amali ta'rifi va xossalari. Har biri a ga teng bo'lgan b ta natural son yig'indisi $\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b\ ta}$ ni topish talab qilingan bo'lsin. Bunday ko'rinishdagi yig'indini hisoblash ko'p hollarda amaliy jihatdan qiyinchilik tug'diradi. Shuning uchun bir xil qo'shiluvchilar yig'indisini topishni osonlashtirish maqsadida yangi amal kiritiladi. Bu amal ko'paytirish amali deb yuritiladi.

2-ta'rif. *Har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisini topishga **ko'paytirish amali** deyiladi.*

U $a \times b$ yoki $a \cdot b$ ko'rinishda belgilanib, a sonining b soniga ko'paytmasi deb ataladi.

Demak, $a \cdot b = \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b\ ta}$. Bunda *$a \cdot b$ — ko'paytma, a, b — ko'paytuvchilar* deb yuritiladi.

Ko'paytirish amalining aksiomatik ta'rifi quyidagicha:

3-ta'rif. *a natural sonining b natural soniga **ko'paytmasi** deb, shunday algebraik operatsiyaga aytiladiki, unda*

1) $a \cdot 1 = a$,

2) $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$ *bo'ladi.*

Bu ta'rif yordamida bir xonali sonlar uchun ko'paytirish jadvalini tuzishimiz mumkin.

Masalan, a) 2 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$2 \cdot 1 = 2$

$2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$

$2 \cdot 3 = 2 \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 = 6$

$2 \cdot 4 = 2 \cdot (3+1) = 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8$

....

b) 3 ni ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$$3\cdot 1=3$$
$$3\cdot 2=3\cdot(1+1)=3\cdot 1+3=6$$
$$3\cdot 3=3\cdot(2+1)=3\cdot 2+3=6+3=9$$
$$3\cdot 4=3\cdot(3+1)=3\cdot 3+3=9+3=12$$

....

Ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. Distributivlik xossasi (chapdan). $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$, *ya'ni natural sonning boshqa ikki natural son yig'indisiga ko'paytmasi, shu sonning har bir qo'shiluvchi bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.*

Isbot. Bu xossani isbotlashda matematik induksiya metodidan foydalanamiz.

$c = 1$ uchun $a\cdot(b+1) = a\cdot b + a\cdot 1 = a\cdot b + a$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $a\cdot(b+n) = ab + an$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c = n + 1$ uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaymiz.

$a\cdot(b+n+1) = a\cdot[(b+n)+1] = a(b+n) + a\cdot 1 =$ [ta'rifga asosan) $= ab + an + a =$ [farazga asosan) $= ab + a(n+1) =$ [ta'rifga asosan).

Demak, $a\cdot(b+c) = ab + ac$ bo'ladi.

2°. Distributivlik xossasi (o'ngdan). $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ *bo'ladi, ya'ni ikkita son yig'indisining uchinchi son bilan ko'paytmasi, har bir sonning uchinchi son bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.*

Isbot. Buni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$c = 1$ uchun $(a+b)\cdot c = (a+b)\cdot 1 = a + b = a\cdot 1 + b\cdot 1$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $(a+b)\cdot n = a\cdot n + b\cdot n$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c = n + 1$ uchun $(a+b)\cdot(n+1)$ ni to'g'ri bo'lishini isbotlaymiz.

$(a+b)(n+1) = (a+b)\cdot n + (a+b) =$ (*ta'rifga asosan*) $= an + bn + a + b =$ (farazga asosan) $= an + a + bn + b =$ (yig'indining o'rin almashtirish xossasiga asosan) $= a(n+1) + b(n+1)$ (ko'paytirish ta'rifiga asosan).

Demak, $(a+b)(n+1)$ uchun yuqoridagi xossa to'g'ri ekan. Bundan $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ bo'ladi.

3°. Ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi. $a\cdot b + b\cdot c$, *ya'ni ko'paytuvchilarning o'rnini o'zgartirish bilan ko'paytma o'zgarmaydi.*

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$a + 1$ uchun $1\cdot b = b = b\cdot 1$ bo'lib, bu xossa o'rinli bo'ladi.

$a = n$ uchun $n\cdot b = b\cdot n$ deb faraz qilaylik.

$a = n + 1$ uchun to'g'ri ekanligini isbotlaylik.

$a\cdot b = (n+1)\cdot b = nb + 1\cdot b =$ (ko'paytirishning chapdan distributivlik xossasiga asosan) $= b\cdot n + b =$ (farazga asosan) $= b\cdot(n+1)$ (ko'paytirishning o'ngdan distributivlik xossasiga asosan).

Demak, $(h+1)b = b\cdot(n+1)$. Bundan $a\cdot b = b\cdot a$ ekanligi kelib chiqadi.

4°. Ko'paytirishning guruhlash xossasi. $a\cdot b = b\cdot a$ bo'ladi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz.

$(a\cdot b)\cdot 1 = ab = a\cdot(b\cdot 1)$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $(a\cdot b)\cdot n = a\cdot(b\cdot n)$ deb faraz qilamiz.

$c = n + 1$ uchun to'g'riligini isbotlaymiz.

$(a\cdot b)\cdot(n+1) = (a\cdot b)\cdot n + ab =$ (*ko'paytirish ta'rifiga asosan*) $= a\cdot(b\cdot n) + a\cdot b =$ (farazga asosan) $= a(b\cdot n + b) = a(b\cdot(n+1))$ (ko'paytmaning distributivlik xossasiga asosan).

Demak, $(a\cdot b)(n+1) = a(b(n+1))$. Bundan $(a\cdot b)c = a(b\cdot c)$.

Natija. *Har qanday natural sonning 0 soni bilan ko'paytmasi nolga teng.*

Haqiqatan ham, $0\cdot a = \underbrace{0+0+0+\ldots+0}_{a \text{ ta}} = 0$.

2.6. Natural sonlarni bo'lish ta'rifi va xossalari.

4-ta'rif. *Ikki ko'paytuvchining ko'paytmasi va bir ko'paytuvchi berilgan holda ikkinchi ko'paytuvchini topish amali* ***bo'lish*** *amali deyiladi.*

Bunda berilgan ko'paytmani ifodalovchi son — *bo'linuvchi*, berilgan ko'paytuvchi — *bo'luvchi*, izlanayotgan ko'paytuvchi — *bo'linma* deyiladi.

Agar a — ko'paytma, b — berilgan ko'paytuvchi, c — izlanayotgan ko'paytuvchi bo'lsa, u bo'lish amali yordamida $\frac{a}{b} = c$ yoki $a : b = c$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifdan ko'rinadiki, bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal ekan.

Bo'lish amali bir qiymatlidir. Masalan, a) $9:3=3$; b) $21:7=3$; d) $111:3=37$.

Bo'lish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. *Ko'paytmani noldan farqli biror songa bo'lish uchun ko'paytuvchilardan birini shu songa bo'lish kifoya,* ya'ni $(a\cdot b):c=(a:c)b$, bunda $a:c$ bo'ladi, ya'ni a soniga butun marta bo'linadi.

Isbot. $(a\cdot b):c=x$ desak, $a\cdot b=c\cdot x$. Lekin, $(a:b)\cdot c=x$ bo'ladi.

U holda $(a:c)\cdot cb=cx\Rightarrow(a:c)\cdot b=x\Rightarrow(a:c)\cdot b=(ab):c$ bo'ladi.

2°. *Biror sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun shu sonni bo'linuvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish kifoya, ya'ni* $(\forall a,\ b,\ c\in N)[a(b:c)=(ab):c]$.

Isbot. $a\cdot(b:c)=x$ bo'lsin.

Tenglikning ikkala tomonini c ga ko'paytirsak, $a\cdot(b:c)\cdot c=xc$ bo'ladi.

Lekin $(b:c)\cdot c=b$ bo'ladi. Bundan $ab=xc$. U holda ta'rifga asosan $(ab):c=x$ bo'ladi. Demak, $(ab):c=a\cdot(b:c)$.

3°. $(\forall a,\ b,\ c\in N)[a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b]$.

Isbot. $a(b\cdot c)=x$ desak, $a=bc\cdot x$ bo'ladi. Tenglikning ikkala tomonini b ga bo'lsak $a:b=c\cdot x$ bo'ladi. U holda bo'lish ta'rifga asosan $(a:b):c=x$ bo'ladi.

Demak, $(a:b):c=(a:c):b$ bo'ladi.

4°. $(\forall a,\ b,\ c\in N)[a:(b:c)=ac:b]$.

Isbot. $a(b:c)=x$ desak, $a=(b:c)\cdot x$ bo'ladi. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga ko'paytirsak, $a\cdot c=[(b:c)\cdot c]\cdot x$ bo'ladi. Bunda $(b:c)\cdot c=b$ ekanligidan $a\cdot c=b\cdot x$ bo'ladi. Bundan $(a\cdot c):b=x$ bo'ladi. Demak, $a(b:c)=(ac):b$.

5°. $(\forall a,\ b\in N_0,\ c\in N)\ (a:c\wedge b:c)\Rightarrow[(a+b):c=a:c+b:c]$.

Isbot. $(a+b):c=x$ bo'lsin. U holda $a=(a:c)\cdot c$ va $b=(b:c)\cdot c$. Bundan $(a:c)\cdot c+(b:c)\cdot c=cx$ yoki $[(a:c)+$ $+(b:c)]:c=cx$ yoki $a:c+b:c=x$. Bundan $a:c+b:c=$ $=(a+b):c$ bo'ladi.

6°. $(\forall a,\ b\in N_0, \forall c\in N)(a:c\wedge b:c)\Rightarrow(a-b):c=a:c-b:c$.

Isbot. $(a-b):c=x$ desak, $a-b=cx$ bo'ladi. $a=(a:c)\cdot c$ va $b=(b:c)\cdot c$ desak, $(a:c)\cdot c-(b:c)\cdot c=cx$, bundan $[(a:c)-$ $-(b:c)]:c=cx$. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga bo'lsak, $a:c-b:c=x$. Demak, $a:c-b:c=(a-b):c$.

2.7. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. Yuqorida aytilgan fikrlarni umumlashtirib, nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalarini sanab o'tish mumkin:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida eng kichik element mavjud va u 0 ga teng. Bu esa to'plamning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2. Nomanfiy butun sonlar to'plami cheksiz va yuqoridan chegaralanmagan.

3. Nomanfiy butun sonlar to'plami diskret.

Diskretlik nomanfiy butun sonlar to'plamida har bir natural sondan keyin va oldin keladigan sonlarni ko'rsatish mumkinligi bilan izohlanadi. Faqat 0 hech qanday sondan keyin kelmaydi. Boshqacha aytganda, ikkita ixtiyoriy nomanfiy butun son orasida chekli sondagi nomanfiy sonlar joylashgan.

4. Nomanfiy butun sonlar to'plami «<» munosabati orqali tartiblangan. (Bu xossalar izohi tegishli bo'limlarda qaralgan edi.)

2.8. Tartib va sanoq natural sonlar. Shuni xulosa qilib aytish kerakki, natural sonlar nafaqat miqdorlarni o'lchash va to'plam elementlarini sanash uchun ishlatiladi, balki to'plam elementlarini tartiblash ham natural sonlar yordamida amalga oshiriladi. Bunda chekli to'plam uchun natural sonlar qatori kesmasi tushunchasi ishlatiladi.

5-ta'rif. *Natural sonlar qatorining N_a **kesmasi** deb, a natural sondan katta bo'lmagan barcha natural sonlar to'plamiga aytiladi.*

Masalan, $N_5=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

6-ta'rif. *A to'plam elementlarini **sanash** deb, A to'plam bilan natural sonlar qatorining N_a kesmasi orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilishiga aytiladi.*

a soni A to'plam elementlari sonini bildiradi va $n(A)=a$ deb yoziladi. To'plam elementlarini sanash faqat ularning miqdorini aniqlab qolmay, balki to'plam elementlarini tartiblaydi ham. Bunda har bir elementning sanoqda «nechanchi» ekanligini ham aytish mumkin bo'ladi. Elementning nechanchi bo'lishi sanashning olib borilishiga bog'liq. Kombinatorikada ko'rilganidek, a ta elementli to'plam *tartiblanishlari umumiy soni* $a!$ ga teng bo'lgani uchun bu turli usullar bilan sanalganda element tartib nomeri $a!$ marta o'zgarishi mumkin degani. Lekin qanday usul bilan sanalmasin, to'plam elementlari soni o'zgarmasdir. Demak, «nechta» savoliga javob beruvchi natural sonlar *miqdoriy*, «nechanchi» savoliga javob beruvchi natural sonlar *tartib natural sonlar* deyiladi. To'plam oxirgi elementining tartib nomeri bir vaqtda to'plam elementlari sonini bildiradi. Demak, sanoq 19-elementida tugasa, to'plamda 19 ta element bor degan xulosa chiqariladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qo'shishning assotsiativlik qonunini yozing va uning yordamida qanday sonli ifodalarni shakliy almashtirish mumkinligini tushuntiring.
2. $209 + 66 + 91 + 34 + 72$ va $2751 + 3467 + 749 + 1333$ ifodalarning qiymatlarini qulay yo'l bilan topishda qo'llaniladigan barcha hollarni ko'rsating.
3. Ko'paytirishning kommutativlik va assotsiativlik qonunlaridan foydalangan holda $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 5$ ifodaning qiymatini qulay usul bilan hisoblang.
4. $569 \cdot 371 + 170 \cdot 569 + 569 \cdot 459 = 569 \cdot 371 + 569 \cdot 170 + 569 \cdot 459 = 569 \cdot (371 + 170 + 459) = 569 \cdot [(371 + 459) + 170] = 569 \cdot (830 + 170) = 569 \cdot 1000 = 569000$ ni hisoblashda qo'shish va ko'paytirishning qanday qonunlaridan foydalanilganini ko'rsating.
5. $32 + 46 = (30 + 2) + (40 + 6) = (30 + 40) + (2 + 6) = 70 + 8 = 78$ ning yechilishini tushuntiring.
6. $23 \cdot 4 = (20 + 3) \cdot 4 = 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 80 + 12 = 92$ ning yechilishini tushuntiring.
7. $246 + 123 = (200 + 40 + 6) + (100 + 20 + 3) = (200 + 100) + (40 + 20) + (6 + 3) = 300 + 60 + 9 = 369$ ning yechilishini tushuntiring.
8. $426 \cdot 3 = (400 + 20 + 6) \cdot 3 = 400 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 1200 + 60 + 18 = 1272$ ning yechilishini tushuntiring.
9. Turli usullar bilan yeching va tushuntiring: $7 \cdot (6 + 4)$.
10. Qulay usul bilan hisoblang: $57 + (3 + 4)$.
11. Quyidagi tengliklar n ning har qanday natural qiymatida to'g'ri ekanligini ko'rsating:

a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

e) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

3-§. NATURAL SON MIQDORLARNI O'LCHASH NATIJASI SIFATIDA

Inson o'zining amaliy faoliyatida narsalarni sanash bilan bir qatorda har xil miqdorlarni o'lchash ishlarini ham bajaradi. Shu sababli natural sonlarning vujudga kelishi faqat sanash natijasidagina emas, balki o'lchashning ham mahsulidir.

Bu masalani uzunlikni o'lchash misolida ko'rib chiqamiz. Kesmalar to'plamidan biror e kesmani tanlab, uni birlik kesma deb olamiz. So'ngra a kesmani e bilan taqqoslaymiz. Agar a kesma n ta e kesmadan tashkil topgan bo'lsa, u holda $a = e + e + e + ... + e = ne$ kabi yoziladi va $n \in N$ son a kesmaning son qiymati deyiladi.

n soni a kesmaning, m soni b kesmaning e birlik kesma bo'yicha son qiymatlari bo'lsin.

Agar $a = b$ bo'lsa, u holda bu kesmalarning son qiymatlari ham teng bo'ladi: $n = m$ va aksincha.

Agar $a \neq b$ bo'lsa u holda $n \neq m$ bajariladi.

Masalan, $5 \text{ sm} > 3 \text{ sm} \Rightarrow 5 > 3$ va aksincha.

Demak, bundan, natural sonni miqdorlarni o'lchash natijasi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

a kesma b va c kesmalardan tashkil topgan bo'lsin va $b = me$, $c = ne$, $m, n \in N$ bo'lsin.

Bu holda b kesma m ta e birlik kesma yig'indisiga, c kesma n ta e kesma yig'indisiga ajraladi. Bundan a kesma $(m + n)$ ta e kesma yig'indisiga ajralishi ko'rinib turibdi. Demak $a = (m + n)e$.

Shunday qilib, m va n natural sonlarning yig'indisini b va c kesmalardan iborat a kesmaning uzunligi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Natural m va n sonlarning ayirmasini a va b kesmalarning ayirmasi bo'lgan c kesma uzunligining son qiymati kabi qarash mumkin.

Masalan, $a = 9e$ va $a = b + c$. Agar $b = 4e$ bo'lsa, $c = (9 - 4)e = 5e$.

Boshlang'ich sinflarning matematika darsliklarida har xil miqdorlar ustidagi amallarga doir masalalar berilgan bo'lib, ular qo'shish va ayirishning ma'nolarini ochib berishga qaratilgan.

M a s a l a. Oshxonada har birida 3 l dan sharbat quyilgan 5 ta banka bor. Oshxonada hammasi bo'lib necha litr sharbat bor?

$3 \times 5 = 15$ (l) nega?

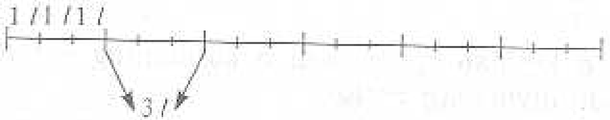
Chunki, $3\,l + 3\,l + 3\,l + 3\,l + 3\,l = (3 + 3 + 3 + 3 + 3) \times 1\,l = (3 \times 5) \times 1\,l = 15 \times 1\,l = 15\,l$.

Masala yechishning boshqacha usuli ham mavjud, ya'ni bunda 2 xil hajm o'lchov birligi ishlatilyapti — 1 banka va 1 l.

Demak, $5 \times 1b = 5 \times (3\,l) = 5 \times (3 \times 1\,l) = (5 \times 3) \times 1\,l = 15 \times 1\,l = 15\,l$.

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish bir o'lchov birligidan ikkinchi — maydaroq o'lchov birligiga o'tish kabi ekan, deb xulosa chiqarish mumkin.

M a s a l a. 15 l sharbatni 3 litrlik bankalardan nechtasiga quyish mumkin? $15\,l = 15 \times (1b : 3) = (15 : 3) \times 1b = 5 \times 1b = 5b$



$a = 15c = 15 \times (c_1 : 3) = (15 : 3)c_1 = 5c_1$.

Demak, natural sonlarni bo'lish bir o'lchov birligidan ikkinchi — yirikroq o'lchov birligiga o'tish kabi ekan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. $a < b$ bo'lgan a va b kesmalarni oling, ularning yig'indisi va ayirmasiga teng kesma yasang.
2. Kesmalar to'plamida «kichik» munosabati tranzitiv ekanini isbotlang.
3. Kesmalarni qo'shish o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunishini isbotlang.
4. Ikki kesmani berilgan uzunlik birligida o'lchab, biri ikkinchisidan 2 marta uzunligi aniqlandi. Uzunlik birligi 10 marta kichraytirilsa, kesmalar nisbati o'zgaradimi?
5. Quyidagi masalalarni yechish amalini tanlang va nima uchunligini tushuntiring: a) Bir o'ram simdan avval 8 m, keyin 5 m qirqib olindi. Necha metr sim qirqib olingan? b) Singil 7 yoshda, akasi undan 3 yosh katta. Akasi necha yosh? d) Stolning balandligi 90 sm, stulning balandligi 45 sm, stol stuldan qancha baland? e) G'oz massasi 7 kg, tovuq undan 4 kg yengil, tovuqning massasini toping. f) Do'konga har biri 10 kg li 4 yashikda olma keltirildi. Do'konga qancha olma keltirilgan? g) O'g'li 8 yoshda, otasi undan 4 marta katta. Otasi necha yoshda? h) Bolalar paltosiga 2 m gazlama ketsa, 10 m gazlamadan nechta bolalar paltosi tikish mumkin? i) Oshxonada bir kunda 80 kg kartoshka va 8 kg sabzi ishlatildi. Kartoshka sabzidan necha marta ko'p ishlatildi?

6. Masalalarni turli usullar bilan yeching va yechish yo'lini asoslang: a) Bir idishda 4 l, ikkinchisida 3 l sut bor edi. Nonushtaga 2 l sut sarflandi. Necha litr sut qoldi? b) 18 metrlik sim o'ramidan avval 7 m, keyin 5 m sim qirqib olindi. O'ramda qancha sim qolgan? d) Bir o'ramda 15 m, ikkinchisida 12 m gazlama bor edi. Hamma gazlamadan har biriga 3 m gazlama sarflab ko'ylaklar bichildi. Nechta ko'ylak bichilgan? e) Stol stuldan 9 marta qimmat. Ikkalasi birga 400 so'm tursa, stulning bahosini toping. Stul stoldan necha so'm arzon?

4-§. SANOQ SISTEMALARI

4.1. Sanoq sistemalari haqida tushuncha. Insoniyat paydo bo'lib, madaniyat darajasi ancha yuqori bo'lgan davrdan boshlab yozuv paydo bo'lgan. Bunda dastlab nima haqida gap yuritilayotgan bo'lsa, shu narsa yoki tushunchaning tasvirini beradigan rasmlardan foydalanilgan. Keyinchalik rasmlar o'rniga maxsus belgilar va nihoyat asta-sekinlik bilan harflar, so'ng raqamlar paydo bo'lgan. Avvaliga sonlar chiziqchalar yoki tugunchalar yordamida belgilangan. So'ng ko'p miqdordagi belgilarni guruhlash ehtiyoji tug'ilgan. Odamlar qo'llaridagi barmoqlari yordamida sanaganlari uchun belgilar 10 talab, ba'zan 20 talab (oyoq va qo'ldagi barmoqlarning soniga ko'ra) guruhlangan va bu guruhlar alohida belgi bilan belgilangan. Shu tariqa har bir xalqning sonlarni yozish uchun o'z sanoq sistemasi vujudga kelgan. *Sanoq sistemasi deb, sonlarni yozish, o'qish va ular ustida amal bajarish usuliga aytiladi.*

4.2. Pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari. Sanoq sistemalari tuzilishiga ko'ra, odatda, ikki turli bo'ladi: pozitsion va nopozitsion.

Berilgan sonning yozuvidagi belgilar egallagan o'rniga qarab turli xil ma'noni anglatsa, bunday sanoq sistemasi *pozitsion sanoq sistemasi* deyiladi.

Masalan, 0, 1, 2, ..., 9 dan iborat raqamlar deb ataluvchi belgilar yordamida yozilgan sonlar o'nlik sanoq sistemasida yozilgan sonlar deyiladi va u pozitsion sanoq sistemasidir. Masalan, a) 1101 — bu yerda o'ngdan birinchi o'rinda turgan bitta raqami bitta birlikni bildirsa, 3-o'rinda turgan 1 raqami bitta yuzlikni, 4-o'rinda turgan 1 raqami bitta minglikni anglatadi.

Odatdagi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlari yordamida sonlarni yozish hindistonliklar tomonidan joriy qilingan.

Shunday sanoq sistemalari ham borki, unda bir xil raqamlar sonning yozuvida qaysi o'rinda joylashishidan qat'i nazar, doim bir xil ma'noni anglatadi. Bunday sanoq sistemalari *nopozitsion sanoq sistemalari* deb yuritiladi. Rim sanoq sistemasi nopozitsion sanoq sistemasiga misol bo'ladi.

I, II, III, V, X, L, C, D, M kabi belgilar yordamida yozish rimliklar tomonidan kiritilgan bo'lib, sonlar I — bir, II — ikki, IV — to'rt, VI — olti, XI — o'n bir, XL — qirq, XC — to'qson va hokazolar ko'rinishda yozilgan.

Masalan, XXXIX — o'ttiz to'qqiz, bunda, X belgi barcha o'rinlarda o'nni, I belgi esa birni anglatadi. Rim sanoq sistemasida kichik qiymat bildiruvchi belgi katta qiymatli belgidan oldin (chapda) yozilsa, sonning qiymati belgilar qiymatlarini ayirib topilgan, agar belgilar qiymatlari chapdan o'ngga kamayib borish tartibida yozilsa, son qiymati belgilarning qiymatlarini qo'shib topilgan. XXIII = 10 + 10 + 1 + 1 + 1 = 23.

Qadimgi Bobil, Misr, Yunoniston va Rusda ham nopozitsion sanoq sistemalari qo'llangan. Grek va slavyan qadimgi sanoq sistemalarida raqamlar alifbo harflari bilan belgilangan, masalan 1 dan 9 gacha sonlar birinchi 9 ta harf bilan, 100, 200, ..., 900 sonlari esa undan keyingi 9 ta harf bilan belgilangan. Son yozuvini so'zdan farqlash uchun tepasiga belgi — «titlo» qo'yilgan.

Nopozitsion sanoq sistemalari katta sonlarni yozish va ular ustida amal bajarish uchun noqulay bo'lgan. Shuning uchun ham matematikada pozitsion sanoq sistemalari muhim o'rin tutadi. Chunki bu sistemada son yozuvida maxsus xona birliklari tushunchasi bor bo'lib, istalgancha katta sonlar bir nechta belgi yordamida yoziladi.

4.3. O'nlik sanoq sistemasida son yozuvi. O'nlik sanoq sistemasida xona birliklari o'n, yuz, ming, o'n ming, yuz ming va hokazolar bo'lib, ular $10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$ ko'rinishda ifodalanadi va unda har bir xonaning bitta birligi ikkinchi xonadan boshlab o'zidan oldingi xonaning o'nta birligiga teng bo'ladi, ya'ni qo'shni xona birliklari nisbati sanoq sistemasining asosi — 10 ga teng. Sonlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan iborat 10 ta belgi yordamida yoziladi va bu belgilar *raqamlar* deb ataladi. Son yozuvida har bir raqam ma'lum xona birliklari sonini bildiradi.

Demak, a natural sonning o'nlik sanoq sistemasidagi *yozuvi* deb quyidagi yig'indiga aytiladi:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

bu yerda: $a_n, \ldots, a_1$ — 0 dan 9 gacha bo'lgan raqamlar. $a_n \neq 0$ deb kelishiladi. Son yozuvini 0 lardan boshlash faqat ma'lum sondagi raqamlardan iborat nomerlashda qo'llanadi, masalan: lotoreya, pasport, avtomobil nomerlarida.

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ son berilgan bo'lsa, uni $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ ko'rinishda yozish mumkin. Son yozuvidagi chiziq uni harfiy ko'paytmadan farqlash uchun chiziladi. Son yozuvidagi o'ngdan birinchi uchta xona birlar sinfini tashkil qiladi va unga birlar, o'nlar, yuzlar deb ataluvchi xona birliklari kiradi. Keyingi uchlik minglar sinfini tashkil qilib, xona birliklari minglar, o'n minglar va yuz minglar deb ataladi. 6-, 7-, 8-raqamlar millionlar sinfini tashkil qilib, xona birliklari millionlar, o'n millionlar va yuz millionlardan iborat bo'ladi. Keyingi uch xona milliardlar, undan keyin billionlar va hokazo sinflardan iborat bo'ladi. Sonni o'qishda chapdan o'ngga qarab har bir raqam yoniga xona birligi nomi qo'shib aytiladi, shuni aytish kerakki, o'zbek tilida o'nliklarni atash uchun maxsus so'zlar: yigirma, o'ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson va to'qson qo'llanadi. O'nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi, atash yoki o'qish uchun esa, masalan, milliongacha bo'lgan sonlar uchun 20 ta atama kerak bo'ladi, bu raqamlar va o'nliklar nomlari, yuz, ming kabi atamalardir. Ko'p xonali sonlarni o'qishda million, milliard, billion kabi sinflar nomlari ishlatiladi.

Bo'sh xona birliklari aytilmaydi, yozuvda 0 lar bilan to'ldiriladi. Masalan:

$412 = 4 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2$ (to'rt yuz o'n ikki).

4.4. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni taqqoslash quyidagicha amalga oshiriladi.

$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 (a_n \neq 0)$ va

$b = b_k 10^k + b_{k-1}10^{k-1} + \ldots + b_1 10 + b_0 (b_k \neq 0)$ sonlar berilgan bo'lsin.

Quyidagi

1) $n < k$;

2) $n = k$, $a_n < b_n$,

$n = k$, $a_n \neq b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_i < b_i$ $(i < n)$ shartlardan biri bajarilsa, $a < b$ bo'ladi.

4.5. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni qo'shish algoritmi. Ma'lumki, har qanday ko'p xonali sonlarni xona birliklari yig'indisi shaklida ifodalash mumkin.

Masalan, 1) 527 = 5 ta yuzlik +2 ta o'nlik +7 ta birlik yoki $527 = 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$;

2) $3728 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 8 \cdot 1$,

$3728 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

Ixtiyoriy natural sonni qaraylik.

$N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0}$ bo'lsa,

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$ bo'ladi. Bunda a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 lar 0 dan 9 gacha bo'lgan raqamlar bo'ladi, faqat a_n — birinchi raqamgina 0 dan farqli bo'ladi.

Endi ko'p xonali sonlarni og'zaki qo'shish qoidasini ko'rib chiqaylik. Bu qo'shish qonunlariga asosan amalga oshiriladi.

Masalan, 8324 + 525 = (8 minglik + 3 yuzlik + 2 o'nlik + 4 birlik) + (5 yuzlik + 2 o'nlik + 5 birlik) guruhlash va o'rin almashtirish xossalariga asosan:

8324 + 525 = 8 minglik + (3 yuzlik + 5 yuzlik) + (2 o'nlik + 2 o'nlik) + (4 birlik + 5 birlik) = 8 minglik + 8 yuzlik + 4 o'nlik + 9 birlik = 8849 bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, *ko'p xonali sonlarni qo'shish uchun ularning mos xona birliklarini qo'shish kerak ekan.*

Demak, sonlarni yozma qo'shish uchun qo'shiluvchilar bir-birining ostiga shunday joylashtiriladiki, bunda bir xil xona birliklari raqamlarining biri ikkinchisining ostida bo'ladi va o'ngdan boshlab mos xona birliklari qo'shilib, shu xona ostiga yozib boriladi. Masalan,

$$\begin{array}{r} 8324 \\ +\ 525 \\ \hline 8849 \end{array}$$

Agar bir xona birliklarini qo'shganda ikki xonali son hosil bo'lsa, u holda o'nliklar ajratilib, uning raqami navbatdagi xonaga qo'shib hisoblanadi. Masalan,

$$\begin{array}{r} 1725 \\ +\ 2118 \\ \hline 3843 \end{array}$$

4.6. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmi. Bir xonali sonlarni qo'shish jadvali va ayirish amalining ta'rifidan foydalangan holda, ayirish jadvalini tuzish mumkin.

1 ni ayirish jadvali.

2 – 1 = 1	6 – 1 = 5
3 – 1 = 2	7 – 1 = 6
4 – 1 = 3	8 – 1 = 7
5 – 1 = 4	9 – 1 = 8

5 ni ayirish jadvali

5 – 5 = 0	8 – 5 = 3
6 – 5 = 1	9 – 5 = 4
7 – 5 = 2 va hokazo.	

Ko'p xonali sonlarni og'zaki ayirish yig'indi va ayirmaning xossalaridan foydalanib amalga oshiriladi.

862 – 241 = (8 yuzlik + 6 o'nlik + 2 birlik) – (2 yuzlik + 4 o'nlik + 1 birlik) = (8 yuzlik – 2 yuzlik) + (6 o'nlik – 4 o'nlik) + (2 birlik – 1 birlik) = 6 yuzlik + 2 o'nlik + 1 birlik = 621.

Yozma ayirishda kamayuvchi va ayiriluvchi ustun tarzda mos xona birliklari bir-birining tagiga yoziladi va tagiga chizilib, uning tagiga mos xonalar ayirmalari natijalari eng kichik xona birliklaridan boshlab yoziladi:

$$\begin{array}{r} 862 \\ -\ 241 \\ \hline 621 \end{array}$$

Ayirishning quyidagi holini ko'raylik:

862 – 245 = (8 yuzlik + 6 o'nlik + 2 birlik) – (2 yuzlik + + 4 o'nlik + 5 birlik) = (8 yuzlik – 2 yuzlik) + (6 o'nlik – – 4 o'nlik) + (2 birlik – 5 birlik) = (8 yuzlik – 2 yuzlik) + + (5 o'nlik + 1 o'nlik – 4 o'nlik) + (2 birlik – 5 birlik) = (8 yuzlik – 2 yuzlik) + (5 o'nlik – 4 o'nlik) + (12 birlik – 5 birlik) = = 6 yuzlik + 1 o'nlik + 7 birlik = 617.

Demak, agar biror xona birligida kamayuvchining raqami ayiriluvchi raqamidan kichik bo'lsa, undan oldingi katta xona birligi raqamidan bir birlik olib, kamayuvchining raqamiga o'n birlik qilib qo'shiladi va ayirish bajariladi.

$$\begin{array}{r} -\,862 \\ 245 \\ \hline 617 \end{array}$$

4.7. O‘nlik sanoq sistemasida ko‘paytmani hisoblash algoritmi. Ko‘paytirish amalini bajarishda quyidagi qoidalar mavjud:

1. Bir xonali sonlarning ko‘paytmasi bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvaliga asosan amalga oshiriladi.

2. Bir va nollar bilan tugagan sonlarga ko‘paytirish uchun ko‘paytuvchida qancha nol bo‘lsa, shuncha nol ko‘paytuvchining o‘ng tomoniga yoziladi. Masalan,

$23 \cdot 100 = 2300,$

$31 \cdot 1000 = 31000.$

3. Bittadan qiymatli raqamlari va undan o‘ngda bir nechta nollar turgan sonlarni ko‘paytirish uchun nollarga e’tibor bermasdan ko‘paytiriladi va chiqqan natijaning o‘ng tomoniga ikkala ko‘paytuvchida birgalikda nechta nol bo‘lsa, shuncha nol yozib qo‘yiladi. Masalan:

a) $200 \cdot 30 = (2 \cdot 100) \cdot (3 \cdot 10) = (2 \cdot 3) \cdot (100 \cdot 10) = 6 \cdot 1000 = 6000$;

b) $400 \cdot 500 = 4 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 100 = 20 \cdot 10000 = 200000$.

4. Ko‘p xonali sonni bir xonali songa ko‘paytirish bir necha qo‘shiluvchilar yig‘indisini berilgan songa ko‘paytirish qoidasiga asosan bajariladi. Masalan,

a) $223 \cdot 5 = (200 + 20 + 3) \cdot 5 = 200 \cdot 5 + 20 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 1000 + 100 + 15 = 1115$;

b) $453 \cdot 7 = (400 + 50 + 3) \cdot 7 = 400 \cdot 7 + 50 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 2800 + 350 + 21 = 3171$;

$$\begin{array}{r} 223 \\ \times\quad 5 \\ \hline 1115 \end{array} \qquad \text{yoki} \qquad \begin{array}{r} 453 \\ \times\quad 7 \\ \hline 3171 \end{array}$$

5. Ko‘p xonali sonlarni ko‘paytirish sonni bir necha sonning yig‘indisiga ko‘paytirish qoidasiga asosan amalga oshiriladi. Masalan,

a) $2024 \cdot 328$,

$328 = 300 + 20 + 8$.

Demak,

$2024 \cdot 328 = 2024 \cdot (300 + 20 + 8) = 2024 \cdot 30 + 2024 \cdot 20 + 2024 \cdot 8 = 663872.$

$$\begin{array}{r} 2024 \\ \times\quad 20 \\ \hline 40480 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2024 \\ \times\quad 8 \\ \hline 16192 \end{array}$$

Endi to‘g‘ridan to‘g‘ri ko‘paytirishni amalga oshirsak,

$$\begin{array}{r} 2024 \\ \times\quad 328 \\ \hline 16192 \\ +\ 4048 \\ 6072 \\ \hline 663872 \end{array}$$

4.8. O‘nlik sanoq sistemasida bo‘lishni bajarish algoritmi. Bir xonali va ikki xonali sonlarni bo‘lish ko‘paytirish jadvaliga asoslangan holda amalga oshiriladi.

Ko‘p xonali sonlarni bir xonali sonlarga bo‘lish yig‘indini songa bo‘lish qoidasiga keltiriladi. Masalan,

$$4792 : 4 = (4000 + 700 + 90 + 2) : 4.$$

Buning uchun 4 mingni 4 ga bo‘lamiz. Bo‘linmada 1 ta minglik hosil bo‘ladi va qoldiq 0 ga teng bo‘ladi. 7 yuzlikni 4 ga bo‘lamiz. Bo‘linmada 1 ta yuzlik va qoldiq 3 yuz hosil bo‘ladi. 3 yuzni o‘nliklarga maydalaymiz, 30 o‘nlik hosil bo‘ladi. Uni 9 o‘nlikka qo‘shamiz. Natijada 39 o‘nlik hosil bo‘ladi. 39 o‘nlikni 4 ga bo‘lsak, bo‘linmada 9 o‘nlik va qoldiq 3 o‘nlik hosil bo‘ladi. 3 o‘nlikni birliklarga maydalasak, 30 birlik hosil bo‘ladi. Unga 2 birlikni qo‘shsak, 32 birlik hosil bo‘ladi. 32 birlikni 4 ga bo‘lsak, bo‘linmada 8 birlik va qoldiqda 0 hosil bo‘ladi. Shunday qilib, bo‘linma 1 minglik, 1 yuzlik, 9 o‘nlik va 8 birlikdan iborat bo‘ladi, ya’ni 1198. Demak, $4792 : 4 = 1198$; yuqoridagi jarayon og‘zaki bo‘lish bo‘lib, uni yozma bo‘lish shakliga keltirsak, ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$
\begin{array}{r|l}
-4792 & 4 \\
\underline{4} & \overline{1198} \\
-07 & \\
\underline{4} & \\
-39 & \\
\underline{36} & \\
-32 & \\
\underline{32} & \\
0 &
\end{array}
$$

Ko'p xonali sonlarni ko'p xonali sonlarga bo'lishda ham yig'indini songa bo'lish xossasidan foydalaniladi. Masalan, 54314 : 13 ni hisoblaylik.

Y e c h i s h. 54314 = 50000 + 4000 + 300 + 10 + 4 = 5 o'n ming + 4 ming + 3 yuz + 1o'n + 4.

Avvalo yuqori xona birligini olib, uning 13 ga bo'linish bo'linmasligini aniqlaymiz, 5 soni 13 ga bo'linmaydi. U holda 54 mingni 13 ga bo'linishini ko'ramiz. Bunda bo'linmada 4 ming va qoldiqda 2 ming hosil bo'ladi. 2 mingni yuzlarga maydalab, unga 3 yuzni qo'shsak, 23 ta yuzlik hosil bo'ladi. Uni 13 ga bo'lsak, bo'linmada 1 yuzlik va qoldiqda esa 10 yuzlik qoladi. 10 yuzlikni o'nliklarga maydalab, 1 ta o'nlikni qo'shsak, 101 ta o'nlik hosil bo'ladi. Uni 13 ga bo'lsak, bo'linmada 7 o'nlik va qoldiqda 10 o'nlik hosil bo'ladi. 10 o'nlikli birliklarga maydalab 4 birlikni qo'shsak, 104 birlik hosil bo'ladi, uni 13 ga bo'lsak, bo'linmada 8 birlik va qoldiqda nol hosil bo'ladi. Demak, bo'linmada 4 minglik, 1 yuzlik, 7 o'nlik va 8 birlik hosil bo'ladi, ya'ni 54314 : 13 = 4178. Bu jarayonni yozma ravishda ifodalaymiz.

$$
\begin{array}{r|l}
-54314 & 13 \\
\underline{52} & \overline{4178} \\
-23 & \\
\underline{13} & \\
-101 & \\
\underline{91} & \\
-104 & \\
\underline{104} & \\
0 &
\end{array}
$$

4.9. O'nlik bo'lmagan pozitsion sanoq sistemalarida son yozuvi. Amaliyotda o'nlik sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemalari ham uchraydi.

Masalan, a) 10 talab emas, balki, 5 talab sanash yordamida beshlik sanoq sistemasi hosil bo'ladi. Bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xona o'zidan oldingi xonaning 5 ta birligiga teng bo'ladi, ya'ni N sonini beshlik sanoq sistemasida yozgan bo'lsak,

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + a_1 5^1 + a_0$$

bo'ladi.

b) Agar 4 talab sanalgan bo'lsa, u holda to'rtlik sanoq sistemasi hosil bo'ladi va bunda ikkinchi xonadan boshlab har bir xonaning bitta birligi o'zidan oldingi xonaning 4 ta birligiga teng bo'ladi. Agar $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ son to'rtlik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa, u $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \ldots + a_1 4^1 + a_0$ bo'ladi.

T a ' r i f. *Ikkinchi xona birligidan boshlab har bir xonasining bitta birligi o'zidan oldingi xonaning bitta birligidan q marta katta bo'lgan sonlar **q lik sanoq sistemasida yozilgan sonlar** deyiladi.*

Agar $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ son q lik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa, $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(q)}}$ ko'rinishda belgilanadi. q — berilgan sanoq sistemaning *asosi* deb yuritiladi. Bunda $q \in N_0$ bo'lib, $1 < q$ bo'ladi. q lik sanoq sistemasida istalgan sonlar 0, 1, 2, 3, ..., $q-1$ raqamlari yordamida yoziladi. $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(q)}}$ sonning o'zi *sistematik son* deyiladi. Har qanday sistematik sonni asos darajalarining yig'indisi ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Masalan, $N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0(q)}}$ bo'lsa,

$$N_{(q)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0\,(q)}} = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_1 q^1 + a_0$$

bo'ladi. Endi ayrim sanoq sistemalari haqida batafsilroq to'xtalib o'taylik.

4.10. Ikkilik sanoq sistemasi. Nazariy masalalarni hal qilishda ikkilik sanoq sistemasidan keng foydalaniladi. Bu sanoq sistemasida istalgan sonni yozish uchun faqat 0 va 1 raqamlaridan foydalaniladi. Agar $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ son ikkilik sanoq sistemasida yozilgan bo'lsa, $N_{(2)} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_{0\,(2)}}$ ko'rinishda belgilanadi va bu sistemadagi har qanday son $N_{(2)}=\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(2)}} = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ikkilik sanoq sistemasida $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$lar 0 yoki 1 qiymatga ega bo'ladi. Faqat $a_n \neq 0$ bo'ladi. Ba'zi sonlarning ikkilik sistemasidagi yozuvini ko'raylik.

Masalan,	bir — 1	besh — 101	to'qqiz — 1001
	ikki — 10	olti — 110	o'n — 1010
	uch — 11	yetti — 111	o'n bir — 1011 va h.k.
	to'rt — 100	sakkiz — 1000	

4.11. Yettilik sanoq sistemasi. Yettilik sanoq sistemasida ikkinchi xonadan boshlab, har bir xonaning bitta birligi o'zidan oldingi xonaning yetti birligidan iborat bo'ladi va u

$$N_{(7)} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_{0(7)}} = a_n \cdot 7^n + a_{n-1} \cdot 7^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 7^1 + a_0$$

ko'rinishda bo'ladi.

q lik sanoq sistemasidagi sonlar $0, 1, 2, 3, \dots, q-1$ raqamlar yordamida yozilishidan yettilik sanoq sistemasida har qanday sonni $0, 1, 2, \dots, 6$ raqamlari yordamida yozish mumkinligi kelib chiqadi.

Masalan,	bir — 1	olti — 6	o'n bir — 14
	ikki — 2	yetti — 10	o'n ikki — 15
	uch — 3	sakkiz — 11	o'n uch — 16
	to'rt — 4	to'qqiz — 12	o'n to'rt — 20
	besh — 5	o'n — 13	o'n besh — 21 va h.k.

4.12. Sistematik sonlar ustida amallar. Barcha sanoq sistemalarida sonlar ustida arifmetik amallar o'nlik sanoq sistemasidagi kabi bajariladi. Buning uchun dastlab berilgan sanoq sistemasi uchun bir xonali sonlarni qo'shish va ko'paytirish jadvali tuziladi. Chunki har bir sanoq sistemasi uchun o'zining maxsus qo'shish va ko'paytirish jadvallari bo'ladi.

1) $q = 5$ bo'lsin. Beshlik sanoq sistemasidagi sonlarni 0, 1, 2, 3, 4 raqamlari yordamida yozish mumkin. Bu sanoq sistemasi uchun qo'shish jadvalini tuzsak:

$1 + 2 = 2$	$2 + 2 = 4$	$3 + 3 = 11$	$4 + 4 = 13$
$1 + 2 = 3$	$2 + 3 = 10$	$3 + 4 = 12$	
$1 + 3 = 4$	$2 + 4 = 11$		
$1 + 4 = 10$			

Masalan, a) $3214_{(5)} + 2313_{(5)} = 11032_{(5)}$ bo'ladi.

$$\begin{array}{r} 3214_{(5)} \\ +\ 2313_{(5)} \\ \hline 11032_{(5)} \end{array}$$

b) $3011_{(5)} - 2124_{(5)} = 322_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 3011_{(5)} \\ -\ 2124 \\ \hline 332_{(5)} \end{array}$$

Endi beshlik sanoq sistemasi uchun ko'paytirish jadvalini tuzaylik:

$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 14$	$4 \cdot 4 = 31$
$1 \cdot 2 = 2$	$2 \cdot 3 = 10$	$3 \cdot 4 = 22$	
$1 \cdot 3 = 3$	$2 \cdot 4 = 13$		
$1 \cdot 4 = 4$			

Masalan, a) $2431_{(5)} \cdot 23_{(5)} = 123013_{(5)}$.

$$\begin{array}{r} 2431_{(5)} \\ \times\ 23_{(5)} \\ \hline 13343 \\ +\ 10412\ \ \\ \hline 123013_{(5)} \end{array}$$

b) $123013_{(5)} : 23_{(5)} = 2431_{(5)}$.

$$\begin{array}{r|l} 123013 & 23 \\ \cline{2-2} -\ 101\ \ \ \ & 2431 \\ \cline{1-1} 220\ \ \ & \\ -\ 202\ \ \ & \\ \cline{1-1} 134\ \ & \\ -\ 124\ \ & \\ \cline{1-1} 23 & \\ -\ 23 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

4.13. Bir sanoq sistemasidan boshqa sanoq sistemasiga o'tish. Aytaylik o'nlik sanoq sistemasida biror a son berilgan bo'lib, boshqa q lik sanoq sistemasiga o'tish talab qilingan bo'lsin. Buning uchun a soni q lik sanoq sistemasiga o'tkazildi, deb faraz qilib, uning bu sistemadagi yozuvini ko'rib chiqamiz.

$a = a_nq^n + a_{n-1}q^{n-1} + ... + a_1q + a_0$ yozuvni shakl almashtiramiz:

$a = (a_nq^{n-1} + a_{n-1}q^{n-2} + ... + a_1)q + a_0$, $a_0 < q$ shart bajarilgani uchun bu yozuvni a ni q ga qoldiqli bo'lish natijasi va a_0 ni qoldiq deb qarash mumkin.

Qavs ichidagi yig'indini shakl almashtirsak,

$$a_nq^{n-1} + a_{n-1}q^{n-2} + ... + a_1 =$$
$$= (a_nq^{n-2} + a_{n-1}q^{n-3} + ... + a_2)q + a_1$$

hosil bo'ladi. Buni esa, $a_1 < q$ shart bajarilgani uchun to'liqsiz bo'linmani q ga qoldiqli bo'lish natijasi deb qarash mumkin. Shu taxlit a sonning q lik sanoq sistemasidagi yozuvining oxirgi a_0 raqami a ni q ga bo'lgandagi qoldiqqa, 2-raqam natijani q ga bo'lgandagi qoldiqqa va h.k. teng ekanligini ko'rish mumkin. Qoldiqli bo'lish to'liqsiz bo'linma 0 ga teng bo'lguncha davom etadi va qoldiqlar oxirgisidan boshlab sonning q lik sanoq sistemasidagi yozuvining raqamlar ketma-ketligini beradi. Buni misollar yordamida ko'rib chiqaylik.

Masalan, 1) $827_{(10)}$ ni oltilik sanoq sistemasida yozaylik.

Eng avval 872 oddiy birlikdan oltilik sanoq sistemasining nechta 2- xona birligi borligini aniqlaymiz. Buning uchun 872 ni 6 ga bo'lamiz,

$$\begin{array}{r|l} -872 & 6 \\ \underline{6} & 145 \text{ (2-xona birligi)} \\ -27 & \\ \underline{24} & \\ -32 & \\ \underline{30} & \\ 2 & \text{(1-xona birligi)} \end{array}$$

Endi 145 ta 2-xona birligida oltilik sanoq sistemasining nechta 3-xona birligi borligini aniqlaymiz:

$$\begin{array}{r|l} -145 & 6 \\ \underline{12} & 24 \text{ (3-xona birligi)} \\ -25 & \\ \underline{24} & \\ 1 & \text{(2-xona birligi)} \end{array}$$

Endi 24 ta 3-xona birliklarida qancha oltilik sanoq sistemasining 4-xona birliklari borligini aniqlaymiz.

$$\begin{array}{r|l} -24 & 6 \\ \underline{24} & 4 \text{ (4-xona birliklari)} \\ 0 & \text{(3-xona birliklari)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -4 & 6 \\ \underline{0} & 0 \text{ (5-xona birligi)} \\ 4 & \text{(4-xona birligi)} \end{array}$$

4 ta 4-xona birliklarida 5-xona birligi yo'q.

Demak, jarayon tugadi. U holda $872_{(10)} = 4012_{(6)}$ bo'ladi.

Bu hisoblash jarayoni qulay bo'lishi uchun quyidagi sxemani tatbiq etish mumkin.

2) $1024_{(10)} = x_{(5)}$

$$\begin{array}{r|l} -1024 & 5 \\ \underline{10} & 204 \;|\; 5 \\ -24 & \underline{20} \;\;\; 40 \;|\; 5 \\ \underline{24} & 4 \;\;\; \underline{40} \;\;\; 8 \;|\; 5 \\ 0 & \;\;\; 0 \;\;\; \underline{5} \;\;\; 1 \;|\; 5 \\ & \;\;\; 3 \;\;\; \underline{0} \;\;\; 0 \\ & \;\;\; 1 \end{array}$$

Demak, $1024_{(10)} = 13040_{(5)}$.

3) $1495_{(10)} = x_{(7)}$.

$$\begin{array}{r|l} -1495 & 7 \\ \underline{14} & 213 \;|\; 7 \\ -9 & \underline{21} \;\;\; 30 \;|\; 7 \\ \underline{7} & 3 \;\;\; \underline{28} \;\;\; 4 \;|\; 7 \\ -25 & \;\;\; 2 \;\;\; \underline{0} \;\;\; 0 \\ \underline{21} & \;\;\; 4 \\ 4 & \end{array}$$

Demak, $1495_{(10)} = 4234_{(7)}$.

Endi berilgan sanoq sistemasidan o'nlik sanoq sistemasiga o'tish usuli bilan tanishib chiqaylik.

Buning uchun yuqorida ko'rsatilgan qoldiqli bo'lish amaliga teskari amalni bajaramiz, ya'ni berilgan sonning yuqori xona birligini asosiga ko'paytirib, chiqqan ko'paytmaga navbatdagi xona birligini qo'shamiz. So'ngra hosil bo'lgan yig'indini asosiga ko'paytirib, chiqqan ko'paytmaga navbatdagi xona birligini qo'shamiz va oxirgi xona birligini qo'shgunga qadar davom ettiramiz. Hosil bo'lgan oxirgi yig'indi berilgan sonning o'nlik sanoq sistemasidagi yozuvi bo'ladi.

Masalan,

1) $425_{(7)} = x_{(10)}$ bo'lsin.

$$\begin{array}{r} \times\, 4 \\ 7 \\ \hline 28 \\ +\, 2 \\ \hline 30 \\ \times\, 7 \\ \hline 210 \\ +\, 5 \\ \hline 215 \end{array}$$

Demak, $425_{(7)} = 215_{(10)}$.

2) $72025_8 = x_{(10)}$.

$7 \cdot 8 + 2 = 58,$

$58 \cdot 8 + 0 = 464,$

$464 \cdot 8 + 2 = 3712 + 2 = 3714,$

$3714 \cdot 8 + 5 = 29712 + 5 = 29715,$

Demak, $72025_{(8)} = 29715_{(10)}$.

Umuman berilgan sanoq sistemasidan boshqa bir sanoq sistemasiga o'tish uchun dastlab o'nlik sanoq sistemasiga o'tiladi. So'ngra o'nlik sanoq sistemasidan talab qilingan sanoq sistemasiga o'tiladi.

Masalan, $2421_{(5)} = x_{(4)}$.

$2 \cdot 5 + 4 = 14.$

$14 \cdot 5 + 2 = 71.$

$71 \cdot 5 + 1 = 356.$

Demak, $2421_{(5)} = 356_{(10)}$.

Endi o'nlik sanoq sistemasidan to'rtlik sanoq sistemasiga o'tamiz:

$$\begin{array}{l} 356 : 4 = 89, \quad 356 - 32\ldots = 356 - 356 = 0 \end{array}$$

$-\begin{array}{r}356\\32\\\hline 36\end{array}\Big|\,4$; $89 : 4$: $\;-\begin{array}{r}8\\ \hline 9\\ 8\\ \hline 1\end{array}$; $22 : 4$: $\;-\begin{array}{r}20\\ \hline 2\end{array}$; $5 : 4$: $\;-\begin{array}{r}4\\ \hline 1\end{array}$; $1 : 4$: $\;-\begin{array}{r}0\\ \hline 1\end{array}$; 0

Demak, $356_{(10)} = 11210_{(4)}$ bo'ladi. Bundan $2421_{(5)} = 11210_{(4)}$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. 0 dan 10 gacha bo'lgan sonlarni:
   a) ikkilik; b) uchlik; d) beshlik; e) yettilik,
   sanoq sistemalarida yozing.
2. Quyidagi sonlarni yettilik sanoq sistemasida yozing:
   a) 972; b) 84; d) 1239.
3. 29; 50; 140 sonlarini uchlik sanoq sistemasida yozing.
4. Quyidagi sonlarni o'nlik sanoq sistemasida yozing:
   a) $1110111_{(2)}$; b) $20102_{(3)}$; d) $443_{(8)}$; e) $341_{(5)}$.
5. Quyidagi sonlarni sakkizlik sanoq sistemasida yozing:
   a) $3421_{(5)}$; b) $12010_{(3)}$; d) $110011_{(2)}$.
6. $4 = 10(x)$, $7 = 11(x)$, $8 = 100(x)$ larda x ni toping.
7. Quyidagilarni hisoblang:
   a) $431_{(6)} + 224_{(5)}$; b) $322_{(5)} - 134_{(3)}$;
   d) $3221_{(5)} + 2342_{(5)}$; e) $4122_{(5)} - 3234_{(5)}$;
   f) $514_{(8)} + 325_{(8)}$; g) $7124_{(8)} - 3437_{(8)}$.
8. Yulduzchalar o'rniga tushirib qoldirilgan raqamlarni qo'ying:
   a) $\begin{array}{r} 21{*}02_{(3)} \\ +\ {*}1212_{(3)} \\ \hline {*}2{*}021_{(3)} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 5{*}57_{(8)} \\ +\ {*}325_{(8)} \\ \hline {*}16{*}4_{(8)} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} {*}123_{(5)} \\ +\ 422{*}_{(5)} \\ \hline {*}34{*}1_{(5)} \end{array}$
9. Amallarni bajaring:
   a) $1312_{(5)} \cdot 4_{(5)}$; b) $4121_{(5)} \cdot 3_{(5)}$;
   d) $1011_{(2)} \cdot 11_{(2)}$; e) $3645_{(8)} \cdot 24_{(8)}$;
   f) $2134_{(5)} : 12_{(5)}$; g) $3133_{(8)} : 42_{(8)}$.

10. Amallarni bajaring va natijalarni o'nlik sanoq sistemasida tekshirib ko'ring:

a) $573_{(8)} \cdot 34_{(8)} + 1763_{(8)}$;

b) $34_{(5)}(4324_{(5)} + 3041_{(5)})$;

d) $4123_{(5)} + 2243_{(5)} - 24_{(5)} \cdot 14_{(5)}$;

e) $(54704_{(8)} - 32567_{(8)}) \cdot 12_{(8)}$;

f) $75504_{(8)} + 3427_{(8)} - 23_{(8)} - 23_{(8)} \cdot 7_{(8)}$.

5-§. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMIDA BO'LINISH MUNOSABATI

5.1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'linish munosabati ta'rifi. Sonlarning bo'linish munosabati nomanfiy butun sonlar to'plamida qaraladi. Nomanfiy butun sonlar to'plami $N_0 = \{0\} \cup N$. Bu to'plamda qo'shish va ko'paytirish amallari har doim bajariladi. Ayirish va bo'lish amallari esa har doim ham bajarilavermaydi. Masalan, N_0 to'plamda 5 va 9 sonlarining ayirmasi va bo'linmasi mavjud emas. $a - b$ ayirma mavjud bo'lishi uchun $a \geq b$ bo'lishi zarur va yetarli. Lekin $a : b$ bo'linma mavjud bo'lishining bunday umumiy qoidasi yo'q, shunga qaramay, $a : b$ bo'lishni bajarmay, a sonning b ga bo'linish yoki bo'linmasligini aniqlash uchun ba'zi alomatlar topilgan.

Bo'linish munosabati ta'rifi: *Agar $a \in N_0$ va $b \in N$ sonlar uchun shunday $c \in N_0$ son topilib, $a = bc$ tenglik bajarilsa, a son b songa **bo'linadi** deyiladi va $a \vdots b$ ko'rinishda yoziladi.*

$$(\forall a \in N_0,\ \forall b \in N)(\exists c \in N_0)(a \vdots b \Leftrightarrow a = bc).$$

$a \vdots b$ ifoda a son b ga bo'linadi, a son b ga karrali yoki b son a ning bo'luvchisi deb o'qiladi.

Masalan: $18 \vdots 3$, chunki $18 = 3 \cdot 6$; $\overline{18 \vdots 5}$, chunki $18 = 5 \cdot c$ shart bajariluvchi $c \in N_0$ son mavjud emas.

«Sonning bo'luvchisi» tushunchasi umuman «bo'luvchi» tushuchasidan farq qiladi. Sonning bo'luvchisi shu sondan katta bo'lmagani uchun bo'luvchilar to'plami cheklidir. Sonning karralilari to'plami cheksizdir.

$\forall a \in N_0$ uchun nx ko'rinishdagi barcha sonlar x ga karrali bo'ladi, bu yerda $n \in N_0$.

5.2. Bo'linish munosabatining xossalari

1°. *Bo'linish munosabati refleksiv, ya'ni istalgan natural son o'ziga bo'linadi.* $(\forall a \in N)(a \vdots a)$, *chunki* $\exists 1 \in N_0, a = a \cdot 1$ *(ta'rifga ko'ra).*

2°. *Istalgan nomanfiy butun son 1 ga bo'linadi* $a \vdots 1 \Leftrightarrow a = 1 \cdot a$.

3°. *Agar $a \vdots b$ va $a > 0$ bo'lsa, $a \geq b$ bo'ladi, ya'ni* $(\forall a, b \in N)$ $(a \vdots b \wedge a > 0 \Rightarrow a \geq b)$.

Isbot. $a \vdots b$ ekanligidan, ta'rifga ko'ra shunday nomanfiy butun c son topiladiki, $a = bc$ bo'ladi:

$$a = bc \Rightarrow a - b = bc - b = b(c-1)(*)$$

$$a = bc \wedge a > 0 \Rightarrow bc > 0 \Rightarrow b > 0 \wedge c > 0 \Rightarrow c \geq 1 \Rightarrow c - 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(c-1) \geq 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} a - b \geq 0 \Rightarrow \underline{a \geq b!}$$

4°. *Bo'linish munosabati antisimmetrik, ya'ni* $(\forall a, b \in N)$ $(a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = b)$.

Isbot. $\left.\begin{array}{l} a \vdots b \Rightarrow a \leq b \\ b \vdots a \Rightarrow b \geq a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b.$

5°. *Bo'linish munosabati tranzitiv, ya'ni* $(\forall a, b, c \in N)$ $(a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c)$.

Isbot. $\left.\begin{array}{l} a \vdots b \overset{\exists k \in N_0}{\Rightarrow} a = bk \\ b \vdots c \overset{\exists p \in N_0}{\Rightarrow} b = cp \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a = bk = c(pk) \\ a = c(pk) \overset{pk \in N_0}{\Rightarrow} a \vdots c \end{array}$ bo'linish ta'rifiga ko'ra.

6°. *0 soni istalgan natural songa bo'linadi, ya'ni* $(\forall a \in N)\, 0 \vdots a \Rightarrow \Rightarrow 0 = a \cdot 0$.

7°. *0 dan farqli istalgan son 0 ga bo'linmaydi* $(\forall a \in N_0 \wedge a \neq 0)$ $\overline{a \vdots 0}$.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik. $a \vdots 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow c \in N_0$, $a = c \cdot 0 = 0$, bu teorema shartiga zid. Demak, $\overline{a \vdots 0}$.

8°. *0 : 0 amali aniqlanmagan.* Chunki, $0 : 0 = a$ bo'lsin, $0 = 0 \cdot a$ bajariladigan a — istalgan natural son bo'lishi mumkin. Algebraik amal uning natijasi mavjud va yagona bo'lsagina aniqlangan bo'ladi. $0 : 0$ natijasi istalgan son bo'lgani uchun bu amal aniqlanmagan deyiladi.

5.3. Nomanfiy butun sonlar to'plamida yig'indi, ayirma va ko'paytmaning bo'linishi haqida teoremalar.

1-teorema. ***Agar a va b sonlar c songa bo'linsa, ularning yig'indisi ham c ga bo'linadi.***

$(\forall a,b,c \in N_0)(a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow (a+b) \vdots c)$.

I s b o t. $\left.\begin{array}{l} a \vdots b \overset{\exists k \in N_0}{\Rightarrow} a = ck \\ b \vdots c \overset{\exists p \in N_0}{\Rightarrow} b = cl \end{array}\right| \Rightarrow a+b = c(k+l) \wedge k+l \in N_0$ bo'lgani uchun $(a+b) \vdots c$ (ta'rifga ko'ra).

Berilgan teoremaga teskari teorema to'g'ri emas.

2-t e o r e m a. ***Agar $a_1, a_2, ..., a_n$ sonlarning har biri c soniga bo'linsa, $a_1 + a_2 + ... + a_n$ yig'indi ham c ga bo'linadi.***

Isboti 1-teoremaga o'xshash.

3-t e o r e m a. ***Agar a va b sonlari c ga bo'linsa va $a \geq b$ bo'lsa, $a - b$ ham c ga bo'linadi.***

$$(\forall a,b,c \in N_0)((a \vdots c, b \vdots c \wedge a \geq b) \Rightarrow (a-b) \vdots c).$$

Isboti 1-teorema isboti kabi.

4-t e o r e m a. ***Agar ko'paytuvchilardan biri biror c songa bo'linsa, ko'paytma ham c ga bo'linadi.***

$$(\forall a,b,c \in N_0)(a \vdots c \Rightarrow ab \vdots c).$$

I s b o t.

$$a \vdots c \Rightarrow a = cq \Rightarrow ab = (cq)b \overset{b}{=} c(qb) \text{ (ta'rifga ko'ra)}$$
$$ab = c(qb) \wedge qb \in N_0 \Rightarrow ab \vdots c.$$

5-t e o r e m a. ***Agar ko'paytuvchilardan biri m ga, ikkinchisi n ga bo'linsa, ko'paytma mn ga bo'linadi.***

$$(\forall a,b,m,n \in N_0)(a \vdots m \wedge b \vdots n) \Rightarrow (ab \vdots mn).$$

Isboti 4-teoremadagi kabi.

6-t e o r e m a. ***Agar yig'indida bitta qo'shiluvchidan tashqari hamma qo'shiluvchilar c ga bo'linsa, yig'indi c ga bo'linmaydi.***

$(\forall a_1, a_2, ..., a_n, b, c \in N_0)(a_1 \vdots c,\ a_2 \vdots c, ... a_n \vdots c, \overline{b \vdots c}) \Rightarrow (\overline{(a_1 + a_2 + ... + a_n + b) \vdots c})$.

I s b o t. $S = a_1 + a_2 + ... + a_n + b$ bo'lsin $S \vdots c$ deb, faraz qilaylik, u holda $b = S - (a_1 + ... + a_n) \vdots c \Rightarrow b \vdots c$ (3-teoremaga ko'ra), bu shartga zid. Demak, $\overline{S \vdots c}$.

5.4. Bo'linish alomatlari. Bo'linish alomati x sonning yozuvchiga qarab, x ni a ga bo'lishni bajarmay, x son a ga bo'linadimi yoki yo'qmi, degan savolga javob beruvchi qoidadir. Yuqorida

aytilganidek, matematikada bunday umumiy qoida yo'q. Lekin ba'zi sonlar uchun bo'linish alomatlari topilgan va biz ularni ko'rib chiqamiz.

1) O'nlik sanoq sistemasida 2 ga bo'linish alomatini keltirib chiqaramiz. Buning uchun x sonning o'nlik sanoq sistemasidagi yozuvini ko'rib chiqamiz:

$$x = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + x_1 \cdot 10 + x_0.$$

10 soni 2 ga bo'lingani uchun $10, 10^2, ..., 10^n$ ko'rinishidagi sonlarning hammasi 2 ga bo'linadi. Bo'linish haqidagi 2- va 4-teoremalarga ko'ra $y = x_n \cdot 10^n + ... + x_1 \cdot 10$ yig'indi 2 ga bo'linadi. x son 2 ga bo'linadigan y son va x_0 yig'indisidan iborat. Demak, x son 2 ga faqat x_0 2 ga bo'linsagina bo'linadi. x_0 sonning oxirgi raqami va y 0, 2, 4, 6, 8 ga teng bo'lsagina 2 ga bo'linadi. Bu raqamlar *juft raqamlar* deyiladi.

<u>2 ga bo'linish alomati</u>. *Son 2 ga uning o'nlik yozuvi juft raqam bilan tugasa va faqat shu holdagina bo'linadi.*

5 ga va 10 ga bo'linish alomatlari ham shu kabi keltirib chiqariladi.

<u>5 ga bo'linish alomati</u>. *Son 5 ga bo'linishi uchun uning yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va yetarli.*

<u>10 ga bo'linish alomati</u>. *Sonning yozuvi 0 raqami bilan tugasa va faqat shu holdagina u 10 ga bo'linadi.*

2) 4 ga va 25 ga bo'linish alomatlari bir-biriga o'xshash. Bu alomatlarni keltirib chiqarish uchun $100 = 4 \cdot 25$ ekanligini hisobga olish yetarli. 100 soni 4 ga ham, 25 ga ham bo'linadi. Demak, $10^n (n \leq 2)$ ko'rinishidagi hamma sonlar 4 ga ham, 25 ga ham bo'linadi. Demak $x = x_n \cdot 10^n + ... + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0$ son yozuvidagi $z = x_n \cdot 10^n + ... + x_2 \cdot 10^2$ qo'shiluvchi 4 ga va 25 ga bo'linadi. x sonning 4 ga va 25 ga bo'linishi $x_1 \cdot 10 + x_0$ yig'indiga bog'liq ekan.

<u>4 ga bo'linish alomati</u>. *x sonning oxirgi ikki raqami hosil qilgan ikki xonali son 4 ga bo'linsa va faqat shu holdagina x son 4 ga bo'linadi.*

<u>25 ga bo'linish alomati</u>. *x son 25 ga bo'linishi uchun uning o'nlik yozuvi 00 yoki 25, yoki 75 bilan tugashi zarur va yetarli.*

3) 3 va 9 ga bo'linish alomatlarini keltirib chiqarish uchun barcha $10^n - 1$ ko'rinishidagi sonlar 9 ga bo'linishini ko'rsatamiz.

$$10^n-1=9\cdot10^{n-1}+...+9\cdot10+9=9\cdot(10^{n-1}+...+10+1)=9\cdot\underbrace{11...1}_{n-1\ ta}.$$

Bu ko'paytma albatta 9 ga va bo'linishning tranzitivligiga asosan 9 : 3 bo'lgani uchun 3 ga ham bo'linadi.

$x=x_n\cdot10^n+...+x_2\cdot10^2+x_1\cdot10+x_0$ soni berilgan bo'lsin. Bu sonni

$$x=x_n\cdot10^n+...+x_2\cdot10^2+x_1\cdot10+x_0=x_n(10^n-1)+x_n+...+$$
$$+...x_2(10^2-1)+x_2+x_1(10-1)+x_1+x_0=[x_n(10^n-1)+$$
$$+...+x_1(10-1)]+x_n+...+x_2+x_1+x_0$$

ko'rinishida yozish mumkin. 10^n-1 ko'rinishidagi barcha sonlar 9 ga va 3 ga bo'lingani uchun $x_n(10^{n+1}-1)+...+x_1(10-1)$ yig'indi ham 9 ga va 3 ga bo'linadi. x son 9 ga yoki 3 ga $x_n+...+x_1$ yig'indi 9 ga yoki 3 ga bo'lingan holda bo'linadi. Bu esa sonning raqamlari yig'indisidir.

3 ga (9 ga) bo'linish alomati. Son 3 ga (9 ga) bo'linishi uchun uning raqamlari yig'indisi 3 ga (9 ga) bo'linishi zarur va yetarli.

5.5. Tub va murakkab sonlar. Har qanday natural a sonning kamida 2 ta bo'luvchisi bor: 1 soni va a sonining o'zi.

1-ta'rif. *Faqat ikkita bo'luvchisi bor natural son* ***tub son*** *deyiladi.*

Masalan, 3, 5, 17 sonlari tub son, chunki ularning 1 va o'zidan boshqa bo'luvchilari yo'q. 12 tub son emas, uning 1 va 12 dan boshqa bo'luvchilari ham bor, ular 2, 3, 4, 6 sonlari.

2-ta'rif. *Ikkitadan ortiq bo'luvchisi bo'lgan natural son* ***murakkab son*** *deyiladi.*

Masalan, 6 — murakkab son, uning to'rtta bo'luvchisi bor. Ular: 1, 2, 3, 6. 0 sonining bo'luvchilari cheksiz ko'p, 1 ning faqat bitta bo'luvchisi bor, shuning uchun 0 va 1 ni tub sonlarga ham, murakkab sonlarga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to'plami 4 ta sinfga ajraladi. $N_0=\{0\}\cup\{1\}\cup$ {tub sonlar} $\cup$ {murakkab sonlar}.

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar p tub soni 1 dan farqli birorta n songa bo'linsa, $p=n$ bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, $p\neq n$ bo'lsa, p sonning 3 ta turli bo'luvchisi bor bo'ladi: 1, p, n. Bu esa shartga zid, demak, p — tub son bo'la olmaydi.

2°. *Agar p va q turli tub sonlar bo'lsa, p tub son q tub songa bo'linmaydi.*

Isbot. p tub son bo'lgani uchun u faqat 1 ga va p ga bo'linadi. $q\neq p$ va $q\neq1$ (q — tub son, 1 tub son emas) bo'lgani uchun $p\,\vdots\,q$.

3°. *Agar a va b natural sonlar ko'paytmasi p tub songa bo'linsa, bu sonlardan biri p ga bo'linadi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\overline{a\,\vdots\,p}$, u holda p — tub son bo'lgani uchun ularning 1 dan boshqa umumiy bo'luvchisi yo'q: $ab\,\vdots\,p\Rightarrow b\,\vdots\,p$.

4°. *1 dan katta istalgan natural sonning hech bo'lmaganda bitta tub bo'luvchisi bor.*

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, 1 dan katta, birorta ham tub bo'luvchisi yo'q natural sonlar mavjud bo'lsin. Bunday sonlar to'plamini A bilan belgilasak, unda eng kichik son mavjud bo'ladi, chunki natural sonlar to'plami quyidan chegaralangan. Eng kichik element a bo'lsin. $a>1$ bo'lgani uchun u yoki tub, yoki murakkab son bo'lishi kerak. a — tub son bo'la olmaydi, chunki $a\in A$ va farazga ko'ra a ning tub bo'luvchisi yo'q. a — murakkab son bo'lsa, u o'zidan va 1 dan farqli biror b natural bo'luvchiga ega bo'lar edi. $b\in A$, chunki $b<a$. Demak, b ning biror p tub bo'luvchisi bor, u holda tranzitivlik xossasiga ko'ra, $a\,\vdots\,b\wedge b\,\vdots\,p\Rightarrow a\,\vdots\,p$, bu farazimizga zid. Demak, 1 dan katta barcha natural sonlar hech bo'lmaganda bitta tub bo'luvchiga ega.

