

# GEOMETRIYA

# 10

Umumiy o'rtta ta'lim maktablarining  
10-sinfi uchun darslik

O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi  
vazirligi nashrga tavsiya etgan

*Yangi nashr*

Toshkent – 2022

UO'K 514(075.3)

514(075.3)

G 35

***Tuzuvchilar:***

*Boxodir Xaydarov*  
*Nargiza Tashtemirova*  
*Isak Asrorov*

***Taqrizchilar:***

- Z. R. Babayeva – Sirdaryo viloyati Guliston shahridagi 11-sonli umumiy o'rta ta'lim maktabining matematika fani o'qituvchisi.
- M. X. Usmanov – Namangan viloyati xalq ta'limi boshqarmasi tasarrufidagi 3-IDUMI matematika fani o'qituvchisi.
- A. K. Alibekova – Toshkent shahri Shayxontohur tumanidagi 180-IDUM matematika fani o'qituvchisi.

Geometriya 10-sinf [Matn]: darslik / B. Xaydarov, N. Tashtemirova, I. Asrorov – Toshkent: Respublika ta'lim markazi, 2022. – 192 b.

UNICEFning O'zbekistondagi vakolatxonasi bilan hamkorlikda tayyorlandi.

O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V. I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti xulosasi asosida takomillashtirildi.

Original maket va dizayn konsepsiyasi  
Respublika ta'lim markazi tomonidan ishlandi.

Respublika maqsadli kitob jamg'armasi mablag'lari hisobidan chop etildi.

## SO‘ZBOSHI

Aziz o‘quvchilar! Siz geometriyaning bo‘limi – stereometriya kursini o‘rganishni boshlayapsiz. Stereometriya fazoviy geometrik shakllarning xossalari o‘rganishga bag‘ishlangan. 10-sinfda stereometriya aksiomalari va ularning natijalari, fazodagi to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklarning parallelligi va perpendikulyarligi bilan tanishasiz.

Keltirilgan nazariy materiallar imkon qadar sodda va ravon tilda ifoda etilgan. Barcha mavzu va tushunchalarning mohiyati turli hayotiy misollar orqali ochib berilgan. Har bir mavzudan so‘ng berilgan savollar, isbotlashga, hisoblashga va yasashga doir ko‘plab masala va misollar o‘quvchini ijodiy fikrlashga undaydi, o‘zlashtirilgan bilimlarni chuqurlashtirishga va mustahkamlab borishga yordam beradi. Darslik o‘ziga xos dizayni va dars materialini ko‘rgazmali qilib taqdim etishi bilan ajralib turadi. Unda keltirilgan rasm va chizmalar dars materiallarini yaxshiroq uqib olishga xizmat qiladi.

O‘rganilgan geometrik tushunchalar va xossalari sizda hayotiy muammolarni hal qilish va amaliyotda qo‘llash qobiliyatini rivojlantiradi. Stereometriya bo‘yicha o‘zlashtirilgan bilim va ko‘nikmalar kundalik hayotda, ko‘plab kasb egalari va mutaxassislar – me‘morlar, quruvchilar, dizaynerlar, tokarlar va boshqalarning kasbiy faoliyatida zarur ekaniga amin bo‘lasiz.

Barcha materiallar boblarga, boblar esa mavzularga bo‘lingan. Har bir mavzuda nazariy materiallar va vazifalar mavjud. Nazariyani o‘rganayotganda, qalin harf bilan ajratilgan matnga alohida e‘tibor bering. Bu eng muhim ta‘rif va xossalardir. Muammolarni hal qilishda ularni tushunish, eslash va qo‘llay bilish kerak. Mavzular matnida

ba‘zi muammolarni hal qilish va masalalarni yechish namunalari ham topasiz.

Har bir mavzudan keyin berilgan savollar mavzu material qanday o‘zlashtirilganini tekshirishga va uni takrorlashga yordam beradi. Har bir bo‘lim oxirida nazorat savollari va test topshiriqlari berilgan bo‘lib, ular yordamida bo‘lim mavzulari qanday o‘zlashtirilganini tekshirish mumkin. Darslikdagi savol va topshiriqlar uchta qiyinchilik darajasiga ega. Mavzu oxiridagi savollar va ba‘zi doira ( $^{\circ}$ ) bilan belgilangan masalalar dastlabki qiyinchilik darajasida bo‘lib, ular nazariy materialni yaxshi tushunganiga ishonchi komil bo‘lmaganlar uchun tayyorgarlik mashqlari hisoblanadi. Hech qanday belgisizlari o‘rtacha qiyinchilikdagi vazifalar va mashqlardir. Ularni hal qilishni o‘rganib, yetarli darajadagi akademik yutuqlarni ishonchli tarzda namoyish eta olasiz. Yulduzcha (\*) bilan yuqori murakkablikdagi vazifalar belgilangan. Agar siz ularni darhol hal qila olmasangiz, tashvishlanmang, lekin sabrli va qat‘iyatli bo‘ling. Qiyin vazifani hal qilish quvonchi siz uchun mukofot bo‘ladi. Javoblardagi ko‘rsatmalar ushbu vazifalarning ba‘zilarini yechish yo‘llarini topishga yordam beradi.

Fan, xususan, geometriyani o‘qitishdan ko‘zlangan muhim natija o‘quvchilarning tegishli kompetensiyalar – bilim va ko‘nikmalarga asoslangan ta‘lim va hayotda muvaffaqiyatli harakat qilish malakalarini egallashlaridan iborat. Darslikda keltirilgan topshiriq va mashqlar ana shu maqsadni amalga oshirishga qaratilgan.

**Mualliflar**

## DARSLIKDAN FOYDALANISH BO'YICHA TAVSIYALAR

Darslikdan stereometriyani muvaffaqiyatli o'rganish uchun quyidagilarga rioya etishni tavsiya qilamiz:

- *har bir fazoviy jismni o'rganishni uning modelini yasashdan boshlash va ularning xossalari shu modellar asosida o'rganish;*
- *fazoviy jismlarni daftarda tasvirlashga alohida e'tibor qaratish;*
- *ko'proq hayotiy, kundalik turmushdan olingan masalalarni yechish, ya'ni kompetensiyalarni shakllantirishga e'tibor berish;*
- *bora-bora rasmi masalalardan matnli masalalarga o'tish;*
- *darsda turli predmetlar, ro'zg'or buyumlariga fazoviy jism modeli sifatida qarab, ularning xossalari o'rganishga doir masalalarni ko'proq yechish;*
- *keys va loyiha metodlaridan keng foydalangan holda o'quvchilarga mustaqil ishlar berish va ularning taqdimotlarini muhokama qilish;*
- *turli xossalari va formulalarning isbotidan ko'ra ularning mohiyati va tatbiq etishiga ko'proq to'xtalish.*

## DARSLIKDA ISHLATILGAN BELGILAR VA ULARNING TALQINI:



– geometrik tushuncha ta'rifi.



– amaliy mashq va tatbiq.



– teorema tavsifi.



– geometrik tadqiqot.



– aksioma tavsifi.



– tarixiy lavhalar.



– mavzu bo'yicha savollar.



– geometrik boshqotirmalar.



– faollashtiruvchi mashg'ulot.



– multimedia ilovalari.



– masala yechish namunasi.



– elektron resurslar.



## I BOB PLANIMETRIYANI TIZIMLI TAKRORLASH



1. Geometriyaning mantiqiy tuzilishi .....	8
2. Geometrik masalalar va ularni yechish usullari .....	15
3. Bobni takrorlashga doir amaliy mashqlar .....	26

## II BOB STEREOMETRIYAGA KIRISH



4. Stereometriyaning asosiy tushunchalari.....	32
5. Fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklar .....	39
6. Fazoviy geometrik shakllar. Ko'pyoqlar .....	44
7. Ko'pyoqlarni tasvirlash va modelini yasash .....	58
8. Ko'pyoqlarning sodda kesimlarini yasash .....	64
9. Loyiha ishi bo'yicha mashg'ulot .....	74
10. Bobni takrorlashga doir amaliy mashqlar .....	77

## III BOB

### FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI



11. Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi.....	88
12. Ayqash to'g'ri chiziqlar .....	95
13. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashuvi.....	98
14. Fazoda tekisliklarning o'zaro joylashuvi .....	103
15. Fazoda parallel proyeksiyalash .....	109
16. Bobni takrorlashga doir amaliy mashqlar .....	113

## IV BOB

### FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULARLIGI



17. Fazoda perpendikulyar to'g'ri chiziqlar va tekisliklar .....	120
18. Fazoda perpendikulyar, og'ma va masofa .....	127
19. Uch perpendikulyar haqidagi teorema .....	135
20. Fazoda tekisliklarning perpendikulyarligi .....	142
21. Fazoda ortogonal proyeksiya va undan texnikada foydalanish .....	148
22. Bobni takrorlashga doir amaliy mashqlar .....	152

## V BOB

### TAKRORLASH



23. Takrorlashga doir masalalar .....	162
Geometriyaga oid asosiy ma'lumotlar .....	175



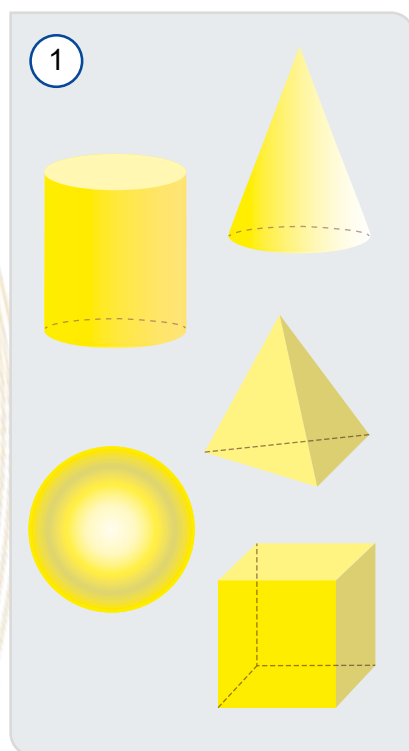
# I BOB

## PLANIMETRIYANI TIZIMLI TAKRORLASH

**Bu bobni o'rganish natijasida siz 7–9-sinflarda geometriyaning planimetriya bo'limi bo'yicha shakllantirgan quyidagi bilim va ko'nikmalaringizni mustahkamlab olasiz:**

- geometriyaning mantiqiy (aksiomatik) tuzilishi bilan tanishasiz;
- planimetriyaning asosini tashkil qilgan aksiomalar tizimini bilib olasiz;
- geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashga katta hissa qo'shgan olimlar bilan tanishasiz;
- geometriya tarixiga oid ma'lumotlar bilan tanishasiz;
- geometrik masalalar yechishning analitik, sintetik, to'g'ri va teskari, algebraik, yuzlar, vektorlar, koordinatalar hamda geometrik almashtirishlar usullari bilan tanishasiz;
- yuqoridagi usullar asosida planimetriyaga doir masalalarni yechasiz.





Geometriya asoslari misrlarga miloddan avvalgi 3-ming yillik boshlarida ma'lum bo'lgan. O'sha davrlarda, piramidalar qurilishi qizg'in pallada bo'lganida, ular bu bilimlarni faol qo'llaganlar. Olimlarning aniqlashicha, qadimgi misrlik muhandislar teng masofagagi 12 ta tugun bilan ajratilgan, uchta qoziqqa tortilgan arqon to'g'ri burchak hosil qilishini bilishgan. Ular, shuningdek, qishloq xo'jaligi ekinlarini ekish uchun Nil tekisligining hududlarini belgilab, geometrik bilimlarni qo'llashgan.

Geometriya real hayotdagi predmetlarning miqdoriy ko'rsatkichlari va fazoviy shakllarini o'rganadigan fandır. Narsalarning boshqa xossalarini boshqa fanlar o'rganadi. Agar biror narsa o'rganilayotganda uning faqat fazoviy shakli va o'lchamlari hisobga olinsa, unda *geometrik shakl* deb ataluvchi abstrakt obyektga ega bo'lamiz.

“Geometriya” yunoncha so'z bo'lib, “yer o'lchash” degan ma'noni bildiradi. Maktabda o'rganiladigan geometriya qadimgi yunon olimi Yevklid nomi bilan *Yevklid geometriyasi* deb ataladi. Geometriya ikki qismdan: *planimetriya va stereometriyadan* iborat. *Planimetriya* – tekislikdagi, *stereometriya* esa fazodagi geometrik shakllarning xossalarini o'rganadi (*1-rasm*).

Geometrik shakllarni bir-biridan farqlash uchun ularning xususiyatlari tavsiflanadi, ya'ni ularga *ta'rif* beriladi. Lekin hamma shakllarga ham ta'rif berib bo'lmaydi. Ularning dastlabki bir nechtasini ta'rifsiz qabul qilishga majburmiz. Ularni ta'riflanmaydigan, *boshlang'ich (asosiy) geometrik shakllar* deb olamiz.

Geometriyaning mantiqan qurilishi quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1. Avval asosiy (boshlang'ich) geometrik shakllar ta'rifsiz qabul qilinadi;

2. Asosiy geometrik shakllarning asosiy xossalari isbot-siz qabul qilinadi;

3. Boshqa geometrik shakllar asosiy shakllar va ularning xossalariga tayanib ta'riflanadi hamda ularning xossalari ungacha ma'lum xossalarga tayanib isbotlanadi.

Fanning bunday tuzilishi *aksiomatik tuzilish* deb nomlanadi. *Aksioma* deb to'g'riligi isbotsiz qabul qilinadigan xossaga aytiladi.

Shu chog'gacha biz o'rgangan planimetriyaning asosiy shakllari nuqta, to'g'ri chiziq va tekislik edi. Ularni ta'rifsiz qabul qildik. Kesma, nur, uchburchak va boshqa geometrik shakllarga esa ta'rif berdik. Shuningdek, quyidagi xossalarni (tasdiqlarni) isbotsiz aksioma sifatida qabul qildik:

### I. Tegishlilik aksiomalari guruhi:

1.1. Tekislikda qanday to'g'ri chiziq olinmasin, unda bu to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan nuqtalar ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud.

1.2. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi.

## II. Tartib aksiomalari guruhi:

2.1. Bir to'g'ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtaning faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.

2.2. Har bir to'g'ri chiziq tekislikni ikki bo'lakka – ikkita yarimtekislikka ajratadi.

## III. O'lchash aksiomalari guruhi:

3.1. Har qanday kesma noldan farqli tayin uzunlikka ega bo'lib, u musbat son bilan ifodalanadi. Kesma uzunligi uning ixtiyoriy nuqtasi ajratgan bo'laklari uzunliklarining yig'indisiga teng.

3.2. Har qanday burchak tayin gradus o'lchoviga ega bo'lib, uning qiymati musbat son bilan ifodalanadi. Yoyiq burchakning gradus o'lchovi  $180^\circ$  ga teng. Burchakning gradus o'lchovi burchak tomonlari orasidan o'tuvchi ixtiyoriy nur ajratgan burchaklar gradus o'lchovlarining yig'indisiga teng.

## IV. Teng shaklni qo'yish aksiomalari guruhi:

4.1. Ixtiyoriy nurga uning uchidan boshlab, berilgan kesmaga teng yagona kesmani qo'yish mumkin.

4.2. Ixtiyoriy nurdan tayin yarimtekislikka berilgan, yoyiq bo'lmagan burchakka teng yagona burchakni qo'yish mumkin.

4.3. Har qanday uchburchak uchun unga teng uchburchak mavjud va uni nurdan tayin yarimtekislikka yagona tarzda qo'yish mumkin.

## V. Parallellik aksiomasi:

5.1. Tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Biror tasdiqning to'g'riligini mantiqiy mulohazalar yordamida keltirib chiqarish *isbot* deb ataladi. To'g'riligi isbotlash yo'li bilan asoslanadigan tasdiq esa *teorema* deb ataladi. Teorema odatda *shart* va *xulosa* qismlardan iborat bo'ladi. Teoremaning birinchi – shart qismida nimalar berilgani bayon qilinadi. Ikkinchi – xulosa qismida esa nimani isbotlash lozimligi ifodalanadi.

Teoremani isbotlash – uning shartidan foydalanib bungacha isbotlangan va qabul qilingan xossalarga tayanib, mulohaza yuritib, xulosa qismida ifodalangan jumlaning to'g'riligini keltirib chiqarish. Teoremaning shart va xulosa qismlarini aniqlashtirib olish teoremani oydinlashtiradi, uni tushunish va isbotlash jarayonini yengillashtiradi.



Geometriya matematikaning muhim bo'limidir. Uning kelib chiqishi bir necha ming yillarga borib taqaladi va birinchi navbatda hunarmandchilik, madaniyat, san'at, inson mehnati va atrof-dagi dunyoni kuzatishning rivojlanishi bilan bog'liq. Buni geometrik shakllarning nomlari ham tasdiqlaydi. Masalan, "trapetsiya" atamasining nomi yunoncha "trapesiya" (kursi) so'zidan, "konus" yunoncha "konos" (qarag'ay konusi) so'zidan, "to'g'ri chiziq" esa lotincha "lynnum" (zig'ir ip) dan kelib chiqqan.





**Yevklid**  
(eramizdan avvalgi  
356-300-yillar)



Geometriyani o'rganagan eng mashhur olimlardan biri Yevklid-dir. Uning sharafiga ushbu fanning klassik sohasi "Yevklid geometriyasi" deb nomlanadi. Uning o'zi 465 ta teoremani isbotlagan. Hozirgacha bu rekord hech kim tomonidan yangilanmagan.

Yunon olimi *Aflotun* geometriyada ajoyib bir qonuniyatni payqagan: avval o'rganilgan, to'g'riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, muhohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarsa bo'lar ekan. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib qolgan xossalar teoremlar ko'rinishida ifodalanadi va aksiomalar hamda bu paytgacha to'g'riligi isbotlangan xossalarga asoslanib mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlanadi.

Mulohaza yuritish jarayonida isbotlanmagan xossalardan (garchi ularning to'g'riligi ochiq-oydin ko'rinib turgan bo'lsa ham) foydalanish taqiqlanadi.

Shunday qilib, geometriyani bir bino deb qaraydigan bo'lsak, boshlang'ich tushunchalar va aksiomalar uning poydevorini tashkil qiladi. Bu poydevor ustiga terilgan "g'ishtlar" ta'riflangan yangi tushunchalar va teoremlar ko'rinishida isbotlangan xossalardan iborat bo'ladi.

Geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashga qadimgi yunon olimlari katta hissa qo'shishgan. Masalan, *Gippokrat* geometriya asoslari haqidagi dastlabki tasavvurlarini bayon etgan. Bu soha bo'yicha asosiy ishlarni buyuk yunon olimi Yevklid amalga oshirgan. Uning asosiy asari – "Negizlar" planimetriya, stereometriya va sonlar nazariyasining ba'zi masalalarini, shuningdek, algebra, nisbatlar umumiy nazariyasi, yuz va hajmlarni hisoblash usuli hamda limitlar nazariyasi elementlarini o'z ichiga oladi. "Negizlar" da Yevklid qadimgi yunon matematikasining barcha yutuqlarini jamladi va uning rivoji uchun asos yaratdi.

"Negizlar" 13 kitobdan iborat bo'lib, bu asar eramizdan avvalgi V–IV asrlar yunon matematiklari asarlarining qayta ishlanmasidan iborat. Asarda 23 ta ta'rif, 5 ta postulat va 9 ta aksioma berilgan. Asarda to'g'ri to'rtburchak, kvadrat va aylanaga to'g'ri ta'riflar berilgan. Nuqta va chiziqqa quyidagi cha ta'riflar berilgan: "Nuqta qismlarga ega bo'lmagan narsadir"; "Chiziq eni yo'q uzunlikdir".

"Negizlar" da 9 ta aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan mulohazalar bayon etilgan. Geometrik yasashlarni amalga oshirish mumkinligini bayon etuvchi matematik mulohazalar (postulat) dan quyidagi beshtasi bayon qilingan:

I. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

II. To'g'ri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.

III. Har qanday markazdan ixtiyoriy radiusda aylana yasash mumkin.

IV. Hamma to'g'ri burchaklar o'zaro teng.

V. Bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsa, mazkur to'g'ri chiziqlar davom ettirilganda ular yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

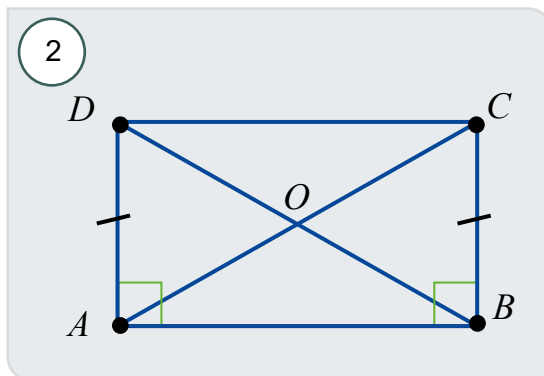
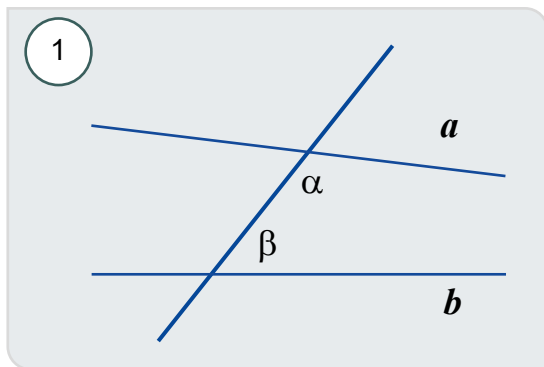
Mazkur asar ulkan va uzoq shuhratga ega bo'ldi. Ayniqsa, V postulat katta ilmiy munozaralarga sabab bo'ldi. Uni quyidagicha qayta tavsiflash mumkin: aytaylik,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarni kesuvchi kesib o'tganda hosil bo'lgan ichki bir tomonli burchaklar  $\alpha$  va  $\beta$  bo'lsin (1-rasm). U holda, agar  $\alpha + \beta < 180^\circ$  bo'lsa,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar shu burchaklar yotgan tomonda kesishadi.

Ko'rib turganingizdek, u yuqoridagi qisqa va ravshan tavsiflangan 4 ta postulatlarga o'xshamaydi. U ko'proq teorema o'xshab ketadi. Xuddi shu sabab uni postulat emas, teorema deb qarab, isbotlamoqchi bo'lganlar juda ko'p bo'lgan. Postulatni isbotlash yo'lida unga teng kuchli bir qator mulohazalar paydo bo'lgan. Masalan, ingliz matematigi *Yan Pleyferming* (1748–1819) *parallellik aksiomasi* shular jumlasidandir: tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Matematik, shoir, astronom va faylasuf *Umar Xayyom* ham bu masala bilan shug'ullangan. Xayyom "Yevklid kitobining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharhlar" nomli asarida V postulatga to'xtalgan. U Yevklidning postulati teorema ekanini isbotlash uchun pastki asosdagi ikki burchagi to'g'ri va yon tomonlari teng bo'lgan to'rtburchakni qaragan (2-rasm). Bu to'rtburchakning pastki ikki burchagi to'g'ri bo'lsa, yuqoridagi ikki burchagi ham to'g'ri bo'lishi lozim degan xulosaga kelgan. Umar Xayyom: "Bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqning ikkala tomonida ham kesisha olmaydi-ku", – deydi. Bu bilan Umar Xayyom V postulat masalasiga oydinlik kiritishiga bir qadam qolgan. Umar Xayyomning bu ishlaridan bexabar italiyalik matematik J. Sakkeri (1667–1733) ham V postulat bilan shug'ullanib, yuqoridagi to'rtburchakka murojaat qilgan. Geometriya asoslariga bu to'g'ri to'rtburchak *Xayyom-Sakkeri to'rtbur-*



**Umar Xayyom**  
(1048–1131)





**N. I. Lobachevskiy  
(1792–1856)**



Miloddan avvalgi 5-asrda geometriyaning rivojlanishida hal qiluvchi buri-lish yuz bergan. U Milet shahrida tugʻilib ijod qilgan Fales nomi bilan bogʻliq. Asli savdogar boʻlgan Fales boʻsh vaqtlarida matematika bilan shugʻullangan va u matematika tarixidagi eng katta kashfiyotni amalga oshirgan: U koʻplab geometrik qonuniyatlarni tajriba bilan emas, balki fikrlash (isbot) bilan ham olish mumkinligini aniqladi. U shunga asoslanib, qator teoremlarni isbotlagan. 3-asrga kelib geometriya oʻz aksiomalari (dastlabki xossalari)ga ega boʻlgan va boshqa barcha xossalar (teoremlar) isbot yordamida oʻrnatiladigan fanga aylangan. Falesning fikriga koʻra, Yevdoks, Yevklid va Arximed geometriyaning rivojlanishiga katta hissa qoʻshgan.

*chagi* nomi bilan kirgan.

Bu muammoni rus matematigi *Nikolay Ivanovich Lobachevskiy* (1792–1856) hal qildi va noyevklid geometriyasini yaratdi. Lobachevskiy birinchi marta Yevklidning V postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bogʻliq emasligini isbotladi. Bu geometriya Yevklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama-qarshilikka (ziddiyat) duch kelishi lozim edi, chunki ikkita geometriyaning bir vaqtda mavjud boʻlishi mumkin emas edi. Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqaraverdi, ular mantiqiy qarama-qarshiliklarga uchramadi. Yangi geometriya va Yevklid geometriyasida birinchi toʻrtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari *absolyut geometriya* deb atala boshladi.

Lekin noyevklid (Lobachevskiy) geometriyasi Yevklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yigʻindisi  $\pi$  dan kichik, unda oʻxshash yoki teng boʻlmagan uchburchaklar mavjud emas; berilgan toʻgʻri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar toʻplami toʻgʻri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va hokazo.

Noyevklid geometriyasini yaratishga venger matematigi *Yanosh Boyyai* (1802–1860) va nemis matematigi *Karl Fridrix Gauss* (1777–1855) katta hissa qoʻshdi. Shuningdek, italyan matematigi *Eugenio Beltrami* (1835–1900) va nemis matematigi *Bernhard Riman* (1826–1866) yangi geometriya tavsifi boʻyicha katta ishlar qildi.

Yevklid boshlab bergan aksiomatika maʼlum maʼnoda nemis matematigi *David Hilbert* (1862–1943) va rus matematigi *Veniamin Fyodorovich Kagan* (1859–1953) ishlarida oxiriga yetkazildi.





## Mavzuga doir savol va topshiriqlar

1. Geometriya aksiomalari sistemasini bayon etgan Yevklid haqida nimalarni bilasiz?
2. Yevklidning “Negizlar” asari haqida gapirib bering.
3. Ta’rif nima? Tekislikda qaysi shakllar asosiy (boshlang’ich) shakllar sifatida ta’rifsiz qabul qilingan?
4. Teorema va aksioma bir-biridan nimasi bilan farq qiladi?
5. Planimetriya aksiomalarini sanang va sharhlang.
6. Geometriya fani qanday tuzilgan?
7. Yevklidning V postulati nima haqida va uni nima uchun isbotlashga uringanlar?
8. V postuladni isbotlashga uringan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.
9. Lobachevskiy yangi geometriyaning yaratilishiga qanday hissa qo’shgan?
10. Noyevklid geometriyasini yaratgan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.



## Amaliy mashq va tatbiqlar

- 1.1.** Maktab geometriya kursida quyidagi geometrik shakllarning qaysilari ta’rifsiz qabul qilingan (asosiy) va qaysilariga ta’rif berilgan?
- a) nuqta                      b) burchak                      c) tekislik  
d) kesma                      e) nur                              f) to’g’ri chiziq  
g) uchburchak    h) o’tkir burchak
- 1.2.** Maktab geometriya kursida geometrik shakllarning quyidagi xossalardan qaysilari aksioma (ya’ni isbotsiz qabul qilingan) va qaysilari teorema (ya’ni ularning to’g’riligi isbotlab ko’rsatilishi shart) sifatida keltirilgan?
- a) Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to’g’ri chiziq o’tadi.  
b) Qo’shni burchaklar yig’indisi  $180^\circ$  ga teng.  
c) Uchburchak ichki burchaklari yig’indisi  $180^\circ$  ga teng.  
d) Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo’linadi.  
e) Bir to’g’ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtaning faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.  
f) Tekislikda to’g’ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to’g’ri chiziqqa faqat bitta parallel to’g’ri chiziq o’tkazish mumkin.
- 1.3.** Quyidagi jummalarni o’qing. Jumla to’g’ri bo’lsa, “+”, no-to’g’ri bo’lsa, “-” belgisini yonidagi katakka yozing.

1	Planimetriya tekislikdagi, stereometriya esa fazodagi geometrik shakllarning xossalarini o'rganadi.	
2	Boshlang'ich (asosiy) geometrik shakllar ta'rifsiz qabul qilinadi.	
3	Tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa istalgancha parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.	
4	Yevklid o'zining "Negizlar" asarida geometriyaga oid barcha yutuqlarini jamlab, uning rivojiga ulkan hissa qo'shgan.	

**1.4.** Geometriya fani rivojiga kim qanday hissa qo'shgan? Quyidagi jadvalning birinchi ustunida keltirilgan olimlar nomlariga ikkinchi ustundagi ta'riflardan mosini tanlab, qo'ying.

Umar Xayyom	Noyevklid geometriyasini yaratgan.
N. I. Lobachevskiy	Yevklidning V postulatiga aniqlik kiritish bo'yicha tadqiqotlar olib borgan.
Bernhard Riman	Geometriyani fan sifatida tavsiflagan.
Yevklid	Noyevklid geometriyasini tavsiflashda katta ishlar qilgan.

**1.5.** Quyidagi tasdiqlarning qaysi birini V postulat sifatida Yevklid tavsiflagan? Ularning qaysilari bu postulatga teng kuchli hisoblanadi?

A. Bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsa, mazkur to'g'ri chiziqlar davom ettirilganda, ular yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

B.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarni kesuvchi kesib o'tganda hosil bo'lgan ichki bir tomonli  $\alpha$  va  $\beta$  burchaklar uchun  $\alpha + \beta < 180^\circ$  bo'lsa, u holda berilgan to'g'ri chiziqlar shu burchaklar yotgan tomonda kesishadi.

C. Tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

D. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

**1.6\*.** "Xayyom-Sakkeri to'rtburchagi", ya'ni pastki asosidagi ikki burchagi to'g'ri va yon tomonlari teng bo'lgan to'rtburchak (2-rasm) berilgan. Bu to'rtburchakning yuqoridagi ikki burchagi ham to'g'ri bo'lishini parallellik aksiomasidan foydalanmasdan isbotlashga urinib ko'ring. Buning iloji bormi? Nega?



Yuqorida ta'kidlaganimizdek, geometriyaning eng ajoyib xususiyati bu avval o'rganilgan, to'g'riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarish mumkinligidir. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib boshqa xossalarni teoremlar yoki masalalar ko'rinishida ifodalangan va aksiomalar hamda shu paytgacha to'g'riligi isbotlangan xossalarga asoslanib mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlangan. Shu zaylda matematik yoki geometrik masalalar vujudga kelgan.

Matematik masalada nimalardir (shartlar) berilgan bo'ladi. Ulardan foydalanib nimanidir topish (hisoblash) yoki isbotlash, yoki yasash talab qilinadi. Qo'yilgan talabni bajarish masalani yechishni bildiradi.

Geometrik masalalar qo'yilgan talabga ko'ra hisoblashga, isbotlashga, tadqiq qilishga va yasashga doir masalalarga bo'linadi.

Matematik masalani yechish uchun quruq nazariyani bilish yetarli emas. Masala yechish ko'nikmasiga va tajribasiga ham ega bo'lish talab qilinadi. Bunday ko'nikmaga sodda masalalardan boshlash va borgan sari murakkabroq masalalarni yechish orqali erishiladi. Shuningdek, masalalarni yechishning turli xil usullari bor bo'lib, ularni faqat ko'p masala yechish orqali o'zlashtirish mumkin. Har bir usul muayyan turkumga tegishli masalalarni yechish uchun qo'llanadi. Qancha ko'p usul o'zlashtirilsa, shuncha masala yechish ko'nikmasi shakllanadi.

Quyida geometrik masalalarni yechishning ba'zi muhim usullari ustida to'xtalamiz.