5°. *a murakkab sonning eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{a}$ dan katta emas.*

Isbot. a — murakkab son, p — uning eng kichik tub bo'luvchisi bo'lsin. U holda $a=bp$ bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki $p\le b$, aks holda b ning tub bo'luvchilari p dan kichik bo'lib, a son p dan kichik tub bo'luvchiga ega bo'lib qolar edi. $p\le b$ tengsizlikning ikkala qismini p ga ko'paytirib, $p^2\le pb=a$ ni hosil qilamiz. Bundan $p^2\ge a$ yoki $p\le\sqrt{a}$ ga ega bo'lamiz.

Bu xossadan sonning tub yoki murakkabligini tekshirishda, sonni tub ko'paytuvchilarga ajratishda foydalaniladi. Masalan, 137 sonini olaylik. $121<137<144$, ya'ni $11^2<137<12^2$, bundan $11<\sqrt{137}<12$. Demak, 137 soni 12 dan kichik tub sonlarga bo'linmasa, tub son bo'ladi. 137 soni 2, 3, 5, 7, 11 sonlarining birortasiga ham bo'linmaydi. Demak, 137 — tub son.

5.6. Eratosfen g'alviri. Tub sonlar jadvalini tuzishning qulay usulini eramizdan avvalgi III asrda Aleksandriyada yashagan grek

$p_1p_2 \dots p_n \wedge q_1q_2 \dots q_k$ ham bir xil sonlardan iborat bo'ladi. Bu esa farazimizga zid. Demak, istalgan murakkab son faqat bir xil usul bilan tub sonlar ko'paytmasiga ajratiladi va turli ko'paytmalar mavjud bo'lsa, ular faqat ko'paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bunday ko'paytmada, odatda, sonning tub bo'luvchilari o'sib borish tartibida, bir xil ko'paytuvchilarni esa daraja ko'rinishida yoziladi. Ko'paytmaning bu shakli sonning *kanonik yoyilmasi* deyiladi. a sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ shaklida bo'ladi, bu yerda $p_1 < p_2 < \dots < p_n$.

Masalan, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ bo'lsa, kanonik yoyilmasi $2 \cdot 3 \cdot 5^2$ ko'rinishida, 2000 soni uchun esa, $200 = 2^3 \cdot 5^2$ ko'rinishida bo'ladi.

5.9. Sonlarning EKUB va EKUK. Sonlarning bo'linishi haqida nomanfiy butun sonlar to'plami N_0 da gapirilgan edi. Sonning karralisi va bo'luvchilari haqida natural sonlar to'plamida gapiramiz, chunki 0 ga bo'lish mumkin emas va 0 istalgan sonning karralisidir. Shuning uchun bundan keyin son deganda natural sonni tushunamiz.

3-ta'rif. *Agar a son b songa bo'linsa, a son b songa* ***karrali*** *yoki b ning* ***karralisi*** *deyiladi.* $\forall b$ *ga karrali sonlar to'plami cheksiz va ularning umumiy ko'rinishi nb eng kichigi esa b bo'ladi.*

4-ta'rif. *m son a va b sonlarning karralisi bo'lsa, m ularning* ***umumiy karralisi*** *deyiladi.*

5-ta'rif. *a son b sonlar umumiy karralilarining eng kichigi shu sonlarning* ***eng kichik umumiy karralisi*** *deyiladi* va EKUK $(a; b)$ ko'rinishida belgilanadi (qisqacha $K(a; b)$).

Masalan, 6 sonining karralilari $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, \dots\} = A$, 8 sonining karralilari $\{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\} = B$ bo'lsin. Bu sonlarning umumiy karralilari $\{24, 48, 72, \dots\} = A \cap B$ va ularning eng kichigi $24 = K(6, 8)$ bo'ladi.

1°. *a va b sonlarning istalgan umumiy karralisi ularning eng kichik umumiy karralisiga bo'linadi.*

Isbot. $m : a \wedge m : b \wedge K(a, b) = K$ bo'lsin. $m : k$ ekanligini isbot qilish uchun teskarisini faraz qilamiz.

m soni k ga qoldiqli bo'linsin, ya'ni $m = kq + r\ (r < k)$ bo'lsin. $m : a \wedge k : a \to r = (m - kq) : a$ (bo'linish haqidagi teoremaga ko'ra) shunga o'xshash $(m : b \wedge k : b) \to r = (m - kq) : b$; $(r : a \wedge r : b) \to r = UK(a, b)$. Umumiy karralilarning eng kichigi k bo'lgani uchun a va b sonlarning umumiy karralisi $r > k$ bo'lishi kerak, lekin

farazga ko'ra qoldiq r bo'luvchi k dan kichik bo'ladi. Bu ziddiyatlik $r = 0$ ekanini bildiradi.

2°. Agar *EKUK* $(a, b) = k$ *bo'lsa,* $\forall c \in N$ *uchun EKUK* $(ac, bc) = kc$ *bo'ladi.*

Isbot. $\left.\begin{array}{l} k : a \Rightarrow kc : ac \\ k : b \Rightarrow kc : kb \end{array}\right| \Rightarrow kc = UK(ac, bc).$

kc ning EKUK (ac, bc) ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, EKUK $(ac, bc) = l$ va $l < kc$ bo'lsin. $l : ac \wedge l : bc$ ekanligidan $l : c < kc : c = k$, ya'ni $l : c < k$, shu bilan birga $(l : c) : a \wedge (l : c) : b$, bu esa k ning a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi, degan fikrga zid, chunki $(l : c) = EKUK\ (a, b)$ bo'lib qolyapti. Demak farazimiz noto'g'ri.

6-ta'rif. *Agar a son b songa bo'linsa, b son a sonning* ***bo'luvchisi*** *deyiladi.*

7-ta'rif. *Agar a va b sonlar c songa bo'linsa, c son a va b ning* ***umumiy bo'luvchisi*** *deyiladi.*

8-ta'rif. *a va b sonlar umumiy bo'luvchilarining eng kattasi shu sonlarning* ***eng katta umumiy bo'luvchisi*** *deyiladi va EKUB (a, b) yoki B (a, b) ko'rinishida belgilanadi.*

Masalan, 24 sonining bo'luvchilari to'plami $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, 36 sonining bo'luvchilari to'plami $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, bu sonlarning umumiy bo'luvchilari $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ va ularning eng kattasi 12 ga teng, ya'ni $12 = $ EKUB(24, 36).

Masalan, $a = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ va $b = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11$ bo'lsa, $B(a, b) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ va $K(ab) = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ bo'ladi.

Sonlarning kanonik yoyilmasini topish ularni tub ko'paytuvchilarga ajratish bilan bog'liq edi. Ko'p xonali sonlarning tub ko'paytuvchilarini topish ba'zi hollarda qiyinlik qiladi. Masalan, 8897 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratishda avval 7 ga, so'ng 1271 sonini 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 sonlariga bo'lib ko'ribgina, 31 tub bo'luvchini topamiz. Shunday hollarda EKUB ni tezroq topish imkonini beruvchi boshqa usullardan foydalanish mumkin. Bu usul *Yevklid algoritmi* deyiladi va u quyidagi mulohazalarga asoslanadi.

1. Agar a soni b ga bo'linsa, $B(a, b) = b$ bo'ladi, chunki b ning o'zidan katta bo'luvchisi yo'q.

2. Agar a soni b ga bo'linmasa, $a = bq + r$ va $UB(a, b) = UB(b, r)$ bo'ladi, ya'ni a soni b ga qoldiqli bo'linadi, a va b ning umumiy bo'luvchilari to'plami b va a ni b ga bo'lishdagi qoldiq r ning umumiy bo'luvchilari to'plami bilan ustma-ust tushadi. $d = UB(a, b)$ bo'lsin. $(a \vdots d \wedge b \vdots d) \Rightarrow (r = a - bq) \vdots d$ (ayirmaning bo'linishi haqidagi teoremaga ko'ra) $d = UB(b, r)$. Aksincha, $d = UB(b, r)$ bo'lsin, u holda $a = bq + r$ ham d ga bo'linadi (yig'indining bo'linishi haqidagi teoremaga ko'ra), bundan $d = UB(a, b)$ degan xulosa kelib chiqadi.

3) $a = bq + r \cap a_1 b_1 r \in N$ bo'lsa, $B(a, b) = B(b, r)$ bo'ladi. 2-mulohazaga ko'ra a, b va b, r sonlarining umumiy bo'luvchilari to'plamlari bir xil. Demak, bu to'plamlarning eng katta elementlari ham bir xil bo'ladi.

Ana shu uchta mulohazaga tayanib, a, b sonlarining EKUB ni topishni b va r sonlari EKUBni topish bilan almashtirish mumkin bo'ladi. Agar b soni r ga karrali bo'lsa, $B(b, r) = r$ bo'ladi, $b = rq_1 + r_1$ bo'lsa, $B(b, r) = B(r, r_1)$ va hokazo. Bu jarayon biror qoldiq o'zidan keyingi qoldiqqa qoldiqsiz bo'linguncha davom etadi va shu oxirgi 0 dan farqli qoldiq $B(a, b)$ bo'ladi.

M i s o l. $B(4565, 960)$ ni topish kerak bo'lsin. Ketma-ket bo'lishni ixcham ko'rinishida quyidagicha yozish mumkin:

```
_4565 | 960
 3840 | 4
  _960 | 725=r
   725 | 1
   _725 | 135=r1
    675 | 5
    _135 | 50=r2
     100 | 2
      _50 | 35=r3
       35 | 1
       _35 | 15=r4
        30 | 2
        _15 | 5=B(a, b)
         15 | 3
          0
```

Demak, $B(4565, 960)=5$ ekan.

9-t a ' r i f. *Agar a va b sonlar uchun EKUB $(a, b) = 1$ bo'lsa, bu sonlar **o'zaro tub sonlar** deyiladi.*

Masalan, 12 va 35 sonlari o'zaro tub, chunki $B(12, 35) = 1$.

Sonlarning EKUB va EKUK quyidagi xossalarga ega:

1°. *Agar $c = UK(a, b)$ bo'lsa, $l = \frac{ab}{c} = UK(a, b)$ bo'ladi.*

I s b o t. $l \vdots a \wedge l \vdots b$ ekanligini ko'rsatamiz.

$c = UB(a, b) \Rightarrow a \vdots c \Rightarrow a = a_1 c \wedge b \vdots c \Rightarrow b = b_1 c$;

$$l = \frac{ab}{c} = \frac{a_1 c \cdot b_1 c}{c} = a_1 b_1 c;$$

$$\left.\begin{array}{l} l = a_1 b_1 c = b_1(a_1 c) = b_1 a \vdots a \Rightarrow l \vdots a \\ l = a_1 b_1 c = a_1(b_1 c) = a_1 b \vdots b \Rightarrow l \vdots b \end{array}\right| \Rightarrow l = UK(a, b) \text{ ekan.}$$

2°. *$k = K(a, b)$ bo'lsa, $d = \frac{ab}{k} = B(a, b)$ bo'ladi.*

$$\left.\begin{array}{l} k = K(a, b) \Rightarrow k \vdots b \Rightarrow ak \vdots ab \\ d = \frac{ab}{k} \Rightarrow ab = dk \end{array}\right| \Rightarrow ak \vdots dk \Rightarrow a \vdots d.$$

Xuddi shu yo'l bilan $b \vdots d$ ekanligini ko'rsatsa bo'ladi, demak, $d = UB(a, b)$ ekan. Endi $1 =$ EKUB (a, b) ekanini ko'rsataylik.

Faraz qilaylik, a va b sonlarning d dan katta c umumiy bo'luvchisi bo'lsin. U holda 1-xossaga ko'ra $l = \frac{ab}{c} = UK(a, b)$; $c > d \Rightarrow l = \ = \frac{ab}{c} < \frac{ab}{d} = k \Rightarrow l < k$. Shunday qilib, a va b sonlarning umumiy karralisi ularning eng kichik umumiy karralisidan kichik bo'lib qoldi. Bu qarama-qarshilik farazimiz noto'g'riligini bildiradi. Demak, $d =$ EKUB (a, b). Yuqoridagilardan kelib chiqadigan xulosalar:

1) $B(a, b) \cdot K(a, b) = \frac{ab}{k} \cdot k = ab$, *ya'ni a va b sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bilan eng kichik umumiy karralisining ko'paytmasi shu sonlar ko'paytmasiga teng.*

2) *Agar $B(a, b) = 1$ bo'lsa, $K(a, b) = ab$. Ya'ni o'zaro tub sonlarning eng kichik umumiy karralisi ularning ko'paytmasiga teng.*

3) *a va b sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi ularning istalgan umumiy bo'luvchisiga bo'linadi.*

4) $(B(b, c) = 1 \wedge a \vdots b \wedge a \vdots c) \Rightarrow (a \vdots bc)$, *ya'ni a son o'zaro tub bo'lgan b va c sonlarning har biriga bo'linsa, a soni ularning ko'paytmasi bc ga ham bo'linadi.*

I s b o t. $a \vdots b \wedge a \vdots c \Rightarrow a = UK(b, c) \Rightarrow a \vdots EKUB(b, c)$.

$B(b, c) = 1 \Rightarrow K(b, c) = bc$. Demak, $a \vdots bc$.

3- va 4-xulosalardan murakkab songa bo'linish alomatlari kelib chiqadi. Bunda murakkab son kamida ikkita o'zaro tub sonlar ko'paytmasidan iborat bo'lishi kerak. Bunday alomatlardan bir nechtasini keltiramiz.

1-alomat. x son 6 ga bo'linishi uchun u 2 ga va 3 ga bo'linishi zarur va yetarli.

2-alomat. x son 12 ga bo'linishi uchun u 3 ga va 4 ga bo'linishi zarur va yetarli va hokazo. Bunda $B(2, 3) = 1$, $B(3, 4) = 1$ shartlar bajarilishi kerak.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Bo'linish munosabati ta'rifidan foydalanib: a) 32 soni 8 ga bo'linishini; b) 42 soni 5 ga bo'linmasligini ko'rsating.
2. $n(n+1)$ ko'paytma 2 ga bo'linishini isbotlang.
3. Bo'lishni bajarmay 156, 225, 1630, 5031 sonlarining qaysilari 2 ga, 3 ga, 4 ga, 5 ga yoki 9 ga bo'linishini aniqlang.
4. Amallarni bajarmay, qaysi ifodaning qiymati 5 ga bo'linishini aniqlang: a) $60 + 145$; b) $65 + 141$; d) $321 + 134$; e) $125 \cdot 17$; f) $239 \cdot 18$; g) $345 + 127 + 180 + 465$.
5. a va b sonlari c ga bo'linmasa, ularning yig'indisi va ko'paytmasi ham c ga bo'linmaydi, degan mulohaza to'g'rimi?
6. 8 ga va 125 ga bo'linish alomatini keltirib chiqaring.
7. 18, 45, 75, 36 va yana bir nechta murakkab sonlarga bo'linish alomatlarini ayting va asoslang.
8. Matematik induksiya metodiga ko'ra: a) $(4^n - 1):3$; b) $(6^{2n} - 1):35$; d) $(3^{2n+1} + 1):4$; e) $(5^{2n-1} + 1):6$ bo'linishni isbotlang.
9. 385, 176, 187, 189 sonlari tub yoki murakkabligini aniqlang.
10. Ketma-ket keluvchi 20 ta tub sonni aniqlang.
11. 1440, 17600, 429 sonlarining kanonik yoyilmasini toping.
12. 10! sonining kanonik yoyilmasida 2 soni nechanchi darajada qatnashadi?
13. 20! soni nechta 0 bilan tugaydi?
14. Sonlarning EKUBni va EKUKni toping : a) 144 va 360; b)351 va 28; d) 80, 120, 280; e) 238, 266, 413 va 329.
15. Sonlarning EKUBni Yevklid algoritmi yordamida toping: a)138 va 115; b) 481 va 703; d) 3762 va 4446.
16. $a : b = 11 : 13$ va EKUB $(a, b) = 5$ bo'lsa, a va b sonlarni toping.
17. Kasrni qisqartiring: $\frac{21120}{3072}$.
18. Kasrlarni umumiy maxrajga keltiring: $\frac{111}{21120}$ va $\frac{1234}{30720}$.

III bob. RATSIONAL VA HAQIQIY SONLAR

1-§. MUSBAT RATSIONAL SONLAR TO'PLAMI

1.1. Kesmalarni o'lchash. Matematika aksariyat hollarda asosiy ikki masala — chekli to'plam elementlari sonini hisoblash va kattaliklarni o'lchashda qo'llaniladi. Chekli to'plam elementlarini hisoblashda javob natural son bilan ifodalanadi: to'rtta tarvuz, sakkizta mashina, 3 bo'lak gazmol. Bunda tarvuz massalari har xil bo'lishiga, gazmol bo'laklari turli uzunlikdaligiga, mashinalar har xil yuk ko'tara olishligiga e'tibor berilmaydi. Biroq bu bo'laklardagi gazmollar to'rtta odamga kastum tikishga yetish-yetmasligini aniqlash uchun har bir bo'lak gazmol *uzunligini o'lchash kerak*. Umuman, *kattaliklarni o'lchash*, ya'ni bu kattaliklarni o'lchovning birorta o'lchov birligi — metr, kilogramm va h.k. bilan taqqoslash va taqqoslash natijasini son bilan ifodalash inson faoliyatining turli sohalarida keng uchraydi.

Agar o'lchanayotgan kattalikni o'lchov birligiga «teng» (u yoki bu ma'noda) bir necha qismga (bo'lakka) bo'lish mumkin bo'lsa, o'lchov natijasi (yoki boshqacha, *kattalik o'lchovi*) natural son bilan ifodalanadi. Biroq ko'pincha o'lchov birligi o'lchanayotgan kattalikka butun son marta joylanmaydi. Shuning uchun kattalik o'lchovini ifodalashda natural sonlardan farqli sonlar kiritiladi va son tushunchasi kengaytiriladi.

Biz bu bobda sonlar to'plamining turli xillarini qaraymiz, bunda avval musbat ratsional sonlar to'plami Q, keyin musbat haqiqiy sonlar to'plami R_+, va nihoyat, haqiqiy sonlar to'plami R qaraladi. Bunda sonlarning har bir ko'rinishi uchun qo'shish va ko'paytirish amallari ta'riflanadi, bu ta'riflarda o'lchanayotgan kattaliklar va o'lchov birliklari ustida aniq amallarning qanday bajarilishi ifodalanadi. Bunday bog'liqlikning qandayligini bilish uchun kesmalar uzunliklarini o'lchaymiz.

Agar a kesma $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalar birlashmasidan iborat bo'lsa, a kesma $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalarga *bo'lingan* (yoki shu kesmalardan tuzilgan) deyiladi. Shu bilan birga ulardan hech bir ikkitasi umumiy ichki nuqtaga ega emas (ustma-ust tushmaydi), biroq umumiy uchlarga ega bo'lishi mumkin.

Agar a kesma $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kesmalarga bo'lingan bo'lsa, a kesma bu kesmalar *yig'indisi* deyiladi va bunday yoziladi:

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ yoki } a = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Biror e kesmani olamiz va uni *birlik kesma* yoki *uzunlik o'lchovining birligi* deymiz. Agar a kesmani har biri e *birlik kesmaga* teng bo'lgan, n ta kesmaga bo'lish mumkin bo'lsa, a kesma e kesmaga karrali deymiz va n sonni o'lchov yoki e birlik kesmada a kesma uzunligining qiymati deyiladi. e birlik kesmada kesma o'lchovini $m_e(a)$ bilan belgilaymiz. Agar e birlik kesma belgilangan bo'lsa, $m_e(a)$ o'rniga $m(a)$ deb yozamiz va bu sonni soddagina qilib *kesma uzunligi* (uzunlik qiymati emas) deymiz. Shuni esda tutish zarurki, boshqa o'lchov birligiga o'tganda $m(a)$ son o'zgaradi, kesmaning o'zi esa o'zgarishsiz qoladi.

$m(a) = n$ desak, $a = n \cdot e$ deb yozamiz, uning ma'nosi: a kesma e kesmaga teng n ta kesmadan iborat. Ravshanki, e kesmani unga teng f kesmaga almashtirilsa, o'lchov o'zgarmaydi, $m_e(a) = m_f(a)$ (birorta kesmani ikkita turli chizg'ich bilan o'lchansa va bunda ikkala chizg'ich bir xil darajalangan bo'lsa, bir xil natija olinadi). Aksincha, agar $a = n \cdot e$ va $a = n \cdot f$ bo'lsa, $e = f$ bo'ladi. Demak, agar $a = n \cdot e$ va $a = m \cdot e$ bo'lsa, $n = m$ bo'ladi (bitta kesma o'lchovning berilgan birligida turli o'lchovlarga ega bo'lmaydi).

Har bir e kesmaga e ga karrali bo'lgan kesmalarning Σ' to'plami mos keladi. Bunday kesmalarning har biriga e birlik kesmada uning uzunligi $m(a)$ natural sonni mos keltirdik. Agar a va b kesmalar teng bo'lsa, $m(e) = m(b)$ bo'ladi. Aksincha, agar $m(e) = m(b)$ bo'lsa, a va b kesmalar teng bo'ladi. Shunday qilib, Σ to'plamda «a va b kesmalar teng» va «a va b kesmalar o'lchovlari bir xil» munosabatlar bir xil xossalarga ega. Kesma o'lchovi ikkita muhim xossa — additivlik va multiplikativlik xossalariga ega. Bu xossalarni ko'rib chiqamiz.

a kesmani Σ ga tegishli bo'lgan ikkita b va c kesmaga ajratish mumkin, bunda $m(b) = p$ va $m(c) = q$. Unda butun kesma e birlik kesmaga teng $p + q$ ta qismga ajraladi, shuning uchun uning o'lchovi $p + q$ ga teng, ya'ni $m(a) = m(b) + m(c)$. Shunday qilib, biz kesmalar uzunliklarining quyidagi xossasini isbotladik.

a) Agar $a = b + c$ bo'lsa, a kesma uzunligi uning qismlari uzunliklarining yig'indisiga teng bo'ladi:

$$m(a) = m(b) + m(c), \tag{1}$$

bunda, b va c kesmalar uzunliklari natural sonlar bilan ifodalanadi.

Qo'shish natijasi additio deyilgani uchun uzunlikning bu xossasi *additivlik* xossasi deyiladi.

Uzunlikning ikkinchi xossasi bir o'lchov birligidan ikkinchi o'lchov birligiga o'tish bilan bog'liq. Bilamizki, a kesmani metrlar bilan o'lchaganda p son hosil bo'lsa, o'sha kesmani santimetrlar bilan o'lchanganda $100\,p$ son hosil bo'ladi. Buni $m_2(a) = 100 \cdot m_1(a)$ tenglik ko'rinishida yozish mumkin, bunda $m_1(a)$ orqali a kesma uzunligini metrlar bilan o'lchagandagi qiymati, $m_2(a)$ — santimetrlar bilan o'lchagandagi qiymati, 100 soni berilgan o'lchov birligi yangi o'lchov birliklarining nechtasiga tengligini bildiradi (1 metrda necha santimetr).

Endi uzunlikning bir o'lchov birligidan ikkinchi o'lchov birligiga o'tishning umumiy ko'rinishini qaraymiz. e_1 va e_2 — ikkita o'lchov birligi bo'lsin, bunda e_1 birlik e_2 birlikdan *n marta katta, ya'ni* $e_1 = n \cdot e_2$, bunda n — natural son. a kesmani e_1 o'lchov birligi bilan o'lchaganda pn son hosil bo'lsa (ya'ni, agar $a \cong p \cdot e_1$ bo'lsa), u holda o'sha a kesmani e_2 bilan o'lchaganda pn son hosil bo'ladi (ya'ni, $a = (p \cdot n)e_1$). Haqiqatan, a kesma e_1 kesmaga teng p ta kesmadan iborat, p ta kesmaning har biri e_2 kesmaga teng n ta kesmadan iborat. Demak, a kesmada e_2 kesmaga teng pn ta kesma bor, ya'ni $a = (p \cdot n)e_1$, $a = (p \cdot n)e_1$ va $\xi = ne_2$ bo'lgani uchun $p(ne_2) = (pn)e_2$ tenglikni isbotladik.

e_1 birlik kesma uzunligi bilan o'lchangan a kesma uzunligini $m_1(a)$ orqali, e_2 birlik kesma uzunligi bilan o'lchangan shu kesmani $m_2(a)$ orqali belgilaymiz. U holda $m_1(a) = p$ va $m_2(a) = pn$ bo'ladi, e_2 kesma uzunligi bilan o'lchangan e_1 kesma uzunligi n ga tengligidan $(m_2(e_1) = n)$, $m_2(a) = pn$ tenglikni bunday yozish mumkin:

$$m_2(a) = m_1(a) \cdot m_2(e_1). \tag{2}$$

Shunday qilib, biz kesma uzunligining quyidagi xossasini isbotladik.

b) Agar a kesma e_1 kesmaga karrali, e_1 kesma e_2 kesmaga karrali bo'lsa, a kesma e_2 kesmaga karrali bo'lib, (2) tenglik bajariladi.

(2) tenglikning o'ng qismida $m_1(a)$ va $m_2(e_1)$ lar ko'paytmasi turgani uchun b) xossa o'lchovning *multiplikativligi* deyiladi (lotincha multiplicatio «ko'paytirish» demakdir). Bu xossa natural sonlarni ko'paytirish amali bilan o'lchovning yangi birligiga o'tish orasidagi bog'liqligini ifodalaydi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Kattaliklarni o'lchash natijasida son tushunchasi kengayishi sababini tushuntiring.
2. Yassi shakllar to'plamida «a va b shakllar teng» va «a va b shakllar yuzlari bir xil» munosabatlar ekvivalentmi?
3. Burchaklar to'plamida «a va b burchaklar teng» va «a va b burchaklar kattaliklari teng» munosabatlar ekvivalentmi?
4. Birlik kvadratlarga bo'linadigan shakllar yuzlari uchun additivlik va multiplikativlik xossalarini isbotlang.
5. Burchaklar kattaliklari uchun additivlik va multiplikativlik xossalarini isbotlang.

1.2. Ekvivalent kasrlar. a kesma $3e$ kesmadan uzunroq, lekin $4e$ dan qisqaroq. Shuning uchun birlik kesmada uning uzunligini natural son bilan ifodalab bo'lmaydi. Biroq e kesmani 5 ta teng qismga bo'lib, ulardan birini yangi o'lchov birligi uchun tanlab olsak, a kesma uzunligi natural son 18 bilan ifodalanadi — a kesma 18 ta birlik kesmadan iborat bo'lib, ulardan har biri birlik kesmaning beshdan bir qismini tashkil etadi.

Boshqa birorta kesma uzunligini natural son bilan ifodalash uchun dastlabki birlik kesmani 5 ta qismga emas, aytaylik, 38 ta yoki 217 ta qismga bo'lishga to'g'ri kelardi. Bunda birlik kesmani nechta qismga bo'lsak ham shunday kesmani topish mumkinki, uni o'lchash uchun birlik kesmani undan ham ko'p qismlarga bo'lishga to'g'ri keladi. Shuning uchun boshqacha yo'l tutish mumkin — uzunlikni har doim natural son bilan ifodalashga intilmasdan, bitta birlik kesmani saqlagan holda har gal uni necha qismga bo'layotganimizni ko'rsatish va o'lchanayotgan kesma nechta bunday qismlardan iboratligini ko'rsatish qulaydir. Yuqorida yozilgan holda o'lchash natijasi (18; 5) natural sonlar juftligidan iborat. Ko'pincha, bunday juftlik $\frac{18}{5}$ kasr ko'rinishida yoziladi.

Umumiy ko'rinishdagi kasrlar o'lchashlarda quyidagicha kelib chiqadi. e kesmaning n-ulushi deb shunday f kesmani aytamizki, unda $e = nf$ agar a kesma e birlik kesmaning n-ulushiga teng p ta kesmaning yig'indisi bo'lsa va $m(a) = \frac{p}{n}$ kabi yoziladi. Bunday holda $a = \frac{p}{n}e$ kabi ham yoziladi va a kesma e birlik kesma bilan *o'lchovdosh* deyiladi. Ravshanki, $na = pe$ bo'lgandagina $m(a) = \frac{p}{n}$ bo'ladi.

Bitta a kesmaning uzunligi berilgan e birlik kesmada turli kasr ko'rinishida ifodalanishi mumkin. Haqiqatan, $na = pe$ bo'lsa, har qanday m natural sonda $(nm)a = (pm)e$, shuning uchun a kesmaning uzunligi $\frac{p}{n}$ kasr ko'rinishidagina emas, $\frac{pm}{mn}$ kasr ko'rinishida ham ifodalanadi. Quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. $\frac{p}{n}$ ***va*** $\frac{t}{q}$ ***kasrlar bitta a kesmaning uzunligini ifodalashi uchun*** $pq=nt$ ***tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.***

Haqiqatan, agar $m(a) = \frac{p}{n}$ va $m(a) = \frac{t}{q}$ bo'lsa, $na = pe$ va $qa = te$ bo'ladi. Ammo u holda $(nq)a = (pq)e$ va $(nq)a = (nt)e$, shuning uchun $(pq)e = (nt)e$. Bu tenglik $pq = nt$ bo'lgandagina o'rinli. Demak, $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bitta kesmaning uzunligini ifodalashi uchun $pq = nt$ shartning bajarilishi zarur ekan.

Aksincha, $pq = nt$ va $\frac{p}{n}$ kasr a kesmaning uzunligi, $\frac{t}{q}$ esa b kesmaning uzunligi bo'lsin. U holda $na = pe$ va $qb = te$. Bundan $(nq)a = (pq)e$ va $(nq)b = (nt)e$. $pq = nt$ bo'lgani uchun $(nq)a = (pq)b$ bo'ladi va bu tenglik a va b kesmalar teng bo'lgandagina o'rinli. $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng kesmalar yoki, boshqacha aytganda, bitta kesmaning uzunligini ifodalashi uchun $pq = nt$ shartning bajarilishi yetarlidir.

Kelgusida $pq = nt$ bo'lgan ikki $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrni ekvivalent kasrlar deymiz. Ko'rib turibmizki, **ikki kasr bitta kesmaning uzunligini ifodalasagina bu kasrlar ekvivalent bo'lar ekan.**

1.3. Musbat ratsional sonlar. Kesma uzunligi bitta son bilan ifodalangani uchun ekvivalent kasrlar bitta kasrning turlicha ko'rinishini ifodalaydi. Kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan sonlar *musbat ratsional sonlar* deyiladi. Musbat ratsional sonlar deb ekvivalent kasrlar to'plamiga aytiladi. Shunday qilib, $\frac{1}{2}$ ham, $\frac{2}{4}$ ham, $\frac{3}{6}$ ham musbat ratsional sonlar emas. $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; ...; \frac{n}{2n}; ...\right\}$

kasrlar majmuasi musbat ratsional son bo'ladi. $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ va h. k. — shu sonning yozuvidir.

Kasr ko'rinishida berilgan musbat ratsional sonning yozuvlari orasidan surat va maxraji o'zaro tub bo'lgan yozuvni tanlash mumkin. Bunday kasrlar *qisqarmas kasrlar* deyiladi. Shunday qilib, quyidagi teorema o'rinli.

T e o r e m a. ***Har qanday musbat ratsional son a (ya'ni, har qanday ekvivalent kasrlar to'plamlari) uchun surat va maxrajlari o'zaro tub bo'lgan bitta va faqat bitta kasr topiladi.***

Haqiqatan, a sonni tasvirlovchi (ifodalovchi) bitta $\frac{p}{n}$ kasr mavjud bo'lsin. d son p va n sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lsin. U holda $p = p_1 d$, $n = n_1 d$ bo'lib, p_1 va n_1 lar o'zaro tub. $p_1 n = n_1 p = dp_1 n_1$ bo'lgani uchun $\frac{p}{n}$ va $\frac{p_1}{n_1}$ kasrlar ekvivalent, $\frac{p_1}{n_1}$ kasr esa a sonidir. Demak, $\frac{p_1}{n_1}$ kasr a sonning qisqarmaydigan yozuvidir.

a son boshqa qisqarmaydigan yozuvga ega emasligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $\frac{s}{t}$ kasr ham a son bo'lib, $\frac{p_1}{n_1}$ kasrdan farqli. U holda $sn_1 = p_1 t$; bu tenglikning chap qismi n_1 ga bo'lingani uchun o'ng qismi ham n_1 ga bo'linadi, $t = n_1 q$ q son birdan farqli, aks holda $\frac{p_1}{n_1}$ va $\frac{s}{t}$ lar bir xil bo'lar edi. Shunday qilib, $sn_1 = p_1 n_1 q$ bo'lgani uchun $s = p_1 q$.

Demak, s ham q ga bo'linadi va shuning uchun $\frac{s}{t}$ kasrni q ga qisqartirish mumkin. Shunday qilib, a sonning $\frac{p_1}{n_1}$ kasrdan farqli har qanday yozuvi qisqaruvchidir.

Agar t natural son va $a = te$ bo'lsa, istalgan natural son n uchun $na = (nt)e$. Bu esa a kesma uzunligini faqat natural son t bilan emas, balki $\frac{n}{n}$ ko'rinishdagi kasrlar bilan ham ifodalash mumkinligini ko'rsatadi. Boshqacha aytganda, natural son t

$$\left\{\frac{t}{1}; \frac{2t}{2}; \dots; \frac{nt}{n}; \dots\right\}$$

ko'rinishdagi musbat *ratsional* son bilan bir xil ekan.

1. $\frac{p}{n} \sim \frac{s}{t}$ munosabat simmetriklik, refleksivlik va tranzitivlik xossalariga ega ekanligini isbotlang.
2. Kesmalarning o'lchovdoshlik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega ekanligini isbotlang.
3. $\frac{84}{37}$ kasrga ekvivalent va maxraji 111111 bo'lgan kasrni toping.
4. Kasrlarni qisqartiring: $\frac{37}{999}, \frac{118}{413}, \frac{78}{650}, \frac{1415}{1981}$.

1.4. Musbat ratsional sonlarni qo'shish. Biz bu bandda musbat ratsional sonlarning Q_+ to'plamida qo'shish amalini ta'riflaymiz. Avval quyidagi tasdiqni isbotlaymiz:

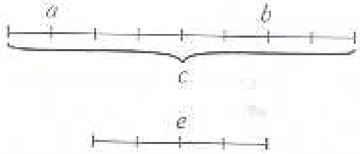
Q_+ dan olingan har qanday ikki a va b sonni bir xil maxrajli kasrlar ko'rinishida ifodalash mumkin.

Haqiqatan, a son $\frac{p}{n}$ kasr, b son $\frac{t}{q}$ kasr ko'rinishida berilgan bo'lsin. U holda bu sonlarni bir xil maxrajli $\frac{pq}{nq}$ va $\frac{nt}{nq}$ kasrlar ko'rinishida yozish mumkin.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarni ularga ekvivalent va bir xil maxrajli kasrlarga almashtirish *bitta maxrajga keltirish* deyiladi. $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning eng kichik umumiy maxraji n va q sonlarning eng kichik umumiy karralisidir. Agar $k = k(n, q)$ bo'lsa, $k = nl = qm$, shuning uchun $\frac{p}{n}$ kasr $\frac{pl}{nl} = \frac{pl}{k}$ kasrga, $\frac{t}{q}$ esa $\frac{tm}{qm} = \frac{tm}{k}$ kasrga ekvivalent.

1-m i s o l. $\frac{4}{35}$ va $\frac{11}{15}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz. Bu kasrlarni $\frac{4 \cdot 15}{35 \cdot 15} = \frac{60}{525}$ va $\frac{11 \cdot 35}{15 \cdot 35} = \frac{385}{525}$ kasrlarga almashtirish mumkin; ko'pincha, 35 va 15 sonlarining eng kichik umumiy karralisi topiladi. $k(35, 15) = 105$, keyin bu kasrlar $\frac{4 \cdot 3}{35 \cdot 3} = \frac{12}{105}$ va $\frac{11 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{77}{105}$ kasrlarga almashtiriladi, bunda $3 = 105 : 35, 7 = 105 : 15$.

Kasrlarni bitta maxrajga keltirish mumkinligi quyidagini anglatadi: agar a va b kesmalar e birlik kesma bilan o'lchovdosh bo'lsa, bunda $a = \frac{p}{n}e$, $b = \frac{t}{q}e$, shunday f kesma mavjudki, unga a, b va e kesmalar karrali bo'ladi. Bunday kesmaga misol qilib e birlik kesmaning nq qismini (ulushini) olish mumkin. Bu f kesma a va b kesmalar *o'lchovining umumiy birligi* deyiladi. Bu kesmani yangi birlik kesma deb olsak, a va b kesmalar uzunliklari pq va tn natural sonlar bilan ifodalanadi. Shundan keyin bu kesmalar



III.1-rasm.

yig'indisi va ayirmasi uzunliklarini topish, bu kesmalardan qaysilari uzunroq ekanini bilish va h. k. lar qiyinlik qilmaydi.

a kesma uzunligi $\frac{p}{n}$ ga, b kesma uzunligi $\frac{t}{n}$ ga teng bo'lib, c bu kesmalar yig'indisi bo'lsin (III.1-rasm).

U holda $na = pe$, $nb = te$, shuning uchun $ne = n(a+b) = na + nb = pe + te = (p+t)e$. Bu esa c kesma uzunligi $\frac{p+t}{n}$ kasr orqali ifodalanishini ko'rsatadi. Demak, additivlik xossasining bajarilishini talab qilish[1] uchun

$$\frac{p}{n}+\frac{t}{n}=\frac{p+t}{n}$$

deb olish kerak ekan. Buni quyidagi ta'rif bo'yicha qabul qilamiz:

a va b musbat ratsional sonlarni qo'shish uchun ularni bir xil maxrajli $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko'rinishiga keltirish kerak; bu sonlar yig'indisi $\frac{p+t}{n}$ kasr ko'rinishiga keltiriladi (ya'ni o'sha maxrajli, surati esa qo'shilayotgan kasrlar suratlarining yig'indisiga teng kasrga keltiriladi).

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlarni ularga ekvivalent kasrlarga almashtirganda $\frac{p+t}{n}$ ham ekvivalent kasrga almashinishini tekshirish oson. Demak, Q dan olingan sonlar yig'indisi ularning kasr ko'rinishida qanday yozilishiga bog'liq emas ekan.

Agar a va b sonlar turli maxrajli kasr ko'rinishida berilgan bo'lsa, avval bu kasrlarni bitta maxrajga keltirib, keyin yuqorida ifodalangan qoidani qo'llash kerak.

2-misol. $\frac{13}{60}$ va $\frac{22}{105}$ kasrlarni qo'shamiz. Eng kichik umumiy maxraj $K(60,105) = 420$. Demak,

$$\frac{13}{60}+\frac{22}{105}=\frac{13\cdot 7}{60\cdot 7}+\frac{22\cdot 4}{105\cdot 4}=\frac{91+88}{420}=\frac{179}{420}.$$

Umuman olganda $\frac{p}{n}+\frac{t}{q}=\frac{pq+tn}{nq}$.

[1] Ya'ni kesmalar yig'indisining uzunligi ular uzunliklarining yig'indisiga tengligini talab qilish.

1.5. Qo'shishning xossalari. Ayirish. Q_+ to'plamda qo'shishning ta'rifidan qo'shish amali kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi: Q_- dan olingan har qanday a, b, c sonlar uchun $a+b=b+a$ va $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a+c=b+c$ dan $a=b$ kelib chiqadi. Undan tashqari Q_+ dan olingan har qanday a va b sonlar uchun $a+b \neq a$.

$a+b=b+a$ ni isbotlaymiz. a va b sonlarni $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasr ko'rinishida yozamiz. U holda, $a+b$ son $\frac{p+t}{n}$, $b+a$ esa $\frac{t+p}{n}$ kasrlar ko'rinishida yoziladi. P va t natural sonlar va N da qo'shish amali kommutativ bo'lgani uchun $p+t=t+p$, bunda $a+b = b+a$ ekanligi kelib chiqadi. Qolgan tasdiqlar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Shuni eslatib o'tamizki, yuqorida ta'riflangan qoida N dan olingan natural sonlarni qo'shishda o'sha natijani beradi.

Haqiqatan, p natural sonni $\frac{p}{1}$ ko'rinishda, t sonni $\frac{t}{1}$ ko'rinishda yozish mumkin, bu sonlar yig'indisi $\frac{p+t}{1}$ ga teng, ya'ni $p+t$ natural songa teng.

Q_+ dagi a son Q_+ dagi b sondan katta bo'lsin, ya'ni Q_+ da shunday c son mavjudki, $a=b+c$ bo'ladi. Bunday holda $a > b$ kabi yoziladi. «>» munosabat nosimmetrik, tranzitiv va chiziqli.

Agar a va b sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ bir xil maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, $p > t$ bo'lgandagina $a > b$ bo'ladi. Agar bu sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, $pq > nt$ bo'lgandagina $a > b$ bo'ladi.

Q_+ to'plamda tartib munosabati ikkita xossaga ega bo'lib, bu xossalar N to'plamdagi natural sonlarning tartib munosabatidagi xossalardan farqlidir. Shuni eslatib o'tamizki, natural sonlar orasida eng kichik son 1 mavjud, undan tashqari natural sonlar to'plami diskret (uzuq) — har bir natural son uchun undan bevosita keyin keladigan son mavjud, Q_+ to'plam xususida boshqacha:

a) *Q_+ to'plamda eng kichik son yo'q;*

b) *Q_- dagi turli ikki a va b sonlar orasida shu to'plamning cheksiz ko'p sonlari mavjud.*

Avval Q_+ da eng kichik sonning yo'qligini isbotlaymiz. Haqiqatan, a shu Q_+ to'plamdan olingan birorta son bo'lsin. Uni $\frac{p}{n}$ kasr ko'rinishida yozish mumkin. U holda $\frac{p}{2n}$ kasr a dan kichik sonning yozuvidir.

Endi istalgan ikkita turli musbat ratsional a va b sonlarni olamiz. U sonlardan biri ikkinchisidan kichik, masalan, $a < b$ bo'lsin. a va b sonlarni $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{n}$ kasrlar bilan ifodalaymiz. $a < b$ bo'lgani uchun $m < p$. $\frac{m+p}{2n}$ kasr ko'rinishidagi c sonni olaylik. $m < p$ bo'lgani uchun $2m < m+p < 2p$, shuning uchun $\frac{2m}{2n} < \frac{m+p}{2n} < \frac{2p}{2n}$, ya'ni $a < c < b$. Shunday qilib, Q_+ dagi istalgan ikki son orasida Q_+ ga tegishli hech bo'lmaganda bitta c son mavjud. Keyin a va c orasida, c va b orasida ikki sonni tanlab olish mumkin. Bu jarayonni davom ettirib, a va b sonlar orasida Q_+ dan cheksiz ko'p turli sonlarni topish mumkin.

Shuni eslatamizki, Q_+ to'plamdagi sonlar orasida eng katta son yo'q;

$\frac{p}{n}$ kasr ko'rinishidagi har qanday a son uchun undan katta son, masalan, $\frac{p+1}{n}$ kasr son mavjud.

Endi Q_+ da ayirish amalini ta'riflaymiz. $a > b$ bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $a = b + c$ bo'ladigan $c \in Q_+$ mavjud. c son bir qiymatli aniqlanganini isbotlaymiz. Haqiqatan, $a = b + d$ bo'lsin, bunda $d \in Q_+$. U holda $b + c = b + d$. Q_+ da qo'shishning qisqaruvchanligidan $c = d$ kelib chiqadi, bu esa c ning bir qiymatli aniqlanganligini bildiradi.

$a = b + c$ bo'ladigan $c \in Q_+$ mavjud bo'lsa, c son a va b sonlarning *ayirmasi* deyiladi va $a - b$ kabi belgilanadi. Ravshanki, agar a va b sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, $a - b$ ayirma $\frac{p-t}{n}$ kasr bilan ifodalanadi. Agar a va b sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan berilgan bo'lsa, $a - b$ ayirma $\frac{pq-nt}{nq}$ kasr ko'rinishida bo'ladi. $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarni $K(n, q)$ maxrajga keltirish mumkin. Masalan,

$$\frac{13}{60} - \frac{22}{105} = \frac{91-88}{420} = \frac{3}{420} = \frac{1}{140}.$$

1. $\frac{p}{n} \sim \frac{p_1}{n_1}$ va $\frac{t}{q} \sim \frac{t_1}{q_1}$ bo'lsa, $\frac{p}{n} + \frac{t}{q} \sim \frac{p_1}{n_1} + \frac{t_1}{q_1}$ bo'lishini isbotlang (ya'ni sonlar yig'indisi bu sonlar qanday kasrlar bilan ifodalanganligiga bog'liq emas).
2. Q_+ da qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchi ekanligini isbotlang.
3. Q_+ dagi quyidagi munosabatlar bajarilishini isbotlang:
   a) $a-(b+c)=a-b-c$ (bunda $a>b+c$);
   b) $a+(b-c)=a+b-c$ (bunda $b > c$);
   d) $a-(b-c)=a-b+c$ (bunda $a > b > c$).
4. $\frac{p}{n} \sim \frac{p_1}{n_1}$ va $\frac{t}{q} \sim \frac{t_1}{q_1}$ bo'lsa, $\frac{p}{n} > \frac{t}{q}$ dan $\frac{p_1}{n_1} > \frac{t_1}{q_1}$ kelib chiqishini isbotlang.
5. $a > b$ bo'lsa, $a + c > b + c$. Isbotlang.
6. $a \neq b$ bo'lsa $a > b$ yoki $b > a$. Isbotlang.
7. Amallarni bajaring:
   a) $10\frac{17}{80} + 2\frac{19}{48} + 1\frac{5}{32} + \frac{1}{96}$; d) $\left(20-19\frac{3}{4}\right)+\left(17\frac{3}{4}-17\right)+\left(2\frac{1}{2}-\frac{17}{24}\right)$;
   b) $\frac{5}{44}+5\frac{1}{3}+4\frac{2}{11}+\frac{5}{66}+\frac{13}{44}$; e) $2\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{10}+\frac{2}{15}\right)$.
8. $\frac{14}{27}, \frac{105}{216}, \frac{531}{1280}$ kasrlarni o'sib borish tartibida yozing.

1.6. Musbat ratsional sonlarni ko'paytirish va bo'lish. a kesma e_1 birlik kesma bilan, e_1 kesma e_2 kesma bilan o'lchovdosh bo'lsin, $a = \frac{p}{n}e_1$, $e_1 = \frac{t}{q}e_2$, ya'ni $na = pe_1$, $qe_1 = te_2$. U holda $(nq)a = (pt)e_1$, $(pq)e_1 = (pt)e_2$, shuning uchun $(nq)a = (pt)e_2$. Bu a kesmaning uzunligi e_2 birlik kesmada $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanishini, ya'ni $m_2(a)$ son $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanishini ko'rsatadi: $m_2(a) = \frac{pt}{nq}$. Shartga ko'ra $m_1(a) = \frac{p}{n}$, $m_2(e_1) = \frac{t}{q}$. Shuning uchun $m_1(a) = m_1(a)m_2(e_1)$ multiplikativlik xossasining bajarilishi talab qilinsa, $\frac{pt}{nq} = \frac{p}{n} \cdot \frac{t}{q}$ tenglik bajarilishi kerak.

Shunday qilib, musbat ratsional sonlarni ko'paytirish qoidasini quydagicha ta'riflash mumkin:

Ta'rif. *$\frac{p}{n}$ kasr bilan ifodalangan a sonning $\frac{t}{q}$ kasr bilan ifodalangan b songa ko'paytmasi deb, $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanuvchi ab songa aytiladi* (odatda, bunday deyiladi: ikki kasrning ko'paytmasi surati ko'paytuvchilar suratlarining ko'paytmasiga, maxraji ular maxrajlarining ko'paytmasiga teng kasrdan iborat). Masalan,

$$\frac{34}{87} \cdot \frac{15}{68} = \frac{34 \cdot 15}{87 \cdot 68} = \frac{5}{58}.$$

a va b sonlarni tasvirlovchi $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar ularga ekvivalent $\frac{p_1}{n_1}$ va $\frac{t_1}{q_1}$ kasrlarga almashtirganda $\frac{pt}{nq}$ kasr o'ziga ekvivalent bo'lgan $\frac{p_1 t_1}{n_1 q_1}$ kasrga almashinishini tekshirish oson. Shuning uchun a va b sonlar ko'paytmasi ularni tasvirlovchi kasrlarning qanday bo'lishiga bog'liq emas ekan.

Q_+ da *ko'paytirish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega*. Q_+ dagi ixtiyoriy a, b, c sonlar uchun $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$ o'rinli, $ac = bc$ dan $a = b$ kelib chiqadi. Bu tasdiqni a, b, c sonlarni ularni tasvirlovchi kasrlar bilan almashtirib, oson isbotlash mumkin. Undan tashqari, Q_+ da *ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv va monoton*: Q_+ dagi ixtiyoriy uchta a, b, c sonlar uchun $a(b + c) = ab + ac$ o'rinli, $a > b$ dan $ac > bc$ kelib chiqadi.

Birinchi ko'paytuvchi m natural son bo'lganda yuqorida berilgan ko'paytirish ta'rifi ko'paytirishning qo'shiluvchilari ikkinchi ko'paytuvchiga teng m ta qo'shiluvchining yig'indisiga teng degan ta'rifi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni $ma = a + a + ... + a$ (m marta). Haqiqatan, m sonni $\frac{m}{1}$ kasr ko'rinishida yozish mumkin, $\frac{m}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mq}{q} = \frac{p}{q} + ... + \frac{p}{q}$ (m marta). Bundan, agar m va n natural sonlar bo'lsa, ularning Q_+ dagi ko'paytmasi ularning N dagi ko'paytmasi bilan bir xil bo'ladi. Undan tashqari, har qanday $a \in Q_+$ uchun $1 \cdot a = a$, ya'ni 1 soni Q_+ da *ko'paytirishga nisbatan neytraldir*.

Q_+ da bo'lish amali ko'paytirishga teskari amal sifatida ta'riflanadi. Ayirish amalidan farqli ravishda bu amal musbat ratsional sonlarning barcha $(a : b)$ juftligi uchun ta'riflangan: *Q_+ dan olingan ixtiyoriy a va b sonlar uchun shunday $c \in Q_+$ son topiladiki, uning uchun $a = bc$ bo'ladi.* Haqiqatan ham, agar a son $\frac{p}{n}$ kasr ko'rinishida, b son $\frac{t}{q}$ kasr ko'rinishida berilgan bo'lsa,

$c = \frac{pq}{nt}$ deb olish yetarlidir. U holda bc son $\frac{p}{n}$ kasrga ekvivalent $\frac{pqt}{ntq}$ kasr ko'rinishida yoziladi, bu esa $bc = a$ dir.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. a) $a : (bc) = a : b : c$; b) $a(b : c) = (a \cdot b) : (a \cdot c)$;
   d) $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$ ni isbotlang.
2. Q_+ da ko'paytirish amali kommutativlik, assotsiativlik, qo'shishga nisbatan distributivlik xossalariga ega hamda qisqaruvchi va monoton bo'ladimi? Isbotlang.
3. Ko'paytmani toping:
   a) $\frac{14}{5} \cdot \frac{5}{8}$; b) $\frac{11}{12} \cdot \frac{8}{9}$; d) $5\frac{4}{9} \cdot 2\frac{5}{98}$; e) $8\frac{12}{31} \cdot 9\frac{7}{9}$.
4. Amallarni bajaring:
   a) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) \cdot 1\frac{9}{91}$;
   b) $\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1\frac{10}{17} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{17}\right) \cdot 5\frac{1}{3}$;
   d) $\left(12\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6}\right) : \left(7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{6}\right)$.

1.7. Musbat ratsional sonlar nazariyasini aksiomatik asoslash. Kesmalar uzunliklarini o'lchash haqidagi masaladan, ya'ni geometrik mulohazalardan kelib chiqqan holda biz musbat ratsional sonlar va ular ustida amallarni ta'rifladik. Biroq musbat ratsional sonlar faqat uzunliklarni o'lchash uchungina emas, balki, massa, yuz, hajm va boshqalarni o'lchash uchun ham kerakdir. Shuning uchun geometrik tushunchalarga asoslanmasdan bunday sonlar nazariyasini asoslash maqsadga muvofiq. Buning uchun bu sonlar qanoatlantiradigan aksiomalar sistemasini ko'rsatish yetarlidir.

Q_+ da qo'shish amallari xossalarini hamda $na = a + ... + a$ (n marta) qo'shishga keltiradigan natural songa ko'paytirish amallari xossalarini aksiomalar sistemasi yordamida ta'riflaymiz. Aksiomalar sistemasi bunday:

1) Q_+ to'plam natural sonlar to'plami N ni o'z ichiga oladi;

2) Q_+ to'plamda Q_+ dan olingan istalgan ikki a va b songa o'sha to'plamdan olingan a va b sonlarning yig'indisi deb ataluvchi $a + b$ sonni mos keltiruvchi qo'shish amali ta'riflanadi. N qism to'plamda qo'shish amali N dagi qo'shish amali bilan bir xil;

3) Q_+ da qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan;

4) har qanday $a \in Q_+$ uchun shunday p va n natural sonlar topiladiki, ular uchun $na = p$ bo'ladi;

5) istalgan natural son p va n uchun shunday $a \in Q_+$ mavjudki, $na = p$ o'rinli.

6) $na = nb$ bo'lsa, $a = b$.

Bu aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz hamda Q_+ to'plamni va unda qo'shish amalini bir qiymatli qilib aniqlashini isbotlash mumkin.

Buning uchun 4) aksiomadan foydalanib, har bir $a \in Q_+$ ga $na = p$ bo'ladigan qilib $(p : n)$ natural sonlarning barcha juftini, ya'ni $\frac{p}{n}$ kasrni mos keltiramiz va shu bilan har bir $a \in Q_+$ songa ekvivalent kasrlar majmuasi mos kelishini ko'rsatamiz. Shundan keyin Q_+ da qo'shish amali kasrlarni qo'shishning oddiy usuliga keltirilishini isbotlaymiz. Bu esa berilgan aksiomalar sistemasi Q_+ ni ta'riflashini va Q_+ da qo'shish amali bir qiymatli ekanligini bildiradi. 1) — 6) aksiomalar sistemasining ziddiyatsiz ekanligi model yasash yo'li bilan isbotlanadi, bu modelda sonlar ekvivalent kasrlar majmuasi sifatida izohlanadi.

Ba'zan aksiomalar sistemasini bermasdan musbat ratsional sonlarni ekvivalent kasrlar majmuasi sifatida ta'riflanadi, shu bilan mos ravishda sonlar ustidagi amallar ta'riflanadi.

2-§. O'NLI KASRLAR

2.1. O'nli kasrlar va ular ustida amallar. Biz kasrlarning kelib chiqishi yangi o'lchov birligiga o'tish bilan bog'liqligini ko'rdik, kasr maxraji esa berilgan o'lchov birligi necha qismga (ulushga) bo'linganligini ko'rsatadi. Hozir dunyoning deyarli barcha mamlakatlarida *birliklarning metrik sistemasi* amalda bo'lib, bu sistemada yangi birliklar boshlang'ich birliklarni yo 10, 100, 1000 va h. k. marta kamaytirish bilan, yoki 10, 100, 1000 va h. k. marta ko'paytirish bilan hosil qilinadi. Masalan, 1 km = 1000 m = = 1000000 mm, 1 t = 1000 kg = 1000000 g va boshqalar. Shuning uchun amaliyotda maxraji 10 ning darajasi bo'lgan, ya'ni $\frac{m}{10^n}$ ko'rinishidagi kasrlar bilan ishlash juda qulaydir, bunda m va n — natural sonlar. Bunday kasrlar *o'nli kasrlar* deyiladi.

Suratning o'nli yozuvi $m = \overline{m_k \dots m_0}$ ko'rinishda, ya'ni $m = m_k \cdot 10^k + \dots + m_0$ ko'rinishda bo'lsin. U holda $n \le k$ da darajalar ustida amallar qoidasiga ko'ra

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + \dots + m_n \cdot 10^n + m_{n-1} 10^{n-1} + \dots + m_0}{10^n} =$$

$$= m_k \cdot 10^{k-n} + \dots + m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + \dots + \frac{m_0}{10^n}.$$

$m_k 10^{k-n} + \dots + m_n$ natural sonni M harfi bilan belgilaymiz, $\frac{m}{10^n}$ kasrni quyidagicha yozish qabul qilingan: $M, m_{n-1} \dots m_0$. Shunday qilib, $\frac{m}{10^n}$ kasrni yozishda $\overline{m}$ sonning o'nli yozuvidagi oxirgi m ta raqam vergul bilan ajratiladi. Masalan, $\frac{571}{10^2} = 5{,}71$. Agar suratda o'nli raqamlar n dan kam bo'lsa, ular oldiga $n + 1$ ta raqam hosil bo'lishi uchun shuncha 0 yoziladi, keyin verguldan keyin n ta raqam ajratiladi. Masalan,

$$\frac{32}{10^4} = \frac{00032}{10^4} = 0{,}0032.$$

m, n, s natural sonlar qanday bo'lmasin, $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{10^s m}{10^{n+s}}$ kasrlar ekvivalent. Haqiqatan, $m \cdot 10^{n+s} = 10^n \cdot 10^s \cdot m$.

$\frac{10^s m}{10^{n+s}}$ kasr yozuvini hosil qilish uchun $m_k \dots m_0 0 \dots 0$ (s ta nol) sonda o'ngdan $n = s$ ta raqamni vergul bilan ajratish kerak. Natijada $M, m_{n-1} \dots m_0$ va $M, m_k \dots m_0 0 \dots 0$ kasrlar ekvivalent.

Shunday qilib, biz quyidagini isbotladik: *agar $M, m_{n-1} \dots m_0$ o'nli kasrga o'ng tomondan istalganicha nol yozilsa ham berilgan kasrga ekvivalent o'nli kasr hosil bo'ladi.* Bu xossa o'nli kasrlarni bitta maxrajga osongina keltirishga yordam beradi. *Agar birinchi kasrda verguldan keyin n ta raqam, ikkinchisida p ta raqam bo'lsa (bunda $n < p$), bu kasrlarni bitta maxrajga keltirish uchun birinchi kasrning o'ng tomoniga $p - n$ ta nol yozish yetarli.* U holda ikkala kasrda verguldan keyingi raqamlar soni bir xil bo'ladi, bu esa ular bitta maxrajga ega ekanligini bildiradi.

Bir xil maxrajli kasrlarni qo'shish va ayirish uchun ular suratlari ustida mos amallar bajariladi. Bu esa o'nli kasrlarni qo'shish va ayirishni natural sonlar ustida amallar bajarishga keltiradi. Masalan,

$$2,54+3,7126=2,5400+3,7126=$$
$$=\frac{25400}{10000}+\frac{37126}{10000}=\frac{62526}{10000}=6,2526.$$

O'nli kasrlarni qo'shish qoidasi umumiy ko'rinishda bunday ifodalanadi:

Ikkita o'nli kasrni qo'shish uchun:

1) bu kasrlarda verguldan keyin o'nli raqamlar sonini tenglashtirish kerak, buning uchun zarur bo'lsa, bu kasrlardan biriga o'ng tomondan bir nechta nol yoziladi;

2) hosil bo'lgan kasrlarda vergullarni tashlab yuborib, hosil bo'lgan natural sonlar qo'shiladi;

3) yig'indida qo'shiluvchilarning har birida nechta raqam ajratilgan bo'lsa, shuncha raqam vergul bilan ajratiladi.

O'nli kasrlarni taqqoslash va ayirish qoidalari xuddi shunday chiqariladi. Masalan, *ikkita o'nli kasrni taqqoslash uchun ularda verguldan keyingi o'nli raqamlar sonini tenglashtirib, vergullar tushirib qoldiriladi va hosil bo'lgan natural sonlar taqqoslanadi:* $4,62517>4,623$, chunki $4,623=4,62300$; $462517>462300$ bo'lgani uchun $4,62517>4,62300$.

Endi o'nli kasrlarni ko'paytirishni qaraymiz. $M, m_{n-1}\ldots m_0$ va $P, p_{q-1}\ldots p_0$ — o'nli kasrlar. Ularni $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{p}{10^q}$ ko'rinishda yozish mumkin. Ammo $\frac{m}{10^n}\cdot\frac{p}{10^q}=\frac{mp}{10^{n+q}}$. Buni maxrajsiz yozish uchun mp natural sonning o'nli yozuvida $n+q$ ta oxirgi raqamni vergul bilan ajratish kerak. Bundan o'nli raqamlarni ko'paytirishning quyidagi qoidasini keltirib chiqaramiz.

Ikkita o'nli kasr ko'paytmasini topish uchun:

1) *bu kasrlar yozuvida vergullarni tashlab yuborish;*

2) *hosil bo'lgan ikkita natural son ko'paytmasini topish;*

3) *birinchi va ikkinchi ko'paytuvchilarda birgalikda nechta raqam vergul bilan ajratilgan bo'lsa, ko'paytmada oxiridan shuncha raqamni vergul bilan ajratish kerak* (ya'ni agar birinchi ko'paytuvchida n ta raqam, ikkinchisida q ta raqam ajratilgan bo'lsa, ko'paytmada nq ta raqam ajratiladi).

O'nli kasrlarni 10^p ko'rinishdagi songa ko'paytirish ancha oson bajariladi. Darajalar ustida amallar qoidalariga ko'ra;

$$\frac{m}{10^n}\cdot10^p=\frac{10^pm}{10^n}=\frac{m}{10^{n-p}}.$$

Shunday qilib, agar berilgan kasrda oxiridan n ta raqam vergul bilan ajratilgan bo'lsa, $\frac{m}{10^n}\cdot10^p$ ni hosil qilish uchun oxiridan $n-p$ ta raqamnigina vergul bilan ajratish kerak, ya'ni vergulni o'ngga p ta raqamga surish kerak. Agar $\frac{m}{10^n}$ kasr yozuvida verguldan keyin p ta dan kam raqam bo'lsa, oldindan o'ng tomonga tegishli nollarni yozish kerak.

O'nli kasrlar tushunchasi bilan protsent (foiz) tushunchasi bir-biriga bog'liqdir. $\frac{1}{100}$ kasr bir protsent deyiladi. U 1% kabi belgilanadi, $p\%$ esa $\frac{p}{100}$ kasrni ifodalaydi. Protsentlar va promillar $\left(\text{ya'ni } p‰=\frac{p}{1000}\right)$ o'nli kasrlardan oldin keltirib chiqarilgan. Qarzlar bo'yicha hisob-kitob qilish uchun 100 ta pul birligi hisobida kapitalning o'sishi aniqlangan. Bu jarayon protsent soni deb atalgan (pro vntuni — yuzga). Hozirgi vaqtda protsent tushunchasi turli sohalarda o'z tatbiqini topgan (iqtisodda, kimyoda, hisob-kitobda va h.k.).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. O'li kasrlar ustida bajariladigan amallar qanday xossalarga ega bo'ladi?
2. Amallarni bajaring:

a) $(1,6:1,28)+(1,5:0,24)+(1,1:0,08)$;

b) $(1,14+0,76):(1,14-0,76)+0,54:0,012$;

d) $1:2,5+1,44:3,6+3,6:1,44\cdot(0,1-0,02)$;

e) $(0,45:0,9+0,9:0,45+1,5:3+0,242:0,11):(2,3-1,26)$.

2.2. Oddiy kasrlarni o'nli kasrlarga almashtirish.

$\frac{8}{25}$ kasr $\frac{32}{100}$ kasrga ekvivalent va shuning uchun uni 0,32 ko'rinishda yozish mumkin. $\frac{m}{n}$ kasr qanday holatlarda o'nli kasrga ekvivalent bo'ladi?

$\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr o'nli kasrga ekvivalent bo'lishi uchun $\frac{m}{n}$ kasr maxraji n ning tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga faqat 2 va 5 tub sonlarigina kirishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan, n ni tub ko'paytuvchilarga ajratilganda u $n = 2^r 5^s$ ko'rinishda bo'lsin va $r \geq s$ bo'lsin. U holda $\frac{m}{n}$ kasrning surat va maxrajini 5^{r-s} ga ko'paytirib,

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^r 5^s} \sim \frac{5^{r-s} m}{2^r 5^s 5^{r-s}} = \frac{5^{r-s} m}{2^r 5^r}$$

ni hosil qilamiz. Ammo $2^r \cdot 5^r = 10^r$, shuning uchun

$$\frac{m}{n} \sim \frac{5^{r-s} m}{10^r}.$$

Demak, $\frac{m}{n}$ kasr o'nli kasrga ekvivalent ekan.

Aksincha, qisqarmas $\frac{m}{n}$ kasr $\frac{a}{10^r}$ kasrga ekvivalent bo'lsin, ya'ni $10^r m = an$. Agar n ning tub ko'paytuvchilarga yoyilmasida 2 va 5 dan farqli p tub son bo'lsa, $10^r m$ songa bo'linar edi. Ammo 10^r ning tub ko'paytuvchilarga yoyilmasida 2 va 5 sonlari bo'lgani uchun 10^r son p songa bo'linmaydi. U holda m son p ga bo'linar va $\frac{m}{n}$ kasrni shartga zid ravishda p ga qisqartirish mumkin bo'lar edi. Hosil bo'lgan ziddiyatlik n ni 2 va 5 dan farqli tub ko'paytuvchilarga ajratish mumkin emasligini ko'rsatadi.

1-misol. $250 = 2 \cdot 5^3$ bo'lgani uchun $\frac{191}{250}$ kasr $\frac{191}{250} = \frac{2^2 \cdot 191}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{764}{1000} = 0,764$ o'nli kasrga ekvivalent ekan.

2-misol. $\frac{9}{14}$ kasr qisqarmas, $14 = 2 \cdot 7$. Maxraj yoyilmasiga 2 va 5 dan farqli 7 ko'paytuvchi kirgani uchun bu kasrni o'nli kasrga aylantirib bo'lmaydi.

3-misol. $\frac{195}{260}$ kasr maxrajining yoyilmasiga 2 va 5 dan farqli 13 kiradi. Ammo bu kasr qisqaruvchi. Uni 65 ga qisqartirib, $\frac{3}{4}$ kasrni hosil qilamiz, bu kasrni $\frac{3}{4} = 0,75$ o'nli kasrga aylantirish mumkin.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi kasrlardan qaysilarini chekli o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin:
   a) $\frac{17}{640}$; b) $\frac{42}{875}$; d) $\frac{52}{75}$; e) $\frac{385}{308}$.

2. Quyidagi kasrlarni chekli o'nli kasrlarga aylantiring.
   a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{19}{40}$; d) $\frac{5}{48}$; e) $\frac{11}{13}$.
3. Quyidagi o'nli kasrlarni qisqarmas oddiy kasr ko'rinishida yozing:
   a) 0,125; b) 0,625; d) 0,1375; e) 0,2454.

2.3. Cheksiz davriy o'nli kasrlar. $\frac{3}{4}$ kasrni chekli o'nli kasrga aylantirib bo'lmaydi. Ammo 1 ni 3 ga bo'lib, $0,3 < \frac{1}{3} < 0,4$ ni hosil qilamiz. Yana davom ettirib, $0,33 < \frac{1}{3} < 0,34$, $0,333 < \frac{1}{3} < 0,334$ va h. k. larni topamiz. Umuman, har qanday n uchun

$$\underbrace{0,33\ldots3}_{n} < \frac{1}{3} < \underbrace{0,33\ldots4}_{n}$$

tengsizliklarning cheksiz to'plamini yozmaslik uchun $\frac{1}{3}$ kasrga cheksiz o'nli kasr 0,333...3 mos keladi deyiladi. Bu esa, agar cheksiz kasrda birorta raqamdan boshlab hamma raqamlar tushirib qoldirilsa, $\frac{1}{3}$ dan kichik son hosil bo'lishini, agar hosil bo'lgan sonda oxirgi raqamni bittaga orttirilsa, $\frac{1}{3}$ dan katta son hosil bo'lishini anglatadi.

Chekli o'nli kasrlarni cheksiz kasrlar ko'rinishida ham yozish mumkin, bunda faqat ularning o'ng tomoniga nollar ketma-ketligi yoziladi: 0,25 = 0,25000...0... Bunda birorta raqamdan boshlab hamma raqamlar tushirib qoldirilsa, 0,25 dan katta bo'lmagan son hosil bo'ladi (masalan, verguldan keyin faqat bitta raqam qoldirilsa, 0,25 dan kichik 0,2 son hosil bo'ladi, agar verguldan keyin uchta raqam qoldirilsa, 0,25 ga teng 0,250 hosil bo'ladi). Agar tashlab yuborilgandan keyin qolgan oxirgi raqamni bittaga orttirilsa, 0,25 dan katta son hosil bo'ladi (masalan, 0,3 yoki 0,251).

Ko'rib turibmizki, har bir musbat ratsional sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin ekan. Bunda hosil bo'lgan o'nli kasrlar davriy bo'ladi. Bu esa biror joydan boshlab bitta raqamning yoki raqamlar guruhining cheksiz marta takrorlanishi demakdir. Masalan, $\frac{3}{11}$ soni 0,272727..27.. cheksiz o'nli kasr ko'rinishida, $\frac{8}{55}$ son 0,1454545.. 45.. cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalanadi.

Qisqalik uchun bu kasrlardan birinchisi $0,(27)$ ko'rinishida, ikkinchisi $0,1(45)$ ko'rinishida yoziladi. Qavs ichiga takrorlanuvchi sonlar guruhi yoziladi va u *kasrning davri* deyiladi. Ammo $0,(27)$ o'rniga $0,2(72)$ deb ham yozish mumkin, bunday yozuv uzunroqdir.

Davrning paydo bo'lishi sababi quyidagichadir: $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr ko'rinishidagi a sonni cheksiz o'nli kasrga aylantirish kerak bo'lsin. Buning uchun m natural sonni n natural songa bo'lishi kerak. Bunda n dan kichik qoldiqlar, ya'ni $0, 1, ..., n-1$ sonlar hosil bo'ladi. Agar qoldiqlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lsa, bo'lish natijasida chekli o'nli kasr hosil bo'ladi (yoki nollar ketma-ketligi bilan tugaydigan cheksiz o'nli kasr hosil bo'ladi). Agar qoldiqlar noldan farqli bo'lsa, bo'lish hech tugamaydi, ammo turli qoldiqlar miqdori chekli n ta bo'lgani uchun biror qadamdan boshlab birorta qoldiq takrorlanadi va shundan keyin bo'linmada raqamlar takrorlana boshlaydi.

Agar qisqarmas kasr maxrajini tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga almashtirganda, bu yoyilmasida 2 yoki 5 qatnashmasa, u holda sof davriy kasr, ya'ni davri verguldan keyin darhol boshlanadigan kasr hosil bo'ladi. Agar maxraj yoyilmasiga 2 yoki 5 ko'paytuvchi kirsa, davriy kasr *aralash davriy kasr* deyiladi — vergul bilan davr boshining orasida bir necha raqam bo'ladi (2 va 5 ko'paytuvchilar daraja ko'rsatkichining eng kattasi necha bo'lsa, shuncha raqam bo'ladi). Masalan, agar $n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ bo'lsa, vergul bilan davr boshining orasida uchta raqam bo'ladi.

Quyida biz har bir cheksiz o'nli kasrga biror kasr son mos kelishini ko'rsatamiz, bunda cheksiz o'nli kasrlar ustida amallar chekli o'nli kasrlarda bajarilgandek bajariladi. Bundan foydalanib, har qanday davriy (sof yoki aralash) kasrni $\frac{m}{n}$ kasr ko'rinishida yozish mumkinligini ko'rsatamiz.

$0,(24)$, ya'ni $0,242424 \ldots 24 \ldots$ davriy kasr berilgan bo'lsin. Unga mos sonni a bilan belgilaymiz. Agar vergulni o'ng tomon ikki raqamga sursak, a son 100 marta kattalashadi va quyidagini hosil qilamiz: $100a = 24,242424 \ldots 24 \ldots$, ya'ni $100a = 24 + 0,242424 \ldots 24 \ldots = 24 + a$. $100a = 24 + a$ tenglamani yechamiz: $a = \frac{24}{99}$, ya'ni $a = \frac{8}{33}$. 24 soni bir vaqtning o'zida $\frac{24}{99}$ kasrning surati va $0,(24)$ kasrning davridir.

Har qanday sof davriy o'nli kasr ham oddiy kasrga xuddi shunday almashtiriladi.

Sof davriy o'nli kasrni oddiy kasrga almashtirganda surati davrga teng, maxraji esa kasr davrida nechta raqam bo'lsa, shuncha to'qqizdan iborat kasr hosil bo'ladi:

$$0,35 = \frac{35}{99}; \quad 0,(489) = \frac{489}{999} = \frac{163}{333} = \frac{163}{333} \text{ va h.k.}$$

Aralash davriy o'nli kasrni oddiy kasrga almashtirish qoidasi shunga o'xshash keltirib chiqariladi.

Agar bu kasrning butun qismi nolga teng bo'lsa, surati ikkinchi davrgacha bo'lgan raqamlar bilan yozilgan sondan birinchi davrgacha bo'lgan raqamlar bilan yozilgan sonning ayirmasiga teng maxraji davrda nechta raqam bo'lsa, shuncha to'qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo'lsa, shuncha nollardan iborat kasr hosil bo'ladi. Masalan,

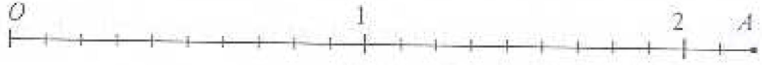
$$0,7(61) = \frac{761-7}{990} = \frac{754}{990} = \frac{377}{495}.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Oddiy kasrlarni cheksiz o'nli kasrlarga aylantiring:
   a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{4}{35}$; d) $\frac{17}{24}$; e) $\frac{36}{77}$.
2. Davriy o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantiring:
   a) $0,(31)$; b) $2,(75)$; d) $0,34(9)$; e) $0,27(15)$.
3. Hisoblang:
   $0,5(6)+0,(8)$; $3,2(62)-1,(15)$; $(0,(6)-,(45)) \cdot 0,(33)$.

3-§. MUSBAT HAQIQIY SONLAR

3.1. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalar. Musbat ratsional sonlar yordamida biror kattalikning o'lchash natijasini ixtiyoriy aniqlik darajasida ifodalash mumkin. Masalan, OA kesma uzunligini o'lchash va bu kesma uzunligini birlik kesmaning $\frac{1}{10^n}$ ulushidan oshib ketmaydigan xatolikda qiymatini topish talab qilinsin. Bunday ish qilamiz. OA kesmada O nuqtadan A nuqta yo'nalishida uzunligi $\frac{1}{10^n}$ kasrga teng uzunlikda birin-ketin kesmalar qo'yamiz. A nuqta bu kesmalardan biriga to'g'ri keladi (III.2-rasmga qarang, unda $n = 1$). Demak, quyidagi xossaga ega bo'lgan nomanfiy son m mavjud ekan: uzunligi $\frac{m}{10^n}$ ga teng bo'lgan kesma OA kesmadan kichik, uzunligi $\frac{m+1}{10^n}$ ga teng bo'lgan kesma OA kesmadan katta ekan.



III.2-rasm.

Shunday qilib, OA kesma uzunligi $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ sonlar orasida bo'lishi kerak ekan. Shunga o'xshash, istalgan jism og'irligini $\frac{1}{10^n}e$ g aniqligida o'lchash mumkin. Biroq $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ ratsional sonlar bo'lgani uchun OA kesma uzunligini kami bilan va ortig'i bilan taqribiy ifodalaydi, ammo bu kesma uzunligi nimaga tengligi haqidagi savolga aniq javob bermaydi. Gap shundaki, faqat ratsional sonlar bilan cheklangan holda bu savolga javob berish ko'p hollarda mumkin bo'lmaydi — e birlik kesma bilan o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar, ya'ni uzunligini faqat ratsional sonlar bilan ifodalab bo'lmaydigan kesmalar mavjud. Bunday kesmalarning mavjudligi quyidagi tasdiqdan kelib chiqadi:

— kvadratning diagonali uning tomoni bilan o'lchovdosh emas.

Haqiqatan, kvadrat tomonining uzunligi 1 ga teng bo'lsin. Faraz qilamiz, $ABCD$ kvadratning AC diagonali uning tomoni bilan o'lchovdosh va uning uzunligi $\frac{p}{q}$ qisqarmas kasr bilan ifodalanadi. U holda Pifagor teoremasiga ko'ra $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, ya'ni $1^2 + 1^2 = \frac{p^2}{q^2}$ bo'lar edi. Bundan $p^2 = 2q^2$. Demak, p^2 — juft son, u holda p juft bo'ladi (toq sonning kvadrati juft bo'lmaydi). Shunday qilib, $p = 2p_1$; $p^2 = 2q^2$ tenglikda p ni $2Fp_1$ ga almashtirib, $4p_1^2 = 2q^2$, ya'ni $2p_1^2 = q^2$ ni hosil qilamiz. Bundan q^2 ning juftligi, demak, q ning juftligi kelib chiqadi. Shunday qilib, p va q sonlar juft, shuning uchun $\frac{p}{q}$ ni 2 ga qisqartirish mumkin, bu esa

uning qisqarmas ekanligiga zid. Bu ziddiyatlik, agar kvadrat tomoni uzunlik birligi qilib tanlab olinsa, kvadrat diagonali uzunligini ratsional son bilan ifodalab bo'lmasligini, ya'ni bu diagonal kvadrat tomoni bilan o'lchovdosh emasligini ko'rsatadi.

Har qanday kesma uzunligini son bilan ifodalash uchun Q_+ musbat ratsional sonlar to'plamini yangi sonlar bilan to'ldirib, *kengaytirish* kerak. Bunda hosil bo'lgan sonlar *musbat haqiqiy sonlar* deyiladi, bunday sonlar to'plami R_+ bilan belgilanadi. Demak, har bir musbat ratsional son R_+ ga tegishli bo'lishi kerak, ya'ni $Q_+ \subset R_+$ bajarilishi kerak. Undan tashqari, R_+ da qo'shish va ko'paytirish amallarini shunday ta'riflash kerakki, ular Q_+ da ratsional sonlar uchun berilgan ta'rif bilan bir xil bo'lishi va kesmalar o'lchovi sonlar to'plamini kengaytirgandan keyin ham additivlik va multiplikativlik xossalariga ega bo'lishi kerak.

3.2. Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o'nli kasrlar. Biz bu bandda istalgan kesma o'lchovining natijasi cheksiz o'nli kasr (umuman aytganda, davriy bo'lmagan) ko'rinishida yozilishi mumkinligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, e birlik kesma tanlangan va birorta a kesma berilgan bo'lsin. U holda a kesma yo e dan kichik, yoki shunday n natural son topiladiki, unda $n \cdot e \le a < (n+1)e$. Bu n natural son, agar a kesma e dan kichik bo'lsa, 0 son a kesma uzunligining *butun qismi* deyiladi.

Agar $a = n \cdot e$ bo'lsa, a kesma uzunligi n natural son bilan ifodalanadi. Aks holda $a = ne + a_1$, bunda $a_1 < e$. U holda 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi shunday n_1 son topiladiki, $\frac{n_1}{10} \cdot e \le a_1 < \frac{n_1+1}{10} \cdot e$ bo'ladi. Shuning uchun $\left(n + \frac{n_1}{10}\right)e \le n \cdot e + a_1 < \left(n + \frac{n_1+1}{10}\right)e$. Bu esa $(n, n_1)e \le a \le (n, n_1 + 0{,}1)e$, demakdir (bunda n, n_1 — o'nli kasr, masalan, 7,6).

O'lchashning bu jarayonini davom ettirib, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi $n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ sonlarni hosil qilamiz hamda har qanday $1 < n$ uchun a kesma $(n, n_1 n_2 \ldots n_k)e$ kesmadan kichik bo'lmagan, ammo $\left(n, n_1 \ldots n_k + \frac{1}{10^k}\right)e$ kesmadan kichik bo'lgan sonlarni hosil qilamiz.

a kesma uzunligini o'lchash jarayoni haqidagi hisobotni $n, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ cheksiz o'nli kasr ko'rinishida ifodalash mumkin. Agar bu kasrda biror raqamdan boshlab hamma raqamlarni tashlab yuborsak, o'lchanayotgan kesma uzunligidan kam bo'lgan $n, n_1...n_k$ son hosil bo'ladi; agar hosil bo'lgan sonda oxirgi raqam bitta orttirilsa, bu kesma uzunligidan katta bo'lgan son hosil bo'ladi. Shuning uchun a kesma uzunligi $n, n_1...n_k...$ kasr bilan ifodalanadi, ya'ni $m(a) = n, n_1...n_k ...$ Masalan, $m(a) = 3,1764...$

Har qanday k uchun

$$n,n_1...n_k \le m(a) < n,n_1...\ n_k + \frac{1}{10^k}$$

tengsizliklar bajarilishi ravshan.

Kesmalarni o'lchashda 9 raqamining cheksiz ketma-ketligi bilan tugaydigan kasrlar hosil bo'lmaydi, masalan, 0,499...9... ko'rinishdagi son hosil bo'lmaydi. Sababi hech bir x son

$$0,4 \le x < 0,5,$$
$$0,49 \le x < 0,50,$$
$$0,49...9 \le x < 0,50...0$$

tengsizliklarning hammasini bir vaqtda qanoatlantirmaydi.

Agar bu tengsizliklar o'rniga

$$0,4 < x \le 0,5$$
$$0,49 \le x < 0,50$$
$$0,49...9 \le x < 0,50...0$$

tengsizliklarni yozsak, ularni 0,5 soni qanoatlantiradi. Shuning uchun 0,4999...9... = 0,4(9) o'nli kasr 0,5 sonining boshqacha yozuvi hisoblanadi.

Umuman, *chekli o'nli kasrning oxirgi raqamini bittaga kamaytirsak va o'ng tomoniga 9 ning cheksiz ketma-ketligini yozsak, berilgan kasrga teng cheksiz o'nli kasr hosil bo'ladi.*

Masalan,

$$0,232 = 0,23199...9...;\ 7,8 = 7,799...9....$$

Biz har bir kesmaga cheksiz o'nli kasrni mos keltirdik. Aksincha, to'qqizlar ketma-ketligi bilan tugamaydigan har bir cheksiz o'nli kasrga uzunligi shu kasr bilan ifodalanadigan kesma topiladi.

0,00...0...dan tashqari va to'qqizlar ketma-ketligi bilan tugamaydigan cheksiz o'nli kasrlar to'plamini R_+ bilan belgilaymiz va uni *musbat haqiqiy sonlar* to'plami deymiz.

Har bir musbat haqiqiy son uchun uning taqribiy qiymatini ko'rsatish mumkin. Buning uchun musbat haqiqiy sonning butun

qismini va verguldan keyin dastlabki k ta raqamni qoldirib, boshqa raqamlar tushirib qoldirilsa, $\frac{1}{10^k}$ gacha aniqlikda *kami bilan olingan taqribiy qiymat* hosil bo'ladi. U x_k bilan belgilanadi. Boshqacha aytganda, agar $x = n,n_1...n_k ...$ bo'lsa, $x_k = n,n_1...n_k$ bo'ladi. Bu songa $\frac{1}{10^k}$ ni qo'shish bilan, x' uchun *ortig'i bilan olingan taqribiy qiymat* hosil bo'ladi: $x' = n,n_1...n_k + \frac{1}{10^k}$. Agar n_k raqam 9 dan farqli bo'lsa, x' hosil qilish uchun n_k ni bitta orttirish yetarli.

Masalan, agar $x = 4,7128356...$ bo'lsa, $x_3 = 4,712$ va $x' = 4,713$ bo'ladi. Ravshanki, har qanday musbat haqiqiy x son uchun $x_k \le x$ x' tengsizliklar o'rinli.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Kesma uzunligini o'lchash misolida cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr hosil bo'lishini tushuntiring.
2. $x = 3,847198...$ soni uchun: a) 0,01; b) 0,0001; d) 0,00001 gacha aniqlikda kami va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatni yozing.
3. x sonning 0,001 gacha aniqlikda kami bilan olingan taqribiy qiymati 1,754 ga teng. Uning 0,01 gacha aniqlikda ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati nimaga teng? x son 1,756 dan katta bo'lishi mumkinmi?

3.3. R_+ to'plamda tartib munosabati. Ikkita musbat haqiqiy son x va y berilgan bo'lsin:

$$x = m,m_1 ...\ m_k ...,$$
$$y = n,\ n_1 ...\ n_k ... .$$

1-ta'rif. *Agar $m < n$ bo'lsa yoki shunday k son topilsaki, $m = n$, $m_1 = n_1$, ..., $m_{k-1} = n_{k-1}$ bo'lib, $m_k < n_k$ bo'lsa, x son y sondan* ***kichik*** *deyiladi.*

Bunday holda $S \ge k$ bo'lganda x uchun ortig'i bilan olingan x' taqribiy qiymati y uchun kami bilan olingan y_s taqribiy qiymatida ortiq bo'lmaydi: $x' \le y_s$. Shuning uchun shunday s topilsaki, uning uchun $x_s^! \le y_s$ bo'lsa, $x < y$ bo'ladi deyish mumkin.

R_+ to'plamda «<» munosabati *qat'iy chiziqli tartib munosabati* bo'lishini tekshirish oson, ya'ni «<» munosabati *asimmetrik, tranzitiv* bo'lishini va $x \ne y$ da yo $x < y$, yoki $y < x$ bo'lishini tekshirish oson. R_+ to'plamda, Q_+ to'plamdagidek, na *eng kichik element* va *na eng katta element* yo'q. Undan tashqari, R_+ *dagi istalgan ikki son orasida cheksiz ko'p haqiqiy son yotadi.*

R_+ to'plamda tartib munosabatlarning asosiy xossalaridan biri *uzluksizlik* xossasidir — bu xossa Q_+ to'plamda yo'q.

R_+ to'plamning ixtiyoriy qism to'plami *sonli to'plam* deyiladi. (Masalan, N, Q_+ to'plamlar, berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchaklar perimetrlari to'plami, sonli kesmalar va oraliqlar va h. k.)

Agar har qanday $x \in X$ va $y \in Y$ uchun $x \leq y$ tengsizlik bajarilsa, X sonli to'plam Y sonli to'plamdan *chapda joylashgan* deyiladi. Masalan, [1; 4] kesma [6; 10] kesmadan chapda, berilgan doiraga ichki chizilgan ko'pburchaklar yuzi to'plami shu doiraga tashqi chizilgan ko'pburchaklar yuzlari to'plamidan chapda joylashgan.

[1; 4] va [6; 10] kesmalarni olaylik. 5 soni yuqoridagi xossaga ega, ya'ni [1; 4] kesma 5 dan chapda, [6; 10] kesma esa undan o'ngda joylashgan. Demak, 5 soni [1; 4] va [6; 10] kesmalarni bir-biridan ajratib turibdi. Xuddi shuningdek, doira yuzi ichki chizilgan ko'pburchaklar yuzlarining to'plamini tashqi chizilgan ko'pburchaklar yuzlari to'plamidan ajratadi, 4 soni [1; 4] va [4; 7] kesmalarni ajratadi.

Umuman, ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in Y$ uchun $x \leq c \leq y$ bajarilsa, c soni X va Y sonli to'plamlarni bir-biridan ajratadi deyiladi (bu holda X to'plam Y dan chapda joylashgan). R_+ to'plamning *uzluksizlik xossasini* quyidagicha tushuntirish mumkin bo'ladi:

Agar X sonli to'plam Y sonli to'plamdan chapda joylashgan bo'lsa, hech bo'lmaganda bitta shunday son topiladiki, u X va Y to'plamlarni ajratadi.

Agar biz R_+ to'plamdan hech bo'lmaganda bitta, masalan, 6 sonni ajratib olsak, bu xossaning ma'nosi ravshanlashadi. U holda 6 dan kichik sonlar to'plamini X bilan, 6 dan katta sonlar to'plamini Y bilan belgilaymiz. X to'plam Y to'plamdan chapda joylashgan bo'lsa ham 6 ni ajratib olgandan keyin bu to'plamlarni bir-biridan ajratadigan bitta ham son yo'q. Demak, uzluksizlik xossaning ma'nosi quyidagicha: R_+ to'plamda N natural sonlar to'plamidagidek «sakrashlar» hamda Q_+ musbat ratsional sonlar to'plamidagidek «tirqishlar» yo'q.

1. Sonlarni o'sib borish tartibida joylashtiring: 7,3165...; 7,315989...; 7,31667... .
2. R_+ to'plamda eng kichik son ham, eng katta son ham yo'qligini isbotlang.
3. 231599987... $< x <$ 2,31660000... bo'ladigan x sonni toping.
4. 2, 323232...; 3,52(375); 1,37(9); 1,212012001..., 15,417411741117... sonlarning qaysilari ratsional, qaysilari irratsional sonni ifodalaydi?

3.4. R_+ to'plamda qo'shish va ko'paytirish. Endi R_+ to'plamda qo'shish va ko'paytirishni ta'riflaymiz. R_+ to'plamda

$$x = m,m_1 \dots m_k \dots \quad \text{va} \quad y = n,n_1n_2 \dots n_k \dots$$

sonlar berilgan bo'lsin. U holda k har qanday bo'lganda ham $x_k \leq x < x'_k$ va $y_k \leq y \leq y'_k$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. $x + y$ son $x_k + y_k$ sonlarning ixtiyoriysidan kichik emas, ammo $x'_k + y'_k$ sonlarning ixtiyoriysidan katta bo'lmasligi aniq.

Boshqacha aytganda, $x + y$ son $\{x_k + y_k\}$ va $\{x'_k + y'_k\}$ to'plamlarni bir-biridan ajratishi kerak. Bu to'plamlar faqat bitta son bilan ajratilishini isbotlash mumkin. Shuning uchun quyidagi ta'rifni kiritamiz:

2-ta'rif. *Musbat x va y haqiqiy sonlarning* ***yig'indisi*** *deb, $\{x_k + y_k\}$ va $\{x'_k + y'_k\}$ to'plamlarni ajratuvchi songa aytiladi, bunda x_k va y_k — bu sonlarning kami bilan olingan o'nli yaqinlashishlaridir, x'_k va y'_k — ortig'i bilan olingan o'nli yaqinlashishlaridir.*

R_+ to'plamda qo'shish amali *kommutativ, assotsiativ* va *qisqaruvchiligini* isbotlash mumkin. Bunda, agar $x < y$ bo'lsa, har qanday $z \in R_+$ uchun $x + z < y + z$ ga egamiz. Undan tashqari, R_+ dan olingan hech qanday x va y uchun $x = x + y$ tenglik bajarilmaydi.

R_+ to'plamda ko'paytirish ham shunday ta'riflanadi.

3-ta'rif. *$\{x_k \cdot y_k\}$ va $\{x'_k \cdot y'_k\}$ to'plamlarni ajratuvchi yagona son x va y sonlarning* ***ko'paytmasi*** *deyiladi.*

R_+ to'plamda ko'paytirish amali *kommutativ, assotsiativ* va *qisqaruvchidir*. U qo'shishga nisbatan *distributiv*. Va, nihoyat, 1 soni ko'paytirishga nisbatan *neytral*: agar $a \in R_+$ bo'lsa, $1 \cdot a = a$ bo'ladi.

Kesmalar uzunliklari additiv va multiplikativ xossalariga ega ekanligini isbotlash mumkin: agar a kesma b va c kesmalardan iborat bo'lsa, uning uzunligi bu kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng, agar $m_1(a)$ va $m_2(a)$ lar e_1 va e_2 birlik kesmalarda a kesma uzunligining qiymati bo'lsa,

$$m_2(a) = m_1(a)m_2(e_1)$$

bo'ladi. Bu tasdiqlar isbotini keltirmaymiz.

R_+ da $a > b$ bo'lgan har qanday ikkita a va b son uchun shunday $c \in R_+$ topiladiki, $a = b + c$ bo'ladi. Bu son a va b sonlarning ayirmasi deyiladi va $a - b$ kabi belgilanadi. Ma'lumki, R_+ da ayirish amali qo'shish amaliga teskaridir: $x > y$ bo'lsa, $(x + y) - y = x$ va $(x - y) + y = x$.

R_+ da har qanday x va y ikkita son uchun shunday z son topiladiki, unda $x = yz$ bo'ladi. Bu son x ning y ga *bo'linmasi* deyiladi va $x : y$ kabi belgilanadi. R_+ da bo'lish amali har doim bajariladi va u ko'paytirish amaliga teskaridir:

$$(xy) : y = x,$$
$$(x : y) \cdot y = x.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. $\sqrt{2}=1,4142...$, $\sqrt{3}=1,7320...$ ekani ma'lum. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ва $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ larning 0,001 gacha aniqlikda kami bilan olingan va ortig'i bilan olingan qiymatlarini toping.
2. $x=1,703504...$ va $y=2,04537...$ bo'lsa $x \cdot y$ ko'paytma qiymatini 0,01 gacha aniqlikda toping.

3.5. Musbat haqiqiy sonlar to'plamining aksiomatikasi. Biz yuqorida cheksiz kasr ko'rinishida yoziladigan sonlarni musbat haqiqiy sonlar deb atadik.

Ammo qat'iy qilib aytganda, cheksiz o'nli kasrlar haqiqiy sonlar yozuvining bir shaklidir, xolos. Musbat haqiqiy sonlarni faqat cheksiz o'nli kasrlar ko'rinishidagina emas, balki cheksiz ikkili kasr, cheksiz uchlik kasr va boshqa ko'rinishda ham yozish mumkin. Agar bu sonlar cheksiz ikkili kasr ko'rinishida yozilsa, nol va birlardan iborat yozuv hosil bo'ladi, masalan: 101, 01101110... .

Musbat haqiqiy sonlar tushunchasini bunday sonlarning biror yozuvi bilan bog'lamaslik uchun ular qanoatlantiradigan aksiomalarni ifodalash kerak. Bunday aksiomalar sistemasining bittasi qo'shish amali xossalariga asoslanadi. Bu sistemada *bir* va *qo'shish amali* ta'riflanmaydigan tushunchalardir. Bu tushunchalar quyidagi aksiomalar sistemasini qanoatlantiradi:

1) $N \in R_+$.

2) *Qo'shish amali R_+ dan olingan har qanday $(a; b)$ sonlar juftiga o'sha to'plamdagi $a + b$ sonni mos keltiradi. Bu son a va b sonlarning yig'indisi, a va b sonlar esa qo'shiluvchilar deyiladi. N da qo'shish amali natural sonlarni qo'shish bilan bir xil.*

3) *R_+ da qo'shish amali kommutativ: R_+ dan olingan har qanday a va b uchun $a + b = b + a$.*

4) *R_+ da qo'shish amali assotsiativ. R_+ dan olingan har qanday a, b va c uchun $(a + b) + c = a + (b + c)$.*

5) *a va b lar R_+ tegishli bo'lsa, $a + b \neq a$ bo'ladi.*

6) *a va b lar R_+ ga tegishli bo'lib, $a \neq b$ bo'lsa, yo shunday $c \in R_+$ topiladiki, $a = b + c$ bo'ladi, yoki shunday $c \in R_+$ topiladiki, $b = a + c$ bo'ladi.*

7) *Har qanday $a \in R_+$ va har qanday n natural son uchun shunday yagona $b \subset R_+$ topiladiki, $a = b + b + ... + b$ (n marta).*

1) — 7) aksiomalar R_+ to'plamga tartib munosabatini kiritishga imkon beradi: *shunday $c \in R_+$ topilsaki, uning uchun $b = a + c$ bo'lsagina $a < b$ bo'ladi*, uzluksizlik aksiomasi ham bajarilishi kerak.

8) *Agar x sonli to'plam Y sonli to'plamdan chapda yotsa (ya'ni har qanday $x \in X$, $y \in Y$* uchun $x \leq y$ bo'lsa), *X va Y ni bir-biridan ajratuvchi $a \in R_+$ son mavjud bo'ladi (har qanday $x \in X$ va $y \in Y$ uchun $x \leq a \leq y$).*

Aksiomalarning bunday sistemasidan foydalanib, R_+ dan har qanday olingan sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida tasvirlash mumkinligini isbotlash, R_+ da ko'paytirish amalini ta'riflash mumkin va h. k. Biz bu masalalarga to'xtalib o'tmaymiz.

3.6. Kattaliklarni o'lchash. Har qanday kesma uzunligini ifodalash uchun musbat haqiqiy sonlar to'plami R_+ ni kiritdik. Bu sonlar yordamida boshqa kattaliklar, yuz, hajm va boshqalarni o'lchash natijasini ifodalash mumkin. Miqdorning umumiy ta'rifida to'xtab o'tamiz. Kesmalar uzunliklarini topishda ham, shakllar yuzlarini hisoblashda ham, jismlar hajmlarini izlashda

..., biz biror obyektlar to'plami bilan ish tutamiz, bu to'plamda ...ta munosabat — ekvivalentlik munosabati (masalan, F_1 va F_2 shakllar teng) va «α obyekt β va γ obyektlardan iborat» munosabati (masalan, AB kesma AC va CB kesmalardan iborat) ta'riflangan.

Shuning uchun ekvivalentlik munosabati — $\alpha \subset \beta \oplus \gamma$ («α bu β va γ dan iborat» deb o'qiladi) munosabati ta'riflangan Ω obyektlar to'plamini qaraymiz. Agar Ω dan olingan har bir α elementga musbat $m(\alpha)$ sonni — α ning o'lchovini shunday mos keltirish mumkin bo'lsaki, uning uchun ushbu shartlar bajarilsa, bu to'plamda o'lchash amali ta'riflangan deyiladi.

a) $\alpha \sim \beta \oplus \gamma$ dan $m(\alpha) = m(\beta)$ kelib chiqadi (ekvivalent obyektlar bir xil o'lchovga ega);

b) $\alpha = \beta \oplus \gamma$ dan $m(\alpha) = m(\beta) + m(\gamma)$ kelib chiqadi (o'lchovning additivligi).

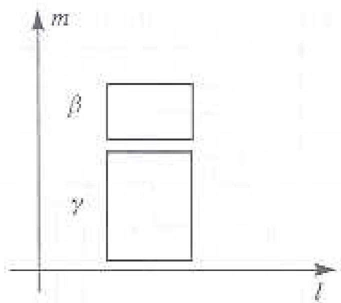
Ω to'plamda o'lchashning turli ikkita m va m_1 amallari aniqlangan bo'lib, ular bir-biridan faqat o'zgarmas ko'paytuvchi bilan farq qilishi mumkin bo'lsa, ya'ni shunday musbat son λ mavjudki, uning uchun barcha $a \in \Omega$ larda $m_1(a) = \lambda m(a)$ bo'lsa, bu Ω to'plam *kattaliklarni aniqlash maydoni* bo'ladi.

Kattaliklarni aniqlash maydoniga misol qilib barcha kesmalar to'plami Ω ni olish mumkin. Bu to'plamda $\alpha \sim \beta$ yozuvi α va β kesmalarning tengligini, $\alpha = \beta \oplus \gamma$ yozuvi esa α kesmani β va γ kesmalarga ajratuvchi nuqta mavjudligini anglatadi. O'lchash amali har bir α kesmaga uning uzunligi $m(\alpha)$ni mos qo'yadi, shu bilan, ravshanki, uzunlikning invariantligi va additivligini ifodalovchi a) va b) shartlar bajariladi. Uzunlikni o'lchashning istalgan ikki amali bir-biridan faqat o'zgarmas ko'paytuvchi bilan farq qiluvchi natijalarni beradi (multiplikativ xossasiga ko'ra).

Agar Ω maydon kattaliklarni aniqlash maydoni bo'lsa, unga $m(\alpha) = m(\beta)$ni anglatuvchi *tengdoshlik* munosabatini kiritish mumkin. Bu munosabat *refleksivlik, simmetriklik* va *tranzitivlik* xossalariga ega va shuning uchun Ω to'plamni ekvivalentlik sinflariga ajratishni ta'riflaydi. Bu ajratish Ω *maydonga mos kattalik* deyiladi. Ω kesmalardan iborat bo'lsa, tengdoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bilan bir xil bo'ladi — ikki kesma uzunliklari bir xil bo'lsagina, bu kesmalar teng bo'ladi. Yuzlar bo'lgan holda boshqacha bo'ladi — ikki shakl teng bo'lmasa ham yuzlari bir xil bo'lishi mumkin (masalan, tomonlari 6 sm

va 24 sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchak va tomoni 12 sm bo'lgan kvadrat).

3.7. Yuzlarni o'lchash. Shakllar yuzlarini o'lchashning umumiy nazariyasi qanday asoslanishini ko'rsatamiz. Tekislikda o'zaro perpendikular l va m to'g'ri chiziqlarni hamda e birlik kesmani tanlab olamiz. Ω orqali tomonlari shu to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar majmuasini belgilaymiz, bunda $\alpha \sim \beta$ ikkita shunday to'g'ri to'rtburchakning tengligini, $\alpha = \beta \oplus \gamma$ esa α to'g'ri to'rtburchakning l yoki m parallel to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri chiziq bilan β va α to'g'ri to'rtburchaklarga bo'linganini anglatadi deymiz (III.3-rasm).

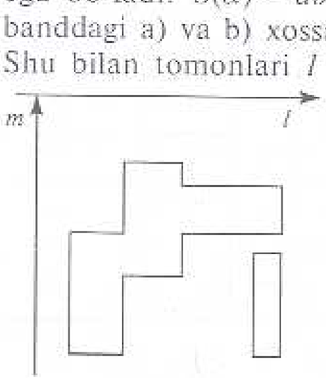


III.3-rasm.

Birlik kvadrat yuzi 1 ga teng bo'lishi uchun to'g'ri to'rtburchaklar to'plamida $S(\alpha)$ yuz tushunchasini ta'riflashning yagona usuli mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun to'g'ri to'rtburchak yuzini $S(\alpha) = ab$ formula bilan ifodalash kerak, bunda a va b lar natural sonlar bo'lsa, α to'g'ri to'rtburchakni ab ta birlik kvadratlarga ajratish mumkin, shuning uchun uning yuzi birlik kvadratlar yuzlarining ab yig'indisiga, ya'ni ab songa teng. So'ngra, agar α ning tomonlari uzunliklari o'nli kasrlar $\frac{a}{10^n}$ va $\frac{b}{10^n}$ bilan ifodalangan bo'lsa, α to'g'ri to'rtburchakni tomonlari $\frac{1}{10^n}$ bo'lgan ab ta kvadratga, birlik kvadratni 10^{2n} ta shunday kvadratlarga bo'lish mumkin. Bundan tomoni $\frac{1}{10^n}$ bo'lgan har bir kvadratning yuzi $\frac{1}{10^{2n}}$ ga, butun to'g'ri to'rtburchakning yuzi $\frac{ab}{10^{2n}}$ ga, ya'ni $\frac{a}{10^n}$ va $\frac{b}{10^n}$ sonlar ko'paytmasiga tengligi kelib chiqadi.

To'g'ri to'rtburchakning hech bo'lmaganda bitta tomoni irratsional uzunlikka ega bo'lgan hol yuqorida qaralgan holga keltiriladi — bu holda to'g'ri to'rtburchak yuzi ham, ab ham $X = \{a_n; b_n\}$ va $Y = \{a'_n; b'_n\}$ sonlar to'plamlarini ajratadi, bunda a_n va b_n a va b sonlarning kami bilan olingan yaqinlashishlari, a'_n va b'_n o'sha sonlarning ortig'i bilan olingan yaqinlashishlari.

Biz to'g'ri to'rtburchakning yuzi bo'lsa, u ab son bilan ifodalanishini isbotladik. Birlik kesmaning o'zgarishi bilan to'g'ri to'rtburchak tomonlari uzunligini ifodalovchi sonlar o'zgaradi, shu bilan birga ular yuzlarini ifodalovchi sonlar ham o'zgaradi. Bunda bu sonlarning hammasi bitta o'zgarmas ko'paytuvchiga ega bo'ladi. $S(\alpha) = ab$ formula bilan ifodalanadigan yuz 6-banddagi a) va b) xossalarga ega ekanligini isbotlash mumkin. Shu bilan tomonlari l va m to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri to'rtburchaklar uchun yuzlarni o'lchash nazariyasi nihoyasiga yetdi.



III.4-rasm.

Umumiy ko'rinishdagi shakllar — (pog'onali) shakllar uchun yuz tushunchasini kiritish uncha qiyin emas. Agar α shakl to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasidan iborat bo'lib, ulardan hech qanday ikkitasi umumiy ichki nuqtaga ega bo'lmasa, bu α shakl *pog'onali shakl* deyiladi (III.4-rasm). Agar pog'onali shakl $\beta_1, \ldots, \beta_n$ to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'lsa, uning yuzi bu to'g'ri to'rtburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Pog'onali shaklning yuzi uning to'g'ri to'rtburchaklarga qanday ajratilganiga bog'liq emasligini isbotlash mumkin. Bundan tashqari, pog'onali shaklning yuzi parallel ko'chirishda o'zgarmaydi, agar α shakl β va γ pog'onali shakllarga bo'lingan bo'lsa, uning yuzi shu shakllar yuzlarining yig'indisiga teng.

Biz hozircha na uchburchaklarning, na doiralarning, hatto tomonlari l va m to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lmagan to'g'ri to'rtburchaklarning yuzlarini topa olmaymiz. Bu tushunchani qo'llash sohasini kengaytirish uchun kvadratlanuvchi (ya'ni yuzga ega bo'lgan) shakllarning sinfi Ω ni kiritamiz. Har bir α bilan X va Y sonli to'plamlarni bundan bog'laymiz. X to'plam α shaklga butunicha kirgan pog'onali shakllar yuzlaridan iborat, Y esa α shaklni butunlay o'z ichiga olgan pog'onali shakllar yuzlaridan iborat. Ma'lumki, ichki pog'onali shakllar yuzi tashqi pog'onali shakllar yuzidan katta emas. Shuning uchun, agar $x \in X$ va $y \in Y$ bo'lsa, $x \leq y$ bo'ladi, ya'ni X to'plam Y to'plamdan chapda joylashgan. Shuning uchun bu to'plamlarni ajratuvchi hech bo'lmaganda bitta son mavjud.

4-ta'rif. *Agar α shaklga mos keluvchi X va Y sonli to'plamlar bittagina son bilan bo'linsa, α shakl* ***kvadratlanuvchi*** *deyiladi.*

Shu $S(\alpha)$ son α shaklning *yuzi* deyiladi. Shunday qilib, shakl yuzi uning ichidagi barcha pog'onali shakl yuzlaridan kichik emas, uni o'z ichiga olgan barcha pog'onali shakllar yuzlaridan katta emas.

Shakl yuzi additivlik xossasiga ega ekanligini isbotlash mumkin: agar ikkita kvadratlanuvchi shakl umumiy ichki nuqtaga ega bo'lmasa, ular birlashmasining yuzi bu shakllar yuzlarining yig'indisiga teng. Shakl yuzi shaklning siljishi bilan o'zgarmaydi. Shakl yuzini ifodalovchi son birlik kesmaning o'zgarishi bilan o'zgaradi. Agar $e = kf$ bo'lsa, $S_f(\alpha) = k^2 S_e(\alpha)$, bunda $S_e(\alpha)$ — uzunlikning o'lchov birligi qilib e kesma olinganda α shaklning yuzi, $S_f(\alpha)$ — uzunlikning o'lchov birligi qilib f kesma olinganda α shaklning yuzi.

Jismlar hajmlarini o'lchash nazariyasi ham xuddi shunday asoslanadi. Egri chiziqlar uzunliklarini o'lchash nazariyasi ancha qiyinroq bo'lib, biz unda to'xtalmaymiz.

4-§. HAQIQIY SONLAR TO'PLAMI

4.1. Musbat va manfiy sonlar. Musbat haqiqiy sonlar yordamida istalgan skalyar kattalikning o'lchash natijasini ifodalash mumkin: masalan, uzunlikning, yuzning, hajmning, massa va boshqalarni. Biroq amalda ko'pincha kattalikning o'lchash natijasini emas, balki uning o'zgarishini son bilan ifodalashga, ya'ni bu kattalik qanchaga o'zgarganini ko'rsatishga to'g'ri keladi. O'zgarish ikki yo'nalishda bo'lishi mumkin — qancha ortsa, shuncha kamayishi yoki o'zgarishsiz qolishi mumkin. Shuning uchun kattalikning o'zgarishini ifodalashda musbat haqiqiy sonlardan tashqari boshqa sonlar ham kerak bo'ladi, R_+ to'plamni kengaytirish kerak. Bu to'plamni unga 0 (nol) sonini va manfiy sonlarni kiritib, kengaytiramiz.

Shunday qilib, musbat haqiqiy sonlar to'plami R_+ ni olamiz va R_+ dan olingan har bir x songa $-x$ («minus x» deb o'qiladi) yangi sonni mos keltiramiz. Masalan, 5 soniga -5 soni, 8,14 soniga $-8{,}14$ soni mos keltiriladi. $-x$ *ko'rinishdagi sonlar, bunda* $x \in R_+$, *manfiy sonlar deyiladi* va ular to'plami R_- bilan belgilanadi. Undan tashqari, 0 sonini olamiz. R_+, R va $\{0\}$ to'plamlar birlashmasi *haqiqiy sonlar to'plami* deyiladi va R bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$R = R_- \cup R \cup \{0\},$$

bunda R_+, R va $\{0\}$ to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi (hech qanday son bir vaqtning o'zida na musbat, na manfiy yoki musbat va nol bo'lmaydi).

Agar kattalik avval x qiymatga ega bo'lib, keyin y qiymatni qabul qilsa (bunda x va y R_- ga tegishli), $x < y$ bo'lganda, uning o'zgarishi musbat $y - x$ son bilan ifodalanadi (masalan, kattalikning qiymati 6 bo'lib, keyin 10 bo'lsa, u $10 - 6$ ga, ya'ni 4 ga o'zgargan). Agar $x > y$ bo'lsa, kattalik $-(-x - y)$ manfiy songa o'zgargan deymiz (masalan, agar kattalik qiymati 6 bo'lib, keyin 2 bo'lsa, $y - (6 - 2)$ga, ya'ni -4 ga o'zgargan). Shunday qilib, kattalik $-a$ ga o'zgargan degan gap u a ga kamaygan degan gapga teng kuchlidir.

Musbat haqiqiy sonlar koordinata nurida nuqtalar bilan tasvirlangani kabi ixtiyoriy haqiqiy sonlar koordinata to'g'ri chizig'ida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Bunda musbat va manfiy sonlar qarama-qarshi nurlarda nuqtalar bilan belgilanadi, 0 soni bu nurlarning umumiy boshlanish nuqtasi bo'ladi.

x va $-x$ sonlar, bunda $x \in R_+$, koordinata to'g'ri chizig'ida sanoq boshi 0 ga nisbatan simmetrik joylashgan nuqtalar bilan belgilanadi. Bu sonlar bir-biriga *qarama-qarshi sonlar* deyiladi, shu bilan birga $-(-x) = x$. Masalan, $-(-6) = 6$. 0 soni o'z-o'ziga qarama-qarshi deyiladi. $-0 = 0$.

Sanoq boshidan koordinata to'g'ri chizig'idagi nuqtagacha bo'lgan, x sonni ifodalovchi masofa shu x sonning *moduli* deyiladi va $|x|$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{bunda} \quad x > 0, \\ -x, & \text{bunda} \quad x < 0, \\ 0, & \text{bunda} \quad x = 0. \end{cases}$$

Masalan, $|12| = 12$; $|-9| = 9$; $|0| = 0$.

$x \in R_+$ son $a \in R$ ga o'zgarganda $y \in R_+$ songa o'tgan. U holda a haqiqiy songa $(x; y)$ musbat haqiqiy sonlar juftligi mos keladi deymiz. masalan, $(7; 2)$ juftlik -5 haqiqiy songa mos keladi, chunki 7 soni -5 ga o'zgarganda 2 ga o'tadi, $(3; 8)$ juftlik 5 soniga mos keladi. Chunki 3 soni 5 ga o'zgarganda 8 songa o'tadi.

Bitta haqiqiy songa cheksiz ko'p juftliklar mos keladi. Masalan, 4 soniga $(1; 5)$, $(1{,}5; 5{,}5)$, $(\sqrt{2}; 4+\sqrt{2})$ va h. k. juftliklar mos keladi, -3 soniga $(4; 1)$, $(10; 7)$, $(\sqrt{29}; \sqrt{29}-3)$ va h. k. juftliklar mos keladi.

$(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ juftliklar bitta haqiqiy son a ga qachon mos kelishini aniqlaymiz. Agar a son musbat bo'lsa, $y_1 = x_1 + a$ va $y_2 = x_2 + a$ bo'lganda mos keladi. Ammo bu holda $x_1 + y_2 = x_1 + (x_2 + a) = (x_1 + a) + x_2 = y_1 + x_2$. Agar a son manfiy bo'lsa, $y_1 = x_1 - (-a)$ va $y_2 = x_2 - (-a)$ va shuning uchun $x_1 = y_1 + (-a)$, $x_2 = y_2 + (-a)$; bu holda ham $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$, $a = 0$ bo'lgan hol shunga o'xshash tahlil qilinadi. Hamma hollarda $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ juftliklar $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ bo'lgan holda va faqat shunda bitta a haqiqiy songa mos keladi.

Shuning uchun haqiqiy sonlar tushunchasini musbat sonlar jufti orqali ham ta'riflash mumkin. Buning uchun R_+ to'plamning R^2_- dekart kvadratini, ya'ni $(x; y)$ ko'rinishdagi juftliklar to'plamini olamiz, bunda $x \in R_+$, $y \in R_+$. $(x_1; y_1)$ *juftlik* $(x_2; y_2)$ *juftlikka ekvivalent* deyiladi, agar $x_1 + y_2 = x_2 + y$ bo'lsa, $(x_1; y_1) \sim (x_2; y_2)$ munosabat *refleksivlik*, *simmetriklik* va *tranzitivlik* xossalariga ega ekanligini tekshirish oson, shuning uchun bu munosabat R_+ to'plamni ekvivalent juftliklar sinfiga ajratadi. Bunday har bir sinf *haqiqiy son* deyiladi. Agar $x < y$ bo'lsa, $(x; y)$ ga mos keluvchi son $y - x$ ga teng va musbat, $x > y$ bo'lsa, bu son $-(x - y)$ ga teng va manfiy. Nihoyat, $x = y$ bo'lsa, $(x; y)$ juftlikka 0 soni mos keladi.

Har bir $(x; y)$ juftlikni sonli nurdagi boshi x va oxiri y bo'lgan yo'nalgan kesma bilan tasvirlash mumkin. (Soddalik uchun koordinatasi x bo'lgan nuqtani x bilan belgilaymiz.) Ekvivalent juftliklarga bir xil uzunlikdagi va bir xil yo'nalgan kesmalar mos keladi. Bunday yo'nalgan kesmalar *ekvivalent kesmalar* deyiladi. Unda *haqiqiy son ekvivalent yo'nalgan kesmalar sinfini aks ettiradi* deyish mumkin.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Manfiy sonlarning kiritilishi sababi qanday?
2. $(3x - 2,4) - (2x + 1,7)$ bo'lsa, x sonni toping.
3. 12 soni: a) 4 ga; b) -7 ga; d) 0 ga o'zgarganda o'tadigan sonni toping.

4.2. Haqiqiy sonlarni qo'shish va ayirish. Biror $x \in R_+$ sonni avval a ga, keyin b ga o'zgartirdik, bunda x son shunday kattalikdaki, bu ikkala o'zgarish uni R_+ to'plamdan tashqariga chiqarmaydi. a va b *sonlar yig'indisini* haqiqiy son deymiz, bu son o'zgarish natijasini ifodalaydi. Masalan, 12 sonini avval 4 ga, keyin 7 ga o'zgartirsak, 12 soni avval 16 ga, keyin 23 ga o'tadi. 12 soni 23 ga o'tishi uchun uni 11 ga o'zgartirish kerak, demak, $4 + 7 = 11$, shunday bo'lishi kerak edi. Agar avval -4 ga, keyin -7 ga o'zgartirilganda edi, 12 soni avval 8 ga, keyin 1 ga o'tar edi. 12 dan 1 ni hosil qilish uchun 12 ni -11 ga o'zgartirish kerak. Bundan $(-4) + (-7) = -11$.

Umuman, agar a va b musbat haqiqiy sonlar bo'lib, $x > a + b$ bo'lsa, x ni $-a$ ga o'zgartirganda u $x - a$ ga, keyin $x-a$ ni $-b$ ga o'zgartirganda $(x-a)-b$ ga, ya'ni $x-(a + b)$ ga o'tadi. $x-(a + b)$ hosil qilish uchun x ni $-(a + b)$ ga o'zgartirish kerak. Bundan: $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Endi qarama-qarshi ishorali sonlarni qo'shishni qaraymiz. Qo'shuvchilar qarama-qarshi sonlar bo'lgan holni qaraymiz. Ravshanki, x sonni avval a ga, keyin $-a$ ga o'zgartirsak, x ni hosil qilamiz. Boshqacha aytganda, $x + (a + (-a)) = x$. Ikkinchi tomondan, $x + 0 = x$, shuning uchun $a + (-a) = 0$. Demak, *qarama-qarshi haqiqiy sonlar yig'indisi nolga teng* ekan.

Endi umumiy holda $a + (-b)$ yig'indisini qaraymiz (a va b sonlarni musbat, $-b$ ni manfiy deymiz). Agar $a > b$ bo'lsa, $a = (a-b) + b$, va shuning uchun $a + (-b) = (a - b) + b + (-b)$. Ammo x sonning $a - b$ ga, b ga va $-b$ ga ketma-ket o'zgarishini $a - b$ ga o'zgarish deb olish mumkin. (b ga va $-b$ ga o'zgarish o'zaro yo'qotiladi.) Shuning uchun $a > b$ bo'lsa, $a + (-b) = a - b$ bo'ladi. Ravshanki, $a > b$ bo'lganda $(-b) + a = a - b$.

Endi $a < b$ bo'lsin. Bu holda $-b = (-a) + [-(b - a)]$, shuning uchun $a + (-b) = a + (-a) + [-(b - a)] = -(b - a)$. Demak, $a < b$ bo'lganda $a + (-b) = -(b - a)$ bo'ladi. $-b$ va a sonlarni qo'shishda ham o'sha natija chiqadi: $(-b) + a = -(b - a)$.

Haqiqiy sonlarni qo'shish qoidasini quyidagicha ta'riflash mumkin:

Bir xil ishorali ikkita haqiqiy sonni qo'shganda moduli qo'shiluvchilar modullarining yig'indisiga teng o'sha ishorali son hosil bo'ladi. Turli ishorali sonlarni qo'shganda ishorasi moduli katta bo'lgan qo'shiluvchining ishorasi bilan bir xil bo'lgan, moduli esa katta modulli qo'shiluvchidan kichik modulli qo'shiluvchining ayirmasiga teng son hosil bo'ladi. Qarama-qarshi sonlarning yig'indisi nolga teng, sonning nol bilan qo'shilishi sonni o'zgartirmaydi.

R da qo'shish *kommutativlik, assotsiativlik* va *qisqaruvchanlik* xossalariga ega ekanligini tekshirish oson. Yuqorida berilgan ta'rifdan ko'rinib turibdiki, nol R da qo'shishga nisbatan neytral elementdir.

R to'plamda ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal kabi ta'riflanadi. R da har bir b son o'ziga qarama-qarshi $-b$ songa ega bo'lgani uchun $b + (-b) = 0$, u holda b sonni ayirish $-b$ sonni qo'shishga teng kuchlidir: $a - b = a + (-b)$.

Haqiqatan, ixtiyoriy a va b uchun

$$[a + (-b)] + b = a + [(-b) + b] = a,$$

bu $a - b = a + (-b)$ demakdir.

$a > b$ bo'lgan a va b musbat sonlar uchun $a - b$ ayirma b son a ga o'tgandagi o'zgarishdir. Shunga o'xshash, har qanday a va b haqiqiy sonlar uchun $a - b$ ni b ni a ga o'tkazuvchi o'zgarish deb qabul qilamiz. U 0 nuqtani $a - b$ nuqtaga o'tkazadi. Musbat haqiqiy sonlar uchun bo'lganidagidek, bu o'zgarish b nuqtadan a nuqtaga yo'nalgan kesma sifatida geometrik tasvirlanadi. Uning uzunligi sanoq boshidan $a - b$ nuqtagacha, ya'ni $a - b$ sonning moduliga teng.

Biz ushbu muhim tasdiqni isbotladik:

b nuqtadan a nuqtaga yo'nalgan kesma uzunligi $|a - b|$ ga teng.

R to'plamda tartib munosabatini kiritamiz. *$a - b$ ayirma musbat bo'lganda va faqat shunda $a > b$* deymiz. Bu munosabat asimmetrik va tranzitiv ekanligini, ya'ni qat'iy tartib munosabati ekanligini isbotlaymiz. Bunda R dan olingan har qanday a va b uchun $a = b$, $a > b$, $b > a$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli, ya'ni R da tartib munosabati chiziqli. $a - 0 = a$ bo'lgani uchun, $a \in R_+$ bo'lsa, $a > 0$, agar $a \in R_-$ bo'lsa, $a < 0$.

Agar $a > b$ bo'lsa, har qanday $c \in R$ uchun $a + c > b + c$ ni isbotlash oson.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. a son $(x_1; y_1)$ juftlik bilan, b son $(x_2; y_2)$ juftlik bilan berilsa, $a + b$ son $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ juftlik bilan berilishini isbotlang.
2. a son $(x; y)$ juftlik bilan berilsa, $-a$ son $(y; x)$ juftlik bilan berilishini isbotlang.
3. Haqiqiy sonlar to'plamida qo'shishning kommutativ va assotsiativligini isbotlang.
4. Haqiqiy sonlar toplamida qo'shishning qisqarivchanligini isbotlang.

4.3. Haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish va bo'lish. Agar a kesma uzunligi x ga teng bo'lsa, $a = x \cdot e$ deb yozilar edi, bunda e — birlik kesma. Bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi yo'nalgan kesmalar uchun $a = x \cdot e$ deb yozamiz va agar a va e kesmalar bir xil yo'nalgan bo'lsa, $x > 0$, agar qarama-qarshi bo'lingan bo'lsa, $x < 0$ deymiz (ikkala holda ham $|x|$ e birlik o'lchovida a kesma uzunligiga teng). Agar $e = y \cdot f$ bo'lsa, $a = (x(yf)$ bo'ladi. x va y sonlarning ko'paytmasini shunday z son deb ta'riflaymizki, unda $a = z \cdot f$ bo'ladi, ya'ni $z \cdot f = x(yf)$ bo'lgandagina $z = xy$ deb olamiz.

Agar x va y sonlar berilgan bo'lsa, xy ni qanday hosil qilishni aniqlash uchun xossaning multiplikativligidan a kesma uzunligi f birlik o'lchovida $|x| \cdot |y|$ ga tengligini eslaymiz. Agar x va y sonlar bir xil ishorali bo'lsa, a va f kesmalar bir xil yo'nalgan, agar turli ishorali bo'lsa, qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Masalan, agar $x < y$ va $y < 0$ bo'lsa, a va e kesmalar qarama-qarshi e va f kesmalar kabi qarama-qarshi bo'ladi va shuning uchun $a = [OA]$ va $f = [OF]$ kesmalar yo'nalishi bir xil bo'ladi (III.5-rasm). Agar $x > 0$ va $y < 0$ bo'lsa, $a = [OA]$ va $e = [OE]$ kesmalar yo'nalishi bir xil, e va $f = [OF]$ kesmalar qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi, shuning uchun a va f kesmalar yo'nalishi qarama-qarshidir.

III.5-rasm.

Yuqoridagilardan, haqiqiy sonlar ko'paytmasi quyidagicha ta'riflanadi:

x va y sonlarning ***ko'paytmasi*** *deb, moduli ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga teng, $z = |x| \cdot |y|$, ishorasi ko'paytuvchilar ishorasi bir xil bo'lsa, musbat aks holda manfiy bo'ladigan z songa aytiladi. Har qanday x son uchun $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.*

R to'plamda *ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan kommutativlik, assotsiativlik va distributivlik xossalariga ega* ekanligini isbotlash oson. Bu amal qisqaruvchanlik xossasiga ega emas, chunki $zx = zy$ dan $x = y$ degan xulosa chiqarish mumkin emas; $z = 0$ bo'lib, $x \neq y$ bo'lishi mumkin, u holda $zx = zy = 0$ bo'ladi, $z \neq 0$ bo'lsa, $zx = zy$ dan $x = y$ kelib chiqadi. Shunday qilib, *tenglikni noldan farqli sonlargagina qisqartirish mumkin* ekan.

Agar x noldan farqli bo'lsa, har qanday $y \in R$ uchun shunday z topiladiki, $x = yz$ bo'ladi. Bu son x ni y ga bo'lishdan chiqqan bo'linma deyiladi va $x : y$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, R da noldan farqli har qanday songa bo'lish ta'riflandi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. R da ko'paytirish kommutativ va assotsiativ ekanligini isbotlang.
2. R da ko'paytirish qo'shishga va ayirishga nisbatan distributiv ekanligini isbotlang.
3. 27 ta musbat va 32 ta manfiy ko'paytuvchilarning ko'paytmasi qanday ishoraga ega?
4. -7 dan 10 gacha butun sonlar ko'paytmasi nimaga teng?
5. Ifodalar qiymatini hisoblang:
   a) $702,3 - (59 - 389,56 : 6,8) \cdot (59,3 - 5,64 : 9,4)$;
   b) $(6,8 \cdot 52,4 - 256,32) \cdot (77,34 + 61,32 : 7,3) - 919,6$.

IV bob. KOORDINATALAR, TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

1-§. TO'G'RI CHIZIQDA KOORDINATALAR

1.1. To'g'ri chiziqda koordinatalar. Biz bu bandda to'g'ri chiziqda nuqtalar o'rnini sonlar yordamida qanday ko'rsatishni tushuntiramiz. l to'g'ri chiziqni va unda O va E nuqtalarni olamiz. O nuqtani koordinatalar boshi, E nuqtani esa birlik nuqta deb ataymiz. OE kesma uzunligini uzunlik o'lchovining birligi deb, O nuqtadan E nuqtagacha l yo'nalishni musbat yo'nalish deb qabul qilamiz. l to'g'ri chiziqdagi har bir M nuqtaga uning koordinatasini, ya'ni shunday x sonni mos keltiramizki, unda:

a) x sonning moduli O nuqtadan M nuqtagacha bo'lgan masofaga teng: $|x| = |OM|$;

b) $M \neq 0$ bo'lib, M nuqta OE nurda yotsa, x son musbat, M nuqta qarama-qarshi nurda yotsa, x son manfiy bo'ladi.

d) shartni boshqacha ta'riflash mumkin, ya'ni agar O nuqtadan M nuqtagacha yo'nalish musbat bo'lsa, M nuqtaning koordinatasi x musbat, agar yo'nalish manfiy bo'lsa, x manfiy bo'ladi. Yuqorida berilgan ta'rifdan O nuqtaning koordinatasi nolga tengligi (OO masofa nolga teng), E nuqtaning koordinatasi birga tengligi kelib chiqadi.

Koordinata sistemasi bilan berilgan to'g'ri chiziqni koordinata to'g'ri chizig'i deb ataymiz. Agar M nuqta X koordinataga ega bo'lsa $M(x)$ deb yozamiz (IV.1-rasm). Koordinata to'g'ri chizig'idagi har bir M nuqtaga aniq x son (shu nuqtaning koordinatasi), har bir x songa bitta M nuqta (shu koordinatali nuqta) mos keladi. Shunday qilib, haqiqiy sonlar to'plami bilan to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami orasidagi $x \to M$ moslik o'zaro bir qiymatli moslikdir.

IV.1-rasm.

To'g'ri chiziqdagi nuqtalar bilan sonlar orasidagi moslik sonlar orasidagi munosabatlarni geometrik tasvirlashga va, aksincha, to'g'ri chiziqdagi geometrik masalalarni yechishni sonlar ustida amallar bajarishga olib keladi. Birinchi navbatda ba'zi sonli to'plamlarni, ya'ni haqiqiy sonlardan iborat to'plamlarni to'g'ri chiziqda qanday tasvirlashni aniqlaymiz.

$a \leq x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to'plami *sonli nur* deyiladi va $[a; +\infty)$ kabi belgilanadi. Koordinata to'g'ri chizig'ida bu to'plam $A(a)$ nuqtadan musbat yo'nalishda chiqqan AX nur bilan belgilanadi. Bunda A nuqta nurning o'ziga tegishli (IV.2-rasm). $(-\infty, a]$ nur $a \leq x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlardan iborat. Bu nur A nuqtadan manfiy yo'nalishda chiqqan nur bilan belgilanadi (IV.3-rasm).

IV.2-rasm.

IV.3-rasm.

$a < x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to'plami *ochiq sonli nur* deyiladi va $(\infty; +a)$ nur $a \leq x$ kabi belgilanadi. Bu to'plam koordinata to'g'ri chizig'ida ochiq nur bilan tasvirlanadi, ya'ni A nuqta kirmaydigan ochiq nur bilan belgilanadi. Rasmlarda nurni ochiq nurdan farq qilish uchun nur boshini qora nuqta bilan, ochiq nur boshini doiracha bilan belgilaymiz (IV.4-rasm).

IV.4-rasm.

$a \leq x \leq b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to'plami *sonli kesma* deyiladi va $[a; b]$ kabi belgilanadi. Sonli kesma koordinata to'g'ri chizig'ida uchlari $A(a)$ va $B(b)$ bo'lgan kesma bilan belgilanadi (uchlar kesmaga tegishli) (IV.5-a rasm).

$a < x < b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlar to'plami $(a; b)$ kabi belgilanuvchi sonli oraliqdir. Bu oraliq ochiq AB kesma bilan, ya'ni A va B uchlari kirmaydigan AB kesma bilan belgilanadi (IV.5-b rasm).

IV.5-rasm.

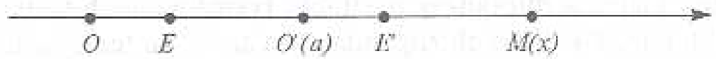
SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. To'g'ri chiziqning koordinata to'g'ri chizig'ida aylanish shartlari qanday?
2. Sonli nur, ochiq sonli nur, sonli kesma, sonli oraliqlarni ta'riflang va misollar keltiring.
3. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi nuqtalarni belgilang:
   $A(-3{,}5)$, $B\left(4\frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{6}\right)$, $D\left(-4\frac{1}{2}\right)$.
4. Koordinata to'g'ri chizig'ida $A(-3)$ va $D(5)$ nuqtalarni belgilang. Bu nuqtalar orasidagi masofa nimaga teng?
5. $M = (-4; -1)$, $K = [-2; 5]$ sonli to'plamlar berilgan. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'plamlarni belgilang:
   a) $M \cap K$; b) $M \cup K$; d) $M' \cup K'$; e) $M' \cap K$. (To'ldiruvchi to'plamlar haqiqiy sonlar to'plamidan olinadi.)
6. Koordinata to'g'ri chizig'ida to'plamlarni belgilang: $N \cap \left[-4; 3\frac{1}{6}\right]$ va $Z \cap \left[-4; 3\frac{1}{6}\right]$.
7. Agar $A(-1)$ nuqta avval o'ngga 7 birlik, keyin chapga 10 birlik siljisa, u qanday nuqtaga aylanadi?
8. $A = \{x | x \in R \wedge |x| < 3\}$, $B = \{x | x \in R \wedge -1 < x < 5\}$ bo'lsa, koordinata to'g'ri chizig'ida $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$ to'plamlarni tasvirlang.
9. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'plamlarni tasvirlang:
   a) $\{x \mid x \in R \wedge 1 \leq x \leq 5\}$;
   b) $\{x \mid x \in Z \wedge -3 < x < 4\}$;
   d) $\{x \mid x \in R \wedge -4 < x < 2\}$.
10. $A = \{x \mid x \in R \wedge -4 \leq x \leq 24\}$, $B = \{x \mid x \in R \wedge -2 < x < 5\}$ to'plamlar berilgan. Koordinata to'g'ri chizig'ida quyidagi to'plamlarni belgilang:
    a) $A \cap B \cap C$; b) $A \cup B \cup C$; d) $(A \cap B) \cup C$; e) $(A' \cup B') \cap C$; f) $(A \setminus B) \cup C$.

1.2. To'g'ri chiziqda koordinatalarni almashtirish. Koordinatalar boshi O va birlik nuqta E to'g'ri chiziqda ixtiyoriy tanlanishi mumkin. (Faqat O va E nuqtalar ustma-ust tushib qolmasligi kerak.)

To'g'ri chiziqda bir koordinatalar sistemasidan boshqa koordinatalar sistemasiga o'tishda nuqtalar koordinatalari o'zgaradi. To'g'ri chiziqda koordinatalar sistemasining quyidagi almashtirishlarini qaraymiz.

a) *Koordinatalar boshini ko'chirish.* Bunday almashtirishda koordinatalar boshi O boshqa O' nuqtaga o'tadi, birlik kesma uzunligi va to'g'ri chiziqdagi yo'nalish esa o'zgarishsiz qoladi (ya'ni yangi $(O'; E')$ koordinatalar sistemasi qaraladi, bunda $|OE| = |O'E'|$, O dan E ga yo'nalish va O' dan E' ga yo'nalish bir xil bo'ladi. (IV.6-rasm)).



IV.6-rasm.

O' nuqtaning koordinatasini eski sistemada a bilan belgilaymiz. M nuqtaning koordinatasi x bo'lsin. Uning yangi x' koordinatasini topamiz. Agar M nuqta O dan o'ng tomonda, O' nuqta esa O va M nuqtalar orasida yotsa, $|OM| = x, |OO'| = a, |O'M| = x - a$ bo'ladi. IV.6-rasmdan $x' = |O'M| = |OM| - |OO'|$. Shuning uchun

$$x' = x - a \qquad (1)$$

tenglikni OO' va MM' nuqtalarning turli joylashishlarida o'rinli bo'lishini isbotlash mumkin, bunda va bundan keyin x' — nuqtaning yangi, x — eski koordinatasi qilib belgilanadi.

IV.7-rasmda tasvirlangan hol uchun isbotlaymiz. Bu holda O' nuqta O dan chapda joylashgan, shuning uchun uning koordinatasi manfiy: $a = -|OO'|$. x va x' sonlar esa musbat: $x = |OM|$, $x' = |O'M|$. Ammo bu holda $|O'M| = |OM| + |OO'|$, shuning uchun $x' = x + (-a) = x - a$.

VI.7-rasm.

1-m a s a l a. Agar koordinata boshi $O'(-4)$ nuqtaga ko'chirilgan bo'lsa, $A(5)$ nuqtaning yangi koordinatasini topamiz. (1) formula bo'yicha topamiz:

$$x' = 5 - (-4) = 9.$$

2-m a s a l a. Koordinatalar boshi $O'(3)$ nuqtaga ko'chirilgandan keyin A nuqtaning koordinatasi -7 ga teng bo'ldi. Bu nuqtaning koordinatasini dastlabki koordinatalar sistemasida topamiz. Bu holda $a = 3$ va $x' = -7$, Demak, $-7 = x - 3$, shuning uchun $x = -4$.

3-m a s a l a. A nuqtaning dastlabki koordinatasi 5 ga teng edi, koordinatalar boshi ko'chirilgandan keyin -2 ga teng bo'ldi. Koordinatalar boshi qanday nuqtaga ko'chirilgan?

$x = 5$, $x' = -2$ bo'lgani uchun $-2 = 5 - a$. Shuning uchun $a = 7$.

b) *O'q yo'nalishini o'zgartirish.* Endi O nuqtani qo'zg'almas qilib olamiz va E nuqtani O ga nisbatan E nuqtaga simmetrik bo'lgan E' bilan almashtiramiz. Bunda almashtirishda kesmalar uzunliklarining o'lchov birliklari o'zgarmaydi, ammo musbat yo'nalish manfiy bo'ladi va aksincha. Shuning uchun hamma nuqtalarning koordinatalari ishoralarini o'zgartiradi. Masalan, $A(4)$ nuqtaning yangi koordinatasi -4 ga $B(5)$ nuqtaniki esa -5 ga teng. O nuqtaning koordinatasi o'zgarishsiz qoladi. Demak, bu holda yangi x' koordinata eski koordinata bilan quyidagicha munosabatda bo'ladi: $x' = -x$

IV.8-rasm.

d) *Masshtabni o'zgartirish.* Bunday almashtirishda O nuqtani qo'zg'almas qilib olib, E nuqtani u bilan O nuqtadan bir tomonda yotgan E' nuqtaga almashtiramiz (VI.8-rasm). E' nuqtaning koordinatasi $a > 0$ bo'lsin. Eski koordinatasi x ga, yangisi x' ga teng bo'lgan M nuqtani olamiz. Soddalik uchun bu nuqta koordinatalar boshidan o'ngda yotadi deymiz. U holda

x son OM kesma OE kesmadan necha marta uzunligini, a esa $[OE']$ kesma $[OE]$ dan necha marta uzunligini, x' esa $[OM]$ kesma $[OE']$ dan necha marta uzunligini bildiradi. Boshqacha aytganda, uzunlik o'lchovining birligi qilib OE kesma olinsa, $[OM] = x$, $[OE']$ va $x' = \frac{|OM|}{|OE'|} = \frac{x}{a}$ bo'ladi. Shunday qilib, $x' = \frac{x}{a}$. Agar M nuqta O nuqtadan chapda yotsa ham $x' = \frac{x}{a}$ ekanligi xuddi shunday isbotlanadi. Demak, *birlik kesma uzunligi a marta orttirilsa, to'g'ri chiziqdagi hamma nuqtalar koordinatalari a marta kamayadi.*

Masalan, agar birlik kesma uzunligi ikki marta orttirilsa, $A(8)$ nuqtaning yangi koordinatasi 4 ga teng bo'ladi. $B(-5)$ nuqtaning yangi koordinatasi $-\frac{5}{2}$ ga teng bo'ladi. Agar birlik kesma uzunligi 3 marta kamaytirilsa, $C(7)$ nuqtaning yangi koordinatasi $7 : \frac{1}{3} = 21$ ga teng bo'ladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Koordinata to'g'ri chizig'ida o'q yo'nalishining o'zgarishi nuqta koordinatasiga qanday ta'sir qiladi?
2. Koordinata to'g'ri chizig'ida birlik kesma uzunligining o'zgarishi nuqta koordinatasiga qanday ta'sir qiladi?
3. Koordinatalar boshi ko'chirilgandan keyin $A(-7)$ nuqtaning koordinatasi 2 ga teng bo'ldi. Koordinatalar boshi qaysi nuqtaga ko'chirildi?
4. Agar koordinatalarning yangi sistemasi koordinatalar boshini $A(5)$ nuqtaga ko'chirishdan va uzunlik birligini 4 marta orttirishdan hosil bo'lgan bo'lsa, koordinatalar qaysi formula bo'yicha almashadi?
5. Agar avval masshtab birligini 4 marta orttirib, keyin koordinatalar boshini koordinatasi 5 ga teng bo'lgan nuqtaga ko'chirilsa, koordinatalar qaysi formula bo'yicha almashadi?
6. Ma'lumki, Selsiy shkalasining 5 gradusi Farengeyt shkalasining 9 gradusiga teng, shu bilan birga Selsiy shkalasining sanoq boshi Farengeyt shkalasi bo'yicha koordinatasi 32 ga teng bo'lgan nuqtada yotadi. Selsiy shkalasidan o'tish formulasini yozing va aksincha.

1.3. Analitik geometriyaning to'g'ri chiziqdagi ba'zi bir masalalari. Endi geometrik masalalarning koordinata yordamida qanday yechilishini ko'rsatamiz.

1-m a s a l a. Koordinata to'g'ri chizig'ida $A(a)$ va $B(b)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofani topamiz.

Y e c h i l i s h i. Avval bu nuqtalardan biri koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan xususiy holni qaraymiz. Ikkinchi nuqtaning koordinatasini c bilan belgilaymiz. To'g'ri chiziqdagi koordinatalar ta'rifiga ko'ra c sonning moduli O dan A gacha bo'lgan masofaga teng, ya'ni $|OA| = |c|$. Masalan, koordinatalar boshidan $A(-4)$ nuqtagacha masofa 4 ga teng.

Endi bu masalani umumiy holda yecha olamiz. Buning uchun koordinatalar boshini $A(a)$ nuqtaga ko'chiramiz. U holda 1.2.-banddagi (1) formula bo'yicha B nuqtaning yangi koordinatasi b' ga teng bo'ladi. Demak, A dan B gacha bo'lgan masofa $|b|$ ga, ya'ni $|b - a|$ ga teng.

Shunday qilib, biz $A(a)$ va $B(b)$ nuqtalar orasidagi masofa $|b - a|$ ga tengligini isbotladik:

$$|AB| = |b - a|. \qquad (1)$$

Bu formula a va b koordinatalarning turli ishoralarida o'rinli.

3-m a s a l a. $A(94)$ va $B(-6)$ nuqtalar orasidagi masofani topaylik.

(1) formula bo'yicha:

$$|AB| = |-6 - 4| = |-10| = 10.$$

3-m i s o l. $|x - 7| \leq 7$ tengsizlikni yechamiz.

Bu tengsizlikning geometrik ma'nosi quyidagicha: shunday B nuqtalarni topish kerakki, B dan $A(4)$ gacha masofa 7 birlikdan katta bo'lmasin. Bunday nuqtalarning barchasi koordinatalari $4 - 7 = -3$ va $4 + 7 = 11$ bo'lgan nuqtalar orasida yotadi. Demak, $-3 \leq x \leq 11$.

4-m a s a l a. Agar $|AC| : |CB| = m : n$ bo'lsa, AB kesmaning C nuqtasi uni $m : n$ kabi nisbatda bo'ladi, uchlari $A(x_1)$ va $B(x_2)$ bo'lgan kesmaning C nuqtasi uni $m : n$ nisbatda bo'lsa, shu nuqtaning x koordinatasini topamiz.

Soddalik uchun $x_1 < x_2$ deymiz (biz keltirib chiqaradigan formula $x_1 > x_2$ bo'lganda ham to'g'ri). $C(x)$ nuqta $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasida yotgani uchun $x_1 < x < x_2$. Shuning uchun $x - x_1 > 0$ va, demak, $|AC| = |x - x_1| = x - x_1$. Xuddi shuningdek, $x_2 - x > 0$ va shuning uchun $|CB| = x_2 - x$. Shuning uchun $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n}$ shartdan $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$ kelib chiqadi. Bu tenglamadan $n(x - x_1) = m(x_2 - x)$ ni topamiz, bundan $x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$.

Shunday qilib, AB kesmani $m : n$ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatasi

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda x_1 shu A nuqtaning koordinatasi, x_2 esa B nuqtaning koordinatasi.

Xususan, kesma o'rtasi uni 1 : 1 nisbatda bo'ladi. Demak, kesma o'rtasining koordinatasi

$$x_{o'rt} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (3)$$

formula bilan ifodalanadi.

5-m a s a l a. Agar $A = A(5)$, $B = B(-9)$ bo'lsa, AB kesma o'rtasining koordinatasini topamiz. (3) formula bo'yicha:

$$x_{o'rt} = \frac{5 + (-9)}{2} = -2.$$

6-m a s a l a. Agar $A(1)$ va $B(9)$ bo'lsa, AB kesmani 2 : 3 kabi nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatasini topamiz.

(2) bo'yicha:

$$x = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-9)}{2+3} = \frac{-15}{5} = -3.$$

7-m a s a l a. Mos ravishda A va B nuqtalarda yotuvchi m_1 va m_2 massalarning og'irlik markazi AB kesmada yotadi va uni $m_2 : m_1$ nisbatda bo'ladi. Agar m_1 massa $A(x_1)$ nuqtada, m_2 massa $B(x_2)$ nuqtada yotsa, og'irlik markazining koordinatasini topamiz.

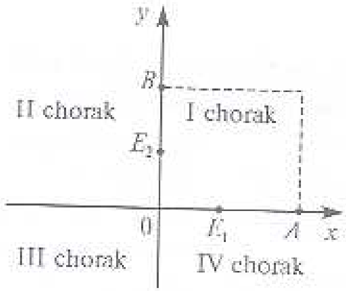
(2) formula bo'yicha:

$$x_{o.t} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

1. Agar a) $a = -6$, $b = 12$; b) $a = -12$, $b = -6$; d) $a = 7$, $b = -4$; e) $a = -3$, $b = -19$ bo'lsa, $A(a)$ va $B(b)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
2. $A(3)$ nuqtadan 7 birlik uzoqlikdagi nuqtalarni toping.
3. Tenglamalarni yeching:
$|x| = 3$; $|x| = 0$; $|x+2| = 4$; $|x-2| = -2$.
4. Tengsizlikning yechimini koordinata to'g'ri chizig'ida tasvirlang.
$|x| > 4$; $|x+5| \geq 3$; $|2x-4| < 3$.
5. Tengsizliklarni yeching:
a) $|x-3| < 6$; b) $|+5| \leq 9$; d) $|2x+12| \leq 8$; e) $|13x-15| < 9$.
6. Agar a) $a = 8$, $b = 22$, $m = 3$, $n = 4$; b) $a = 27$, $b = 9$, $m = 2$, $n = 1$ bo'lsa, $A(a)$ va $B(b)$ nuqtalarni $m:n$ kabi nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatasini toping.
7. $C(4)$ nuqta AB kesmani $5:2$ kabi nisbatda bo'ladi. Agar B nuqtaning b koordinatasi 8 ga teng bo'lsa, A nuqtaning a koordinatasini toping.