Masala yechish usullari tuzilishiga ko'ra sintetik, analitik, teskarisidan faraz qilish va hokazo turlarga bo'linadi. Matematik apparatning qo'llanishiga ko'ra esa algebraik, vektorli, koordinatali, yuzlar usuli, o'xshashlik usuli, geometrik almashtirishlar kabi turlarga bo'linadi.

**Sintetik usulda** masala shartida berilganlardan foydalanib mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjirining eng oxirgi bo'lagi masala talabi bilan ustma-ust tushguncha davom ettiriladi.

**1-misol.** To'g'ri to'rtburchak burchagining bissektrisasi uning tomonini  $7\text{ cm}$  va  $9\text{ cm}$  uzunlikdagi kesmalarga bo'ladi (*1-rasm*). To'g'ri to'rtburchak perimetrini toping.

**Yechish.** Aytaylik  $ABCD$  – to'g'ri to'rtburchak,  $AK$



Aksiomatik qurilish jihatidan har xil geometriyalar mavjud va ularning hammasida ham uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi  $180^\circ$  ga teng emas. Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi  $180^\circ$  dan kichik, Riman geometriyasida esa  $180^\circ$  dan katta.

bissektrisa,  $K \in BC$ ,  $BK = 7 \text{ cm}$ ,  $KC = 9 \text{ cm}$  (yoki  $BK = 9 \text{ cm}$ ,  $KC = 7 \text{ cm}$ ) bo'lsin.

1.  $BC \parallel AD$  va  $AK$  kesuvchi bo'lgani uchun:

$$\angle 1 = \angle 2 \quad (1)$$

bo'ladi, chunki bu burchaklar ichki almashinuvchi burchaklardir.

2.  $AK$  – bissektrisa:  $\angle 2 = \angle 3$  (2)

3. Unda (1) va (2) ga kora,  $\angle 1 = \angle 3$ ;

4. U holda  $ABK$  teng yonli uchburchak va  $AB = BK$

5. Bu natijadan foydalanib hisoblashlarni amalga oshiramiz:

1-holda:  $AB = BK = 7 \text{ cm}$ .

$$P = 2(AB + BC) = 2(7 + 16) = 46 \text{ (cm)}.$$

2-holda:  $AB = BK = 9 \text{ cm}$ .

$$P = 2(AB + BC) = 2(9 + 16) = 50 \text{ (cm)}.$$

Bu masala tayanch masalalar qatoriga kiradi, chunki ko'pgina masalalar xuddi shu g'oya atrofida quriladi. Parallelogramm va trapetsiya burchagining bissektrisasi bu shakllar tekisligidan teng yonli uchburchak kesib oladi. Bunday tayanch faktlarni doim yodda tutish kerak. Ular boshqa masalalarni yechayotganda juda qo'l keladi.

**Analistik usulda** teorema (masala)ning xulosa qismidan kelib chiqib, oldindan ma'lum tasdiqlardan foydalanib mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjirining eng oxirgi bo'lagi masala shartining natijasi ekanini aniqlaguncha davom ettiriladi.

**2-misol.** Ixtiyoriy to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari bo'lishini isbotlang.

**Isbot.** Aytaylik  $ABCD$  – to'rtburchak (2-rasm),  $AK = KB$ ,  $BL = LC$ ,  $CQ = QD$ ,  $AP = PD$  bo'lsin.

To'rtburchakning  $AC$  va  $BD$  diagonalini o'tkazamiz.

1.  $\triangle ABC$  da  $KL$  – o'rta chiziq:  $KL \parallel AC$  (1).

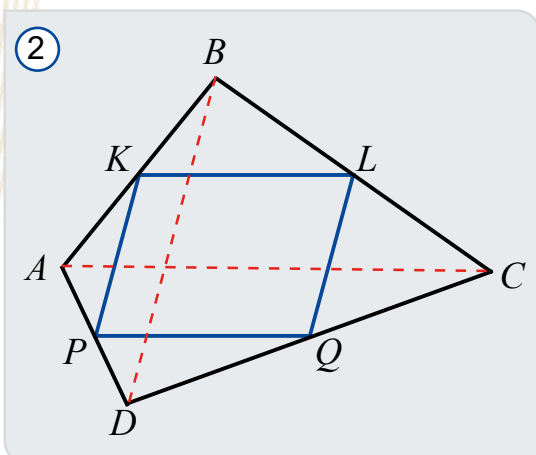
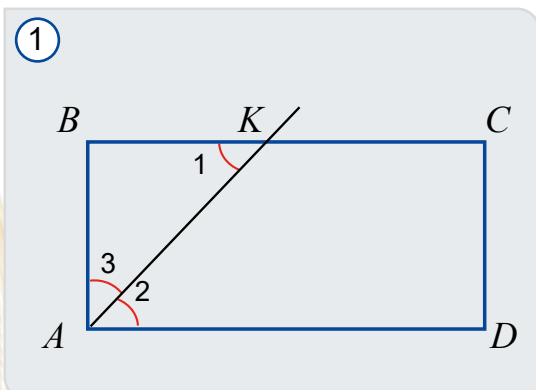
2.  $\triangle ADC$  da  $PQ$  – o'rta chiziq:  $PQ \parallel AC$  (2).

3. (1) va (2) dan:  $KL \parallel PQ$  (3).

4. Yuqoridagiga o'xshash:  $KP \parallel LQ$  (4).

5. (3) va (4) dan:  $KLQP$  – parallelogramm.

Yuqorida ko'rilgan sintetik va analitik usullar **to'g'ri usullar** deb ham ataladi. Masalani to'g'ri usullar bilan yechayotganda avval masala mazmuni tahlil qilinadi. Tahlil natijasiga ko'ra usul tanla-



nadi. Shundan so'ng rasm ko'rinishida masalani yechish modeli (chizmasi) tuziladi va chizma ustida mulohaza yuritiladi. Shu tariqa mulohazalar yuritib, masalaning shartidan uning xulosa qismiga qarab borilaveradi.

Masala yechishning teskari usuli ham mavjud. U bilan ko'p marta duch kelganmiz. U *teskarisini faraz qilib isbotlash usuli* deb ataladi. Bu usulni qo'llash algoritmini keltiramiz.

### Teskarisini faraz qilib isbotlash usulini qo'llash algoritmi

<b>Teorema (to'g'ri tasdiq)</b>	<b>Agar <math>A</math> o'rinli bo'lsa, <math>B</math> o'rinli bo'ladi.</b> ( $A$ va $B$ qandaydir fikrlar)
<b>Isbot.</b>	
<b>Teskarisini faraz qilamiz:</b>	Teoremda keltirilgan tasdiqning teskarisini faraz qilamiz, ya'ni teoremaning sharti bajarilsin-u, lekin xulosasi o'rinli bo'lmasin: <b>Agar <math>A</math> o'rinli bo'lsa, <math>B</math> o'rinli bo'lmaydi.</b>
<b>Mulohaza yuritamiz:</b>	To'g'riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarga tayanib mantiqiy mulohaza yuritamiz.
<b>Ziddiyatga kelamiz:</b>	To'g'riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarning biriga zid bo'lgan tasdiqqa duch kelib qolamiz.
<b>Xulosa chiqaramiz:</b>	Demak, farazimiz noto'g'ri, ya'ni berilgan teorema to'g'ri ekan.
<b>Teorema isbotlandi.</b>	

**3-misol.** Agar ikki to'g'ri chiziqning har biri uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.

Aytaylik,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, ularning har biri uchinchi –  $c$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. Teoremani teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz.

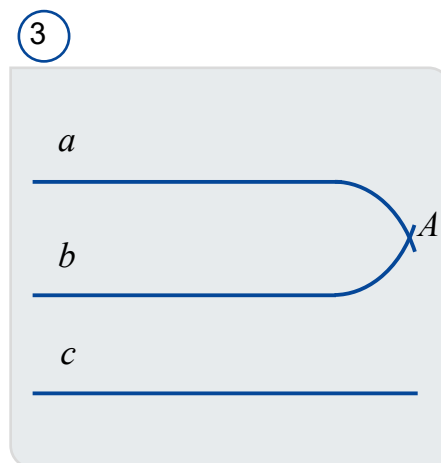
**Isbot.** Teskarisini faraz qilamiz:  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqning har biri uchinchi –  $c$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin-u, ular o'zaro parallel bo'lmasin, ya'ni biror  $A$  nuqtada kesishsin (*3-rasmga qarang*).

Unda  $A$  nuqtadan  $c$  to'g'ri chiziqqa ikkita –  $a$  va  $b$  parallel to'g'ri chiziqlar o'tmoqda. Bu parallellik aksiomasiga zid. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi. Ya'ni  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqning har biri uchinchi –  $c$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Mazkur usul quyidagi mantiq qonuniga asoslangan: bir-biriga zid ikki tasdiqning faqat bittasi rost, ikkinchisi esa yolg'on bo'ladi, uchinchi holat bo'lishi mumkin emas.

Endi geometrik masalalarni yechishning boshqa usullariga to'xtalamiz.





Yevklid geometriyasida berilgan to'g'ri chiziqda yotmaydigan har qanday nuqta orqali faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Ammo Lobachevskiyning geometriyasida kamida ikkitasini o'tkazish mumkin.

### Algebraik usul

Geometrik masalani algebraik usul bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko'rish maqsadga muvofiq bo'ladi:

- 1) masala mazmunini tahlil qilish va uning chizma modelini qurish;
- 2) noma'lumni harflar bilan belgilash;
- 3) masala shartini ifodalovchi tenglama yoki tenglamalar sistemasini tuzish;
- 4) tuzilgan tenglama yoki tenglamalar sistemasini yechish;
- 5) topilgan yechimni tahlil qilish;
- 6) javobni yozish.

**4-misol.** To'g'ri burchakli uchburchakning perimetri 36 cm ga teng. Gipotenuzaning katetga nisbati 5 : 3. Uchburchak tomonlarini toping.

Aytaylik,  $\triangle ABC$  berilgan bo'lib, unda  $\angle C = 90^\circ$ ,  $P = 36$  cm,  $AB : AC = 5 : 3$  bo'lsin.

**Yechish.** Proporsionallik koeffitsiyentini  $k$  bilan belgilaymiz.

Unda:  $AB = 5k$ ,  $AC = 3k$ .

Pifagor teoremasiga ko'ra:  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  yoki  $25k^2 = 9k^2 + BC^2$ .

Bundan  $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$ .

Shartga ko'ra:

$P = 36$  cm;  $AB + AC + BC = P$ ;  $5k + 3k + 4k = 36$ ;  $k = 3$ ;  
 $AB = 5k = 15$ (cm),  $AC = 3k = 9$ (cm),  $BC = 4k = 12$ (cm).

**Javob:** 15 cm, 9 cm, 12 cm.

### Yuzlar usuli

Ba'zi geometrik masalalarni yechishda yuzlarni hisoblash formulalaridan foydalanish kutilgan natijani tezda beradi. Bu holatda topish talab qilingan noma'lum, masaladagi yordamchi shakllarning yuzlarini tenglashtirish natijasida hosil qilingan tenglamadan topiladi. Buni quyidagi misolda namoyish qilamiz.

**5-misol.** Uchburchakning tomonlari 13 cm, 14 cm va 15 cm. Uzunligi 14 ga teng tomonga tushirilgan balandlikni toping.

**Yechish.** Aytaylik,  $\triangle ABC$  berilgan bo'lib, unda  $a < b$  va  $b < c$ , ya'ni  $a = 13$  cm,  $b = 14$  cm,  $c = 15$  cm hamda  $h_b$  – izlanayotgan balandlik bo'lsin.

Geron formulasigako'ra:  $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$  (cm<sup>2</sup>)

Boshqa formula bo'yicha:  $S_{\triangle} = \frac{1}{2}bh_b$  ga egamiz.



Unda  $\frac{1}{2}bh_b = 84$  yoki  $h_b = \frac{84}{2b} = \frac{84}{2 \cdot 14} = 12$ ,  $h_b = 12$  (cm).

**Javob:** 12 cm.

**Vektorlar usuli**

Geometrik masalani vektorlar usuli bilan yechish uchun quyidagi algoritm asosida ish ko'rish maqsadga muvofiq bo'ladi.

1) Masalani vektorlar tiliga o'girish, ya'ni masaladagi ba'zi kattaliklarga vektor sifatida qarab, ularga doir vektorli tenglamalar tuzish;

2) Vektorlarning ma'lum xossalari bilan foydalanib vektorli tenglamalarning shaklini almashtirish va no-ma'lumni topish;

3) Vektorlar tilidan geometriya tiliga qaytish;

4) Javobni yozish.

Vektor usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo'ladi:

a) to'g'ri chiziqlar (kesmalar)ning parallelligini aniqlash (isbotlash);

b) kesmalarni berilgan nisbatda bo'lish;

c) uchta nuqtaning bitta to'g'ri chiziqda yotishini ko'rsatish;

d) to'rtburchakning parallelogramm (romb, trapetsiya, kvadrat, to'g'ri to'rtburchak) ekanini ko'rsatish.

**6-misol.** Qavariq to'rtburchakning tomonlari o'rtalari parallelogramm uchlari bo'lishini isbotlang.

Aytaylik,  $ABCD$  to'rtburchak berilgan bo'lib, unda  $AK = KB$ ,  $BL = LC$ ,  $CQ = QD$ ,  $AP = PD$  bo'lsin (4-rasm).

**Isbot.** 1. Berilgan kesmalarni mos ravishda  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $DC$ ,  $AD$ ,  $KL$ ,  $PQ$ ,  $BL$ ,  $KB$  vektorlar bilan almashtirib, masalani vektor tiliga o'tkazamiz.

2. Vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasidan foydalanamiz:

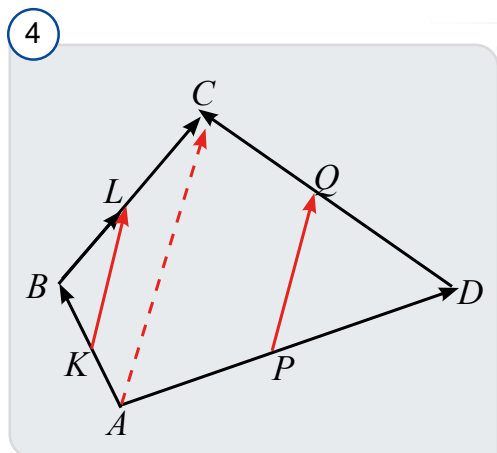
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL}; \quad \overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

va  $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$  ekanidan foydalanib

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

Shunga o'xshash  $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$  bo'ladi.

3.  $KL = PQ$ , ya'ni bu vektorlar bir xil yo'nalgan va uzunliklari teng. Bu  $KLQP$  to'rtburchak parallelogramm ekanini anglatadi.





### Koordinatalar usuli

Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko'rish maqsadga muvofiq bo'ladi:

- 1) masala mazmunini tahlil qilish va uni koordinatalar tiliga o'girish;
- 2) ifodalarning shaklini almashtirish va qiymatini hisoblash;
- 3) natijani geometriya tiliga o'girish;
- 4) javobni yozish.

Koordinatalar usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo'ladi: a) nuqtalarning geometrik o'rnini topish; b) geometrik shakllarning chiziqli elementlari orasidagi bog'lanishlarni isbotlash.

Koordinatalar usuli bilan masala yechayotganda koordinatalar boshini to'g'ri tanlash muhimdir. Berilgan shaklni koordinatalar tekisligiga shunday joylashtirish kerakki, imkoni boricha nuqtalarning koordinatalari nolga yoki bir xil songa teng bo'lsin.

**7-misol.** Diagonallari teng parallelogrammning to'g'ri to'rtburchak bo'lishini isbotlang.

**Isbot.** Koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, parallelogrammning uchlari quyidagi koordinatalarga ega bo'lsin (5-rasmga qarang):

$A(0;0)$ ,  $B(b;c)$ ,  $C(a+b;c)$ ,  $D(a;0)$ ,  
bu yerda  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c > 0$ .

$A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  nuqtalar orasidagi masofalarni ularning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}$$

$$BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

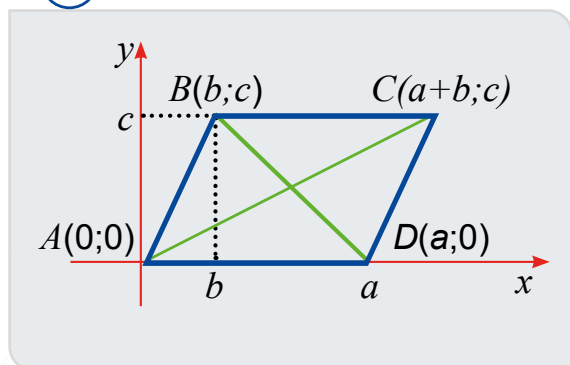
$$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$$

Bundan  $4ab = 0$ .

Lekin  $a > 0$ , unda  $b = 0$ . Bu esa o'z navbatida  $B(b;c)$  nuqta  $Oy$  o'qida yotishini anglatadi. Shuning uchun  $BAD$  to'g'ri burchak bo'ladi.

Bundan  $ABCD$  parallelogramm to'g'ri to'rtburchak ekani kelib chiqadi.

5



### Geometrik almashtirishlar usuli

Geometrik almashtirishlar usuliga burish, simmetrik akslantirishlar, parallel ko'chirish va gomotetiya kabi almashtirishlarga asoslangan usullar kiradi. Geometrik almashtirishlar yordamida masalalarni yechish jarayonida berilgan geometrik shakllar bilan bir qatorda yangi, qo'llangan geometrik almashtirish yordamida hosil qilingan shakllarga ham qaraladi. Yangi shakllarning xossalari aniqlanadi va berilgan shaklga o'tkaziladi. Shundan so'ng masalani yechish yo'li topiladi. Yuqorida keltirilgan geometrik shakllarning xossalariga asoslanadigan barcha usullar bitta umumiy nom bilan **geometrik usullar** deb aytiladi.

#### Muhim eslatma!

*Bu bo'limdagi joy olgan materiallar planimetriyani takrorlash uchun keltirilgan. Takrorlash uchun masalalar keragidan ortiq berilmoqda. Ularning barchasini sinfda ko'rishning imkoni bo'lmasligi mumkin. Shuning uchun ularni mustaqil yechib chiqishni maslahat beramiz. Bu 10-sinfda geometriyani o'rganishni muvaffaqiyatli davom ettirishingizga zamin yaratadi.*



#### Mavzuga doir savollar

1. Matematik masala deganda nimani tushunasiz?
2. Geometrik masalaning qanday turlarini bilasiz?
3. Masala yechishning qanday usullarini bilasiz?
4. Geometrik masalani yechishning sintetik, analitik usullari haqida gapirib bering.
5. Masala yechishning to'g'ri va teskari usullari haqida nima bilasiz?
6. Teskarisidan faraz qilib isbotlash usulining mohiyati nimada?
7. Geometrik masalani algebraik usulda yechish algoritmini tushuntirib bering.
8. Geometrik masalani vektor usulida yechish algoritmini tushuntirib bering.
9. Vektor usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?
10. Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechish algoritmini tushuntirib bering.
11. Koordinatalar usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?
12. Geometrik almashtirishlar usulini tushuntirib bering.



Mashhur olim va ixtirochi Arximed geometriyani dunyodagi eng muhim fan deb hisoblagan. Geometriya dunyoning barcha qoidalarini tushuntirib bera oladi, deb ishongan va o'zining geometrik bilimlari tufayli o'z davridan oldinroq bo'lgan ko'plab mexanizmlarni ixtiro qilgan.



## Amaliy mashqlar

2.1. 1-rasmdan foydalanib to'g'ri matematik tasdiqni toping.

- A)  $A \in a$     B)  $K \notin a$     C)  $C \in a$     D)  $M \notin a$

2.2. Bitta to'g'ri chiziqda  $A, B, C$  nuqtalar shunday tanlanganki,  $AB = 2,7 \text{ dm}$ ,  $BC = 1,3 \text{ dm}$ ,  $AC = 1,3 \text{ dm}$ . Bitta nuqtaning qolgan ikkitasi orasida yotishi haqidagi to'g'ri tasdiqni aniqlang.

- A)  $A \in BC$     B)  $B \in AC$     C)  $C \in AB$     D)  $C \notin AB$ .

2.3.  $AC$  kesma  $BC$  kesmadan uch marta uzun. Bu munosabat ko'rsatilgan ikkita bandni aniqlang.

- A)  $AC = 3BC$     B)  $3AC = BC$     C)  $AC + BC = 4AC$     D)  $BC = \frac{1}{3}AC$

2.4.  $AC$  kesma  $BC$  kesmadan  $2 \text{ cm}$  ga qisqa. Shu munosabat ko'rsatilgan ikkita bandni aniqlang.

- A)  $AC - BC = 3 \text{ cm}$ ;                      B)  $BC - AC = 2 \text{ cm}$   
C)  $AC - 2 \text{ cm} = BC$ ;                      D)  $AC + 2 \text{ cm} = BC$

2.5.  $A, B, C$  nuqtalarning qaysi biri qolgan ikkitasining orasida yotgan javobni aniqlang.

- A)  $AC = 3$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 5$                       D)  $AC = 9 \text{ mm}$ ,  $BC = 21 \text{ mm}$ ,  $AB = 12 \text{ mm}$   
B)  $AC = 7$ ,  $BC = 12$ ,  $AB = 19$                       E)  $AC = 21 \text{ m}$ ,  $BC = 37 \text{ m}$ ,  $AB = 16 \text{ m}$   
C)  $AC = 27 \text{ m}$ ,  $BC = 5 \text{ m}$ ,  $AB = 22 \text{ m}$                       F)  $BC = 18 \text{ dm}$ ,  $AC = 33 \text{ dm}$ ,  $AB = 15 \text{ dm}$

2.6.  $AB$  kesmani  $O$  nuqta uzunligi  $18 \text{ cm}$  va  $14 \text{ cm}$  bo'lgan bo'laklarga bo'ladi. Agar  $K$  va  $M$  nuqtalar  $AO$  va  $BO$  kesmalarining o'rtasi bo'lsa,  $KM$  kesma uzunligini toping.

2.7. Uzunligi  $48 \text{ dm}$  bo'lgan kesmada  $O$  nuqta belgilangan. Agar  $AO : BO = 3 : 5$  bo'lsa,  $AO$  va  $BO$  kesmalarining uzunliklarini toping.

2.8.  $A, B, C, M$  nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotadi va  $AC = 12 \text{ m}$ ,  $CB = 5 \text{ m}$ ,  $M$  esa  $AC$  kesmaning o'rtasi.  $MB$  kesma uzunligini toping.

2.9.  $\angle KOC = 153^\circ$ .  $OM$  nur burchak tomonlari orasidan o'tadi. Agar  $\angle KOM = 2MOC$  bo'lsa,  $KOM$  va  $MOC$  burchaklarni toping.

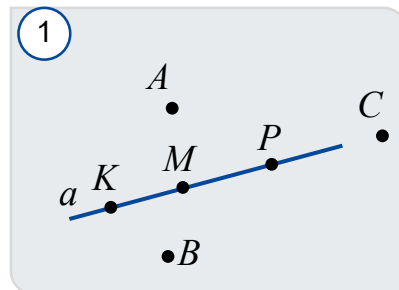
2.10\*. Uzunligi  $75 \text{ cm}$  bo'lgan  $AB$  kesmada  $M$  va  $K$  nuqtalar belgilangan. Bunda  $N \in AK$ ,  $K \in NB$ . Shuningdek,  $AN$  kesma  $NK$  kesmadan  $5 \text{ cm}$  uzun,  $KB$  esa  $AN$  dan 2 marta uzun. Hosil bo'lgan 5 ta kesma uzunliklarini toping.

2.11\*. Burchak tomonlari orasidan o'tgan nur uni ikkita burchakka ajratadi. Bu burchaklar bissektrisalari orasidagi burchak berilgan burchakdan 2 marta kichik ekanini isbotlang.

2.12\*.  $a, b, c$  va  $d$  to'g'ri chiziqlar berilgan. Ularning har uchasi bitta nuqtada kesishadi. Barcha to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtadan o'tishini isbotlang.

2.13. Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan to'rtta burchak hosil bo'ldi (2-rasm). Quyida keltirilgan jadvalda har bir shart (A-E) ga undan kelib chiquvchi xulosa (1-5) ni mos qo'ying.

- A)  $\angle 1 = \angle 3$                       1)  $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$   
B)  $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$                       2)  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$   
C)  $\angle 1 = \angle 2 + 90^\circ$                       3)  $\angle 1$  va  $\angle 4$  – qo'shni  
D)  $\angle 2 + \angle 4 = 260^\circ$                       4)  $\angle 1$  va  $\angle 3$  – o'tkir  
E)  $\angle 3 = 90^\circ$ .                      5)  $\angle 2$  va  $\angle 4$  – vertikal



A	
B	
C	
D	
E	

2.14. Quyida ba'zi burchaklarning gradus o'lchovlari (1–7) berilgan. Ulardan qaysi juftlari qo'shni bo'lishi mumkinligini aniqlang.

- 1)  $18^\circ$  2)  $72^\circ$  3)  $128^\circ$  4)  $62^\circ$  5)  $28^\circ$  6)  $108^\circ$  7)  $38^\circ$

- A) 1 va 2 B) 2 va 6 C) 3 va 4 D) 1 va 7 E) 2 va 5

2.15. Agar 2-rasmda  $\angle 1 = \angle 7$  bo'lsa, to'g'ri tasdiqni toping.

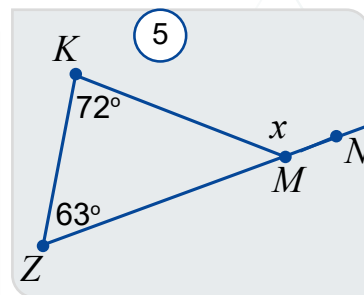
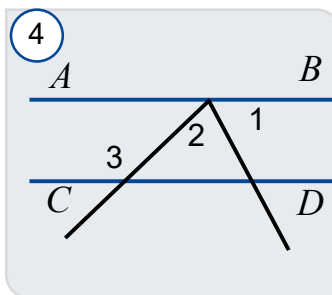
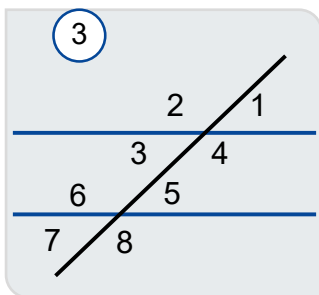
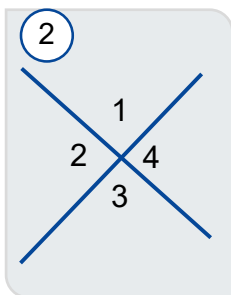
- A)  $a \parallel b$ ; B)  $a \perp b$ ; C)  $a$  va  $b$  kesishmaydi;

2.16. Agar 3-rasmda  $CD \parallel AB$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  va  $\angle 2 = 72^\circ$  bo'lsa,  $\angle 3 = ?$

- A)  $72^\circ$  B)  $144^\circ$  C)  $108^\circ$  D)  $36^\circ$  E)  $124^\circ$

2.17. Agar teng yonli uchburchak burchaklari 3:4:3 nisbatda bo'lsa, uning uchining bissektrisasi va yon tomoni orasidagi burchakni toping.

- A)  $18^\circ$  B)  $36^\circ$  C)  $72^\circ$  D)  $60^\circ$  E)  $30^\circ$



2.18. 5-rasmda tasvirlangan  $KMZ$  uchburchak burchagiga tashqi bo'lgan  $KMN$  burchakning gradus o'lchovini toping.

- A)  $135^\circ$  B)  $108^\circ$  C)  $45^\circ$  D)  $125^\circ$  E)  $117^\circ$

2.19. To'g'ri tengliklarni aniqlang (6-rasm).

- A)  $\triangle ABO = \triangle OCD$  B)  $BA = CD$  C)  $\triangle ABO = \triangle COD$   
 D)  $\angle AOB = \angle DOC$  E)  $\angle BAO = \angle DCO$  F)  $\angle BAO = \angle CDO$

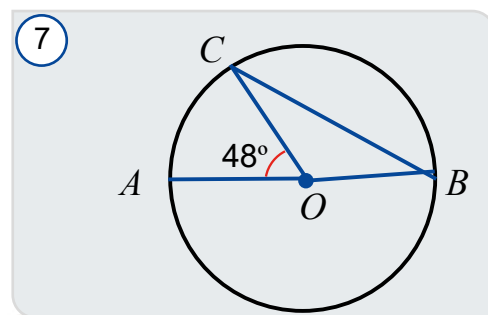
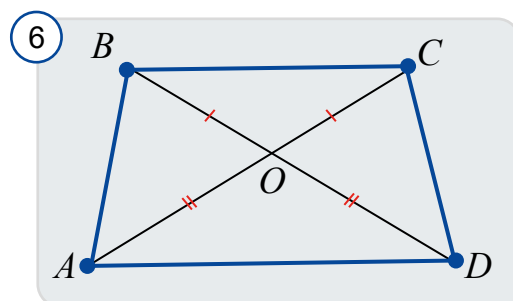
2.20. 7-rasmdagi  $BOC$  uchburchak burchaklarini toping.

- A)  $48^\circ, 48^\circ, 84^\circ$  B)  $24^\circ, 132^\circ, 24^\circ$   
 C)  $132^\circ, 48^\circ, 48^\circ$  D)  $42^\circ, 90^\circ, 48^\circ$  E)  $48^\circ, 32^\circ, 20^\circ$

2.21. Har bir oltiburchakning perimetri (A–E)ga unga tashqi chizilgan aylana radiusi (1–5) dan mosini qo'ying va jadvalni to'ldiring.

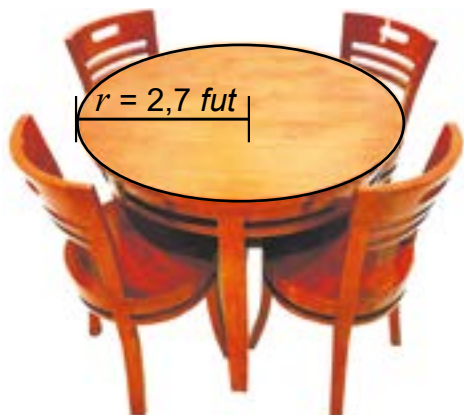
- A)  $P = 42 \text{ cm}$  1)  $R = 2 \text{ cm}$   
 B)  $P = 12 \text{ cm}$  2)  $R = 8 \text{ cm}$   
 C)  $P = 84 \text{ cm}$  3)  $R = 6 \text{ cm}$   
 D)  $P = 48 \text{ cm}$  4)  $R = 14 \text{ cm}$   
 E)  $P = 36 \text{ cm}$  5)  $R = 7 \text{ cm}$

A	
B	
C	
D	
E	



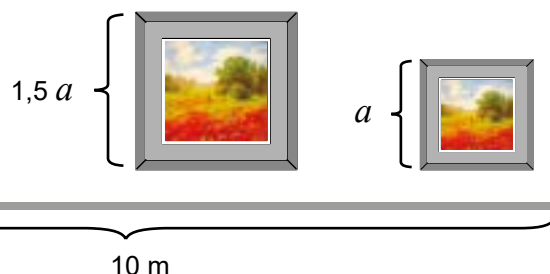
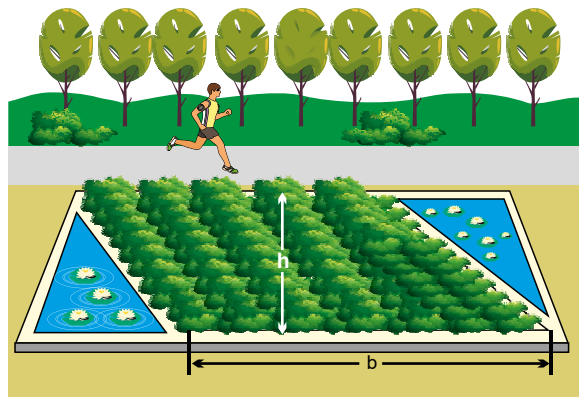


**2.22.** Doira shaklidagi stol sirtining yuzini toping (1 fut = 30,48 cm).

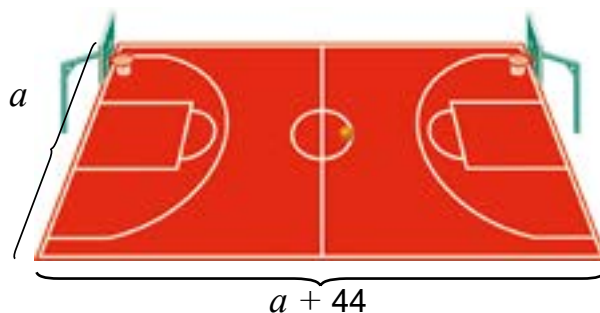
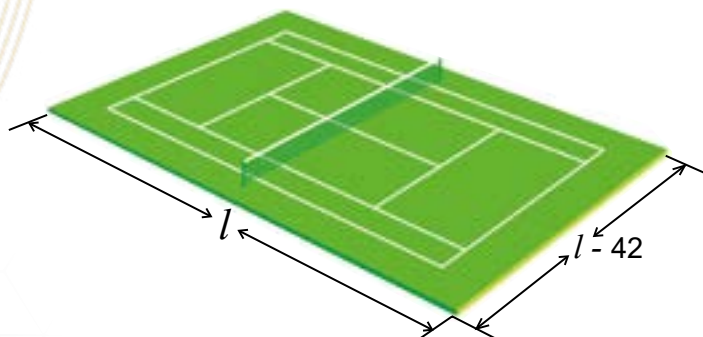


**2.24.** Kvadrat shaklidagi romlar uchun 10 m reyka ishlatilgan bo'lsa, har bir rom o'lchamlarini toping.

**2.23.** Agar  $h = 3 m$  va  $b = 6 m$  bo'lsa, rasmdagi gulzor yuzini toping.



**2.25.** Basketbol maydonining perimetri 288 fut, bo'yi esa enidan 44 fut uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini metrlarda toping (1 fut = 30,48 cm).



**2.26.** Tennis kortining perimetri 288 fut, bo'yi esa enidan 42 fut uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini metrlarda toping. (1 fut = 30,48 cm).

**2.27.** Avtomobillar to'xtash joyidagi teng yonli uchburchak shaklidagi maydonchanning yuzi  $288 \text{ fut}^2$  va asosi 16 fut bo'lsa, uning balandligini toping (1 fut = 30,48 cm).

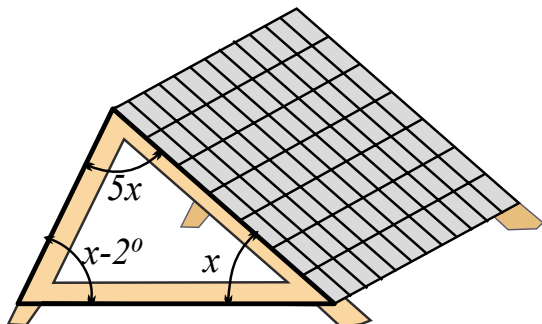


**2.28.** Rasmdagi HD televizori ekranining bo'yi va eni uzunligi nisbati 16 : 9 kabi bo'ladi. Diagonali 70 dyuym bo'lgan HD televizori o'lchamlarini cm larda toping (1 dyuym = 2,54 cm).



2.29. Rasmlardagi tom burchaklarini toping.

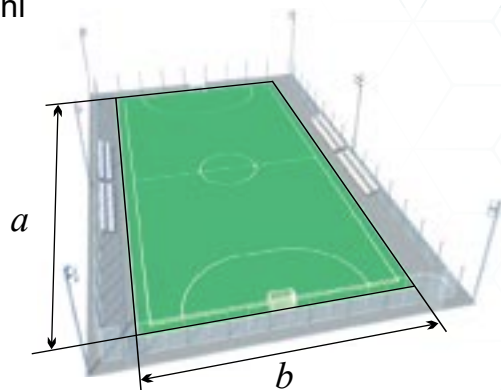
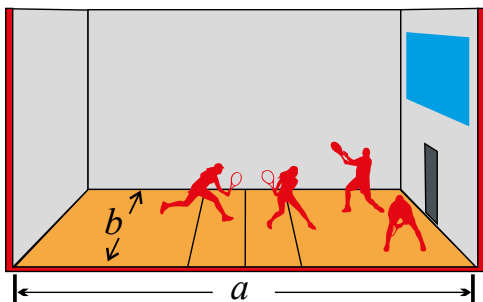
a)



b)

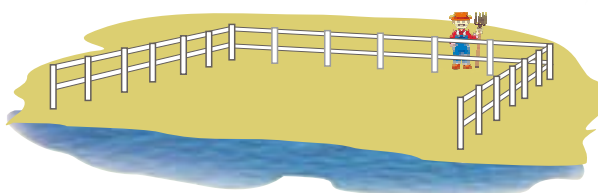


2.30. Yopiq sport maydonining perimetri 120 fut, bo'yi esa enidan ikki marta uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini metrlarda toping (1 fut = 30,48 cm).



2.31. Futbol maydonining perimetri 340 m, bo'yi esa enidan 50 m uzun bo'lsa, maydon o'lchamlarini toping.

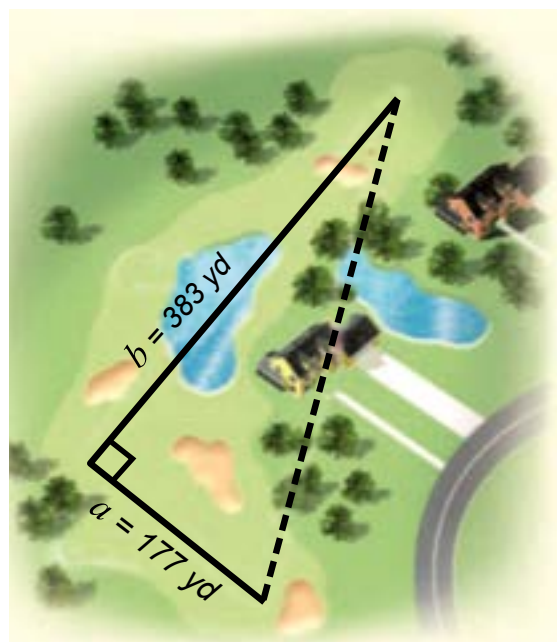
2.32. Fermer daryo bo'yida to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydonni panjara bilan o'rab olmoqchi. 100 m uzunlikdagi panjara bilan qanday o'lchamdagi eng katta yuzli maydonni o'rab olish mumkin?



2.33. Doira shaklidagi ikkita gulzor yuzlari yig'indisi  $90\pi m^2$ , ayirmasi  $72\pi m^2$ . Har bir gulzorning radiuslarini toping.

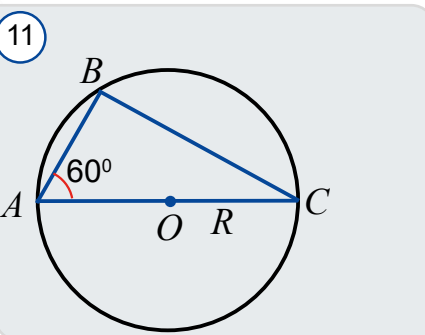
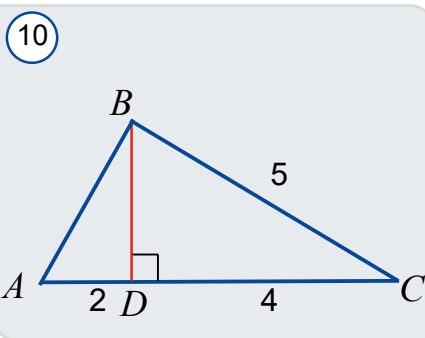
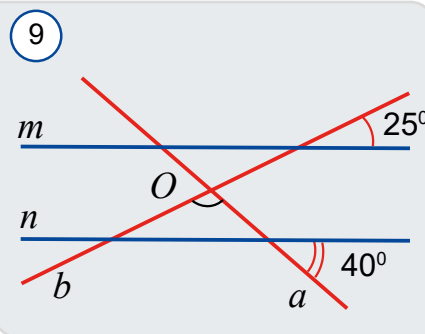
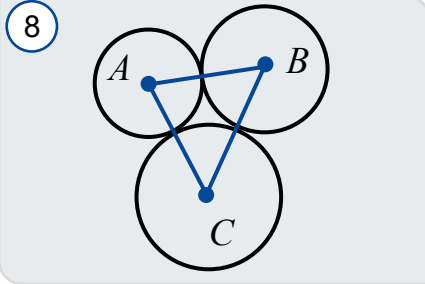


2.34. Golf maydonchasi tarhi berilgan. Agar o'yinchi birinchi zarbda to'pni  $a$  masofaga, birinchi zarb yo'nalishiga perpendikulyar ikkinchi zarbda  $b$  masofaga uzoqlashtirgan bo'lsa, golf to'pi boshlang'ich holatidan qancha masofaga borib tushgan?



# 3-

## BOBNI TAKRORLASHGA DOIR AMALIY MASHQLAR



**3.1.** Uchburchakning uchlari, radiuslari  $6\text{ cm}$ ,  $7\text{ cm}$  va  $8\text{ cm}$  bo'lgan va jufti-jufti bilan urinadigan uchta aylana markazlarida yotibdi (8-rasm). Bu uchburchakning perimetrini toping.

A)  $28\text{ cm}$  B)  $29\text{ cm}$  C)  $27\text{ cm}$  D)  $42\text{ cm}$  E)  $21\text{ cm}$

**3.2.** Kvadratning tomoni  $20$  ga teng. Bu kvadratga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

A)  $20$  B)  $10\sqrt{2}$  C)  $10$  D)  $5\sqrt{2}$  E)  $5$

**3.3.** Trapetsiyaning bitta asosi ikkinchisidan  $8\text{ cm}$  ga uzun, o'rta chizig'i esa  $10\text{ cm}$  ga teng. Trapetsiyaning kichik asosini toping.

A)  $2\text{ cm}$  B)  $4\text{ cm}$  C)  $6\text{ cm}$  D)  $8\text{ cm}$  E)  $10\text{ cm}$

**3.4.** Diagonallari  $10\text{ m}$  va  $36\text{ m}$  bo'lgan rombning yuzini toping.

A)  $90\text{ m}^2$  B)  $92\text{ m}^2$  C)  $180\text{ m}^2$  D)  $184\text{ m}^2$  E)  $36\text{ m}^2$

**3.5.** 9-rasmdagi  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsa,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A)  $50^\circ$  B)  $80^\circ$  C)  $100^\circ$  D)  $65^\circ$  E)  $115^\circ$

**3.6.** 10-rasmdagi uchburchak yuzini toping.

A)  $6$  B)  $9$  C)  $12$  D)  $24$  E)  $30$

**3.7.** 11-rasmdagi  $R$  radiusli aylanaga ichki chizilgan  $ABC$  uchburchakning  $BC$  tomonini toping.

A)  $R$  B)  $R\frac{\sqrt{2}}{2}$  C)  $R\sqrt{2}$  D)  $R\sqrt{3}$  E)  $R\frac{\sqrt{3}}{2}$

**3.8.** Yuzi  $9\pi\text{ cm}^2$  bo'lgan doirani o'rab turgan aylana uzunligini toping.

A)  $3\pi\text{ cm}$  B)  $9\pi\text{ cm}$  C)  $12\pi\text{ cm}$  D)  $18\pi\text{ cm}$  E)  $6\pi\text{ cm}$

**3.9.** Tomoni  $6\text{ cm}$  ga teng bo'lgan kvadratga ichki chizilgan doira yuzini toping.

A)  $9\pi\text{ cm}^2$  B)  $144\pi\text{ cm}^2$  C)  $36\pi\text{ cm}^2$  D)  $72\pi\text{ cm}^2$   
E)  $18\pi\text{ cm}^2$

**3.10.** Kvadratga ichki chizilgan aylana radiusi  $5\text{ cm}$ . Kvadrat diagonalini toping.

A)  $5\frac{\sqrt{2}}{2}$  B)  $5\sqrt{2}$  C)  $5\frac{\sqrt{2}}{4}$  D)  $10\sqrt{3}$  E)  $20\sqrt{3}$

**3.11.** Ichki burchaklari yig'indisi  $1600^\circ$  bo'lgan muntazam

ko'pburchakning tomonlari sonini toping.

A)  $12$  B)  $14$  C)  $16$  D)  $18$  E)  $20$

**3.12.** Diagonallari  $24\text{ cm}$  va  $18\text{ cm}$  bo'lgan rombning perimetrini toping.

A)  $120\text{ cm}$  B)  $60\text{ cm}$  C)  $84\text{ cm}$  D)  $108\text{ cm}$  E)  $144\text{ cm}$

**3.13.** Parallelogrammning perimetri  $48\text{ dm}$  bo'lib, bir tomoni ikkinchisidan  $8\text{ dm}$  ga uzun.

Parallelogrammning kichik tomonini toping.

A)  $8\text{ dm}$  B)  $16\text{ dm}$  C)  $6\text{ dm}$  D)  $12\text{ dm}$  E)  $10\text{ dm}$

3.14. 12-rasmdagi  $ABC$  teng yonli uchburchak tashqarisida ikkita teng  $ABM$  va  $CBK$  burchaklar qurildi. Bu burchaklar tomonlari  $AC$  tomonni mos ravishda  $M$  va  $K$  nuqtalarda kesib o'tdi.  $MBC$  va  $KBA$  uchburchaklar tengligini isbotlang.

3.15. 13-rasmda tasvirlangan  $AB$  va  $CD$  to'g'ri chiziq-larning o'zaro joylashuvini aniqlang. Javobingizni asoslang.

3.16. 14-rasmdagi  $ABC$  uchburchakka aylana ichki chizilgan. Aylananing  $N$  va  $Z$  urinish nuqtalari uchburchakning  $AB$  va  $AC$  tomonlarini ayirmasi mos ravishda  $3\text{ cm}$  va  $4\text{ cm}$  bo'lgan kesmalarga ajratadi ( $AN > NB$ ,  $AZ > ZC$ ). Agar uchburchakning perimetri  $28\text{ cm}$  bo'lsa, uning tomonlarini toping.

3.17. Teng tomonli uchburchakka radiusi  $3\sqrt{3}$  bo'lgan aylana tashqi chizilgan. Ichki chizilgan aylana radiusini toping.

3.18. Asosidagi burchagi  $30^\circ$  bo'lgan tengyonli trapetsiyaga aylana tashqi chizilgan. Trapetsiyaning balandligi  $7\text{ cm}$  ga teng bo'lsa, uning o'rta chizig'ini toping.

3.19. Asosidagi burchagi  $150^\circ$  bo'lgan tengyonli trapetsiya aylanaga tashqi chizilgan. Trapetsiyaning o'rta chizig'i  $16\sqrt{3}$  ga teng bo'lsa, uning balandligini toping.

3.20. Asosi  $16\text{ cm}$  va bu asosga tushirilgan balandligi  $15\text{ cm}$  bo'lgan teng yonli uchburchakning yon tomonini toping.

3.21.  $ABC$  uchburchakning  $AO$  balandligi uning  $BC$  tomonini  $BO$  va  $OC$  kesmalarga ajratadi. Agar  $AB = 10\sqrt{2}\text{ cm}$ ,  $AC = 26\text{ cm}$  va  $B = 45^\circ$  bo'lsa,  $OC$  kesma uzunligini toping.

3.22. Rombning tomoni  $10\text{ cm}$ , diagonallaridan biri  $12\text{ cm}$ . Rombga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

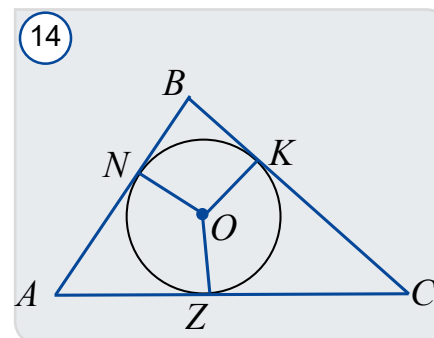
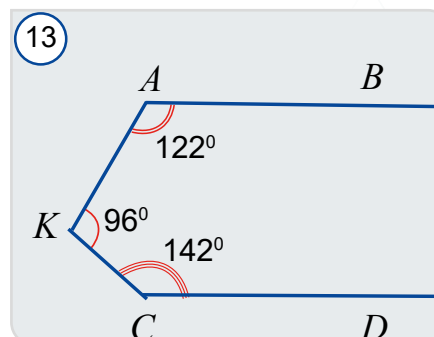
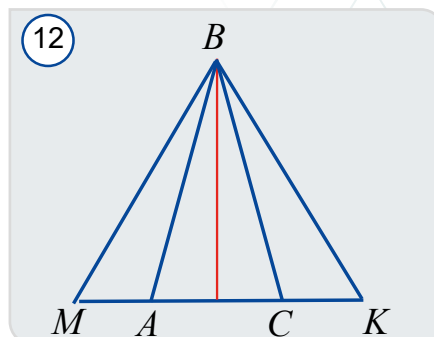
3.23. Radiusi  $15\text{ cm}$  bo'lgan aylanaga uning markazidan  $12\text{ cm}$  uzoqlikda bo'lgan vatar o'tkazilgan. Bu vatar uzunligini toping.

3.24. Aylanada ikkita kesishuvchi vatar o'tkazilgan. Ulardan biri kesishish nuqtasi bilan teng ikkiga, ikkinchisi esa uzunliklari  $5\text{ cm}$  va  $20\text{ cm}$  bo'lgan kesmalarga bo'linadi. Har bir vatar uzunligini toping.

3.25. Aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan unga urinma va kesuvchi o'tkazilgan. Agar urinma o'zining tashqi bo'lagidan  $5\text{ cm}$  uzun, kesuvchining ichki bo'lagidan  $5\text{ cm}$  qisqa bo'lsa, uning uzunligini toping.

3.26. Aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan unga urinma va kesuvchi o'tkazilgan. Agar urinma va kesuvchining uzunliklari yig'indisi  $15\text{ cm}$ , kesuvchining tashqi bo'lagi urinmadan  $2\text{ cm}$  qisqa bo'lsa, urinma va kesuvchi uzunliklarini toping.

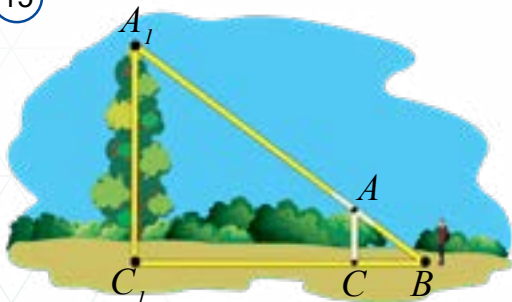
3.27. To'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylananing urinish nuqtasi gipotenuzani uzunliklari  $6\text{ cm}$  va  $9\text{ cm}$  bo'lgan kesmalarga bo'ladi. Bu uchburchakning yuzini toping.



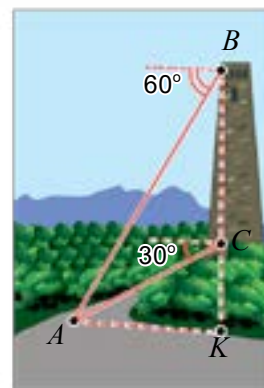


- 3.28. To'g'ri burchakli trapetsiyaning kichik asosi  $8\text{ cm}$ , kichik yon tomoni esa  $6\sqrt{3}\text{ cm}$  ga teng. Agar trapetsiya burchaklaridan biri  $120^\circ$  bo'lsa, uning yuzini toping.
- 3.29. Asoslari  $40\text{ cm}$  va  $14\text{ cm}$ , balandligi esa  $39\text{ cm}$  bo'lgan trapetsiyaga aylana tashqi chizilgan. Aylana radiusini toping.
- 3.30. Trapetsiyaning diagonallari  $20\text{ cm}$  va  $15\text{ cm}$ , balandligi  $12\text{ cm}$ . Trapetsiyaning yuzini toping.
- 3.31. Rombning katta diagonali  $24\text{ cm}$ , ichki chizilgan aylana radiusi  $6\text{ cm}$ . Rombning yuzini toping.
- 3.32. Uchburchakning tomonlari  $17\text{ cm}$ ,  $25\text{ cm}$ ,  $28\text{ cm}$ . Markazi katta tomon o'rtasida bo'lgan aylana uning qolgan ikki tomoniga urinadi. Doira yuzini toping.
- 3.33. Tomonlari  $6\text{ cm}$  va  $4\text{ cm}$ , diagonallari orasidagi burchagi  $60^\circ$  ga teng bo'lgan paralelogramm yuzini toping.
- 3.34. Ikki parallel to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq bilan kesganda hosil bo'lgan burchaklarning uchtasi yig'indisi  $240^\circ$  ga teng. Hosil bo'lgan qo'shni burchaklarning kattasining kichigiga nisbatini foizlarda ifodalang.
- 3.35. Ikki parallel to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq bilan kesganda hosil bo'lgan burchaklardan biri ikkinchisidan 3 marta katta bo'lsa, ikkita o'tkir burchaklarning yig'indisini toping.
- 3.36. Aylanada yotgan nuqtadan o'tkazilgan, bir-biriga perpendikulyar ikkita vatar uzunligi  $8\text{ cm}$  va  $15\text{ cm}$ . Aylana radiusini toping.
- 3.37. Aylanada yotgan nuqtadan o'tkazilgan ikki vatar orasidagi burchak  $30^\circ$ . Aylana radiusi  $5\text{ cm}$  bo'lsa, vatarlar oxirlarini tutashtiruvchi kesma uzunligini toping.
- 3.38. Aylananing  $6\text{ cm}$  li vatari uning markazidan  $4\text{ cm}$  uzoqlikda joylashgan. Aylana uzunligini toping.
- 3.39. Aylanaga tashqi chizilgan trapetsiyaning yon tomonlari nisbati  $7 : 9$  ga teng, o'rta chizig'i  $32\text{ cm}$ . Trapetsiyaning yon tomonlarini toping.
- 3.40. Radiusi  $4\text{ cm}$  bo'lgan aylanaga trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning diagonali o'tkir burchagi bissektrisasi bilan  $30^\circ$  burchak tashkil qiladi. Trapetsiyaning balandligini toping.
- 3.41.  $ABC$  uchburchakda  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $BC = 3\sqrt{6}\text{ cm}$  bo'lsa,  $AC$  tomonni toping.
- 3.42. 15-rasmda tayoq yordamida daraxtning balandligini topish jarayoni tasvirlangan. Uni izohlang.
- 3.43. Qirda balandligi  $70\text{ m}$  bo'lgan minora joylashgan (16-rasm). Minora  $B$  uchidan pastdagi  $A$  predmet gorizontga nisbatan  $60^\circ$  li, minoraning asosidagi  $C$  nuqtadan esa  $30^\circ$  li burchak ostida ko'rinadi. Qirning balandligini toping.

15



16





## Matematik masalalar xazinasi

Ma'lumki, keyingi paytlarda axborot-kommunikatsiya texnologiyalari juda tez rivojlanmoqda va jadal sur'atlar bilan ta'lim tizimiga ham kirib bormoqda. Hozir internet tarmog'iga shunchalik ko'p axborot manbalari joylashtirilganki, bu xazinadan foydalanish har bir yosh avlod uchun juda zarur va foydali. Internetdan siz o'zbek, rus, ingliz va boshqa tilalarda matematika olamidagi eng oxirgi yangiliklar, elektron kutubxonalar omborida saqlanayotgan ko'plab elektron darsliklarni, raqamli resurslarni topishingiz mumkin. Shuningdek, turli-tuman nazariy materiallar, uslubiy tavsiyalar, son-sanoqsiz masalalar, misollar va ularning yechimlari, turli davlatlarda o'tkazilayotgan matematik ko'rik-tanlov va olimpiadalar to'g'risidagi ma'lumotlar va ularda taqdim etilgan qiziqarli matematik masalalar va ularning yechimlari bilan tanishishingiz mumkin.



### Elektron shakllar



### Video darslar

Quyida bir qator manbalarning manzillari berilmoqda. Ulardan geometriyaga oid o'zingizni qiziqtirgan turli ma'lumotlarni olib topishni, matematikani mustaqil o'rganish imkoniyatlaridan foydalanishni tavsiya etamiz:

1. <http://www.uzedu.uz> – Xalq ta'limi vazirligining rasmiy sayti, axborot ta'lim portali.
2. <http://www.ziyonet.uz> – “Ziyonet” ta'lim portali.
3. <http://dr.rtm.uz> – yangi darsliklar, o'qituvchilar uchun uslubiy qo'llanmalarning elektron shakllari, taqdimotlar, multimedia ilovalari, videodarslar va raqamli resurslar platformasi
4. <http://www.maktab.uz> – 1–11-sinflar uchun onlayn maktab, maktab o'quv dasturi bo'yicha videodarslar va boshqa materiallar platformasi.
5. <http://www.stesting.uz> – o'quvchilar uchun “Xalqaro baholash tadqiqotlariga tayyorlanish” elektron platformasi (o'zbek tilida).
6. <http://www.masofa.uz> – A. Avloniy nomidagi milliy-tadqiqot institutining masofadan o'qitish portali.



### Taqdimotlar



### Testlar



### Topshiriqlar



### Qo'shimcha materiallar

7. <http://www.onlinedu.uz> – A. Avloniy nomidagi milliy-tadqiqot institutining “Uzluksiz kasbiy ta’lim” elektron platformasi.
8. <http://www.skillgrover.com.uz> – Finlandiyaning matematikani o’rganish va o’quvchilar bilimlarini baholash platformasi (o’zbek tilida).
9. <http://www.khanakademy.org> – “Xon akademiyasi” masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).
10. <http://www.xanakademiya.uz> – matematika, informatika, kimyo, fizika, iqtisodiyot, biologiya va astronomiya kabi fanlar bo’yicha videodarslar platformasi (o’zbek tilida).
11. <http://www.school.edu.ru> – umumta’lim portali (rus tilida).
12. <http://www.problems.ru/> – matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
13. <http://geometry.net/> – algebra va geometriyadan o’quv materiallari (ingliz tilida).
14. <http://mathproblem.narod.ru/> – matematik to’garaklar va olimpiadalar (rus tilida).
15. <http://www.ixl.com> - masofadan o’qitish matematika ta’limi portali (ingliz tilida).
16. <http://www.mathkang.ru> – “Kenguru” xalqaro matematik tanlovi sayti (rus tilida).
17. <http://www.olimpia.uz> – “Kenguru” xalqaro matematik tanlovi sayti (uzbek tilida).
18. <http://www.brilliant.org> – matematikadan masofaviy ta’lim sayti (ingliz tilida).
19. <http://www.geogebra.org> – geometriya va algebra fanlari bo’yicha dinamik (“jonli”) chizmalar yaratish imkoniyatini beradigan bepul dastur.
20. <http://www.yaklass.ru> – maktab o’quvchilari va o’qituvchilar uchun onlayn ta’lim platformasi.
21. [www.schulen-ans-netz.de](http://www.schulen-ans-netz.de) – Germaniya “Internet-Maktab” sayti (nemis tilida).
22. [www.studienkreis.de](http://www.studienkreis.de) – Germaniya o’quv to’garaklari sayti (nemis tilida).
23. [www.educasource.education.fr](http://www.educasource.education.fr) – Fransiya ta’lim sayti (fransuz tilida).
24. [www.educmath.inrp.fr](http://www.educmath.inrp.fr) – Fransiya matematika ta’limi raqamli resurslari (fransuz tilida).
25. <http://mat-game.narod.ru/> – matematik gimnastika. Matematik masalalar va boshqotirmalar (rus tilida).



# II BOB

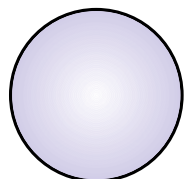
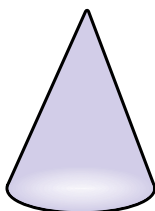
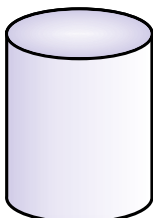
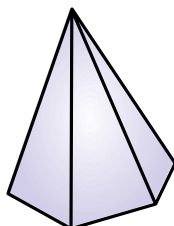
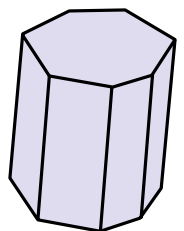
## STEREOMETRIYAGA KIRISH

**Bu bobni o‘rganish natijasida quyidagi bilim va ko‘nikmalarga ega bo‘lasiz:**

- stereometriya aksiomalarini bilish va ulardan foydalana olish;
- stereometriya aksiomalaridan kelib chiquvchi natijalarni bilish va ularni qo‘llay olish;
- fazodagi ayqash, parallel va kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar ta‘rifini bilish va chizmada tasvirlash;
- to‘g‘ri chiziqning tekislikka parallelligi ta‘rifini bilish;
- kesishuvchi va parallel tekisliklar haqida tushunchaga ega bo‘lish;
- fazoviy jismlar, ko‘pyoqlar – prizma, paralelepiped, kub, piramida haqida boshlang‘ich tushunchalarga ega bo‘lish, tekislikda tasvirlay olish, ularni chizmada ko‘rsatish va sirtini topishga doir masalalarni yechish;
- ko‘pyoqlarning sodda kesimlarini “izlar” va parallel ko‘chirish usullaridan foydalanib yasash;
- o‘rganilgan tushunchalar, faktlar va metodlarni notanish yoki hayotiy vaziyatlarda qo‘llay olish.



1



Ma'lumki, geometrik shakllar tekislikda to'liq yotgan yoki yotmaganiga qarab *yassi* va *fazoviy shakllarga* ajratiladi. Shu chog'gacha geometriya darslarida asosan yassi geometrik shakllarning xossalarini o'rgandik. 9-sinf oxirida esa ba'zi fazoviy shakllar: prizma, piramida, silindr, konus va sharning (*1-rasm*) xossalarini qarab chiqqan edik.

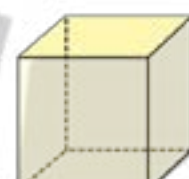
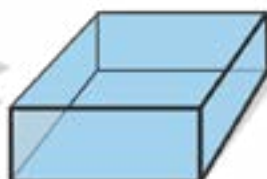
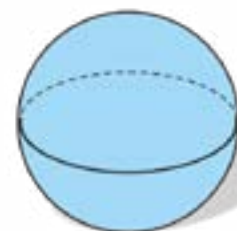
Geometriyaning planimetriya bo'limi yassi geometrik shakllarni, *stereometriya* bo'limi esa fazoviy geometrik shakllarning (yoki jismlarning) xossalarini o'rganadi. Stereometriya so'zi grekchadan olingan bo'lib, *stereos* – "fazoviy", *metreo* – "o'lchayman" degan ma'noni anglatadi.

2-rasmda tasvirlangan narsalar fazoviy jismlarning timsoli sifatida ular haqida tasavvur beradi. Tevarak-atrofimizdagi barcha predmetlar uch o'lchamli bo'lib, ularning shakli qaysidir fazoviy geometrik jismga o'xshab ketadi.

Fazodagi asosiy geometrik shakllar *nuqta*, *to'g'ri chiziq* va *tekislikdir*. Ular stereometriyaning asosiy tushunchalari bo'lib, ularga ta'rif berilmaydi.

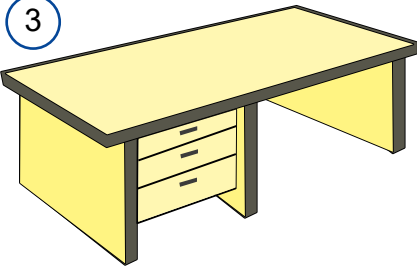
Nuqtaga o'lchamlari hisobga olinmasa ham bo'ladigan mayda predmetlar timsoli sifatida, to'g'ri chiziqqa esa tarang tortilgan ip yoki maktab doskasi qirrasini timsoli sifatida qarash mumkin. Nuqtalar katta lotin harflari – *A*, *B*, *C* ... bilan, to'g'ri chiziqlar esa kichik lotin harflari – *a*, *b*, *c* ... bilan belgilanadi.

2





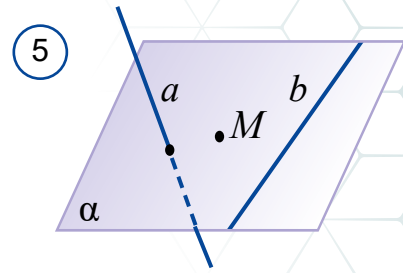
3



4



5



Tekislikni stol usti kabi tekis sirt deb tasavvur qilishimiz mumkin (3-rasm). Tekislik ham to'g'ri chiziq kabi cheksizdir. Rasmda tekislikning faqat bir qisminigina tasvirlaymiz. Lekin uni hamma tomonga cheksiz davom etgan deb tasavvur qilamiz va odatda chizmada paralelogramm shaklida tasvirlaymiz (4-rasm).