2-§. TEKISLIKDA KOORDINATALAR

2.1. Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi. To'g'ri chiziqdagi har bir nuqtaga uning koordinatasini mos keltirish uchun to'g'ri chiziqda koordinatalar sistemasini, ya'ni $(O; E)$ nuqtalar juftini qarab chiqdik. Tekislikda nuqtalar o'rni ikki son — abssissa va ordinata bilan beriladi. Bu sonlarni aniqlash uchun avval tekislikda koordinatalar sistemasini yasaymiz. Buning uchun tekislikda shunday nuqtalar uchligi — $(O; E_1; E_2)$ ni tanlab olamizki, unda OE_1 va OE_2 to'g'ri chiziqlar perpendikular, OE_1 va OE_2 kesmalar uzunliklari birga teng bo'lsin; $|OE_1| = |OE_2| = 1$ (IV.9-rasm).



IV.9-rasm.

U holda OE_1 va OE_2 to'g'ri chiziqlarning har biri sanoq boshi O bo'lgan koordinata to'g'ri chizig'i bo'ladi. Ularning birinchisi *abssissalar o'qi* deyiladi va Ox bilan belgilanadi, ikkinchisi *ordinatalar o'qi* deyiladi va Oy bilan belgilanadi. Ikkala o'qning majmuasi *to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi* xOy deyiladi. Odatda, rasmda abssissalar o'qi gorizontal qilib olinadi va unda musbat yo'nalish chapdan

o'ngga qarab tanlanadi, ordinatalar o'qi esa vertikal bo'lib, unda musbat yo'nalish pastdan yuqoriga qarab tanlanadi. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan tekislik *koordinata tekisligi* deyiladi. Koordinata o'qlari koordinata tekisligini choraklar deb ataluvchi 4 ta qismga bo'ladi.

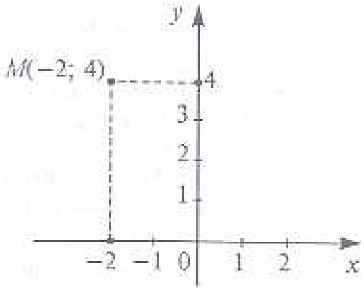
Endi biz koordinata tekisligida M nuqtaning vaziyatini (o'rnini) aniqlovchi sonlarni ko'rsata olamiz. Buning uchun M nuqtadan abssissalar va ordinatalar o'qlariga perpendikularlar tushiramiz. A nuqta abssissalar o'qining unga tushirilgan perpendikular bilan kesilgan nuqtasi bo'lsin. A nuqtaning koordinatasi (Ox koordinata to'g'ri chizig'ida) M nuqtaning *abssissasi*, B nuqtaning koordinatasi (Oy koordinata to'g'ri chizig'ida) esa *ordinatasi* deymiz. x va y sonlar M nuqtaning *to'g'ri burchakli dekart koordinatalari* deyiladi. Agar M nuqtaning koordinatalar x va y bo'lsa, $M(x; y)$ qilib yoziladi.

Quyidagi jadvalda koordinatalar ishoralari ko'rsatilgan:

Chorak	Abssissa	Ordinata
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Abssissalar o'qidagi barcha nuqtalarning ordinatalari nolga teng, shuningdek, ordinatalar o'qidagi barcha nuqtalarning abssissalari ham nolga teng. Koordinatalar boshi O ning ikki koordinatasi ham nolga teng.

1-masala. $M(-2; 4)$ nuqtani yasaymiz. Buning uchun abssissalar o'qida chap tomonda uzunligi 2 bo'lgan OA kesma ajratamiz, ordinatalar o'qida yuqoriga uzunligi 4 bo'lgan OB kesma ajratamiz. Hosil bo'lgan nuqtalardan o'qlarga perpendikularlar o'tkazamiz (IV.10-rasm).



IV.10-rasm.

Izlanayotgan M nuqta bu perpendikularning kesishgan nuqtasidir. Shu natijani boshqacha usulda ham chiqarish mumkin. Avval A nuqta yasaladi, keyin shu nuqta orqali abssissalar o'qiga perpendikular o'tkazamiz va unda yuqoriga qarab uzunligi 4 bo'lgan kesma ajratamiz.

IV.11-rasm.

2-masala. M nuqtaning koordinatalarini topamiz (IV.11-rasm).

M nuqtadan koordinata o'qlariga perpendikularlar tushiramiz. A nuqta O nuqtadan o'ngda 5 birlikdagi masofada, B nuqta esa O nuqtadan pastda 3 birlik masofada bo'lgani uchun M nuqtaning koordinatalari 5 va 3 ga teng, ya'ni $M = M(5; -3)$.

Shuni eslatib o'tamizki, agar M nuqtaning koordinatlari a va b bo'lsa, ya'ni $M = M(a; b)$ bo'lsa, u holda uning abssissa o'qi bilan proyeksiyasi (M nuqtadan abssissalar o'qiga tushirilgan perpendikular asosi) a va 0 koordinatalarga ega, ya'ni $A(a; 0)$; uning ordinatalar o'qiga tushirilgan proyeksiyasi 0 va b koordinatalarga ega, ya'ni $B(0; b)$.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

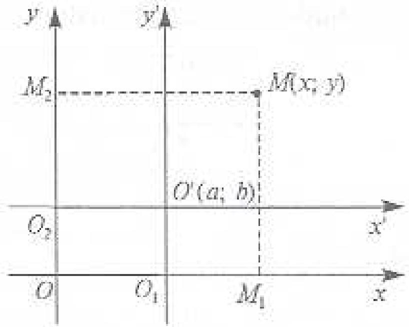
1. Koordinata tekisligi qanday elementlardan taskil topadi?
2. Koordinata tekisligida siniq chiziqdan iborat shaklni uning uchlari koordinatalari bilan tutashtirish tartibida bering.
3. Koordinata tekisligida $M(x; y)$ nuqtani va $M_1(|x|; y)$, $M_2(x; |y|)$, $M_3(|x|; |y|)$ nuqtalarni belgilang. Bu nuqtalarning hammasi ustma-ust tushishi uchun M nuqtaning koordinatalari qanday bo'lishi kerak? Qanday holda to'rtta turli nuqta hosil bo'ladi? Koordinata o'qlarida M, M_1, M_2, M_3 nuqtalar proyeksiyalarining koordinatalarini yozing.
4. Uchlari $A(-4; 0)$, $B(0; 6)$, $C(-1; -1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak yasang.
5. Markazlari $A(3; -4)$ nuqtada bo'lgan va bittasi abssissa o'qiga urinuvchi, ikkinchisi ordinata o'qiga urinuvchi ikkita aylana yasang.
6. Markazi $A(3; -4)$ nuqtada bo'lgan va koordinatalar boshidan o'tuvchi aylana yasang.
7. Uchlari $A(2; 7)$, $B(6; 5)$, $C(8; 1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak yasang. AB, BC, CA kesmalarni mos ravishda teng ikkiga bo'luvchi M, N, P nuqtalarning koordinatlarini toping va MNP uchburchak yasang.

8. $A(1; 2)$, $B(-4; -3)$ nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazing hamda markazi $C(1; 1)$ nuqtada va radiusi 5 bo'lgan aylana yasang. Chizma bo'yicha to'g'ri chiziq bilan aylananing kesishish nuqtalarining koordinatalarini aniqlang.

2.2. Tekislikda koordinatalarni almashtirish.

Bitta tekislikning o'zida to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini turlicha tanlab olish mumkin.

a) *Koordinatalar boshini ko'chirish.* xOy koordinatalar sistemasini olamiz va koordinata tekisligidagi $O'(a; b)$ nuqtani tanlab olamiz. Bu nuqta orqali koordinatalar o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va ularda xOy sistemaning abssissalar va ordinatalar o'qlari yo'nalishlari bilan bir xil yo'nalishlarni tanlab olamiz (IV.12-rasm). xOy sistemadagi kabi birlik kesmani tanlab olsak, $x'O'y'$ koordinata sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema xOy sistemadagi *koordinatalar boshini O' nuqtaga ko'chirish bilan hosil qilingan* deyiladi.



IV.12-rasm.

Koordinata tekisligida birorta M nuqtani olamiz. xOy sistemada bu nuqtaning koordinatalari x' va y' ga, yangi sistemada esa x' va y' ga teng bo'lsin. x' va y' larni x va y lar orqali ifodalovchi formulalarni keltirib chiqaramiz. Buning uchun O' va M nuqtalardan abssissalar va ordinatalar o'qlariga perpendikular tushiramiz.

Abssissalar o'qida abssissalari a va x bo'lgan O_1 va M_1 nuqtalarni hosil qilamiz. Koordinatalar boshini ko'chirish formulasiga ko'ra koordinata to'g'ri chizig'ida (1.2-banddagi (1) formula) $x' = x - a$ ni hosil qilamiz. $y' = y - b$ formula ham xuddi shunday isbotlanadi. Shunday qilib, x' va y' ni *x va y lar orqali ifodalovchi formulalar quyidagi ko'rinishga ega:*

$$\begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b, \end{cases} \qquad (1)$$

bunda, a va b yangi koordinata boshining koordinatalari.

b) *O'qlar yo'nalishlarini o'zgartirish.* Koordinatalar boshi qo'zg'almas bo'lib, o'qlar yo'nalishlari qarama-qarshisiga o'zgarsin. Ma'lumki, bunda ikkala koordinata o'z ishoralarini o'zgartiradi, ya'ni

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \qquad (2)$$

d) *Masshtabni o'zgartirish.* Endi koordinatalar boshini va o'qlar yo'nalishini o'zgartirmasdan, birlik kesma uzunligini k marta o'zgartirilsa, koordinatalarning qanday o'zgarishini qaraymiz. To'g'ri chiziqda koordinata sistemasidagi kabi bunda ham

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{k}, \\ y' = \frac{y}{k} \end{cases} \qquad (3)$$

ni keltirib chiqaramiz.

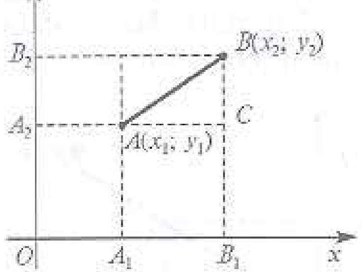
SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Tekislikda koordinatalarni almashtirishning qanday turlari bilan tanishdingiz?
Misollar keltiring.
2. Koordinatalar boshi $O'(4; 3)$ nuqtaga ko'chirilgan. $A(5; 2)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -6)$ nuqtalarning yangi koordinatalari qanday?
3. Koordinatalar boshi ko'chirilgandan keyin $A(-4; 6)$ nuqtaning yangi koordinatalari 3 va -5 ga teng. $B(3; 1)$, $C(-1; 8)$, $D(-12; -3)$ nuqtalarning yangi koordinatalarini toping.
4. Koordinata boshi $O'(-5; -1)$ ga ko'chirilgandan keyin $A(x; y)$ nuqtaning yangi koordinatalari 2 va 4 ga teng bo'lsa, $A(x; y)$ nuqtaning koordinatalarini toping.

5. Agar koordinatalar boshi qo'zg'almas bo'lib, abssissalar o'qining yo'nalishi teskariga o'zgargan bo'lsa, koordinatalarni almashtirish formulalarini yozing.
6. Agar koordinatalar boshi o'zgarmas bo'lib, ordinatalar o'qining yo'nalishi teskarisiga almashgan bo'lsa, koordinatalarni almashtirish formulasi qanday bo'ladi?
7. Agar koordinatalar boshi va o'qlar yo'nalishi o'zgarmasdan, birlik kesma uzunligi 3 marta ortsa, $A(0; 3)$, $B(-6; -12)$, $C(-3; 15)$ nuqtalarning yangi koordinatalari qanday bo'ladi? Agar birlik kesma uzunligi 5 marta kamaysa, bu nuqtalarning koordinatalari qanday bo'ladi?

2.3. Tekislikda analitik geometriyaning ba'zi masalalari. Tekislikda geometrik masalalarni qanday yechishni ko'rsatamiz.

1-masala. Koordinata tekisligida $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz (IV.13-rasm).



IV.13-rasm.

A va B nuqtalardan koordinata o'qlariga perpendikularlar tushiramiz. AB kesma ACB to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi.

To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi Pifagor teoremasiga ko'ra: $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$. AC va BC kesmalar uzunliklarini topish kerak. Ammo AC va $A_1 B_1$ kesmalar uzunliklari bir xil, A_1B_1 kesmaning uzunligi $|x_2 - x_1|$ ga teng (A_1 nuqta A nuqta kabi x_1 abssissaga, B_1 nuqta ega B nuqta kabi x_2 abssissaga ega). Shuning uchun $|BC|^2 = |A_1 B_1|^2 = |x_2 - x_1|^2 = q(x_2 - x_1)^2$. Shuningdek, $|AC|^2 = q|y_2 - y_1|^2$ aniqlanadi.

Demak, $|AC|^2 + |BC|^2 (x_2 - x_1)^2 + |y_2 - y_1|^2$.

Shunday qilib,

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

2-masala. $A(3; 6)$ va $B(6; 2)$ nuqtalar orasidagi masofani topamiz. (1) formula bo'yicha:

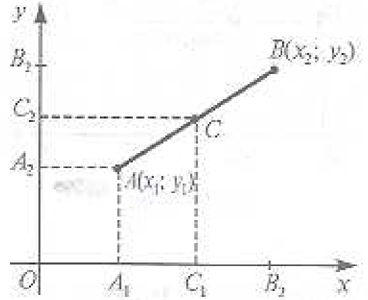
$$|AB| = \sqrt{(6-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

3-masala. Ordinata o'qida A (6; 3) nuqtadan 10 ga teng masofada yotuvchi nuqtani topamiz.

Ordinata o'qida har qanday nuqtaning abssissasi nolga teng. Shuning uchun izlanayotgan nuqtani $B(O; y)$ ko'rinishda yozish mumkin, bu nuqtadan $A(6; 3)$ nuqtagacha bo'lgan masofa $\sqrt{(0-6)^2+(y-3)^2}$ ga teng. Masala shartiga ko'ra

$$\sqrt{36+(y-3)^2}=10.$$

Bu tenglamadan: $36 + (y - 3)^2 = 100$. Shuning uchun $(y - 3)^2 = 64$, demak, $y - 3 = \pm 8$, bundan $y_1 = 11$, $y_2 = -5$. Demak, ordinatalar o'qida A nuqtadan 10 masofada yotuvchi ikkita nuqta bor ekan: $B_1(0; 11)$ va $B_2(0; -5)$.



IV-14-rasm.

4-masala. Uchlari $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalarda bo'lgan kesma o'rtasi C ning koordinatalarini topamiz (IV.14-rasm).

Buning uchun A, B va C nuqtalardan abssissalar o'qiga perpendikular tushiramiz. A_1B_1 kesmaning o'rtasi C nuqtadir. Demak, uning abssissasi $\frac{x_1+x_2}{2}$ ga teng. Xuddi shunday, C_2 nuqtaning ordinatasi $\frac{y_1+y_2}{2}$ ga tengligi aniqlanadi.

Shuning uchun C nuqta quyidagi koordinatalarga ega:

$$x_{o'r} = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_{o'r} = \frac{y_1+y_2}{2} \tag{2}$$

5-masala. Uchlari $A(-6; 5)$ va $B(3; -7)$ nuqtalarda bo'lgan kesma o'rtasining koordinatalarini topamiz. (2) formula bo'yicha:

$$x_{o'r} = \frac{-6+3}{2} = -1,5; \qquad y_{o'r} = \frac{5-7}{2} = -1.$$

1. Koordinata tekisligida bir uchi koordinata boshida bo'lgan kesma uzunligini topish formulasini keltirib chiqaring.
2. Koordinata o'qlarida yotgan nuqtalar orasidagi masofani topish formulalari qanday bo'ladi?
3. Uchlari: a) $M(-3; 2)$, $N(5; -2)$; b) $M(2; 7)$, $N(6; 4)$ nuqtalarda bo'lgan MN kesma uzunligini toping.
4. Uchlari $A(0; 5)$, $B(-5; 3)$, $C(4; -5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak berilgan. AB va AC tomonlar o'rtalarini tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.
5. M nuqtaning abssissasi 7 ga, M nuqtadan $N(-1; 5)$ nuqtagacha masofa 10 ga teng. M nuqtaning ordinatasini toping.
6. $ABCD$ trapetsiya berilgan: $A(1; 3)$, $B(-2; 8)$, $C(0; 7)$, $D(5; 1)$. Uning o'rta chizig'i uzunligini toping.
7. $A(-1; 2)$ va $B(3; 5)$ nuqtalar berilgan. $ABCD$ kvadratning yuzini va perimetrini toping.
8. Uchlari $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(5; -1)$ bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli ekanligini isbotlang.
9. $ABCD$ kvadrat uchta uchining koordinatalari ma'lum: $A(2; 6)$, $B(5; 6)$, $C(5; 3)$. Kvadrat markazining koordinatalarini, uning to'rtinchi uchini va yuzini toping.

3-§. SONLI VA HARFIY IFODALAR

3.1. Sonli ifodalar. Masala. A va B shaharlar orasidagi masofa 240 km. A shahardan 20 km/soat tezlikda velosipedchi yo'lga chiqdi, 3 soatdan keyin B shahardan unga qarshi 70 km/soat tezlikda avtomobil yo'lga chiqdi. Avtomobil yo'lga chiqqanidan necha soat keyin uchrashuv sodir bo'ladi?

Avval velosipedchi 3 soatgacha qancha yo'l bosganini topamiz. Buning uchun 20 ni 3 ga ko'paytirish kerak. Buni amalni bajarmasdan, $20 \cdot 3$ deb yozamiz. Shundan keyin velosipedchi 3 soatdan keyin B shahardan qancha masofada bo'lishini topamiz: $240 - 20 \cdot 3$. Keyin velosipedchi va avtomobilning yaqinlashishi tezligini aniqlaymiz: $20 + 70$. Va, nihoyat, avtomobil yo'lga chiqqandan necha soat keyin uchrashuv sodir bo'lishini topamiz: $(240 - 20 \cdot 3) : (20 + 70)$.

Masalani yechish natijasida biz sonli ifoda $(240 - 20 \cdot 3) : (20 + 70)$ni hosil qildik. Bu ifodada amallar belgilangan bo'lib, javobini topish uchun masala shartida berilgan sonlar ustida bu amallarni bajarish kerak, ya'ni bu ifoda javobni topish uchun hisoblash dasturidir. Bu dasturni bajarib, sonli ifodaning qiymatini topamiz:

$$(240 - 20 \cdot 3) : (20 + 70) = (240 - 60) : 90 = 180 : 90 = 2.$$

Demak, uchrashuv avtomobil yo'lga chiqqandan 2 soatdan keyin sodir bo'lar ekan.

Sonli ifoda tushunchasi umumiy ko'rinishda bunday ta'riflanadi:

a) har bir son sonli ifodadir;

b) agar (A) va (B) lar sonli ifodalar bo'lsa, u holda $(A) + (B)$, $(A) - (B)$, $(A) \cdot (B)$, $(A) : (B)$ lar ham sonli ifodalardir.

Ko'rsatilgan amallarni bajarib, sonli ifodaning qiymati topiladi. Agar bu ta'rifga amal qilinsa, juda ko'p qavslar yozishga to'g'ri kelar edi. Masalan, $(2) + (3)$ yoki $(7) \cdot (9)$. Yozuvni qisqartirish uchun ayrim sonlarni qavs ichiga olmaslikka kelishilgan. Bundan tashqari, agar bir necha ifoda qo'shiladigan yoki ayriladigan bo'lsa, qavslarni yozmaslikka kelishilgan, bu amallar tartib bo'yicha chapdan o'ngga qarab bajariladi. Xuddi shuningdek, bir necha son ko'paytirilsa yoki bo'linsa, qavslar yozilmaydi, bu amallar tartib bo'yicha chapdan o'ngga qarab bajariladi. Masalan, bunday yoziladi:

$$25 - 4 + 61 - 14 - 42 \text{ yoki } 60 : 3{,}5 \cdot 15 : 25.$$

Nihoyat, avval ikkinchi bosqich amallarni (ko'paytirish va bo'lishni), keyin birinchi bosqich amallari (qo'shish va ayirishni) bajariladi. Shuning uchun $(12 \cdot 4 : 3) + (5 \cdot 8 : 2 \cdot 7)$ ifoda bunday yoziladi: $12 \cdot 4 : 3 + 5 \cdot 8 : 2 \cdot 7$.

Shunga muvofiq ravishda sonli ifodaning qiymatini hisoblash amallar tartibi bo'yicha bajariladi:

1) *Agar sonli ifodada qavslar bo'lmasa, uni bir-biridan qo'shish va ayirish belgilari bilan ajraladigan qismlarga bo'lib, har bir qismning qiymati topiladi, bunda ko'paytirish va bo'lish chapdan o'ngga qarab tartib bilan bajariladi; shundan keyin har bir qismni uning qiymati bilan almashtiriladi va qo'shish va ayirish amallarini chapdan o'ngga qarab tartib bilan bajarib, ifodaning qiymati topiladi.*

2) *Agar sonli ifodada qavslar bo'lsa, ifodaning chap va o'ng qavslar ichidagi va boshqa qavslar qatnashmagan qismlari olinadi, 1- qoida bo'yicha ularning qiymatlari topiladi va qavslarni tashlab, qismlar topilgan qiymatlar bilan almashtiriladi. Agar shulardan keyin qavssiz ifoda hosil bo'lsa, bu ifoda 1-qoida bo'yicha hisoblanadi. Aks holda yana 2-qoidani qo'llash kerak bo'ladi.*

Masalan, $((36 : 2 - 14) \cdot (42 \cdot 2 - 14) + 20) : 2$ ifodaning qiymatini topish kerak bo'lsin.

Avval

$$36 : 2 - 14 = 18 - 14 = 4, \quad 42 \cdot 2 - 14 = 84 - 14 = 70$$

ni topamiz. $36 : 2 - 14$ va $42 \cdot 2 - 14$ ni ularning qiymatlari bilan almashtirilib, hosil qilamiz:

$$(4 \cdot 70 + 20) : 2 = (280 + 20) : 2 = 300 : 2 = 150.$$

Demak, berilgan ifodaning qiymati 150 ga teng ekan.

Shuni aytish kerakki, har qanday sonli ifoda ham qiymatga ega bo'lavermaydi. Masalan, $8 : (4 - 4)$ va $(6 - 6) : (3 - 3)$ ifoda sonli qiymatga ega emas, chunki nolga bo'lish mumkin emas.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi ifodalarning qaysilari sonli ifoda bo'ladi: a) 3; b) -17; d) $41 + 19$; e) $(11 + 9) : (9 - 4)$; f) $31 + 5 = 4 \cdot 9$; g) $48 : 3 : 4 + 6$; h) $14 + 7 > 2 : 2 + 5$; i) $3x + 5 = 0{,}2x - 4$; j) $41 + 2a - 0{,}3b$; k) $2^2 \cdot \sqrt{3}$?

2. Ko'rsatilgan hamma amallarni bajaring va ifodalarning qiymatini toping:

a) $0{,}039 : \left(\frac{1}{20} \cdot (2{,}31 : 0{,}077)\right)$;

b) $\frac{5{,}2 + 17{,}25 - (3{,}36 : 0{,}3)}{(2{,}7 : 0{,}18) + (0{,}65 : 0{,}13)} : 0{,}05$;

d) $\frac{(2{,}1 - 1{,}965) : (0{,}12 \cdot 0{,}45)}{0{,}0325 : 0{,}13} - \frac{1 : 0{,}25}{0{,}16 \cdot 6{,}25}$;

e) $\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{2{,}5 + 3\frac{1}{3}}{2{,}5 - 3\frac{1}{3}} : \frac{4\frac{3}{5} + 2\frac{1}{3}}{4{,}6 - 2\frac{1}{3}}\right) : \left(\frac{0{,}25 - 0{,}2}{\frac{1}{7} - 0{,}125} - 0{,}2\right)$.

3. Agar barcha oraliq amallarning joiz natijalari sifatida faqat nomanfiy butun sonlar qaralsa, ifodaning qiymati mavjud bo'ladimi:

a) $((4-7)+3\cdot 5))\cdot(8-6)$; b) $((5+7):24)\cdot 16-5$;

d) $(3\cdot 7-6\cdot 8)+15-10$?

Agar oraliq natijalar faqat butun sonlar bo'lsa, bu ifodalar qiymatga ega bo'ladimi?

3.2. Sonli tengsizliklar. Tartib munosabatiga asosiy misol qilib haqiqiy sonlar to'plamidagi «kichik» munosabati olinadi, bu munosabat < kabi belgilanadi. Bu munosabat qat'iy chiziqli tartib munosabati ekanligini, ya'ni bu munosabat nosimmetrik va tranzitiv ekanligini, shu bilan birga har qanday ikkita turli haqiqiy x va y sonlar uchun $x<y$ yoki $y<x$ munosabatlardan faqat va faqat bittasi bajarilishini isbotlash mumkin. So'ngra $y-x>0$ bo'lgan holdagina $x<y$ bo'lishini isbotlash mumkin. Bunda $a>0$ va $b>0$ lardan $a+b>0$ va $ab>0$ tengsizliklar kelib chiqadi.

Sonli tengsizliklarning qaralgan xossalaridan uning qolgan hamma xossalarini chiqarish mumkin.

1°. $x<y$ tengsizlikning ikkala qismiga bir xil sonni qo'shish bilan $x<y$ munosabat o'zgarmaydi (bu xossa qo'shishga nisbatan tartib munosabatining monotonligidir). Boshqacha aytganda, agar $x<y$ bo'lsa, har qanday a son uchun $x+a<y+a$ tengsizlik bajariladi.

Haqiqatan, $x<y$ dan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ammo $(y+a)-(x+a)=y-x>0$, shuning uchun

$$x+a<y+a$$

$x-a=x+(-a)$, $y-a=y+(-a)$ bo'lgani uchun $x<y$ dan $x-a<y-a$ kelib chiqadi.

2°. Agar $x<y$ va $a<b$ bo'lsa, $x+a<y+a$ bo'ladi.

Haqiqatan, u holda $y-x>0$ va $b-a>0$, shuning uchun $(y+b)-(x+a)=(y-x)+(b-a)>0$.

3°. *$x<y$ tengsizlikning ikkala qismini bir xil musbat songa ko'paytirish bilan $x<y$ munosabat o'zgarmaydi*, ya'ni $x<y$ va $a>o$ dan $ax<a$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan, $x<y$ dan $e-x>0$ kelib chiqadi. Ikkita musbat sonning ko'paytmasi musbat bo'lgani uchun $a(y-x)>0$ bo'ladi. $A(y-x)=ay-ax$ bo'lgani uchun $ax<ay$ tengsizlik kelib chiqadi.

4°. *Agar x_l y_l a_l b — musbat sonlar bo'lsa, $x<y$ va $a<b$ tengsizliklardan $ax<by$ tengsizlik kelib chiqadi.*

Haqiqatan, $x<y$ va a ning musbatligidan $ax<ay$, $a<b$ va y ning musbatligidan $ay<by$ kelib chiqadi. U holda tengsizlik munosabati tranzitiv bo'lgani uchun $ax<ay$ va $ax<by$ kelib chiqadi.

$y>x$ tengsizlik $x<y$ tengsizlikka ekvivalent. Ikkala tengsizlik bir vaqtning o'zida rost yoki yolg'on. Tengsizlikning < va > belgilari (ishoralari) o'zaro teskaridir.

5°. *Tengsizlikdagi sonning ishorasi o'zgarishi bilan bu tengsizlik teskari ma'nodagi tengsizlikka almashadi: agar $x<y$ bo'lsa, $-x>-y$ bo'ladi.*

Haqiqatan, $x<y$ tengsizlik $y-x>0$ ekani anglatadi. Ammo $y-x=(-x)-(y)$, shuning uchun $(-x)-(-y)>0$, ya'ni $-y<-x$ bo'ladi.

6°. *Tengsizlikning ikkala qismini manfiy songa ko'paytirish bilan tengsizlik ishorasi (belgisi) teskari ma'nodagi ishoraga (belgiga) almashinadi: agar $x<y$ va a manfiy bo'lsa, $ax>ay$ bo'ladi.*

Haqiqatan, a manfiy songa ko'paytirishni $|a|$ musbat songa ko'paytirish bilan (bunda tengsizlik belgisi saqlanadi) va (-1) ga ko'paytirish bilan almashtirish mumkin, bunda bu belgi teskari ma'nodagi belgiga almashadi.

7°. Agar $0<x<y$ yoki $x<y<0$ bo'lsa, $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$ bo'ladi.

Isbotlash uchun $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$ ekanligini bilish yetarli. x va y sonlar shartga ko'ra bir xil ishoraga ega bo'lgani uchun xy — musbat son, shuning uchun $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ va $y-x$ ning ishoralari bir xil. $y-x$ musbat bo'lgani uchun $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ musbat, ya'ni $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

$x<y$ va $x>y$ munosabatlar bilan bir qatorda $x\leq y$ va $x\geq y$ munosabatlar qaraladi. $x\leq y$ tengsizlik $x<y$ va $x=y$ tengsizliklarning dizyunksiyasidir va shuning uchun ulardan bittasi rost bo'lsa, $x\leq y$ rost bo'ladi. Masalan, $4\leq 10$ rost, chunki $4<10$ rostdir. Xuddi shuningdek, $4\leq 4$ tengsizlik rost, chunki $4=4$ rostdir. $4\leq 3$ tengsizlik yolg'ondir, chunki $4<3$ va $4=3$ larning ikkalasi yolg'on.

$x<y<z$ qo'sh tengsizlik $x<y$ va $y<z$ tengsizliklarning konyunksiyasidir, tengsizliklarning ikkalasi rost bo'lsa, qo'sh tengsizlik ham rost bo'ladi. Masalan, $4<x<10$ qo'sh tengsizlik rostdir, chunki $4<8$ va $8<10$ tengsizliklarning ikkalasi ham rost; $4<10<8$ qo'sh tengsizlik esa yolg'on, chunki $4<10$ tengsizlik rost bo'lsa ham tengsizlik yolg'ondir.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi yozuvlarning qaysilari sonli tengsizlik bo'ladi:
   a) $41 < 14$; b) $2a + 4 > 24$;
   d) $84 \cdot (43 - 8)$; e) $64 - 4,9 > 44 - 36 : 18$?
2. Sonli tengsizliklarning qanday xossalari bilan tanishdingiz?
3. Quyidagi tengsizliklarning qaysilari rost:
   a) $5 \le 9$; b) $-4 \le 5$;
   e) $0 \le 0$; f) $\sqrt[3]{7} > \sqrt{8}$;
   d) $2 \ge 0$; g) $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$?
4. Quyidagi qo'sh tengsizliklarning qaysilari rost:
   a) $-6 \le -6 < 0$; b) $8 < 3 \le 11$;
   d) $-4 \le 0 \le 4$; e) $7 < 0 < 7$?

3.3. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi. Ikkita sonli ifoda A va B berilgan bo'lsin. Bu ifodalardan $A = B$ tenglik va $A > B$, $A < B$ va shunga o'xshash tengsizliklarni tuzishimiz mumkin. Bu tenglik va tengsizliklar jumlalar bo'lib, ular rost yoki yolg'on bo'lishi mumkin. A va B ifodalar bir xil sonli qiymatga ega bo'lsa, $A = B$ rost hisoblanadi. Masalan, $2 + 7 = 3 \cdot 3$ tenglik rost, chunki bu tenglikning chap va o'ng qismlari 9 ga teng. $7 + 5 = 4 \cdot 5$ tenglik esa yolg'on, chunki uning chap qismi 12 ga, o'ng qismi 20 ga teng. $6 : (2 - 2) = 5$ tenglik ham yolg'on, chunki $6 : (2 - 2)$ ifoda sonli qiymatga ega emas.

Shuni eslatib o'tamizki, agar faqat natural sonlar to'plamini qarasak, $4 - 8 + 10 = 2 \cdot 3$ tenglik yolg'on, chunki N to'plamda $4 - 8$ ifodaning qiymati aniq emas. Biroq natural sonlar to'plamini kengaytirib va manfiy sonlarni kiritgandan keyin bu tenglik rost bo'ladi, chunki uning ikkalasi qiymati 6 ga teng.

Sonli ifodalarning tenglik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga esa, ya'ni bu munosabat ekvivalent munosabatdir. Shuning uchun barcha sonli ifodalar to'plami ekvivalentlik guruhlariga bo'linadi, bu guruhlarga bir xil qiymatga ega bo'lgan ifodalar kiradi. Masalan, bitta ekvivalentlik guruhiga $5 + 1$, $9 - 3$, $2 \cdot 3$, $12 : 2$ va boshqa ifodalar (ulardan har birining qiymati 6 ga teng) kiradi.

Yuqorida berilgan ta'rifdan, agar $A = B$ va $C = D$ tengliklar rost bo'lsa (bunda, A, B, C, D — sonli ifodalar), u holda tegishli amallarni bajarish natijasida hosil bo'lgan

$$(A) + (C) = (B) + (D); \qquad (A) - (C) = (B) - (D);$$
$$(A) \cdot (C) = (B) \cdot (D); \qquad (A) : (C) = (B) : (D)$$

tengliklar ham rost bo'ladi.

$A < B$ tengsizlikni (bunda, A va B — sonli ifodalar) biz rost deymiz, agar A va B ifodalar sonli qiymatlarga ega bo'lib, shu bilan birga A ifodaning sonli qiymati B ifodaning sonli qiymatidan kichik bo'lsa. Masalan, $(18 - 3) : 5 < 3 + 4$ tengsizlik rost, chunki $(18 - 3) : 5$ ning qiymati 3 ga, $3 + 4$ ning qiymati 7 ga teng, $3 < 7$.

$A = B$, $C < D$ ko'rinishdagi yozuvlar (bunda, A, B, C, D — sonli ifodalar) mulohaza (jumla) bo'lgani uchun biz ular ustida konyunksiya, dizyunksiya, implikatsiya va boshqa mantiqiy amallarni bajarishimiz mumkin. Masalan, $A \le B$ tengsizlik $A < B$ tengsizlik va $A = B$ tenglikning dizyunksiyasidir:

$$A \le B = (A < B) \cup (A = B).$$

$A \le B$ tengsizlik $A < B$, $A = B$ mulohazalardan aqalli bittasi rost bo'lsa ham rost bo'ladi. Masalan, $(2 \cdot 4 + 15) \cdot 2 \le 35 + 19$ tengsizlik rost, chunki $(2 \cdot 4 + 15) \cdot 2$ ifodaning qiymati 46 ga teng, $35 + 19$ ning qiymati esa 54 ga teng, $46 < 54$ tengsizlik rost.

$A < B < C$ qo'sh tengsizlik $A < B$ va $B < C$ tengsizliklarning konyunksiyasidir. Bu qo'sh tengsizlik $A < B$ va $B < C$ tengsizliklarning ikkalasi ham rost bo'lsa, rost bo'ladi. Masalan, $16 + 4 < 125 : 5 < 3 \cdot 10$ tengsizlik rost. Haqiqatan, $16 + 4$ ning qiymati 20 ga, $125 : 5$ ning qiymati 25 ga, $3 \cdot 10$ ning qiymati 30 ga teng. $20 < 25$ va $25 < 30$ bo'lgani uchun qo'sh tengsizlik rost bo'ladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Tengliklarning rostligini tekshiring:
   a) $\frac{1917}{852} = 2\frac{1}{4}$; b) $-\sqrt[3]{64} = -4$;
   d) $\sqrt[3]{-64} = -4$; e) $|7 - 9| = |9 - 7|$;
   f) $|3| = 3$; g) $(4 + \sqrt{7})(4 - \sqrt{7}) = 3^2$;
   h) $|3 - |-5|| = |3 - 5|$; i) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$;
   j) $8833 = 88^2 + 33^2$; k) $4626 \cdot 9396 = 6939 \cdot 6264$.

2. Tengsizliklarning rostligini tekshiring:
   a) $675 + 872 > (6^3 + 7^3 + 5^3) + (8^3 + 7^3 + 2^3)$;
   b) $1973 > (1 + 9 + 7 + 2)(1^2 + 9^2 + 7^2 + 2^2) - 197 \cdot 2 - (197 - 2)$;
   d) $1971 > 19 \cdot 72 + 197 \cdot 2 + (197 - 2) + (1 + 9 + 7 + 2)$.
3. Quyidagi jumlalarni tenglik ko'rinishida yozing:
   a) 7 soni 4 dan 3 ta ortiq; d) 3 soni 9 dan 6 ta kam;
   b) 7 soni 9 dan 2 ta kam; e) 8 soni 1 dan 7 ta ortiq;
4. Rost sonli tengsizlikning qanday xossalarini bilasiz? Ularni belgilar yordamida yozing.

3.4. O'zgaruvchili ifodalar. Ba'zan masala sharti sonlar bilan emas, balki harflar bilan belgilangan bo'ladi. Masalan, 3.1-banddagi masalada shaharlar orasidagi masofa a km bo'lsa, javob bunday bo'ladi:

$$(a - 3 \cdot 20) : (20 + 70). \qquad (1)$$

Agar masofa a km ga, velosipedchi va avtomobilning tezliklari, mos ravishda, b va c ga teng bo'lsa, javob bunday bo'ladi:

$$(a - 3b) : (b + c). \qquad (2)$$

Biz o'zgaruvchi qatnashgan ifodalar hosil qildik. (1) ifodada a o'zgaruvchi, (2) ifodada uchta — a, b va c o'zgaruvchi qatnashgan. Bu harflarga turli qiymatlar berib, turli masalalarni hosil qilamiz. Bu masalalarning har birining javobini topish uchun (1) yoki (2) ifodalardagi harflarga tegishli qiymatlarni qo'shish kerak. Masalan, shaharlar orasidagi masofa 240 km, velosipedchining tezligi 15 km/soat, avtomobilning tezligi 50 km/soat bo'lsa, (2) ifodada a ni 240 ga, b ni 15 ga, c ni 50 ga almashtirish kerak. Natijada qiymati 3 bo'lgan $(240 - 3 \cdot 15) : (15 + 50)$ sonli ifoda hosil bo'ladi. Bu holda avtomobil yo'lga chiqqandan 3 soat keyin uchrashuv sodir bo'ladi.

O'zgaruvchili ifodalar umumiy tushunchasining ta'rifi sonli ifodalar tushunchasining ta'rifi kabi ifodalanadi, bunda faqat o'zgaruvchi ifodalarda sonlardan tashqari harflar ham qatnashadi. Biz o'quvchiga bunday ifodalar yozuvining qoidasi tanish deb o'ylaymiz. Masalan, agar x va y o'zgaruvchilar qatnashgan ifodalar berilgan bo'lsa, sonlardan iborat $(a; b)$ kortejlarning har biriga sonli ifoda mos keladi. Bu sonli ifoda harfiy ifodada x harfini a son bilan, y harfini b son bilan almashtirish orqali hosil bo'ladi. Agar hosil bo'lgan sonli ifoda qiymatga ega bo'lsa, bu qiymat $x = a$, $y = b$ bo'lganda *ifodaning qiymati* deyiladi. O'zgaruvchili

ifoda bunday belgilanadi: $A(x)$, $B(x; y)$ va h.k. Agar $B(x; y)$ ifodada x ni 15 bilan, y ni 4 bilan almashtirsak, hosil bo'lgan sonli ifoda $B(15; 4)$ kabi belgilanadi.

O'zgaruvchili ifodalar predikat bo'lmaydi, chunki harf o'rniga sonli qiymat qo'yilsa, mulohaza emas, sonli ifoda hosil bo'ladi. Bu sonli ifodaning qiymati «rost» yoki «yolg'on» bo'lmay, balki birorta son bo'ladi.

Bitta x harfi qatnashgan har bir ifodaga bu ifodaga qo'yish mumkin bo'lgan sonlardan, ya'ni bu ifoda aniq qiymatga ega bo'ladigan sonlardan iborat to'plam mos keladi. Bu sonlar to'plami *berilgan ifodaning aniqlanish sohasi* deyiladi. Masalan, $4 : (x - 3)$ ifodaning aniqlanish sohasi 3 dan tashqari barcha sonlardan iborat: $\sqrt{x-5}$ ifodaning aniqlanish sohasi $x - 5 \geq 0$ bo'ladigan barcha sonlardan, ya'ni $[5; \infty[$ sonli nurga tegishli sonlardan iborat. Ba'zi hollarda x qiymatlarning X sohasi oldindan ba'zi shartlar bilan chegaralangan bo'ladi. Masalan, x — natural son bo'lishi mumkin. U holda o'zgaruvchili ifodaga to'plamga (masalan, natural sonlar to'plamiga) tegishli qiymatlarnigina qo'yish mumkin. Agar ifodada bir nechta harf, masalan, x va y harflari bo'lsa, bu ifodaning aniqlanish sohasi deyilganda shunday $(a; b)$ sonlar juftlari to'plami tushuniladiki, x ni a ga, y ni b ga almashtirganda qiymatga ega bo'lgan sonli ifoda hosil bo'ladi.

Harfiy ifodalarda o'zgaruvchilarni nafaqat sonlar bilan, balki boshqa harfiy ifodalar bilan ham almashtirish mumkin. Masalan, agar $3x + 2y$ ifodada x ni $5a - 2b$ ga, y ni $6a + 4b$ ga almashtirilsa, harfiy ifoda hosil bo'ladi:

$$3(5a - 2b) + 2(6a + 4b).$$

a va b ning berilgan qiymatlarida bu ifodaning qiymatlarini hisoblash mumkin, buning uchun avval x va y ning qiymatlari topiladi, keyin bu qiymatlarni berilgan ifodaga qo'yiladi. Masalan, $a = 12$, $b = 10$ bo'lsa, avval $x = 5 \cdot 12 - 2 \cdot 10 = 40$, $y = 6 \cdot 12 + 4 \cdot 10 = 112$ topiladi, keyin $3x + 2y = 3 \cdot 40 + 2 \cdot 112 = 344$ topiladi.

O'zgaruvchili $A(x)$ va $B(x)$ ifodalarga kiruvchi harflarning joiz qiymatlarida ular bir xil qiymatlar qabul qilsa, bu ifodalar aynan teng deyiladi. Masalan, $(x + 3)^2$ va $x^2 + 6x + 9$ ifodalar aynan teng. $\frac{x}{4}$ va $\frac{x^2}{4x}$ ifodalar aynan teng emas, $x = 0$ bo'lsa, ulardan birinchisi 0 qiymat ega bo'ladi, ikkinchisi esa sonli qiymatga ega bo'lmaydi.

Ammo noldan farqli sonlar sohasida bu ikkala ifoda aynan teng. O'zgaruvchili ikki ifodaning aynan tengligi haqidagi tasdiq mulohazadir. Masalan, $(x+3)^2$ ifoda x^2+6x+9 ifodaga aynan tengligi haqidagi tasdiqni bunday yozish mumkin:

$$(\forall x)((x+3)^2 = x^2+6x+9).$$

Odatda, qisqalik uchun $\forall x$ kvantor tushirib qoldiriladi va qisqacha bunday yoziladi: $(x+3)^2 = x^2+6x+9$. Ammo bunday yozuv uncha aniq emas – bu tenglikni tenglama deb ham qarash mumkin (4-§ ga q.).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi yozuvlarning qaysilari harfiy ifoda hisoblanadi:
   a) $2a+b-4$; b) $2a+b=4$
   d) $0,3(x-2)+42:2$; e) $7y-5=4y+1$;
   f) $36:6+4\cdot 9-5$; g) $2\sqrt{a^2+b^2}$?
2. $\frac{x^2-x}{x}$ va $x-1$ ifodalar qaysi sonli to'plamda aynan teng bo'ladi?
3. Tengliklarning rostligini tekshiring:
   a) $\frac{3a^2-b^2}{3a-b(a+4b)} = \frac{(4b-a)(b+a)}{a^2+b^2}$, bunda $a=3$, $b=2$;
   b) $\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}\right):\left(\frac{p^2+4q}{p^2-4q^2-1}\right) = -\frac{1}{2p}$, bunda $p=1$, $q=-2$.
4. Ayniyatlarni isbotlang:
   a) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2+(bx+ay)^2$;
   b) $\frac{x}{(x-y)(x-z)}+\frac{y}{(y-x)(y-z)}+\frac{z}{(z-x)(z-y)} = 0$.
5. Quyidagi tengliklar x ning qanday qiymatlarida ayniyat bo'ladi:
   a) $\frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x+2$; b) $\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x}$?

4-§. TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

4.1. Bir o'zgaruvchili tenglamalar. Masala qaraymiz: «Qafasda tustovuq va quyonlar bor. Ularning boshlari 19 ta, oyoqlari 62 ta. Qafasda nechta tustovuq va nechta quyon bor?» Bu masalani arifmetik yechish mumkin. Ammo eng sodda yechish usuli tenglama tuzib yechishdir. Tustovuqlar sonini x harfi bilan belgilaymiz. U holda tustovuqlar oyoqlari $2x$ ta. Quyonlar soni $19-x$ ta, ularda oyoqlar soni $4(19-x)$ ta. Masala sharti bo'yicha $2x+4(19-x)=62$, ya'ni $76-2x=62$. Tenglama bajarilishi kerak. Bu tenglamani yechamiz: $2x=76-62=14$, shuning uchun $x=7$. Demak, qafasda 7 ta tustovuq va 12 ta quyon bo'lgan.

Agar masala shartida quyon va tustovuqlarning oyoqlari soni 61 ta bo'lganda edi $2x+4(19-x)=61$ tenglamani hosil qilgan bo'lar edik, bundan $x=7\frac{1}{2}$. Bu masala shartiga zid, chunki x – natural son. Biz masalani yechib, unda oyoqlar soni 80 ta ekanligini topish bilan ham ziddiyatga kelar edik. $2x+4(19-x)=80$ tenglamaning ildizi $x=-2$, lekin tustovuqlar soni manfiy bo'la olmaydi. Umuman, x soni 18 dan katta bo'lmagan natural sonlardan iborat bo'lishi kerak (qafasda hech bo'lmaganda bitta quyon bor deb hisoblansa), ya'ni x soni $x = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18\}$ to'plamga tegishli bo'lishi kerak.

Tenglamalarni yechishda ba'zi shakl almashtirishlarni kiritamiz. Masalan, $76-2x=62$ tenglamani yechishda tenglamaning ikkala qismiga $2x$ ni qo'shib, ikkala qismidan 62 ni ayirdik. Natijada $2x=14$ tenglama hosil bo'ldi. Uni yechish uchun tenglamaning ikkala qismini 2 ga bo'ldik. Bu o'zgarishlarning har biridan keyin yangi tenglama hosil bo'ldi, ammo hosil bo'lgan tenglamalar $76-2x=62$ tenglama ham, $2x=14$ tenglama ham, $x=7$ tenglama ham (bu ham tenglama) bitta yechimga, aynan 7 soniga ega bo'ldi.

Endi nimaga asoslanib tenglamalarni bunday o'zgartirganimizni va nima uchun bunday o'zgarishlar kiritganimizda yechilayotgan tenglamaning ildizlari o'zgarmayotganligini aniqlaymiz. Ba'zan bunday tushuntiriladi: tenglamaning yechimlaridan biri x bo'lsin. U holda x ning bu qiymatida tenglama to'g'ri sonli tenglikka aylanadi. Agar sonli tenglikning ikkala qismiga bir xil son qo'shilsa yoki ikkala qismdan bir xil son ayirilsa, sonli tenglik o'zgarmasligi uchun yuqoridagi o'zgarishlarni kiritib, oxirida x soni nimaga tengligi topiladi. Bunday yondoshishda x ni son deb qabul qilinadi. Biroq yechimga ega bo'lmagan tenglamalar mavjud, masalan, $2x = 2x + 6$. Bundan yuqoridagi o'zgarishlarni bajarib $0 = 6$ yolg'on tenglikka kelamiz. Bu esa tenglamaning yechimini «x son tenglamaning yechimi bo'lsin» degan ibora bilan boshlash mumkin emasligini bildiradi.

Undan tashqari, tenglamani bunday usulda yechish ortiqcha ildizlarga olib keldi, bu ildizlar o'zgartirishlar kiritilganda hosil bo'lgan tenglamalarni qanoatlantiradi, ammo dastlab berilgan tenglamani qanoatlantirmaydi. Masalan, $\sqrt{x+9} = -5$ tenglamani yechganda uning ikkala qismini kvadratga oshiramiz (agar ikkita son teng bo'lsa, ularning kvadratlari ham teng bo'ladi. Natijada $x + 9 = 25$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = 16$. Ammo 16 soni $x + 9 = 25$ tenglamanigina qanoatlantiradi. Bu tenglamada x o'rniga 6 ni qo'ysak, $\sqrt{25} = -5$ yolg'on tenglikni hosil qilamiz (irratsional tenglamalarni yechishda hamma ildizlar arifmetik qiymat ma'nosida tushuniladi, ya'ni nomanfiy son deb olinadi). Shunday qilib, tenglamalarni ko'rsatilgan usulda yechishda har bir topilgan ildizni tenglamaga qo'yib tekshirish kerak, buni har doim ham bajarib bo'lmaydi.

Shuning uchun tenglama va uning ildizlariga aniqroq ta'rif beramiz: x o'zgaruvchili $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ikki ifoda berilgan bo'lsin, bunda x o'zgaruvchi birorta to'plamning qiymatlarini birin-ketin qabul qiladi. Bir o'rinli $f_1(x) = f_2(x)$, $x \in X$ predikatni tenglama deymiz. Tenglamani yechish x o'zgaruvchining qiymatlarini topish, ya'ni berilgan predikatning rostlik to'plamini topish demakdir, bu qiymatlarni tenglamaga qo'yganda tenglik hosil bo'ladi.

Kelgusida $f_1(x) = f_2(x)$, $x \in X$ predikatning rostlik to'plamini *tenglamalar yechimining to'plami*, bu to'plamga kiruvchi sonlarni *tenglamalarning ildizlari* deymiz.

Masalan, $(x - 1 - (x - 3) = 0$ tenglama ikkita ildizga ega: 1 va 3, demak, bu tenglamaning yechimlari to'plami $T = \{1; 3\}$ ko'rinishga ega. Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lgan tenglamalar ham mavjud. Masalan, $x = |X|$ k tenglamani har qanday nomanfiy son qanoatlantiradi. Bunda yechimlar to'plami barcha nomanfiy sonlardan iborat.

Shunday bo'lishi ham mumkinki, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifoda x to'plamdan olingan birorta a da qiymatga ega emas. U holda $f_1(x) = f_2(x)$ tenglik yolg'on hisoblanadi va shuning uchun a son $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning ildizi bo'la olmaydi. Masalan, 4 ham, 6 ham $x + \frac{1}{x-4} = 7 + \frac{1}{x-6}$ tenglamaning ildizi bo'la olmaydi, chunki $x = 4$ da $\frac{1}{x-4}$ kasr, $x = 6$ da $\frac{1}{x-6}$ kasr ma'noga ega emas. Bundan $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamani yechishdan oldin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar aniq qiymatga ega bo'ladigan A to'plamni topish foydadan holi emasligi ko'rinib turibdi. Bu to'plam x o'zgaruvchining joiz qiymatlari sohasi yoki tenglamaning *aniqlanish sohasi* deyiladi.

$x + \frac{1}{x-4} = 7 + \frac{1}{x-6}$ tenglamaning aniqlanish sohasi 4 va 6 sonlardan tashqari barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Bu to'plamni quyidagicha berish mumkin:

$$A =]-\infty;\ 4[\cup]4;\ 6[\cup]6;\ +\infty.$$

Nazariy xulosalarning soddaligi uchun kelgusida $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar butun X to'plamda aniqlangan deb hisoblaymiz.

$f_1(x) = f_2(x)$ predikatning X aniqlanish sohasi chegaralangan bo'lgan holda (masalan, quyon va tustovuqlar haqidagi masala) tenglamaning ildizlarini X to'plamdagi sonlarni tenglamaga navbatma-navbat qo'shish bilan topish mumkin. Lekin X to'plam cheksiz bo'lganda bu usuldan foydalanib bo'lmaydi, shuning uchun tenglamani boshqacha yo'l bilan yechish kerak. Bunda tenglamalarning tengkuchlilik tushunchasidan foydalaniladi.

1-ta'rif. *$f_1(x) = f_2(x)$ va $F_1(x) = F_2(x)$ ikki tenglamaning yechimlari to'plami teng bo'lsa,* ***teng kuchli*** *deyiladi, ular, ya'ni birinchi tenglamaning har bir yechimi ikkinchi tenglamaning yechimi bo'lsa va aksincha, ikkinchi tenglamaning har qanday yechimi birinchi tenglamani qanoatlantirsa, bu tenglamalar teng kuchlidir.*

Bunda biz ikkala tenglama bitta X aniqlanish sohasiga ega deymiz. Boshqacha aytganda, *agar $f_1(x) = f_2(x)$ va $F_1(x) = F_2(x)$ predikatlar ekvivalent bo'lsa, tenglamalar teng kuchli bo'ladi.*

2-ta'rif. *Agar $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning yechimlar to'plami $F_1(x) = F_2(x)$ tenglamaning yechimlar to'plamining qism to'plami bo'lsa, $F_1(x) = F_2(x)$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning natijasi deyiladi.*

Boshqacha aytganda, agar $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning har bir ildizi $F_1(x) = F_2(x)$ tenglamani qanoatlantirsa, $F_1(x) = F_2(x)$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning natijasidir.

Masalan, $(x + 1)^2 = 16$ tenglama $x + 1 = 4$ tenglamaning natijasidir. Haqiqatan, $x + 1 = 4$ tenglama bitta $x = 3$ ildizga ega. Bu ildizni $(x + 1)^2 = 16$ tenglamaga qo'yib, $(x + 1)^2 = 16$ rost tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik 3 soni $(x + 1)^2 = 16$ tenglamani ham qanoatlantirishini ko'rsatadi.

Agar ikki tenglamaning har biri ikkinchisining natijasi bo'lsa, bu ikki tenglama *teng kuchli* deyiladi.

Ba'zan tenglama ikki yoki undan ortiq tenglamalar dizyunksiyasiga teng kuchli bo'ladi. Masalan, $(x - 1)(x - 3) = 0$ tenglamani va ikki tenglama dizyunksiyasi $(2x - 2 = 0) \cup (7x - 21) = 0$ ni olaylik. $(x - 1)(x - 3) = 0$ tenglamaning yechimlar to'plami $\{1; 3\}$. Agar ikki son ko'paytmasida ko'paytiruvchilardan aqalli bittasi nolga teng bo'lsa, ko'paytma nolga teng bo'ladi, u holda $(2x - 2 = 0) \cup (7x - 21) = 0$ tenglamaning dizyunksiyasi x ning barcha qiymatlarida rost mulohaza bo'ladi. x ning bu qiymatlari uchun $2x - 2 = 0$ yoki $7x - 21 = 0$ mulohazalardan aqalli bittasi rost bo'ladi. Agar $x = 1$ bo'lsa, $2x - 2 = 0$ rost, $x = 3$ bo'lsa, $7x - 21 = 0$ ham rost. Demak, $\{1; 3\}$ dizyunksiyasi rost to'plami bo'ladi. Bu esa $(x - 1)(x - 3) = 0$ tenglamaning $(2x - 2 = 0) \cup \cup (7x - 21) = 0$ dizyunksiyaga teng kuchliligini bildiradi.

$x = a$ tenglamaning yechimini topish juda oson, uning yechimlari to'plami bitta a sondan iborat, $T = \{a\}$. Shuning uchun tenglamalarni yechishda ular sodda ko'rinishga ega bo'lgan teng kuchli tenglamalar bilan almashtiriladi, bu almashtirish $x = a$ tenglamaga yoki shunday tenglamalar dizyunksiyasi $x = a_1 \cup x = a_2 \cup \ldots \ldots \cup x = a_n$ ga kelguncha davom ettiriladi. U holda berilgan tenglamaning yechimlari to'plami $T = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ bo'ladi. Ba'zan berilgan tenglamadan unga teng kuchli tenglamaga emas, uning natijasiga o'tishga to'g'ri keladi. Bunda yechimlar to'plami kengayadi, shuning uchun oxirida topilgan hamma ildizlarni berilgan tenglamaga qo'yib, tekshiriladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Agar a) $x \in R$; b) $x \in Q$; d) $x \in Z$; e) $x \in N$ bo'lsa, $2x^2 = 7x + 7 = 0$ tenglamaning yechimlari to'plamini toping.
2. Bir o'zgaruvchili tenglama va uning yechimi ta'rifini ayting.

3. Tenglamalarning teng kuchli bo'lish sharti qanday? Teng kuchli tenglamalarga misollar keltiring.
4. Quyidagi yozuvlarning qaysilari tenglama bo'ladi, qaysilari bo'lmaydi:
   a) $3x + 1 = 4$; b) $11 < 7$; d) $8x > 16$;
   e) $0{,}6x - 3 + 4x = 5$; f) $22 + 8 = 44 - 17$;
   g) $x^2 + 5x = 7$; h) $7x - 2 \cdot (6 - x)$?
5. a) $(x + 4)(x - 1) = 5(x - 1)$ va $x + 4 = 5$;
   b) $\frac{x^2}{4x^2+3} = \frac{2x+1}{4x^2+3}$ va $x^2 = 2x + 1$
   tenglamalar teng kuchli bo'lgan to'plamni toping.
6. a) $(x - 1)(x + 3) = 0$ va $x - 2 = 0$;
   b) $10x - 2 = 4$ va $5x - 1 = 2$
   tenglamalar haqiqiy sonlar to'plamida teng kuchlimi?
7. 5 soni: a) $\frac{6-x}{x-5} = 6 + \frac{1}{x-5}$;
   b) $6 - x = 6(x - 5) + 1$
   tenglamaning ildizi bo'ladimi? Bu tenglamalar teng kuchlimi?
8. Tenglamalar berilgan:
   a) $x^2 = a^2x$; b) $ax^2 - 4 = 0$;
   d) $ax - a^2 = 4 - 2x$; e) $a + x = a^2x - 1$.
   a parametrning qanday qiymatlarida bu tenglamalar: 1) bitta yechimga; b) cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi; 3) yechimga ega bo'lmaydi?
9. Tenglamalarning aniqlanish sohasini va yechimlar to'plamini toping:
   a) $\frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1}$; b) $\frac{2(x^2+1)}{2x-1} - \frac{4x^3-13}{4x^2-1} = 1$.
10. Bir o'rinli predikatlarning rost to'plamini toping:
   a) $x^2 + 4 = 0$, $x \in R$; b) $x = x$, $x \in Z$;
   d) $|x| = |x + 2|$, $x \in R$.
   e) $\frac{3x-2}{x-3} = \frac{15x-3}{x^2-9} - \frac{x-4}{x+3}$, $x \in R$;
   f) $\frac{3}{2x-1} + \frac{7}{2x+1} - \frac{4-20x^2}{1-4x^2} = 0$, $x \in R$.

4.2. Tenglamalarning teng kuchliligi haqidagi teoremalar. Biz bu bandda berilgan tenglamani qanday o'zgartirganda u teng kuchli tenglamaga o'tishi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

1-t e o r e m a.

$$f_1(x) = f_2(x), \ x \in X \tag{1}$$

tenglamaning ikkala qismiga barcha x larda qiymatga ega bo'lgan F(x) ifoda qo'shilsa, berilgan tenglamaning natijasi bo'lgan

$$f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x), \ x \in X \tag{2}$$

tenglama hosil bo'ladi.

I s b o t i. Haqiqatan, a berilgan (1) tenglamaning ildizi, ya'ni $f_1(a) = f_2(a)$ bo'lsin. Bu tenglikning ikkala qismiga bitta $F(a)$ sonni qo'shsak, $f_1(a) + F(a) = f_2(a) + F(a)$ rost tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglik a ning (2) tenglamaning ham ildizi bo'lishini ko'rsatadi. Demak, (1) tenglamaning har bir ildizi (2) tenglamaning ham ildizi ekan, ya'ni (2) tenglama (1) tenglamaning natijasi.

Masalan, $76 - 62 = 2x$ tenglama $76 - 2x = 62$ tenglamaning natijasi, u $76 - 2x = 62$ tenglamaning ikkala qismiga bitta $2x - 62$ ifodani qo'shish bilan hosil bo'ladi.

$f_1(x) = f_2(x)$ tenglama o'z navbatida $f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x)$ tenglamaning ikkala qismiga bitta $F(x)$ ifodani qo'shishdan hosil bo'ladi. Shuning uchun faqat (2) tenglama (1) tenglamaning natijasigina emas, balki (1) tenglama ham (2) tenglamaning natijasidir, demak, bu tenglamalar teng kuchli.

Shunday qilib, quyidagi teorema o'rinli:

1'-t e o r e m a. ***Agar F(x) ifoda x∈X ning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa,***

$$f_1(x) = f_2(x) \;\; x \in X \text{ va } f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x) \;\; x \in X$$

tenglamalar teng kuchli bo'ladi.

Bu teoremadan bunday natija kelib chiqadi:

Har qanday tenglama $F(x) = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga teng kuchli. Haqiqatan $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamani $F(x) = 0$ ko'rinishga keltirish uchun bu tenglamaning ikkala qismiga $-f_2(x)$ ni qo'shish va $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ deb olish kerak.

Quyidagi teorema ham xuddi shunday isbotlanadi:

2-t e o r e m a. ***Agar***

$$f_1(x) = f_2(x) \;\; x \in X, \tag{1}$$

tenglamaning ikkala qismi F(x) ifodaga ko'paytirilsa (bu ifoda barcha x∈X larda qiymatga ega), (1) tenglama natijasi hisoblangan yangi

$$f_1(x) = F(x) = f(x) \cdot F(x) \;\; x \in X \tag{2}$$

tenglama hosil bo'ladi.

$\frac{1}{F(x)}$ ifoda ham barcha $x \in X$ larda qiymatga ega bo'lgandagina (1) tenglama (2) ning natijasi bo'ladi. Bunda yagona $F(x)$ ning x ning ba'zi bir qiymatlarida nolga aylanishi mumkin. Shuning uchun quyidagi tasdiq o'rinlidir:

3-t e o r e m a. ***Agar F(x) ifoda barcha x∈X larda qiymatga ega bo'lib, x∈X ning birorta ham qiymatida nolga teng bo'lmasa, $f_1(x) = f_2(x)$ va $f_1(x) \cdot F(x) = f_2(x) \cdot F(x)$ x∈X tenglamalar teng kuchli bo'ladi. Xususan, agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda $f_1(x) = f_2(x)$ va $af_1(x) = af_2(x)$ tenglamalar teng kuchli bo'ladi.***

Boshqacha aytganda, har qanday tenglama noldan farqli songa ko'paytirilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi. Masalan, $2x = 14$ tenglama $x = 7$ tenglamaga teng kuchli.

Tenglamalarni yechishda *ko'paytuvchilarga ajratish usuli* ham qo'llaniladi. Faraz qilaylik, $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ ifodalar barcha $x \in X$ larda qiymatlarga ega. U holda $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ ifodalardan aqalli bittasi $x = a$ da nolga aylansagina, $a \in X$ son

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x) = 0 \tag{3}$$

tenglamaning ildizi bo'ladi, bu esa (3) tenglama $f_1(x) = 0$, $\vee f_2(x) = 0 \vee ... \vee f_n(x) = 0$ tenglamalarning dizyunksiyasiga teng kuchli bo'ladi, demakdir.

Masalan, $x(x - 4)(x + 6)(x - 8) = 0$ tenglama $x = 0 \vee x - 4 = 0 \vee x + 6 = 0 \vee x - 8 = 0$ tenglamalar dizyunksiyasiga teng kuchli, shuning uchun uning yechimlari to'plami: $\{0; 4; -6; 8\}$.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. $(4x - 5)(x^2 - 4) = 7(x^2 - 4)$ tenglama $4x - 5 = 7$ tenglamaning natijasi ekanligini isbotlang.
2. Quyidagi tenglamalar jufti teng kuchli ekanligini isbotlang:
   a) $2x - 1 + x^2 + 9 = 3x - 6 + x^2 + 9$ va $2x - 1 = 3x - 6$;
   b) $(2x - 1)(x^2 + 9) = (3x - 6)(x^2 + 9)$ va $2x - 1 = 3x - 6$.
3. $f^2(x) = q^2(x)$ tenglama $f(x) = q(x)$ tenglamaning natijasi ekanligini isbotlang. Bu tenglamalar har doim teng kuchlimi?
4. Tenglamalarni yeching:
   a) $6{,}4 \cdot (2 - 3x) = 6(0{,}8x - 1) + 6{,}8$; d) $\left(\frac{1}{3} + x\right) : 7 = \left(\frac{3}{4} + x\right) : 9$;
   b) $3\left(4\frac{3}{8}x + 5\frac{1}{16}\right) \cdot \frac{4}{15} = \frac{5}{12}x + 2\frac{2}{5}$; e) $\frac{3x - 11}{4} - \frac{3 - 5x}{8} = \frac{x + 6}{2}$.

4.3. Bir o'zgaruvchili tengsizliklar. x o'zgaruvchi qatnashgan tengsizliklar, masalan, $f_1(x) < f_2(x)$, $x \in X$; $f_1(x) > f_2(x)$, $x \in X$ va boshqa tengsizliklar bir o'rinli predikatlardir. *Bunday tengsizlikni yechish sonlarning shunday T to'plamini topish demakki, bu sonlarni x ning o'rniga qo'yganda rost tengsizlik hosil bo'ladi.* Sonlarning bu to'plami *tengsizlik yechimlari to'plami* deyiladi.

Bu tengsizlikning har bir yechimi boshqa tengsizlikni qanoatlantirishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchisining *natijasi* deyiladi. Masalan, $x > 4$ va $x > 2$ tengsizliklarni olaylik. Ma'lumki, agar biror son 4 dan katta bo'lsa, u 2 dan ham katta bo'ladi. Shuning uchun $x > 2$ tengsizlik $x > 4$ tengsizlikning natijasidir. Berilgan tengsizlik natijasining yechimlar to'plami Q berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami T ni o'z ichiga oladi: $Q \supset T$.

Agar ikki tengsizlik bitta yechimlar to'plamiga ega bo'lsa, ular *teng kuchli* deyiladi. Bu holda ikkala tengsizlik bir-birining natijasidir.

Masalan, biror a son 5 dan katta degan tasdiqni $a + 1$ son 6 dan katta tasdiqqa teng kuchli deyish mumkin. Shuning uchun $x > 5$ va $x + 1 > 6$ tengsizliklar teng kuchli.

x qatnashgan tengsizliklar predikat bo'lgani uchun ularning konyunksiyasi va dizyunksiyasi haqida gapirish mumkin. Masalan, a son $3x - 8 > 1$ tengsizlikni ham $2x + 5 < 15$ tengsizlikni ham qanoatlantirsa, bu son $(3x - 8) \wedge (2x + 5 < 15)$ tengsizliklar konyunksiyasini ham qanoatlantiradi. Bunday son 4 dir. Maktabda konyunksiya haqida emas, tengsizliklar sistemasi haqida gapiriladi va quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} 3x + 8 > 1, \\ 2x + 5 < 15. \end{cases}$$

Agar a ning biror qiymatida ikki yoki undan ortiq tengsizliklardan aqalli bittasi rost bo'lsa, bu tengsizliklar dizyunksiyasi ham a ning bunday qiymatida rost bo'ladi. Masalan, -2 soni

$$(2x > 8) \vee (3x < 3) \tag{4}$$

tengsizliklar dizyunksiyasining yechimlar to'plamiga tegishlidir. Haqiqatan, bu sonni tengsizliklardan birinchisiga qo'yilsa, $2 \cdot (-2) > 8$ yolg'on tengsizlik hosil bo'ladi. Shu sonning o'zi ikkinchi tengsizlikka qo'yilsa, $3 \cdot (-2) < -3$ rost tengsizlik hosil bo'ladi. Demak, -2 soni (4) dizyunksiyaning yechimlar to'plamiga tegishli ekan. 0 soni bu to'plamga tegishli emas, chunki bu son (4) dagi ikkala tengsizlikka qo'yilsa, $2 \cdot 0 > 8$ va $3 \cdot 0 < -3$ yolg'on teng-

sizliklarni hosil qilamiz. Tengsizliklar yechimlari to'plami cheksizdir: aniqlik uchun bu to'plamlar koordinata o'qida tasvirlanadi. Buning uchun yechimlar to'plami bir necha juft-jufti bilan kesishmaydigan nuqtalar, kesmalar, oraliqlar yoki nurlar birlashmasi sifatida tasvirlanadi. Buning uchun bir o'zgaruvchili tengsizliklar haqidagi quyidagi teoremalardan foydalaniladi:

4-teorema. ***Agar $F(x)$ ifoda har qanday $x \in X$ da qiymatga ega bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $f_1(x) + F(x) = f_2(x) + F(x)$ tengsizliklar teng kuchli bo'ladi.***

Isboti. Haqiqatan, a son $f_1(x) < f_2(x)$ tengsizliklar yechimlarining to'plamiga tegishli bo'lsa, $f_1(a) < f_2(a)$ tasdiq rostdir. Bu rost tengsizlikning ikkala qismiga bitta $F(a)$ sonni qo'shib, $f_1(a) + F(a) = f_2(a) + F(a)$ rost tengsizlik hosil qilinadi. Bu esa a ning $f_1(x) + F(x) < f_2(x) + F(x)$ tengsizlik yechimi ekanligini ko'rsatadi. Xuddi shuningdek, $f_1(x) + F(x) < f_2(x) + F(x)$ tenglikning har qanday yechimi $f_1(x) < f_2(x)$ tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko'rsatish mumkin.

Demak, bu tengsizliklar teng kuchli.

Xuddi shuningdek, $f_1(x) > f_2(x)$ va $f_1(x) + F(x) > f_2(x) + F(x)$ tengsizliklarning ham $f_1(x) \leq f_2(x)$ va $f_1(x) + F(x) \leq f_2(x) + F(x)$ va boshqa tengsizliklarning ham teng kuchliligini isbotlash mumkin.

5-teorema. ***Agar a son musbat ($a > 0$) bo'lsa, $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) > af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Agar $a < 0$ bo'lsa, $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) > af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchli*** (manfiy songa ko'paytirganda tengsizlik ishorasi (belgisi)ni o'zgartirish kerak).

5-teorema quyidagi teoremaning xususiy holidir:

5'-teorema. ***Agar $F(x)$ ifoda $x \in X$ ning barcha qiymatlarida aniqlangan va musbat bo'lsa, u holda $f_1(x) \leq f_2(x)$ va $f_1(x) \cdot F(x) < Tf_2(x) \cdot F(x)$ tengsizliklar teng kuchli bo'ladi.***

$F(x)$ nomanfiy bo'lgan holda $f_1(x) \leq f_2(x)$ va $f_1(x) \cdot F(x) < f_2(x) \cdot F(x)$ tengsizliklar teng kuchli bo'ladi.

Quyidagi teoremani ham aytib o'tamiz.

6-teorema. ***$0 < f_1(x) < f_2(x)$ va $0 < \frac{1}{f_2(x)} < \frac{1}{f_1(x)}$ tengsizliklar bir-biriga teng kuchli.***

1-misol. $5x - 5 > 2x + 16$ tengsizlikni yechamiz. 1-teoremaga ko'ra bu tengsizlik $5x - 2x > 16 + 5$ tengsizlikka, ya'ni $3x > 12$ tengsizlikka teng kuchli. 5-teoremaga ko'ra berilgan tengsizlik $x > 7$ tengsizlikka teng kuchli. Demak, berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami $(7; +\infty)$ sonli nur ekan.

2-misol. $(3x - 5)\wedge(2x - 3 > -1)$ tengsizliklar konyunksiyasini yechamiz. Buning uchun avval tengsizliklardan birinchisini yechamiz.

$$3x - 5 < 4 \Leftrightarrow 3x < 9 \Leftrightarrow x < 3.$$

Ikkinchi tengsizlikni yechamiz:

$$2x - 3 > -1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1.$$

Bu tengsizliklar konyunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkala tengsizlikni ham qanoatlantirishi kerak, ya'ni konyunksiya yechimining to'plami topilgan yechimlar to'plamining kesishmasi bo'lishi kerak. Ammo $x < 3$ va x 1 sonli nurlarning kesishmasi $1 < x < 3$ sonli oraliqdir. Bu oraliq berilgan konyunksiyaning yechimlar to'plami bo'ladi.

$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ ko'rinishdagi tengsizliklarni yechishda quyidagi tasdiqdan foydalaniladi: $x < a_k$ da $x - a_k$ ko'paytuvchi manfiy, $x > a_k$ da musbat. Boshqacha aytganda, bu ko'paytuvchi $x = a_k$ dagina ishorasini o'zgartiradi. $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ ko'paytma ko'paytuvchilardan biri o'z ishorasini o'zgartirganda, ya'ni $a_1, a_2, \dots, a_n$ nuqtalarda ishorasini o'zgartirishi mumkin. Bu nuqtalar sonli o'qni $]-\infty; a_1[$, $]a_1; a_2[, \dots,]a_{n-1}; a_n[$, $]a_n; +\infty[$ oraliqlarga ajratadi. Bu oraliqlarning har birida $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$ ifoda bir xil ishoraga ega. Shuning uchun bu ifodaning butun oraliqdagi ishorasini bilish uchun uning oraliqdagi bitta nuqtadagi ishorasini bilish yetarlidir.

Ifodaning har bir oraliqdagi ishorasini topib (aniqlab), bu ifoda musbat bo'lgan oraliqlarni tanlab olamiz. Ularning birlashmasi $(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n) > 0$ tengsizliklar yechimlarining to'plami bo'ladi.

3-misol. $(x + 6)(x - 1)(x - 5) > 0$ tengsizlikni yechamiz. -6, 1, 3, 5 nuqtalar son to'g'ri chizig'ini $]-\infty; -6]$, $]-6; 1[$, $]1; 3[$, $]3; 5[$, $]5; +\infty[$ oraliqlarga ajatadi, $]5; +\infty]$ nurda 10 sonini tanlab olamiz. Bu sonni $(x + 6)(x - 1)x(x - 3)(x - 5)$ ifodagi qo'yib, to'rtta musbat ko'paytuvchilar ko'paytmasi $(10 + 6)(10 - 1)(10 - 3)(10 - 5)$ ni hosil qilamiz, bu ko'paytma musbat. Shuningdek,

$]3; 5[$ oraliqda ifodaning manfiyligini, $]1; 3[$ da musbatligini, $]-6; 1[$ da manfiyligini, $]-\infty; -6]$ nurda musbatligini aniqlaymiz.

Demak, tengsizlikning yechimi $]-\infty; -6]$, $]5; +\infty]$ nurlarning va $]1; 3]$ oraliqning birlashmasi ekan:

$$T =]-\infty; -6[\cup]1; 3[\cup]5; +\infty[.$$

IV.15-rasm.

Ifodaning ishorasini $]-\infty; -6]$ nurning o'zidagini aniqlash bilan chegaralanish mumkin edi. -6, 1, 3, 5 nuqtalardan o'tishda $x + 6$, $x - 1$, $x - 3$, $x - 5$ ko'paytuvchilardan biri o'z ishorasini o'zgartiradi, shuning uchun butun ko'paytma ham o'z ishorasini o'zgartiradi. Bundan $]-6; 1[$ da ifodaning manfiyligi, $]1; 3[$ da musbatligi va hokazo ko'rinib turibdi. Bu mulohazani yaqqolroq ko'rsatish uchun egri chiziq chiziladi, bu egri chiziq ifoda musbat bo'lgan joyda abssissalar o'qidan yuqorida, ifoda manfiy bo'lgan joyda abssissalar o'qidan pastda o'tadi (IV.15-rasm). Bu egri chiziq *ishoralar egri chizig'i* deyiladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

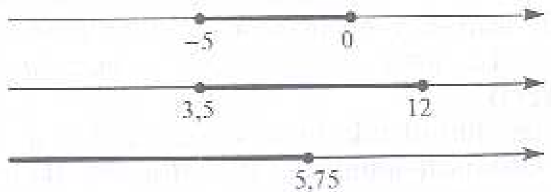
1. Koordinatalari quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini son o'qida tasvirlang:

a) $X = \left\{x \mid x \geq -4\frac{1}{2}\right\}$; b) $X = \{x \mid -5 < x < 0\}$;

d) $X = \{x \mid -3,2 \leq x < 3\}$; e) $X = \{x \mid 3,6 \leq x \leq 8\}$;

f) $X = \{x \mid 1,7 < x \leq 4,5\}$.

2. IV.16-rasmda tasvirlangan son o'qidagi qism to'plamlarni tengsizliklar bilan yozing.



IV.16-rasm.

3. Quyidagi implikatsiyalar rostmi yoki yolg'onmi:

a) $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow (a \geq 0) \cap (b \geq 0)$; b) $(a \geq 0) \cap (b > 0) \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0$?

4. Quyidagi tengsizliklar haqiqiy sonlar to'plamida teng kuchlimi:

a) $x^2 + 3x - 2 > 2$ va $x^2 + 3x - 4 > 0$;

b) $-3x + 4 < 0$ va $3x - 4 > 0$;

c) $\frac{x^3}{x^2+1} > 0$ va $x - 3 > 0$;

d) $3x^2 < 6x$ va $x < 2$?

5. Tengsizliklarni yeching ($x \in R$):

a) $(x-2)(x+3)(x-4) > 0$; b) $(x^2-4)(x^2-9) > 0$;

d) $(x^2+4)(x^2-16) > 0$.

4.4. Ikki o'zgaruvchili tenglamalar. Agar qafasda x ta tustovuq va 4 ta quyon bor bo'lsa, jami oyoqlar soni $2x + 4y$ ga teng. Shuning uchun, agar masalada jami oyoqlar soni 62 ga tengligi aytilgan bo'lsa, biz $2x + 4y = 62$ tenglamani yozishimiz mumkin. Bu tenglamada x va y ning qiymatlarini bir qiymatli qilib aniqlab bo'lmaydi. Hatto agar x va y ning natural qiymatlari bilangina chegaralangan bo'lsak ham bunday hollar bo'lishi mumkin: $x = 1$, $y = 15$, $x = 3$, $y = 15$, $x = 5$, $y = 13$ va h.k.

Ikki x va y o'zgaruvchili tenglama ikki o'rinli predikat bo'ladi. Bu tenglamada x ni a ga, y ni b ga almashtirganda rost tenglik hosil bo'lsa, $(a; b)$ sonlar jufti bu tenglamaning ildizi bo'ladi. Masalan, $(3; 4)$ sonlar jufti $x^2 + y^2 = 25$ tenglamaning yechimlaridan biridir, chunki $3^2 + 4^2 = 25$. Ammo bu tenglama boshqa yechimlarga ham egadir, masalan, $(5; 0)$, $(-3; -4)$ va h.k.

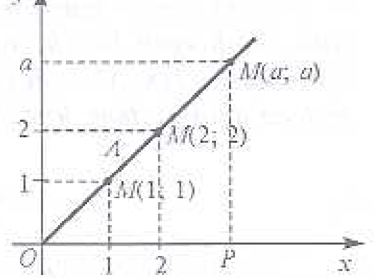
Ikki o'zgaruvchili har bir tenglamaga uning yechimlari to'plami mos keladi, ya'ni bu to'plam ularni tenglamaga qo'yganda rost tenglik hosil bo'ladigan $(a; b)$ sonlar juftining barchasidan iborat. Bunda albatta, x va y noma'lumlar qiymat qabul qilishi mumkin bo'lgan X va Y to'plamlar oldindan ko'rsatilgan bo'lsa, $a \in X$ va $b \in X$ o'rinli bo'lgan $(a; b)$ juftlarnigina olishi kerak.

$(a; b)$ sonlar juftini tekislikda koordinatalari a va b bo'lgan nuqta bilan tasvirlash mumkin: $M = M(a; b)$. Ikki noma'lumli tenglamalar yechimlari to'plamining hamma nuqtalari tasvirini qarab chiqib, tekislikda biror qism to'plamni hosil qilamiz. Bu

qism to'plam *tenglama grafigi* deyiladi. Masalan, $M(3; 4)$ da $3^2 + 4^2 = 25$ rost tenglik hosil bo'ladi. $N(4; 6)$ nuqta esa tenglama grafigiga tegishli emas, chunki $4^2 + 6^2 = 25$ tenglik yolg'on.

Ikki o'zgaruvchili tenglama, odatda, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi, shuning uchun uning grafigida cheksiz ko'p nuqtalar bor. Bu nuqtalarni birin-ketin tasvirlab bo'lmaydi, faqat chekli nuqtalar to'plamini tasvirlash mumkin. Shuning uchun tasvirlashning geometrik usulidan foydalaniladi.

1-misol. $y + x = 0$ tenglamaning yechimlari to'plami shunday barcha $(a; b)$ sonlar juftidan iboratki, bu juftlarda birinchi koordinata ikkinchisiga teng, ya'ni $(a; a)$ $a \in R$. Agar tekislikda $M(a; a)$ ko'rinishdagi bir necha nuqtani, masalan, $M(1; 1)$, $M(2; 2)$ va h.k.larni belgilasak, bu nuqtalarning hammasi koordinata boshidan o'tuvchi va abssissalar o'qiga 45° burchak ostida og'gan to'g'ri chiziqda yotishini ko'ramiz (IV.17-rasm). Berilgan tenglama grafigining hamma nuqtalari shu to'g'ri chiziqda yotmasmikan, deb taxmin qilinadi. Haqiqatan shunday ekanligini isbotlaymiz.



IV.17-rasm.

Agar M nuqtaning abssissasi uning ordinatasiga teng bo'lsa, OPM uchburchak teng yonli bo'ladi, bunda O — koordinatalar boshi, P esa M nuqtaning abssissa o'qidagi proyeksiyasi (IV.17-rasm). Shuning uchun MOP burchak kattaligi 45° ga teng. Aksincha, agar OM to'g'ri chiziq abssissalar o'qiga 45° burchak ostida og'gan bo'lsa, OPM uchburchak teng yonli, shuning uchun M nuqtaning abssissasi uning ordinatasiga teng. Bu misolda tenglama grafigi to'g'ri chiziq bo'ladi. Quyida biz $y = kx + b$ ko'rinishdagi har qanday tenglamaning grafigi to'g'ri chiziq bo'lishini ko'rsatamiz (5.1-band).

2-misol. $$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 4 \qquad (1)$$

tenglamaning grafigi markazi $A(2; 3)$ va radiusi 4 bo'lgan aylanadir. Haqiqatan, $M(x; y)$ nuqtadan $A(2; 3)$ nuqtagacha masofa $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$ formula bilan ifodalanadi. Shuning uchun (1) tenglik bu masofa grafikdagi barcha nuqtalar uchun 4 ga tengligini ko'rsatadi: bu esa nuqtaning yuqorida ko'rsatilgan aylanada yotishini ko'rsatadi. Aksincha, agar $M(x; y)$ nuqta markazi $A(2; 3)$ nuqtada va radiusi 4 bo'lgan aylanada yotsa, A dan M gacha masofa 4 ga teng bo'ladi va shuning uchun (1) tenglik bajariladi.

Bir xil grafikka ega bo'lgan ikki o'zgaruvchili ikki tenglama *teng kuchli tenglamalar* deyiladi. Masalan, $x + 2y = 5$ va $3x + 6y = 15$ tenglamalar teng kuchli — bu tenglamalardan birini qanoatlantiruvchi har qanday sonlar jufti ikkinchisini ham qanoatlantiradi.

Quyidagi teoremalarni isbotlash oson:

7-teorema. ***Agar $f(x; y)$ ifoda x va y ning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lsa, u holda $F(x; y) = F(x; y)$ va $F(x; y) + f(x; y) = F(x; y) + f(x; y)$ tenglamalar teng kuchli bo'ladi.***

8-teorema. ***Agar $f(x; y)$ ifoda x va y ning barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lib, x va y hech qanday qiymatlarida nolga aylanmasa, $F(x; y) = F(x; y)$ va $F(x; y) \cdot f(x; y) = F(x; y) \cdot f(x; y)$ tenglamalar teng kuchli.***

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi ikki o'zgaruvchili tenglamalar juftining teng kuchliligini isbotlang:

   a) $x^2 + y^2 + 6x = 8y - 4$ va $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 4 = 0$;

   b) $x + y = 5x - 2y + 1$ va $(x^2 + y^2 + 1)(5x - 2y + 1)$;

   d) $x^3 - y^3 + 6x + 8 = 9x^2 + 5x + 9$ va $x^3 - y^3 + x = 9x^2 + 1$.

2. Tenglamalar grafigini chizing:

   a) $|x| = y$; b) $|x| = |y|$; d) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 16$;

   e) $y = x^2$; f) $|y| = x^2$.

4.5. Aylana tenglamasi. 4.4-banddagi 2-misolda $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 4$ tenglamaning grafigi markazi $A(2; 3)$ nuqtada va radiusi 4 bo'lgan aylana ekanligi ko'rsatilgan edi. Umumiy tasdiq ham shunday isbotlanadi.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \tag{1}$$

tenglamaning grafigi markazi $A(a; b)$ nuqtada va radiusi R bo'lgan aylanadir.

Haqiqatan, agar $B(x; y)$ nuqta aylanada yotsa, u holda $|AB| = R$ bo'ladi. Ammo $|AB| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, shuning uchun $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$. Demak, aylananing hamma nuqtalari (1) tenglama grafigiga tegishli ekan. Aksincha, $M(x; y)$ nuqta (1) tenglama grafigiga tegishli bo'lsin. $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ifoda $B(x; y)$ nuqtada $A(a; b)$ nuqtagacha masofa bo'lsa, $|AB|$ masofa R ga teng, shuning uchun $B(x; y)$ nuqta aylanada yotadi.

Ravshanki, (1) tenglama

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{2}$$

tenglamaga teng kuchli. Aylana tenglamasi ham xuddi shu ko'rinishda yoziladi.

1-misol. Markazi $A(7; -6)$ va radiusi 8 bo'lgan aylana tenglamasini yozamiz.

(2) formula bo'yicha

$$(x-7)^2 + (y+6)^2 = 64 \tag{3}$$

ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada qavslarni ochib va o'xshash hadlarni ixchamlab, uni boshqacha yozish mumkin:

$$x^2 + y^2 = 14x + 12y + 21. \tag{3'}$$

(3') ko'rinishdagi tenglamadan (3) ko'rinishdagi tenglamaga qayta o'tish uchun to'la kvadratlarni ajratish kerak bo'ladi.

2-misol. $x + y^2 - 6x + 8y - 75 = 0$ (4)

tenglama aylana tenglamasi ekanligini isbotlaymiz va uning markazi hamda radiusini topamiz.

$x^2 - 6x$ ifoda to'la kvadrat bo'lishi uchun unga $3^2 = 9$ ni qo'shish kerak, $y^2 + 8y$ ifoda to'la kvadrat bo'lishi uchun esa unga $4^2 = 16$ ni qo'shish kerak. Shuning uchun (4) tenglamani

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) - 75 = 9 + 16$$

ko'rinishda yozamiz. Bundan $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 100$. Bu tenglamaning aylana tenglamasi ekanligi va uning markazi $A(3; -4)$ nuqtada, radiusi 10 ga teng ekanligi ko'rinib turibdi.

Shunday bo'lishi ham mumkinki, to'la kvadratlarni ajratib olgandan keyin $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ ko'rinishdagi tenglama hosil bo'ladi. Ikkala qo'shiluvchi nolga teng bo'lganda, ya'ni $x-a=0$ va $y-b=0$ bo'lgandagina kvadratlar yig'indisi nolga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ tenglama grafigi bitta $M(a;\ b)$ nuqtadan iborat ekan. Agar to'la kvadratlarni ajratgandan keyin $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ (bunda c — manfiy son) tenglama hosil bo'lsa, tenglama grafigi bo'sh, chunki o'zgaruvchilarning har qanday qiymatida ham ikki kvadrat yig'indisi manfiy bo'la olmaydi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Aylana ta'rifi qanday? Aylana tenglamasini keltirib chiqarishda bu ta'rifdan qanday foydalaniladi?
2. Markazi $A(a;\ b)$ va radiusi R bo'lgan aylana tenglamasini yozing, bunda:

   a) $a=-4,\ b=0,\ R=10;$ b) $a=0,\ b=0,\ R=6.$
3. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan aylananing markazini va radiusini toping.

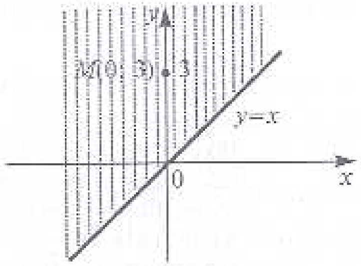
   a) $x^2+y^2+10x-6y=100;$ b) $x^2+y^2-4x-12y=24;$

   d) $x^2+y^2+8x+8y+32=0;$ e) $x^2+y^2-4x-12y=24.$
4. $x^2+y^2-3x-4y-4=0$ aylanada abssissasi 4 ga teng bo'lgan nuqtalarni toping.
5. $x^2+y^2+5x-7y-4=0$ aylanada abssissasi ordinataga teng bo'lgan nuqtalarni toping.

4.6. Tengsizliklar grafigi. x va y sonlar orasidagi munosabat nafaqat tenglamalar yordamida, balki tengsizliklar yordamida ham ifodalanadi. x va y qatnashgan tengsizlik berilgan bo'lsin. Bu tengsizlik yechimlarining to'plami bo'lib, barcha $(a;\ b)$ sonlar juftining to'plami hisoblanadi, bu sonlarni x va y harflar o'rniga qo'yganda to'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi. Masalan, $(4;\ 2)$ juftlik $x^2+y^2<25$ tengsizlik yechimlari to'plamiga tegishli, chunki x ni 4 ga, y ni 2 ga almashtirganda $4^2+2^2<25$ rost tengsizlik hosil bo'ladi. Agar $(x;\ y)$ sonlar juftining har biriga tengsizliklar yechimlari to'plamidan $M(x;\ y)$ nuqtani mos keltirsak, tekislikda bu tengsizlik bilan ifodalangan nuqtalar to'plamini hosil qilamiz. Bu nuqtalar to'plami *berilgan tengsizlik grafigi* deyiladi. Tengsizlik grafigi tengsizlikdagi biror soha bo'ladi.

$F(x,\ y)>0$ tengsizlik yechimlari to'plamini tasvirlash uchun quyidagicha ish yuritiladi. Avval tengsizlik ishorasi tenglik ishorasiga almashtiriladi va $F(x;\ y)$ tenglama chizig'i topiladi. Bu chiziq tekislikni bir necha qismga bo'ladi. Shundan keyin har bir qismdan bittadan nuqta olib, bu nuqtada $F(x;\ y)>0$ tengsizlikning bajarilishini tekshirish kifoya. Agar tengsizlik bu nuqtada bajarilsa, u holda bu nuqta yotgan qismning hamma nuqtalarida tengsizlik ham bajariladi. Bunday qismlarni birlashtirib, berilgan tengsizlik yechimlarining to'plamini hosil qilamiz.

1-misol. $y<x$ tengsizlik grafigini yasaymiz. Biz bilamizki, $y=x$ tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi va abssissalar o'qiga 45° burchak ostida og'gan to'g'ri chiziqdir. Bu to'g'ri chiziq butun tekislikni ikkita yarim tekislikka bo'ladi (IV.18-rasm). Yuqorigi yarim tekislikda $M(0;\ 3)$ nuqtani olamiz.



IV.18-rasm.

Uning koordinatalarini berilgan tengsizlikka qo'yib, $3>0$ rost tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak, bu nuqta va y bilan birga yuqori yarim tekislikning hammasi tengsizlik grafigiga tegishli ekan. Pastki yarim tekislikning nuqtalari bu grafikka tegishli emasligini ham xuddi shunday tekshiramiz. Va nihoyat, $y=x$ to'g'ri chiziqning nuqtalari grafikka tegishli emas, chunki bu to'g'ri chiziqda $y=x$ bo'lib, $y>x$ emas. Shunday qilib, $y=x$ to'g'ri chiziqdan yuqorida yotgan tekislik nuqtalarining to'plami $y>x$ tengsizlikning grafigidir.

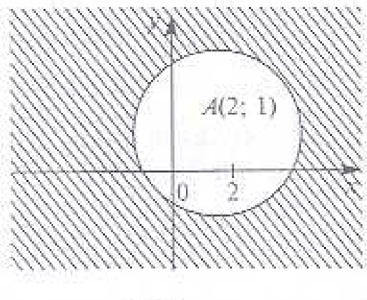
2-misol.

$$(x-2)^2+(y-1)^2\geq 9 \tag{1}$$

tengsizlikning grafigini yasaymiz.

Avval $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ tenglama chizig'ini o'tkazamiz. Bu markazi $A(2;\ 1)$ va radiusi 3 bo'lgan aylanadir (IV.19-rasm).

Bu aylana tekislikni ikki sohaga bo'ladi — biri aylana ichida yotadi, ikkinchisi aylana tashqarisida yotadi.



IV.19-rasm.

Aylana markazi, ya'ni $A(2; 1)$ nuqtani olamiz. Agar uning koordinatalarini (1) tengsizlikka qo'ysak, $0^2 + 0^2 \geq 9$ yolg'on tengsizlik hosil bo'ladi. Bu esa ichki sohaning (1) tengsizlik grafigiga tegishli emasligini bildiradi. Tashqi sohada $B(100; 0)$ nuqtani tanlab olamiz. Uning koordinatalari (1) tengsizlikni qanoatlantiradi: $98^2 + (-1)^2 \geq 9$. Demak, markazi $A(2; 1)$ va radiusi 3 bo'lgan aylana tashqarisidagi nuqtalar to'plami tengsizlik grafigi ekan. Geometrik nuqtayi nazardan bu (1) tengsizlikning grafigi shunday nuqtalardan iboratki, bu nuqtalardan A nuqtagacha masofa 3 dan katta yoki tengligini bildiradi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Ikki o'zgaruvchili tengsizlik deb nimaga aytiladi?
2. Ikki o'zgaruvchili tenglizlik yechimi deb nimaga aytiladi va bunday tengsizliklar qanday yechiladi?
3. Koordinata tekisligida ikki o'zgaruvchili tengsizlik grafigini yasash bosqichlarini ayting va asoslang.
4. Tengsizliklar grafigini yasang:

   a) $y \geq x + 3$; b) $y < x - 4$; d) $(x-6)^2 + (y-5)^2 \leq 4$;

   e) $(x+1)^2 + (y-3)^2 \geq 9$; f) $(x-1)^2 + (y+4)^2 < 4$.

4.7. Tenglamalar va tengsizliklar sistemalari. Quyon va tustovuqlar haqidagi masalani boshqacha ham yechish mumkin. Tustovuqlar sonini x bilan, quyonlar sonini y bilan belgilaymiz. U holda masala shartiga ko'ra ikkita tenglama tuzish mumkin: $x + y = 19$ va $2x + 4y = 62$. Bu tenglamalarning har biri ikki o'rinli predikatdir, shuning uchun bu tenglamalarning rostlik to'plami cheksiz. Biz x va y ning shunday qiymatlarini topishimiz kerakki, ular ikkala tenglamani ham qanoatlantirsin, ya'ni $x + y = 19$ va $2x + 4y = 62$ predikatlarning

$$(x + y = 19) \wedge (2x + 4y = 62)$$

konyunksiyasini qanoatlantirsin. Maktabda konyunksiyani bunday ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} x + y = 19, \\ 2x + 4y = 62. \end{cases}$$

Bu $x + y = 19$ va $2x + 4y = 62$ tenglamalar sistemasi deyiladi.

Umuman $f(x; y) = 0$ va $F(x; y) = 0$ tenglamalar sistemasi deb bu tenglamalarning

$$f(x; y) = 0 \wedge F(x; y) = 0$$

konyunksiyasiga aytiladi. Maktabda bunday yoziladi:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ F(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) tenglamalar sistemasini yechish degan so'z, shunday $(a; b)$ juftliklar to'plamini topish demakki, bu juftlar tenglamalarga qo'yilsa, $f(x; y) = 0$ va $F(x; y) = 0$ rost tengliklar hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ikki predikat konyunksiyasining rostlik to'plami shu predikatlar rostlik to'plamlarining kesishmasidan iborat. Xuddi shuningdek, (1) tenglamalar sistemasining yechimlari to'plami ham $f(x; y) = 0$ va $F(x; y) = 0$ tenglamalar rostlik to'plamlarning kesishmasidan iborat. Geometrik nuqtayi nazardan bu to'plamni quyidagicha topish mumkin. $f(x; y) = 0$ va $F(x; y) = 0$ tenglamalar grafiklari chiziladi va ularning kesishish nuqtasi topiladi. Bu nuqtalarning koordinatalari x va y ning izlanayotgan qiymatlari bo'ladi.

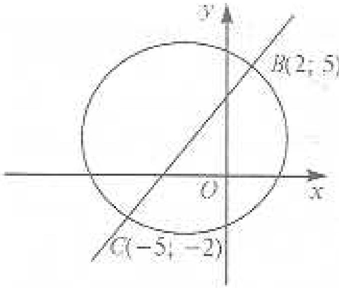
1-misol. $(2; 5)$ va $(-5; -2)$ juftlik

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases} \qquad (2)$$

tenglamalar sistemasining yechimlar to'plamiga tegishli.

Haqiqatan, agar $x = 2$ va $y = 5$ ni ikkala tenglamaga qo'ysak, $5 - 2 = 3$ va $(2 + 1)^2 + (5 - 1)^2 = 25$ rost tengliklarni hosil qilamiz. Shuningdek, $x = -5$ va $y = -2$ qiymatlarni ikkala tenglamaga qo'ysak, $-2 - (-5) = 3$ va $(-5 + 1)^2 + (-2-1)^2 = 25$ rost tengliklarni hosil qilamiz. (2) tenglamalar sistemasi boshqa yechimlarga ega emasligini isbotlash mumkin.

(2) tenglamalar sistemasining yechimini geometrik tasvirlaymiz: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ tenglamaning grafigi markazi $A(-1; 1)$, radiusi 5 bo'lgan aylanadir, $y - x = 3$ tenglamaning



IV.20-rasm.

grafigi to'g'ri chiziqdir (IV.20-rasm). Bu grafiklar $B(2;\ 5)$ va $C(-5;\ -2)$ nuqtada kesishadi.

Tenglamalar sistemasi bilan bir qatorda tengsizliklar sistemasi ham qaraladi. Masalan,

$$\begin{cases} y > 3, \\ x^2 + y^2 \le 25 \end{cases}$$

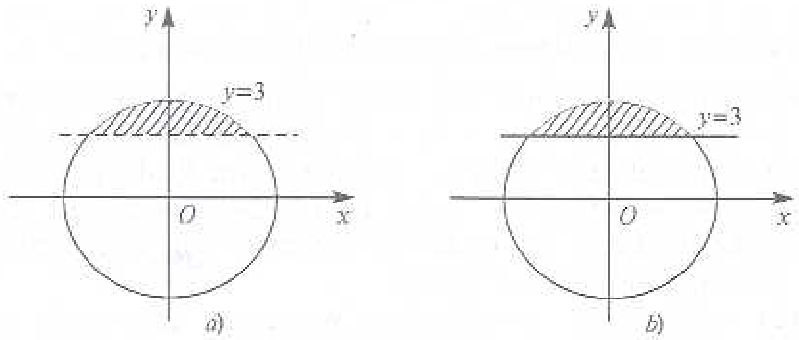
sistema bu tengsizliklar konyunksiyasidir, uni

$$(y > 3) \wedge (x^2 + y^2 \le 25)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ko'rish mumkinki, bu sistemaning grafigi markazi koordinatalar boshida va radiusi 5 bo'lgan doiraning abssissalar o'qiga parallel bo'lib, undan 3 birlik yuqorida yotgan to'g'ri chiziqda yuqoridagi tekislik qismi bilan kesishishdan hosil bo'lgan (IV.21-*a* rasm). Bunda hosil bo'lgan soha chegarasining bir qismi grafikka kirmaydi.

$$\begin{cases} y \ge 3, \\ x^2 + y^2 \le 25 \end{cases}$$

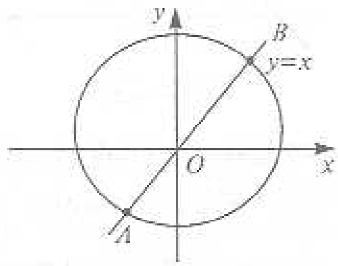


IV.21-rasm.

tengsizliklar sistemasining grafigi shunga o'xshash bo'lib (IV.21-*b* rasm), unga faqat sohaning o'sha chegarasi kiradi. (O'quvchi ko'rib turibdiki, sohaga kirgan chegara qismlari qora chiziq bilan, sohaga kirmagan chegara qismlari shtrix chiziqlar bilan tasvirlangan.)

Tengsizlik va tenglamadan iborat sistemalarni ham qarash mumkin. Masalan,

$$\begin{cases} y = x, \\ x^2 + y^2 \le 36 \end{cases}$$



IV.22-rasm.

sistema $y = x$ va $x^2 + y^2 \le 36$ tengsizlikning konyunksiyasidir. Bu sistemaning grafigi $y = x$ to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, bu kesma $y = x$ to'g'ri chiziqning aylana bilan kesishishdan hosil bo'lgan A va B nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadir (IV.22-rasm).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Tenglama va tengsizliklar sistemasi deganda nimani tushunasiz? Uning yechimi deb nimaga aytiladi?
2. Ikki o'zgaruvchili tenglama yoki tengsizliklar sistemasi qanday yechiladi?
3. Tenglamalar sistemasini yeching:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 14, \\ 3x - 4y = -9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 3x - 4y = 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y = 7, \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3; \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 9 - x^2, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

4. Tengsizliklar sistemasi bilan berilgan sohani tasvirlang:

a) $\begin{cases} y \ge x^2, \\ y \le 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \ge x^2, \\ y \le 18 - x^2; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3, \\ y \ge 3. \end{cases}$

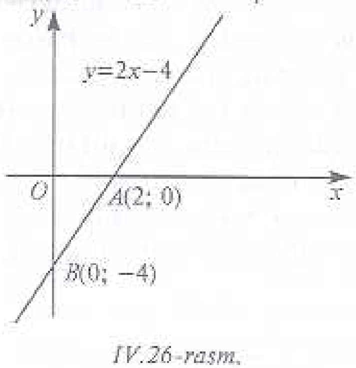
5. Quyidagi shartlar bilan berilgan to'plamni toping:

a) $\begin{cases} y = x, \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y \le 11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x, \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 11. \end{cases}$

rasmdan ko'rinib turibdiki, $|MM'| = |MM_1| + |M_1M'|$. Ammo M_1 nuqtaning M_1M' ordinatasi kx ga teng, $|M_1M| = b$. Demak, $y = |MM'| = |MM_1| + |M_1M'| = kx + b$.

Biz to'g'ri chiziqda yotuvchi istalgan $M(x; y)$ nuqtaning koordinatalari $y = kx + b$ ni qanoatlantirishini isbotladik. Shuning uchun bu to'g'ri chiziqning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi. $y = kx$ to'g'ri chiziqdan pastga yotuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi ham shu ko'rinishda bo'ladi. Faqat bunda b manfiy bo'ladi. Ikkala holda ham to'g'ri chiziqning ordinata o'qi bilan kesishish nuqtasining ordinatasi b ga teng. Shuning uchun b ni *to'g'ri chiziqning bosh ordinatasi* deyiladi. k ni yuqorida xususiy holda qaralgandagidek, *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deyiladi. Agar to'g'ri chiziq abssissa o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak hosil qilsa, bu koeffitsiyent musbat, agar to'g'ri chiziq abssissa o'qiga parallel bo'lsa, nolga teng. Ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar $y = kx + b$ ko'rinishda bo'la olmaydi.

$y = kx + b$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni yasash uchun (kelgusida qisqacha «$y = kx + b$ to'g'ri chiziq» deymiz) ordinata o'qida avval $B(0; b)$ nuqtani olamiz. Shunday keyin to'g'ri chiziqda yana bitta nuqtani topish kerak. Buning uchun istalgan qiymat x_1 ni olamiz va unga mos qiymatni topamiz: $y_1 = kx_1 + b$. $M_1(x_1; y_1)$ nuqta izlanayotgan to'g'ri chiziqda yotishi kerak. Shuning uchun to'g'ri chiziq $B(0; b)$ va $M_1(x_1; y_1)$ nuqtalardan o'tadi, bunda $y_1 = kx_1 + b$.



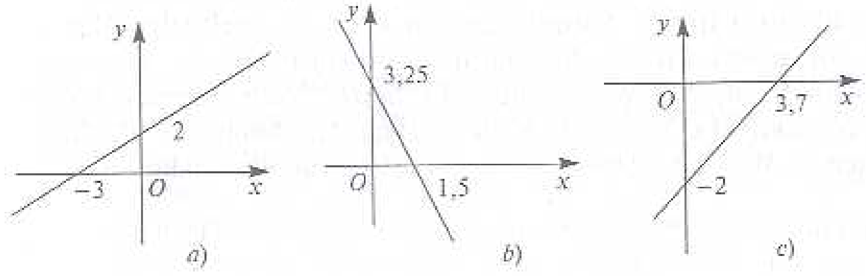
IV.26-rasm.

Endi $y = 2x - 4$ to'g'ri chiziqni yasaymiz. U $B(0; -4)$ nuqtadan o'tadi. $x = 1$ deb $y = -2$ ni topamiz. Demak, to'g'ri chiziq $A_1(1; -2)$ nuqtadan ham o'tadi (IV.26-rasm).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Chiziqli tenglama deganda nimani tushunasiz?
2. To'g'ri chiziqning qanday tenglamalarini bilasiz?
3. Chiziq tenglamasidagi k-burchak koeffitsiyetni nimani bildiradi? Uning qiymati bilan to'g'ri chiziq grafigi qanday bog'langan?

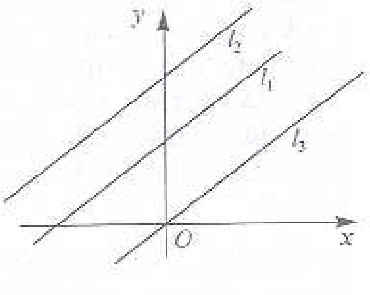
4. a) $k = 1$, $b = 0$; b) $k = 2$, $b = 0$; d) $k = -1$, $b = 0$; e) $k = 1$, $b = 2$; f) $k = 2$, $b = -3$; g) $k = 2$, $b = -4$; h) $k = -1$, $b = 4$; i) $k = -1$, $b = -2$; j) $k = -2$, $b = 4$ bo'lsa, to'g'ri chiziqni yasang. Bu to'g'ri chiziqlardan qaysilari abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak hosil qiladi?
5. $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $M(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tadimi? Bunda:
   a) $k = 4$, $b = 1$, $x_0 = -2$, $y_0 = -7$;
   b) $k = 1$, $b = 6$, $x_0 = 4$, $y_0 = 9$;
   d) $k = -3$, $b = 4$, $x_0 = 4$, $y_0 = 4$.
6. IV.27-rasmda tasvirlangan to'g'ri chiziqlar tenglamalarini yozing.
7. $y = 2x - 4$ to'g'ri chiziqda: a) abssissasi 3 bo'lgan nuqtani; b) ordinatasi 8 bo'lgan nuqtani; d) ordinatasi abssissasidan ikki marta katta bo'lgan nuqtani; e) ordinatasi abssissasidan 3 ta katta bo'lgan nuqtani toping.



IV.27-rasm.

5.2. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlari. Agar l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar bir-biriga parallel bo'lsa, ular koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning bittasi va faqat bittasiga parallel (IV.28-rasm).

Shuning uchun ularning burchak koeffitsiyenti shu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentiga teng, ya'ni ular bir-biriga teng. Aksincha: *agar ikkita to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentlari teng bo'lsa, bu ikki to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning bittasiga va faqat bittasiga parallel bo'ladi va shuning uchun o'zaro parallel.*

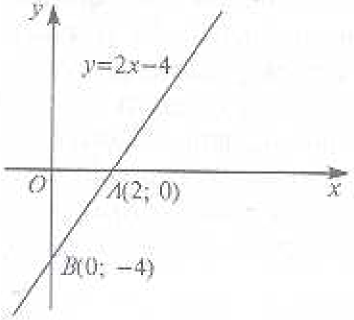


IV.28-rasm.

rasmdan ko'rinib turibdiki, $|MM'| = |MM_1| + |M_1M'|$. Ammo M_1 nuqtaning M_1M' ordinatasi kx ga teng, $|M_1M| = b$. Demak, $y = |MM'| = |MM_1| + |M_1M'| = kx + b$.

Biz to'g'ri chiziqda yotuvchi istalgan $M(x; y)$ nuqtaning koordinatalari $y = kx + b$ ni qanoatlantirishini isbotladik. Shuning uchun bu to'g'ri chiziqning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi. $y = kx$ to'g'ri chiziqdan pastga yotuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi ham shu ko'rinishda bo'ladi. Faqat bunda b manfiy bo'ladi. Ikkala holda ham to'g'ri chiziqning ordinata o'qi bilan kesishish nuqtasining ordinatasi b ga teng. Shuning uchun b ni *to'g'ri chiziqning bosh ordinatasi* deyiladi. k ni yuqorida xususiy holda qaralgandagidek, *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deyiladi. Agar to'g'ri chiziq abssissa o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak hosil qilsa, bu koeffitsiyent musbat, agar to'g'ri chiziq abssissa o'qiga parallel bo'lsa, nolga teng. Ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar $y = kx + b$ ko'rinishda bo'la olmaydi.

$y = kx + b$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni yasash uchun (kelgusida qisqacha «$y = kx + b$ to'g'ri chiziq» deymiz) ordinata o'qida avval $B(0; b)$ nuqtani olamiz. Shunday keyin to'g'ri chiziqda yana bitta nuqtani topish kerak. Buning uchun istalgan qiymat x_1 ni olamiz va unga mos qiymatni topamiz: $y_1 = kx_1 + b$. $M_1(x_1; y_1)$ nuqta izlanayotgan to'g'ri chiziqda yotishi kerak. Shuning uchun to'g'ri chiziq $B(0; b)$ va $M_1(x_1; y_1)$ nuqtalardan o'tadi, bunda $y_1 = kx_1 + b$.



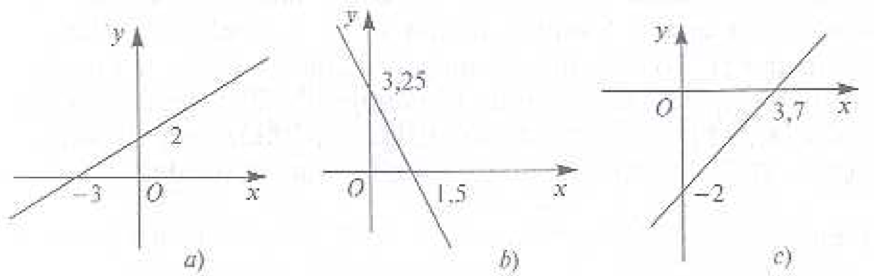
IV.26-rasm.

Endi $y = 2x - 4$ to'g'ri chiziqni yasaymiz. U $B(0; -4)$ nuqtadan o'tadi. $x = 1$ deb $y = -2$ ni topamiz. Demak, to'g'ri chiziq $A_1(1; -2)$ nuqtadan ham o'tadi (IV.26-rasm).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Chiziqli tenglama deganda nimani tushunasiz?
2. To'g'ri chiziqning qanday tenglamalarini bilasiz?
3. Chiziq tenglamasidagi k-burchak koeffitsiyetni nimani bildiradi? Uning qiymati bilan to'g'ri chiziq grafigi qanday bog'langan?

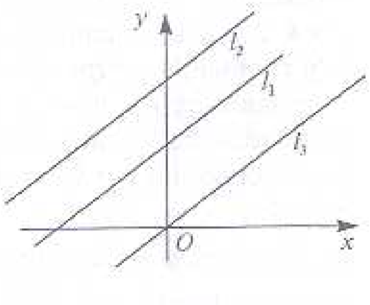
4. a) $k = 1$, $b = 0$; b) $k = 2$, $b = 0$; d) $k = -1$, $b = 0$; e) $k = 1$, $b = 2$; f) $k = 2$, $b = -3$; g) $k = 2$, $b = -4$; h) $k = -1$, $b = 4$; i) $k = -1$, $b = -2$; j) $k = -2$, $b = 4$ bo'lsa, to'g'ri chiziqni yasang. Bu to'g'ri chiziqlardan qaysilari abssissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak hosil qiladi?
5. $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $M(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tadimi? Bunda:
   a) $k = 4$, $b = 1$, $x_0 = -2$, $y_0 = -7$;
   b) $k = 1$, $b = 6$, $x_0 = 4$, $y_0 = 9$;
   d) $k = -3$, $b = 4$, $x_0 = 4$, $y_0 = 4$.
6. IV.27-rasmda tasvirlangan to'g'ri chiziqlar tenglamalarini yozing.
7. $y = 2x - 4$ to'g'ri chiziqda: a) abssissasi 3 bo'lgan nuqtani; b) ordinatasi 8 bo'lgan nuqtani; d) ordinatasi abssissasidan ikki marta katta bo'lgan nuqtani; e) ordinatasi abssissasidan 3 ta katta bo'lgan nuqtani toping.



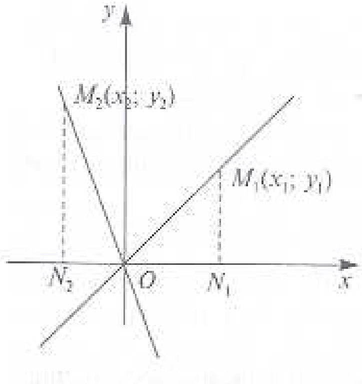
IV.27-rasm.

5.2. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlari. Agar l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar bir-biriga parallel bo'lsa, ular koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning bittasi va faqat bittasiga parallel (IV.28-rasm).

Shuning uchun ularning burchak koeffitsiyenti shu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentiga teng, ya'ni ular bir-biriga teng. Aksincha: *agar ikkita to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentlari teng bo'lsa, bu ikki to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning bittasiga va faqat bittasiga parallel bo'ladi va shuning uchun o'zaro parallel.*



IV.28-rasm.



IV.29-rasm.

Demak, *ordinatalar o'qiga parallel bo'lmagan ikkita to'g'ri chiziq parallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsiyentlari teng bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Masalan, $y = 3x - 4$ va $y = 3x + 1000$ to'g'ri chiziqlar parallel $y = 2x - 1$ va $y = -x + 2$ to'g'ri chiziqlar parallel emas.

Endi ikkita to'g'ri chiziqning perpendikularlik shartini keltirib chiqaramiz. Koordinatalar boshidan ikkita perpendikular to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (IV.29-rasm).

Unda ulardan bittasi (masalan, $y = k_1x$) abssissa o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak, ikkinchisi o'tmas burchak hosil qiladi. Shuning uchun k_1 va k_2 koeffitsiyentlar turli ishoraga ega. To'g'ri chiziqlarning birinchisida $M_1(x_1; y_1)$ nuqtani, ikkinchisida $M_2(x_2; y_2)$ nuqtani olamiz. IV.29-rasmdan ko'rinib turibdiki, M_1ON_1 va OM_2N_2 burchaklar kattaliklari bir xil, shuning uchun M_1ON_1 va OM_2N_2 to'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshash. Demak, $\left|\frac{y_1}{x_1}\right| = \left|\frac{y_2}{x_2}\right|$. Ammo $\frac{y_1}{x_1} = k_1$, $\frac{y_2}{x_2} = k_2$. Shuning uchun $|k_1| = \frac{1}{|k_2|}$, ya'ni $|k_1| \cdot |k_2| = 1$. k_1 va k_2 lar turli ishorali bo'lgani uchun $k_1 \cdot k_2$ — manfiy son. Shuning uchun $|k_1| \cdot |k_2| = 1$ tenglikdan $k_1 \cdot k_2 = -1$ kelib chiqadi. Teskari tasdiq ham o'rinli: agar $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo'lsa, $y = k_1x$ va $y = k_2x$ to'g'ri chiziqlar perpendikular.

Endi istalgan $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Ulardan birinchisi $y = k_1x$ to'g'ri chiziqqa, ikkinchisi $y = k_2x$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgani uchun $y = k_1x$ va $y = k_2x$ to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'lgani holdagina, ya'ni $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo'lgandagina $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'ladi. Shunday qilib, $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlar $k_1 \cdot k_2 = -1$ shart bajarilgandagina perpendikular bo'ladi.

Masalan, $y = 2x + 4$ va $y = -\frac{1}{2}x + 7$ to'g'ri chiziqlar perpendikular, chunki $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyida berilgan tenglamalar orasidan parallel va perpendikular to'g'ri chiziqlar tenglamasini toping:

   a) $y = 3x - 4$; b) $y = -\frac{1}{3}x + 7$; d) $y = \frac{1}{3}x + 6$;

   e) $y = 3x$; f) $y = -3x + 2$; g) $y = -3x + 11$;

   h) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; i) $y = \frac{1}{3}x - 1$; j) $y = -3x + 8$.

2. a) $y = 4x + 2$; b) $y = -x - 1$;

   d) $y = x + 4$; e) $y = \frac{1}{3}x + 7$

   to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

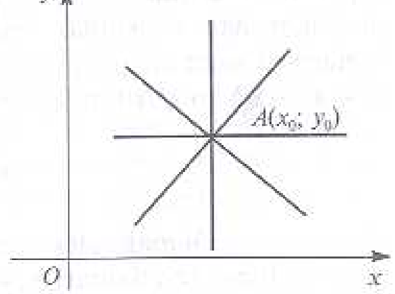
3. a) $y = 4x + 2$; b) $y = -x + 1$; d) $y = x + 4$; e) $y = \frac{1}{3} + 7$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping.

5.3. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi, ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. Tekislikda $A(x_0; y_0)$ nuqtani olamiz va u orqali ordinata o'qiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. $y = kx + b$ shu to'g'ri chiziqning tenglamasi bo'lsin. A nuqta o'tkazilgan to'g'ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari $y_0 = kx_0 + b$ to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi. Shuning uchun $y_0 = b_0 - kx_0$. Agar to'g'ri chiziq tenglamasiga b ning topilgan qiymatini qo'ysak, $y = kx + y_0 - kx_0$ yoki, boshqacha aytganda,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (1)$$

tenglama hosil bo'ladi.

Demak, $A(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tuvchi har qanday to'g'ri chiziq tenglamasini (ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziq bundan mustasno) (1) ko'rinishda yozish mumkin ekan. k ning qiymatlari o'zgarishi bilan A nuqtadan o'tuvchi turli to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami (IV.30-rasm) *A markazli to'g'ri chiziqlar dastasi deyiladi.*



IV.30-rasm.

Agar (1) da k ni o'zgaruvchi desak, (1) tenglama shu dastadagi ordinata o'qiga parallel bo'lgani $x = x_0$ to'g'ri chiziqdan tashqari har qanday to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Shuning uchun (1) formula markazi $A(x_0; y_0)$ bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi deyiladi.

1-misol. $A(4; -7)$ nuqtadan o'tuvchi $y = 2x + 3$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $A(4; -7)$ nuqtadan o'tgani uchun uning tenglamasi $y - (-7) = k(x - 4)$ yoki $y + 7 = k(x - 4)$ ko'rinishida bo'lishi kerak. Ammo u to'g'ri chiziqqa $y = 2x + 3$ parallel bo'lgani, parallel to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari esa teng bo'lgani uchun $k = 2$ va shuning uchun izlanayotgan tenglama $y + 7 = 2(x - 4)$ ko'rinishga ega, bundan $y + 7 = 2x - 8$ yoki $y = 2x - 15$.

2-misol. $A(-1; 5)$ nuqtadan o'tuvchi, $y = \frac{1}{3}x + 6$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq $A(-1; 5)$ nuqtadan o'tgani uchun uning tenglamasi $y - 5 = k(x + 1)$ ko'rinishda bo'ladi.

Perpendikularlik shartga asosan $k_1 \cdot k_2 = -1$, bundan $\frac{1}{3} \cdot k = -1$. Shuning uchun $k = 3$. Demak, izlanayotgan tenglama $y - 5 = -3(x + 1)$ yoki $y - 5 = (-3x - 3)$, ya'ni $y = -3x + 2$ ko'rinishga ega.

To'g'ri chiziq asosan shu to'g'ri chiziqdagi ikkita nuqta bilan beriladi. $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu to'g'ri chiziq $A(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tgani uchun uning tenglamasi

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (1')$$

ko'rinishda bo'ladi. Biz k burchak koeffitsiyentining qiymatini topishimiz kerak. Buning uchun to'g'ri chiziqning $B(x_2; y_2)$ nuqtadan ham o'tishidan foydalanamiz. Agar hosil bo'lgani tenglamaga B nuqtaning x_2 va y_2 koordinatalarini qo'ysak, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ to'g'ri tenglik hosil bo'ladi. Bundan $x_2 \neq x_1$ desak,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

ni topamiz. Demak, $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $x_2 \neq x_1$ da

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ko'rinishni oladi. Undan tashqari $y_1 \neq y_2$, shuning uchun bu tenglamani proporsiya ko'rinishida yozish mumkin:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3)$$

$x_2 = x_1$ bo'lgan holda ikkala nuqta bir xil abssissaga ega va shuning uchun ordinata o'qiga parallel $x = x_1$ to'g'ri chiziqda yotadi. Xuddi shuningdek, agar $y_1 = y_2$ bo'lsa, ikkala nuqta abssissalar o'qiga parallel $y = y_2$ to'g'ri chiziqda yotadi.

3-misol. $A(4; -8)$ va $B(7; -5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini topamiz. (2) formuladan

$$k = \frac{-5 - (-8)}{7 - 4} = \frac{-5 + 8}{7 - 4} = \frac{3}{3} = 1.$$

4-misol. $A(5; 2)$ va $B(-1; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Buning uchun (3) tenglamada x_1 va y_1 ni 5 va 2 bilan, x_2 va y_2 ni -1 va 4 bilan almashtiramiz:

$$\frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - 5}{(-1) - 5}.$$

Bu tenglamani quyidagicha o'zgartirish mumkin:

$$\frac{y-2}{2} = \frac{x-5}{-6} \text{ yoki } y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 5),$$

ya'ni

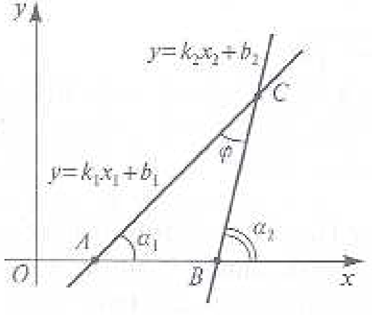
$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}.$$

5-misol. $A(6; 1)$ va $B(6; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu nuqtalarning abssissalari bir xil bo'lgani uchun to'g'ri chiziq tenglamasi $x = 6$ ko'rinishda bo'ladi. Agar bu to'g'ri chiziq tenglamasini proporsiya ko'rinishda yozsak, $\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-6}{6-6}$ yoki $\frac{y-1}{3} = \frac{x-6}{0}$ ni hosil qilamiz. Bunday yozuv noto'g'ri, chunki 0 ga bo'lish mumkin emas.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi? Bu tenglamani keltirib chiqaring.
2. Bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar bir-biridan nimasi bilan farqlanadi? Misollar bilan tushuntiring.
3. $A(6; -3)$ nuqtadan o'tuvchi va a) $y = 5x - 1$ to'g'ri chiziqqa parallel; b) $y = 2x + 4$ to'g'ri chiziqqa perpendikular; d) abssissalar o'qiga parallel; e) ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
4. a) $A(-3; 2)$, $B(-1; 6)$;b) $A(5; 7)$, $B(0; 3)$;
   d) $A(4; 1)$, $B(4; 8)$; e) $A(1; -3)$, $B(8; -3)$
   nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
5. Uchlari: $A(-1; 9)$, $B(2; 5)$, $C(-2; 1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak berilgan. Bu uchburchak balandliklari[1] tenglamasini yozing. Bu uchburchakning balandliklarini o'z ichiga olgan to'g'ri chiziqlar ko'zda tutilgan.
6. Uchlari $A(1; 3)$, $B(5; 7)$, $C(3; 1)$ nuqtalarda bo'lgani ABC chburchak berilgan. Bu uchburchak medianalarining tenglamalarini va C uchdan MA medianaga tushirilgan perpendikular tenglamasini yozing.

5.4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. $y = k_1x_1 + b_1$ va $y = k_2x_2 + b_2$ to'g'ri chiziqlar orasidagi ϑ burchak uchun formula keltirib chiqaramiz. Bu k burchak koeffitsiyent $y = kx + b$ to'g'ri chiziqning abssissa o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensi ekanligini, ya'ni $k = \operatorname{tg}x$ ni hisobga olamiz. Shuning uchun $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, bunda α_1 — birinchi to'g'ri chiziqning abssissa o'qiga og'ish burchagi, α_2 — ikkinchisi to'g'ri chiziqning og'ish burchagi.



IV.31-rasm.

ABC uchburchakdan (IV.31-rasm) $\alpha_2 = \alpha_1 + \vartheta$ (uchburchakning tashqi burchagi unga qo'shni bo'lmagan ikkita ichki burchak yig'indisiga teng). Demak, $\vartheta = \alpha_2 - \alpha_1$ va shuning uchun

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2}.$$

[1] Bu uchburchakning balandliklarini o'z ichiga olgan to'g'ri chiziqlar ko'zda tutilgan.

Shunday qilib, $y = k_1x_1 + b_1$ va $y = k_2x_2 + b_2$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensi

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2}$$

formula bilan ifodalanadi.

Misol. $y = 3x - 1$ va $y = -2x + 4$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz. Bu holda $k_1 = 3$, $k_2 = -2$ va

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

ϑ burchak tangensi 1 ga teng bo'lsa, ϑ burchak 45°ga teng bo'ladi. Demak, to'g'ri chiziqlar 45° li burchak hosil qilar ekan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Koordinata tekisligida ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi? Burchak tangensi formulasini keltirib chiqaring.
2. a) $y = 5x - 1$ va $y = x + 7$; b) $y = -4x + 3$ va $y = 3x - 1$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini toping.
3. Uchlari $A(-3; 1)$, $B(-1; 7)$, $C(2; 1)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak burchaklarini toping.
4. Uchlari $A(1; 8)$, $B(-3; 2)$, $C(5; 4)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakning MA va BN medianalari orasidagi burchakni toping.

5.5. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. Burchak koeffitsiyentli to'g'ri chiziq tenglamasining kamchiliklaridan biri bu tenglama tekislikdagi hamma to'g'ri chiziqlarni o'z ichiga olmaydi — ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar bunday tenglama bilan ifodalanmaydi. Bu to'g'ri chiziqlar $x = a$ tenglama ko'rinishda. Hozir xususiy holi $y = kx + b$ va $x = a$ tenglamalar bo'lgan tenglamani yozamiz. U quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax + Dy + C = 0. \qquad (1)$$

Bu tenglamada x va y birinchi darajali. Bu tenglama to'g'ri chiziqning *umumiy tenglamasi* deyiladi. Bu tenglamaga $B = 1$, $A = -k$, $C = -b$ larni qo'yib, $-kx + y - b = 0$, ya'ni $y = kx + b$

ni hosil qilamiz. Agar $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$ ni qo'ysak, $x - a = 0$, ya'ni $x = a$ ni hosil qilamiz. Demak, burchak koeffitsiyentli to'g'ri chiziq tenglamasi ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi ham umumiy chiziq tenglamasining xususiy holidir.

Agar $A = 0$ va $B = 0$ bo'lsa, umumiy chiziq tenglamasi $C = 0$ ko'rinishni oladi. C koeffitsiyent ham nolga teng bo'lgan holda $0 = 0$ tenglikni hosil qilamiz, bu tenglikni tekislikdagi istalgan nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. (x va y ni qanday tanlamaylik, $0 = 0$ rost tenglik bo'lib qoladi.) Demak, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ bo'lganda umumiy chiziq tenglamasining grafigi butun tekislik bo'ladi. $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $1 = 0$ tenglikka o'xshash tekislikni hosil qilamiz. x va y lar har qanday qiymatida bu tenglik yolg'on, ya'ni $1 = 0$ ning grafigi yo'q.

$A = B = 0$ bo'lgan hollarni, ya'ni $Ax + Bx + C$ tenglamaning grafigi butun tekislik yoki bo'sh to'plam bo'lgan hollarni tashlab yuborsak, bu grafik to'g'ri chiziq bo'lishini aytish mumkin. Ikki hol bo'lishi mumkin: $B = 0$ yoki $B \neq 0$. Agar $B = 0$ bo'lsa, tenglama $Ax + C = 0$ ko'rinishni oladi. Biz A va B ning bir vaqtning o'zida nol bo'lishini tashlab yuborganimiz uchun $A \neq 0$. Shuning uchun tenglamani $x = -\frac{c}{A}$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi. $B \neq 0$ bo'lganda $Ax + By + C = 0$ tenglama $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ tenglamaga teng kuchli. $-\frac{A}{B} = k$ va $-\frac{C}{B} = b$ deb, to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli $y = kx + b$ tenglamasini hosil qilamiz.

Shunday qilib, $Ax + By + C = 0$ — umumiy chiziq tenglamasi bo'lib, uning grafigi

a) butun tekislik (bunda $A = B = C = 0$);

b) bo'sh to'plam (bunda $A = B = 0$, $C \neq 0$);

d) ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziq (bunda $B = 0$, $A \neq 0$);

e) ordinatalar o'qiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziq (bunda $B \neq 0$) bo'lishi mumkin.

Oxirgi holda to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k = -\frac{A}{B}$ formula bilan ifodalanadi.

Yana shuni aytishimiz kerakki, $A = 0$ bo'lganda, to'g'ri chiziq abssissalar o'qiga parallel ($k = 0$), $C = 0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi. Haqiqatan, bu holda to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax + By = 0$ ko'rinishni oladi va $O(0;\ 0)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi.

Agar $\lambda \neq 0$ bo'lsa, $Ax + By + C = 0$ va $\lambda(Ax + By + C) = 0$ tenglamalar teng kuchli. Bu tenglamalar bitta to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Masalan, $2x - y + 4 = 0$ va $6x - 3y + 12 = 0$ tenglamalar bitta to'g'ri chiziqni ifodalaydi (ikkinchi tenglama birinchi tenglamaning ikkala qismini 3 ga ko'paytirishdan hosil bo'lgan).

Umumiy chiziqli tenglamalar bilan ifodalangan $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlarini yozamiz. Agar $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ bo'lsa, birinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $-\frac{A_1}{B_1}$ ga, ikkinchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $-\frac{A_2}{B_2}$ ga teng. $k_1 - \frac{A_2}{B_2} k_2$, ya'ni $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ shart bajarilganda bu to'g'ri chiziqlar parallel. Bu shartni boshqacha yozish mumkin:

$$A_1B_2 = A_2B_1. \tag{2}$$

Bu shart ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar uchun ham o'rinli.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning $k_1 \cdot k_2 = -1$ perpendikularlik sharti hamda xuddi shunday yoziladi:

$$\left(\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}\right) = -1.$$

Bu shartni boshqacha yozish mumkin:

$$A_1A_2 = -B_1B_2 \text{ yoki } A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3}$$

(3) shart to'g'ri chiziqlardan bittasi ordinata o'qiga parallel bo'lganda ham o'rinli.

$M(x_0;\ y_0)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu tenglama $Ax + By + C = 0$ ko'rinishda bo'lishi kerak. Bu to'g'ri chiziqning $M(x_0;\ y_0)$ nuqtadan o'tishi uchun $Ax_0 + By_0 + C = 0$ tenglik bajarilishi kerak. Bundan $C = -Ax_0 - By_0$ bo'ladi va to'g'ri chiziq tenglamasi $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$ ko'rinishda, ya'ni

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{4}$$

ko'rinishda bo'lishi kerak.

Endi ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqni chiqarib tashlaymiz.

M i s o l. M (4; −2) nuqtadan o'tuvchi va $3x - 5y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz.

Izlanayotgan to'g'ri chiziq $M(4; -2)$ nuqtadan o'tgani uchun uning tenglamasi $A(x - 4) + B(y + 2) = 0$ ko'rinishda bo'lishi kerak. Bu to'g'ri chiziqning $3x - 5y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallelligidan A va B koeffitsiyentlar $-5A = 3B$ tenglamani qanoatlantirishi kerak. Biz ikki A va B noma'lumni topish uchun bitta tenglamani hosil qildik. Ammo $Ax + By + C = 0$ va $\lambda(Ax + By + C) = 0$ tenglamalar bitta to'g'ri chiziqning tenglamalaridir, shuning uchun bizga A va B koeffitsiyentlar emas, ularning nisbatlarigina kerak xolos. Boshqacha aytganda, bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmagan va $-5A = 3B$ tenglamani qanoatlantiruvchi hech bo'lmaganda bitta sonlar jufti $(A; B)$ ni topish kerak. Bunday juftlik sifatida (3; −5) juftlikni olish mumkin. Shuning uchun izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha:

$$3(x - 4) - 5(y + 2) = 0.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. a) $2x + y = 0$; b) $-4x + 2y - 5 = 0$; d) $-7x - 2y + 1$; e) $3x - 5y + 15 = 0$ to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarini va boshlang'ich ordinatalarini toping.
2. Quyidagi to'g'ri chiziqlarni chizing:
   a) $4x - 5y + 2\vartheta = 0$; b) $x - 3y + 9 = 0$; d) $3x + y - 6 = \vartheta$;
   e) $4y - 7 = 0$; f) $2x - 5 = 0$; g) $3x + 8y = 0$.
3. $A(-5; 1)$ nuqta orqali $3x - 6y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazing.
4. $A(4; 8)$ nuqta orqali $2x + 3y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazing.
5. Uchlari $A(-4; 1)$, $B(0; -3)$, $C(2; 4)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak balandliklari tenglamasini yozing.
6. Agar $A(-4; 2)$, $B(6; 4)$ bo'lsa, AB kesma o'rtasidan o'tuvchisi va bu kesmaga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

5.6. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Agar bu to'g'ri chiziqlar kesishsa, ular kesishish nuqtasining koordinatalari

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantirishi kerak. Boshqacha aytganda, to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini topish (1) tenglamalar sistemasini yechish demakdir.

1-m i s o l. $3x - 4y + 5 = 0$ va $5x + 2y - 9 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini topamiz. Buning uchun

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0, \\ 5x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

tenglamalar sistemasini yechamiz.

Ikkinchi tenglamani 2 ga ko'paytirib, (2) ga teng kuchli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0, \\ 10x + 4y - 18 = 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalarni qo'shib, $13x - 13 = 0$, $x = 1$ ni topamiz. Bu qiymatni (2) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, $3 - 4y + 5 = 0$ ni, bundan $y = 2$ ni topamiz. Demak, $3x - 4y + 5 = 0$ va $5x + 2y - 9 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi $M(1; 2)$ nuqtadir.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishmasligi ham mumkin — ular parallel va turli bo'lishi yoki ustma-ust tushishi mumkin. To'g'ri chiziqlarning parallellik sharti quyidagicha: $A_1B_1 - A_2B_1 = 0$ (5.5-bandga q.) ularning ustma-ust tushishi: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ yoki $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, $A_1C_2 - A_2C_1 = 0$, $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$.

Shunday qilib, agar $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ bo'lib, $A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0$ yoki $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ bo'lsa, (1) tenglamalar sistemasi yechimga ega emas. Agar $A_1B_2 - A_2B_1 = A_1C_2 - C_1A_2 = B_1C_2 - C_1B_2 = 0$ bo'lsa, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Bunda istalgan nuqtasining koordinatalari sistemaning $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ to'g'ri chiziqning ikkala tenglamasini qanoatlantiradi, shuning uchun tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

2-misol. $2x - 7y + 3 = 0$ va $4x - 14y + 11 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini toping.

$2 \cdot (-14) - 4 \cdot (-7) = 0$ $2 \cdot 11 - 3 \cdot 4 \neq 0$ bo'lgani uchun bu to'g'ri chiziqlar parallel, lekin ustma-ust tushmaydi. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi yo'q.

3-misol. $2x - 7y + 3 = 0$ va $4x - 14y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini topamiz. Bu holda $2 \cdot (-14) - 4 \cdot (-7) = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = (-7) \cdot 6 - (-14) \cdot 3 = 0$, shuning uchun to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Demak, $2x - 7y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasi izlanayotgan kesishish nuqtasiga tegishli bo'ladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Tekislikda to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
2. To'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasiga ko'ra ularning kesishishi, parallel bo'lishi, yoki ustma-ust tushishi shartlarini ifodalang. Bu shartlar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari soni bilan qanday bog'langan?
3. Ushbu chiziqlarning kesishish nuqtasini toping:
   a) $6x - y - 3 = 0$ va $3x - 4y + 9 = 0$;
   b) $3x - 4y + 1 = 0$ va $9x - 12y + 3 = 0$;
   d) $5x - 8y + 7 = 0$ va $10x - 16y + 1 = 0$.
4. Tomonlari
   $2x - 3y + 5 = 0$ (AB);
   $3x + 4y + 1 = 0$ (BC);
   $x + 2y + 1 = 0$ (AC)
   tenglamalar bilan ifodalangan uchburchak uchlarini toping.

V bob. FUNKSIYA, LIMIT, HOSILA, INTEGRAL

1-§. SONLI FUNKSIYALAR

1. Funksiyalar va ifodalar. Har qanday arifmetik masalaning javobi berilgan ma'lumotlarga bog'liq. Masalan, quyidagi masalani qaraylik: «Qizil va qora qalamlar soni 10 ta. Qizil qalamlar 6 ta, qora qalamlar soni qancha?» Javob bunday: «Qora qalamlar soni 4 ta». Agar bu masalada 6 tani 7 taga almashtirilsa, javob bunday bo'ladi: «Qora qalamlar soni uchta». Shunday qilib, qizil qalamlarning bir soniga qora qalamlarning bir soni mos keladi. Qizil qalamlar sonini x harfi bilan, qora qalamlar sonini y harfi bilan belgilaymiz. Unda $x + y = 10$ tenglik bajarilishi kerak. Bu tenglikdan y ning qiymatini x orqali belgilaymiz: $y = 10 - x$. Bu x ning har bir qiymatiga y ning mos qiymatini topishga yordam beradi. (Masalan, agar $x = -2$ bo'lsa, $y = 12$, agar $x = \frac{1}{2}$ bo'lsa, $y = 9\frac{1}{2}$ bo'ladi.) Qalamlar soni manfiy son bilan ham, kasr son bilan ham ifodalanmaydi, bu — natural son. Shuning uchun x 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlarnigina qabul qila oladi. x va y orasidagi moslik jadval bilan berilgan:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Bu jadval $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ sonli to'plamni R haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirishni aniqlaydi yoki aniqlanish sohasi X bo'lgan sonli funksiyani aniqlaydi.

1-ta'rif. *Umuman $X \subset R$ to'plamdan olingan har bir x songa birorta y son mos keltirilsa, X to'plamda **sonli funksiya berilgan** deyiladi. Funksiya f harfi bilan belgilanadi va $y = f(x)$, $x \in X$ kabi yoziladi. X to'plam bu funksiyaning **aniqlanish** sohasi deyiladi.*

Agar x harfi qatnashgan ifoda X to'plamdan olingan har qanday x uchun aniq qiymat qabul qilsa, u X to'plamda funksiyani aniqlaydi, bu funksiya har bir $x \in X$ ga x nuqtadagi ifodaning qiymatini mos keltiradi.

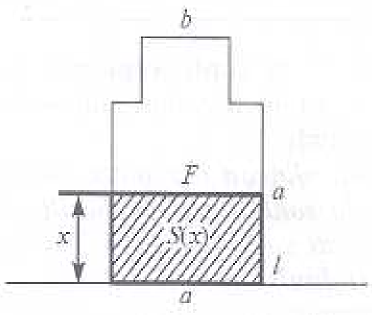
Masalan, $x^2 + 3$ ifoda berilgan bo'lsa, unga $y = x^2 + 3$, $x \in X$, ko'rinishdagi funksiya mos keladi. Bunda turli X to'plamlarga turli funksiyalar mos keladi: $y = x^2 + 3$, $x \in R$ funksiya $y = x^2 + 3$, $x \in R_0$ funksiyadan farqli. Ulardan birinchisi $x = -1$ da $y = (-1)^2 + 3 = 4$ qiymatga ega, ikkinchisi bu nuqtada aniqlanmagan.

Bundan keyin x ni $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyaning *argumenti* deymiz, x argumentning a qiymatiga mos keluvchi funksiya qiymati $f(a)$ kabi belgilanadi. Har bir $y = f(x)$, $x \in X$ funksiya bilan bu funksiyaning qiymatlaridan, ya'ni $f(x)$ $x \in X$ sonlardan iborat Y to'plam bog'liq. Boshqacha aytganda, $Y = \{f(x) | x \in X\}$. Y to'plam ham $f(x)$ bilan belgilanadi. U *funksiyaning qiymatlari to'plami* deyiladi.

x o'zgaruvchili har bir ifoda uchun shu ifoda ma'noga ega bo'ladigan barcha haqiqiy sonlardan iborat eng katta sonli to'plam mavjud. Bunday to'plam ifodaning *mavjudlik sohasi* deyiladi. Masalan, $x^2 + 3$ ifodaning mavjudlik sohasi butun sonlar o'qidan iborat, $\sqrt{x-9}$ ifodaning mavjudlik sohasi faqat $[9; +\infty]$ nurdir (nomanfiy sonlardangina kvadrat ildizdan chiqarish mumkin).

Shunday bo'lishi ham mumkinki, ifoda argumentning funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmagan qiymatlarida ham ma'noga ega bo'ladi. Masalan, kvadratning S yuzi $S = x^2$ formula bo'yicha uning tomoni uzunligi x orqali ifodalanadi. x^2 ifoda x ning har qanday qiymatida ma'noga ega. Ammo kvadrat tomonining uzunligi doim musbat, shuning uchun funksiyaning aniqlanish sohasi $]0; +\infty[$ nur bo'ladi, ya'ni uni $S = x^2$, $0 < x < +\infty$ ko'rinishda yozish mumkin.

Shunday bo'lishi ham mumkinki, bitta funksiya argumentning turli qiymatlarida turli ifodalar bilan beriladi. Masalan, F shakldan l va undan x masofada yotuvchi to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq bilan ajratilgan (kesilgan) shakl yuzini $S(x)$ bilan belgilaymiz (V.1-rasm).



V.1-rasm.

Rasmdan ko'rinib turibdiki, $x < a$ bo'lganda ajratilgan shakl yuzi ax bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shakliga ega. Agar $x > a$ bo'lib, $x < a + b$ bo'lsa, izlanayotgan shakl tomoni a

bo'lgan kvadrat bilan balandligi $\frac{4}{x} - a$, asosi b bo'lgan to'g'ri to'rtburchak birlashmasidan iborat. Shuning uchun shakl yuzi $a^2 + b(x - a)$ga teng. Agar $x > a + b$ bo'lsa, shakl yuzi bir xil bo'lib, $a^2 + b^2$ ga teng. Shunday qilib, $S(x)$ funksiya quyidagicha ifodalanadi:

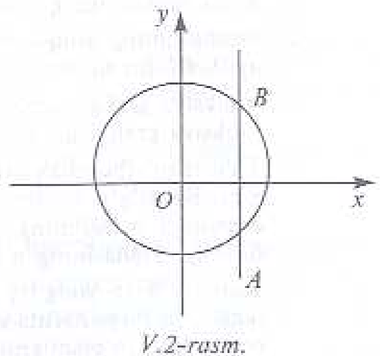
$$S(x) = \begin{cases} ax, & \text{bunda} \quad x \le a, \\ a^2 + b(x-a), & \text{bunda} \quad a < x \le a + b, \\ a^2 + b^2, & \text{bunda} \quad x > a + b. \end{cases}$$

Ko'rib turibmizki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi uchta qismdan iborat va funksiya har bir qismda o'zining analitik ifodasiga ega.

Keltirilgan misollar ko'rsatadiki, funksiya tushunchasi bilan uning analitik ifodasini bir xil deb hisoblab bo'lmas ekan. Analitik ifodasi bo'lmagan funksiyalar mavjud (masalan, berilgan joyda vaqt momentidagi havo temperaturasi).