### Stereometriyada ishlatiladigan ba'zi belgilashlar

Tekisliklarni  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ... – yunon harflari bilan belgilaymiz.

Fazoda tekislik, to'g'ri chiziq va nuqtalar 5-rasmda-gidek tasvirlanadi.

Fazoda nuqta tekislikka tegishli bo'lmasligi (6a-rasm) yoki tegishli bo'lishi (6b-rasm) mumkin.

$M$  nuqta  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lgan holda  $\alpha$  tekislik  $M$  nuqtadan o'tadi, deb ham aytiladi va  $M \in \alpha$  tarzda belgilanadi.

$M$  nuqta  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lmasa,  $M \notin \alpha$  tarzda belgilanadi.

Shuningdek, fazoda to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'lishi yoki tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

$a$  to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lsa (7a-rasm),  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi yoki  $\alpha$  tekislik  $a$  to'g'ri chiziq orqali o'tadi, deb aytiladi va  $a \subset \alpha$  tarzda belgilanadi.

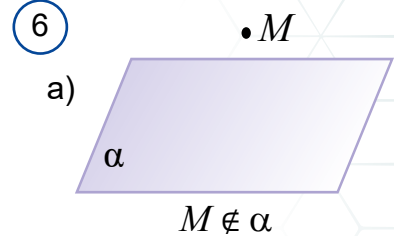
$a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lmasa,  $a \not\subset \alpha$  tarzda belgilanadi.

$a$  to'g'ri chiziqning faqat bitta nuqtasi  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lsa (7b-rasm),  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni kesib o'tadi, deb aytiladi va bu  $\alpha \cap a = M$  tarzda yoziladi.

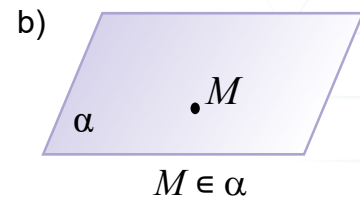
Agar  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning umumiy nuqtalari  $a$  to'g'ri chiziqni tashkil qilsa (8-rasm), bu ikki tekislik  $a$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi, deymiz va buni  $\alpha \cap \beta = a$  tarzida yozamiz.

Agar  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning umumiy nuqtalari bo'lmasa (9-rasm), bu ikki tekislik o'zaro kesishmaydi, deymiz va buni  $\alpha \cap \beta = \emptyset$  tarzida yozamiz.

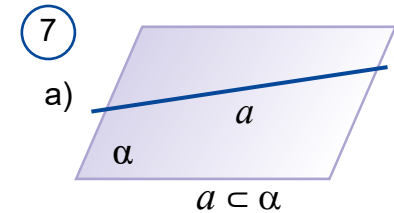
6



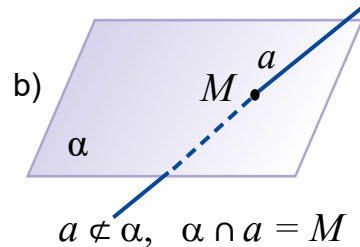
b)



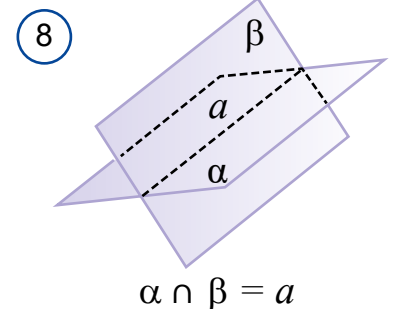
7



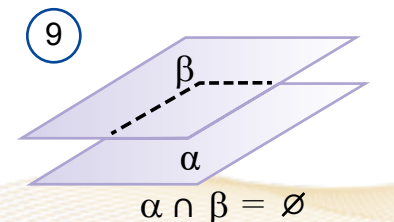
b)



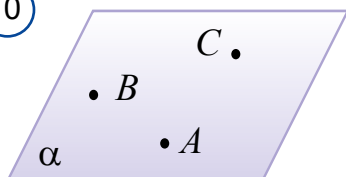
8



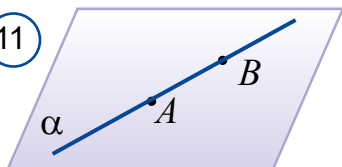
9



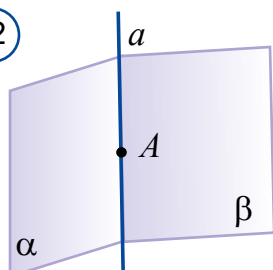
10



11

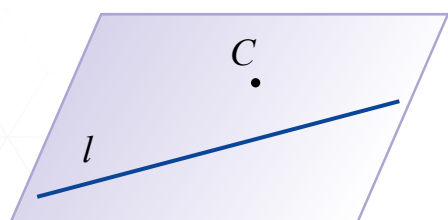


12

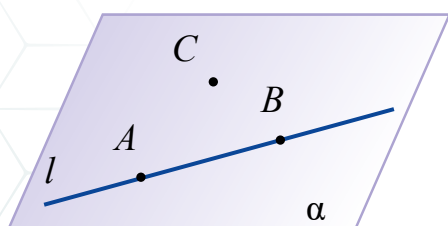


13

a)



b)



## Stereometriya aksiomalari

Planimetriyadagi kabi stereometriyada ham ba'zi geometrik shakllarning xossalari isbotsiz qabul qilinadi. Fazoda tekisliklarning quyidagi xossalarini isbotsiz, S guruh aksiomalari sifatida qabul qilamiz:

**S<sub>1</sub>**

Agar uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmasa, u holda ular orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin (10-rasm).

**S<sub>2</sub>**

Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi (11-rasm).

**S<sub>3</sub>**

Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda bu tekisliklar shu nuqtadan o'tuvchi umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi (12-rasm).

Planimetriyada kiritilgan aksiomalar bilan birgalikda bu uchta aksioma stereometriyaning asosini tashkil qiladi. Planimetriyada biz qarayotgan barcha shakllar joylashadigan bitta tekislikka ega edik. Stereometriyada esa bunday tekisliklar cheksiz ko'p bo'lib, ularning barchasida planimetriya aksiomalari va planimetriyada isbotlangan barcha xossalar o'rinli bo'ladi, deb qaraladi. Shuningdek, stereometriya kursida planimetriya aksiomalariga stereometriya nuqtayi nazaridan qarashga to'g'ri keladi.

## Stereometriya aksiomalaridan kelib chiquvchi natijalar



**1-natija.** To'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

**Isbot.**  $l$  – berilgan to'g'ri chiziq,  $C$  esa unda yotmagan nuqta bo'lsin (13a-rasm).

Avval teoremaning xulosa qismida aytilgan tekislikning mavjudligini ko'rsatamiz.  $l$  to'g'ri chiziqda  $A$  va  $B$  nuqtalarni olamiz. Shartga ko'ra,  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi. Unda  $S_1$  aksiomaga ko'ra,  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalar orqali  $\alpha$  tekislikni o'tkazish mumkin (13b-rasm).  $S_2$  aksiomaga ko'ra esa,  $\alpha$  tekislik  $l$  to'g'ri chiziqdan o'tadi.

Demak,  $\alpha$  izlangan tekislik ekan.

Endi bu tekislikning yagonaligini ko'rsatamiz.

Teskarisini faraz qilamiz:  $l$  – berilgan to'g'ri chiziq va unda yotmagan  $C$  nuqtadan yana bitta  $\beta$  tekislik o'tkazish mumkin bo'lsin. Unda  $\beta$  tekislik ham  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalardan o'tadi. Lekin  $S_1$  aksiomaga ko'ra, uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin. Ziddiyat. Demak, farazimiz noto'g'ri. To'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.



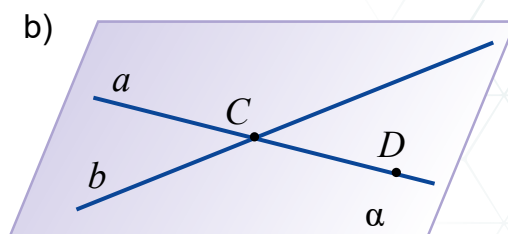
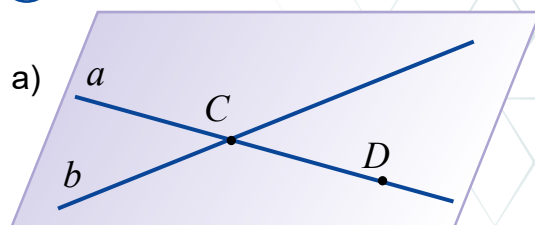
**2-natija.** Berilgan kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.

**Isbot.** Berilgan  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq  $C$  nuqtada kesishsin (14a-rasm).

$a$  to'g'ri chiziqda  $C$  nuqtadan tashqari yana bitta  $D$  nuqtani olamiz. U holda isbotlangan 1-natijaga ko'ra,  $b$  to'g'ri chiziq va unda yotmagan  $D$  nuqta orqali yagona  $\alpha$  tekislik o'tadi (14b-rasm). Bu tekislik  $a$  to'g'ri chiziqning  $C$  va  $D$  nuqtalaridan o'tadi. Unda  $S_2$  aksiomaga ko'ra,  $\alpha$  tekislik  $a$  to'g'ri chiziqdan ham o'tadi.

Demak,  $\alpha$  tekislik berilgan kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali o'tadi. Bu tekislikning yagonaligini mustaqil isbotlang.

14



### Mavzuga doir savollar

1. Fazodagi asosiy geometrik shakllarni ayting. Ularni nimalarning timsoli sifatida olish mumkin?
2. Stereometriyaning  $S$  guruh aksiomalarini ayting va izohlang.
3. Stereometriyada planimetriya aksiomalari ham ishlaydimi? Planimetriya aksiomalariga stereometriya nuqtayi nazaridan qarash deganda nimani tushunasiz?
4.  $S_1$  aksiomada uchta nuqtaning bir to'g'ri chiziqda yotmasligi ta'kidlangan. Bu talab shunchalik muhimmi? Uni olib tashlasa, aksioma o'rinli bo'ladimi? Nega?
5. Stereometriya aksiomalaridan kelib chiquvchi natijalarni izohlang.



## Amaliy mashq va tatbiq

4.1. Jadvalda 4-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
<p>a)</p> <p><b>S<sub>1</sub> aksioma.</b> Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>	<p>b)</p> <p><b>S<sub>2</sub> aksioma.</b> Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.</p>	<p>c)</p> <p><b>S<sub>3</sub> aksioma.</b> Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda ular shu nuqtadan o'tuvchi umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi.</p>
<p><b>1-natija.</b> To'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>	<p><b>2-natija.</b> Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>	<p><b>3-natija.</b> Parallel ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>

4.2. Quyidagi tasdiqlarga mos keladigan belgili ifodalarni toping.

Tasdiq	Ifoda
1. $M$ nuqta $\alpha$ tekislikka tegishli.	$\alpha \cap \beta = \emptyset$
2. $M$ nuqta $\alpha$ tekislikka tegishli emas.	$M \in \alpha$
3. $a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotadi.	$M \notin \alpha$
4. $a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotmaydi.	$a \subset \alpha$
5. $\alpha$ va $\beta$ tekisliklar $a$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.	$\alpha \cap \beta = a$
6. $\alpha$ va $\beta$ tekisliklar o'zaro kesishmaydi.	$a \not\subset \alpha$

4.3. Sinfxona devorlarini tekisliklarning bo'laklari deb faraz qiling va quyidagilarni ko'rsating:

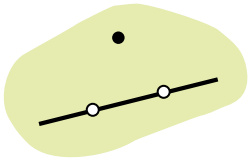
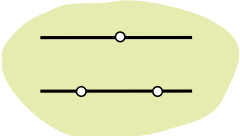
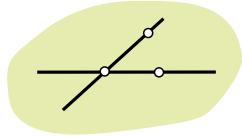
- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| a) ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq;            | b) ikkita kesishuvchi tekislik;    |
| c) bir nuqtada kesishuvchi uchta to'g'ri chiziq; | d) ikkita kesishmaydigan tekislik; |
| e) ikkita kesishmaydigan to'g'ri chiziq;         | f) uchta kesishadigan tekislik.    |



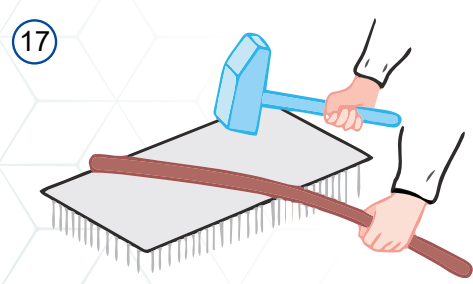
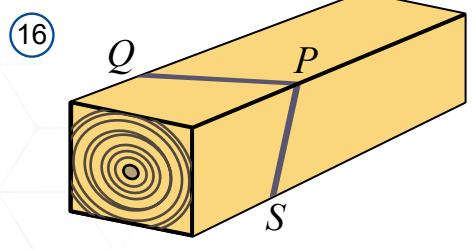
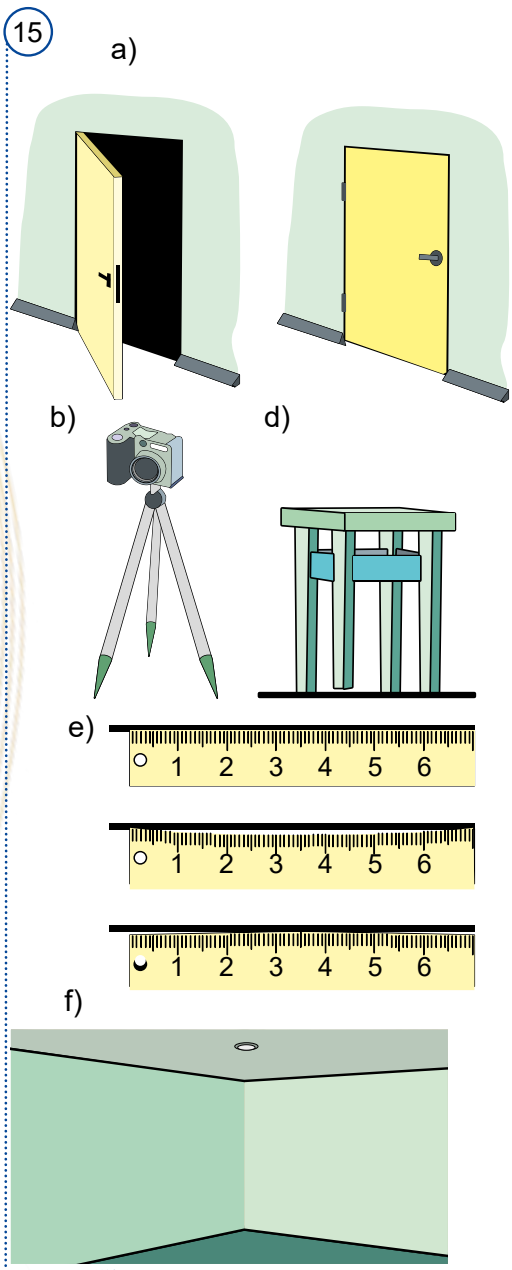
4.4. Quyidagi jummalarni o'qing. Jumla to'g'ri bo'lsa "+", noto'g'ri bo'lsa "-" belgisini yonidagi katakka yozing.

1	Ikki tekislik faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin.	
2	Ikki tekislik faqat ikkita umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin.	
3	Ikki tekislik ikkita umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lishi mumkin.	
4	Berilgan kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.	
5	To'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	
6	Agar uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmasa, u holda ular orqali yagona tekislik o'tkazish mumkin.	
7	Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.	
8	Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda bu tekisliklar shu nuqtadan o'tuvchi umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi.	

4.5. Quyidagi fazoviy shakllar xossalariga mos rasmni toping.

Xossalar	Rasmlar
To'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	
Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	
Parallel ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.	

- 4.6. Fazoda ikki nuqtadan nechta to'g'ri chiziq o'tishi mumkin?
- 4.7. Fazoda uchta nuqtadan nechta tekislik o'tkazish mumkin?
- 4.8. Fazoda bitta to'g'ri chiziqdan nechta tekislik o'tkazish mumkin?
- 4.9. Fazoda uchta nuqta qanday joylashganda ulardan cheksiz ko'p tekislik o'tkazish mumkin?
- 4.10. Fazoda: a) ikki to'g'ri chiziq; b) to'g'ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin?
- 4.11. Fazoda: a) ikki to'g'ri chiziq; b) to'g'ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkinmi?
- 4.12. Bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtadan tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang. Bunday tekisliklar soni nechta



bo'ladi?

- 4.13.**  $A, B, C$  va  $D$  nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi.  $AB$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlang.
- 4.14.** Berilgan ikki to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasidan bu to'g'ri chiziqlar bilan bir tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinmi? Javobingizni asoslang.
- 4.15.**  $A, B, C$  nuqtalar ikkita turli tekislikning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.
- 4.16.** To'g'ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o'tishini isbotlang.
- 4.17.** Turli: a) uchta; b) to'rtta; c) beshta; d)  $n$  ta nuqta juftlaridan eng ko'pi bilan nechta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin?
- 4.18.** Turli: a) uchta; b) to'rtta; c) beshta; d)  $n$  ta nuqta uchligidan eng ko'pi bilan nechta tekislik o'tkazish mumkin?



### Amaliy tatbiqlar

- 4.19.** 15-rasmdagi holatlarni tushuntirishda qaysi aksiomalarga tayanish mumkin?
- A) Nega ochiq eshik yelvizak paytida ochilib-yopilib harakatda bo'ladi? Nega qulf ilingan-da bunday harakat kuzatilmaydi?
- B) Kamera oyoqlari nega uchta bo'ladi?
- C) Stul yerda mahkam turishi uchun uning oyoqlari qanday tekshiriladi?
- D) Chizg'ichning tekisligi qanday tekshiriladi?
- E) Ikkita devor stereometriya aksiomalaridan kelib chiqadigan qaysi natijani tushuntirishda qo'l keladi?
- 4.20.** 16-rasmda duradgorning taxtani arralashdan oldin chizgan chiziqlari tasvirlangan. Uning bu ishini stereometriya aksiomalaridan kelib chiqadigan qaysi natija bilan izohlash mumkin?
- 4.21.** 17-rasmda temirchining egri temirni tekislash jarayoni tasvirlangan. Temir oldin tekis joyga qo'yilib, bolg'a bilan urib tekislanadi. So'ng aylantirilib, yana urib tekislanadi. Ikki bosqichdan iborat bu ishni stereometriya aksiomalaridan kelib chiqadigan qaysi natija bilan izohlash mumkin?

### Fazoda to'g'ri chiziqlar

Fazoda ikki to'g'ri chiziq bir tekislikda yotishi yoki yotmasligi mumkin (1-rasm). Fazoda bir tekislikda yotmaydigan ikki to'g'ri chiziq *ayqash to'g'ri chiziqlar* deyiladi (1a-rasm).

Bitta tekislikda yotgan va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar *kesishuvchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (1b-rasm).

Bitta tekislikda yotgan va o'zaro kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar esa *parallel to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (1c-rasm).

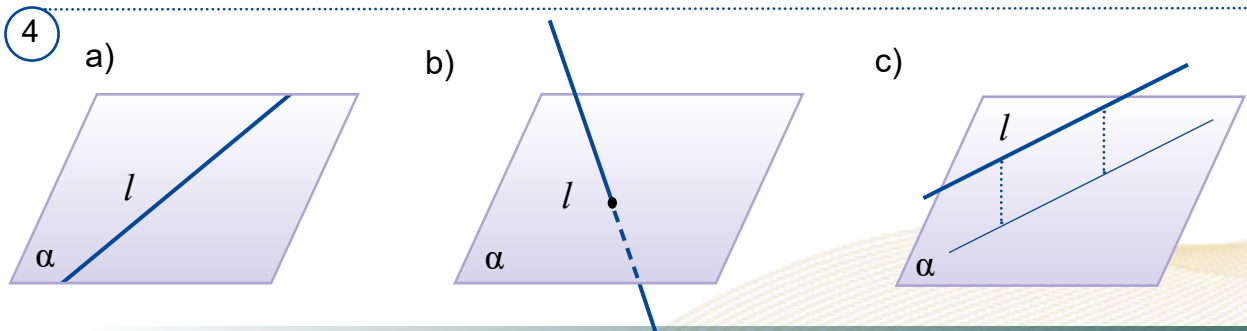
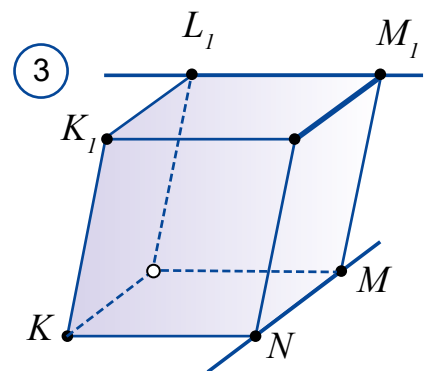
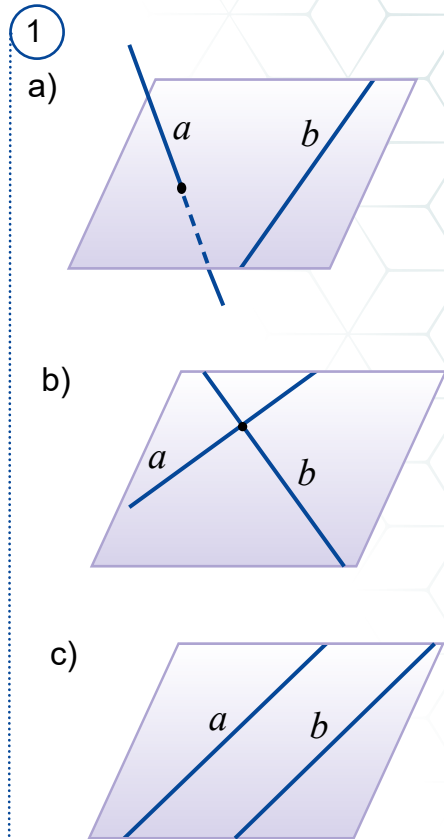
Ayqash to'g'ri chiziq'larga biri ko'prikdan, ikkinchisi ko'prik ostidan o'tuvchi yo'llarni misol sifatida keltirish mumkin (2-rasm). Shuningdek, 3-rasmdagi parallelepipedning  $MN$  va  $L_1M_1$  qirralari yotgan to'g'ri chiziqlar ham ayqash bo'ladi.

Ayqash (parallel) to'g'ri chiziqlarda yotgan kesma va nurlarni ham ayqash (parallel) deb ataymiz.

### Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik



To'g'ri chiziq tekislikda yotishi (4a-rasm), uni kesib o'tishi (4b-rasm) yoki kesib o'tmasligi, ya'ni umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi (4c-rasm) mumkin. Oxirgi holatda *to'g'ri chiziq tekislikka parallel* deb ataladi.



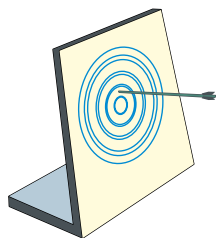


5

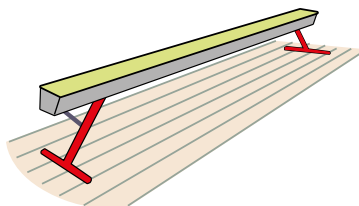
a)



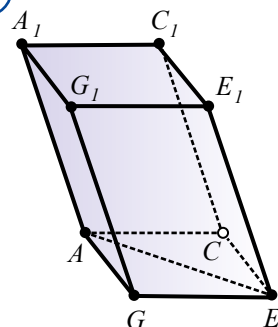
b)



c)

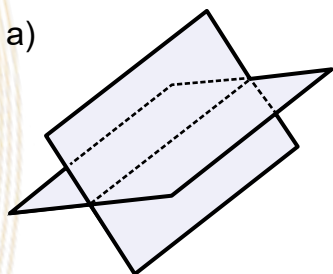


6

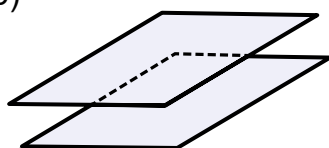


7

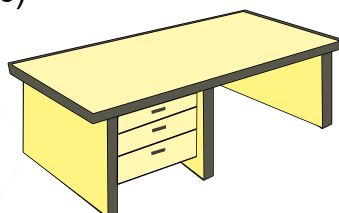
a)



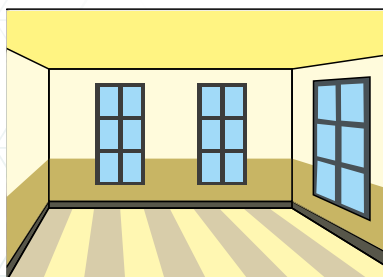
b)



c)



d)



Stol ustida yotgan qalam tekislikda yotgan to'g'ri chiziq haqida (5a-rasm), nishonga qadalgan o'q (5b-rasm) tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq haqida hamda polda turgan gimnastik yog'och tekislikka parallel to'g'ri chiziq haqida (5c-rasm) tasavvur beradi.

6-rasmda tasvirlangan parallelepipedning  $AGEC$  asosining diagonali  $AE$  yotgan to'g'ri chiziq asos tekisligida yotadi,  $AGA_1G_1$  yoq yotgan tekislikni kesib o'tadi hamda  $A_1G_1E_1C_1$  yuqori asos tekisligiga parallel bo'ladi.

## Fazoda tekisliklar

Endi fazoda tekisliklarning o'zaro joylashishiga oydinlik kiritaylik.

Fazoda tekisliklar biror to'g'ri chiziq bo'ylab kesi-shishi (7a-rasm) yoki umumiy nuqtaga ega bo'lmagligi mumkin (7b-rasm). Shundan kelib chiqib, bu tekisliklar mos ravishda *kesishuvchi* yoki *parallel tekisliklar* deb ataladi.

7c-rasmda tasvirlangan stolning ustki sirti va yon yog'i kesishuvchi tekisliklar haqida, xonaning poli va shifti esa (7d-rasm) parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Shuningdek, 6-rasmda tasvirlangan parallelepipedning qarama-qarshi bo'lmagan yon yoqlari kesishuvchi tekisliklar haqida, pastki va ustki asoslari hamda qarama-qarshi yoqlari esa parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Parallellik belgisi - " $//$ " nafaqat parallel to'g'ri chiziq-larni, balki tekislikka parallel to'g'ri chiziqni va parallel tekisliklarni belgilashda ham ishlatiladi:

$$a // b, a // \alpha \text{ va } \alpha // \beta.$$

Ba'zida tekisliklar bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta:  $A, B$  va  $C$  nuqtasi yordamida " $ABC$  tekislik" tarzida ham belgilanadi.



## Mavzuga doir savollar

1. Tekislikda yotuvchi qanday to'g'ri chiziqlar: a) *kesishuvchi*; b) *parallel* deb ataladi?
2. Qanday to'g'ri chiziqlar *ayqash* deb ataladi? Misollar keltiring.
3. Fazoda ikki to'g'ri chiziq qanday joylashishi mumkin?
4. Qanday to'g'ri chiziqlar: a) *tekislikda yotuvchi*; b) *tekislikka parallel* deb ataladi?
5. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik qanday joylashishi mumkin?
6. Fazoda qanday tekisliklar: a) *kesishuvchi*; b) *parallel* deb ataladi?
7. Fazoda ikki tekislik qanday joylashishi mumkin?



## Amaliy mashq va tatbiq

5.1. Jadvallarda 5-bandning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi		
$a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar	Bitta tekislikda yotadi	Bitta umumiy nuqtaga ega	Kesishuvchi: $a \otimes b$
		Umumiy nuqtaga ega emas	Parallel: $a // b$
	Bitta tekislikda yotmaydi		Ayqash: $a \div b$

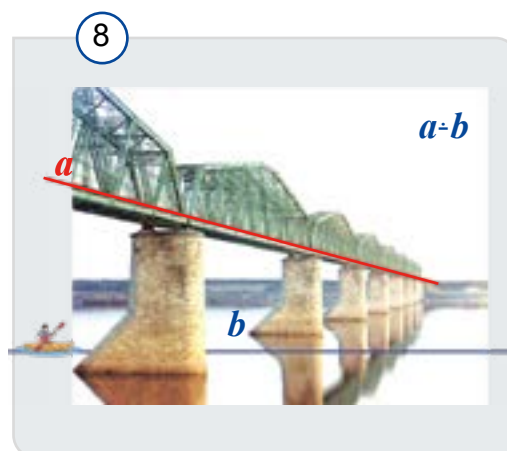
Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashuvi		
$a$ to'g'ri chiziq va $\alpha$ tekislik	$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotmaydi.	$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $a \otimes \alpha$
		$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a // \alpha$
	$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotadi.		

Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi	
$\alpha$ va $\beta$ tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $\alpha \cap \beta = a$ to'g'ri chiziq
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $\alpha // \beta$

5.2. 8-rasmda fazoda ayqash to'g'ri chiziqlar nimalar tasvirlayotganini aniqlang.

5.3. Kub modelida uning quyidagi elementlari juftlarini ko'rsating:

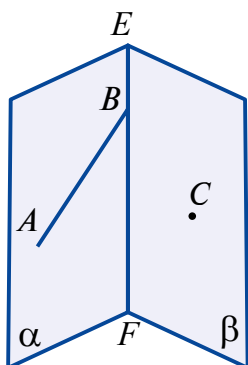
- a) bitta umumiy nuqtaga ega ikkita qirra;
- b) umumiy nuqtaga ega bo'lmagan ikkita qirra;
- c) bitta tekislikda yotmaydigan ikkita qirra;
- d) bitta umumiy nuqtaga ega qirra va yoq;
- e) umumiy nuqtaga ega bo'lmagan qirra va yoq;
- f) yoq va unda yotgan qirra;
- g) kesishmaydigan ikkita yoq;
- h) kesishadigan ikkita yoq.



5.4. Quyidagi jadvaldagi ikki to'g'ri chiziqning xossalriga ko'ra o'zaro joylashishini moslang.

To'g'ri chiziqlarning xossalari	O'zaro joylashuvi
Bitta tekislikda yotadi va umumiy nuqtaga ega emas.	Ayqash
Bitta tekislikda yotadi va umumiy nuqtaga ega.	Parallel
Bitta tekislikda yotmaydi.	Kesishuvchi

9

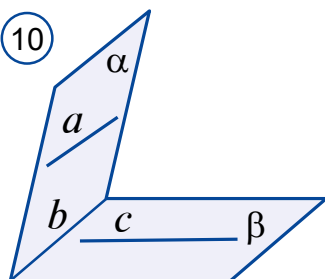


- 5.5. 9-rasmdagi  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $EF$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.  $AB$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi.  $\beta$  tekislikda yotgan  $C$  nuqtadan shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, u:
- $AB$  to'g'ri chiziqni kesib o'tsin;
  - $AB$  to'g'ri chiziq bilan ayqash bo'lsin;
  - $AB$  to'g'ri chiziq bilan parallel bo'lsin.

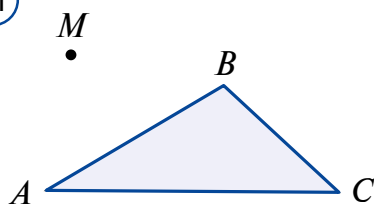
5.6.  $a \parallel b$  va  $a \parallel \alpha$  ekani ma'lum.  $b$  to'g'ri chiziq va  $\alpha$  tekislik o'zaro qanday joylashgan bo'lishi mumkin?

5.7.  $\alpha \parallel \beta$ ,  $a \subset \alpha$  va  $b \subset \beta$  ekani ma'lum.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashgan bo'lishi mumkin?

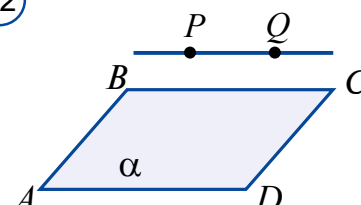
10



11



12



5.8. 10-rasmda  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $b$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Agar  $a \parallel b$ ,  $c$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasa,  $a$  va  $c$  to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishi mumkin?

5.9. 11-rasmda  $M$  nuqta  $ABC$  uchburchak tashqi sohasida yotibdi.  $MA$ ,  $MC$ ,  $MB$  to'g'ri chiziqlarga ayqash to'g'ri chiziqlarni aniqlang.

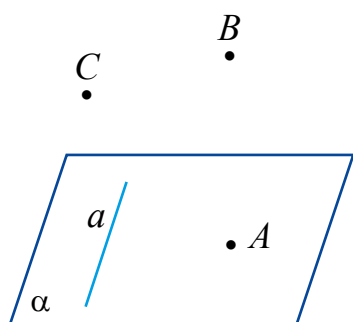
5.10. 12-rasmda  $PQ$  to'g'ri chiziq  $ABCD$  to'rtburchakning tashqi sohasida yotadi va  $BC$  ga parallel: a)  $PQ$  va  $AB$ ; b)  $PQ$  va  $CD$ ; c)  $PQ$  va  $AD$  qanday to'g'ri chiziqlar?

5.11.  $ABCP$  uchburchakli piramida (tetraedr) berilgan. Quyidagi jadvalda keltirilgan to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashadi? Mos katakka tegishli belgi ( $\otimes$  – kesishadi,  $\div$  – ayqash,  $\parallel$  – parallel)ni qo'ying.

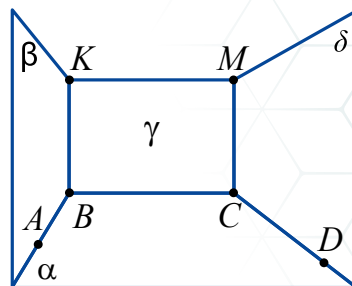
	$AB$	$BC$	$AC$	$PA$	$PB$	$PC$
$AB$						
$BC$						
$AC$						
$PA$						
$PB$						
$PC$						



13



14



5.12. 13-rasmda  $a$  to'g'ri chiziq va  $A$  nuqta  $\alpha$  tekislikka tegishli.  $C$  va  $B$  nuqtalar esa bu tekislikka tegishli emas. Quyidagilardan o'tuvchi tekislik berilgan  $\alpha$  tekislikdan farqli bo'ladimi?

- A)  $a$  to'g'ri chiziq va  $B$  nuqtadan;                      B)  $a$  to'g'ri chiziq va  $C$  nuqtadan;  
 C)  $AB$  va  $AC$  to'g'ri chiziqdan;                      D)  $AB$  va  $BC$  to'g'ri chiziqdan;

5.13. 14-rasmdagi ma'lumotlardan foydalanib jadvalni namunaga ko'ra to'ldiring:

Tekisliklar	$\alpha$ va $\beta$	$\alpha$ va $\gamma$	$\alpha$ va $\delta$	$\beta$ va $\gamma$	$\gamma$ va $\delta$
Umumiy nuqtalari	$A$ va $B$				
Umumiy to'g'ri chiziq	$AB$				

5.14. Quyidagi jummalarni o'qing. Ularning har doim, ba'zida yoki hech qachon to'g'ri bo'lish yoki bo'lmasligini aniqlab, jadvalning mos katagiga "+" belgisini qo'ying. Javobingizni asoslovchi misollar keltiring.

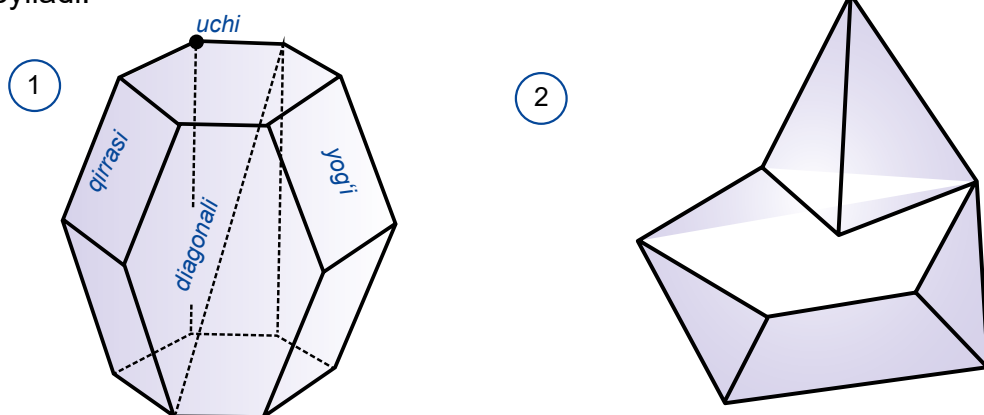
	Jumla	Har doim	Ba'zida	Hech qachon
1	Fazoda to'g'ri chiziq tekislikda yotmaydi.			
2	Ikki tekislik faqat bitta umumiy nuqtaga ega.			
3	Tekisliklar to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.			
4	Ikki tekislik faqat ikkita umumiy nuqtaga ega.			
5	Ikki tekislik ikkita umumiy to'g'ri chiziqqa ega.			
6	Kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orqali yagona tekislik o'tadi.			
7	To'g'ri chiziq va nuqta orqali bitta tekislik o'tadi.			
8	Uchta nuqta orqali yagona tekislik o'tadi.			
9	To'g'ri chiziqning bitta nuqtasi tekislikda yotsa, uning barcha nuqtalari ham shu tekislikda yotadi.			
10	Ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular ustma-ust tushadi.			

Quyi sinflarda qator fazoviy geometrik shakllar bilan tanishdik. Ularning ba'zilarini *fazoviy jismlar* deb ham atadik. Fazoviy jismlarni qandaydir moddiy jism egallagan borliqning bo'lagi sifatida tasavvur qilish mumkin. Fazoviy jismni uning sirti chegaralab turadi.

*Ko'pyoq* deb yassi ko'pburchaklar bilan chegaralangan jismga aytiladi. Yassi ko'pburchaklar – bu *ko'pyoqning yoqlari*, ko'pburchaklarning uchlari *ko'pyoqning uchlari*, tomonlari esa *ko'pyoqning qirralari* deb ataladi. Bitta yoqqa tegishli bo'lmagan uchlarni birlashtiruvchi kesma *ko'pyoqning diagonali* deb ataladi (1-rasm).

Ko'pyoqning chegarasi uning *sirti* deb ataladi. Ko'pyoqning sirti fazoni ikki qismga ajratadi. Ulardan cheksiz qismi *ko'pyoqning tashqi sohasi*, chekli qismi esa *ko'pyoqning ichki sohasi* deb ataladi.

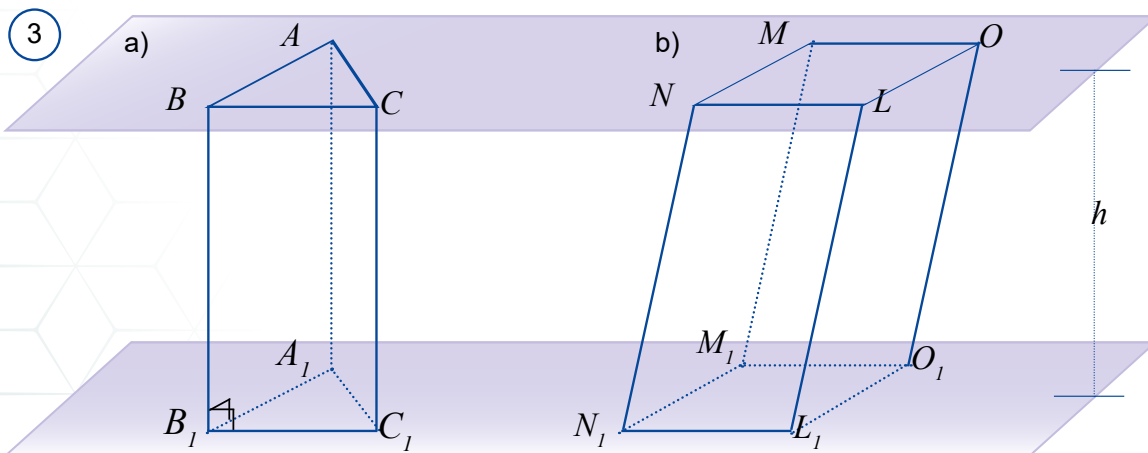
Ko'pyoq ixtiyoriy yog'i yotgan tekislikning bir tomonida yotsa, bunday ko'pyoqqa *qavariq ko'pyoq* deyiladi.

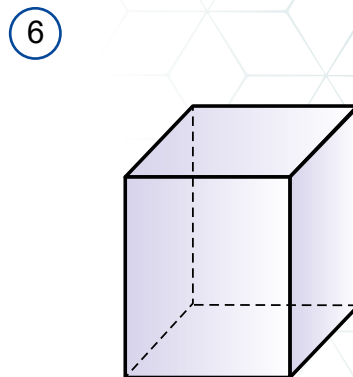
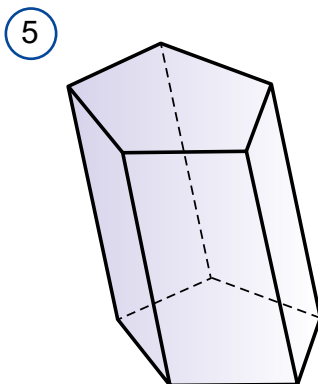
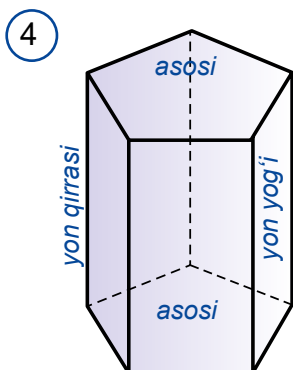


Masalan, kub – qavariq ko'pyoqdir. 2-rasmda esa qavariq bo'lmagan ko'pyoq tasvirlangan. Kelgusida eng sodda qavariq ko'pyoqlar – prizma va piramidalarni o'rganamiz.

*Prizma* deb ikki yog'i teng ko'pburchakdan, qolgan yoqlari esa parallelogrammlardan iborat ko'pyoqqa aytiladi (3-rasm). Teng yoqlar prizmaning *asoslari*, parallelogrammlar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi (4-rasm).

Asosining tomonlari soniga qarab prizmalar *uchburchakli*, *to'rtburchakli* va hokazo *n burchakli prizmalar* deb yuritiladi. 3a-rasmda uchburchakli  $ABCA_1B_1C_1$  prizma, 3b-rasmda esa to'rtburchakli  $MNLOM_1N_1L_1O_1$  prizma tasvirlangan.





Yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat prizma *to'g'ri prizma* (4-rasm), aks holda *og'ma prizma* (5-rasm) deb ataladi.

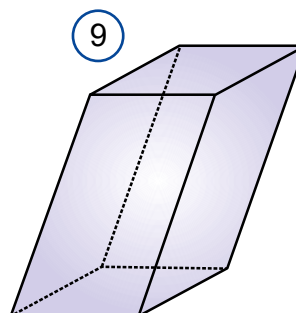
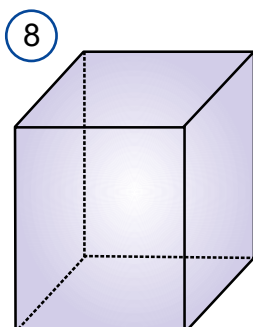
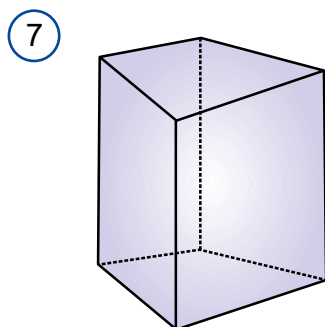
Asosi muntazam ko'pburchakdan iborat to'g'ri prizma *muntazam prizma* deb ataladi (6-rasm).

Asoslari parallelogrammdan iborat prizma *parallelepiped* deb nomlanadi (7-rasm). Parallelepipedlar ham prizma kabi to'g'ri (8-rasm) va og'ma (9-rasm) bo'lishi mumkin. To'g'ri parallelepipedning yon yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi.

Asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat to'g'ri parallelepiped *to'g'ri burchakli parallelepiped* deb ataladi (8-rasm). Ravshanki, to'g'ri burchakli parallelepipedning barcha yoqlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat bo'ladi.

To'g'ri burchakli parallelepipedning bitta uchidan chiquvchi uchta qirralari uzunliklari uning *o'lchamlari* deb aytiladi.

O'lchamlari o'zaro teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped *kub* deb nomlanadi. Ravshanki, kubning barcha yoqlari teng kvadratlardan iborat bo'ladi.



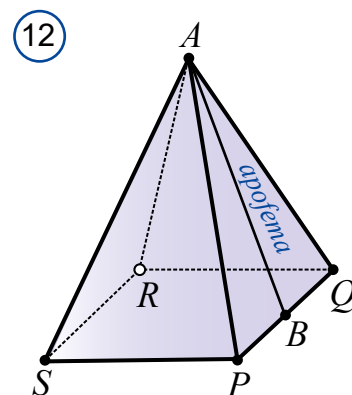
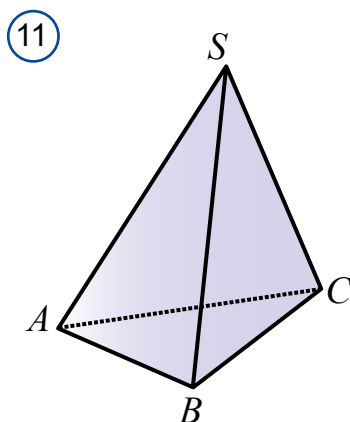
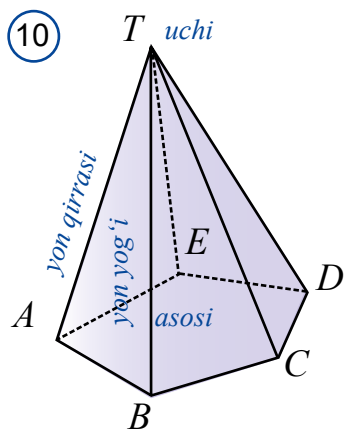
*Piramida* deb bir yog'i ko'pburchakdan, qolgan yoqlari esa bitta uchga ega uchburchaklardan iborat ko'pyoqqa aytiladi. Ko'pburchak piramidaning *asosi*, uchburchaklar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi. 10-rasmda *TABCDE* beshburchakli piramida tasvirlangan. *ABCDE* beshburchak piramidaning asosi, *ATB*, *BTC*, *CTD*, *DTE* va *ETA* uchburchaklar uning yon yoqlari, *T* esa uning uchi.

Asosining tomonlari soniga qarab piramidalar *uchburchakli*, *to'rtburchakli* va hokazo *n burchakli piramidalar* deb yuritiladi. Uchburchakli piramida *tetraedr* deb ham ataladi.

11-rasmda uchburchakli, 12-rasmda esa to'rtburchakli piramida tasvirlangan.

*Muntazam piramida* deb asosi muntazam ko'pburchak va yon yoqlari o'zaro teng bo'lgan piramidaga aytiladi.

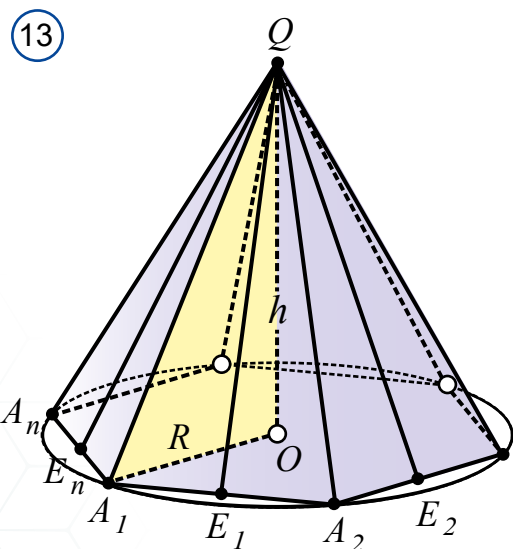




Muntazam piramida yon yog'ining piramida uchidan tushirilgan balandligi uning *apofemasi* deb yuritiladi. 12-rasmda  $APQRS$  to'rtburchakli muntazam piramida tasvirlangan. Undagi  $AB$  kesma piramida apofemalaridan biridir.



**Teorema-2.1.** Muntazam piramidaning: a) yon yoqlari; b) yon qirralari; c) apofemalari o'zaro teng.



**Isbot.** Aytaylik,  $QA_1A_2...A_n$  muntazam piramida,  $O$  esa piramida asosining markazi bo'lsin (13-rasm).

1)  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  kesmalar muntazam ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusidan iborat bo'lgani uchun o'zaro teng bo'ladi. To'g'ri burchakli  $QOA_1, QOA_2, \dots, QOA_n$  uchburchaklarda ikkita katet o'zaro teng bo'lgani uchun ular teng bo'ladi. Unda ularning gipotenuzalari ham teng bo'ladi:

$$QA_1 = QA_2 = \dots = QA_n.$$

2)  $QA_1A_2...A_n$  muntazam piramidaning yon qirralari o'zaro teng bo'lgani uchun uning yon yoqlari teng yonli uchburchaklardan iborat bo'ladi. Bu uchburchaklarning asoslari muntazam ko'pburchakning tomoni bo'lgani uchun o'zaro teng bo'ladi.

Demak, muntazam piramidaning yon yoqlari uchta tomoni bo'yicha o'zaro teng.

3) Muntazam piramidaning yon yoqlari teng bo'lgani uchun ularning  $Q$  uchidan tushirilgan balandliklari ham o'zaro teng bo'ladi.

Demak, muntazam piramidaning apofemalari ham o'zaro teng.



**Teorema-2.2. Muntazam piramidaning yon sirti asosining yarim perimetri va apofemasi ko'paytmasiga teng.**

**Isbot.** Aytaylik,  $QA_1A_2 \dots A_n$  muntazam piramida bo'lsin (13-rasm). Piramidaning yon sirti uning yon yoqlari yuzlari yig'indisiga teng. Uning yon yoqlari esa o'zaro teng bo'lgan teng yonli uchburchaklardan iborat. O'z navbatida, bu uchburchaklarning balandliklari ham o'zaro teng apofemalardan iborat:  $QE_1 = QE_2 = \dots = QE_n$ .

$$\begin{aligned} \text{Bulardan: } S &= S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} = \\ &= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \\ &= \frac{1}{2} (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) QE_1 = p \cdot a. \end{aligned}$$

bu yerda  $p$  – piramida asosining yarim perimetri,  $a$  – piramida apofemasi.



**Mavzu bo'yicha savollar**

1. Qanday geometrik shakllar: a) *yassi*; b) *fazoviy* deb ataladi?
2. *Fazoviy jism* nima?
3. Qanday jism *ko'pyoq* deb ataladi? Uning elementlariga ta'rif bering.
4. Qanday jism *prizma* deb ataladi? Uning elementlariga ta'rif bering.
5. *Prizmaning* qanday turlarini bilasiz?
6. *To'g'ri burchakli parallelepipedga* ta'rif bering.
7. Qanday jism *piramida* deb ataladi? Uning elementlariga ta'rif bering.
8. *Piramidaning* qanday turlarini bilasiz?
8. *Muntazam piramidaning* xossalarini ayting.



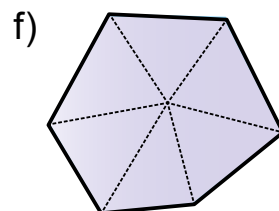
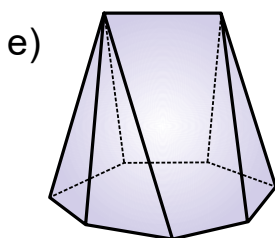
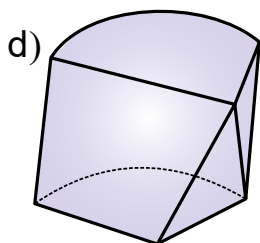
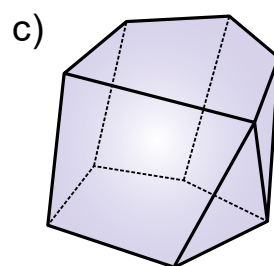
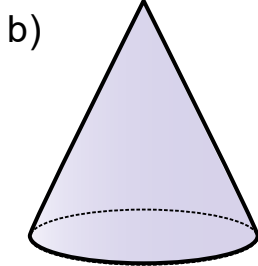
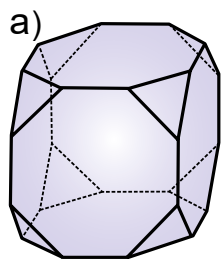
**Amaliy mashq va tatbiq**

6.1. Jadvalda 6-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Ko'pyoqlar			
Prizma	To'g'ri burchakli parallelepiped	Kub	Piramida
Asoslari – ko'pburchak, yoqlari – parallelogrammlar	Asoslari – to'g'ri to'rtburchak, yoqlari – to'g'ri to'rtburchaklar	Asoslari – kvadrat, yoqlari – kvadrat	Asosi – ko'pburchak, yoqlari – uchburchak

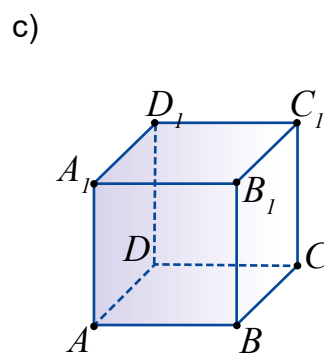
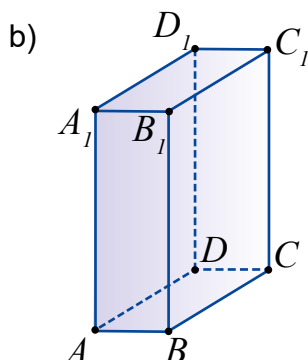
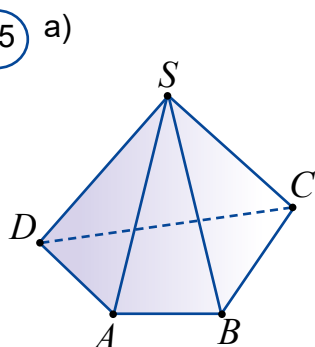
6.2. 14-rasmdagi fazoviy jismlarning qaysilari ko'pyoq bo'ladi?

14

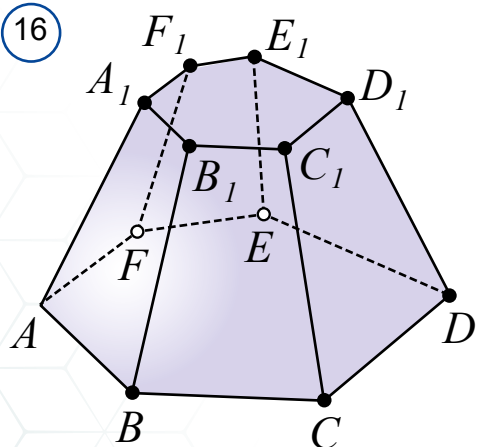


6.3. 15-rasmdagi fazoviy jismlarning qaysi biri:  
1) kub; 2) piramida; 3) prizma?

15



16



6.4. 15a-rasmdagi piramidaning nechta uchi, qirralari va yog'i bor? Asosi qanday ko'pburchakdan iborat? Yon yoqlari-chi?

6.5. 15b-rasmdagi prizmaning nechta uchi, qirralari va yog'i bor? Asoslari qanday ko'pburchaklardan iborat? Yon yoqlari-chi?

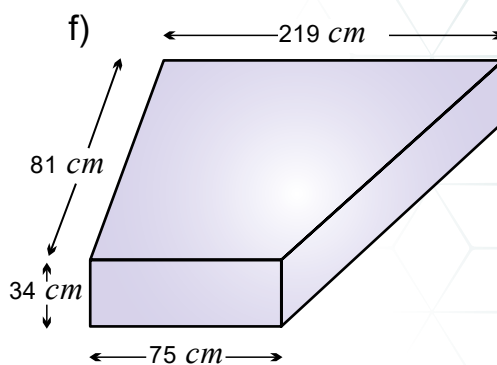
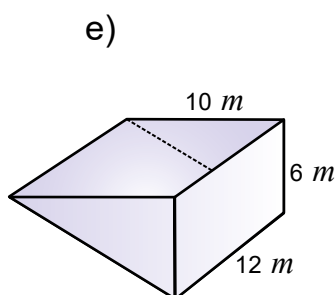
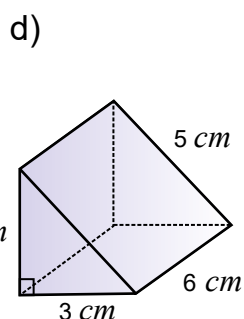
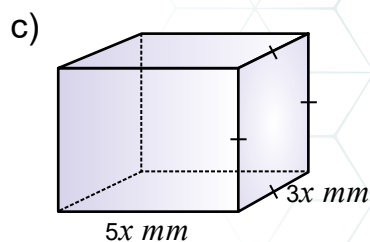
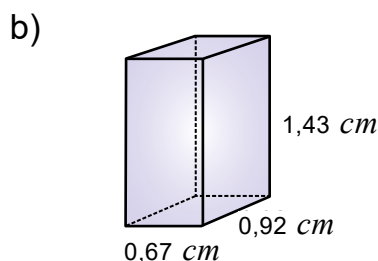
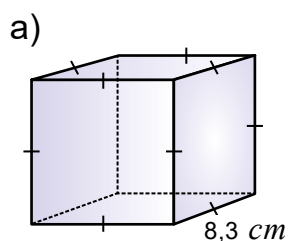
6.6. 16-rasmda  $ABCDEF, A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  ko'pyoq tasvirlangan. Undagi:

- $CD$  qirra umumiy bo'lgan yoqlarni;
- $DD_1$  qirra umumiy bo'lgan yoqlarni;
- $E$  uch umumiy bo'lgan yoqlarni;
- $C_1$  uch umumiy bo'lgan yoqlarni;
- $A$  uch umumiy bo'lgan qirralarni;
- $F_1$  uch umumiy bo'lgan qirralarni ayting.

6.7. Prizmaning: a) 9 ta; b) 16 ta uchi bo'lishi mumkinmi?



17



- 6.8. Ixtiyoriy prizmaning uchlari soni juft bo'lishini asoslang.
- 6.9. Prizmaning: a) 14 ta; b) 15 ta qirralari bo'lishi mumkinmi?
- 6.10. Ixtiyoriy prizmaning qirralari soni 3 ga karrali bo'lishini asoslang.
- 6.11. Prizmaning a) 10 ta uchi; b) 18 ta qirralari; c) 8 ta yog'i bor bo'lsa, uning turini aniqlang.
- 6.12. Ixtiyoriy  $n$  burchakli prizmaning: a) uchlari; b) qirralari; c) yoqlari sonini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
- 6.13. Piramidaning: a) 3 ta; b) 7 ta uchi bo'lishi mumkinmi?
- 6.14. Piramidaning: a) 20 ta; b) 21 ta qirralari bo'lishi mumkinmi?
- 6.15. Ixtiyoriy piramidaning qirralari soni juft bo'lishini asoslang.
- 6.16. Piramidaning: a) 6 ta uchi; b) 22 ta qirralari; c) 10 ta yog'i bor bo'lsa, uning turini aniqlang.
- 6.17. Prizmaning: a) 9 ta; b) 16 ta yog'i bo'lishi mumkinmi?
- 6.18. 15 ta qirralari bor prizmaning asosi qanday ko'pburchakdan iborat?
- 6.19. 32 ta qirralari bor piramidaning asosi qanday ko'pburchakdan iborat?
- 6.20. Ixtiyoriy  $n$  burchakli piramidaning a) uchlari; b) qirralari; c) yoqlari sonini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
- 6.21. 17-rasmdagi ma'lumotlardan foydalanib ko'pyoqlarning to'la sirtini toping.


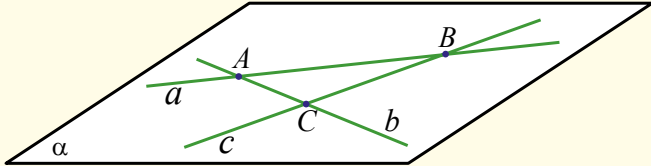


**F**ransiya imperatori Napoleon Bonapart juda o'tkir va jonli fikrga ega bo'lib, geometriyada zo'r edi. U bu fanni nafaqat harbiy ishlarda, balki umuman olganda muhim deb hisoblagan. Imperator hatto geometriyaga oid bir qancha jiddiy ilmiy ishlar ham yozgan. Uning sharafiga geometrik masalalardan biri keyinchalik "Napoleon masalasi" deb nomlangan

- 6.22.** To'g'ri prizmaning yon yoqlari to'g'ri to'rtburchak ekanini isbotlang.
- 6.23.** To'g'ri prizma yon sirti asosining perimetri va yon qirrasining ko'paytmasiga teng ekanini isbotlang.
- 6.24.** To'g'ri parallelepipedning asosi – diagonallari  $10 m$  va  $24 m$  bo'lgan rombdan iborat. Agar parallelepipedning yon qirradi  $8 m$  bo'lsa, uning to'la sirtini toping.
- 6.25.** To'g'ri burchakli parallelepipedning barcha yoqlari to'g'ri to'rtburchak ekanini isbotlang.
- 6.26.** Muntazam uchburchakli prizma asosining tomoni  $6 cm$ , yon qirradi esa  $11 cm$  ga teng. Prizmaning to'la sirtini toping.
- 6.27.** Muntazam  $n$  burchakli prizma asosining tomoni  $a$ , yon qirradi  $h$  ga teng. Agar: a)  $n = 3$ ,  $a = 5$ ,  $h = 10$ ; b)  $n = 4$ ,  $a = 10$ ,  $h = 30$ ; c)  $n = 6$ ,  $a = 18$ ,  $h = 32$ ; d)  $n = 5$ ,  $a = 16$ ,  $h = 25$  bo'lsa, prizmaning yon sirti va to'la sirtini toping.
- 6.28.** Muntazam uchburchakli piramida apofemasi  $15$  ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi  $12$  ga teng. Piramidaning: a) yon qirradi va asosining tomonini; b) yon sirtini; c) to'la sirtini toping.
- 6.29\*.** Piramida asosi tomonlari  $8$  va  $10$ , kichik diagonali  $6$  ga teng bo'lgan parallelogrammdan iborat. Piramida uchini asos diagonallari kesishish nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi  $4$  ga teng va u bu diagonallarga perpendikulyar. Piramidaning: a) yon qirralarini; b) yon sirtini; c) to'la sirtini toping.
- 6.30\*.** Muntazam oltiburchakli piramida asosi tomoni  $10 cm$  ga teng. Piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi  $\sqrt{69}$  ga teng. Piramidaning: a) yon qirradi va apofemasini; b) yon sirtini; c) to'la sirtini toping.
- 6.31.** Muntazam oltiburchakli piramida yon sirtining yuzi  $150 m^2$  ga, yon qirradi esa  $10 m$  ga teng. Piramida asosining yuzini toping.
- 6.32.** To'g'ri prizmaning asosi gipotenuzasi  $5 cm$ , kateti  $4 cm$  bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdir. Agar eng kichik katet yotgan yoq kvadrat bo'lsa, prizmaning yon sirti yuzini toping.

## O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

1. Quyidagi jummalarni o'qing. Jumla to'g'ri bo'lsa "+", noto'g'ri bo'lsa "-" belgisini yonidagi katakka qo'ying.

A	$A, B, C, D$ nuqtalar bir tekislikda yotmaydi. $A, B, C$ va $B, D, A$ nuqtalardan o'tuvchi ikkita tekislik $DB$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.	
B	Yerda 3 oyoqli kursi 4 oyoqli stulga qaraganda mustahkam turadi.	
C	$ABCD$ to'rtburchakning faqat uchta $-A, B, C$ qirralari bitta tekislikda yotadi.	
D	Bitta to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin	
E	$A, B, C, D$ nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. U holda bu nuqtalarning ixtiyoriy uchasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi.	
F	Ikkita turli $-a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar $A$ nuqtada kesishadi. Bu to'g'ri chiziqlarni kesuvchi va $A$ nuqtadan o'tmaydigan to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi.	
G	Ikkita turli $-\alpha$ va $\beta$ tekisliklar $m$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. $a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda, $b$ to'g'ri chiziq $\beta$ tekislikda yotadi. $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar $A$ nuqtada kesishadi. U holda $A$ nuqta $m$ to'g'ri chiziqda yotadi.	
H	Ikkita turli tekisliklar faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin.	