2-ta'rif. $y = f(x)$, $x \in X$, ***funksiya grafigi*** *deb shunday $(x; y)$ juftliklar to'plamiga aytiladiki, $x \in X$ da $y = f(x)$, ya'ni $(x; f(x))$, $x \in X$, ko'rinishdagi har bir shunday juftlikka koordinata tekisligida koordinatalari x va $f(x)$ bo'lgan M nuqta mos keladi. Bunday nuqtalar to'plami ham $y = f(x)$, $x \in X$ funksiya grafigi deyiladi.*

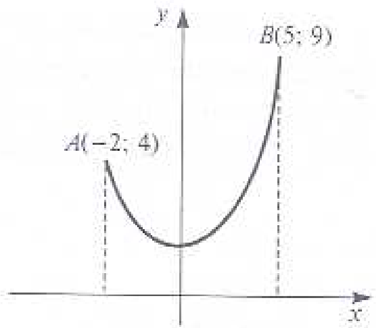
Odatda, funksiya grafigi koordinata tekisligida biror chiziq bilan tasvirlanadi. Biroq har qanday chiziq funksiya grafigi bo'la olmaydi. Gap shundaki, $x \in X$ning berilgan qiymatida y funksiyaning x ning bu qiymatiga mos keladigan bittagina qiymati mavjud. Shuning uchun ordinata o'qiga parallel har bir to'g'ri chiziqda funksiya grafigining bittadan ortiq nuqtasi yotmaydi. Masalan, aylana biror funksiyaning grafigi bo'lmaydi — ordinata o'qiga parallel shunday to'g'ri chiziqlar mavjud (V.2-rasm) bo'lib, ularda aylananing ikkita nuqtasi yotadi.



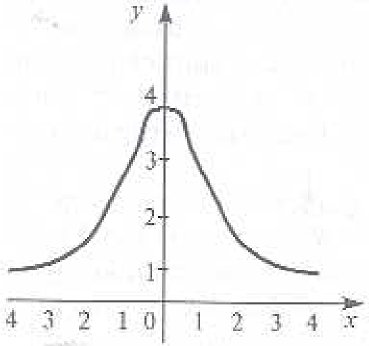
V.2-rasm.

1-misol. $y = x^2$, $x \in X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ funksiya qiymatlari to'plamini topamiz. X to'plam chekli bo'lgani uchun x ning qiymatlarini funksiyaga qiymatlar to'plamini topish uchun birin-ketin qo'yib chiqish mumkin:

$Y = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64\}$.



V.3-rasm.



V.4-rasm.

2-m i s o l. $y = x^2$, $-2 \le x \le 3$ funksiya qiymatlari to'plamini topamiz.

V.3-rasmda uning grafigi tasvirlangan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, funksiya $[-2; 0]$ kesmada $4 = (-2)^2$ qiymatdan 0 gacha kamayadi, $[0; 3]$ kesmada 0 qiymatdan $9 = 3^2$ qiymatgacha ortadi. Bundan funksiya qiymatlarining to'plami $[0; 4]$ va $[0; 9]$ kesmalar birlashmasidan, ya'ni $[0; 9]$ kesmadan iborat ekan, $Y = [0; 9]$.

3-m i s o l. $y = \frac{4}{1+x^2}$, $x \in R$, funksiya qiymatlari to'plamini topamiz. Agar x^2 eng kichik qiymatga ega bo'lsa, ya'ni $x = 0$ da (x ning boshqa qiymatlarida x^2 musbat) funksiya eng katta qiymatni qabul qiladi. Funksiyaning bu qiymati 4 ga teng. Funksiya eng kichik qiymatga ega emas, chunki x ning ortishi bilan maxraj kattalashadi, $\frac{4}{1+x^2}$ kasr esa kamayadi va nolga intiladi, lekin nol qiymatni hech ham qabul qilmaydi. Bundan funksiyaning qiymatlar to'plami $]0; 4]$ oraliq ekani kelib chiqadi (V.4-rasm).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Sonli funksiyaga qanday ta'rif beriladi?
2. Funksiyaning aniqlanish sonasi va qiymatlar toplami deb nimaga aytiladi? Bu to'plamlar qanday aniqlanadi?
3. Funksiya grafigi nima? Koordinata tekisligidagi istalgan chiziqning funksiya grafigi bo'la olish sharti qanday?
4. To'g'ri to'rtburchak bir tomonining uzunligi 5 m, ikkinchi tomoni x m. Bu to'g'ri to'rtburchakning $S(m^2)$ yuzi nimaga teng? x va $S(x)$ orasidagi moslikning qiymatlar to'plamini, aniqlanish sohasini, funksiya ifodasining mavjudlik sohasini ko'rsating.
5. Salimda 5 ta yong'oq bor, Nigorada undan 5 ta ortiq. Ularning ikkalasida birga nechta yong'oq bor? Shu masalada ular orasida moslik o'rnatilgan to'plamlarni ko'rsating. Funksiyaning shu mosliklar bilan aniqlanganligini ko'rsating hamda uning aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini toping. Bu funksiya ifodasining mavjudlik sohasini toping.
6. Quyida grafiklari bilan berilgan mosliklar ko'rsatilgan. Bu mosliklardan qaysilari funksiya bo'lishini aniqlang. Bu mosliklar uchun aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini toping:
   a) $R = \{(1; 2); (3; 4); (5; 6); (7; 8); (9; 10)\}$;
   b) $R = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5)\}$;
   d) $R = \{(1; 2); (2; 2); (3; 2); (4; 2); (5 ;2)\}$;
   e) $R = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)\}$;
   f) $R = \{(1; 0); (-1; 0); (2; 2); (-2; 2); (-2; -2)\}$.
7. $y = -4x$, $x \in X = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ funksiya grafigini yasang. Bu funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.
8. $y = \frac{5}{x-3}$, $x \in X = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ funksiyaning grafigini yasang va qiymatlar to'plamini toping.
9. $y = 9 - x^2$, $x \in R$, funksiya grafigini yasang va x ning $y \ge 0$ bo'ladigan qiymatlar to'plamini ko'rsating.
10. Quyidagi munosabatlarning haqiqiy sonlar to'plamida grafigini yasang va ular orasidan funksiya grafiklarini ko'rsating:
    a) $R = \{(x; y) \mid y = x\}$;
    b) $R = \{(x; y) \mid y \le x\}$;
    d) $R = \{(x; y) \mid y = |x|\}$;
    e) $R = \{(x; y) \mid |y| = x\}$;
    f) $R = \{(x; y) \mid x = y^2\}$.
11. A va B punktlardan bir-biriga qarab piyoda va velosipedchi yo'lga chiqdi. Piyoda soatiga 6 km, velosipedchi undan x km ortiq yo'l bosadi. Agar ular 3 soatdan keyin uchrashgan bo'lsa, punktlar orasidagi y masofa nimaga teng? x va y orasidagi moslikni yozing. U funksiya bo'ladimi? Agar velosipedchi soatiga 15 km dan ortiq yo'l bosmasa, funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami qanday?
12. Manzura polizdan 6 ta bodring topdi. Karim esa undan x ta ortiq topdi. Ular birga topgan y ta bodring soni nimaga teng? Agar Karim 15 tadan ortiq bodring topmagan bo'lsa, x va y orasidagi moslikni yozing va qiymatlar to'plamini toping.
    Bu moslikning grafigini chizing. Bu grafik 8-masala grafigidan nima bilan farq qiladi?

1.2. To'g'ri proporsionallik, chiziqli bog'liqlik va ularning grafiklari. Ko'pincha, bittasi ikkitasining ko'paytmasiga teng bo'lgan uchta kattalik qaraladi. Masalan, tekis harakatda yo'l vaqt bilan harakat tezligining ko'paytmasiga teng, molning narxi uning tannarxi bilan miqdorining ko'paytmasiga teng, to'g'ri to'rtburchakning yuzi uning tomonlari uzunliklarining ko'paytmasiga teng. Bu kattaliklarning matematik bog'liqligi $y = zx$ tenglik bilan ifodalanadi. Agar x yoki z o'zgaruvchilardan bittasi o'zgarmas bo'lsa, masalan, $z = kx$ bo'lsa, $y = kx$ funksiya hosil bo'ladi. Bunday holda y kattalik x kattalikka *to'g'ri proporsional* deyiladi. Agar y kattalik x ga to'g'ri proporsional bo'lsa, $\frac{y}{x}$ kasr x va y ning mos qiymatlarining hamma juftligi uchun ((0; 0) juftlikdan tashqari) bitta k qiymat qabul qiladi. Bu qiymat *proporsionallik koeffitsiyenti* deyiladi.

Proporsionallik koeffitsiyentini topish uchun qiymatlarning bir-biriga mos $(x_0; y_0)$ juftligidan ((0; 0) juftlikdan tashqari) bittasini bilish yetarlidir. $y_0 = kx_0$ tenglikdan $k = \frac{y_0}{x_0}$ ni topamiz. Masalan, tovarning narxi o'zgarmas bo'lganda, uning bahosi tovarning soniga (miqdoriga) proporsional, proporsionallik koeffitsiyenti tovarning narxidir. Tovarning narxini topish uchun uning biror miqdorining bahosini bilish kerak. Masalan, agar 5 kg mahsulot 15 so'm tursa, uning narxi 15 : 5 = 3 so'm (1 kg) bo'ladi.

Biz bilamizki $y = kx$ tenglamaning grafigi koordinata boshidan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti k bo'lgan to'g'ri chiziqdir. Shunday qilib, *k proporsionallik koeffitsiyenti $y = k$ funksiya grafigining burchak koeffitsiyenti bilan bir xil ekan.*

To'g'ri proporsionallikka qaraganda kattaliklar orasidagi chiziqli bog'liqlik umumiyroqdir. Misollar qaraymiz.

Taksida yurish haqi quyidagi qoida bo'yicha aniqlanadi: har bir kilometr uchun 20 so'm va taksiga har bir o'tirish uchun 20 so'm to'planadi. Boshqacha aytganda, x km yo'l yurish uchun $y = 20x + 20$ formula bo'yicha haq to'lanadi. Bu formula $y = kx + b$ ko'rinishdagi umumiy bog'liqlikning xususiy holidir. Bunday funksiya *chiziqli funksiya* deyiladi.

k koeffitsiyentning qiymatini topish uchun bir-biriga mos qiymatlarning ikki juftini bilish kerak. Masalan, $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$. Bu ikkala juftlik $y = kx + b$ shartni qanoatlantirgani uchun $y_1 = kx_1 + b$ va $y_2 = kx_2 + b$ tengliklarning ikkalasi ham rost.

Bulardan $y_2 - y_1 = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$, shuning uchun

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Masalan, agar poyezd A va B shaharlar orasidagi stansiyadan chiqib, harakatlana boshlagandan 2 soat keyin A dan 270 km masofada, harakat boshlagandan 5 soat keyin A dan 510 km masofada bo'lsa, harakat tezligi

$$v = \frac{510 - 270}{5 - 2} = 80 \text{ (km/soat)}$$

bo'ladi. Umuman to'g'ri chiziqli va tekis harakatlanayotgan jismning $[t_1, t_2]$ vaqt oralig'ida x_1 nuqtadan x_2 nuqtaga o'tgandagi tezligi

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

formula bilan ifodalanadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Teskari proporsionallik funksiyasi ta'rifi qanday? Teskari proporsional bog'langan miqdorlarga misol keltiring.
2. Agar chiziqli funksiyaning k koeffitsiyenti va x_1 nuqtadagi y_1 ning qiymati berilgan bo'lsa, uning ifodasini yozing:
   a) $k = 2$, $x_1 = -3$, $y_1 = 4$; b) $k = -1$; $x_1 = 6$, $y_1 = -2$;
   d) $k = \frac{3}{2}$, $x_1 = -7$, $y_1 = -3$; e) $k = -\frac{2}{3}$, $x_1 = 4$, $y_1 = 2$.

   Bu funksiyalarning grafiklarini chizing.
3. Chiziqli funksiyaning x_1 va x_2 nuqtalardagi y_1 va y_2 qiymatlarini bilgan holda uning ifodasini toping, bunda:
   a) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $y_1 = 4$, $y_2 = 0$;
   b) $x_1 = -6$, $x_2 = 3$, $y_1 = 1$, $y_2 = 19$.
4. A stansiyadan B stansiyaga qarab yo'lga chiqqan poyezd a soatdan keyin B stansiyadan S_1 masofada, b soatdan keyin S_2 masofada bo'lgan. Stansiyalar orasidagi masofani va poyezdning tezligini toping.

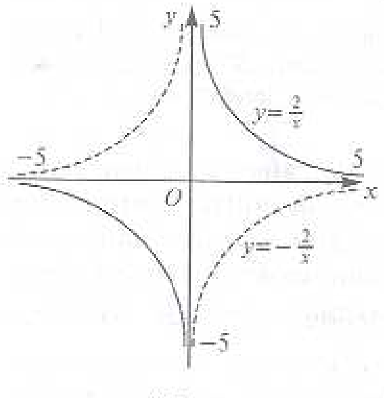
1.3. Teskari proporsionallik va uning grafigi. Biz, agar uchta kattalik $y = zx$ munosabat bilan bog'langan bo'lsa, z ning tayin qiymatida y kattalik x ga proporsionalligini ko'rdik. Endi $y = k$ deb olamiz. U holda x va z lar $k = zx$ munosabat bilan bog'langan, ya'ni $z = \frac{k}{x}$. x va z lar *teskari proporsional* deyiladi. Masalan, bosib o'tilgan yo'l o'zgarmas bo'lsa, tezlik va vaqt $vt = k$ munosabat bilan bog'langan va shuning uchun teskari proporsionaldir.

Xuddi shuningdek, agar mahsulotning narxi o'zgarmas bo'lsa, uning tannarxi va miqdori teskari proporsional, to'g'ri to'rtburchakning yuzi o'zgarmas bo'lsa, uning uzunligi va balandligi (eni va bo'yi) teskari proporsional.

Teskari proporsionallik koeffitsiyenti k ni topish uchun to'g'ri proporsionallikdagidek, x va y ning mos qiymatlaridagi bir juftini topish yetarlidir.

$y = \frac{k}{x}$ funksiya xossalarini o'rganamiz va grafigini yasaymiz. $\frac{k}{x}$ ifoda x ning $x = 0$ dan tashqari hamma qiymatlarida aniqlangan. $k > 0$ bo'lsin. U holda x ning musbat qiymatlarida $\frac{k}{x}$ kasr maxraji o'sishi bilan uning qiymati kamayadi, cheksiz kattalashganda, kasr qiymati nolga yaqinlasha boradi. Masalan, $k = 2$, $x > 2000000$ bo'lganda $y < \frac{2}{2000000} = 0,000001$ bo'ladi, $x > 2000000000$ bo'lganda $y < 0,000000001$ bo'ladi. x maxraj nolga yaqinlashganda $\frac{k}{x}$ kasr qiymati cheksiz kattalasha boradi. Masalan, $k = 2$, $0 < x < 0,002$ bo'lganda $y < \frac{2}{0,002} = 1000$, $0 < x < 0,000002$ bo'lganda $y > 1000000$ bo'ladi.

x ning manfiy qiymatlariga mos kelgan grafikning bir qismini hosil qilish uchun $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigi $M(x_0; y_0)$ nuqta bilan birga $N(-x_0; -y_0)$ nuqtani ham o'z ichiga olishini hisobga olish kerak. Bu $y_0 = \frac{k}{x_0}$ bo'lganda $-y_0 = \frac{k}{-x_0}$ dan kelib chiqadi. Ammo $M(x_0; y_0)$ va $N(-x_0; -y_0)$ nuqtalar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik. Shuning uchun $y = \frac{k}{x_0}$ funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik.



V.5-rasm.

$y = -\frac{k}{x}$ funksiya grafigi $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigidan undagi har bir nuqta uchun y ning ishorasini o'zgartirish bilan hosil bo'ladi. Bu grafiklar abssissalar o'qiga nisbatan bir-biriga simmetrik. 93-rasmda $y = \frac{2}{x}$ funksiya grafigi (qora chiziq bilan) va $y = -\frac{2}{x}$ funksiya grafigi (shtrix bilan) tasvirlangan.

Agar $k > 0$ bo'lsa, $y = \frac{k}{x}$ funksiya grafigi I va III choraklarda, $x < 0$ bo'lsa, II va IV choraklarda joylashadi. x cheksizlikka intilganda $y = \frac{k}{x}$ egri chiziq abssissalar o'qiga yaqinlashadi, lekin u bilan kesishmaydi. Abssissalar o'qi bu egri chiziqning *gorizontal asimptotasi* deyiladi. x nolga intilganda $y = \frac{k}{x}$ egri chiziq ordinatalar o'qiga yaqinlashadi, lekin kesishmaydi. Ordinatalar o'qi bu egri chiziqning *vertikal asimptotasi* deyiladi. Asimptotalarning yanada aniqroq ta'rifi 4-§, 5-bandda beriladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Funksiyalar grafiklarini yasang:

a) $y = -\frac{5}{x}$; b) $y = \frac{5}{x}$; c) $y = \frac{5}{|x|}$; d) $y = \frac{5}{|x|}$.

1.4. Funksiyalar kompozitsiyasi (murakkab funksiya). Kub massasi $m = qV$ formula bo'yicha hisoblanadi, bunda V — kubning hajmi, q — kub yasalgan materialning zichligi. Kub hajmi $V = x^3$ formula bo'yicha hisoblanadi (bunda, x — kub tomonining uzunligi), shuning uchun uning massasini $m = qx^3$ formula bo'yicha hisoblash mumkin. x va m kattaliklar bir-biri bilan shunday bog'langanki, x ning berilgan qiymati bo'yicha avval V ni topamiz, keyin esa V ning qiymati bo'yicha m ni topamiz. Demak, x ning har bir qiymatiga m ning aniq qiymati mos keladi, ya'ni m kattalik x ning funksiyasidir. Bunday funksiya *berilgan funksiyalarning kompozitsiyasi* deyiladi, bunda *V oraliq argument* deyiladi.

Funksiyalar kompozitsiyasi umumiy ko'rinishda bunday ta'riflanadi. $y = f(x)$, $x \in X$ va $x \in \varphi(t)$, $t \in T$ funksiyalar berilgan bo'lsin, bunda $x = \varphi(t)$ funksiyaning har bir qiymati x to'plamga tegishli. U holda t ning berilgan qiymati bo'yicha $x \in X$ ning qiymatini, x ning qiymati bo'yicha y ning qiymatini topamiz. Shu bilan yangi funksiya ta'riflanadi, bu funksiya har bir $t \in T$ ga birorta y ni mos keltiradi. Bu funksiya $y = f(x)$ va $x = \varphi(t)$ *funksiyalarning kompozitsiyasi* deyiladi va $y = f[\varphi(t)]$, $t \in T$ ko'rinishda yoziladi, ba'zan bunday belgilanadi:

$$t \xrightarrow{\varphi} x \xrightarrow{f} y$$

1-m i s o l. $y = x^2 + 1$ va $x = 3t - 4$ bo'lsin. Bu funksiyalar kompozitsiyasining ifodasini hosil qilish uchun y ifodasida x ning $3t - 4$ ga almashtirish kerak: $y = (3t - 4)^2 + 1$.

2-m i s o l. $y = \sqrt{x}$ va $x = -t^2 - 1$ bo'lsin. Bunday holda funksiyalar kompozitsiyasi aniqlangan emas, chunki $x = -t^2 - 1$ funksiyaning hamma qiymatlari manfiy, $x = \sqrt{x}$ funksiya esa x ning nomanfiy qiymatlari uchun aniqlangan.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Funksiyalar kompozitsiyasi (murakkab funksiya) deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
2. Qanday funksiyalar kompozitsiyasi mavjud bo'lmaydi?
3. Funksiyalar kompozitsiyasini toping:

   a) $y = x^3$ va $x = t^2 + 4$; b) $y = x^2 + 4$ va $x = t^3$;

   d) $y = (x^3 + 1)^2$ va $x = t^4$; e) $y = x^4$ va $x = (t^3 + 1)^2$.
4. $y = \sqrt{4-x}$ va $x = 8 + t^2$ funksiyalarning kompozitsiyasi mavjudmi?
5. $y = 8 + x^2$ va $x = \sqrt{4-t}$ funksiyalarning kompozitsiyasi mavjudmi?
6. Kub hajmi V ni uning sirti yuzi S orqali ifodalang.

1.5. Teskari funksiya.

1.5. Teskari funksiya. Piyoda 5 km · soat tezlik bilan harakat qiladi. U 100 km yo'lni piyoda o'tishi kerak. Piyodaning harakat boshlanganidan t soatdan keyin qolgan yo'li

$$S = 100 - 5t, \qquad 0 \le t \le 20 \qquad (1)$$

kabi ifodalanadi ($0 \le t \le 20$ tengsizlik piyodaning butun yo'lga 20 soat sarflashini ko'rsatadi). (1) formula [0; 20] oraliqqa tegishli har qanday t bo'yicha V ni topishga yordam beradi.

Teskari masala — agar 5 km yo'l qolgan bo'lsa, harakat boshlangandan beri qancha vaqt o'tganligini topish uchun (1) tenglikdan t ning qiymatini topish kerak:

$$t = \frac{100-s}{5}, \qquad 0 \le S \le 100. \qquad (2)$$

(2) funksiya (1) funksiyaga teskari.

Teskari funksiyaning umumiy ta'rifini beramiz.

$y = f(x)$ funksiya X to'plamni R haqiqiy sonlar to'plamiga inyektiv akslantirish bo'lsin (ya'ni x ning turli qiymatlariga y ning

turli qiymatlari mos keladi). $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyaning qiymatlar to'plamini Y bilan belgilaymiz. U holda istalgan $y_0 \in Y$ uchun shunday yagona qiymat $x_0 \in X$ topiladiki, $y_0 = f(x_0)$ bo'ladi. Bu bilan Y ning X ga akslanishi ta'riflanadi, ya'ni $x = \varphi(y)$, $y \in Y$. Bunday funksiya $y = f(x)$, $x \in X$ funksiyaning *teskari funksiyasi* deyiladi. Teskari funksiya ifodasini topish uchun $y = f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechish kerak, bunda to'plamga tegishli bo'lgan yechimlargina olinadi. Agar $y = f(x)$, $x \in X$ akslantirish inyektiv bo'lmasa, teskari funksiya mavjud bo'lmaydi, chunki bitta $y_0 \in Y$ ga x ning turli qiymatlari mos kelishi mumkin.

M i s o l. $y = x^2$, $x \in X$ funksiya teskari funksiyaga ega emas, chunki, masalan, $x = 4$ va $x = -4$ qiymatlarga funksiyaning bitta qiymati mos keladi: $4^2 = (-4)^2 = 16$, shuning uchun $y = 16$ qiymat bo'yicha x ning yagona qiymatini topib bo'lmaydi: $x = -4$ ham bo'lishi mumkin, $x = -4$ ham bo'lishi mumkin.

Agar biz $y = x^2$, $x \in R$ funksiyani olsak, y ning turli qiymatlariga x ning turli qiymatlari mos keladi va shuning uchun teskari funksiya aniqlangan.

Bu teskari funksiya $x = \sqrt{y}$ bilan belgilanadi va x ni y dan olingan *arifmetik kvadrat ildiz* deyiladi. Shunday qilib, $x = \sqrt{y}$ yozuv $y = x^2$ ni anglatadi, bunda $x \ge 0$, $y \ge 0$.

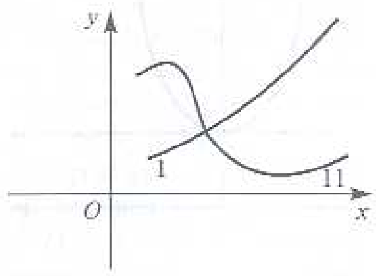
SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Teskari funksiya qanday ta'riflanadi?
2. Ushbu funksiyalarga teskari funksiyalarni toping:

   a) $y = 2x + 6$, $x \in X$; b) $y = -2x - 8$, $x \in R$;

   d) $y = x$, $-4 \le x \le 6$; e) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $0 \le x \le 5$.

   Berilgan funksiyalar va teskari funksiyalar grafiklarini chizing.
3. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 20 m, yuzi S m². To'g'ri to'rtburchak asosi x ning uzunligini toping. Topilgan javob bir qiymatlimi? x ning S orqali ifodasini toping.
4. V.6-rasmda ikki funksiya grafigi berilgan. Ulardan qaysilari teskari funksiyaga ega?
5. Kubning x tomoni uzunligini uning sirti yuzi S orqali ifodalang.



V.6-rasm.

2-§. FUNKSIYA GRAFIGINI YASASH

2.1. «Nuqtalar bo'yicha» grafik yasash. $y = f(x)$, $x \in X$, funksiya grafigi cheksiz ko'p nuqtalar to'plamidan iborat bo'lgani uchun biz uni «aniq» tasvirlay olmaymiz, balki bunday grafik eskizinigina chiza olamiz. Ko'pincha shu grafikka tegishli bir nechta nuqtani topib va ularni qo'lda silliq chiziq bilan tutashtirib, grafik chiziladi. Buning uchun oldin bu funksiyaning qiymatlar jadvali tuziladi.

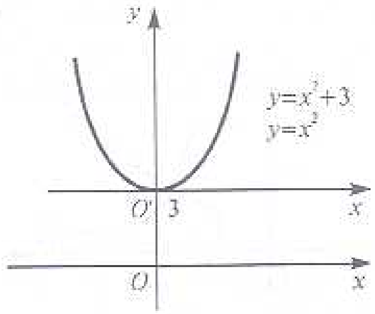
SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Funksiya grafigini yasashning qanday usullarini bilasiz?
2. Funksiya grafigini nuqtalar bo'yicha yasash deganda nimani tushunasiz?
3. Ushbu funksiyalar grafigini nuqtalar bo'yicha chizing:

a) $y = (x-1)^2$; b) $y = x^3 - 1$; d) $y = x^3$;

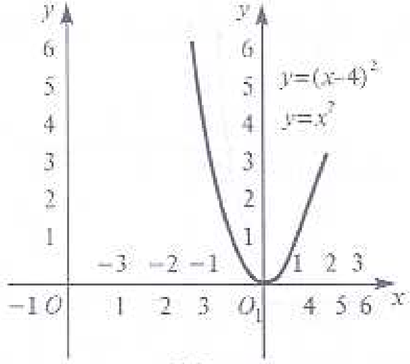
e) $y = \frac{1}{x^2+4}$; f) $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$; g) $y = \frac{1}{x+8}$.

2.2. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish bilan grafiklar yasash. Ko'pincha funksiya grafigini yasash uchun koordinatalar sistemasi o'zgartiriladi va yangi koordinatalar sistemasida berilgan funksiya grafigi yasaladi. Masalan, $y = x^2 + 3$ funksiya grafigini yasaylik. Buning uchun $y = x^2 + 3$ tenglikni $y - 3 = x^2$ ko'rinishda yozamiz va $X = x$, $Y = y - 3$ deb olamiz. Koordinatalarni bunday almashtirish dekart koordinatalar sistemasini parallel ko'chirishga mos keladi, bunda koordinatalar boshi $(0; 3)$ nuqtaga o'tadi. Koordinatalarning yangi sistemasida $Y = x^2$ funksiyani hosil qilamiz, bu funksiyaning grafigi paraboladir. Shunday qilib, $y = x^2 + 3$ funksiya grafigini yasash uchun koordinatalar boshini $O_1(0; 3)$ nuqtaga ko'chirish kerak va koordinatalarning yangi sistemasida $y = x^2$ parabolani chizish va chizilgan grafikni koordinatalar sistemasi bilan birgalikda ko'chirish kerak (V.7-rasm).



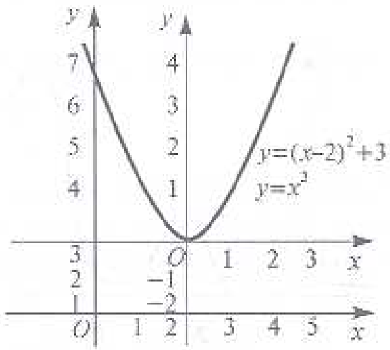
V.7-rasm.

1-m i s o l. $y = (x-4)^2$ funksiya grafigini yasaylik. $X = x - 4$, $Y = y$ desak, ya'ni koordinatalar boshini $O_1(4; 0)$ nuqtaga ko'chirsak, $Y = x^2$ tenglama hosil qilamiz. Demak, koordinatalar boshini $O_1(4; 0)$ nuqtaga ko'chirish va koordinatalarning yangi sistemasida $y = x^2$ parabolani chizish kerak yoki, boshqacha aytganda, $y = x^2$ parabolani chizib, uni o'ng tomonga 4 birlik ko'chirish kerak (V.8-rasm).



V.8-rasm.

2-m i s o l. $y = (x-2)^2 + 3$ funksiya grafigini chizamiz. Yuqorida aytilganlarga ko'ra u quyidagicha: koordinatalar boshini $O_1(2; 3)$ nuqtaga ko'chirib, xO_1y koordinatalar sistemasida $y = x^2$ parabolani chizamiz (V.9-rasm).



V.9-rasm.

Endi grafiklarni parallel ko'chirishni umumiy ko'rinishda qaraymiz. $y = f(x)$ funksiya grafigi berilgan bo'lsin va

$$y = f(x-a) + b \qquad (1)$$

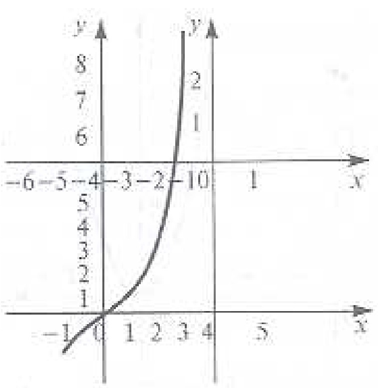
funksiya grafigini chizish kerak.

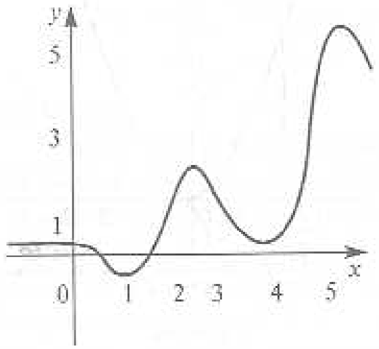
$y = f(x-a) + b$ o'rniga $y - b = f(x-a)$ ni yozish mumkin.

$$\begin{cases} X = x - a, \\ Y = y - b \end{cases} \qquad (2)$$

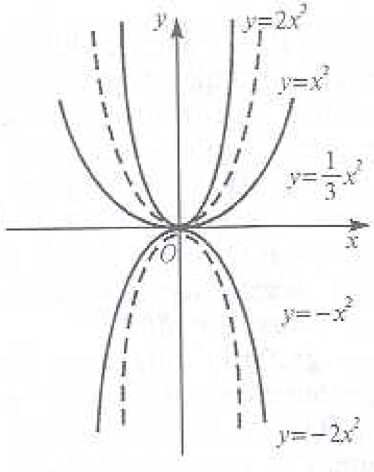
desak, bu tenglama $Y = f(x)$ ko'rinishni oladi. (2) tenglik $O(0; 0)$ nuqta $A(a; b)$ nuqtaga o'tadigan, koordinata o'qlarining yo'nalishi o'zgarishsiz qoladigan koordinatalar sistemasini parallel ko'chirishni tavsiflaydi. Shunday qilib, parallel ko'chirishni bajarib, koordinatalarning yangi sistemasida $Y = f(x)$ funksiya grafigini chizish kerak. Boshqacha bunday ifodalash mumkin: *$y = f(x)$ funksiya grafigini olib, $O(0; 0)$ nuqtasini $O_1(a; b)$ nuqtaga o'tkazadigan parallel ko'chirishda uning obrazini topish kerakki, (1) tenglamada a ning oldida «minus» ishorasi turibdi.*

3-m i s o l. $y = (x+4)^3 - 6$ funksiya grafigini chizamiz. Bu funksiya $y = f(x-a) + b$ ko'rinishga ega, bunda $f(x) = x^3$, $a = -4$, $b = -6$. Demak, koordinatalar boshini $O_1(-4; -6)$ nuqtaga ko'chirish va koordinatalarning yangi sistemasida $y = x^3$ grafikni chizish kerak (V.10-rasm).





V.11-rasm.



V.12-rasm.

V.10-rasm.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish orqali qanday funksiyalar grafiklarini yasash mumkin bo'ladi? Bunday funksiyalarning umumiy ko'rinishini ayting va parallel kochirish yo'nalishini ko'rsating.
2. V.11-rasmda $y = f(x)$ funksiya grafigi berilgan. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini chizing:
   a) $y = f(x - 2)$;
   b) $y = f(x) - 2$;
   d) $y = f(x - 1) + 3$;
   e) $y = f(x + 3) - 1$;
   f) $y = f(x + 1) + 3$.

2.3. Kvadratik funksiyaning grafigi. $y = 2x^2$ funksiya grafigining har bir ordinatasi $y = x^2$ funksiya grafigining unga mos ordinatasidan ikki marta katta. Shuning uchun $y = 2x^2$ funksiya grafigini chizishda $y = x^2$ parabolaning har bir ordinatasini ikki marta orttirish kerak (V.12-rasm).

Shuningdek, $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiya grafigini chizish uchun $y = x^2$ parabolaning har bir ordinatasini uch marta kamaytirish kerak.

$y = -x^2$ funksiya grafigi abssissalar o'qiga nisbatan $y = x^2$ parabolaga simmetrikdir, ya'ni $y = -x^2$ funksiya grafigini yasash uchun $y = x^2$ funksiya grafigini abssissalar o'qiga nisbatan akslantirish kerak (V.12-rasm).

Endi umumiy $y = ax^2 + bx + c$ ko'rinishdagi kvadratik funksiyaning grafigini yasashni ko'rsatamiz. Avval a koeffitsiyentni qavsdan

tashqariga chiqaramiz, keyin qavs ichidagi ifodani to'la kvadratga to'ldiramiz:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Biz $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qildik, bunda qisqalik uchun $\alpha = -\frac{b}{2a}$ va $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a}$ olindi. Bundan $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiyaning grafigi quyidagicha yasalishi kelib chiqadi:

a) *koordinatalar boshi $O_1(\alpha; \beta)$ nuqtaga ko'chiriladi.* Bunda

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{4ac-b^2}{4a};$$

b) *koordinatalarning yangi sistemasida $Y = X^2$ parabola yasaladi;*

d) *yangi ordinatalarning hammasi $|a|$ ga ko'paytiriladi, agar $a < 0$ bo'lsa, hosil bo'lgan grafik yangi abssissa o'qiga nisbatan akslantiriladi.*

Yasashni mana bu tartibda ham bajarish mumkin:

a) *$y = x^2$ parabola yasaladi;*

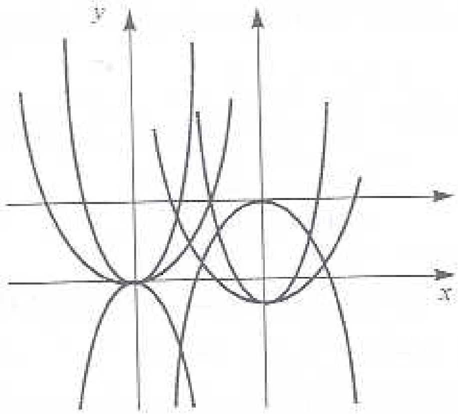
b) *grafik ordinatasi $|e|$ ga ko'paytiriladi, agar $a < 0$ bo'lsa, grafik abssissa o'qiga nisbatan akslantiriladi;*

d) *$O(0; 0)$ nuqta $O_1(\alpha; \beta)$ ga o'tadigan qilib hosil bo'lgan grafik ko'chiriladi, bunda $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a}$.*

M i s o l. $y = -2x^2 + 12x - 16$ funksiya grafigini yasaymiz.

$$y = -2(x^2 - 6x + 8) = -2[(x^2 - 6x + a) - 9 + 8] =$$
$$= -2[(x - 3)^2 - 1] = -2(x - 3)^2 + 2.$$

Endi koordinatalar boshi $O_1(3; 2)$ nuqtaga ko'chiriladi, koordinatalarning yangi sistemasida $Y = X^2$ parabola yasaladi, bu parabolaning hamma ordinatalari 2 ga ko'paytiriladi va hosil bo'lgan egri chiziq O_1X o'qqa nisbatan akslantiriladi. Shuningdek, $y = x^2$ parabola yasaladi, uning ordinatalari 2 ga ko'paytiriladi, hosil bo'lgan egri chiziq abssissalar o'qiga nisbatan akslantiriladi va $O(0; 0)$ nuqta $O_1(3; 2)$ nuqtaga o'tadigan qilib ko'chiriladi. Yasashning bu ikkala usuli V.13-rasmda tasvirlangan.



V.13-rasm.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

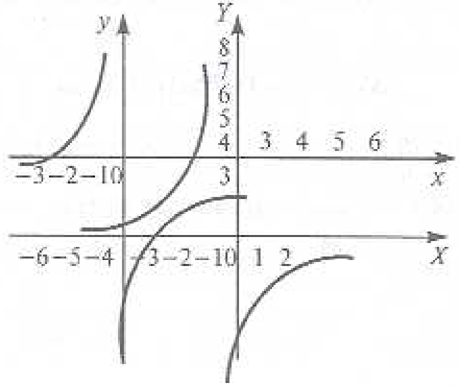
1. Kvadratik funksiya grafigini yasashning qanday usullari bor? Ularni izohlang.
2. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:
   a) $y = x^2 - 4x + 6$;   b) $y = x^2 - 3x + 4$;
   d) $y = 2x^2 + 8x + 3$;   e) $y = -2x^2 - 4x + 8$.

2.4. Kasr chiziqli funksiya grafigi. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funksiya ikkita chiziqli funksiyani bir-biriga bo'lish natijasida hosil bo'ladi, shuning uchun u *kasr chiziqli funksiya* deyiladi. Bunday funksiyalarning xususiy hollari bilan tanishamiz. Agar $c = 0$, $d \neq 0$ bo'lsa, kasr chiziqli funksiya $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ ko'rinishni oladi, ya'ni chiziqli funksiyaga aylanadi (1-§, 1.2-bandga qarang). $a = d = 0$, $c \neq 0$ bo'lganda kasr chiziqli funksiya $y = \frac{k}{x}$ ko'rinishni $\left(\text{bunda } k = \frac{b}{c}\right)$ oladi, ya'ni teskari proporsionallikka keltiriladi (1-§, 1.3-band). Agar $c \neq 0$, $d \neq 0$, ammo $ad - bc = 0$ bo'lsa, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ bo'ladi, bu holda $a = c\lambda$, $b = d\lambda$, bunda $\lambda = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ va shuning uchun $y = \frac{c\lambda x + d\lambda}{cx+d} = \lambda$. $c \neq 0$, $d = 0$, $ad - bc = 0$ bo'lganda ham shunday bo'ladi. Bu hollarning hammasida funksiya grafigi qanday bo'lishini bilamiz. $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ bo'lganda kasr chiziqli funksiyaning grafigi teskari proporsionallik grafigini parallel ko'chirish yordamida hosil bo'lishini ko'rsatamiz. Avval misolga qaraymiz.

1-m i s o l. $y = \frac{4x+6}{2x+5}$ funksiya grafigini yasaymiz. Suratda 4 ni, maxrajda 2 ni qavs tashqarisiga chiqaramiz, keyin suratda $\frac{5}{2}$ ni qavs ichida qo'shamiz va ayiramiz:

$$y = \frac{4\left(x+\frac{3}{2}\right)}{2\left(x+\frac{5}{2}\right)} = \frac{2\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right]}{x+\frac{5}{2}} = 2 + \frac{-2}{x+\frac{5}{2}}.$$

Shunday qilib, $y - 2 = \frac{-2}{x+\frac{5}{2}}$ yoki $x + \frac{5}{2} = X$, $y - 2 = Y$ desak, $Y = \frac{-2}{x}$. Shuning uchun $y = \frac{4x+6}{2x+5}$ funksiya grafigi $y = \frac{-2}{x}$ funksiya grafigini $X = x + \frac{5}{2}$, $Y = y - 2$ formula bilan berilgan parallel ko'chirish yordamida hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda, grafik $O(0;\ 0)$ nuqtani $A\left(-\frac{5}{2};\ 2\right)$ nuqtaga ko'chirish yordamida hosil bo'lgan. Bu grafik V.14-rasmda tasvirlangan.



V.14-rasm.

Masala umumiy holda ham shunday yechiladi. $a = 0$, $c \neq 0$ bo'lsa, funksiya $y = \frac{b}{cx+d}$ ko'rinish oladi. Bu holda maxrajda c ni qavs tashqarisiga chiqarish kifoya:

$$y = \frac{b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}.$$

Agar $x+\frac{d}{c}=X$, $y=Y$ deb, $\frac{b}{c}$ ni k bilan belgilasak, grafigi bizga ma'lum bo'lgan $Y=\frac{k}{x}$ funksiyani hosil qilamiz. Bundan $y=\frac{b}{cx+d}$ funksiya grafigini yasash uchun abssissalar o'qi bo'ylab $-\frac{d}{c}$ birlikka parallel ko'chirish, keyin $Y=\frac{k}{x}$ funksiya grafigini yasash kerak, bunda $k=\frac{b}{c}$. Endi $a\neq 0$ va $c\neq 0$ bo'lsin. U holda funksiyani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left[\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right]}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}.$$

$X=x+\frac{d}{c}$, $Y=y-\frac{a}{c}$, $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ deymiz. Unda $Y=\frac{k}{X}$ funksiya hosil bo'ladi. Demak, berilgan funksiya grafigini yasash uchun koordinatalar boshini $O_1\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ nuqtaga ko'chiramiz va teskari proporsionallikning grafigini chizamiz, bunda $k=\frac{bc-ad}{c^2}$.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Kasrli chiziqli funksiya grafigini qaysi usullarda yasash mumkin? Bu usullarni izohlang.
2. Kasr chiziqli funksiyalar grafiklarini yasang:

a) $y=\frac{1}{2x-4}$; b) $y=\frac{1}{-2x+6}$; d) $y=\frac{4}{2x-10}$;

e) $y=\frac{x-1}{x+1}$; f) $y=\frac{3x-4}{2x-2}$; g) $y=\frac{x+4}{2x+3}$.

3-§. KETMA-KETLIKLAR

3.1. Sonli ketma-ketliklar. Har kuni kunduzi soat 12^{00}da havo temperaturasini yozib boramiz. Ma'lum tartibda qandaydir sonlar yoziladi — avval bugungi temperatura, keyin ertangi temperatura va h. k.

Massasi bir sutkada ikki marta kamayadigan radioaktiv moddaning bir bo'lagini olib, har kungi massasini yozib borsak, ma'lum tartibdagi sonlar hosil bo'ladi, masalan:

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ldots . \qquad (1)$$

Ikkala holda ham har bir n natural songa kuzatish kunlarida-gi ma'lum son mos keladi (birinchi holda — havo temperaturasi, ikkinchisida — radioaktiv moddaning massasi; bunda biz har qanday kuzatish chekli ekanligini hisobga olmay, kuzatishlar seriyasi cheksiz deb hisoblaymiz). Ammo bunday moslik N natural sonlar to'plamida berilgan funksiya bo'lib, R haqiqiy sonlar to'plamida qiymatlar qabul qiladi. Bunday funksiyalar sonli ketma-ketliklar deyiladi. Shunday qilib, quyidagi ta'rifni kiritamiz:

1-ta'rif. *N natural sonlar to'plamida berilgan bo'lib, sonli qiymatlar qabul qiladigan $y=f(n)$ funksiya* ***sonli ketma-ketlik*** *deyiladi.*

Odatda, sonli ketma-ketlik $f(n)$ bilan emas, balki $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ yoki qisqacha (a_n) bilan belgilanadi. Sonli ketma-ketliklarga misollar:

a) barcha juft natural sonlar ketma-ketligi: 2, 4, 6, 8, ... ;

b) barcha tub sonlar ketma-ketligi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ;

d) 2 sonning darajalari ketma-ketligi: 2, 4, 8, 16, 32, ...

a) va d) ketma-ketliklar, shuningdek, (1) ketma-ketlik uchun n o'zgaruvchili ifoda mavjud bo'lib, bu ifoda n ning berilgan qiymatlari bo'yicha a_n ning qiymatini topishga yordam beradi. Masalan, a) ketma-ketlik uchun bu ifoda $a_n=2n$ ko'rinishga ega: $n=1$ desak, $2\cdot 1$ sonli ifoda hosil bo'ladi, bu ifodaning qiymati ikkiga teng, ya'ni a) ketma-ketlikning birinchi hadiga teng; $n=4$ desak, $2\cdot 4=8$, bu a) ketma-ketlikning to'rtinchi hadiga teng va h. k. b) ketma-ketlik uchun a_n ifoda $a_n=2^n$ ko'rinishni oladi. d) ketma-ketlik uchun ifoda mavjud emas, n tub sonni ifodalovchi formula yo'q.

Ketma-ketlik n hadining ifodasi (yoki boshqacha aytganda *umumiy hadi*) berilgan bo'lsa, n ning istalgan natural qiymatida bu hadning qiymatini topish oson. Masalan, umumiy hadi n^2 bo'lgan ketma-ketlikning dastlabki beshta hadi $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$, ya'ni 1, 4, 9, 16, 25 bo'ladi. Biroq ketma-ketlikning berilgan dastlabki hadlari bo'yicha bu ketma-ketlikning umumiy hadi ifodasini bir qiymatli topib bo'lmaydi.

Masalan, $a_n=n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ desak ham, 1, 4, 9, 16, 25 sonlari hosil bo'ladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. O'rta maktabda siz qanday sonli ketma-ketliklar bilan tanishgansiz?
3. Sonli ketma-ketliklarga misollar keltiring.
4. Ketma-ketliklarning dastlabki beshta hadini yozing:

   a) $a_n = n^3$; b) $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$; d) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$;

   e) $a_n = 1 + (-1)^n$; f) $a_n = n[1 + (-1)^n]$.

5. Ketma-ketlikning dastlabki bir nechta hadini bilgani holda umumiy hadi formulasidan bittasini toping:

   a) 1, 3, 5, 7, 9, ... ; b) 3, 7, 11, 15, 19, ... ;
   d) 3, 9, 27, 81, 243, ...; e) 2, 5, 10, 17, 26, ... ;
   f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$.

3.2. Rekurrent ketma-ketliklar. Har doim ham ketma-ketliklar umumiy hadining ifodasi bilan berilavermaydi. Ba'zan dastlabki n ta hadi qoidasi ko'rsatiladi. Bunday ketma-ketliklar uchun a_{n+1} ni $a_1, \ldots a_n$ orqali ifodalovchi formuladan tashqari bitta yoki bir nechta dastlabki hadini ko'rsatish zarur. Bunday ketma-ketliklarning hadlarini hisoblashda biz har gal orqaga qaytgandek bo'lamiz. Shuning uchun ular *qaytma* yoki *rekurrent ketma-ketliklar* deyiladi (lotincha recurerro — qaytish demakdir).

Rekurrent ketma-ketliklarga oddiy misol qilib arifmetik va geometrik progressiyalarni aytish mumkin.

2-ta'rif. *Ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi o'zidan oldingi hadga bir xil sonni qo'shish bilan hosil qilingan sonli ketma-ketlik* ***arifmetik progressiya*** *deyiladi.*

Qo'shiladigan son *progressiyaning ayirmasi* deyiladi va d bilan belgilanadi. Shunday qilib, agar $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ arifmetik progressiya bo'lsa, har qanday n uchun $a_{n+1} = a_n + d$ yoki $a_{n+1} - a_n = d$ tenglik bajariladi. Masalan, juft sonlar ayirmasi 2 bo'lgan arifmetik progressiya hosil qiladi.

$d > 0$ bo'lganda progressiyaning har bir keyingi hadi oldingisidan katta, ya'ni u monoton o'sadi;

$d < 0$ bo'lganda progressiya monoton kamayadi, ya'ni uning har bir keyingi hadi oldingisidan kichik.

Arifmetik progressiyani berish uchun uning ayirmasidan tashqari birinchi hadini, ya'ni a_1 ni berish kerak. U holda ikkinchi had $a_2 = a_1 + d$, formula bo'yicha, uchinchi had $a_3 = a_2 + d$ formula bo'yicha va hokazo topiladi. Ammo hisoblashning bu

usuli uncha qulay emas, chunki ko'p marta qo'shishlarni talab qiladi. Shuning uchun arifmetik progressiyaning n-hadini n orqali to'g'ridan to'g'ri ifodalaydigan formula keltirib chiqaramiz. Buning uchun quyidagilarni hisobga olamiz:

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Bu tengliklardan tabiiy ravishda har qanday n uchun

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{1}$$

formulaning bajarilishi kelib chiqadi. Uni induksiya bo'yicha isbotlaymiz. $n = 1$ bo'lganda (1) tenglikning o'rinliligi aniq, chunki bu qiymatda $a_1 + (1-1)d = a$. Endi birorta k natural qiymat uchun, ya'ni $a_k = a_1 + (k-1)d$ uchun (1) tenglik isbotlangan bo'lsin. U holda

$$a_{k+1} = a_k + d = [a_1 + (k-1)d] + d = a_1 + kd = a_1 + [(k+1) - 1]d.$$

Bundan $n = k + 1$ deb olsak ham a_{k+1} (1) formula bo'yicha topilishini ko'ramiz. Shunday qilib, (1) formula $n = 1$ bo'lganda o'rinli ekan va uning $n = k$ bo'lganda ham o'rinliligidan $n = k + 1$ da ham o'rinliligi kelib chiqadi. Demak, (1) formula n ning barcha natural qiymatlarida o'rinli ekan.

Endi geometrik progressiyani qaraymiz. Quyidagi afsona ma'lum, shaxmat o'yinining kashfiyotchisi o'ziga mukofot o'rniga shaxmat taxtasining birinchi katagi uchun bir dona, ikkinchi katagi uchun ikki dona, uchinchi katagi uchun to'rt dona, to'rtinchi katagi uchun sakkiz dona va hokazo bug'doy talab qilgan. Boshqacha aytganda bunda rekurrent formula quyidagicha:

$$a_{n+1} = 2a_n.$$

1, 2, 4, 8, 16, ... sonlar ketma-ketligi geometrik progressiyaga misoldir. Umuman, geometrik progressiya quyidagicha ta'riflanadi:

3-ta'rif. ***Geometrik progressiya*** *deb, nollardan iborat bo'lmagan sonli ketma-ketlikka aytiladi, uning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingi hadga progressiya maxraji deb ataluvchi bir xil q sonni ko'paytirish bilan hosil bo'ladi.*

Boshqacha aytganda, geometrik progressiyaning rekurrent formulasi quyidagicha:

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Bir nechta xususiy hollarni qaraymiz:

a) $q > 1$, $a_1 > 0$. Bu holda geometrik progressiyaning har bir keyingi hadi oldingisidan katta. 1, 2, 4, 8, 16, ... ketma-ketlik bunga misol bo'ladi.

b) $q > 1$, $a_1 < 0$. Bu holda geometrik progressiyaning hamma hadlari manfiy, lekin ularning modullari o'suvchi ketma-ketlikni hosil qiladi. $-3, -6, -12, -24, \dots$ ketma-ketlik bunga misol bo'ladi.

d) $0 < q < 1$, $a_1 > 0$. Bu holda ketma-ketlikning hadlari musbat, lekin hadlar sonining o'sishi bilan qiymati kamayadi va nolga cheksiz yaqinlashadi. $128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ ketma-ketlik bunday geometrik progressiyaga misol bo'ladi.

e) $q = 1$. Bu holda progressiyaning hamma hadlari bir xil, masalan: 6, 6, 6, 6, ...

f) $q = -1$. Bu holda progressiyaning hamma hadlari har bir qadamda ishoranigina o'zgartiradi, masalan, $4, -4, 4, -4, 4, -4, \dots$

g) $q < -1$. Bu holda progressiyaning ishorasi o'zgaradi. Hadlar modullari esa o'sadi, masalan: $1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots$.

h) $-1 < q < 0$. Bu holda hadlar ishorasi o'zgaradi, ular modullar nolga yaqinlashadi, masalan: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$.

Geometrik progressiyaning umumiy hadi formulasi arifmetik progressiyadagiga o'xshash keltirib chiqariladi:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Endi murakkabroq rekurrent formula bo'yicha hosil bo'ladigan ketma-ketlikka misol keltiramiz. Ketma-ketlikning uchinchi hadidan boshlab har bir hadi oldingi ikkita hadining yig'indisiga teng bo'lsin:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Unda $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ desak, $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ va h. k. bo'ladi. Natijada sonlar ketma-ketligi hosil bo'ladi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... — bu sonlar *Fibonachchi sonlari* deyiladi (Fibonachchi XIII asr boshlaridagi Italiya matematigi, u shu sonlar qatnashgan masalani qaragan).

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Rekurrent ketma-ketlik deb nimaga aytiladi? Bunday ketma-ketliklarga misollar keltiring.
2. Quyidagi ketma-ketliklar rekurrent ketma-ketlik bo'ladimi:
   a) natural sonlar qatori;
   b) barcha tub sonlar qatori;
   d) barcha juft sonlar qatori?
3. $a_{n+1} = na_n$, $a_1 = 1$ rekurrent munosabat bilan berilgan ketma-ketlikning dastlabki oltita hadini yozing.
4. $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, $a_1 = 2$ rekurrent munosabat bilan berilgan ketma-ketlikning dastlabki beshta hadini yozing.
5. Ketma-ketlik $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ rekurrent munosabat bilan berilgan. Agar $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ bo'lsa, uning dastlabki oltita hadini yozing.
6. Umumiy hadi $a_n = 3^n$ bo'lgan ketma-ketlik $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ rekurrent munosabatni qanoatlantirishini isbotlang.

3.3. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar. 1, 2, 3, ..., n, ... natural sonlar ketma-ketligi monoton o'suvchi va uning hadlari kattalashib boradi. Agar 1000 soni berilgan bo'lsa, 1001-nomerdan boshlab ketma-ketlikning barcha hadlari 1000 sonidan katta bo'ladi. Bu ketma-ketlikning 1000001 nomeridan boshlab hamma hadlari milliondan katta bo'ladi. Umuman, biz har qanday katta M son olmaylik, shunday nomer topiladiki, undan boshlab ketma-ketlik hadlari M dan katta bo'ladi.

1, 4, 9, ..., n^2... natural sonlar kvadratlarining ketma-ketligi yuqoridagi xossaga ega. Masalan, 1000000 sonini olsak, $1000^2 = 1000000$, 1001-nomerdan boshlab $n^2 > 1000000$ tengsizlik bajariladi. Bunday ketma-ketliklar $+\infty$ ga (cheksizlikka) intiluvchi deyiladi.

4-ta'rif. *Agar har qanday $M > 0$ uchun shunday N nomer topilsaki, bu nomerdan boshlab ketma-ketlikning hamma hadlari $a_n > M$ tengsizlikni qanoatlantirsa, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ketma-ketlik $+\infty$* ***ga intiladi*** *deyiladi.*

Bunda ketma-ketlikning hadlari monoton o'suvchi bo'lishi shart emas. Natural sonlar va ularning kvadratlari oralab kelgan 1, 1, 2, 4, 3, 9, 4, 16, ... ketma-ketlik monoton o'suvchi emas. Lekin u $+\infty$ ga intiladi, chunki uning hadlari oldindan berilgan sonlardan kattalashib boradi. Masalan, 2000-haddan boshlab $a_n > 1000000$ tengsizlik bajariladi.

Agar $+\infty$ ga intiluvchi ketma-ketlikning hamma hadlarining ishorasini teskarisiga o'zgartirsak, $-\infty$ ga intiluvchi ketma-ketlik hosil bo'ladi. Agar ketma-ketlik $+\infty$ ga intilsa, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ kabi, $-\infty$ ga intilsa, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ kabi yoziladi.

$1, -4, 9, -16, 25, -36, \ldots, (-1)^{n-1}n^2, \ldots$ ketma-ketlik $+\infty$ ga ham, $-\infty$ ga ham intilmaydi, uning hadlari goh musbat, goh manfiydir. Agar bu ketma-ketlikning hamma hadlarini ular modullariga almashtirsak, $+\infty$ ga intiluvchi $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bunday holda berilgan ketma-ketlik *cheksizlikka intiladi* deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ kabi yoziladi. Bunday ketma-ketliklar *cheksiz katta* deyiladi. Boshqacha aytganda, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ketma-ketlik *cheksiz katta* ketma-ketlik deyiladi. Ravshanki, agar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ yoki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bo'lsa, (a_n) — cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.

Biz bilamizki, musbat kasrning maxraji qancha katta bo'lsa, bu kasrning qiymati shuncha kichik.

Maxrajning juda katta qiymatida kasr juda kichik bo'ladi (masalan, $n > 1000000$ bo'lsa, $\frac{1}{n} < 0{,}000001$ bo'ladi). Bundan, agar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bo'lsa, $\left(\frac{1}{an}\right)$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi. Aniqroq aytganda, har qanday kichik son ε olmaylik, shunday N nomer topiladiki, shu nomerdan boshlab $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Ketma-ketlikning hadlari musbat degan shartni tashlab yuborsak, $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ tengsizlik o'rniga $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ ni yozishga to'g'ri keladi. Demak, quyidagi ta'rifni kiritamiz:

5-ta'rif. *Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topilib, shu nomerdan boshlab $|\alpha_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ ketma-ketlik* ***cheksiz kichik*** *deyiladi.*

Quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. ***Agar, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz katta bo'lsa, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots \frac{1}{\alpha_n}, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi. Aksincha, agar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lsa, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots \frac{1}{\alpha_n}, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz katta bo'ladi*** (bunda biz a_n larning hammasini noldan farqli deb olamiz).

Masalan, $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz kichik, chunki $1, -2, 3, -4, \ldots$ ketma-ketlik cheksiz katta.

6-ta'rif. *Agar shunday M son mavjud bo'lsaki, barcha n lar uchun $|a_n| \le M$ tengsizlik bajarilsa, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ketma-ketlik* ***chegaralangan*** *deyiladi.*

Masalan, umumiy hadi $a_n = \frac{1}{1+n^2}$ bo'lgan ketma-ketlik chegaralangan, chunki barcha n lar uchun $1 + n^2 > 1$ va shuning uchun $|a_n| < \frac{6}{1} = 6$. $1 -1, 1, -1, \ldots; |a_n| = 1$ ketma-ketlik barcha n lar uchun chegaralangan.

Berilgan ketma-ketlik cheksiz kichik ekanligini tekshirishda oson isbotlanadigan quyidagi teoremalardan foydalaniladi:

2-teorema. ***Agar (α_n) va (β_n) ketma-ketliklar cheksiz kichik bo'lsa, ularning $(\alpha_n + \beta_n)$ yig'indisi ham cheksiz kichik bo'ladi.***

3-teorema. ***Agar (α_n) ketma-ketlik cheksiz kichik, (a_n) ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, $(a_n\alpha_n)$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo'ladi.*** Xususan, ***cheksiz kichik ikki ketma-ketlik ko'paytmasi cheksiz kichikdir.***

1-misol. Umumiy hadi $\frac{n^2+4}{n^3}$ bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichikdir.

Haqiqatan, umumiy hadni boshqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$a_n = \frac{n^2}{n^3} + \frac{4}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{4}{n^3}.$$

Ko'rinib turibdiki, berilgan ketma-ketlik cheksiz kichik $\left(\frac{1}{n}\right)$ va $\left(\frac{4}{n^3}\right)$ ketma-ketliklar yig'indisi ekan va shuning uchun cheksiz kichikdir.

2-misol. Umumiy hadi $\frac{n}{n^2+9}$ bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichik.

Haqiqatan, uning umumiy hadini boshqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$a_n = \frac{n}{n^2\left(1+\frac{9}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{9}{n^2}}.$$

Ammo $\left(\frac{1}{n}\right)$ ketma-ketlik cheksiz kichik. $\left(\frac{1}{1+\frac{9}{n^2}}\right)$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki barcha n lar uchun $\frac{1}{1+\frac{9}{n^2}} < 1$ tengsizlik bajariladi. Demak, berilgan ketma-ketlik cheksiz kichik.

Ko'pgina ketma-ketliklarning cheksiz kichikligini darhol bilib olishga yordam beradigan foydali tasdiqni aytib o'tamiz.

Agar $\alpha_n = \frac{a_k n^k + \ldots + a_0}{b_l n^l + \ldots + b_0}$ va $k < l$ bo'lsa, bu ketma-ketlik cheksiz kichik.

Masalan, umumiy hadi

$$\alpha_n = \frac{3n^2 - 4n + 5}{6n^2 + 3n - 9}$$

bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichik.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Agar umumiy hadi a_n:

a) $a_n = \frac{1}{n^3+3}$; b) $a_n = \frac{1}{3^n}$; d) $a_n = \frac{1}{2^n+3^n}$;

e) $a_n = \frac{n^2+4}{n^4+16}$; f) $a_n = \frac{1}{n^2+2^n}$; g) $a_n = \frac{n}{10^n}$

bo'lsa, ketma-ketlikning cheksiz kichikligini isbotlang.

3.4. Ketma-ketlik limiti. Umumiy hadi $a_n = \frac{n^2+9}{n^2+4}$ bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichik emas. Ammo uning umumiy hadini

$$a_n = 1 + \frac{5}{n^2+4}$$

ko'rinishida yozish mumkin, ya'ni 1 va cheksiz kichik $\left(\frac{5}{n^2+4}\right)$ ketma-ketlik yig'indisi ko'rinishida. Shuning uchun n nomerning yetarlicha katta qiymatlarida $\frac{5}{n^2+4}$ «tuzatma» moduli juda kichik bo'ladi, bu esa ketma-ketlikning hadlari 1 dan juda kam farq qiluvchi sonlar bo'lishini bildiradi. Bunda ketma-ketlik limiti 1 ga teng deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+9}{n^2+4} = 1$$

deb yoziladi (lim — qisqartirilgan, lotincha limes — «chegara», «limit» ma'noni anglatadi).

7-ta'rif. *Umuman, agar umumiy hadi $a_n = a_n - a$ bo'lgan ketma-ketlik cheksiz kichik bo'lsa, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ketma-ketlik a* ***limitga ega deyiladi*** *va $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ deb yoziladi.*

Xususan, cheksiz kichik $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya'ni $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalaridan limitlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi, bu xossalar yordamida ketma-ketliklar limitini hisoblash ancha oson bo'ladi:

4-teorema. ***Agar*** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ***va*** $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ***bo'lsa,***

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \quad va \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = a \cdot b$$

bo'ladi.

5-teorema. ***Agar*** $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ***va*** $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ***(bunda*** $b \neq 0$ ***va*** $b_n \neq 0$***) bo'lsa,***

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

bo'ladi.

Bundan tashqari, *agar (a_n) ketma-ketlik o'zgarmas bo'lsa, ya'ni uning hamma hadlari bitta songa teng $a_n = c$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = c$ bo'ladi.*

1-misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{4n^2+6n+7}. \quad (2)$$

Buning uchun kasrning surat va maxrajini n_2 ga qisqartiramiz va bo'linma, ko'paytma, yig'indi limiti haqidagi teoremalarni qo'llaymiz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{4n^2+6n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{3}{4}.$$

Umuman, agar ketma-ketlikning umumiy hadi kasr bo'lib, surat va maxrajida n ning bir xil darajalaridan tuzilgan ko'phad tursa, bu ketma-ketlikning limiti katta hadlar oldidagi koeffitsiyentlar nisbatiga teng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + \ldots + a_k}{b_0 n^k + \ldots + b_k} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Masalan, ushbu ketma-ketlik limitini darhol topamiz:

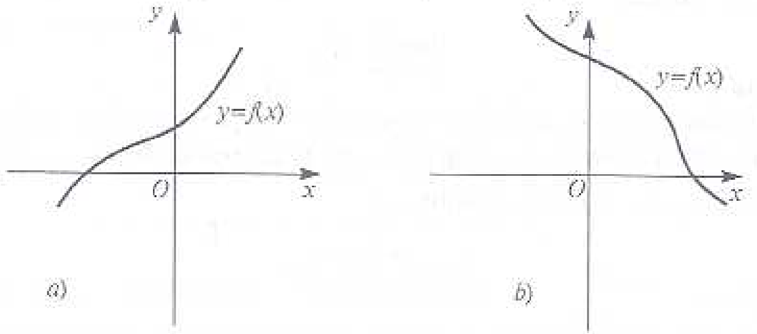
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-6n+1}{8n^3+5n^2+9} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

Quyidagi limitlarni hisoblang:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{5n^2+n+8}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^4-1}{16n^4+n^3+1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+9}{n^4-16}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{3n+8}$.

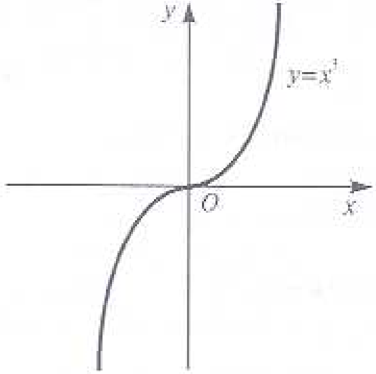
4.1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi. V.15-*a* rasmda funksiya grafigi berilgan. Ko'rinib turibdiki, agar nuqta bu grafik bo'ylab chapdan o'ngga qarab (ya'ni x ning o'sishi yo'nalishida) siljisa, bu nuqtaning ordinatasi hamma vaqt kattalashadi va nuqta yuqoriga ko'tariladi. Bunday xossaga ega bo'lgan $y = f(x)$ funksiya *butun son o'qida o'sadi* deyiladi. Grafigi V.15-*b* rasmda tasvirlangan funksiya *butun son o'qida kamayadi.*



V.15-rasm.

Funksiyaning o'sishi va kamayishi tushunchasini aniqlashtiramiz. $y = f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar x ning o'sishi bilan $f(x)$ funksiya ham o'ssa, ya'ni $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) < f(x_2)$ kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda* ***o'suvchi*** *deyiladi.* Masalan, agar $0 < x_1 < x_2$ bo'lsa, $x_1^3 < x_2^3$ bo'lishini bilamiz. Bu esa $y = x^3$ funksiyaning $[0; \infty[$ nurda o'sishini anglatadi. Bu funksiyaning butun son o'qida o'sishini isbotlash mumkin (V.16-rasm).



V.16-rasm.

2-ta'rif. *Agar X to'plamdan olingan istalgan x_1 va x_2 sonlar uchun $(x_1 < x_2)$ da $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya X to'plamda* ***kamayuvchi*** *deyiladi.*

Masalan, $y = x^2$ funksiya $x < 0$ da kamayadi.

Funksiyalarning o'sish va kamayishini tekshirish tengsizliklar xossalari asosida bajariladi. Quyidagi tasdiqlarni isbotlaymiz.

1-teorema. ***Agar $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar X to'plamda o'ssa, ular yig'indisi ham shu to'plamda o'sadi.***

Haqiqatan, $x_1 < x_2$ bo'ladigan $x_1 \in X$ va $x_2 \in X$ sonlarni olamiz. Shartga asosan $f(x_1) < f(x_2)$ va $g(x_1) < g(x_2)$. U holda tengsizliklar xossalariga ko'ra $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$. Bu esa $y = f(x) + g(x)$ funksiyaning X to'plamda o'sishini bildiradi.

2-teorema. ***Agar $y = f(x)$ funksiya X to'plamda o'ssa, $y = -f(x)$ funksiya shu to'plamda kamayadi.***

Haqiqatan, $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ da $f(x_1) < f(x_2)$. U holda tengsizliklar xossalariga ko'ra $-f(x_1) > -f(x_2)$. Bu esa $y = -f(x)$ funksiyaning X da kamayishini bildiradi.

3-teorema. ***Agar $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar X to'plamda o'ssa (bu funksiyalar qiymatlari musbat), $y = f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham X da o'sadi.***

Haqiqatan, agar $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$ bo'lsa, $0 < f(x_1) < f(x_2)$ va $0 < g(x_1) < g(x_2)$. U holda tengsizliklar xossalariga ko'ra $0 < f(x_1) \cdot g(x_1) < < f(x_2) \cdot g(x_2)$. Bu esa $y = f(x) \cdot g(x)$ funksiyaning X da o'sishini bildiradi.

4-teorema. ***Agar $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar X to'plamda o'ssa (bu funksiyalar qiymatlari manfiy), $y = f(x) \cdot g(x)$ funksiya X da kamayadi.***

Yuqoridagidek isbotlanadi.

5-teorema. ***Agar $y = f(x)$ funksiya X to'plamda o'ssa va X to'plamda ishorasini saqlasa, $y = \frac{1}{f(x)}$ funksiya X to'plamda kamayadi.***

Haqiqatan, agar $x_1 < x_2$ bo'lsa, $0 < f(x_1) < f(x_2)$ yoki $f(x_1) < f(x_2) < 0$ bo'ladi. U holda $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$. Demak, $y = \frac{1}{f(x)}$ funksiya kamayadi.

1-misol. $y = x^2$ funksiyaning o'sish va kamayishini tekshiramiz.

Bu funksiyani ikkita $y = x$ va $y = -x$ funksiyaning ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin. Ammo bu funksiyalar o'suvchi. $x > 0$ da ular musbat qiymatlar, $x < 0$ da manfiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, 3 va 4-teoremalarga ko'ra $y = x^2$ funksiya $x > 0$ da o'sadi, $x < 0$ da kamayadi.

2-misol. $y = \frac{4}{x^2+1}$ funksiyaning o'sish va kamayishini tekshiramiz.

Biz bilamizki, $y = x^2$ funksiya $x < 0$ da kamayadi, $x > 0$ da o'sadi. U holda $y = x^2 + 1$ funksiya ham $x < 0$ da kamayadi, $x > 0$ da o'sadi. Bu funksiyaning hamma qiymatlari musbat. Shuning uchun 5-teoremaga ko'ra $y = \frac{4}{x^2+1}$ funksiya $x < 0$ da o'sadi, $x > 0$ da kamayadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qanday funksiyalar o'suvchi yoki kamayuvchi deyiladi? Ta'rifini ayting va misollar keltiring.
2. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar haqidagi teoremalarni ayting va isbotlang.
3. $y = x^4 + 3x^2 + 7$ funksiyaning $[0; +\infty[$ nurda o'sishini isbotlang.
4. $y = \frac{1}{4+x^4}$ funksiyaning $[0; +\infty[$ nurda kamayishini isbotlang.
5. Agar n juft musbat son bo'lsa, $y = x^n$ funksiya $]-\infty; 0]$ nurda kamayishini, $[0; +\infty[$ nurda o'sishini isbotlang.
6. Agar n toq son bo'lsa, $y = x^n$ funksiya butun son o'qida o'sishini isbotlang.
7. $y = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$ funksiyaning: a) n juft bo'lganda, b) n toq bo'lganda o'sish va kamayishini tekshiring.
8. Funksiyalarning o'sish va kamayishini tekshiring:

   a) $y = \frac{1}{x^4+3x^2+7}$, $x \in R$; b) $y = x^6 + 5x^2 + 1$, $x \in R$;

   d) $y = \frac{1}{x^2-27}$, $x > 3$; e) $y = \frac{6}{x^4} + \frac{3}{x^2}$, $x > 0$.

4.2. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar. $y = x^n$, $2 \leq x \leq 3$ funksiya grafigi abssissalar o'qiga parallel $y = 0$ va $y = 9$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida butunligicha yotadi. Bunday funksiya $[-2; 3]$ kesmada chegaralangan funksiya deyiladi. $y = x^n$ funksiya butun sonli to'g'ri chiziqda chegaralangan emas — abssissalar o'qiga parallel har qanday to'g'ri chiziqlar o'tkazmaylik, grafikning to'g'ri chiziqlar orasida yotmagan nuqtalari topiladi. $y = x^n$ funksiya ham $]0; 1]$ oraliqda chegaralanmagan, $x = 0$ nuqtaga yaqinlashgan sari y ning grafigi abssissalar o'qidan cheksiz uzoqlashadi.

Funksiyaning chegaralanganligi va chegaralanmaganligi umumiy ko'rinishda quyidagicha ta'riflanadi.

3-ta'rif. *Agar shunday a va b sonlar mavjud bo'lib, barcha $x \in X$ lar uchun $a \leq f(x) \leq b$ tengsizliklar bajarilsa, $y = f(x)$, $x \in X$ funksiya **chegaralangan** deyiladi.*

Bu esa $y = f(x)$ funksiyaning grafigi butunligicha $y = a$ va $y = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohada yotishini bildiradi.

4-ta'rif. *Agar istalgan a va b $(a < b)$ uchun shunday $x \in X$ topilsaki, $f(x) < a$, yoki $f(x) > b$ bajarilsa, $y = f(x)$ $x \in X$ funksiya **chegaralanmagan** deyiladi.*

$a \leq f(x) \leq b$ shartda a va b sonlarni bir-biriga qarama-qarshi qilib tanlash mumkin. Masalan, agar barcha $x \in X$ uchun $-2 \leq f(x) \leq 5$ tengsizlik bajarilsa, $-5 \leq f(x) \leq 5$ tengsizlik muqarrar ravishda bajariladi. Ammo $-c \leq f(x) \leq c$ tengsizlik $|f(x)| \leq c$ tengsizlikka teng kuchli. Shuning uchun $y = f(x)$ $x \in X$ funksiya barcha $x \in X$ lar uchun $|f(x)| \leq c$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan shunday c son mavjud bo'lganda *chegaralangan* deyiladi.