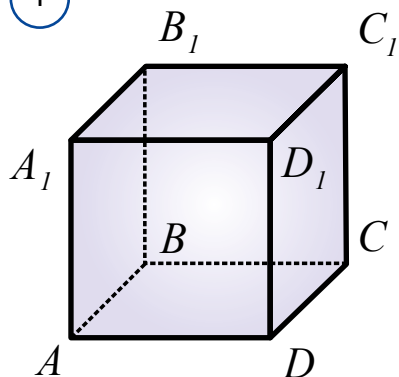
2. Fazoda  $a$  to'g'ri chiziqda yotmaydigan  $O$  nuqtadan o'tuvchi va bu to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan nechta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin?  
A) 3 ta    B) cheksiz ko'p    C) hech qancha    D) 1 ta    E) 2 ta
3. Tushirib qoldirilgan so'zni tanlab, gapni to'ldiring:  
Ikkita parallel tekislik fazoni \_\_\_\_\_ qismga ajratadi.  
A) 3 ta    B) 4 ta    C) 6 ta    D) 2 ta
4. Stol ustida qo'nib turgan uchta pashsha turli tomonlarga qarab uchib ketdi. Qachon ular yana bitta tekislikda joylashadi?
5. Fazoda hech bir uchasi bitta tekislikda yotmaydigan to'rtta parallel to'g'ri chiziq orqali eng ko'pi bilan nechta tekislik o'tkazish mumkin?
6. Fazoda hech bir uchasi bitta tekislikda yotmaydigan, hech bir ikkitasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan bitta umumiy uchga ega bo'lgan oltita nur orqali eng ko'pi bilan nechta tekislik o'tkazish mumkin?
7. Fazoda hech bir to'rttasi bitta tekislikda yotmaydigan, hech bir uchasi bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan oltita nuqta orqali eng ko'pi bilan nechta tekislik o'tkazish mumkin?
8. Prizmaning 14 ta uchi bor bo'lsa, uning turini aniqlang.
9. 27 ta qirralari bor piramidaning asosi qanday ko'pburchak?
10. Muntazam oltiburchakli piramida yon sirtining yuzi  $120 m^2$  ga, apofemasi esa  $10 m$  ga teng. Piramida asosining yuzini toping.



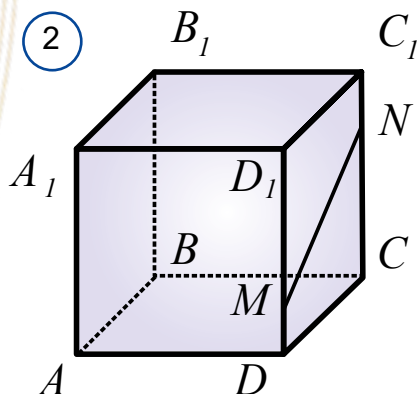
## Qo‘shimcha test va masalalar

### 1. Testlar

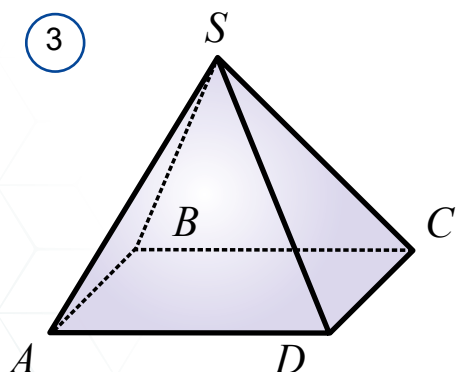
1



2



3



1. Qaysi mulohaza noto‘g‘ri?

- A) Fazodagi har qanday uchta nuqtadan faqat va faqat bitta tekislik o‘tadi.
- B) Kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali faqat va faqat bitta tekislik o‘tadi.
- C) Parallel ikkita to‘g‘ri chiziq orqali faqat va faqat bitta tekislik o‘tadi.

2.  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – kub (1-rasm).  $ABC$  va  $DD_1C_1$  tekisliklar ...

- A) kesishadi;
- B) kesishmaydi;
- C) ustma-ust tushadi.

3.  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  – kub (2-rasm).  $MN$  to‘g‘ri chiziq qaysi tekislikni kesib o‘tmaydi?

- A)  $ABC$ ;
- B)  $AA_1B_1$ ;
- C)  $BB_1C_1$ .

4.  $SABCD$  – to‘rtburchakli piramida (3-rasm).  $SD$  to‘g‘ri chiziq qaysi to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydi?

- A)  $BC$ ;
- B)  $AD$ ;
- C)  $SC$ .

5. Ikkita har xil tekislik ...

- A) umumiy nuqtaga ega emas
- B) umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega emas
- C) bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta umumiy nuqtaga ega emas

6.  $m$  va  $k$  to‘g‘ri chiziqlar orqali bittadan ko‘p tekislik o‘tkazish mumkin. U holda  $m$  va  $k$  to‘g‘ri chiziqlar ...

- A) kesishadi
- B) parallel
- C) ustma-ust tushadi

7. Nuqta  $a$  to‘g‘ri chiziqqa tegishli. Ular orqali ...

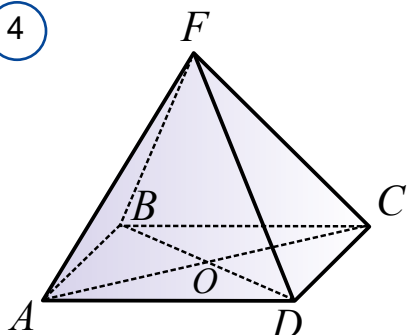
- A) kamida bitta tekislik o‘tkazish mumkin
- B) faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin
- C) bittadan ortiq tekislik o‘tkazish mumkin

8.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  va  $D$  nuqtalar bir tekislikda yotmaydi.  $AB$  va  $CD$  to‘g‘ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

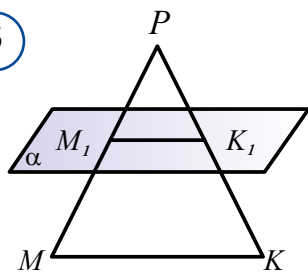
- A) kesishadi

- B) parallel  
C) ayqash
9. To'g'ri chiziqlar haqida qaysi mulohaza to'g'ri (2-rasm)?  
A)  $BC$  va  $MN$  kesishadi.  
B)  $BC$  va  $MN$  ayqash.  
C)  $MN$  va  $DC$  keshishmaydi.
10. Ikki chiziqning o'zaro parallelligini isbotlash uchun nimani aniqlash yetarli?  
A) ularning kesishmasligini  
B) ularning qandaydir to'g'ri chiziqqa perpendikulyarligini;  
C) ularning kesishmasligi va bir tekislikda yotmasligini.
11. Qaysi mulohaza noto'g'ri?  
A)  $a \parallel b, b \parallel c \rightarrow a \parallel c$   
B)  $a \parallel b, c \div a \rightarrow c \div b$   
C)  $a \div b, b \div c \rightarrow a \parallel c$
12.  $F$  nuqta  $ABCD$  parallelogramm tekisligida yotmaydi.  $K$  nuqta  $DF$  kesmaning,  $N$  nuqta esa  $BF$  kesmaning o'rtasi. U holda  $AK$  va  $CN$  to'g'ri chiziqlar...  
A) ayqash  
B) kesishadi  
C) parallel
13.  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto'g'ri?  
A)  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotgan har qanday to'g'ri chiziqqa parallel.  
B)  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotgan hech qaysi to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi.  
C)  $\alpha$  tekislikda yotuvchi va  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq mavjud.
14. Qaysi mulohaza noto'g'ri?  
A) Agar tekislik boshqa tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tib, bu tekislikni kesib o'tsa, u holda tekisliklarning kesishish chizig'i berilgan chiziqqa parallel bo'ladi.  
B) Agar to'g'ri chiziq kesishuvchi ikkita tekislikka parallel bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'iga parallel bo'ladi.  
C) Bir tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar parallel.
15.  $ABCD$  trapetsiyaning  $MN$  o'rta chizig'i  $\alpha$  tekislikda yotadi. Trapetsiyaning  $A$  uchi bu tekislikka tegishli emas. U holda  $BC$  to'g'ri chiziq...  
A)  $\alpha$  tekislikda yotadi  
B)  $\alpha$  tekislikni kesib o'tadi  
C)  $\alpha$  tekislikka parallel
16.  $M$  nuqta  $a$  to'g'ri chiziqda yotmaydi. U holda qaysi mulohaza noto'g'ri?  
A)  $M$  nuqta orqali  $a$  to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydigan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.  
B)  $M$  nuqta orqali  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.  
C)  $M$  nuqta orqali  $a$  to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydigan cheksiz ko'p to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

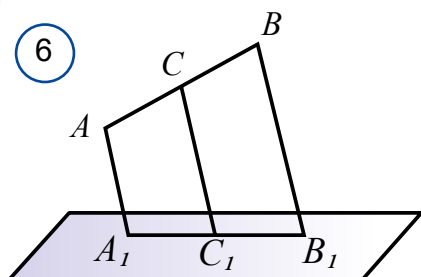
4



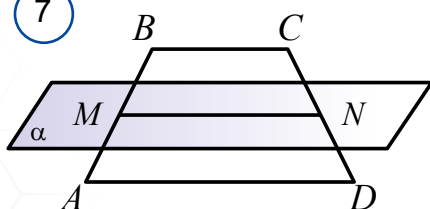
5



6



7



17.  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel,  $b$  to'g'ri chiziq ham  $\beta$  tekislikka parallel.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

- A) parallel
- B) kesishadi
- C) ayqash

18.  $a$  to'g'ri chiziq bo'ylab ikkita tekislik kesishadi.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar ayqash va  $a, c$  to'g'ri chiziqlar parallel.  $b$  va  $c$  to'g'ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?

- A) bu tekisliklardan birida yotadi;
- B) berilgan turli tekisliklarda yotadi;
- C) bu tekisliklar bilan kesishadi (javob ijobiy bo'lsa,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar o'zaro joylashishini ko'rsating).

## 2. Masalalar

1.  $A, B$  va  $C$  nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotadi,  $D$  nuqta esa unda yotmaydi. Har uchta nuqtadan o'tkazilgan tekisliklar soni nechta?

2.  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $m$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.  $A$  nuqta  $\alpha$  tekislikda,  $B$  nuqta  $\beta$  tekislikda yotadi. Qaysi holatda  $AB$  to'g'ri chizig'i  $\beta$  tekislikda yotadi?

3. Beshta tekislik chizilgan. Ularning har ikkitasi kesishadi. Juft-juft kesishadigan tekisliklarning kesishish chiziqlarining eng ko'p soni nimaga teng?

4.  $ABCD$  – parallelogramm (4-rasm).  $F \in ABC$ .  $AFC$  va  $BFD$  tekisliklar qaysi to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi?

5.  $MKP$  uchburchak berilgan (5-rasm).  $MK$  to'g'ri chiziqqa parallel tekislik  $MP$  tomonni  $M_1$  nuqtada,  $PK$  tomonni  $K_1$  nuqtada kesib o'tadi.  $MK = 18$  cm,  $MP : M_1P = 12 : 5$ .  $M_1K_1$  kesmaning uzunligi toping.

6.  $AB$  kesma  $\alpha$  tekislik bilan kesishmaydi (6-rasm). Kesmaning uchlari va uning o'rtasi  $C$  nuqta orqali parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikni mos ravishda  $A_1, B_1$  va  $C_1$  nuqtalarida kesib o'tadi.  $AA_1 = 6$  cm,  $CC_1 = 9$  cm.  $BB_1$  kesmaning uzunligini toping.

7.  $ABCD$  trapetsiya asoslariga parallel bo'lgan tekislik  $AD$  va  $CD$  tomonlarini mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalarda kesib o'tadi (7-rasm).  $CN = ND$ .  $AD = 6$  cm,  $BC = 4$  cm.  $MN$  kesmaning uzunligini toping.



8.  $ABCD$  piramidada  $M, H$  va  $P$  nuqtalar mos ravishda  $AD, DC$  va  $AB$  qirralarning o'rtasi (8-rasm).  $KH \parallel ABD$ .  $AC = 8$  cm,  $BD = 10$  cm.  $MHKP$  to'rtburchakning perimetrini toping.

9. Ikki xil tekislikning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta umumiy nuqtasi bo'lishi mumkinmi?

10.  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi.  $\beta$  tekislik  $\alpha$  tekislikni  $b$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi.  $a$  to'g'ri chiziq esa  $\beta$  tekislikni  $B$  nuqtada kesib o'tadi.  $B$  nuqta qayerda yotadi?

11. Bir tekislikda yotmaydigan  $a, b$  va  $c$  to'g'ri chiziqlar bitta nuqtadan o'tadi. Bu chiziqlar jufti orqali nechta turli xil tekisliklarni o'tkazish mumkin?

12.  $A, B$  nuqtalar va  $CD$  to'g'ri chiziq bir tekislikda yotmaydi.  $CD$  va  $AB$  to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashgan?

13. Kvadratning ikki qo'shni uchi va diagonallarining kesishish nuqtasi  $\alpha$  tekislikda yotadi. Kvadratning qolgan ikkita uchi ham shu tekislikda yotishini isbotlang.

14.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar ayqash.  $c$  to'g'ri chiziq  $b$  to'g'ri chiziqqa parallel.  $a$  va  $c$  to'g'ri chiziqlar kesishishi mumkinmi?

1)  $\alpha$  tekislikda yotgan va  $BC$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq  $AD$  to'g'ri chiziqqa parallel ekanini isbotlang.

2)  $M$  va  $N$  nuqtalar yon tomonlarning o'rtalari.  $BC = 8$ ,  $MN = 12$  bo'lsa,  $AD$  ni toping.

15.  $M$  nuqta  $ABCD$  parallelogramm tekisligidan tashqarida joylashgan.

1)  $MAD$  va  $MBC$  uchburchaklarning o'rta chiziqlari parallel ekanini isbotlang.

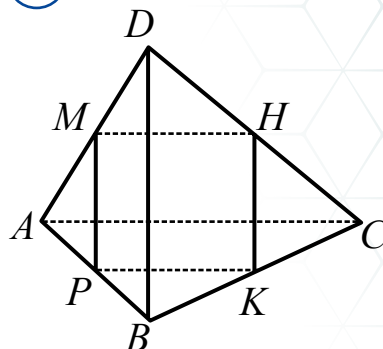
2)  $ABCD$  parallelogrammning asosi 5 ga teng. Balandligi esa 4 ga teng va u tushirilgan tomonni ikkiga bo'ladi.  $MAD$  va  $MBC$  uchburchaklarning o'rta chiziqlarni toping.

16.  $\alpha$  tekislik  $ABC$  uchburchakning  $AB$  va  $BC$  tomonlarini mos ravishda  $M$  va  $N$  nuqtalarda kesib o'tadi.  $BN : NC = 5 : 8$  va  $MB : AB = 5 : 13$ .

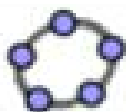
1)  $AC \parallel \alpha$  ekanini isbotlang.

2)  $AC = 26$  bo'lsa,  $MN$  ni toping.

8



Mashhur faylasuf va olim Pifagor o'z sharafiga atalgan teoremani to'g'ri burchakli uchburchak tomonlariga kvadratlarni qurib isbotlagan. Bu ajoyib kashfiyot edi va o'sha kezlarda hamma ham buni to'liq tushuna olmadi. Pifagor teoremasi hatto "eshaklar ko'pri-gi" deb ham atalgan, chunki olimning o'zi teoremani faqat yodlagan, lekin uning ma'nosini tushunmagan ya'ni "ko'prikdan o'ta olmagan" shogirdlarini eshaklar deb atagan.



## GeoGebra – matematikadan “jonli” chizmalar dasturi

**GeoGebra** bu – geometriya, algebra va boshqa fanlar bo‘yicha ta’limning turli darajalarida foydalanish uchun dinamik (“jonli”) chizmalar yaratish imkoniyatini beradigan bepul dastur hisoblanadi. U geometrik shakllar, algebraik ifodalar, jadvallar, grafiklar va statistika bilan ishlash uchun keng imkoniyatlarni taqdim etadi.

Ushbu dasturiy ta’minot 2002-yilda avstriyalik matematik Markus Hohenwarter tomonidan yaratilgan bo‘lb, hozirgi kunda undan millionlab kishilar foydalanib kelmoqda.

### GeoGebra dasturining afzalliklari:

- bepul;
- ko‘p tilli interfeysga ega;
- grafik interfeysi sodda va foydalanishga qulay;
- turli xil operatsion tizimlarga (hatto planshet va smartfonlarga) o‘rnatish imkoniyati va onlayn versiyaning mavjudligi;
- foydalanuvchilar tomonidan materiallarni qo‘shish uchun ochiq baza mavjudligi.

### GeoGebra dasturining qismlari vazifalari

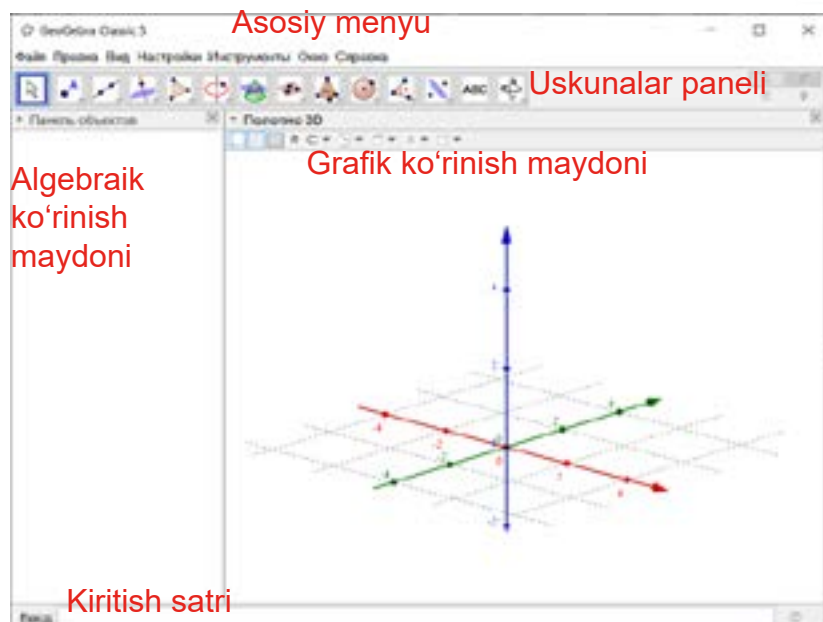
	<b>Kalkulyatorlar to‘plami</b> Funksiyalarni tekshirish, tenglamalarni yechish, geometrik shakllar va 3D obyektlarni qurish		<b>Geometriya</b> Turli geometrik shakllarni chizish va ularning shakllarini almashtirish
	<b>3D kalkulyator</b> Turli chizmalar, 3D (uch o‘lchovli) geometrik shakllar va obyektlarni chizish		<b>CAS kalkulyator</b> Turli tenglamalarni yechish, algebraik ifodalar shaklini almashtirish, hosila va integralarni hisoblash
	<b>Grafik kalkulyator</b> Turli funksiyalar grafiklarini qurish, tenglamalarni tadqiq qilish va ma’lumotlarni tasvirlash		<b>Klassik GeoGebra</b> Geometriya, ma’lumotlarni tasvirlash, ehtimolliklar va turli kattaliklarni hisoblash

### Amaliy topshiriq










1. GeoGebra rasmiy vebsayti (<http://www.geogebra.org/>)dan GeoGebra haqida batafsil ma’lumot oling va uni kompyuter, planshet yoki smartfoningizga ushbu vebsaytdan yuklab oling.
2. Youtube kanalida (<https://www.youtube.com/GeoGebraChannel>) GeoGebrani o‘rganish uchun videodarslar va undan foydalanishga oid misollarni ko‘zdan kechiring.
3. 3D kalkulyatorida yaratilgan sodda ishlarni o‘rganishga harakat qiling.

## GeoGebra 3D kalkulyatori interfeysining ko'rinishi

GeoGebra dasturi "3D Kalkulyator" rejimiga o'tkazilgandan so'ng quyidagi ko'rinishdagi oyna hosil bo'ladi:



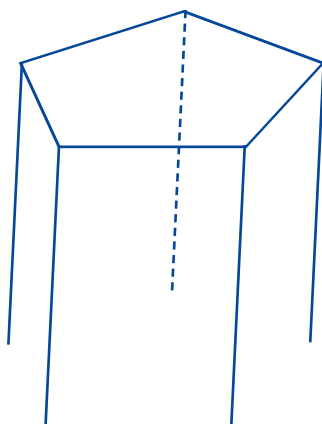
### 3D kalkulyatori panelidagi asosiy uskunalarning vazifalari

	<b>Перемещать (Siljitish)</b> – turli obyektlar (nuqta, to'g'ri chiziq, ko'pburchak va boshqalar)ni siljitish. Bir vaqtning o'zida bir nechta obyektlarni tanlash uchun Ctrl tugmachasini bosgan holda sichqoncha bilan ketma-ket belgilash kerak.
	<b>Точка (Nuqta)</b> – tekislikda nuqta yasash. Nuqta yasash uchun tekislikdagi joyni belgilash kerak.
	<b>Прямая (To'g'ri chiziq)</b> – tekislikda berilgan ikkita nuqta orqali to'g'ri chiziq yasash. Chizmada mavjud nuqtalarni tanlashingiz yoki sichqoncha yordamida nuqtalar o'rnini belgilashingiz mumkin.
	<b>Перпендикулярная линия (Perpendikulyar to'g'ri chiziq)</b> – berilgan nuqta orqali to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazish. Perpendikulyar o'tkazish uchun tekislikda perpendikulyar quriladigan chiziqni va chiziq o'tadigan nuqtani ko'rsatish kerak.
	<b>Многоугольник (Ko'pburchak)</b> – tekislikda ixtiyoriy turdagi ko'pburchakni yasash
	<b>Окружность по точке и оси (O'qi va nuqtasiga ko'ra aylana)</b> – berilgan o'q va nuqtaga ko'ra muayyan radiusli aylana yasash.
	<b>Плоскость через три точки (Uch nuqta orqali tekislik)</b> – berilgan uchta nuqta orqali tekislik o'tkazish. Shuningdek, parallel va perpendikulyar tekisliklar ham o'tkazish mumkin.
	<b>Пирамида (Piramida)</b> – berilgan nuqtalari orqali piramida, prizma, konus, silindr va kub kabi fazoviy jismlarni yasash.
	<b>Сфера по центру и точке (markazi va nuqtasiga ko'ra sfera)</b> – markazi va sirtidagi berilgan nuqta orqali sfera yasash.

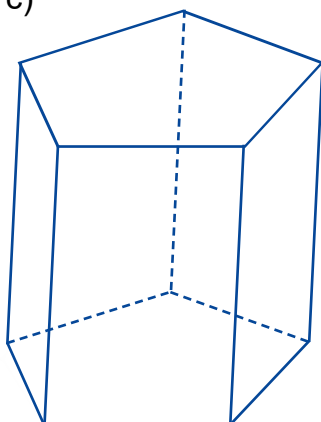
1 a)



b)



c)



### Ko'pyoqlarni tekislikda tasvirlash

Geometrik masalalarni yechishda masala shartiga mos chizmani chizish juda muhim hisoblanadi. Ba'zida to'g'ri chizilgan chizma masalaning "yarim yechimi" bilan tenglashtiriladi. Stereometriyada masalaning chizmasini to'g'ri chizish nihoyatda muhim, o'ta mas'uliyatli va ba'zida esa murakkab ish hisoblanadi. Chunki stereometrik shakllar uch o'lchamli bo'lib, ularni tekislikda, daftar sahifasida tasvirlash kerak bo'ladi. Noto'g'ri chizilgan chizma noto'g'ri yechimga yoki boshi berk ko'chaga boshlaydi.

Prizmani tasvirlash quyidagi tartibda olib boriladi (1-rasm). Oldin ko'pburchak shaklidagi asoslaridan biri chiziladi. So'ng uning har bir uchidan o'zaro parallel va teng kesmalar, ya'ni prizmaning yasovchilari chiziladi. Kesmaning oxirlari mos ravishda tutashtirib chiqiladi. Bunda ikkinchi asos paydo bo'ladi.

Chizmada prizmaning ko'rinmaydigan qirralari uzoq chiziqlar bilan chiziladi.

Piramidani tasvirlash ham shunga o'xshash tartibda olib boriladi (2-rasm). Oldin ko'pburchak shaklidagi asosi chiziladi. So'ng piramida uchi belgilanib, bu nuqta asosining har bir uchi bilan tutashtirib chiqiladi. Chizmada piramidaning ko'rinmaydigan qirralari uzoq chiziqlar bilan chiziladi.

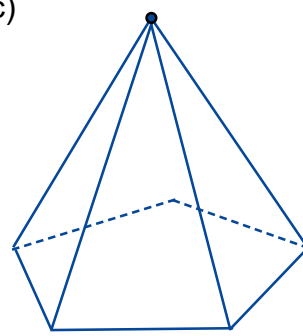
2 a)



b)



c)

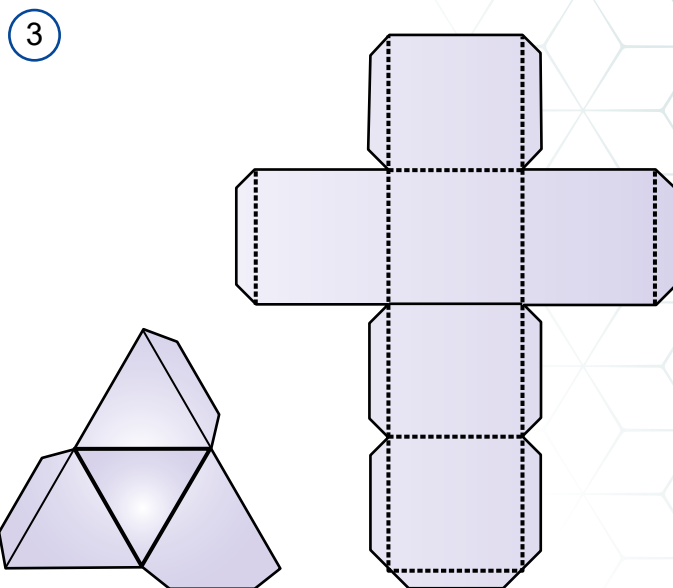




## Fazoviy shakllarning modellarini yasash

Ko'pyoqni ba'zi qirralari bo'ylab qirqib, tekislikka yoyganda, ko'pyoqning barcha yoqlari shu tekislikka yotsa, bu yassi shakl ko'pyoqning *yoyilmasi* deb ataladi. 3-rasmda kub va uchburchakli piramidaning yoyilmasi tasvirlangan.

Ko'pyoq maketini yasash uchun oldin uning yoyilmasini qalin qog'ozga chizib, so'ng qaychi bilan qirqib, tegishli qirralarini yelimlab hosil qilish mumkin. Yelimlash qulay bo'lishi uchun yelimlanadigan qirralarda ma'lum qalinlikda hoshiyalar tashlab chiziladi va qirqiladi.

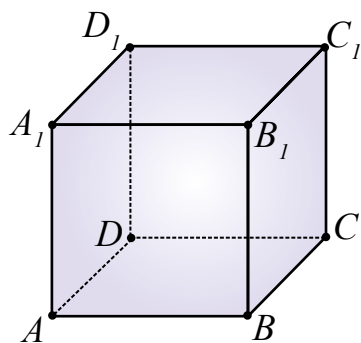


### Amaliy mashq va tatbiq

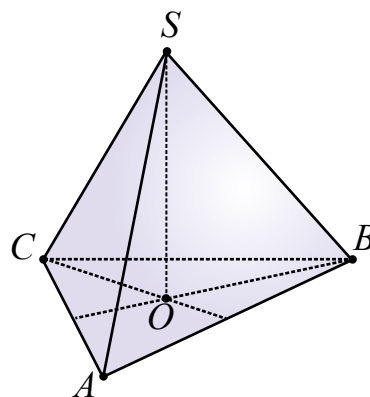
7.1. 4-rasmda keltirilgan fazoviy shakllarni daftar kataklaridan foydalanib chizing va turini ayting. Uzuq chiziqlarning ishlatilishiga e'tibor bering.

4

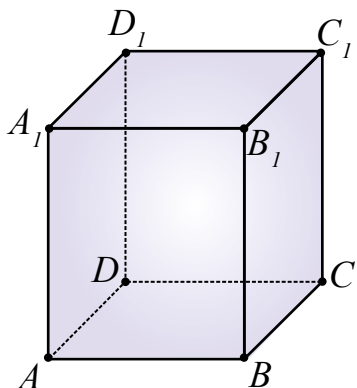
a)



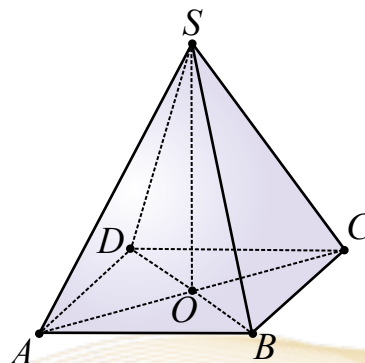
b)



c)

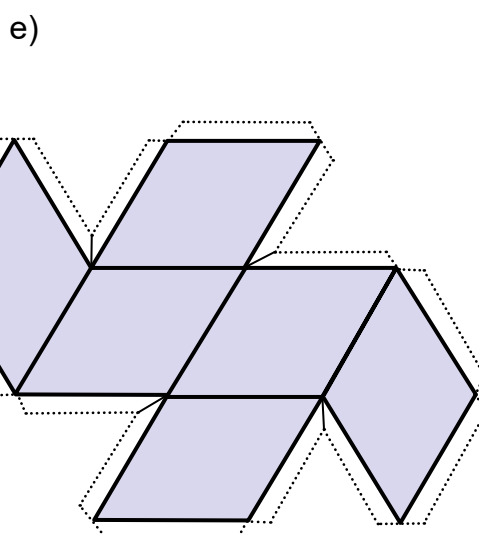
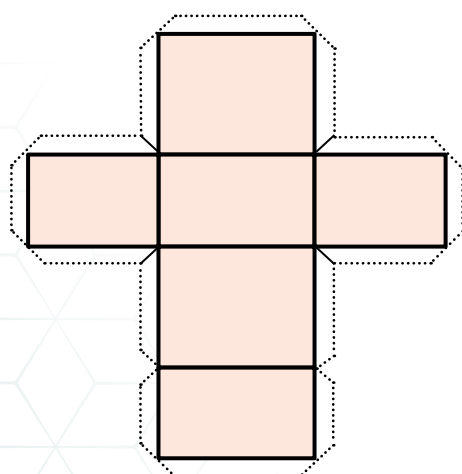
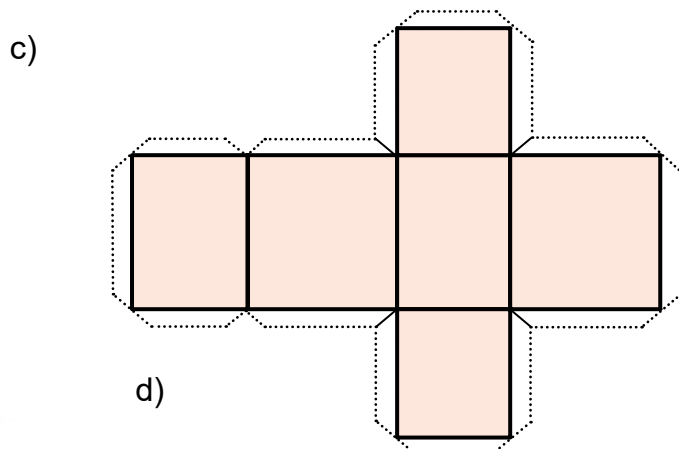
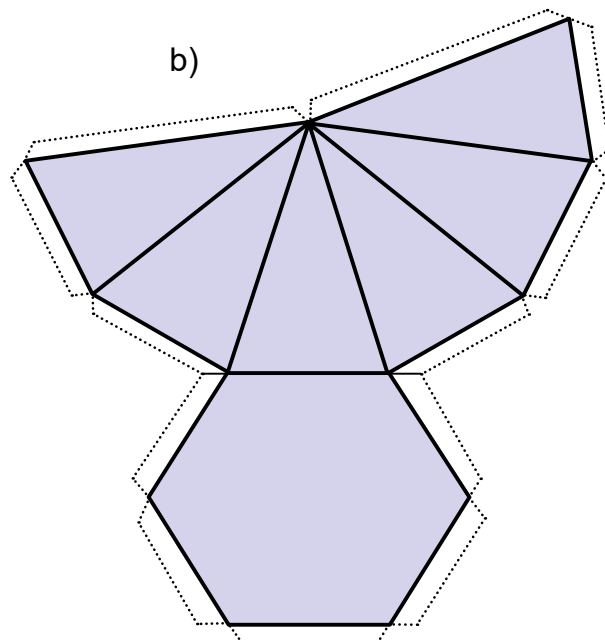
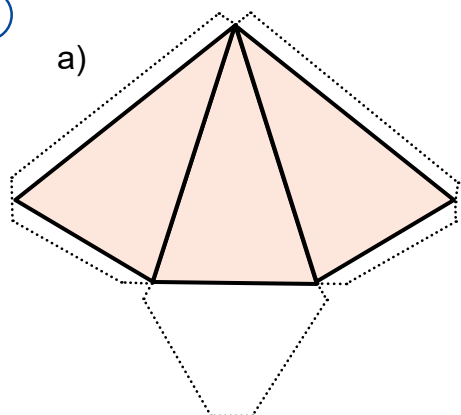


d)



7.2. Fazoviy jismlarni yaxshiroq tasavvur qilish uchun ularning modelidan foydalangan ma'qul. Fazoviy jismlarning modelini ularning yoyilmasidan foydalanib yasash mumkin (5-rasm). Ko'rib turganingizdek, fazoviy jismlarning yoyilmasi yassi geometrik shakllardan iborat. Quyidagi yoyilmalardan foydalanib to'g'ri burchakli parallelepiped, kub va piramidalar modelini yasang.

5



7.3. To'g'ri burchakli parallelepiped va muntazam to'rtburchakli piramida yoyilmasini chizing.

6

7.4. 6-rasmdagi yoyilmalarning qaysilari kubning yoyilmasi bo'ladi?

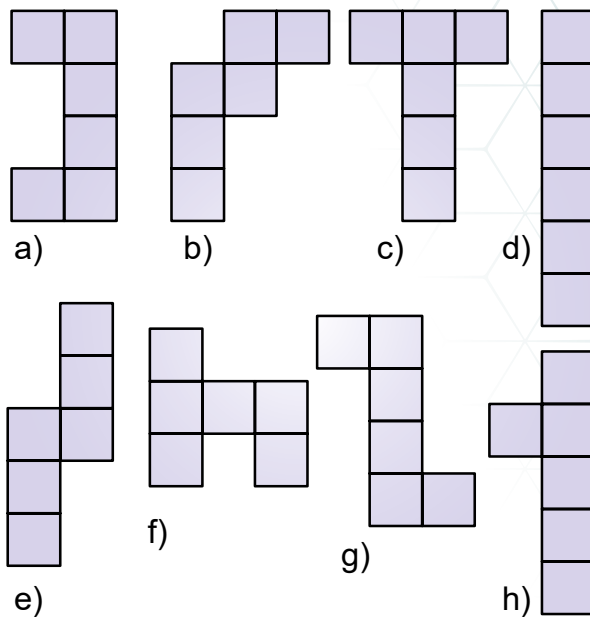
7.5. 7-rasmdagi yoyilmalarning qaysilari prizmalarning yoyilmasi bo'ladi? Prizmalarning turini aniqlang.

7.6. 8-rasmdagi yoyilmalarning qaysilari piramidalarning yoyilmasi bo'ladi? Piramidalarning turini aniqlang.

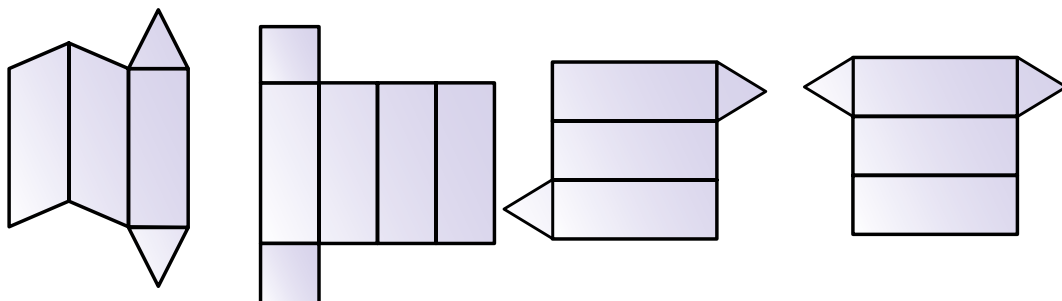
7.7. Uch xil rang bilan kubni uning qo'shni yoqlari har xil rangda bo'yaladigan qilib bo'yash mumkinmi? Kub modelini yasang va mos rangga bo'yang.

7.8. 9 ta gugurt cho'pidan 7 ta teng uch-burchak yasang.

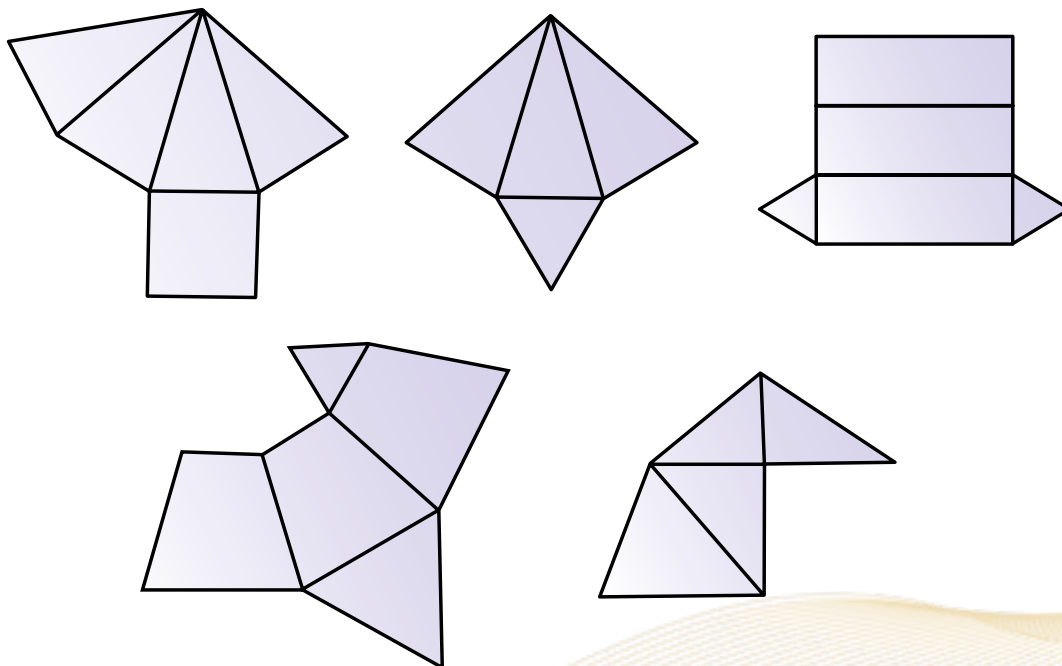
7.9.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning sirtida  $A$  uchidan  $C_1$  uchga boradigan eng qisqa yo'lni toping.

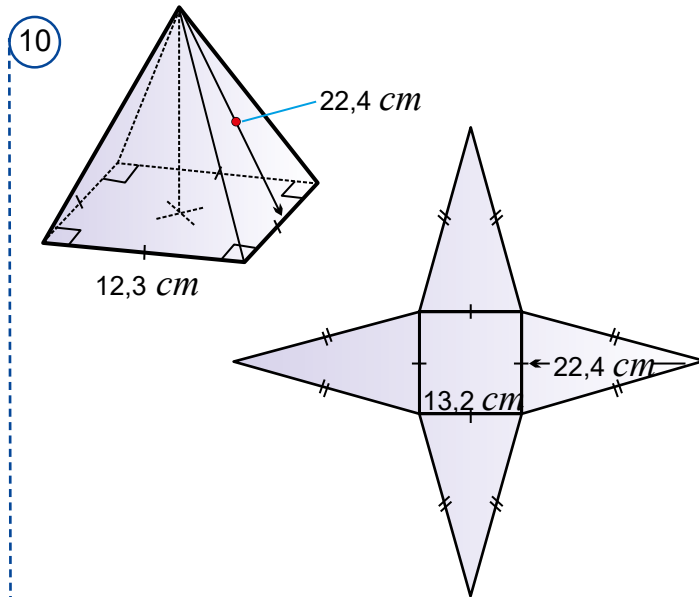
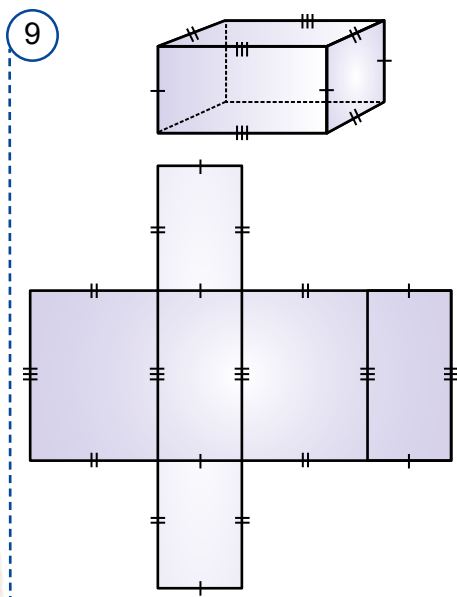


7



8





7.10. 9-rasmda tasvirlangan to'g'ri burchakli parallelepiped yoyilmasiga ko'ra uning to'la sirti formulasini toping.

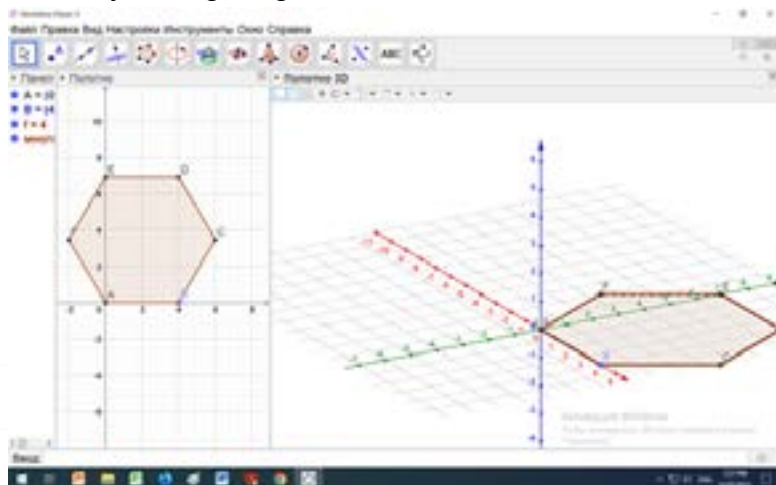
7.11. 10-rasmda tasvirlangan to'rtburchakli muntazam piramida yoyilmasiga ko'ra uning to'la sirti formulasini toping va berilgan ma'lumotlarga ko'ra hisoblang.




## “GeoGebra”ni qo'llab

### Muntazam oltiburchakli prizma va uning yoyilmasini yasash

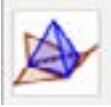
1. Prizma yasash uchun dastlab muntazam oltiburchak (prizma asosi) yasaladi. Buning uchun “Вид” menyusidan “Полотно” buyrug'i tanlanadi. Natijada ikkita alohida ishchi oyna hosil bo'ladi. Chap tomondagi ishchi oynada “Правильный многоугольник” uskunasi yordamida muntazam oltiburchak yasaladi. Buning uchun ko'pburchak bitta tomonining uzunligi va tomonlari sonini kiritish kifoya.
2. Natijada ishchi oynaning o'ng tomonida muntazam oltiburchak tasviri hosil bo'ladi.



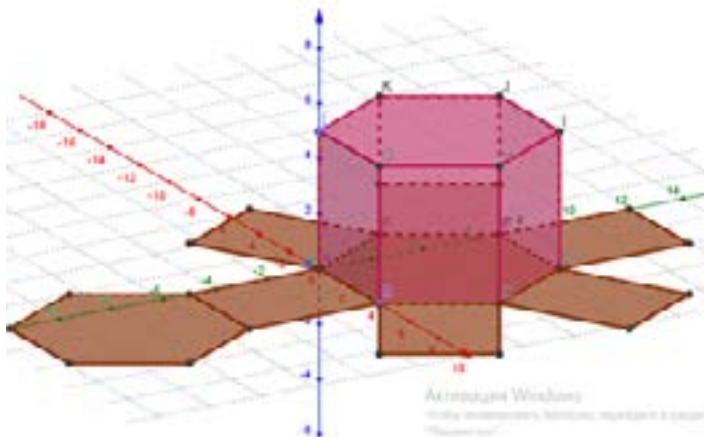
3. Chap oyna yopiladi.

4.  – “Призма” uskunasidan foydalanib, sichqoncha chap tugmasi chizilgan muntazam oltiburchak nuqtalari ustida ketma-ket bosiladi. So'ngra koordinata o'qining kerakli joyiga bosish orqali muntazam oltiburchakli prizma hosil qilinadi.

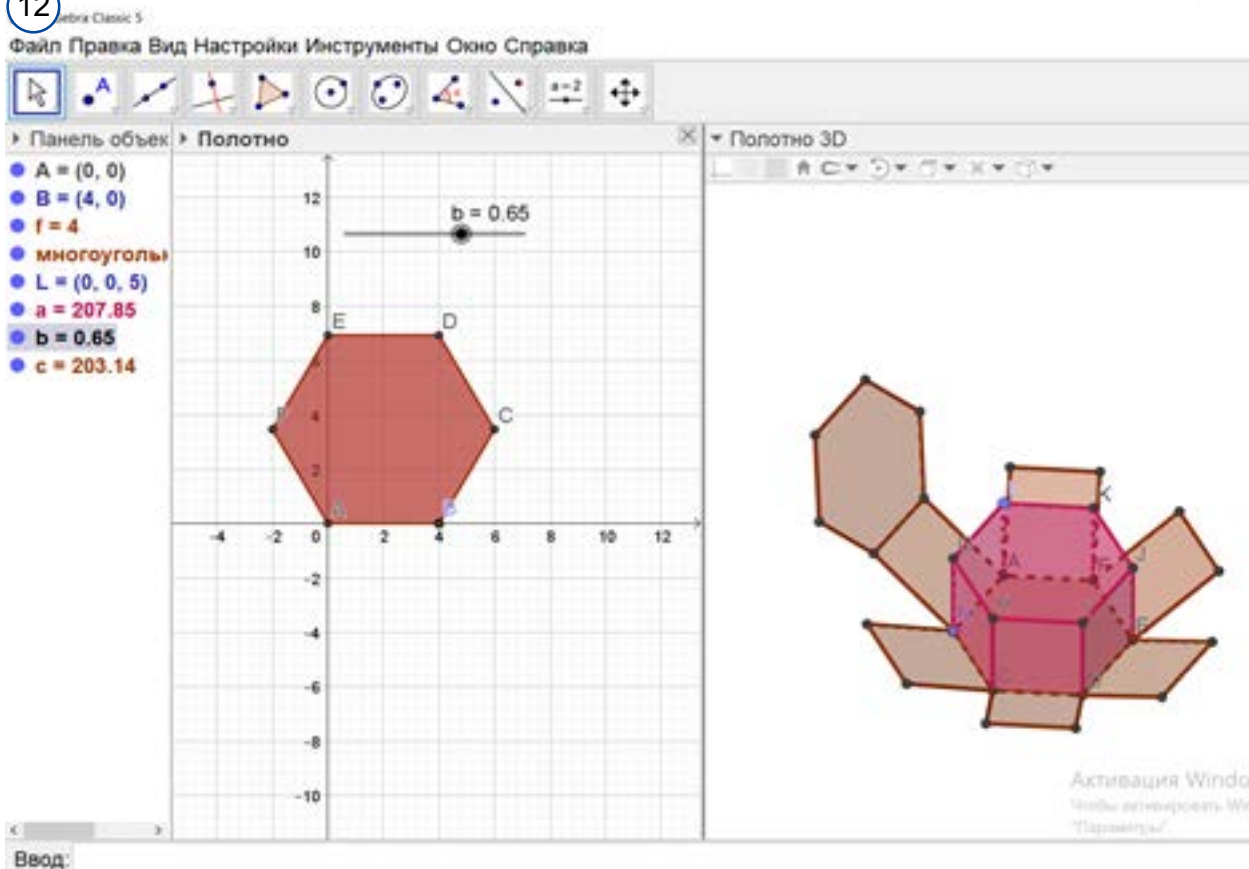


5.  – “Развёртка” uskunasi faollashtiriladi va prizma ustida sichqoncha chap tugmasi bosiladi. Natijada muntazam oltiburchakli prizma yoyilmasi hosil bo‘ladi (11-rasm).
6. “Вид” menyusidan “Полотно” buyrug‘i tanlanadi. Chap oy-nadagi “Ползунок” (surgich) tugmasi yordamida chizma yo-yilmasi harakatga keltiriladi (12-rasm).

11



12

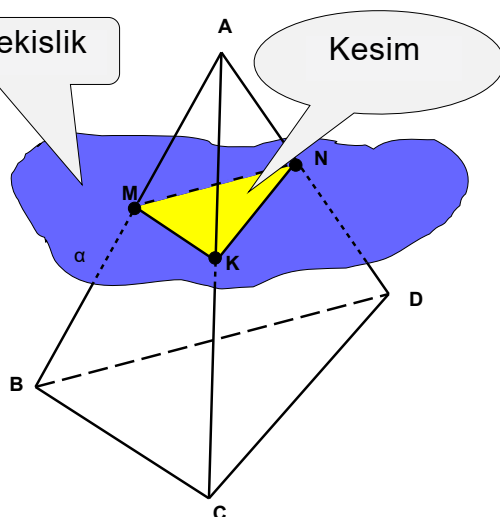


### Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Muntazam oltiburchakli piramida va uning “jonli” yoyilmasini yasang.
2. Muntazam uchburchakli prizma va uning “jonli” yoyilmasini yasang.

Kesuvchi tekislik

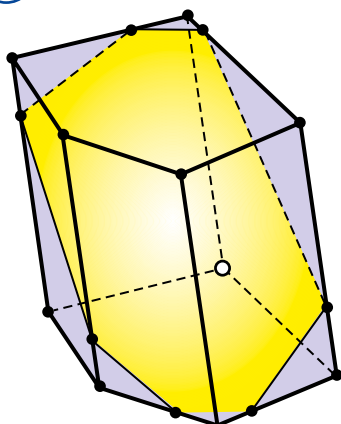
1



Fazoviy geometrik shakllarning o'zaro joylashuvini to'g'ri tasavvur qilgandagina uning chizmasini to'g'ri chizish mumkin. Fazoviy shakllarning biri ko'pyoq, ikkinchisi esa tekislik bo'lganda turli kesimlarni tasvirlashga to'g'ri keladi. Quyida ko'pyoqlarning kesimlarini yasash bilan shug'ullanamiz.

Aytaylik, ko'pyoqni biror tekislik kesib o'tgan bo'lsin. *Ko'pyoqning kesimi* deb ko'pyoqning kesuvchi tekislikka tegishli nuqtalaridan iborat geometrik shaklga aytiladi.

2



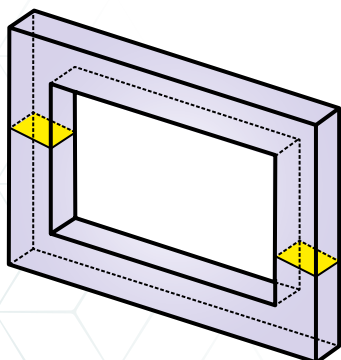
Kesuvchi tekislik ko'pyoq sirtini kesmalar bo'yicha kesib o'tadi. Shuning uchun kesim kesuvchi tekislikda yotuvchi ko'pburchakdan iborat bo'ladi. 2-rasmda beshburchakli prizmaning yettiburchakdan iborat kesimi tasvirlangan. 3-rasmdagi romni tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimi ikkita to'rtburchakdan iborat.

Ko'pyoqning kesimini tasvirlash uchun uning yoqlarining kesuvchi tekislik bilan umumiy nuqtalarini aniqlash kifoya.

Kesimning tomonlari soni ko'pyoqning yoqlari sonidan katta bo'la olmaydi.

Masalan, beshburchakli prizmaning kesimlari: uchburchak, to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va yettiburchak bo'lishi mumkin (4-rasm). Lekin sakkizburchak bo'la olmaydi. Nega?

3



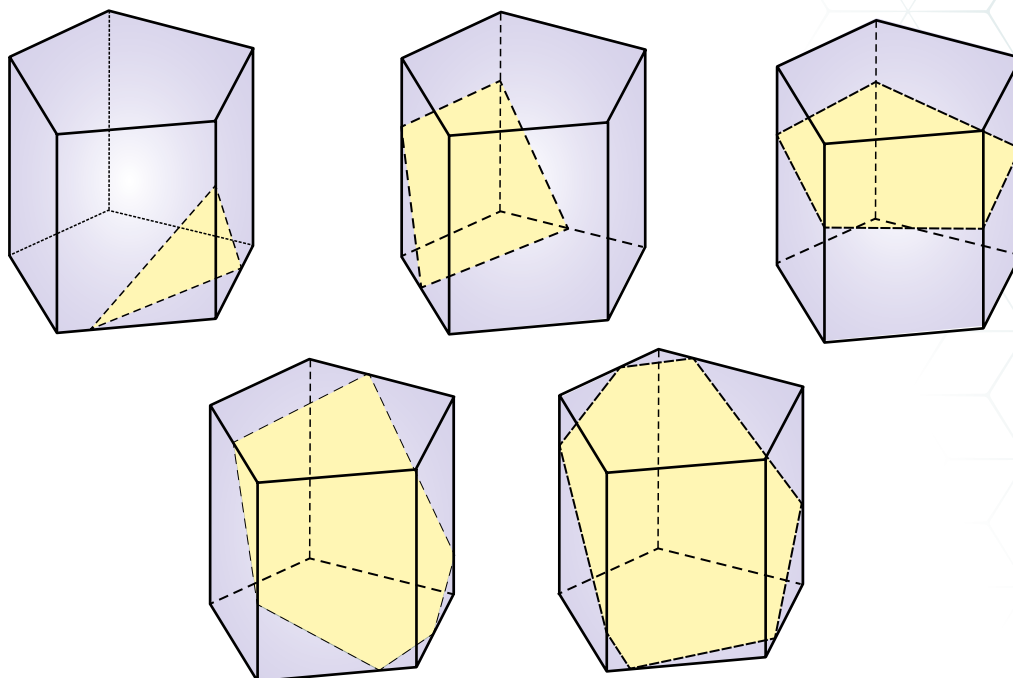
**1-masala.**  $QABC$  uchburchakli piramidaning  $AB$ ,  $AQ$  va  $CQ$  qirralarini mos ravishda  $K$ ,  $L$  va  $M$  nuqtalarda kesib o'tuchi  $\alpha$  tekislik bilan kesganda hosil bolgan kesimni yasaymiz (5-rasm).

**Yasash.** Kesuvchi  $\alpha$  tekislik piramidaning  $AQB$  yog'i bilan ikkita –  $K$  va  $L$  umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni  $KL$  kesma bo'yicha kesib o'tadi.

Xuddi shunga o'xshash  $\alpha$  tekislik piramidaning  $AQC$  yog'i bilan ikkita –  $M$  va  $L$  umumiy nuqtalarga ega bo'lgani uchun bu yoqni  $ML$  kesma bo'ylab kesib o'tadi.

Kesuvchi  $\alpha$  tekislik piramidaning  $ABC$  yog'i bilan

4



bitta  $K$  umumiy nuqtaga ega. Bu tekislikning  $BC$  qirrani kesib o'tadigan nuqtasini topamiz.

Bu tekislikka tegishli  $LM$  va  $AC$  to'g'ri chiziqlarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasi –  $X$  ni topamiz.  $X$  nuqta  $AQC$  va  $ABC$  tekisliklarda ham yotadi.

Kesuvchi  $\alpha$  tekislik piramidaning  $ABC$  yog'i bilan ikkita –  $K$  va  $X$  umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni  $KX$  kesma bo'yicha kesib o'tadi.

$KX$  to'g'ri chiziq va  $BC$  qirraning kesishish nuqtasi  $N$  ham  $\alpha$  tekislikda yotadi.

Demak,  $\alpha$  tekislik  $ABC$  yoqni  $KN$  kesma bo'yicha,  $BQC$  yoqni esa  $MN$  kesma bo'yicha kesib o'tadi.

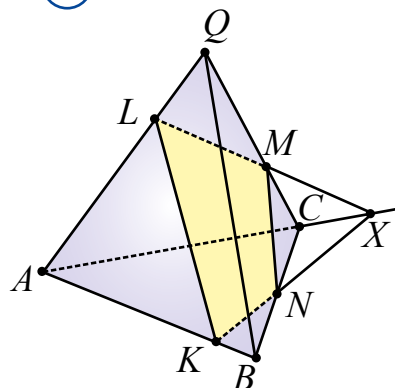
$KLMN$  to'rtburchak  $\alpha$  tekislikning piramida bilan kesimidan iborat bo'ladi.  $KL$  va  $KN$  kesmalar  $\alpha$  tekislikning  $ABQ$  va  $ABC$  yoqlardagi *izlari* deb ataladi.

Shu bois kesim yasashning bunday usuli *izlar usuli* deb nomlanadi.

Bu usulning mohiyati quyidagilardan iborat:

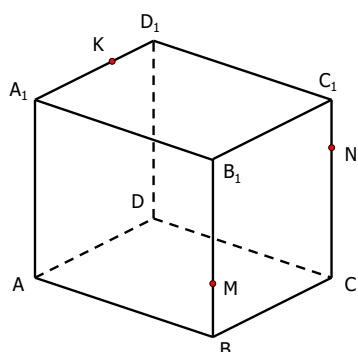
- Kesuvchi tekislik bilan ko'pyoq biror yog'ining kesishish chizig'idan iborat bo'lgan yordamchi to'g'ri chiziqni qurishdan iborat.
- Odatda kesuvchi tekislik bilan ko'pyoqning pastki asosi yotgan tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash qulay hisoblanadi. Bu chiziq *kesuvchi tekislikning izi* deb ataladi.
- Izdan foydalanib kesuvchi tekislikning ko'pyoqning yon qirralari va yoqlarida yotgan nuqtalar oson aniqlanadi.

5

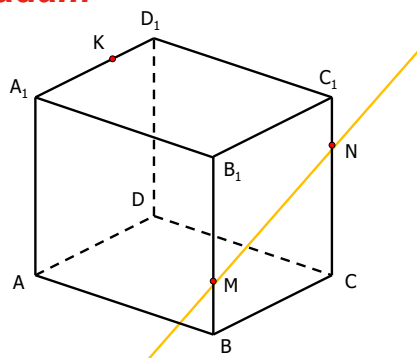


6

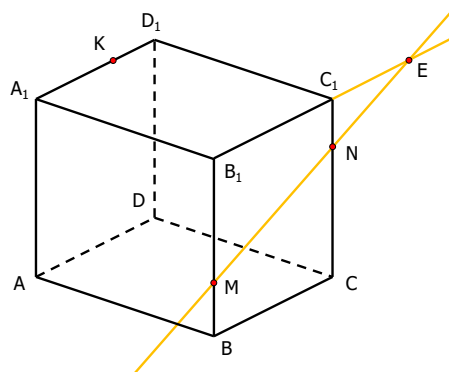
**1-qadam**



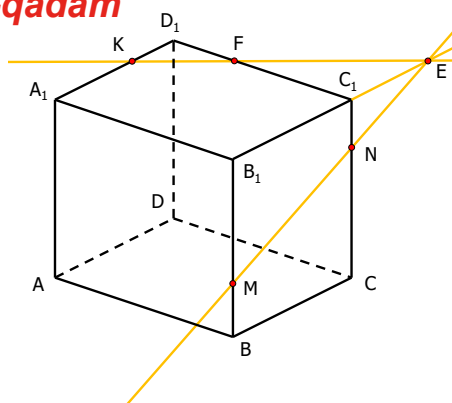
**2-qadam**



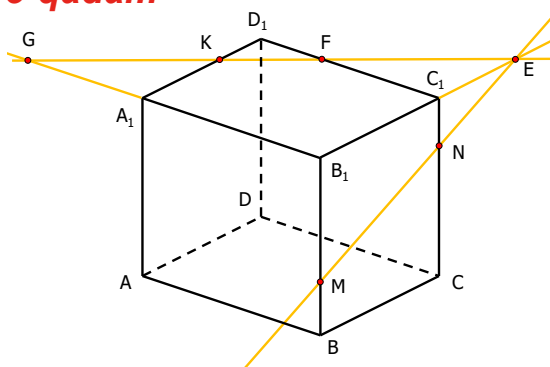
**3-qadam**



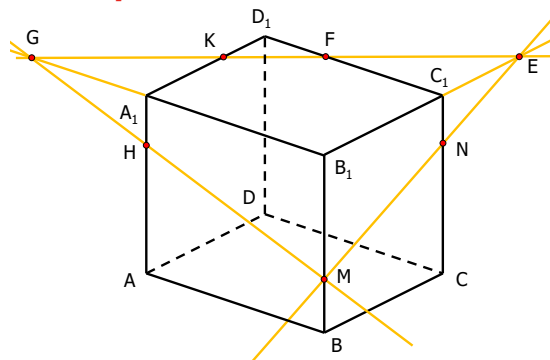
**4-qadam**



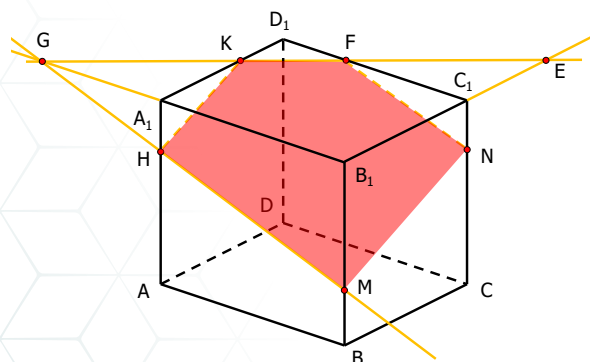
**5-qadam**



**6-qadam**



**7-qadam**



**2-masala.** Kubning  $M$ ,  $P$  va  $K$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesimini yasaymiz.

**Yasash.** Kesimni yasash izlar usulida bajarilgan. Yasash ketma-ketligi 6-rasmda qadam-baqadam keltirilgan. Uni o'rganib chiqib, yasash jarayonini izohlang.

$MNFKH$  – izlanayotgan kesim.





**3-masala.**  $OKLMN$  piramidaning  $OL$  qirrasining  $A$  nuqtasi va piramidaning  $KLMN$  asosi tekisligida yotuvchi  $k$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi  $\beta$  tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan kesimni yasaymiz (7-rasm).

**Yasash.**  $LM$  va  $k$  to'g'ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz. Bu nuqta  $k$  to'g'ri chiziqda yotganligi uchun  $\beta$  tekislikka tegishli. Shuningdek, bu nuqta  $LM$  to'g'ri chiziqda yotgani uchun  $LOM$  yoqqa ham tegishli.  $A$  nuqta bu ikki tekislikning har ikkisi-ga ham tegishli. Shuning uchun  $\beta$  tekislik  $LOM$  tekislikni  $AX$  to'g'ri chiziq bo'yicha,  $LOM$  yoqni esa  $AB$  kesma bo'yicha kesib o'tadi. Bu yerda  $B$  nuqta –  $AX$  va  $OM$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Xuddi shu kabi  $\beta$  tekislikning  $OLK$  yoqni kesib o'tadigan  $Y$  va  $D$  nuqtalari va  $AD$  kesmani aniqlaymiz. So'ng  $Z$  va  $C$  nuqtalar hamda  $DC$  va  $BC$  kesmalarni aniqlaymiz. Natijada hosil bo'lgan  $ABCD$  to'rtburchak izlanayotgan kesimdan iborat bo'ladi.