1-misol. $y = \frac{4}{1+x^2}$, $x \in R$ funksiya chegaralangan, bir tomondan uning barcha qiymatlari musbat, $y < \frac{4}{1+x^2}$, ikkinchi tomondan $1 + x^2 \geq 1$ va shuning uchun $\frac{4}{1+x^2} \leq 4$.

2-misol. $y = \frac{4}{x^2-16}$, $x \neq \pm 4$ funksiya chegaralanmagan: x son -4 yoki 4 qiymatlarga yetarlicha yaqin bo'lganda bu funksiya grafigi abssissalar o'qidan cheklanmagan holda uzoqlashadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. $y = x^4 + 16$ funksiyaning $[0; 2]$ kesmada chegaralanganligini isbotlang. Bu funksiya butun son o'qida chegaralanganmi?
2. $y = \frac{1}{x^4+16}$ funksiyaning butun son o'qida chegaralanganligini isbotlang.
3. $y = \frac{1}{x-3}$ funksiyaning $[1; 2]$ kesmada chegaralanganligini, ammo $]1; 3[$ oraliqda chegaralanmaganligini isbotlang.
4. Quyidagi funksiyalardan qaysilari butun son o'qida chegaralangan:

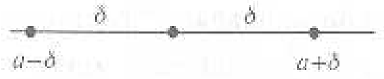
   a) $y = \frac{1}{x^2-9}$; b) $y = \frac{1}{x^2-25}$, $x \neq \pm 5$; d) $y = x^2 + 9$;

   e) $y = \frac{x^2+9}{x^2+25}$; f) $y = \frac{x^2+9}{x^2-25}$; $x \neq \pm 5$; g) $y = \frac{x}{x^2+25}$.

4.3. Cheksiz kichik funksiyalar. $y = (x-4)^2$ funksiya $x = 4$ da nolga aylanadi. Agar argumentning 4 soniga yetarlicha yaqin qiymatlarini olsak, ularga funksiyaning juda kichik qiymatlari mos keladi. Masalan, agar $|x - 4| < 0{,}1$ desak, $|x - 4|^2 < 0{,}01$ bo'ladi, bu esa $(x-4)^2 < 0{,}01$ dir.

$|x - 4| < 0{,}1$ tengsizlikni bunday yozish mumkin: $-0{,}1x - 4 < 0{,}1$ yoki $3{,}9 < x < 4{,}1$. Biz shunday qilib, $]3{,}9; 4{,}1[$ oraliqning har bir nuqtasi uchun $(x-4)^2 < 0{,}01$ tengsizlik bajarilishini isbotladik. Xuddi shunday $]3,999;\ 4,001[$ oraliqning har bir nuqtasi uchun $(x-4)^2 < 0,000001$ tengsizlikning bajarilishi isbotlanadi. $]3,999999;\ 4,000001[$ oraliqda $(x-4)^2 < 0,000000000001$ ga egamiz.

Ko'rib turibmizki, har qanday ε sonni olmaylik ($\varepsilon = 0,01$; $0,00001$; $0,000000000001$) markazi 4 nuqtada bo'lgan shunday oraliq topiladiki, unda $(x-4)^2 < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.



V.17-rasm.

5-ta'rif. *Markazi a nuqtada bo'lgan* $]a-\delta;\ a+\delta[$ *oraliq a* ***nuqtaning δ radiusli atrofi deyiladi*** *(V.17-rasm).*

Shunday qilib, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun 4 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, unda $(x-4)^2 < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar x 4 soniga intilsa, $y = (x-4)^2$ funksiya cheksiz kichik deyiladi. «x a ga intiladi» deyish o'rniga $x \to a$ deb yozamiz.

$y = \frac{(x-4)^2}{x^2-7x+12}$ funksiya $x = 4$ da aniq qiymatga ega bo'lmaydi, chunki x o'rniga 4 qo'yilganda surat ham, maxraj ham nolga aylanadi. Ammo bunda ham x ning 4 ga yetarlicha yaqin qiymatlarida funksiyaning qiymati nolga yaqinlashadi. Bu quyidagi jadvaldan ko'rinib turibdi:

x	3,9	3,99	3,999	4,1	4,01	4,001
y	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{99}$	$-\frac{1}{999}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{999}$

Endi cheksiz kichik funksiyaning umumiy ta'rifini beramiz.

6-ta'rif. *Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun a nuqtaning shunday atrofini ko'rsatish mumkin bo'lsaki, bu atrofning hamma nuqtalarida (a nuqtaning o'zidan tashqari ham bo'lishi mumkin) $|f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x \to a$ da* ***cheksiz kichik*** *deyiladi.*

a ning o'zidan tashqari ham deyilishiga sabab a funksiya bu nuqtada qiymatga ega bo'lmasligi ham mumkin (masalan, $y = \frac{(x-4)^2}{x^2-7x+12}$ funksiya $x = 4$ da qiymatga ega bo'lmagan).

$x \to a$ da cheksiz kichik funksiyaga misol $y = x - a$ funksiyadir. Berilgan $\varepsilon > 0$ da a nuqtaning r radiusli atrofini olish yetarli. Bu atrofda $|x-a| < \varepsilon$, bu esa $|f(x)| < \varepsilon$ demakdir. Cheksiz kichik funksiyalarga yanada murakkabroq misollarni quyidagi tasdiqlar yordamida hosil qilish mumkin, bu tasdiqlar isbotini keltirmaymiz.

6-teorema. ***$x \to a$ da cheksiz kichik bo'lgan ikki funksiya yig'indisi $x - a$ da cheksiz kichikdir.***

7-teorema. ***Agar $x \to a$ da $a(x)$ funksiya cheksiz kichik bo'lib, $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'lsa, $y = f(x) \cdot \alpha(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik bo'ladi.***

Shuni aytish kerakki, $x \to a$ da cheksiz kichik bo'lgan har qanday $y = a(x)$ funksiya bu nuqtaning biror atrofida chegaralangan (chunki, biror atrofda $\alpha(x) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi). Shuning uchun 2- tasdiqdan quyidagi kelib chiqadi: *$x \to a$ da cheksiz kichik bo'lgan ikki funksiya ko'paytmasi $x \to a$ da cheksiz kichikdir.*

1-misol. $y = x - a$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik bo'lgani uchun $y = (x-a)^n$ (bunda, n — natural son) ko'rinishidagi barcha funksiyalar ham $x \to a$ da cheksiz kichikdir (bu funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar ko'paytmasidan iborat).

Ravshanki, $|x-a|^n < \sqrt[n]{\varepsilon}$ bo'lganda, ya'ni $a - \delta < x < a + \delta$ (bunda $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$) bo'lganda $(x-a)^n < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

2-misol. $$y = A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n \qquad (1)$$ ko'rinishidagi har qanday funksiya $x \to a$ da cheksiz kichikdir.

Haqiqatan, $A_k(x-a)^k$ ko'rinishidagi hamma ko'paytmalar cheksiz kichik, u holda (1) yig'indi ham cheksiz kichikdir.

3-misol. $y = \sqrt[3]{x-a}$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik.

Haqiqatan, $|\sqrt[3]{x-a}| < \varepsilon$ tengsizlik $|x-a| < \varepsilon^3$, ya'ni $a - \varepsilon^3 < x < a + \varepsilon^3$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

4-misol. $a \neq 0$ bo'lsa, $y = \frac{x-a}{ax}$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik.

Bu tasdiqni isbotlash uchun $y = \frac{1}{ax}$ funksiyaning a nuqtaning biror atrofida chegaralanganligini ko'rsatish yetarlidir. $a > 0$ bo'lganda bunday atrof sifatida $\left]\frac{a}{2};\ \frac{3a}{2}\right[$ oraliqni tanlab olish mumkin. Bu atrofda $\frac{2}{3a^2} < \frac{1}{ax} < \frac{2}{a^2}$, shuning uchun $\frac{2}{3a^2} < \frac{1}{ax} < \frac{2}{a^2}$.

Bu esa $y = \frac{1}{ax}$ funksiyaning berilgan atrofda chegaralangan demakdir. $a < 0$ hol ham shunday qaraladi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qanday funksiyalar cheksiz kichik deyiladi?
2. Cheksiz kichik funksiyalar haqida qanday teoremalarni bilib oldingiz?
3. $|x-a|< 0,00001$ tengsizlik bajariladigan a sonning atrofini toping.
4. $y=3(x-4)^2+5(x-4)^3$ funksiyaning $x\to 4$ da cheksiz kichikligini isbotlang.
5. $y=\sqrt[3]{x-6}+7(x-6)^3$ funksiyaning $x\to 6$ da cheksiz kichikligini isbotlang.

4.4. Funksiyaning nuqtadagi limiti. $y=x^2+1$ funksiya $x\to 3$ da cheksiz kichik bo'lmaydi (masalan, $x=3,01$ bo'lsa, bu funksiya qiymati 10,0601 ga teng).

Ammo bu funksiyani bunday yozish mumkin:

$$y=10+(x^2-9)=10+(x-3)(x+3).$$

Bunda $(x-3)(x+3)$ qo'shiluvchi $x\to 3$ da cheksiz kichik. Shuning uchun x son 3 dan kam farq qilganda berilgan funksiya qiymati 10 dan kam farq qiladi. Bu funksiyaning limiti $x\to 3$ da 10 ga teng:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+1)=10.$$

7-t a ' r i f. *$y=f(x)$ funksiyani b son bilan $x\to a$ da cheksiz kichik bo'lgan $y=a(x)$ funksiya yig'indisi ko'rinishida, ya'ni $y=b+a(x)$ ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, b son $x\to a$ da bu funksiyaning* ***limiti*** *deyiladi va*

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

ko'rinishda yoziladi.

Cheksiz kichik funksiyalar xossalaridan limitlarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

8-t e o r e m a. ***Agar $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar $x\to a$ da limitga ega bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ va $f(x)\cdot 9(x)$ funksiyalar ham $x\to a$ da limitga ega bo'ladi:***

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

va

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

Qisqacha aytganda, yig'indi limiti limitlar yig'indisiga teng, ko'paytma limiti limitlar ko'paytmasiga teng.

9-t e o r e m a. ***Agar $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar $x\to a$ da limitga ega bo'lsa, bunda ikkinchi limit noldan farqli bo'lsa, u holda***

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

1-m i s o l. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2+10}{2x^2-1}$ ni hisoblaymiz.

$\lim\limits_{x\to 5}x=5$. Shuning uchun yuqoridagi tasdiqlarga asosan

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2+10}{2x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+10)}{\lim\limits_{x\to 5}(2x^2-1)}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 5}x\right)^2+10}{2\left(\lim\limits_{x\to 5}x\right)^2-1}=\frac{5^2+10}{2\cdot 5^2-1}=\frac{35}{49}=\frac{5}{7}.$$

Agar a nuqtada kasr-ratsional funksiyaning maxraji nolga aylansa va surati noldan farqli bo'lsa, x ning a ga yaqinlashgani sari funksiya qiymati modul bo'yicha juda katta bo'ladi. Bunda $x\to a$ da funksiya cheksiz katta bo'ladi va $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ kabi yoziladi. Masalan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+7}{x^2-4}=\infty.$$

Agar $x\to a$ da surat ham, maxraj ham nolga aylansa, kasrning surat va maxrajini $x\to a$ ga qisqartirib, aynan almashtirish kerak.

2-m i s o l. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-7x-12}$ ni hisoblaymiz. Buning uchun surat va maxrajni ko'paytuvchilarga ajratib, kasrni $x-3$ ga qisqartiramiz:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-4)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-4}=\frac{3+3}{3-4}=-6.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Funksiyaning nuqtadagi limiti deb nimaga aytiladi? Uning qanday xossalari bor?
2. Limitlarni hisoblang:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+16}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-8}{x^2-6x+8}$; e) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^3+1}$.

4.5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Biz bilamizki, agar $x > 0$ bo'lsa, x ning o'sishi bilan $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning qiymati kichiklashib, nolga yaqinlasha boradi. Aniqroq qilib aytganda, har qanday kichik musbat son ε olmaylik, shunday N qiymat topiladiki, $\frac{1}{N} < \varepsilon$ bo'ladi, $x > N$ da $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning barcha qiymatlari ε dan kichik bo'ladi. $y = \frac{1}{x}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik deyiladi:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $x \to +\infty$ da $y = -\frac{1}{x}$ funksiya ham cheksiz kichik deyiladi. Ammo bu funksiyaning qiymati manfiy, shuning uchun $\frac{1}{x} < \varepsilon$ tengsizlik o'rniga $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ ni yozish kerak.

Endi $x \to +\infty$ da cheksiz kichik funksiyaning umumiy ta'rifini beramiz.

8-ta'rif. *Agar har qanday musbat son ε uchun shunday N topilsaki, $x > N$ bo'lganda barcha x lar uchun $|f(x)| < e$ bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da* ***cheksiz kichik*** *deyiladi.*

Buni bunday yozish mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall x > N \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

Cheksiz kichik funksiyaga radioaktiv moddaning massasi vaqtning funksiyasi sifatida yaqqol misol bo'la oladi. Har bir sutkada bu moddaning yarmi yemirilsin. U holda har qanday kichik son $\varepsilon > 0$ olmaylik, shunday N kun keladiki, bu kundan boshlab bu moddaning miqdori ε dan kichik bo'ladi.

Yuqorida ko'rganimizdek, $y = \frac{1}{x}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik. Bu funksiya $x \to -\infty$ da ham cheksiz kichik bo'ladi: masalan, $x = -1000000$ desak, $\frac{1}{x} = -0{,}000001$ bo'ladi, bu son noldan juda kam farq qiladi. x ning manfiy qiymati modul bo'yicha qancha katta bo'lsa, $\frac{1}{x}$ ning qiymati noldan shuncha kam farq qiladi. Bu esa, $x \to -\infty$ da $y = \frac{1}{x}$ funksiya cheksiz kichik demakdir. Funksiya $x \to +\infty$ da ham, $x \to -\infty$ da ham cheksiz kichik bo'lgani uchun bu funksiya $x \to \infty$ da (cheksizlikning ishorasidan qat'i nazar) cheksiz kichikdir.

Berilgan funksiyaning $x \to +\infty$ da cheksiz kichikligini tekshirishda quyidagi teoremalar qo'llaniladi:

10-teorema. ***Agar $y = a(x)$ va $y = b(x)$ funksiyalar $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'lsa, u holda $y = a(x) + b(x)$ yig'indisi ham $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'ladi***

11-teorema. ***Agar $y = a(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik, $y = f(x)$ funksiya $[0; +\infty[$ ko'rinishidagi nurda chegaralangan bo'lsa, $y = f(x) \cdot a(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'ladi.***

Har qanday cheksiz kichik funksiyaning birorta nurda chegaralanganligi ($x > N$ da $|\alpha(x)| < \varepsilon$) va 2-teoremadan quyidagi kelib chiqadi: cheksiz kichik funksiyalar ko'paytmasi cheksiz kichik.

12-teorema. ***Agar $y = f(x)$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz katta bo'lsa, ya'ni istalgan $M > 0$ uchun shunday $N > 0$ topilsaki, $x > N$ uchun $|f(x)| > M$ bo'lsa, $y = \frac{1}{f(x)}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'ladi.***

1-misol. Biz bilamizki, $y = \frac{1}{x}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik $\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdots \frac{1}{x}$ (n marta) bo'lgani uchun $y = \frac{1}{x^n}$ funksiya ham $x \to +\infty$ da cheksiz kichik bo'ladi.

2-misol. $y = \frac{a_n}{x^n} + \ldots + \frac{a_1}{x}$ ko'rinishdagi funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik.

3-misol. $y = \frac{x^2}{x^4+10}$ funksiyani $y = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{x^4}}$ ko'rinishda yozish mumkin. Ammo $y = \frac{1}{x^2}$ funksiya $x \to +\infty$ da cheksiz kichik, $\lambda = \frac{1}{1+\frac{10}{x^4}}$ funksiya chegaralangan, chunki $1 + \frac{10}{x^4} > 1$ va shuning uchun $1 + \frac{10}{x^4} < 1$. Demak, $y = \frac{x^2}{x^4+10}$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichik.

Quyidagi umumiy tasdiq o'rinli:

13-teorema. ***Agar $n > m$ va $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ bo'lsa,***

$$y = \frac{a_m x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$$

funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichik.

Masalan, $y = \frac{x^3+6x-8}{x^4+2x^2+7}$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichik, $y = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichik bo'lmaydi (masalan,

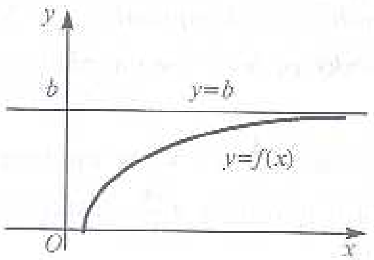
$x = 1000$ bo'lsa, $y = \frac{2000003}{1000001} > 2$). Lekin u 2 son bilan $y = \frac{1}{x^2+1}$ cheksiz kichik funksiyaning yig'indisidan iborat:

$$y = \frac{2x^3+2}{x^2+1} = 2 + \frac{1}{x^2+1}.$$

Shuning uchun x ning katta qiymatlarida bu funksiyaning grafigi $y = 2$ to'g'ri chiziq bilan birlashib ketadi. Bu funksiya $x \to \infty$ da 2 songa intiladi deyiladi va bunday yoziladi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{x^2+1} = 2.$$

Umuman, agar $f(x) = b + \alpha(x)$ bo'lib, bunda $y = \alpha(x)$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichik bo'lsa, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ bo'ladi. Bunday holda $y = f(x)$ funksiya $x \to \infty$ grafigi $x \to \infty$ da $y = b$ to'g'ri chiziq bilan birlashishga intiladi (V.18-rasm), ya'ni agar grafikdagi nuqta grafik bo'ylab o'ngga chegarasiz uzoqlashsa, shu nuqtadan $y = b$ to'g'ri chiziqqacha masofa nolga intiladi. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ yozuv ham shunday ta'riflanadi.



V.18-rasm.

Biror chiziqning *asimptotasi* deb quyidagi xossaga ega bo'lgan har qanday to'g'ri chiziqqa aytiladi: chiziqda yotuvchi nuqta koordinata boshidan chegarasiz uzoqlashsa, shu nuqtadan asimptota deb ataluvchi to'g'ri chiziqqacha masofa nolga intiladi. $y = b$ to'g'ri chiziq $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ yoki $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ bo'lganda va faqat shunday bo'lganda $y = f(x)$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasi bo'ladi. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasini topish uchun uning $x \to +\infty$ dagi va $x \to -\infty$ dagi limitlarini topish yetarli.

Agar $y = f(x)$ funksiyaning $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ dagi limitlari bir xil bo'lsa, ularning umumiy qiymatlari $x \to +\infty$ da bu funksiyaning limitlari deyiladi va $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ kabi belgilanadi. Funksiya limitini hisoblashda quyidagi tasdiqlardan foydalaniladi:

Agar $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ va $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$$

(yig'indi limiti limitlar yig'indisiga teng) va

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$$

(ko'paytma limiti limitlar ko'paytmasiga teng) bo'ladi.

b) Agar $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ va $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

bo'ladi.

$x \to +\infty$ da $y = \frac{4x^3+1}{2x^3+3}$ funksiya limitini topamiz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}\right)} = \frac{4+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{2+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Umuman ushbu tenglik to'g'ri:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0} = \frac{a_n}{b_n}.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi funksiyalar $x \to \infty$ da cheksiz kichikligini isbotlang:

a) $y = \frac{1}{x^4+3}$; b) $y = \frac{x^3-8x+15}{x^6+x-14}$;

d) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+16}}$.

2. Limitlarni hisoblang:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{2x^2+x-1}$; b) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4+2x^3-3}{3x^4-7x+11}$.

3. $y = \frac{2x^4+1}{x^4+4}$ funksiyaning $x = 2356811$ bo'lgandagi taqribiy qiymatini toping.

4. Ushbu funksiyalar grafiklarining gorizontal asimptotalarini toping:

a) $y = \frac{3x-4}{x+5}$; b) $y = \frac{4x^2-1}{x^2+6}$;

d) $y = \frac{x^2+6}{4x^2-1}$; e) $y = \frac{x^3}{3x^3+1}$.

4.6. Uzluksiz funksiyalar. Kvadrat shaklidagi yer maydonining yuzini hisoblash uchun uning tomoni o'lchanadi, keyin chiqqan son kvadratga ko'tariladi. Bunday o'lchash biroz xatolik bilan bajariladi, natijada yuz qiymati ham taqribiy bo'ladi. Tomon uzunligi yaxshiroq o'lchansa, yuza qiymati ham aniqroq chiqadi. Agar oldindan yuz o'lchovining zarur aniqligi berilgan bo'lsa, yuz o'lchovida bu aniqlikka erishish uchun tomon uzunligini o'lchashning aniqlik darajasini ko'rsatish mumkin, chunki o'lchovlarda juda kam farq bo'lsa, ular kvadratlari ham juda kam farq qiladi. Maydon yuzi uning tomoni uzunligiga uzluksiz bog'liqdir. Kattaliklarning bir-biri bilan uzluksiz bog'liqligi tez-tez uchrab tursa ham, ko'pincha u o'rinsiz bo'lib qoladi. Masalan, arqonda yuk osilgan bo'lib, uning vazni bu arqonning mustahkamlik limitiga yaqin, ammo yukka juda kam miqdorda yuk qo'shilsa, arqonning uzilib ketishiga sabab bo'ladi, u holda yuk osilib turgan balandlik sakrab-sakrab o'zgaradi. Kattaliklardagi bunday tafovutni ko'rsatish uchun uzluksiz va uzlukli funksiyalar haqida tushuncha kiritamiz. Aniqroq aytganda, bitta kattalikning o'zi bir sharoitda tekis, ikkinchi sharoitda sakrab-sakrab o'zgargani uchun bitta funksiyaning uzluksizlik nuqtasi bilan uzilish nuqtasini bir-biridan ajratish kerak. Uzluksizlik nuqtasi shu bilan xarakterliki, unda argument qiymatining juda kam o'zgarishlarida funksiya qiymati kam o'zgaradi, uzilish nuqtasida esa argument qiymatining kam o'zgarishiga funksiya qiymatining kattagina o'zgarishi mos keladi.

Biroq uzluksizlik nuqtalari bilan uzilish nuqtalari orasidagi farqning bunday tavsifi uzluksizlikning matematik ta'rifi bo'la olmaydi. Bu tavsifdagi «kam o'zgarishi», «kattagina o'zgarish» so'zlari juda mujmal va noaniqdir. Masalan, agar yer sharining radiusi haqida gap yuritilsa, 1 mm o'zgarish juda kam, agar sharikli podshipniklarni yasash ustida gap yuritilsa, bu o'zgarish juda kattadir. 1000000 km Yerdan Oygacha masofa (u 384 ming km ga teng) haqida gap borsa, talaygina kattalikdir, ammo Quyoshdan Siriusgacha bo'lgan masofaga nisbatan juda kichikdir.

Uzluksizlik tushunchasi quyidagicha aniqroq ta'riflanadi.

9-ta'rif. *Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada aniqlangan va*

$$\lim_{x\to a} f(x) f(a) \tag{1}$$

bo'lsa, bu funksiya a ***nuqtada uzluksiz*** *deyiladi.*

Shunday qilib, agar funksiyaning a nuqtadagi limiti mavjud bo'lib, funksiyaga argumentning qiymatini qo'yganda, bu limitni hisoblash mumkin bo'lsa, funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

(1) shart bajarilmaydigan nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi. Ko'p hollarda uzilish qismlarni ajratuvchi nuqtalarda (bu qismlarda funksiya turli analitik ifodalar bilan berilgan) yoki maxraj nolga aylanadigan nuqtalarda sodir bo'ladi. Bu uzluksiz funksiyalar haqidagi teoremalardan kelib chiqadi.

14-teorema. ***Agar $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $y = f(x) + g(x)$ va $y = f(x)g(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.***

15-teorema. ***Agar $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsa va bunda $g(a) \neq 0$ bo'lsa, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.***

Bu tasdiqlardan ko'rinib turibdiki, agar funksiya $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda bilan berilgan bo'lsa, bunda $y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar uzluksiz, maxraj nolga aylanadigan nuqtalardagina uzilish sodir bo'ladi.

1-misol. Limitlar haqidagi teoremalardan har qanday $f(x) = b_n x^n + ... + b_0$ ko'phadning limiti $x \to a$ da bu ko'phadning a nuqtadagi qiymatiga tengligi, ya'ni $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ kelib chiqadi. Bu $y = b_n x^n + ... + b_0$ ko'rinishdagi funksiya x argumentning barcha qiymatlarida uzluksizligini anglatadi.

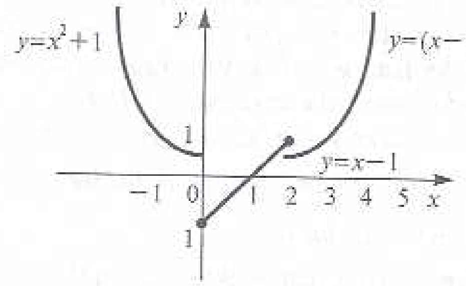
2-misol. $$y = \frac{b_n x^n + ... + b_0}{c_m x^m + ... + c_0}, \quad x \in R \tag{2}$$

ko'rinishdagi funksiya ikkita ko'phadni birini biriga bo'lish natijasidir. Ikkala ko'phad uzluksiz funksiyalar bo'lgani uchun (2) funksiya ham maxraj nolga aylanadigan nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarda uzluksiz.

Masalan, $y = \frac{x^2+9}{x^2-6x+8}$ funksiyaning uzilish nuqtasini topish uchun $x^2 - 6x + 8 = 0$ tenglamani yechish kerak: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; 2 va 4 nuqtalar berilgan funksiyaning uzilish nuqtalaridir.

3-misol. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0, \\ x - 1, & 0 \le x \le 2, \\ (x-1)^2, & x > 2 \end{cases}$ funksiya $]-\infty; 0[$, $[0; 2]$

va]2; $+\infty$[oraliqlarda turli ifodalar bilan berilgan. x noldan kichik bo'lgan holda 0 ga intilsa, $f(x)$ ning limiti $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$ ga teng bo'ladi. Agar x noldan katta bo'lgan holda 0 ga intilsa, $f(x)$ ning limiti $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)=-1$ ga teng bo'ladi. Bu limitlar turli. Shuning uchun $y=f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega va bu nuqtada $-1-1=-2$ «sakrashga» ega (V.19-rasm).



V.19-rasm.

$x=2$ nuqtada funksiya uzluksiz, chunki $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=1$.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping:

   a) $y=\frac{4}{x^2-9}$; b) $y=\frac{x^2+1}{x^3-8}$;

   d) $y=\frac{x^2+6x+7}{x^2-7x+10}$; e) $y=\frac{x^3+9}{x^4-81}$.

2. $y=\begin{cases} x^2+7, & x<-1,\\ 9+x, & 1\le x\le 3,\\ x^3, & x>3 \end{cases}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

4.7. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari.

10-ta'rif. *Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmaning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya $[a;\ b]$* ***kesmada uzluksiz*** *deyiladi.*

Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar qator muhim xossalarga ega:

16-teorema. ***Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, uning bu kesmadagi qiymatlari orasida eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud.***

17-teorema. ***Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, uning oxirlarida (uchlarida) turli ishorali qiymatlar qabul qilsa (masalan, $f(a)<0$, $f(b)>0$), bu funksiya $[a;\ b]$ kesmaning qaysidir nuqtasida nolga aylanadi.***

Misol. x^3-6x+3 tenglama $[2;\ 3]$ kesmada hech bo'lmaganda bitta ildizga ega. Shuni isbotlaymiz.

Haqiqatan, $y=x^3-6x+3$ uzluksiz funksiya bu kesmaning chap oxirida $f(2)=2^3-6\cdot 2+3=-1$ qiymatni, o'ng oxirida $f(3)=3^3-6\cdot 3+3=12$ qiymatni qabul qiladi. Bu qiymatlar turli ishorali, shuning uchun funksiya $[2;\ 3]$ kesmada nolga aylanadi. Bu esa $x^3-6x+3=0$ tenglama bu kesmada hech bo'lmaganda bitta ildizga ega ekanligini anglatadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Qanday funksiyalar kesmada uzluksiz deyiladi?
2. Kesmada uzluksiz funksiyalarning qanday xossalari bor?
3. Agar:

   a) $y=x^3$, $a=-7$, $b=2$; b) $y=\frac{8}{x^2+4}$, $a=-4$, $b=4$;

   d) $y=\frac{7}{x+3}$, $a=0$, $b=4$; e) $y=\frac{7}{x+3}$, $a=-4$, $b=4$, $x\ne 3$

   bo'lsa, $y=f(x)$ funksiyaning $[a;\ b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.
4. $x^2-7x+1=0$ tenglama $[0;\ 1]$ va $[6;\ 7]$ oraliqlarda ildizlarga ega ekanligini isbotlang.
5. $x^3-8x+2=0$ tenglama $]-3;-2[$ va $]0;\ 1[$ oraliqlarda ildizga ega ekanligini isbotlang.

5-§. DIFFERENSIAL, HOSILA, INTEGRAL

5.1. Funksiya orttirmasi. Kub hajmi uning tomoni uzunligining funksiyasidir, $V=x^3$. Agar kub metalldan yasalgan bo'lsa, kub isiganda uning tomoni uzunligi ortadi, shu bilan birga uning hajmi ham ortadi. Agar kub tomoni uzunligi x qiymatga ega bo'lgan bo'lib, qiziganda h ga ortsa, u $x+h$ qiymatni qabul qiladi va kub hajmi $(x+h)^3$ ga teng bo'ladi. Demak, qiziganda kub hajmi $(x+h)^3-x^3$ ga ortgan. Bu ayirma kub hajmining *orttirmasi* deyiladi, kub tomoni uzunligi qancha ortganini ko'rsatuvchi h son tomon uzunligining *orttirmasi* deyiladi. Umuman aytganda, bu «orttirma» so'zi nomuvofiqdir, chunki (masalan, kub sovitilganda) kub tomoni uzunligi qisqarishi mumkin, u holda orttirma manfiy bo'ladi. Shuning uchun orttirma emas, o'zgarish deb olish yaxshiroq bo'lar edi, ammo biz an'anaviy atamadan chetga chiqmaymiz.

Matematikada biror x kattalikning orttirmasi Δx bilan belgilanadi, bu Δ — grekcha «delta» yozma harfidir, bu harf difleretia — «ayirma» so'zini anglatadi. Shunday qilib, x kattalikning yangi qiymati $x + \Delta x$ ga teng, ya'ni uning dastlabki x qiymati bilan Δx orttirmasining yig'indisiga teng. Agar $y = f(x)$ biror funksiya bo'lib, x argument Δx orttirma olsa, unda funksiya qiymati ham o'zgaradi, natijada y Δy orttirma oladi. Bu orttirmani hisoblash uchun:

a) argumentning dastlabki qiymatida $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini topish;

b) argumentning yangi qiymati $x + \Delta x$ ni topish;

d) funksiyaning yangi qiymati $f(x + \Delta x)$ ni topish;

e) funksiyaning yangi qiymatidan dastlabki qiymatini ayirish, ya'ni $f(x + \Delta x) - f(x)$ ayirmani topish kerak.

Demak,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x). \qquad (1)$$

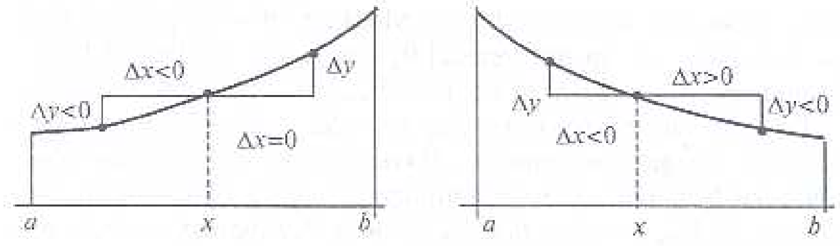
Agar x argumentning 4 qiymati 0,1 orttirma olgan bo'lsa, $y = x^2$ funksiyaning orttirmasini topamiz. $x = 4$ da funksiya qiymati $4^2 = 16$ ga teng orttirma olgandan keyin argument qiymati $4 + 0{,}1 = 4{,}1$ bo'lgan bo'lsa, funksiyaning yangi qiymati $4{,}1^2 = 16{,}81$ ga teng bo'ldi. Demak, funksiya orttirmasi $16{,}81 - 16 = 0{,}81$ ga teng.

$y = x^2$ funksiyaning orttirmasi umumiy ko'rinishda bunday:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - (x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2. \qquad (2)$$

Bunda Δx^2 orqali Δx ning kvadrati olingan, ya'ni $(\Delta x)^2$ olingan (bu belgini $\Delta(x^2)$ bilan almashtirmaslik kerak, bu $\Delta(x^2)$ belgi $y = x^2$ ning orttirmasini ko'rsatadi).

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'ssa, bu kesmada Δy va Δx ning ishoralari bir xil bo'ladi. x ning ortishi bilan y ham ortadi, x ning kamayishi bilan y ham kamayadi (V.20-*a* rasm). Agar $y = f(x)$ funksiya bu kesmada kamaysa, uning istalgan nuqtasida Δx va Δy ning ishoralari qarama-qarshi bo'ladi (V.20-*b* rasm).



a) b)

V.20-rasm.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Funksiya orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Agar:
 a) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$; b) $x = 1$, $\Delta x = -0{,}1$;
 d) $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$; e) $x = 2$, $\Delta x = -0{,}2$
 bo'lsa, $y = x^2 - 4x + 3$ funksiyaning orttirmasini toping.

5.2. Funksiya differensiali. $y = x^3$ funksiyaning orttirmasi quyidagicha:

$$\Delta y = 3x^2\Delta x - 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Bu orttirmani boshqacha bunday yozish mumkin:

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x + \Delta x^2)\Delta x.$$

Ko'rib turibmizki, bu orttirma 2 ta qo'shiluvchidan iborat: $3x^2\Delta x$ va $[3x\Delta x + (\Delta x)^2]\Delta x$. Bu qo'shiluvchilardan birinchisi argument orttirmasi Δx ga proporsional. Ikkinchi qo'shiluvchi murakkabroq, u Δx ga bog'liq. Ammo Δx ning kichik qiymatlarida u $3x^2\Delta x$ ga qaraganda ancha kam, chunki Δx bilan $3x\Delta x + (\Delta x)^2$ ifodaning ko'paytmasidan iborat, $3x\Delta x + (\Delta x)^2$ ifoda $\Delta x \to 0$ da nolga intiladi. Bu quyidagi jadvaldan ko'rinib turibdi (bunda $x = 1$ deb olindi):

Δx	Δy	$3x^2\Delta x$	$[3x\Delta x+(\Delta x)^2]\Delta x$
0,1	0,331	0,3	0,031
0,01	0,030301	0,03	0,000301
0,001	0,003003001	0,003	0,000003001

Shunday qilib, Δx ga proporsional bo'lgan $3x^2\Delta x$ qo'shiluvchi Δx ning juda kichik qiymatlarida funksiya orttirmasining «bosh qismi» deyiladi. Bu qo'shiluvchi funksiyaning *differensiali* deyiladi va dy bilan belgilanadi: $dy = 3x^2\Delta x$. Bu qo'shiluvchi faqat Δx ga emas, balki x ga ham bog'liqdir. Masalan, $y = x^3$ funksiya uchun $x = 1$ va $\Delta x = 0,1$ da differensial 0,3 ga, $x = 2$ va $\Delta x = 0,1$ da 1,2 ga teng. Agar $x = 0$, $\Delta x = 0,01$ bo'lsa, differensial 0,03 ga teng.

Ta'rif. *Agar y funksiyaning $\Delta y = f(x + \Delta) - f(x)$ orttirmasini birinchisi Δx ga proporsional, ikkinchisi Δx ga nisbatan cheksiz kichik bo'lgan ikki qo'shiluvchining yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x ning berilgan qiymatida* ***differensiallanuvchi*** *deyiladi.*

Boshqacha aytganda, agar $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$ (bunda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$) bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya, x ning berilgan qiymatida differensiallanuvchi deyiladi.

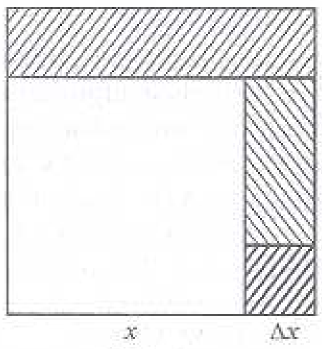
Masalan, $y = x^3$ funksiya uchun $A = 3x^2$ va $\alpha = 3x\Delta x + (\Delta x)^2$. $A\Delta x$ qo'shiluvchi funksiya differensiali deyiladi va dy bilan belgilanadi. Shunday qilib, $dx = \Delta x$ va $dy = Adx$. Bunda A x ga bog'liq, shuning uchun aniqrog'i $dy = A(x)dx$.

Misol. $y = x^2$ funksiyaning differensialini topamiz. Bu funksiya orttirmasi quyidagi ko'rinishda:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

Δx ga proporsional qo'shiluvchi $2x\Delta x$ dir. Bu qo'shiluvchi berilgan funksiyaning differensialidir: $dy = 2\Delta Dx = 2xdx$.

$y = x^2$ funksiya differensialining formulasi sodda geometrik ma'noga ega. $S = x^2$ tomonining uzunligi x bo'lgan kvadrat yuzi bo'lgani uchun ΔS V.21-rasmda shtrixlangan shakl yuzidir. Ma'lumki, Δx ning kichik qiymatlarida bu yuzning asosiy qismini yuzi $2x\Delta x$ ga, ya'ni $S = x^2$ funksiya differensialiga teng bo'lgan ikki to'g'ri to'rtburchakning yuzi tashkil etadi. $(\Delta x)^2$ ifoda Δx ga nisbatan cheksiz kichik kvadratchaning yuzidir.



V.21-rasm

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Ushbu funksiyalarning differensiallarini toping:

   a) $y = x^3 + 4$; b) $y = 4x^2 + 6x - 1$;

   d) $y = x^4$; e) $y = 2x^4 - x + 1$.

2. $d(x^3) = 3x^2dx$ formulaga geometrik talqin bering.

5.3. Hosila. Ushbu

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \alpha\Delta x \tag{1}$$

tenglikning ikkala qismini Δx ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) + \alpha .$$

Differensial ta'rifiga ko'ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Shuning uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) .$$

Shunday qilib, (1) tenglikdagi $A(x)$ koeffitsiyent funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitidir. Bu koeffitsiyent x ning berilgan qiymatida $y = f(x)$ *funksiyaning hosilasi* deyiladi va $f'(x)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

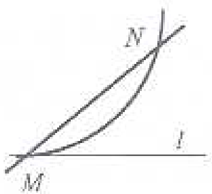
$$A(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} . \tag{2}$$

$dy = A(x)dx$ bo'lgani uchun $dy = f'(x)dx$.

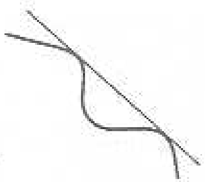
Masalan, $y = x^3$ funksiya uchun $dy = 3x^2dx$ ekanini topgan edik. Demak, bu funksiyaning hosilasi $3x^2$ ga teng. $y = x^2$ funksiyaning hosilasi $2x$ ga teng:

$$(x^3)' = 3x^2 , \quad (x^2)' = 2x .$$

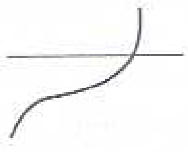
Hosila tushunchasi matematikaning turli masalalarida uchraydi. Masalan, hosila yordamida egri chiziqlarga urinmalar o'tkazish mumkin. Endi avval egri chiziqqa urinma tushunchasining umumiy ta'rifini beramiz. Birorta egri chiziq chizamiz va unda M nuqtani tanlab olamiz (V.22-rasm). Bu nuqta orqali MN kesuvchi o'tkazamiz. N nuqta M nuqtaga yaqinlashgan sari MN kesuvchi M nuqta atrofida aylana boshlaydi. N nuqta M nuqtaga intilgan sari MN kesuvchi birorta l to'g'ri chiziqqa intilsa (ya'ni MN to'g'ri chiziq bilan l to'g'ri chiziq orasidagi burchak nolga intilsa), l to'g'ri chiziq berilgan *egri chiziqqa M nuqtada o'tkazilgan urinma* deyiladi. Shunday qilib, egri chiziqning M nuqtadagi urinmasi M va N nuqtalar orasidagi masofaning nolga intilgandagi MN kesuvchining limit holatidir.



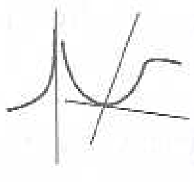
V.22-rasm.



V.23-rasm.



V.24-rasm.



V.25-rasm.

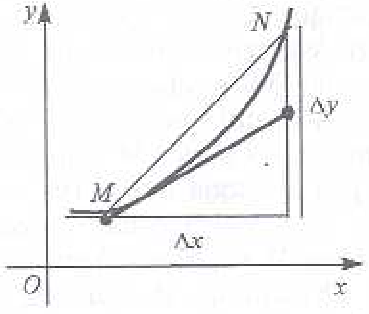
Urinma berilgan egri chiziq bilan bir nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin (V.23-rasm). Shunday bo'lishi ham mumkin-ki, egri chiziq urinish nuqtasi atrofida urinmaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishi mumkin (V.24-rasm). Egri chiziqning uchli yoki singan nuqtalariga urinma o'tkazib bo'lmaydi (V.25-rasm).

Endi $y = f(x)$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bu grafikda abssissasi x_0 bo'lgan nuqta olamiz. Bu nuqtaning y_0 ordinatasi $f(x_0)$ ga teng va shuning uchun urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishida:

$$y = f(x_0) = k_{o'r}(x - x_0). \quad (3)$$

Urinmaning burchak koeffitsiyentini topish kerak. Buning uchun urinma kesuvchining limit holati ekanligidan foydalanamiz va MN kesuvchining burchak koeffitsiyentini topamiz. V.26-rasmdan ko'rinib turibdiki, $k_{ur} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Bunda Δx nolga intilganda N nuqta M nuqtaga intiladi, kesuvchi urinmaga intiladi va kesuvchining burchak koeffitsiyenti urinmaning burchak koeffitsiyentiga intiladi.

Demak, $k_{ur} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{ur} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



V.26-rasm.

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasiga teng, ya'ni $f'(x_0)$ ga teng. Shuning uchun $k_{ur} = f'(x_0)$ va urinma tenglamasi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (4)$$

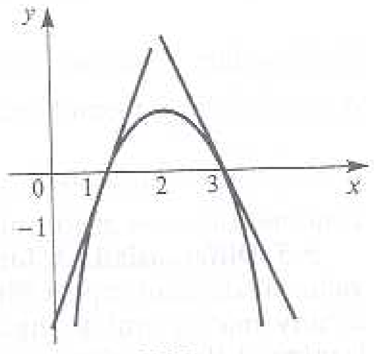
M i s o l. $y = x^3$ funksiya grafigiga abssissasi 2 bo'lgan nuqtada urinma

o'tkazamiz. Bu nuqta uchun $x_0 = 2$, shuning uchun $y_0 = x_0^3 = 2^3 = 8$. So'ngra $f'(x) = 3x^2$, shuning uchun $f'(x_0) = 3 \cdot 2^2 = 12$. Demak, urinma tenglamasi ushbu ko'rinishda: $y - 8 = 12(x - 2)$ yoki $y - 8 = 12x - 24$, ya'ni $y = 12x - 16$.

$k_{ur} = f'(x_0)$ tenglik hosilaning geometrik ma'nosini anglatadi; $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $y = f(x)$ funksiya grafigiga abssissasi x_0 bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
2. a) $y = x^4$; b) $y = x^4 - x^2$ funksiyalar hosilalarini toping. $x = 4$ va $x = -1$ bo'lganda ularning qiymatlarini toping.
3. $y = x^2$ funksiya grafigiga abssissasi 5 bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.
4. V.27-rasm bo'yicha abssissalari 1, 2, 3 bo'lgan nuqtalardagi funksiya hosilasining qiymatini toping.



V.27-rasm.

5.4. Hosilaning mexanik ma'nosi.

Hosila tushunchasi fizikada ko'p uchraydi. M nuqta koordinata to'g'ri chizig'i bo'ylab harakatlansin. U holda bu nuqtaning vaqtning t momentidagi (paytidagi) x koordinatasi t ning funksiyasi bo'ladi, $x = f(x)$. Bu funksiya *nuqtaning harakatlanish qonunini* beradi. Vaqtning t_1 momentida nuqta koordinatasi x_1 ga, vaqtning t_2 momentida bu koordinata x_2 ga teng bo'lsin. U holda vaqtning $[t_1; t_2]$ oralig'ida nuqta $x_2 - x_1$ yo'l o'tgan bo'ladi va uning *o'rtacha tezligi* $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ ga, ya'ni $V_{o'r} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ ga teng.

Agar t_1 o'rniga t ni, x_1 o'rniga x ni yozib, $t_2 - t_2$ va $x_2 - x_1$ ayirmalar o'rniga mos ravishda Δt va Δx larni yozsak, o'rtacha tezlik uchun ifoda quyidagicha bo'ladi:

$$v_{o'r} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Biroq Δt vaqt oralig'ida nuqta tezligi o'zgaradi. Uning vaqtning t momentidagi tezligini bilish uchun vaqtning juda kichik oraliqlarini olish kerak va bu vaqt oralig'ida tezlik limitini qidirish kerak. Boshqacha aytganda, nuqtaning vaqtning t momentidagi oniy tezligi deb, uning o'rtacha tezligining $[t;\ t+\Delta t]$ vaqt oralig'idagi Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$v_{on} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{o'r}.$$

Biz bilamizki, $v_{o'r} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Shuning uchun $v_{on} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Bu esa vaqtning t momentdagi oniy tezlik $x = f(x)$ funksiya hosilasining shu momentdagi qiymatiga teng:

$$v_{on} = f'(t).$$

Masalan, jismning erkin tushishini qaraylik. Erkin tushish qonuni $S = \frac{qt^2}{2}$ formula bilan beriladi. Bu funksiya hosilasi qt ga teng: $\left(\frac{qt^2}{2}\right)' = qt$. Demak, jismning erkin tushish tezligi vaqtning t momentida $v = qt$ formula bilan ifodalanar ekan.

5.5 Differensiallash formulalari. Biz $y = x^3$ va $y = x^2$ funksiyalar hosilalarini topish formulasini bilamiz. Hosila uchraydigan amaliy masalalarni yechish uchun turli ko'rinishdagi funksiyalarning differensialini topa bilish kerak. Biz bu bandda turli algebraik kasrlar (xususan, har qanday ko'phadlar) va ba'zi boshqa funksiyalar uchun differensiallash formulasini keltirib chiqaramiz.

1. ***O'zgarmasning hosilasi nolga teng:*** $C' = 0$.

Haqiqatan, Δx ning istalgan qiymatida $y = C$ funksiya orttirmasi nolga teng ($\Delta y = 0$), shuning uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, demak, $C' = 0$.

2. $y = x$ ***funksiyaning hosilasi birga teng:*** $x' = 1$.

Haqiqatan, $y = x$ bo'lsa, $\Delta y = \Delta x$ bo'ladi, u holda $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ va shuning uchun $x' = \lim_{\Delta t \to 0} 1 = 1$.

3. ***Ikki funksiya yig'indisining hosilasi ular hosilalarining yig'indisiga teng.***

Haqiqatan, $u = u(x)$, $v = v(x)$ va $y = u + v$ bo'lsin, x ga Δx orttirma beramiz. U holda u va v ham Δu va Δv orttirmalar oladi va shuning uchun Δy orttirma oladi:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v).$$

Demak,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (u + v) = \Delta u + \Delta v.$$

Ammo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$; yig'indining limiti limitlar yig'indisiga teng bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = (u+v)'$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ bo'lgani uchun

$$(u + v)' = u' + v' \tag{1}$$

4. ***Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi ushbu formula bo'yicha hisoblanadi:***

$$(u \cdot v)' = uv' + u'v. \tag{2}$$

Haqiqatan, $y = uv$, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ bo'lsa,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\cdot(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v =$$
$$= y + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

Demak, $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$. Bundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x.$$

Ammo

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = uv';$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'v.$$

$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\right) = u'\cdot v'\cdot 0 = 0$ shunga o'xshash isbotlanadi.

Demak, $(uv)' = uv' + u'v$. (2) formula isbotlandi.

Ushbu

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \tag{3}$$

formula yuqoridagidek isbotlanadi.

(2) formulaning xususiy holini ko'ramiz $v = C$ — o'zgarmas funksiya bo'lsin. O'zgarmasning hosilasi nolga teng bo'lgani uchun $C' = 0$ va (2) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(Cv)' = C'v + Cv' = Cv'.$$

Shunday qilib, *o'zgarmas ko'paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin ekan.*

Masalan,

$$(4x^3)' = 4(x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2.$$

$(kx + b)' = k$ ni isbotlaymiz. Haqiqatan, $(kx + b)' = k(x)' + b' = k \cdot 1 + 0 = k$. Uning geometrik ma'nosi quyidagicha: $y = kx + b$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti istalgan nuqtada k ga teng.

5. *n ning har qanday natural qiymatida quyidagi tenglik o'rinli:*

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (4)$$

Haqiqatan, $n = 1$ da bu tenglik yuqorida isbotlangan: $(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$. Endi biror k uchun isbotlangan deb faraz qilamiz. $(x^k)' = kx^{k-1}$. U holda (2) formula bo'yicha:

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot x' = kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 =$$
$$= kx^k + x^k = (k+1) \cdot x^k.$$

Demak,

$$(x^{k+1})' = (k+1) \cdot x^{(r+1)-1}.$$

Bu (4) tenglik $n = 1$ bo'lganda to'g'ri edi va uning $n = k$ bo'lganda to'g'ri ekanligidan $n = k + 1$ bo'lganda uning to'g'riligi kelib chiqadi. Demak, (4) formula n ning barcha natural qiymatlarida o'rinli ekan. Masalan,

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

Keltirib chiqarilgan differensiallash formulalari har qanday algebraik kasrlar hosilalarini topishga imkon beradi. Masalan, (3) formula bo'yicha:

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)\cdot(x^2-1)' - (x^2+1)'\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

Ammo $(x^2 - 1)^1 = 2x$, $(x^2 + 1)^1 = 2x$, shuning uchun

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)2x - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Yig'indi, ko'paytma, bo'linma hosilalari qanday topiladi?
2. Asosiy differensiallash formulalarini ayting. Ba'zilarini hosila ta'rifiga ko'ra keltirib chiqaring.
3. Hosilalarni toping:

   a) $y = 8x^5 - 6x^2 = 1$; b) $y = 6\sqrt{x} - \frac{7}{x^4}$;

   d) $y = \frac{2x^5 - 6x^3 + 4}{3x^4}$; e) $y = \sqrt[5]{x}(4x\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$.
4. $y = 5x^4 - x + 6$ funksiya grafigiga abssissasi 3 ga teng bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

5.6. Aniqmas integral. Berilgan funksiya bo'yicha uning hosilasini topishga doir masalalar bilan bir qatorda berilgan hosilasi bo'yicha differensiallangan funksiyaning o'zini topishga doir masalalar ham qaraladi. Bu funksiya berilgan funksiyaning *boshlang'ich funksiyasi* deyiladi. Shunday qilib, $y = F(x)$ funksiya $F'(x) = f(x)$ bo'lganda va faqat shunda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Masalan, $y = x^3$ funksiya $y = 3x^2$ ning boshlang'ich funksiyasidir, chunki $(x^3)' = 3x^2$. Bu funksiyadan tashqari har qanday $y = x^3 + C$ (C — o'zgarmas) ko'rinishdagi funksiya $y = 3x^2$ funksiyaning boshlang'ichidir, chunki $(x^3 + C)' = 3x^2$.

Ko'rib turibmizki, har bir funksiya bittagina hosilaga ega bo'lsa ham uning cheksiz ko'p boshlang'ich funksiyalari bo'lar ekan. Bu boshlang'ich funksiyalar bir-biridan faqat o'zgarmas qo'shiluvchi bilan farq qiladi. Boshqacha aytganda, agar $y = F(x)$ funksiya $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyalaridan bittasi bo'lsa, uning qolgan hamma boshlang'ich funksiyalari $y = F(x) + C$ ko'rinishda bo'lar ekan. $y = f(x)$ funksiyaning hamma boshlang'ich funksiyalarining majmuasi bu funksiyaning *aniqmas integrali* deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\int f(x)dx$. Shunday qilib;

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

bunda: C — ixtiyoriy o'zgarmas.

Masalan,

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

Umuman, $(x^{n+1}) = (n+1)x^n$ bo'lgani uchun

$$\int (n+1)x^n dx = x^{n+1} + C. \quad (1)$$

Differensiallash formulalaridan aniqmas integralning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. *Ikki funksiya yig'indisining aniqmas integrali bu funksiyalar integrallarining yig'indisiga teng:*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \quad (2)$$

2. *O'zgarmas ko'paytuvchini integral ishorasi tashqarisiga chiqarish mumkin:*

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx. \quad (3)$$

Bundan (1) formulani bunday yozish mumkinligi kelib chiqadi:

$$(n+1)\int x^n dx = x^{n+1} + C$$

yoki

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (4)$$

Ammo $\int dx = x + C$.

M i s o l. $\int (x^5 - 4x^2 + 8)dx$ ni toping.

$$\int (x^5 - 4x^2 + 8)dx = \int x^5dx - 4\int x^2dx + 8\int dx = \frac{x^6}{6} + \frac{4x^3}{3} + 8x + C.$$

(4) formula n ning $n = -1$ qiymatidan tashqari hamma qiymatlarida o'rinli. Masalan,

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

1. Funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integralni topish qoidalari qanday?
3. Aniqmas integralni hisoblang:

a) $\int (3x^5 - 6x^4 + 2x - 7)dx$; b) $\int \sqrt[3]{x}dx$;

d) $\int \frac{dx}{x^6}$; e) $\int \frac{x^3+4\sqrt{x}+5}{x^2}dx$.

5.7. Aniq integral. Aniqmas integral ifodasiga ixtiyoriy C o'zgarmas kirgani uchun x ning berilgan qiymatida bu integralning qiymatini topib bo'lmaydi. Ammo berilgan b va a nuqtalarda integral qiymatlarining ayirmasini topish mumkin:

$$[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

Bu tenglik $y = f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ichlari uchun b va a nuqtalardagi ular qiymatlarining ayirmasi bir xil va u C ning tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatadi. Shuning uchun $y = f(x)$ funksiya b va a nuqtalardagi boshlang'ich qiymatlarining ayirmasi $y = f(x)$ *funksiyaning* $[a; b]$ *kesmadagi aniq integrali* deyiladi. $[a; b]$ kesmadagi aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

bunda, $F(x)$ funksiya $f(x)$ning boshlang'ich funksiyasidir. $F(b) - F(a)$ ayirma $F(x)\big|_a^b$ kabi belgilanadi. Shuning uchun

$$\int_2^5 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125-8}{3} = 39.$$

Aniq integralning ba'zi xossalarini aytib o'tamiz. Aniqmas integralning 1 va 2-xossalaridan quyidagi kelib chiqadi:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (2)$$

va

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \quad (3)$$

Agar $a < c < b$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (4)$$

ni isbotlaymiz.

Haqiqatan,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); \quad \int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a);$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Bu qiymatlarni isbotlanayotgan tenglikka qo'yib, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$F(b) - F(a) = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)].$$

Ushbu tenglik o'rinli:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (5)$$

Bu esa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

tengliklardan kelib chiqadi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Funksiyaning aniq integrali deb nimaga aytiladi?
2. Aniq integralni hisoblash formulasini ayting.
3. Aniq integralning qanday xossalarini bilib oldingiz?
4. Integrallarni hisoblang:

a) $\int_1^4 x^3 dx$; b) $\int_3^5 (x^2 - 4x + 3)dx$;

d) $\int_1^9 x^2\sqrt{x}dx$; e) $\int_1^4 \frac{x^2+4}{\sqrt{x}}dx$.

1-§. GEOMETRIYA FANI TARIXI VA TARKIBI HAQIDA

1.1. Geometriyaning vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Geometriya matematikaning ajralmas qismi bo'lib, u matematika fanining rivojlanishida katta ahamiyatga egadir. Geometriya fani qadimiy fan bo'lib, u uzoq tarixga ega. Geometriyaga oid dastlabki manbalar qadimiy Misrdan topilgan bo'lib, u Rind va Moskva papiruslarida aks etgan. Angliya sayyohi Rind 1858-yili Nil daryosi qirg'oqlariga sayohati davrida eramizdan avvalgi 1800-yillarga taalluqli matematika va geometriyaga oid papirusni sotib oladi va uni Buyuk Britaniya muzeyiga topshiradi.

Bu papirusning uzunligi 5,5 m, eni 32 sm bo'lib, unda amaliy xarakterdagi 84 ta masala yechimi keltirilgan bo'lib, ular kasrlar ustida amallar bajarish, to'g'ri to'rtburchak, uchburchak, trapetsiya va doiralarning yuzini hisoblash, parallelepiped, silindr va piramidalarning hajmini hisoblash, shuningdek, kesmani proporsional bo'laklarga bo'lish hamda geometrik progressiyalarga oiddir.

Ikkinchi papirus Moskva nomi bilan atalib, u eramizdan avvalgi 2000-yillarga mansubdir. Uning uzunligi 5,44 m va eni 8 sm bo'lib, unda 18 ta arifmetikaga va 7 ta geometriyaga oid masala mavjud.

Bu ikki papirusdagi masalalar va ularning hal qilinishidan qadimiy misrliklarning matematik bilimlari saviyasini va uni qo'llash usullarini bilish mumkin.

Olimlarning bundan 100 yillar muqaddam ikki daryo (Frot va Dajla) oralig'iga joylashgan Shumer-Bobilliklar tarixini o'rganish borasida olib borgan tekshirishlari natijasida topilgan arxeologik yodgorliklardan bu ikki davlat eramizdan 2800 yillar oldin tashkil topganligi va ulardagi fan va madaniyat rivoji haqida ma'lumotlarga ega bo'ladilar. O'sha davr olimlari tekislik va fazodagi geometrik bilimlarga ega bo'lib, ularning o'ziga xos formulalari mavjud bo'lganligi ma'lum bo'ldi.

Matematika tarixi sohasida hozirgacha topilgan ma'lumotlar bizga geometriyaning fan sifatida rivojlanishi Gretsiyadan boshlanganligini isbotlaydi. Geometriya tarixini o'rganuvchi olimlar, geometrik ma'lumotlar Misr va Shumer-Bobilliklaridan Gretsiyaga o'tganligini tasdiqlaydilar.

Grek faylasuflari Misr va Shumer-Bobil donishmandlari ishlari bilan tanisha boshlaganlar. Ular orasida atoqli faylasuflar **Aristotel** (384—321), **Platon** (429—348), **Fales** (640—556), **Demokrit** (460—360), **Anaksimandr** (610—546), **Pifagor** (580—500), **Gippiy** (e.a.I asr), **Arxit** (400—365), **Gippokrat** (e.a. V asr), **Yevdoks** (410—355), **Yevklid** (365—300), **Arximed** (287—212), **Apolloniy** (265—170), **Eratosfen** (276—194), **Geron** (e.a. I asr) va boshqalar matematika taraqqiyotga salmoqli hissa qo'shganlar.

Hozirgi vaqtda biz o'rganayotgan geometriya kursi Yevklid tomonidan sistemaga solinib, nazariy tomondan asoslangan holda yozilgan «Negizlar» asarining o'rta maktabga moslab tuzilgan qismidir.

1.2. Maktabda o'rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi. Biz bilamizki, geometrik tushunchalar bolalarga geometrik shakllar yordamida maktabgacha bo'lgan davrda — bog'cha davridan tanishtiriladi. Bog'chada bolalar to'rtburchak, uchburchak, doira, kub, piramida, silindr, shar kabi shakllar va ularning ayrim elementlari bilan tanishadilar, ular yordamida har xil o'yinlar tashkil qilib, uylar, mashinalar va hokazo narsalarni yasaydilar.

Bog'chada geometrik ma'lumotlar, umuman, matematik ma'lumotlar o'yin orqali beriladi. Shakllarning nomi ularning modelini ko'rsatish yordamida yoki o'yinchoq sifatida tanishtiriladi. Boshlang'ich sinfda bu tushunchalar davom ettirilib, bu shakllarning o'lchovlari bilan tanishtiriladi va ular ustida ayrim hisoblash ishlari olib boriladi. Bu ish asosan amaliy ishlar yordamida, ya'ni shakllarning uzunligi, eni va balandligini o'lchash, ularning perimetrini topish, keyinroq yuzini hisoblash kabilardan iborat bo'ladi. Boshlang'ich sinflarda qo'shish, ko'paytirish amallarining xossalari ham kesmalarni qo'shish, ko'paytirish orqali beriladi.

Sistemali geometriya kursi asosan ikki qismga bo'lib o'rganiladi: Birinchi qism tekislikdagi geometrik tushuncha va shakllarga bag'ishlangan bo'lib, u «Planimetriya» deb ataladi. Ikkinchi qism fazoviy shakllarni o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, u «Stereometriya» deb ataladi.

Planimetriyada avval boshlang'ich tushunchalar (nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik) va ularning xossalari ifodalangan aksiomalar sistemasi beriladi. Shu bilan birga geometriya kursini qurish uchun zarur bo'lgan jumlalar turlari — ta'rif, aksioma, teorema va ularni isbotlashning nima ekanligi tushuntiriladi.

So'ngra geometriyaning asosiy qismida keltirilgan aksiomalar yordamida boshlang'ich tushunchalardan kelib chiqib sistemali geometriya kursi quriladi. Uning mazmunini burchaklar, ular orasidagi munosabatlar va ularning turlari, uchburchaklar, to'rtburchaklar, ular orasidagi munosabatlar, ularning turlari, ularni yasash, to'g'ri burchakli uchburchaklar, ularning burchaklari va tomonlari orasidagi munosabat yordamida trigonometrik funksiyalar kiritiladi. So'ngra tekislikda Dekart koordinatalari kiritilib, uning yordamida kesma o'rtasining koordinatalari, ikki nuqta orasidagi masofa, aylana tenglamasi, to'g'ri chiziq tenglamasi, to'g'ri chiziqlarning koordinata tekisligida joylashishi, to'g'ri chiziq bilan aylananing kesishish shartlari kiritiladi.

Shakllarni almashtirish bo'limida «harakat» tushunchasi kiritilib, uning xossalari va turlari beriladi. Harakat natijasida har qanday shakl o'ziga teng shaklga almashishi ko'rsatiladi va bunga oid parallel ko'chirish, simmetrik almashtirish, nuqta atrofida ma'lum burchakka burish haqida ma'lumot beriladi. Bu tushunchalar yordamida tekislikda vektor tushunchasi kiritiladi.

Keyin ko'pburchaklarning hosil qilinishi, ularning turlari, shakllarning yuzi va ularni hisoblash formulalari beriladi.

Geometriyaning stereometriya qismida stereometriya aksiomalari, to'g'ri chiziq va tekisliklarning parallelligi, perpendikularligi haqidagi ma'lumotlar beriladi. So'ngra fazoda Dekart koordinatalar sistemasi va unda vektorlar haqidagi tushunchalar, ko'pyoqlar, ularning turlari va ko'pyoqlarga tegishli masala va mulohazalar, aylanma jismlar — silindr, konus, shar va ularning tenglamalari haqidagi tushunchalar, ularning hajmi va sirtlari haqidagi ma'lumotlar beriladi. Yuqorida keltirilgan tushunchalar bir-birini to'ldirib sistema tashkil qiladi.

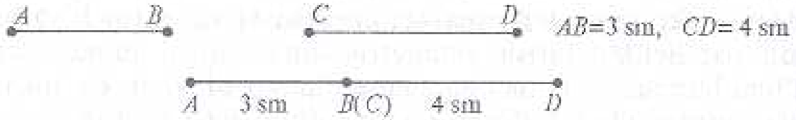
SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Geometriyaning rivojlanish tarixiga oid ma'lumotlarni topib, daftaringizga ko'chiring.
2. Geometriya fanining rivojlanishiga o'z hissasini qo'shgan O'rta Osiyolik matematik olimlar haqida ma'lumot to'plang.
3. Maktab geometriya darsligidan planimetriyaga oid asosiy tushunchalar, aksiomalar sistemasi, shakllarning ta'riflari, xossa va alomatlarini daftaringizga ko'chirib oling.

2-§. PLANIMETRIYA

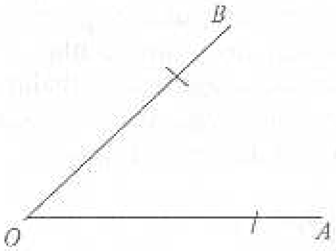
2.1. Geometrik shakllar, ularning ta'rifi, xossalari va alomatlari. Geometriya kursini o'rganish uchun asosiy boshlang'ich tushunchalar — tekislik, to'g'ri chiziq va nuqta bo'lib, ularga ta'rif berilmaydi, ularni amaliy yo'llar bilan tushuntiriladi. Tekislik — tinch turgan suvning sathi sifatida, to'g'ri chiziq — ikkita tekislikning kesishish chizig'i ekanligi, nuqta esa bir tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqning umumiy qismi sifatida tushuntiriladi. Tekislikning qalinligi yo'qligi, to'g'ri chiziqning faqat uzunligi borligi va nuqtaning hech qanday o'lchami yo'qligi keltiriladi.

Geometriya kursidagi eng sodda shakllarga nuqta, to'g'ri chiziq va ularning bo'laklari kiradi. Bularning o'ziga xos xossalari mavjud bo'lib, unda nuqta hamda to'g'ri chiziqlarning tekislikda o'zaro joylashuvi hamda ularning tegishlilik xossalari beriladi. Kesma va burchaklarni o'lchashning asosiy xossalari, ularning yig'indisi va ayirmasini o'lchash asboblari (chizg'ich va transportir) yordamida aniqlash haqida ma'lumot beriladi (VI.1-rasm).



$AB + CD = AD,$
$AD = AB + CD = 3 \text{ sm} + 4 \text{ sm} = 7 \text{ sm},$
$AB + CD = 3 + 4 = 7 \text{ (sm)}.$

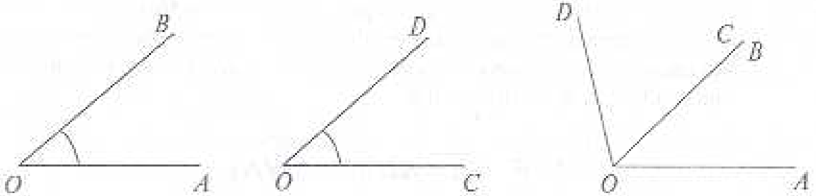
VI.1-rasm.



VI.2-rasm.

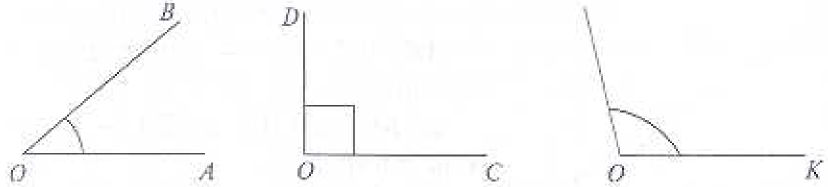
$\angle AOB$ da AO, OB — burchakning tomonlari. O nuqta burchakning uchi (IV.2-rasm).

Ikkita burchakning yig'indisi qanday hosil qilinishi va uni transportir yordamida o'lchash ko'rsatiladi (IV.3-rasm).



$\angle AOB + \angle COD = \angle AOD$

VI.3-rasm.

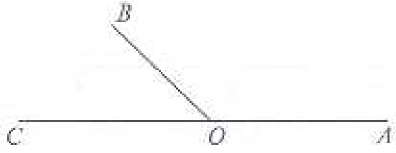


o'tkir burchak to'g'ri burchak o'tmas burchak

VI.4-rasm.

90°ga teng burchak *to'g'ri burchak* deb ataladi. To'g'ri burchakdan kichik burchak *o'tkir burchak* deb ataladi. 90°dan katta burchak *o'tmas burchak* deb ataladi (IV.4-rasm).

1-t a ' r i f. *Agar ikkita burchakning bitta tomoni umumiy, qolgan tomonlari to'ldiruvchi yarim to'g'ri chiziqlar bo'lsa, ular* ***qo'shni burchaklar*** *deyiladi (IV.5-rasm).*



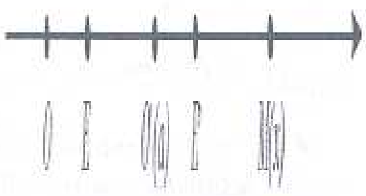
AOB burchak BOC burchakka qo'shni burchak.

VI.5-rasm.

1-t e o r e m a. ***Qo'shni burchaklarning yig'indisi 180° ga teng.***

$$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ.$$

2-t a ' r i f. *Agar ikki burchak tomonlari biri ikkinchisini to'ldiruvchi yarim to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lsa, bu ikki burchak* ***vertikal burchaklar*** *deyiladi (VI.6-rasm).*



$\angle AOB$ va $\angle COD$ vertikal burchaklardir.

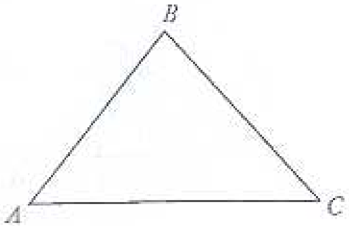
VI.6-rasm.

2-t e o r e m a. ***Vertikal burchaklar teng:***

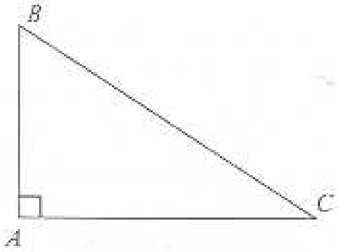
$$\angle AOB = \angle COD.$$

2.2. Uchburchaklar, ularning elementlari, turlari.

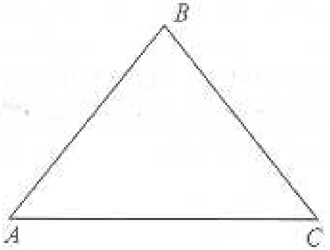
3-t a ' r i f. *Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan va shu nuqtalarni ikkitalab tutashtiruvchi uchta kesmadan iborat shakl* ***uchburchak*** *deyiladi (IV.7-rasm).*



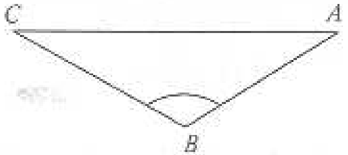
VI.7-rasm.



VI.8-rasm.



VI.9-rasm.



VI.10-rasm.

A, B, C — uchburchakning uchlari;

AB, AC, BC — uchburchakning tomonlari;

$\angle ABC$, $\angle BAC$, $\angle ACB$ — uchburchak burchaklari.

4-ta'rif. *Bitta burchagi 90° ga teng bo'lgan uchburchak* ***to'g'ri burchakli uchburchak*** *deyiladi (IV.8-rasm).*

5-ta'rif. *Hamma burchaklari o'tkir burchak bo'lgan uchburchak,* ***o'tkir burchakli uchburchak*** *deyiladi (IV.9-rasm).*

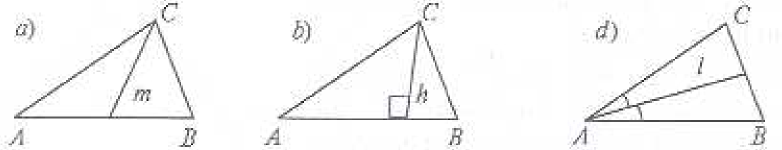
6-ta'rif. *Bitta burchagi o'tmas bo'lgan uchburchak* ***o'tmas burchakli uchburchak*** *deyiladi (VI.10-rasm).*

Uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabat: *uchburchakda katta tomon qarshisida katta burchak,* va aksincha, *katta burchak qarshisida katta tomon yotadi.*

7-ta'rif. *Uchburchakning burchagidan uning qarshisidagi tomon o'rtasiga o'tkazilgan kesma* ***mediana*** *deyiladi (VI.11-a rasm).*

8-ta'rif. *Uchburchakning bir uchidan uning qarshisidagi tomonga tushirilgan perpendikular kesma uchburchakning* ***balandligi*** *deyiladi (VI.11-b rasm).*

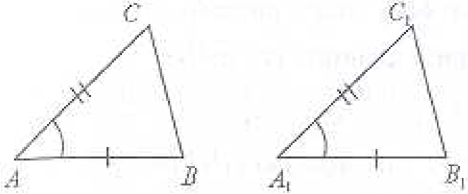
9-ta'rif. *Uchburchakning bir burchagini teng ikkiga bo'luvchi va shu burchak qarshisidagi tomon bilan kesishguncha davom etuvchi kesma uchburchakning* ***bissektrisasi*** deyiladi (VI.11-*d* rasm).



VI.11-rasm.

2.3. Uchburchaklarning tenglik alomatlari.

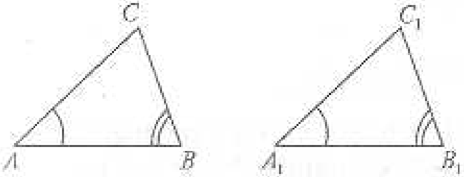
I alomat. Uchburchaklarning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra tenglik alomati (VI.12-rasm).



$$\left.\begin{aligned}AB&=A_1B_1\\AC&=A_1C_1\\\angle A&=\angle A_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \square ABC=\square A_1B_1C_1.$$

VI.12-rasm.

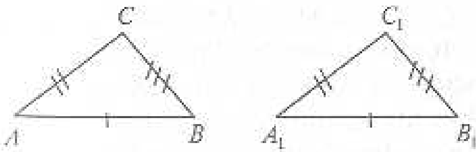
II alomat. Uchburchaklarning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra tenglik alomati (VI.13-rasm).



$$\left.\begin{aligned}AB&=A_1B_1\\\angle A&=\angle A_1\\\angle B&=\angle B_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \square ABC=\square A_1B_1C_1.$$

VI.13-rasm.

III alomat. Uchburchaklarning uchta tomoniga ko'ra tenglik alomati (VI.14-rasm).



$$\left.\begin{aligned}AB&=A_1B_1\\AC&=A_1C_1\\BC&=B_1C_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \square ABC=\square A_1B_1C_1.$$

VI.14-rasm.

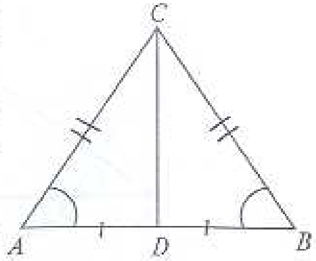
2.4. Teng yonli uchburchak va uning xossalari.

10-ta'rif. *Agar uchburchakning ikkita tomoni teng bo'lsa, u* ***teng yonli uchburchak*** *deyiladi.*

Teng tomonlar uchburchakning *yon tomonlari*, uchinchi tomon esa uning *asosi* deyiladi.

AC, BC — uchburchakning yon tomonlari,

AB — uning asosi (VI.15-rasm).



VI.15-rasm.

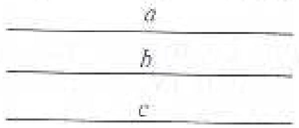
Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklari teng bo'ladi: $\angle A = \angle B$.

3-teorema. ***Teng yonli uchburchakning asosiga o'tkazilgan medianasi ham balandlik, ham bissektrisa bo'ladi.***

2.5. Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi.

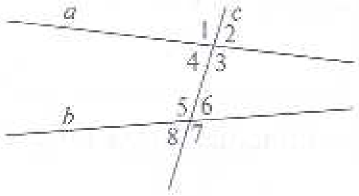
Bunda to'g'ri chiziqlarning parallellik alomatlari berilib, keyin uchburchakning burchaklari yig'indisi chiqariladi.

4-teorema. ***Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ikki-ta to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi*** (IV.16-rasm).



$$\left.\begin{matrix} a \parallel c \\ b \parallel c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \parallel b.$$

VI.16-rasm.



VI.17-rasm.

Ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesganda hosil bo'ladigan burchaklar: *c* — to'g'ri chiziq *a* va *b* kesuvchilar (VI.17-rasm).

($\angle 1$; $\angle 5$), ($\angle 2$; $\angle 6$), ($\angle 3$; $\angle 7$), ($\angle 4$; $\angle 8$) — mos burchaklar.

($\angle 4$ va $\angle 5$), ($\angle 3$ va $\angle 6$) — ichki bir tomonli burchaklar.

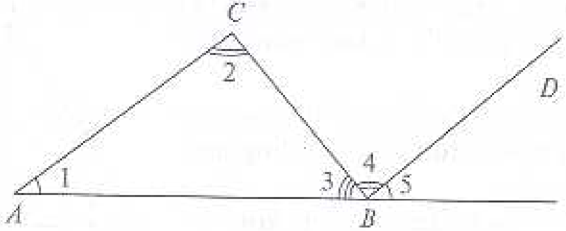
($\angle 1$; $\angle 8$), ($\angle 2$; $\angle 7$) — tashqi bir tomonli burchaklar.

($\angle 3$; $\angle 5$), ($\angle 4$; $\angle 6$) — ichki almashinuvchi burchaklar.

($\angle 1$; $\angle 7$), ($\angle 2$; $\angle 8$) — tashqi almashinuvchi burchaklar.

5-teorema. ***Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng.***

$BD \parallel AC$ o'tkazamiz (VI.18-rasm):



VI.18-rasm.

$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

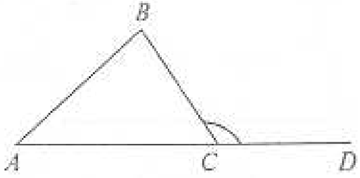
$\angle 3 + \angle 2 + \angle 1 = 180°$.

$\angle 1 = \angle 5$ — mos burchaklar.

$\angle 2 = \angle 4$ — ichki almashinuvchi burchaklar.

6-teorema. ***Uchburchakning tashqi burchagi o'ziga qo'shni bo'lmagan ikkita ichki burchak yig'indisiga teng.***

$\angle BCD$ — uchburchakning tashqi burchagi.



VI.19-rasm.

$$\angle A + \angle B + \angle ACB = 180° \rightarrow \angle A + \angle B = 180° - \angle ACB. \quad (1).$$

shakldan:

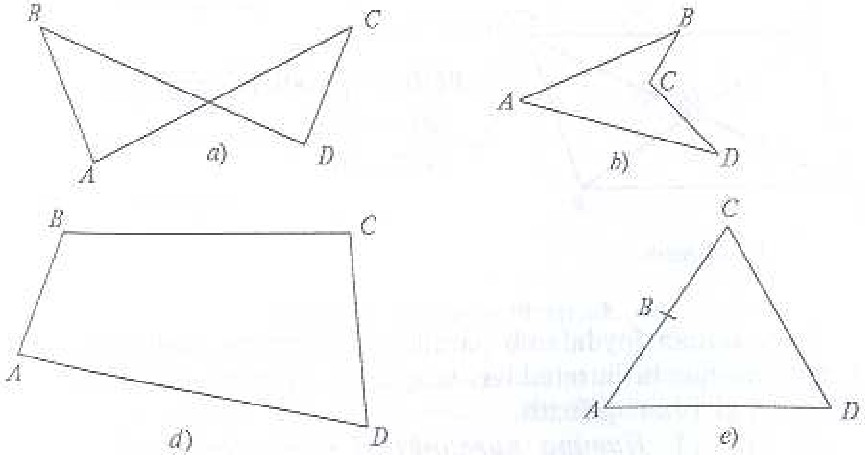
$$\angle BCD = 180° - \angle ACB. \quad (2).$$

(1) va (2) dan: $\angle A + \angle B = \angle BCD$.

2.6. To'rtburchaklar, ularning turlari va xossalari.

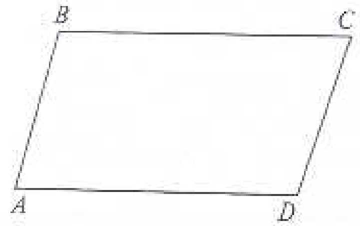
11-ta'rif. *To'rtta nuqta va bu nuqtalarni ketma-ket tutashtiruvchi to'rtta kesmadan iborat shakl* ***to'rtburchak*** *deyiladi.*

Geometriya kursida a), b), e) ko'rinishidagi shakllar va ularning xossalari haqida fikr yuritilmaydi. d) ko'rinishidagi to'rtburchaklar, ularning elementlari (uchlari, tomonlari, qo'shni tomonlari, qarama-qarshi tomonlari, diagonallari va burchaklari) o'rganiladi (VI.20-rasm). Turlari: *parallelogramm, to'g'ri to'rtburchak, romb, kvadrat.*



VI.20-rasm.

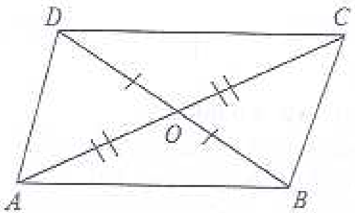
12-ta'rif. *Qarama-qarshi tomonlari parallel bo'lgan to'rtburchak* ***parallelogramm*** *deyiladi.*



$$\left.\begin{matrix} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ — parallelogramm.}$$

VI.21-rasm.

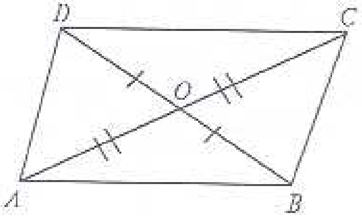
7-teorema. ***Agar to'rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.***



$$\left.\begin{matrix} AO = OC \\ OB = OD \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ — parallelogramm.}$$

VI.22-rasm.

8-teorema. ***Parallelogrammning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.***



$$ABCD \text{ — parallelogramm} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} AO = OC \\ BO = OD \end{cases}.$$

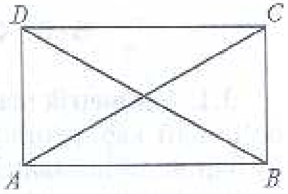
VI.23-rasm.

Bu xossadan foydalanib parallelogrammning boshqa xossalari: qarama-qarshi burchaklari tengligi va qarama-qarshi tomonlari tengligi isbot qilinadi.

13-ta'rif. *Hamma burchaklari to'g'ri burchak bo'lgan to'rtburchaklar* ***to'g'ri to'rtburchak*** *deyiladi.*

9-teorema. ***To'g'ri to'rtburchakning diagonallari teng.***

$ABCD$ to'g'ri to'rtburchak $\Leftrightarrow AC = BD$ (VI.24-rasm).

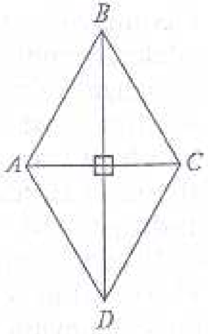


VI.24-rasm.

14-ta'rif. *Hamma tomonlari teng bo'lgan parallelogramm* ***romb*** *deyiladi.*

Rombning diagonallari to'g'ri burchak ostida kesishadi.

Rombning diagonallari uning burchaklarining bissektrisasidir (VI.25-rasm).



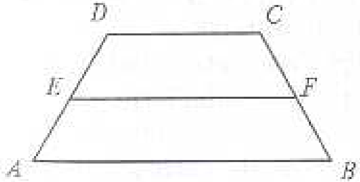
VI.25-rasm.

15-ta'rif. *Hamma tomonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak* ***kvadrat*** *deyiladi.*

Kvadrat romb hamdir, shuning uchun u ham rombning, ham to'g'ri to'rtburchakning xossalariga ega.

16-ta'rif. *Ikkita qarama-qarshi tomonlarigina parallel bo'lgan to'rtburchak* ***trapetsiya*** *deyiladi.*

Parallel tomonlari uning *asoslari*, parallel bo'lmagan tomonlari uning *yon tomonlari* deyiladi. Yon tomonlari teng bo'lgan trapetsiya teng yonli trapetsiya deyiladi. Yon tomonlarining o'rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning *o'rta chizig'i* deyiladi (VI.26-rasm).



$$EF \parallel AB, EF \parallel DC,$$
$$EF = \frac{AB+DC}{2}.$$

VI.26-rasm.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Planimetriyaning asosiy tushunchalari va aksiomalarini ayting.
2. Uchburchak, uning turlari, tenglik alomatlari, balandligi, bissektrisasi, medianasi ta'riflarini ayting.
3. To'rtburchakning ta'rif, xossa va alomatlarini ayting.

3-§. GEOMETRIK MASALALAR

3.1. Geometrik masalalar turlari haqida. Matematikaning boshqa bo'limlari kabi geometriya bo'limida ham olingan nazariy va amaliy bilimlarni mustahkamlash va malaka hosil qilish uchun uni amalda qo'llay bilish zaruriy shartdir. Shuning uchun geometriyaning har bir bo'limida nazariy ma'lumotlardan so'ng uni masalalar yechish bilan mustahkamlash va malaka, ko'nikmalar hosil qilish kerak.

Geometrik masalalar amaliy mashqlar bilan hal qilinadigan masalalar, hisoblashga doir masalalar, isbotlashga doir masalalar va yasashga doir masalalarga bo'linadi.

Amaliy mashqlar bilan hal qilinadigan masalalar, asosan, chizg'ich va transportir kabi o'lchash asboblari bilan hal qilinadigan masalalardir. Masalan, berilgan ikki kesma uzunliklari yig'indisiga teng bo'lgan kesmani topish. Kesmalarning birini ikkinchisidan uzun yoki qisqa ekanligini aniqlash va h.k.

Hisoblashga doir masalalar geometriya kursining har bir bo'limida mavjud bo'lib, bunday masalalar geometriyadan olingan nazariy bilimlar, o'rganilgan formula va xossalarga asoslanib geometrik shakllarning biror kattaligini, uning yuzini, hajmini berilgan elementlar kattaliklariga asosan topishga qaratiladi. Masalan, uchburchakning balandligi va asosiga ko'ra, yoki to'g'ri burchakli uchburchakning kattaliklariga ko'ra, yoki tomonlari orasidagi munosabatlariga ko'ra uning yuzini, perimetrini va boshqa noma'lum elementlarini topish, shuningdek, radiusiga ko'ra aylana uzunligini $C = 2\pi R$ orqali, doiraning yuzini $S = \pi R^2$ orqali, yoki bu formulalardan R ni topish kabi masalalar.

Isbotlashga doir masalalarga o'rganilgan geometrik shakllarning xossalari, alomatlari yoki ular orasidagi munosabatlarni nazariy jihatdan asoslashga doir masalalar kiradi. Isbotlashga doir masalalarni hal qilishda matematika o'qitish metodikasining deduksiya va induksiya metodlaridan foydalaniladi. Bunda masalaning shartidan nima ma'lum, berilgan ekanligi aniqlanadi. So'ngra nimani keltirib chiqarish kerakligini aniqlab, ma'lum ta'rif, teorema va aksiomalarga asoslanib, mulohazalar ketma-ketligidan isbotlanishi kerak bo'lgan mulohazaning rostligi keltirib chiqariladi. Agar masalaning sharti A va xulosasi B bo'lsa, u holda isbot $A > B$ implikatsiyaning rostligini ko'rsatishdan iborat bo'ladi.

Masala. Uchburchakning biror uchidan uning qarshisidagi tomonga o'tkazilgan medianasi uchburchakning qolgan ikki uchidan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

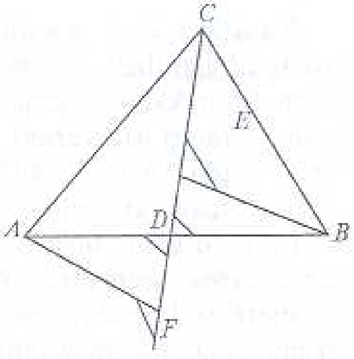
B e r i l g a n: $\triangle ABC$ da CD mediana (VI.27-rasm).

I s b o t q i l i s h k e r a k: $AF = BE$.

I s b o t i: CD mediana $\to AD = DB$;

$\angle ADF = \angle BDE$ (vertikal burchak bo'lgani uchun).

$\triangle ADF$ va $\triangle BDE$ lar to'g'ri burchakli uchburchak bo'lgani uchun to'g'ri burchakli uchburchaklarning tenglik alomatlariga ko'ra $\triangle ADF = \triangle BDE$ bo'ladi. Bundan, teng uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotishi shartidan $AF = BE$ ekanligi kelib chiqadi. Bunday masalani yechishda nuqtadan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofani to'g'ri tushunish masalaning yechimini topishga ko'rsatma bo'ladi. Bu alohida mavzu bo'lib, uni sirkul va chizg'ich yordamida masalalar yechishda ko'ramiz.



VI.27-rasm.

3.2. Geometrik shakllarni sirkul va chizg'ich yordamida yasash. Yasashga doir masalalarni yechish — talab qilingan geometrik shakllar yoki ularning elementlarini berilgan ma'lumotlar asosida geometrik yasash qurollari yordamida yasashdan iboratdir. Bunday masalalar o'rganilgan geometrik nazariyalarni ketma-ket qo'llab, faqat ko'rsatilgan yasash qurollaridan foydalanib hal qilinadi. Yasashga doir geometrik masalalar «konstruktiv masalalar» deyiladi va geometriyaning bu qismi o'rganiladigan bo'limi «konstruktiv geometriya» deb ataladi. Konstruktiv geometriyaning asosiy yasash quroli chizg'ich va sirkuldir. Bu qurollarni ishlatishda, asosan, ularning imkoniyatlarini e'tiborga olib tuzilgan quyidagi aksiomalardan foydalaniladi:

1. Berilgan ikki nuqta orqali to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. (Chizg'ich aksiomasi.)

2. Berilgan markazi va radiusiga ko'ra U(O, r) aylanani yasash mumkin. (Sirkul aksiomasi.)

3. Ikki to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasini topish mumkin, agar ular kesishadigan bo'lsa. (Chizg'ich aksiomasi.)

4. Ikki aylananing kesishgan nuqtalarini topish mumkin, agar ular umumiy nuqtaga ega bo'lsa. (Sirkul aksiomasi.)

5. Berilgan to'g'ri chiziq va aylanalarning kesishgan nuqtalarini topish mumkin, agar ular kesishsa. (Chizg'ich va sirkul aksiomasi.)

Yasashga doir masalalarni yechishda bu aksiomalar chekli marta qo'llaniladi. Geometriyaning shakllarni yasashga doir qismi ancha murakkab va keng soha bo'lib, chet el geometrlaridan Italyan geometri Maskeroni 1797-yilda, nemis olimi Yakob Shteyner 1833-yilda, Adler 1890-yillarda har bir yasash qurolining ahamiyati haqida mukammal fikr yuritib, ularning har birini va ularning o'rnini bosuvchi boshqa asboblarni ta'riflaganlar va tabaqalarga ajratganlar. Fransuz matematigi Adamar elementar geometriya kursida shunday deb yozadi: «Geometrik yasashlar degan so'zdan chizg'ich va sirkul yordami bilan bajariladigan yasashlar tushuniladi». Geometrik yasash qurollari safiga ikki tomonli chizg'ich, to'g'ri yoki o'tkir burchak, go'niya kabi asboblar ham kirishiga qaramay, biz ham faqat sirkul va chizg'ich bilan cheklanamiz.

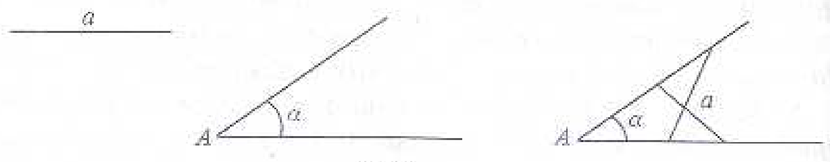
O'rta osiyolik olimlardan Umar Xayyom (1048—1030), Nasriddin Tusiy (1201—1274), Bag'dod matematigi Abul Hasan Sobit ibn Karra (836—901), Abul-Vafo Muhammad al-Buzdakoni (940—988), Sidjizi (951—1024), al Kuxi (X asr), Muhammad ibn al-Xusayn (XII asr) chizmachilikni takomillashtirish, chizmachilik asboblari va yasashga doir tarixiy masalalarning yechimi haqida risolalar yaratganlar.

3.3. Yasashga doir geometrik masalalarni yechishdagi asosiy bosqichlar. Yasashga doir geometrik masalalarning berilishiga qarab, uning yechimi mavjudmi yoki yo'qmi, degan savol tug'iladi.

Bu savolga javobni ayrim masalalarda, ayniqsa, shu masalani yechishda qo'llaniladigan usul yoki ketma-ketlik aniq va sodda bo'lsa, oldindan aytish mumkin.

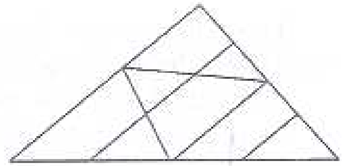
Masalan, a tomoni va uning qarshisidagi A burchagi bo'yicha uchburchak yasash talab qilinsin.

Bunday masalaning sharti yetarli emas, lekin bu berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yechim cheksiz ko'p ekanligini aytish mumkin (VI.28-rasm). Shuning uchun bu masalaning yechimi aniq emas deyiladi.



VI.28-rasm.

Yoki, masalan: 3 ta burchagiga ko'ra uchburchak yasash. Burchaklari berilgan burchaklarga teng bo'lgan juda ko'p o'xshash uchburchaklar yasash mumkin (VI.29-rasm). Ularning har biri yechim bo'la oladi. Demak, yechim aniq emas.


VI.29-rasm.

Bunday masalalarda, albatta, hech bo'lmaganda, bitta chiziqli element berilishi kerak, bunday shart uchburchakni to'la aniqlaydi.

Bu masaladan ko'rinadiki, yasashga doir masalalarni yechishda o'ziga xos xususiyat mavjud ekan. Bu xususiyat bunday masalalarni yechishdagi asosiy bosqichlardir. Ular quyidagilar:

1. Tahlil bosqichi;
2. Yasash bosqichi;
3. Isbotlash bosqichi;
4. Tekshirish bosqichi.

Tahlil bosqichi — bu bosqichda «masala yechildi», deb faraz qilib, so'ralgan shaklning taxminiy chizmasi chiziladi va unda masala shartida berilgan elementlar aniqlanadi. So'ngra ular bilan so'ralgan shaklning asosiy elementlari orasidagi bog'lanish aniqlanadi. Keyin berilgan elementlarga ko'ra, so'ralgan shaklni yasash rejasi tuziladi. Bu bosqich *ijodiy bosqich* deb ataladi, chunki tuzilgan reja asosida so'ralgan shaklni bemalol yasash mumkin.

Yasash bosqichi — bu bosqich *ijro etish bosqichi* deb atalib, tahlil bosqichida tuzilgan reja asosida so'ralgan shakl yasaladi (sirkul va chizg'ich yordamida).

Isbotlash bosqichi — bu bosqichda yasalgan shakl masalaning shartlarini qanoatlantirishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi — bu bosqichda quyidagi savollarga javob berish kerak bo'ladi:

1. Masala doim yechimga egami yoki yechimga ega bo'lmagan hol ham bormi?

2. Agar masala yechimga ega bo'lsa, qachon nechta yechimga ega bo'ladi?

Bu bosqichlar masalaning to'la hal qilinishini ta'minlaydi.

Berilgan masalaning sodda va murakkabligiga qarab ayrim bosqichlarni og'zaki ham bajarish yoki bajarmaslik mumkin bo'ladi. Lekin to'rtta bosqichga to'la e'tibor berish kerak bo'ladi.

Yasashga doir masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan bir qancha elementar masalalar mavjud. Jumladan,

1) kesmaga teng kesma yasash;

2) burchakka teng burchak yasash;

3) uchta tomoniga ko'ra uchburchak yasash;

4) ikki tomoni va ular orasida burchagiga ko'ra uchburchak yasash;

5) bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra uchburchak yasash;

6) burchak bissektrisasini yasash;

7) kesmani teng ikkiga bo'lish;

8) berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular tushirish;

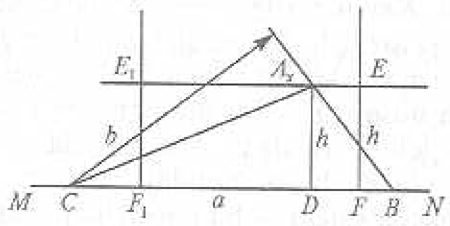
9) berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazish va hokazo.

Yasashga doir masalalarni yechishda bunday elementar masalalar chekli marta takrorlab qo'llanilishi mumkin.

M a s a l a. Asosi, bir yon tomoni va asosiga tushirilgan balandligiga ko'ra uchburchak yasang.

B e r i l g a n: $CB = a$, $AD \perp CB$, $AD = h$, $AC = B$.

I bosqich. Tahlil.



VI.30-rasm.

R e j a:

1. MN to'g'ri chiziqda a kesma yasaladi. B, C uchlar topiladi;

2. A uchi asosdan h masofada bo'lgani uchun $EF \perp BC$ o'tkaziladi;

3. $EF = h$ belgilanadi. E — nuqta topiladi;

4. Xuddi shuningdek, E_1, $F_1 = h$, E_1 — topiladi;

5. E, E_1 — o'tkaziladi. l — to'g'ri chiziq topiladi;

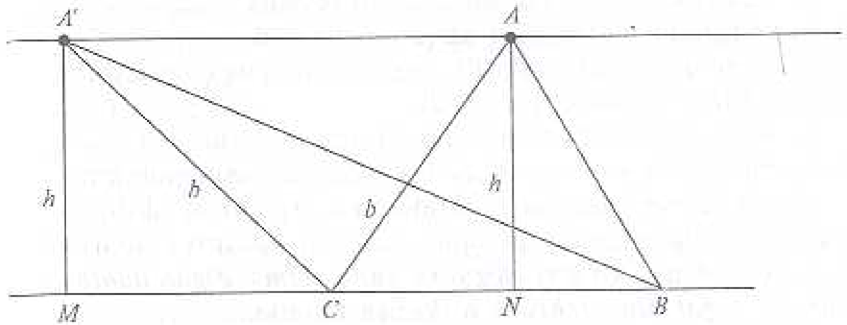
6. Markazi C nuqtada, radiusi b ga teng bo'lgan $U(0;\ 2)$ aylana yasaladi, natijada $l \cap U = A_x$ nuqta topiladi (VI.31-rasm).

II bosqich. Yasash. Tuzilgan rejaga ko'ra $\triangle ABC$ yasaladi.

III bosqich. I s b o t.

Yasalishiga ko'ra $\triangle ABC$ ning asosi a ga, yon tomoni b ga, balandligi h ga teng bo'ladi.

IV bosqich. T e k s h i r i s h.



VI.31-rasm.

$b < h$ bo'lsa, A topilmaydi, yechimi yo'q.

$h = b$ bo'lsa, masala bitta yechimga ega.

$b > h$ bo'lsa, 2 ta yechimga ega.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Geometrik masalalar turlarini ayting, o'rta maktab geometriya darsliklaridan isbotlashga va hisoblashga oid 5 tadan masala topib yeching.
2. Yasashga oid masalaning ta'rifi va yechish bosqichlarini ayting.
3. Chizg'ich va sirkul aksiomalarini ayting.
4. Yasashga oid elementar masalalarni ayting va yechilishini ko'rsating.
5. Quyidagi masalalarni chizg'ich va sirkul yordamida yeching:

1) Uchburchak chizing. Uning barcha: a) balandliklari; b) medianalari; d) bissektrisalarini yasang.

2) 60° va 30° li burchaklar yasang.

3) Berilgan: a) ikki tomoni va diagonaliga; b) tomoni va ikki diagonaliga; d) ikki tomoni va bitta burchagiga; e) diagonallari va ular orasidagi burchagiga ko'ra parallelogramm yasang.

4) Berilgan: a) burchagi va shu burchakdan chiqqan diagonaliga; b) diagonali va uning qarshisidagi burchagiga; d) tomoni va diagonaliga; e) ikkita diagonaliga ko'ra romb yasang.

5) Berilgan: a) asoslari va yon tomonlariga; b) asoslari va diagonallariga ko'ra trapetsiya yasang.

6) Berilgan aylanaga berilgan nuqtadan urinma o'tkazing.

4-§. STEREOMETRIYA

4.1. Stereometriya aksiomalari. Stereometriya geometriyaning fazoviy shakllarini o'rganadigan qismi bo'lib, uning o'ziga xos aksiomalari mavjud. Bu aksiomalar quyidagilardan iborat:

1. Tekislik qanday bo'lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.

2. Agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.

3. Agar ikkita turli to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

Bu aksiomalardan va planimetriyaning ayrim aksiomalarini mulohaza qilgan holda quyidagi natijalar keltirib chiqariladi:

1-teorema. ***To'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.***

2-teorema. ***To'g'ri chiziqning ikkita nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqning o'zi ham tekislikka tegishli bo'ladi.***

3-teorema. ***Tekislik bilan unda yotmaydigan to'g'ri chiziq yo kesishmaydi, yoki bitta nuqtada kesishadi.***

4-teorema. ***Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.***

4.2. To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallelligi va perpendikularligi.

1-ta'rif. *Fazodagi ikki to'g'ri chiziq bir tekislikda yotsa va kesishmasa, ular* ***parallel to'g'ri chiziq*** *deyiladi. Kesishmaydigan va bitta tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziqlar* ***ayqash to'g'ri chiziqlar*** *deyiladi.*

5-teorema. ***To'g'ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin va faqat bitta.***

6-teorema. ***Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel ikki to'g'ri chiziq paralleldir.***

7-teorema. ***Agar tekislikda yotmagan to'g'ri chiziq shu tekislikdagi biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda u tekislikning o'ziga ham parallel bo'ladi.***

2-ta'rif. *Agar ikki tekislik kesishmasa, ular* ***parallel*** *deyiladi.*

8-teorema. ***Ikki tekislikdan biri ikkinchi tekislikda yotgan kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu ikki tekislik parallel bo'ladi.***

9-teorema. ***Tekislikdan tashqaridagi nuqta orqali berilgan tekislikka parallel qilib bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.***

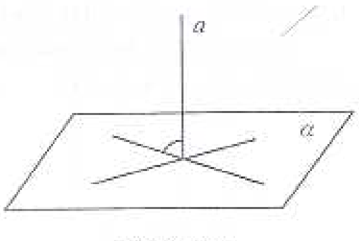
10-teorema. ***Agar ikkita parallel tekislik uchinchi tekislik bilan kesishsa, u holda kesishish to'g'ri chiziqlari parallel bo'ladi.***

11-teorema. ***Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning kesmalari teng.***

3-ta'rif. *Tekislikdagidek, to'g'ri burchak ostida kesishgan ikki to'g'ri chiziq* ***perpendikular to'g'ri chiziqlar*** *deyiladi.*

12-teorema. ***Perpendikular to'g'ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning o'zlari ham perpendikulardir.***

4-ta'rif. *Agar tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o'tuvchi istalgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, to'g'ri chiziq shu* ***tekislikka perpendikular*** *deyiladi* (VI.32-rasm).



VI.32-rasm.

13-teorema. ***Agar tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka perpendikular bo'ladi.***

14-teorema. ***Agar tekislik ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikular bo'lsa, u holda ikkinchisiga ham perpendikulardir.***

15-teorema. ***Bitta tekislikka perpendikular ikki to'g'ri chiziq o'zaro paralleldir.***

16-teorema. ***(Uch perpendikular haqidagi teorema.) Tekislikda og'maning asosidan uning proyeksiyasiga perpendikular qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq og'maning o'ziga ham perpendikulardir. Aksincha, tekislikdagi to'g'ri chiziq og'maga perpendikular bo'lsa, u og'maning o'ziga ham perpendikulardir.***

5-ta'rif. *Kesishuvchi ikkita tekislikning kesishgan to'g'ri chizig'iga perpendikular bo'lgan uchinchi tekislik ularni perpendikular to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tsa, bu ikki tekislik* ***perpendikular tekisliklar*** *deyiladi.*

17-teorema. ***Agar tekislik boshqa bir tekislikka perpendikular to'g'ri chiziq orqali o'tsa, bu tekisliklar perpendikulardir.***

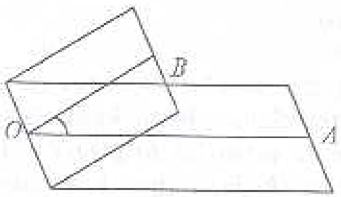
18-teorema. ***Ikkita perpendikular tekislikning birida yotuvchi to'g'ri chiziq shu tekisliklar kesishgan to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lsa, ikkinchi tekislik ham perpendikular bo'ladi.***

6-ta'rif. *Ikki ayqash to'g'ri chiziqning* ***umumiy perpendikulari*** *deb, uchlari shu to'g'ri chiziqlarda bo'lib, ularning har biriga perpendikular bo'lgan kesmaga aytiladi.*

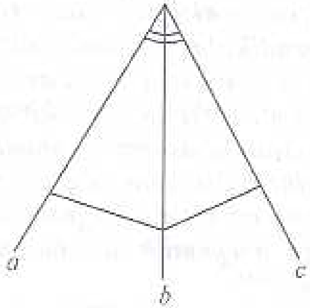
Ayqash to'g'ri chiziqlar umumiy perpendikularining uzunligi ular orasidagi *masofa* deyiladi.

4.3. Ko'pyoqli burchaklar. Ikkita yarim tekislik va ularni chegaralab turgan umumiy to'g'ri chiziqdan tashkil topgan shakl *ikki yoqli burchak* deyiladi (VI.33-rasm). Yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning *yoqlari*, ularni chegaralovchi to'g'ri chiziq esa ikki yoqli burchakning *qirrasi* deyiladi. AOB burchak ikki yoqli burchakning *chiziqli burchagi* deyiladi. Ikki yoqli burchakning kattaligi uning ikki yoqli burchagi kattaligi bilan o'lchanadi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan shakl *uchyoqli burchak* deyiladi (VI.34-rasm).



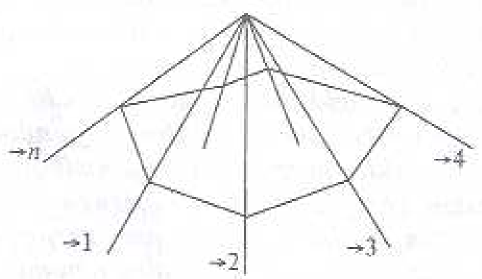
VI.33-rasm.



VI.34-rasm.

S — uchyoqli burchakning *uchi* deyiladi.

Agar bunday, ya'ni bitta umumiy uchga ega bo'lgan tekisliklar (yoqlar) ko'p bo'lsa, bunday shakl *ko'pyoqli burchak* deyiladi (VI.35-rasm).

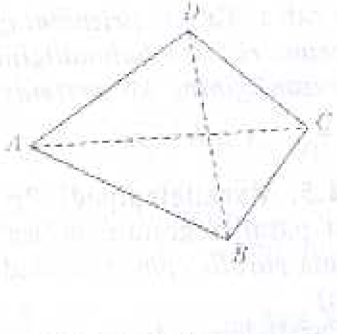


VI.35-rasm.

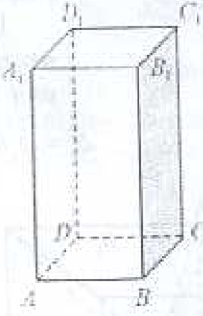
4.4. Ko'pyoqlar. Chekli miqdordagi tekisliklar bilan chegaralangan jism *ko'pyoq* deyiladi. Ko'pyoqning chegarasi uning *sirti* deyiladi.

Agar ko'pyoqning o'zi uni chegaralovchi tekisliklarning har biridan bir tomonda yotsa, bunday ko'pyoq *qavariq ko'pyoq* deyiladi.

Ko'pyoqlardagi A, B, C, D, ... — ko'pyoqning uchlari, AB, BC, AD; AA_1, BB_1 ... — ko'pyoqning qirralari, $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\square ABCD$, $\square ADD_1A_1$ — ko'pyoqning *yoqlari* deyiladi (VI.36, 37-rasmlar).



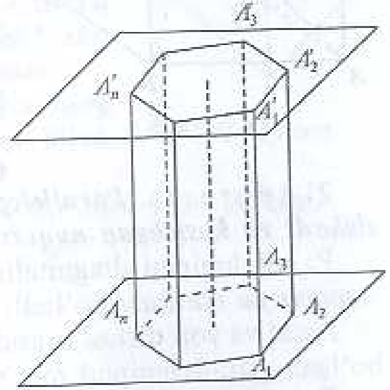
VI.36-rasm.



VI.37-rasm.

Bizga ma'lum bo'lgan ko'pyoqlar: prizma, parallelepiped, piramidalardir.

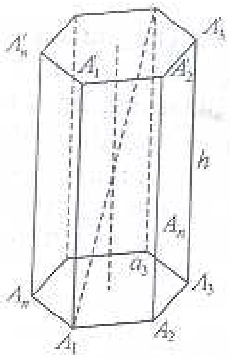
Prizma deb, ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan barcha parallel to'g'ri chiziqlar kesmalaridan tuzilgan ko'pyoqqa aytiladi (VI.38-rasm). Bu kesmalar shu tekisliklardan birida yotgan yassi ko'pburchakni kesib o'tadi. Prizmaning parallel tekisliklarda yotgan yoqlari prizmaning *asoslari* deyiladi. Boshqa yoqlari prizmaning *yon yoqlari* deyiladi. Yon yoqlar parallelogrammlardan iborat bo'ladi.



VI.38-rasm.

A_1, A_2 — prizmaning uchlari;
A_1A_1', A_2A_2' — prizmaning yon qirralari;
$A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$ — prizmaning yon yoqlari;
$A_1A_2A_3 \ldots A_n$ va $A_1'A_2'A_3' \ldots A_n'$ — prizmaning asoslari deyiladi.

Prizmaning asoslari orasidagi masofa uning *balandligi* deyiladi. Prizmaning ikki asosidagi bir yon yoqqa tegishli bo'lmagan



VI.39-rasm.

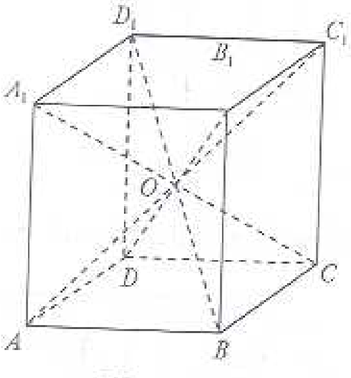
uchlarini tutashtiruvchi kesmalar prizmaning *diagonali* deyiladi (VI.39-rasm). Agar prizmaning yon qirralari asoslariga perpendikular bo'lsa, uni *to'g'ri prizma* deyiladi. Aks holda *og'ma prizma* deyiladi.

Asoslari muntazam ko'pburchak bo'lgan to'g'ri prizma *muntazam prizma* deyiladi.

Prizma yon yoqlari yuzlarining yig'indisi prizmaning *yon sirti* deyiladi.

19-teorema. ***To'g'ri prizmaning yon sirti asosining perimetri bilan balandligining, ya'ni yon qirrasi uzunligining ko'paytmasiga teng.***

$$S = a_1h + a_2h + \ldots + a_nh = ph.$$



VI.40-rasm.

4.5. Parallelepiped. Prizmaning asosi parallelogramm bo'lsa, bunday prizma *parallelepiped* deyiladi (VI.40-rasm).

Parallelepipedning umumiy uchga ega bo'lmagan yoqlari qarama-qarshi yoqlar deyiladi.

ABB_1A va DCC_1D — qarama-qarshi yoqlari.

BCC_1B_1 va ADD_1A_1 — qarama-qarshi yoqlari.

20-teorema. ***Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari parallel va teng.***

21-teorema. ***Parallelepipedning diagonallari bir nuqtada kesishadi va kesishgan nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.***

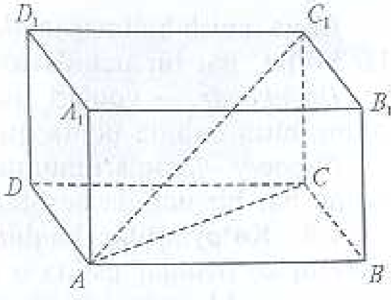
Parallelepiped diagonallarining kesishgan nuqtasi «O» uning *simmetriya markazi* bo'ladi.

Asosi va yon qirrasi orasidagi burchak to'g'ri burchakdan iborat bo'lgan parallelepiped *to'g'ri burchakli parallelepiped* deyiladi.

To'g'ri burchakli parallelepipedning hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi.

Hamma qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped *kub* deyiladi.

22-teorema. ***To'g'ri burchakli parallelepipedning istalgan diagonalining kvadrati uning uchta chiziqli o'lchovi kvadratlarining yig'indisiga teng.***



VI.41-rasm.

Berilgan: $ABCD\ A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ — to'g'ri burchakli parallelepiped (VI.41-rasm).

Isbot qilish kerak: $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2$.

Isboti: Shaklda $\triangle ABC$ dan Pifagor teoremasiga ko'ra:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$. $\triangle ACC_1$dan:

$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$.

$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2$. Teorema isbotlandi.

4.6. Piramida. *Piramida* deb, berilgan nuqtani yassi ko'pburchakning nuqtalari bilan tutashtiradigan barcha kesmalardan tashkil topgan ko'pyoqqa aytiladi (V.42-rasm).

S — piramidaning uchi.

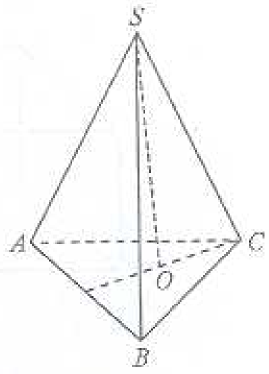
$\triangle ABC$ — piramidaning asosi.

$\triangle SAB$, SBC, SAC — piramidaning yon yoqlari.

SA, SB, SC — piramidaning yon qirralari.

SO — piramidaning balandligi deyiladi.

Uchburchakli piramida *tetraedr* ham deyiladi.



VI.42-rasm.

23-teorema. ***Piramidaning asosiga parallel va uni kesib o'tadigan tekislik shu piramidaga o'xshash piramida ajratadi.***

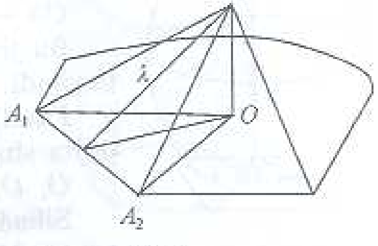
24-teorema. ***Muntazam piramidaning yon sirti asosi perimetrining yarmi bilan apofemasining ko'paytmasiga teng.***

$A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = a$ bo'lib, tomonlar soni n ta bo'lsin.

$$S_{yon} = 1\frac{a}{2} \cdot n = a \cdot n \cdot \frac{\lambda}{2} = a \cdot \frac{n}{2} \cdot 1 = P\frac{\lambda}{2}.$$

λ — apofema.

4.7. Muntazam ko'pyoqlar. Agar qavariq ko'pyoqlarning tomonlari soni bir xil bo'lgan muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lsa va shu bilan birga ko'pyoqning har bir uchida bir xil miqdordagi qirralar uchrashsa, bunday qavariq ko'pyoq *muntazam ko'pyoq* deyiladi. Bunday ko'pyoqlarga *muntazam tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr va ikosaedrlar* kiradi.



VI.43-rasm.

Bizga tanish bo'lmagan *oktaedr* yoqlari muntazam uchburchaklar bo'lib, har bir uchida to'rtta qirra uchrashadi.

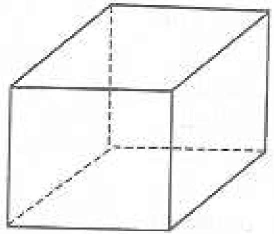
Dodekaedr — yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat, uning bitta uchida uchta qirra uchrashadi.

Ikosaedr — yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, uning har bir uchida beshtadan qirra uchrashadi.

4.8. Ko'pyoqlilar haqida Eyler teoremasi. Eyler o'zining qavariq ko'pyoqlar ustida o'tkazgan ilmiy izlanishlari natijasida ularning uchlari soni — a, qirralari soni — b va yoqlari soni — c orasidagi munosabatni quyidagi tenglik orqali ifodalagan: *qavariq ko'pyoqlarning qirralari soni uchlari va yoqlari sonidan 2 ta kamdir.*

$$a + c - b = 2.$$

Misol. Kubda Eyler teoremasini ko'raylik (VI.44-rasm).



$$\left.\begin{array}{l} a = 8 \\ b = 12 \\ c = 6 \end{array}\right\} 8 + 6 - 12 = 2.$$

VI.44-rasm.

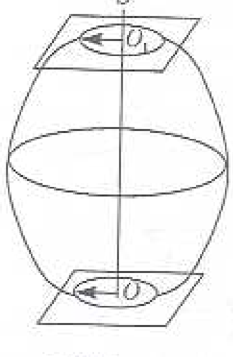
4.9. Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha. Biror egri chiziqni yoki to'g'ri chiziqni bir to'g'ri chiziq atrofida aylantirishdan *aylanma sirt* hosil bo'ladi. Agar uni *o'q* deb ataluvchi to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan parallel ikki tekislik bilan kesilsa, *aylanma sirt* va *doira* bilan chegaralangan *aylanma jism* hosil bo'ladi (VI.45-rasm).

OS — aylanma jismning *o'qi* deyiladi.

Bu jismning sirti — egri sirt *aylanma sirt* deyiladi.

Parallel tekisliklarda hosil bo'lgan kesim doira shaklida bo'ladi.

O, O_1 — doiralarning markazi bo'ladi.

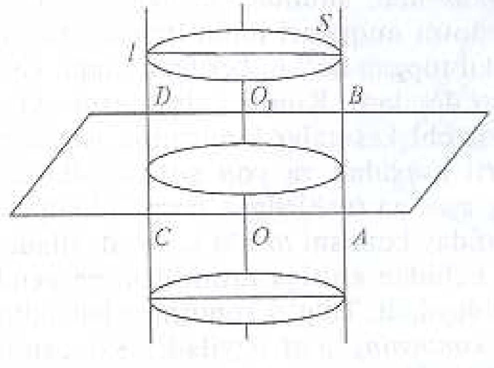


VI.45-rasm.

Silindr. O'q atrofida unga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq aylantirilsa, *silindrik sirt* hosil bo'ladi.

Uni o'qqa perpendikular ikkita parallel tekislik bilan kesilsa, ular orasida silindrik jism hosil bo'ladi (VI.46-rasm).

l — silindr yasovchisi; OO_1 — silindrning o'qi; l — to'g'ri chiziqning trayektoriyasi silindrning yon sirtini yasaydi.



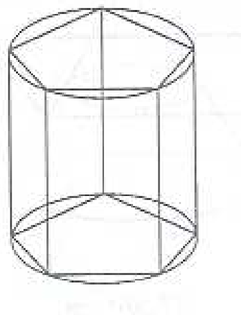
VI.46-rasm.

Tekisliklarda hosil bo'lgan doiralar silindrning *asoslari* deyiladi. Silindr asosining radiusi silindrning *radiusi* deyiladi. Silindr o'qi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesimi silindrning *o'q kesimi* deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o'tib, bu yasovchi orqali o'tadigan o'q kesimga perpendikular tekislik *silindrning urinma tekisligi* deyiladi.

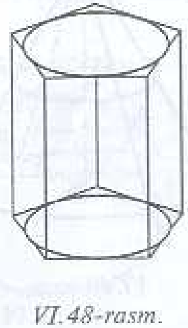
25-teorema. ***Silindr o'qiga perpendikular tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo'yicha kesadi.***

Bu teorema tekislikni asosga ustma- ust tushirish orqali isbot qilinadi.

Silindrga *ichki chizilgan prizma* deb, shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko'pburchaklardan iborat, uning qirralari silindr yasovchilari bo'ladi (VI.47-rasm).



VI.47-rasm.



VI.48-rasm.

Silindrga *tashqi chizilgan prizma* deb, shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindr asoslariga tashqi chizilgan teng ko'pburchaklardan iborat bo'ladi. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi (VI.48-rasm).

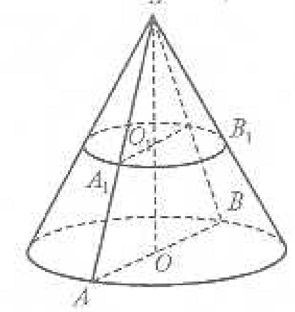
Konus. *Konus* deb, shunday jismga aytiladiki, u berilgan nuqtani biror doira nuqtalari bilan tutashtiruvchi hamma kesmalardan tashkil topgan bo'lib, berilgan nuqta konus *uchi*, doira esa konus *asosi* deyiladi. Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning *yasovchilari* deyiladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat. Agar konus uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikular uning markaziga tushsa, bunday konusni *to'g'ri konus* deyiladi (VI.49-rasm).

Konusning uchidan asosiga tushirilgan perpendikular konusning *balandligi* deyiladi. To'g'ri konusning balandligidan o'tuvchi to'g'ri chiziq *konusning o'qi* deyiladi. Konusning o'qi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesimi *o'q kesim* deyiladi. Konusning yasovchisi orqali o'tuvchi va bu yasovchi orqali o'tkazilgan o'q kesimga perpendikular tekislik konusning *urinma tekisligi* deyiladi. Shakldan: ABS uchburchak konusning o'q kesimi.

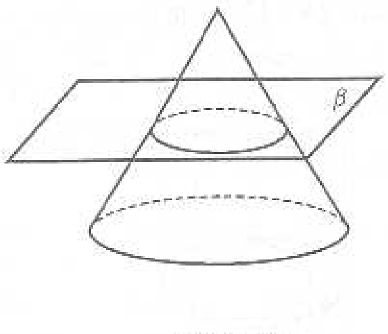
26-t e o r e m a. ***Konusning o'qiga perpendikular tekislik konusni doira bo'yicha kesadi, yon sirtini esa markazi konusning yog'ida joylashgan aylana bo'yicha kesib o'tadi.***

Tekislikni asos tekisligi bilan ustma-ust tushiruvchi konus uchiga nisbatan gomotetik almashtirish konusning tekislik bilan kesimini konusning asosi bilan ustma-ust tushiradi.

Demak, konusning tekislik bilan kesimi doira bo'lib, yon sirtining kesim markazi konus o'qida joylashgan aylanadir.

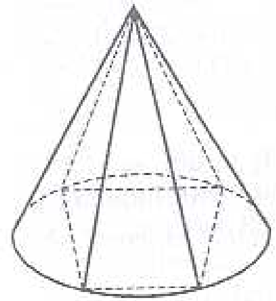


VI.49-rasm.

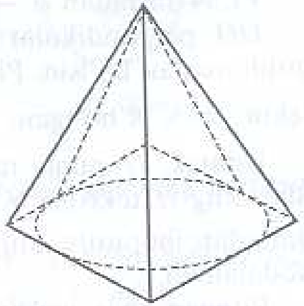


VI.50-rasm.

Konus o'z o'qiga perpendikular tekislik bilan kesilsa, uch tomonida kichik konus ajraladi, pastda qolgan qismi esa *kesik konus* deyiladi (VI.50-rasm).



VI.51-rasm.



VI.52-rasm.

Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko'pburchak bo'lib, uchi esa konusning uchida bo'lgan piramida konusga *ichki chizilgan piramida* deyiladi (VI.51-rasm).

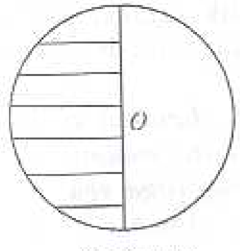
Asosi konusning asosiga tashqi chizilgan ko'pburchak bo'lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga *tashqi chizilgan piramida* deyiladi (VI.52-rasm). Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo'ladi.

Shar.

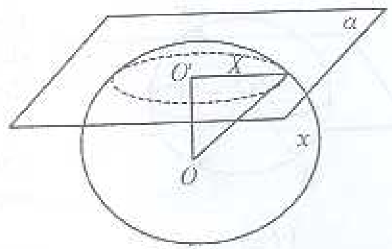
7-t a ' r i f. *Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan katta bo'lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan iborat qismi **shar** deyiladi.*

Berilgan nuqta *shar markazi*, berilgan masofa *sharning radiusi* deyiladi. Sharning chegarasi *shar sirti* yoki *sfera* deb ataladi. Shar markazidan o'tuvchi va shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma *shar diametri* deyiladi.

Yarim doirani uning diametri atrofida aylantirish natijasida ham shar hosil bo'ladi (VI.53-rasm).



VI.53-rasm.



VI.54-rasm.

27-t e o r e m a. ***Sharning har qanday tekislik bilan kesimi doiradir.*** Bu doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikularning asosidir.

VI.54-rasmdan α — kesuvchi tekislik; O — shar markazi. OO' perpendikular o'tkazamiz. X shu tekislikning sharga tegishli nuqtasi bo'lsin. Pifagor teoremasiga ko'ra $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$, lekin $OX \le R$ bo'lgani uchun $O'X \ge \sqrt{R^2 - OO'^2}$.

Demak, O' nuqta radiusi $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ bo'lgan doiraga tegishli. Sharning α tekislik bilan kesimi markazi O' nuqtada bo'lgan doiradan iboratdir, uning radiusi $R' = \sqrt{R^2 - OO'^2}$ formula bilan ifodalanadi.

Bundan shar markazidan bir xil uzoqlikdagi kesimlari teng doiralardan iborat bo'ladi. Tekislik markazga yaqinlashib borsa, kesimdagi doiralar ham kattalashib boradi. Shar markazidan o'tuvchi kesim eng katta doira bo'lib, uning radiusi doira radiusiga teng bo'ladi.

28-t e o r e m a. ***Sharning istalgan diametrial tekisligi uning simmetriya tekisligi bo'ladi. Sharning tekisligi uning simmetriya tekisligi bo'ladi. Sharning markazi uning simmetriya markazidir.***

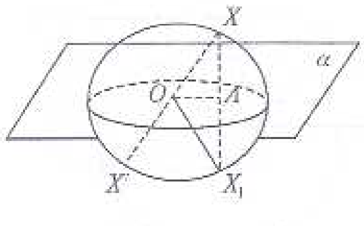
I s b o t i. α — diametrial tekislik, X — sharning ixtiyoriy nuqtasi.

X nuqtaga simmetrik nuqtani (X') yasaymiz.

$$XX_1 \perp \alpha \Rightarrow XA = AX_1 .$$

$\triangle AOX = \triangle AOX'$ dan: $OX_1 = OX$. $OX \le R$ kelib chiqib X_1 nuqta sharga tegishlidir.

Endi X^2 nuqta shar markaziga nisbatan X nuqtaga simmetrik nuqta bo'lsin. U holda $OX^2 = OX \le R$, ya'ni X^2 nuqta sharga tegishli.



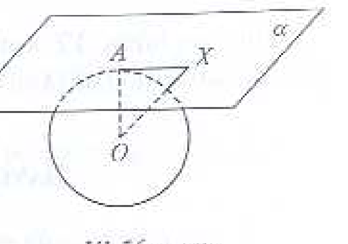
VI.55-rasm.

Shar sirtidagi nuqtadan o'tib shu nuqtaga o'tkazilgan radiusga perpendikular tekislik *urinma tekislik* deyiladi. A nuqta urinish nuqtasi deyiladi.

29-t e o r e m a. ***Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga — urinish nuqtasiga ega.***

A — urinish nuqtasi bo'lsin (VI.55-rasm).

$AO = R$, $\forall X \in \alpha$ bo'lsin. $AO \perp \alpha$, OX esa α tekislikka og'ma kabi bo'ladi. U holda $OX > OA = R \Rightarrow$ $\Rightarrow OX > R$.



VI.56-rasm.

Demak, X nuqta sharga tegishli emas. AX to'g'ri chiziq sharga *urinma* deyiladi.

30-t e o r e m a. ***Shar sirtidagi istalgan nuqtadan cheksiz ko'p urinma o'tadi, ularning hammasi sharning urinma tekisligida yotadi.***

A nuqtadan o'tuvchi har qanday urinma OA radiusga perpendikular bo'ladi, demak, ular bitta tekislikda yotadi.

Sfera tenglamasi. Sferaning markazi dekart koordinatalar sistemasida $A(a;\ b;\ c)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo'lsin. A nuqta bilan sfera ustidagi ixtiyoriy nuqta orasidagi masofa $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ ga teng. Bu masofa R ga teng bo'lgani uchun sfera tenglamasi $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ bo'ladi.

Agar sferaning markazi dekart koordinatalar boshida yotsa, uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

bo'ladi.

31-t e o r e m a. ***Ikkita sferaning kesishgan chizig'i aylanadir.***

Birinchi sferaning markazi $O_1(a;\ 0;\ 0)$ nuqtada, radiusi R_1 bo'lsin. Ikkinchi sferaning markazi $O_2(b;\ 0;\ 0)$ nuqtada, radiusi R_2 bo'lsin. U holda ularning markazlarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq X o'qidan iborat bo'ladi. Sferalarning tenglamasi

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \qquad (1)$$

$$(x-b)^2 + y^2 + z^2 = R_2^2 \qquad (2)$$

bo'ladi.

$$(x-a)^2 - (x-b)^2 = R_1^2 - R_2^2;$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

$$2(b-a)x = R_1^2 - R_2^2 - a^2 + b^2. \qquad (3)$$

Bu tenglama YZ koordinata tekisligiga parallel tekislik tenglamasi bo'lib, u ikki sferaning kesishgan chizig'ini beradi.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Stereometriyaning asosiy tushunchalari va aksiomalarini ayting.
2. Asosiy ko'pyoqlarning ta'riflari, elementlarining nomlari va turlarini ayting.
3. Muntazam ko'pyoq deb nimaga aytiladi va uning qanday turlari bor?
4. Aylanish shakllari deb nimaga aytiladi, ularning qanday turlari bor? Asosiy elementlarining nomlari va xossalarini ayting.
5. Ko'pyoqlar uchun Eyler teoremasini ayting, uni misollar bilan izohlang.

5-§. MIQDORLAR VA ULARNI O'LCHASH

5.1. Miqdor tushunchasi. Miqdor tushunchasi faqat matematika fanida qo'llaniladigan asosiy tushunchalardan birigina emas, balki fizika, kimyo kabi boshqa fanlarda qo'llaniladigan tushuncha hisoblanadi. Turli fanlarda (bitta fanning turli bo'limlarida) turlicha talqin qilinganligidan, ularni tavsiflash ancha qiyinchiliklarga olib keladi. Lekin, matematikada ularni quyidagicha ta'riflaymiz.

1-ta'rif. *Obyektlar yoki hodisalarga xos umumiy xossa* ***miqdor*** *deyiladi.*

2-ta'rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan miqdor* ***bir jinsli additiv-skalyar miqdor*** deyiladi:

1) *Ixtiyoriy bir jinsli a va b miqdorlarni taqqoslash mumkin, ya'ni $a = b$, $a > b$, $a < b$ munosabatlardan faqat bittasi bajariladi.*

2) *Ixtiyoriy bir jinsli a va b miqdorlarni qo'shish mumkin, ya'ni $a + b = c$ (yig'indi miqdor).*

3) *Miqdorni songa ko'paytirish mumkin, ya'ni $b = xa$, $x\forall R_+$.*

4) *Miqdorlarni ayirish mumkin, ya'ni $a = b + c$ shartni qanoatlantiradigan c miqdor a va b miqdorlarning ayirmasi deyiladi.*

5) Bir jinsli miqdorlarni bo'lish mumkin: $a/b = x$.

5.2. Miqdorlarni o'lchash tushunchasi.

3-ta'rif. *Agar a miqdor va e birlik miqdor berilgan bo'lib, $a = xe$ ni qanoatlantiradigan x soni topilsa, u holda x soni a miqdorning e o'lchov birligi bo'yicha* ***o'lchovi*** *yoki* ***son qiymati*** *deyiladi.*

Masalan, $12\ \text{sm} = 12 \times 1\ \text{sm}$.

Miqdorlarni o'lchash ularni taqqoslashni sonlarni taqqoslashga olib kelish mumkinligini beradi.

1. a va b miqdorlar o'lchov birligi bilan o'lchangan bo'lsa, u holda:

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b);$$
$$a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b);$$
$$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b).$$

2. $a + b = c \Leftrightarrow m_e(a+b) = m_e(a) + m_e(b)$.

3. $b = x \cdot a \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$.

Masalan, $b = 3a = 3 \times (2\ \text{kg}) = (3 \times 2)\ \text{kg}$. $(a = 2\ \text{kg})$.

5.3. Kesma uzunligi va uning xossalari.

4-ta'rif. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan musbat miqdor* ***kesma uzunligi*** *deyiladi:*

1. *Teng jismlar teng uzunlikka ega;*
2. *Agar kesma chekli sondagi bo'laklardan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning uzunligi bo'laklarning uzunliklari yig'indisiga tengdir.*

Xossalari.

1. Kesma uzunligi haqiqiy songa teng.
2. $a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$.
3. $c = a + b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) + m_e(b)$.
4. $b = x \cdot a \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$.
5. O'lchov birligi o'zgarishi bilan kesma uzunligining son qiymati ham o'zgaradi.
6. $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$.
7. $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$.
8. $x = a : b \Leftrightarrow m_e(a) : m_e(b)$.

Xalqaro o'lchov birliklar sistemasida metr (m) asosiy uzunlik o'lchov birligi bo'lib, u tekis elektromagnit to'lqinining vakuumda sekundning $\frac{1}{299792458}$ qismida bosib o'tgan masofasiga tengdir.

1 km = $10^3 \cdot 1$ m 1 dm = $10^{-1} \cdot 1$ m
1 mm = $10^{-3} \cdot 1$ m 1 sm = $10^{-2} \cdot 1$ m

5.4. Shaklning yuzi.

5-t a ' r i f. ***Shaklning yuzi*** *deb, shunday nomanfiy miqdorga aytiladiki, u quyidagi xossalarga ega:*

1) *Teng shakllar teng yuzga ega, ya'ni*

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow S(F_1) = S(F_2).$$

2) *Agar shakl chekli sondagi qismlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning yuzi qismlarning yuzlari yig'indisidan iborat, ya'ni*

$$F = F_1 + F_2 + ... + F_n \Leftrightarrow S(F) = S(F_1) + S(F_2) + ... + S(F_n).$$

Shakl yuzini o'lchash, bu uni tomoni e ga teng (yuzi e^2) birlik kvadrat bilan taqqoslash, demakdir. Taqqoslash natijasida shunday x soni kelib chiqadiki, u $S(F) = x \cdot e^2$ ni qanoatlantiradi. X — soni berilgan o'lchov birligida shakl yuzining *son qiymati* deyiladi.

Shakl yuzini o'lchashning ba'zi usullarini ko'rib chiqamiz. Shakl yuzini o'lchash usullaridan bir *palyotkalar* (katakli plyonka) yordamida o'lchash. Bunda o'lchanayotgan shakl ustida palyotkani yuzma-yuz qo'yamiz.

1. Berilgan shakl yuziga tegishli to'liq kvadratlar (kataklar) sonini aniqlaymiz. Ularning soni m bo'lsin.

2. Berilgan shakl konturida yotgan kvadratlar (kataklar) sonini aniqlaymiz. Ularning soni n ga teng bo'lsin.

Bu holda F ning yuzi $S(F)$ shartini qanoatlantiradi.

Shakl yuzini aniqroq hisoblash uchun kataklarni yana ham maydaroq $\left(e_1 = \frac{1}{10} e\right)$ olish mumkin.

Amaliyotda $S(F) \approx \left(m + \frac{n}{2}\right)e^2$ formula yordamida hisoblanadi.

6-t a ' r i f. *Yuzlari teng shakllar* ***tengdosh*** *deyiladi. Tengdosh shakllar teng bo'lmasligi ham mumkin.*

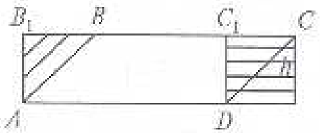
7-t a ' r i f. *Agar ikkita shakl bir xil qismlardan tashkil topsa,* ***teng tuzilgan*** *deyiladi.*

Teng tuzilgan figuralar har doim tengdoshdir.

Agar yuz o'lchov birligini almashtirsak, u holda yuzning son qiymati yangi o'lchov birligi necha marta ortiq (kam) bo'lsa, shuncha marta kamayadi (ortadi).

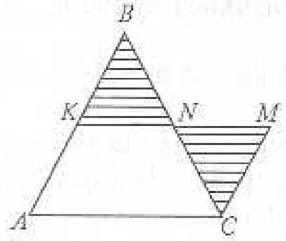
Masalan, 5 sm^2 = 5×1 sm^2 = 5× (0,01 dm^2) = (5×0,01) dm^2 = = 0,05 dm^2.

Boshlang'ich sinf o'quvchilari to'g'ri to'rtburchak yuzini palyotka yordamida topish uchun uning ichiga joylashgan birlik kvadratlarni sanaydi yoki eni va uzunligining son qiymatlarini ko'paytiradi. Teng tuzilgan shakllar xususiyatidan foydalanib, ba'zi shakllarning yuzlarini topish formulalarini keltirib chiqaramiz.



$S_{ABCD} = S_{AB_1C_1D}$
$S_{ABCD} = ah$

VI.57-rasm.

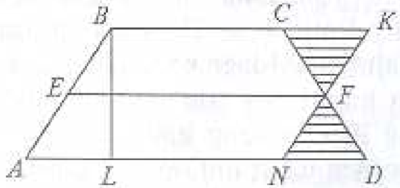


$\triangle KBN = \triangle MNC$
$BE = EF = h/2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ah.$

VI.58-rasm.

$$S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$$



VI.59-rasm.

Teng tuzilganlikdan foydalanib boshqa shakllarning yuzlarini topish mumkin.

5.5. Jismning massasi va hajmi haqida tushuncha.

8-t a ' r i f. *Quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan musbat miqdor* ***massa*** *deyiladi:*

1) *Tarozida bir-birlarini teng muvozanatda saqlaydigan jismlarning massalari tengdir.*

2) *Agar jism bo'laklardan tashkil topgan bo'lsa, u holda jismning massasi uni tashkil qiluvchi bo'laklar massalarining yig'indisidan iboratdir.*

Jismning massasini tarozi yordamida o'lchaymiz. e massaga ega bo'lgan jismni tanlaymiz va uni o'lchov birligi sifatida qabul qilamiz. Bu massaning birlik qismini olish ham mumkin. Masalan, 1 g = 1/100 kg.

Kilogramm (kg) asosiy massa o'lchovi birligi sifatida qabul qilingan. Platina va iridiy qotishmasidan 1889-yilda tayyorlangan silindrning massasi 1 kg deb qabul qilingan. Bu etalon xalqaro o'lchovlar byurosida Fransiyaning Sevre shahrida saqlanadi. Bundan oldingi asrda 1 kg deb 1 dm³ (4°C) suvning massasi qabul qilingan edi. Gramm (g), tonna (t), sentner (s) va boshqa birliklar hosilaviy o'lchov birliklari deyiladi.

$$1\ g = 10^{-3} \cdot 1\ kg, \quad 1\ m = 10^{3} \cdot 1\ kg, \quad 1\ s = 10^{2} \cdot 1\ kg.$$

Jism hajmi tushunchasiga ta'rif beraylik. Fazoda biror D jism berilgan bo'lsin va uning chegarasi sifatida bir yoki bir nechta yopiq sirtlar xizmat qilsin.

Biror K — ko'pyoq D — jismga tashqi, k — ko'pyoq esa D — jismga ichki chizilgan deb olaylik.

8-ta'rif. *Agar tashqi* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *va ichki* $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ *chizilgan ko'pyoqlar ketma-ketligi chekli limit* $\lim\limits_{n\to\infty} V(K_n) = \lim\limits_{n\to\infty} V(k_n) = V$ *ga ega bo'lsa, u holda D — jism* ***kublashtiriluvchi*** *deyiladi.*

Umumiy limit V — D jism hajmining *son qiymati* deyiladi.

Jism hajmi quyidagi xossalarga ega:

1. Jism hajmining son qiymati nomanfiy haqiqiy son.
2. Teng jismlar teng hajmiga ega.
3. Agar jism ichki umumiy nuqtaga bo'lmagan jismlarning birlashmasidan iborat bo'lsa, u holda jismning hajmi birlashuvchi jismlar hajmlari yig'indisiga tengdir.
4. O'lchovlari birlik kesmadan iborat kubning hajmi birga teng.

Hajm birliklari:

Kub metr (m^3); kub detsimetr (dm^3), kub santimetr (sm^3), kub millimetr (mm^3). Litr (l), gektolitr (gl), millimetr (ml). SI sistemada 1 l = 1 dm^3.

SAVOL VA TOPSHIRIQLAR

1. Ikki bo'lak simni o'lchamasdan uzunliklarini qanday taqqoslash mumkin?
2. Ikki turli idishlardagi suv hajmini o'lchamasdan qanday taqqoslash mumkin?

3. Qanday kattaliklarni o'lchash natijasida quyidagi natijalar olingan bo'lishi mumkin: a) 12,3 m; b) 17 mm; d) 140 l; e) 5 kg 300 g; f) 160 t; g) 6 km/soat; h) 16 so'm?
4. Uzunlik, massa, vaqt, yuz va tezlikning asosiy va hosilaviy birliklarini ayting.
5. Agar o'lchov birligi a) 3 marta kattalashsa; b) 7 marta kichiklashsa, miqdorning son qiymati qanday o'zgaradi?
6. e birlik kesma oling va a) $3e$; b) $0{,}6e$; d) $1{,}75e$ kesmalarni yasang. Agar birlik kesma uchun $\frac{1}{3}e$; $2e$; $0{,}75e$ olinsa, yuqoridagi kesmalar uzunliklarining son qiymati qanday o'zgaradi?
7. «Teng shakllar tengdoshdir» degan mulohazaga teskari mulohazani tuzing va rost yoki yolg'onligini aniqlang.
8. Bitta shakl yuzining son qiymati turlicha, turli shakllar yuzlarining son qiymatlari bir xil sonlar bilan ifodalanishi mumkinmi? Misol keltiring.
9. Agar kvadrat tomonlari: a) 2 baravar orttirilsa; b) 25% ga orttirilsa; d) 3 marta kamaytirilsa, kvadrat yuzi qanday o'zgaradi?
10. Orasidagi bog'lanish: a) to'g'ri proporsional; b) teskari proporsional bo'lgan kattaliklarga misol keltiring.
11. Ikkita kvadrat shaklidagi yer maydonining tomonlari 100 m va 150 m. Ularga tengdosh kvadrat shaklidagi yer maydonining tomonini toping.
12. Kvadrat yuzini uning diagonali a ga ko'ra toping.
13. Kvadratga tashqi chizilgan aylana yuzi unga ichki chizilgan kvadrat yuzidan necha marta katta?
14. Kvadrat va romb bir xil perimetrga ega. Ularning qaysi birining yuzi katta va nima uchun?
15. Rombning yuzi uning diagonallari ko'paytmasining yarmiga tengligini isbotlang.
16. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 74 dm, yuzi 3 kv m bo'lsa, tomonlarini toping.
17. Uchburchakni bir uchidan chiqqan to'g'ri chiziqlar yordamida uchta tengdosh bo'lakka bo'ling.
18. Asoslari 60 sm va 20 sm, yon tomonlari 13 sm va 37 sm bo'lgan trapetsiyaning yuzini toping.
19. Doira yuzining unga ichki chizilgan: a) kvadrat; b) muntazam uchburchak; d) muntazam oltiburchak yuziga nisbatini toping.
20. Qirralari 3 sm, 4 sm, 5 sm bo'lgan uchta metall kub eritilib, bitta kub yasalgan. Shu kubning hajmini toping.
21. Kubning qirralari 1 m orttirilsa, hajmi 125 marta ortadi. Kubning qirrasini toping.
22. To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari 15 m, 50 m, 36 m bo'lsa, unga tengdosh kubning qirrasini toping.

MUNDARIJA

Nilufar Azimovna Xamedova, Zuhra Ibragimova, *Tog'aybek Tasetov*

MATEMATIKA

Oliy o'quv yurtlarining boshlang'ich ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik

Muharrir *N. G'oyipov*
Rassom *G. Gurova*
Tex. muharrir *T. Smirnova*
Musahhih *H. Zokirova*
Kompyuterda tayyorlovchi *E. Kim*

Bosishga ruxsat etildi 19.01.07. Bichimi $60\times90^1/_{16}$. «Tayms» garniturasi.
Shartli b. t. 19,5. Nashr t. 22,5. Adadi 3000. Buyurtma № 8.

«Arnaprint» MCHJ da sahifalanib chop etildi.
100182, Toshkent, H. Boyqaro ko'chasi, 41.

N. Xamedova, Z. Ibragimova, $\boxed{\text{T. Tasetov}}$

Matematika. Oliy o'quv yurtlarining boshlang'ich ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik. — T.: «Turon-Iqbol» nashriyoti, 2007.— 312 b.

«Matematika» darsligi boshlang'ich ta'lim yo'nalishi bakalavriati uchun mo'ljallangan bo'lib, unda boshlang'ich matematika kursi nazariy asoslari berilgan, ularni o'zlashtirish uchun zarur umumiy tushunchalar va qisqa oliy matematika kursi 5141600-boshlang'ich ta'lim va tarbiyaviy ish yo'nalishi standartiga mos holda bayon qilingan. Darslik 6 bobdan iborat bo'lib, boblar paragraflarga bo'lingan, har bir paragraf oxirida nazorat savollari va topshiriqlar berilgan.