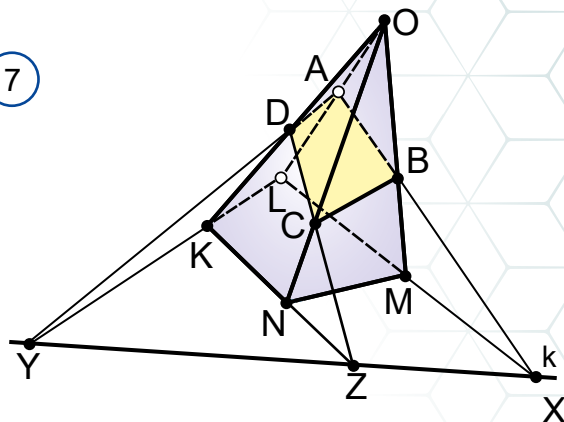


**4-masala.**  $A$ ,  $B$  va  $C$  – to'rtburchakli prizmaning turli yoqlaridagi nuqtalari. Prizmaning  $ABC$  tekislik bilan kesimini topamiz (8-rasm).

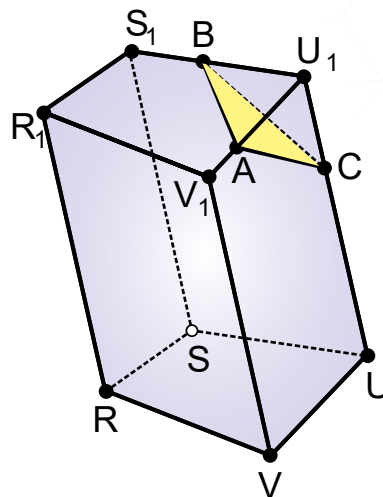
Izlanayotgan kesim  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalarning to'rtburchakli prizmaning qaysi yoqlarida va qanday yotganligiga bog'liq bo'ladi. 8-rasmda  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalarning bitta uchdan chiquvchi yoqlarda yotgan, eng sodda holati tasvirlangan.

9-rasmda tasvirlangan holatda kesimni yasash murakkabroq ish sanaladi. Qolgan holatlardagi kesimlar quyidagi – 10- va 11-rasmlarda keltirilgan. Ko'rib turganingizdek, kesim uchburchak, to'rtburchak, beshburchak va oltiburchakdan iborat bo'lmoqda. Bu kesimlarning yasashini mustaqil tahlil qiling.

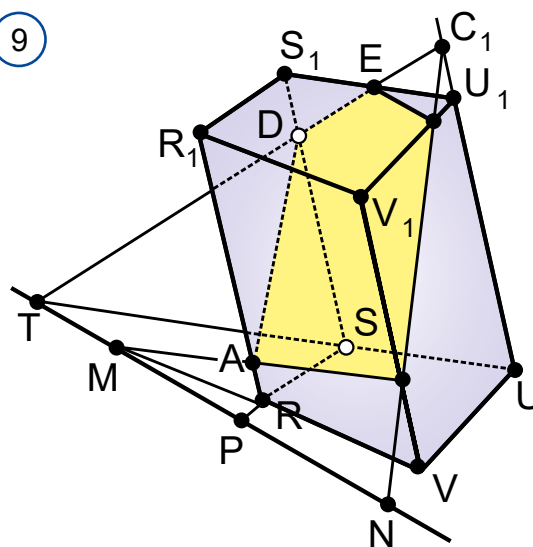
7

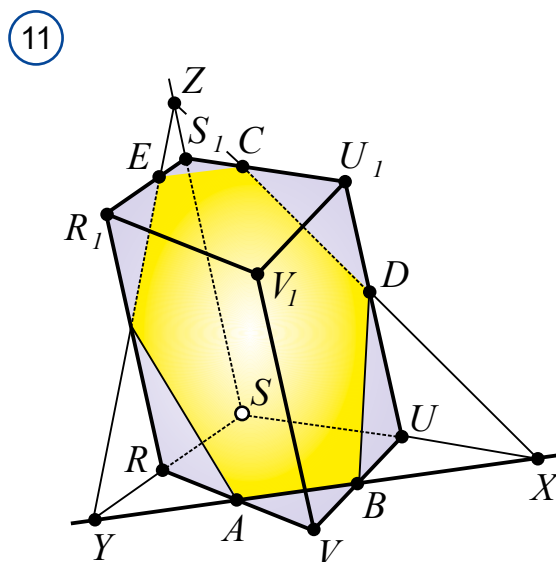
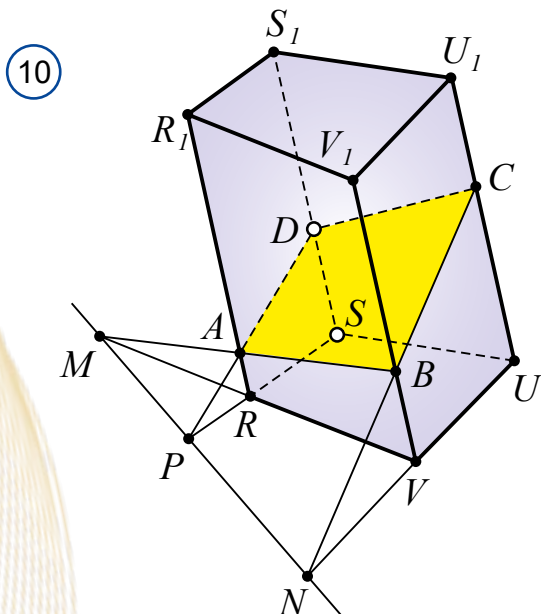


8



9





### Izlar usulini qo'llash qoidalari

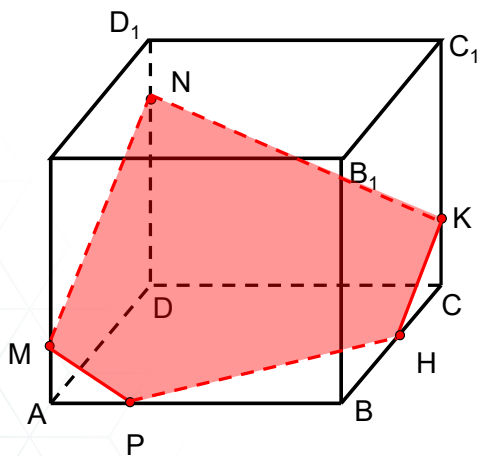
- kesimning uchlari ko'pyoqning faqat qirralarida yotadi;
- kesimning tomonlari ko'pyoqning faqat yoqlarida yotadi;
- kesuvchi tekislik va ko'pyoqning yog'i kesishsa, ularning kesishish chizig'i yagona to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

### Parallel ko'chirish usuli



**5-masala.** Kubning  $M, N$  va  $K$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

12



### Yasash.

1.  $M$  va  $N$  nuqtalarni kesma bilan tutashtiramiz.
2.  $N$  va  $K$  nuqtalarni kesma bilan tutashtiramiz.
3.  $M$  nuqtadan  $NK$  ga parallel to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Uning  $AB$  qirra bilan kesishish nuqtasini  $P$  bilan belgilaymiz.
4.  $K$  nuqtadan  $MN$  ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Uning  $BC$  qirra bilan kesishish nuqtasini  $H$  bilan belgilaymiz.
5.  $P$  va  $H$  nuqtalarni kesma bilan tutashtiramiz.
6.  $MNKHP$  izlanayotgan kesim bo'ladi.



### Mavzuga doir savollar

1. *Ko'pyoqning kesimi* deb nimaga aytiladi?
2. Ko'pyoqning kesimi qanday shakl bo'lishi mumkin?
3. Bir tekislikning ikkinchi tekislikdagi izini tushuntirib bering.
4. To'rtburchakli ko'pyoqning kesimi nimalar bo'lishi mumkin?
5. Kesim yasashning izlar usulini tushuntirib bering.
6. Kesim yasashning parallel ko'chirish usulini tushuntirib bering.



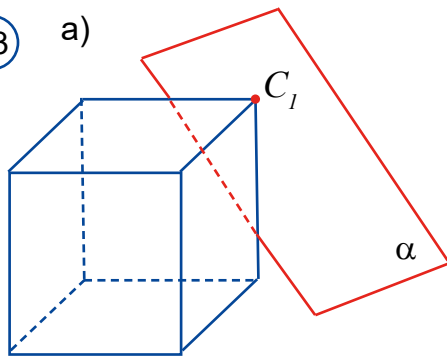
## Amaliy mashq va tatbiq

8.1. Jadvalda 8-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

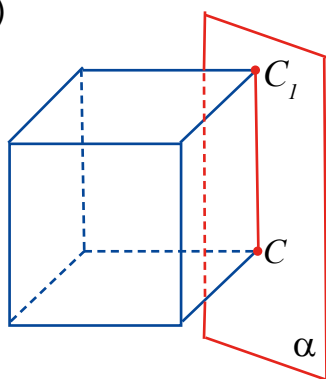
Ko'pyoqlarning sodda kesimlari			
Ko'pburchakli prizma	To'g'ri burchakli parallelepiped	Kub	Piramida
<p><math>ACC_1</math> –  <math>A, C, C_1</math> nuqtalardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik.</p> <p><math>ACC_1A_1</math> – kesim.</p>	<p><math>CBK</math> –  <math>K</math> nuqta va <math>CB</math> to'g'ri chiziqdan o'tuvchi, kesuvchi tekislik.</p> <p><math>CBKM</math> – kesim.</p>	<p><math>A_1BC_1</math> –  <math>BC_1</math> va <math>BA_1</math> to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik.</p> <p><math>A_1C_1B</math> – kesim.</p>	<p><math>ABN</math> –  <math>AB</math> va <math>LN</math> parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik.</p> <p><math>ABNL</math> – kesim.</p>

13

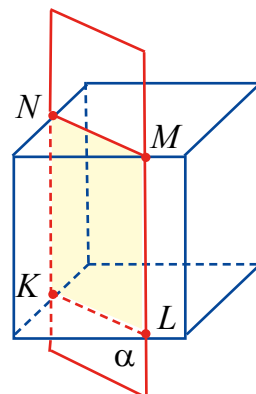
a)



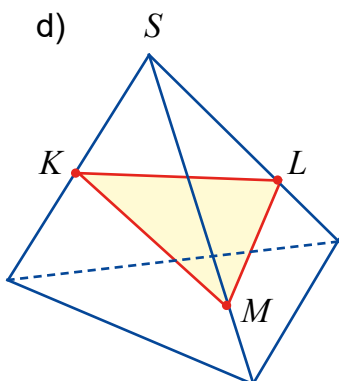
b)



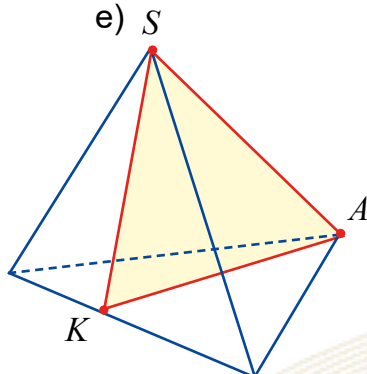
c)



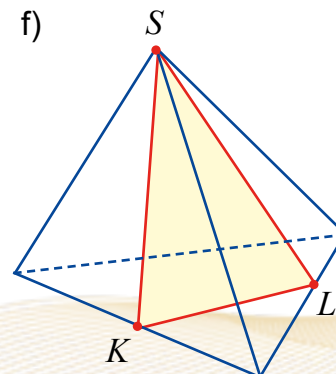
d)

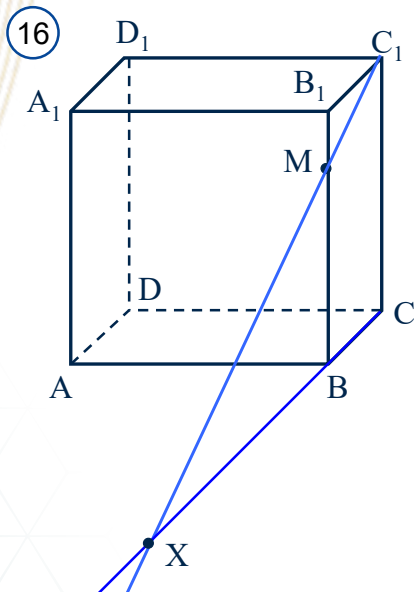
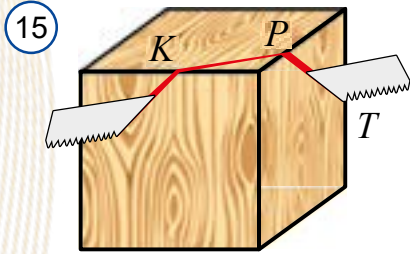
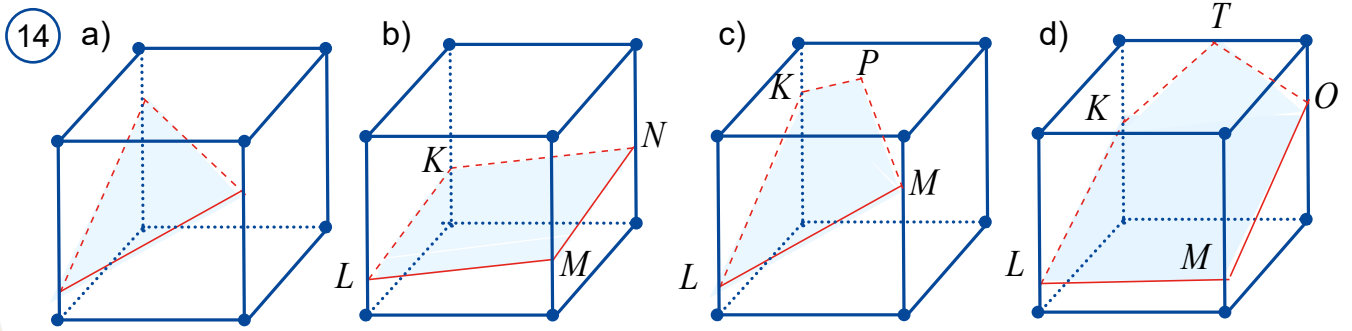


e)

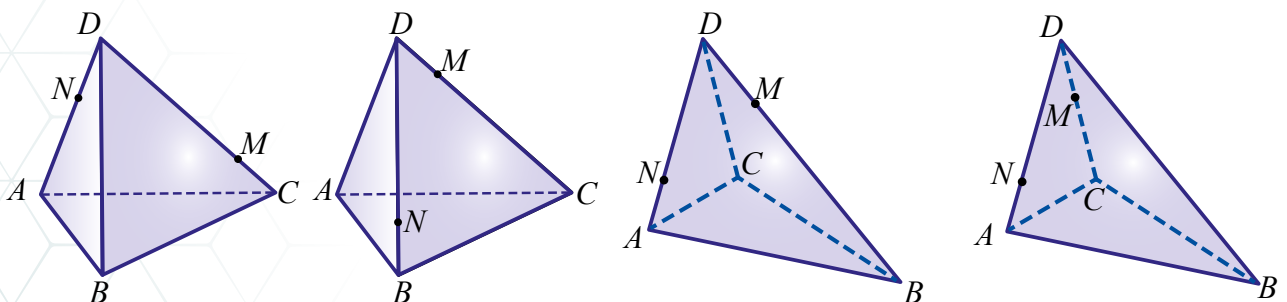


f)





17



8.2. 13-rasmda keltirilgan holatlarda fazoviy shakllarning qanday kesimi tasvirlanganligini izohlang.

8.3. Kubni tekislik bilan kesganda kesimda 14-rasmda tasvirlangan qaysi holatlar bo'lishi mumkin? Qaysilari bo'lishi mumkin emas?

8.4. 15-rasmda tasvirlangan yog'och kub arralanganda  $K$ ,  $P$  va  $T$  nuqtalardan o'tuvchi kesim hosil bo'ladi. To'liq kesim qanday shakldan iborat bo'ladi?

8.5. Kub chizing. Uning qirralarida shunday uchta nuqtani belgilangki, bu nuqtalardan o'tuvchi tekislik kesimda: a) uchburchak; b) to'rtburchak; c) bechburchak hosil qilsin.

8.6. Quyidagi algoritm asosida yasashni bajaring va yasash jarayonini izohlang.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kub va  $M \in BB_1$  nuqta berilgan.  $C_1 M$  to'g'ri chiziq bilan kubning  $ABCD$  yog'i kesishish nuqtasini topish algoritmi (16-rasm):

$C_1 M$  va  $BC$  kesmalarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasini  $X$  bilan belgilaymiz.

$X$  – izlangan nuqta bo'ladi.

8.7. 17-rasmda tasvirlangan  $ABCD$  tetraedrning qirralarida  $M$  va  $N$  nuqtalar belgilangan.  $MN$  to'g'ri chiziqning  $ABC$  tekislik bilan kesishish nuqtasi qaysi to'g'ri chiziqda yotishini aniqlang.

8.8. Quyidagi algoritm asosida kubning berilgan nuqtalardan o'tuvchi kesimini yasang va izohlang.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning  $A_1$ ,  $M \in D_1 C_1$  va  $N \in DD_1$  nuqtalaridan o'tuvchi kesimini yasash algoritmi (18-rasm):



1.  $A_1$  nuqtani  $M$  nuqta bilan tutashtiramiz.
2.  $A_1$  nuqtani  $N$  nuqta bilan tutashtiramiz.
3.  $M$  nuqtani  $N$  nuqta bilan tutashtiramiz.
4.  $A_1MN$  uchburchak izlanayotgan kesim bo'ldi.

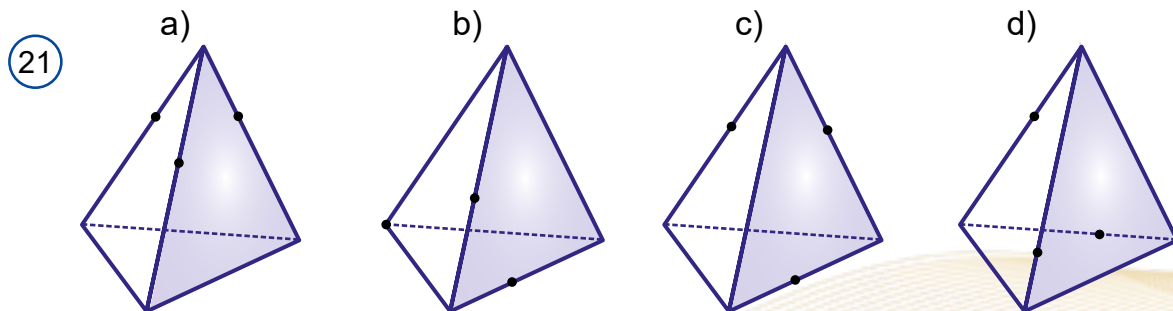
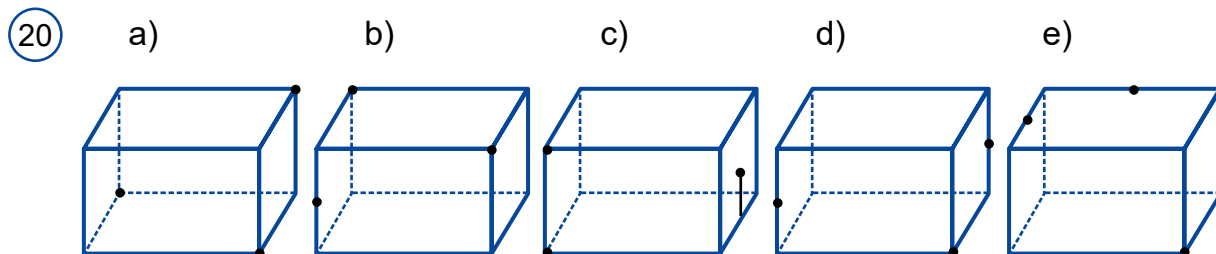
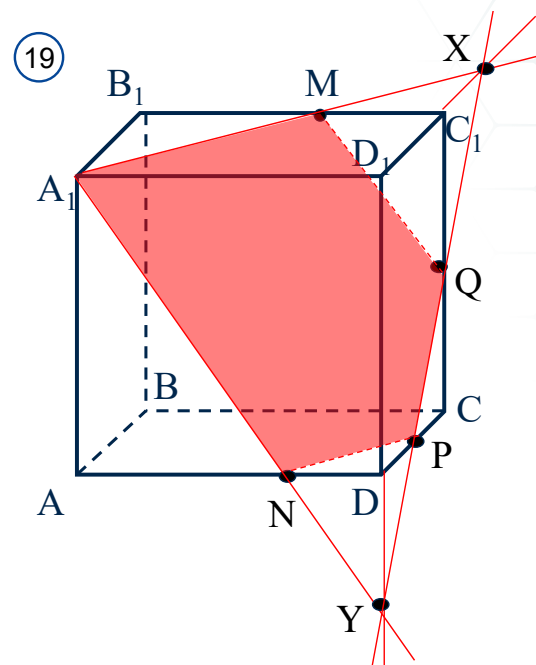
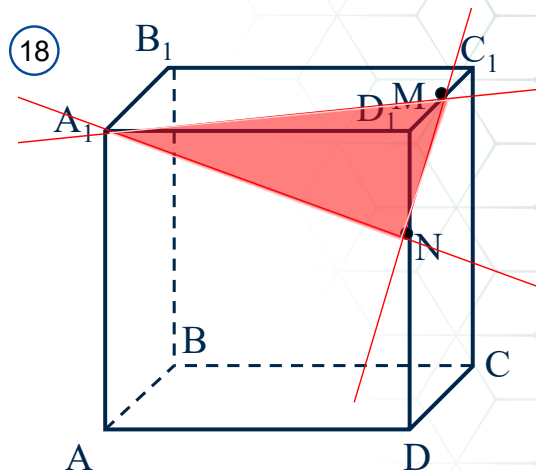
**8.9.** Quyidagi algoritm asosida kubning berilgan nuqtalardan o'tuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

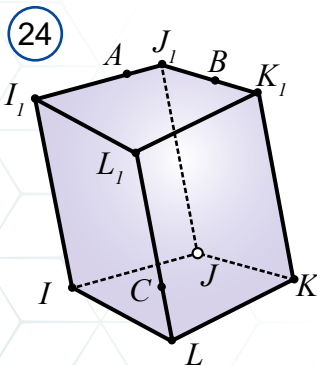
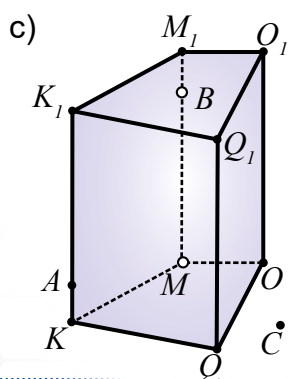
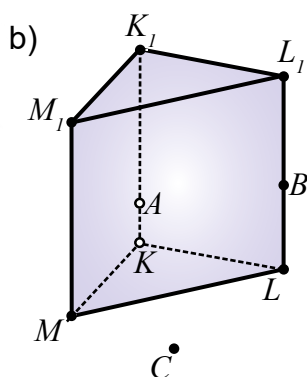
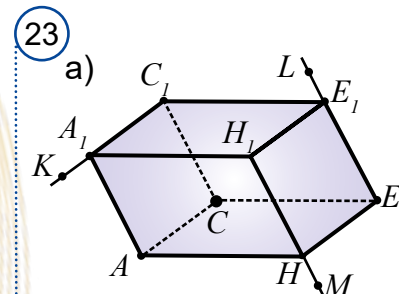
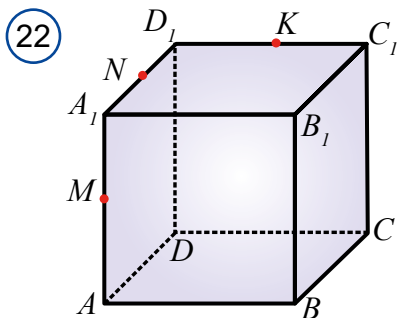
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning  $M, Q$  va  $P$  nuqtalardan o'tuvchi kesimini yasash algoritmi (19-rasm):

1.  $A_1$  va  $M$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz.  $A_1M$  va  $D_1C_1$  to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini  $X$  bilan belgilaymiz.
2.  $A_1$  va  $N$  nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz.  $A_1N$  va  $DD_1$  to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini  $Y$  bilan belgilaymiz.
3.  $X$  nuqtani  $Y$  nuqta bilan tutashtiramiz.  $XY$  va  $CC_1$  to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini  $Q$  bilan belgilaymiz.
4.  $XY$  va  $DC$  to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini  $P$  bilan belgilaymiz.
5.  $M$  va  $Q$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz.  $N$  va  $P$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz.
6.  $A_1MQPN$  beshburchak izlanayotgan kesim bo'ladi.

**8.10.** 20-rasmda tasvirlangan to'g'ri burchakli parallelepipedning berilgan uchta nuqtasidan o'tuvchi kesimini yasang.

**8.11.** 21-rasmda tasvirlangan piramidaning berilgan uchta nuqtasidan o'tuvchi kesimini yasang.





8.12. Kubning  $M$ ,  $N$  va  $K$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesimini parallel ko'chirish usuli bilan yasang (22-rasm).

8.13.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning  $AD$  hamda  $CD$  qirralarida  $M$  va  $N$  nuqtalar berilgan. Kubni  $MNB_1$  tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan kesimni yasang.

8.14.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubni chizing va  $AB$ ,  $BC$  va  $BB_1$  qirralari o'rtalari bo'lgan  $M$ ,  $N$  va  $L$  nuqtalarni belgilang. Keyin: a) kubni  $MNL$  tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan kesimni yasang; b)  $MNL$  uchburchakning muntazam ekanini isbotlang; c) kubning qirralari  $1\text{ cm}$  bo'lsa,  $MNL$  uchburchak yuzini toping.

8.15.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari  $AB = 6\text{ cm}$ ,  $AD = 6\text{ cm}$  va  $AA_1 = 8\text{ cm}$ . Parallelepipedning  $BC_1D$  tekislik bilan kesimi teng yonli uchburchak ekanini isbotlang va bu uchburchak balandligini toping.

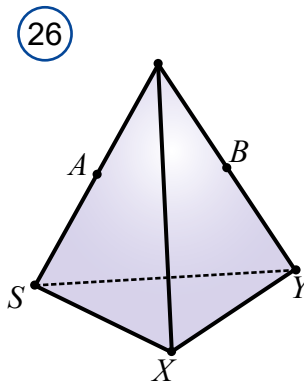
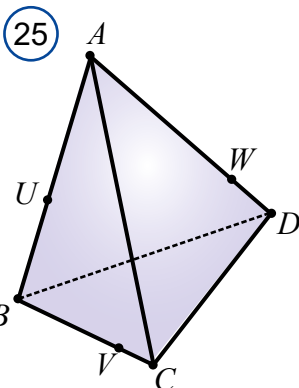
8.16.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  prizmani chizing. Prizmaning  $AD$ ,  $AA_1$  va  $DD_1$  qirralari o'rtalari bo'lgan  $M$ ,  $N$  va  $L$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

8.17. 23-rasmدا berilgan ma'lumotlar asosida: a)  $M$ ,  $N$  va  $L$ ; b)  $A$ ,  $B$  va  $C$ ; c)  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalardan o'tuvchi fazoviy shakllarning tegishli kesimlarini yasang.

8.18.  $IJKL I_1 J_1 K_1 L_1$  prizmaning  $JI_1$ ,  $J_1K_1$  va  $LL_1$  qirralarida yotgan  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalar olingan (24-rasm). Prizmaning  $ABC$  tekislik bilan kesimini yasang.

8.19. Berilgan ma'lumotlar asosida 25-rasmdagi fazoviy shaklning  $U$ ,  $V$  va  $W$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimini yasang.

8.20. Berilgan ma'lumotlar asosida 26-rasmdagi fazoviy shaklning  $A$ ,  $B$  va  $X$  nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimini yasang.





## “GeoGebra”ni qo‘llab

### Ko‘pyoqlar kesimlarini yasash

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning  $AB$ ,  $CC_1$  va  $A_1 D_1$  qirralarida mos ravishda  $E$ ,  $F$  va  $G$  nuqtalar berilgan. Kubni  $EFG$  tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang.

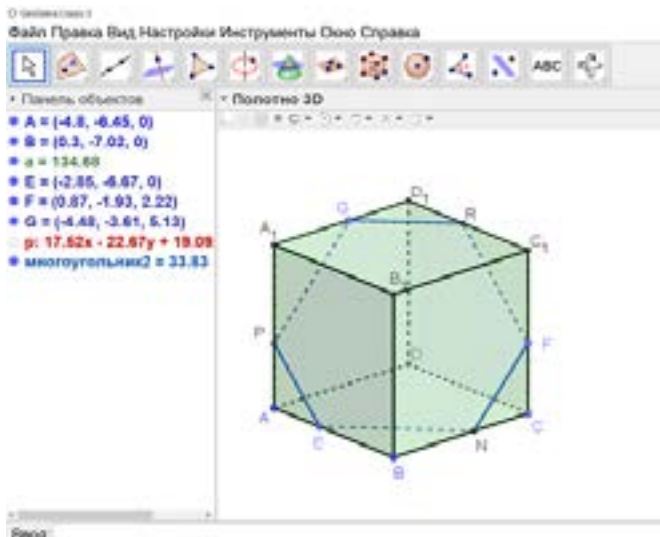
#### Yasash:

- “GeoGebra”da yangi oyna oching.
- “GeoGebra” interfeysini “Настройки” – “3D Графика” ko‘rinishiga o‘tkazing.

#### Kesimni yasash bosqichlari

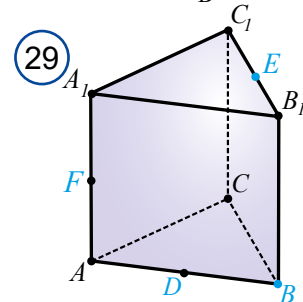
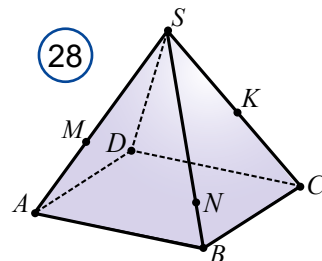
1		Куб	Ixtiyoriy kub yasaladi.
2		Точка в объекте	$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kub va uning $AB$ , $CC_1$ va $A_1 D_1$ qirralarida mos ravishda $E$ , $F$ va $G$ nuqtalar belgilanadi.
3		Плоскость через 3 точки	$EFG$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik yasaladi.
4		Кривая пересечения	Kub va $EFG$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik kesimi hosil qilinadi.
5		Показывать объект	Tekislikning keraksiz qismi yashirin holatga keltiriladi.
6		Перемещение	$E$ , $F$ va $G$ nuqtalarni siljitish orqali kub kesimi to‘g‘ri bajarilgani tekshiriladi (27-rasm).

27



#### Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Piramidaning  $M$ ,  $N$  va  $K$  nuqtalaridan o‘tuvchi tekislik bilan kesgandagi kesimni yasang (28-rasm).
2. Muntazam uchburchakli prizmaning berilgan nuqtalaridan o‘tuvchi kesimni toping (29-rasm).







Ilk geometrik bilimlar qadimgi Misrda ham 5 ming yildan ko'proq vaqt oldin paydo bo'lgan. Misrliklar ulardan nafaqat piramidalar qurishda, balki Nil qirg'og'idagi ekin maydonlarini belgilashda ham foydalanishgan. Miloddan avvalgi 2 minginchi yillarda qadimgi Misrda geometriyaning tug'ilihi haqida qadimgi yunon olimi Gerodot (miloddan avvalgi V asr) shunday deb yozgan edi: "Misr fir'avni Seozoostri yerni bo'lib, har bir misrlikga qur'a bo'yicha tomorqa ajratib, har bir tomorqadan tegishli tartibda soliq yig'ib olgan. Nil daryosi toshib tomorqalarni suv bosgan. Yer egalari tomorqalari chegaralarini tiklab berish yoki soliqni kamaytirish uchun qiroлга murojaat qilishgan. Qiroл tomorqa qancha kamayganini aniqlash va shunga qarab soliqni kamaytirish uchun o'z vakillari - yer o'lchagichlarni yuborgan. Shu tariqa Misrda yer o'lchash haqidagi fan - geometriya paydo bo'lgan va u yerdan Yunonistonga ko'chib o'tgan".

O'quv loyihasi bu – fanlarni yanada chuqurroq, uyg'unlashgan holda o'rganishga yo'naltirilgan, ta'lim jarayoniga tajriba, amaliy faoliyat asosida yondashuvga imkon beruvchi, tadqiqot va izlanish olib borishni talab etuvchi ta'lim jarayonini tashkil etish shakli hisoblanadi. Shu bilan birga, loyiha ishi bitta fan doirasida ham bajarilishi mumkin.

O'quvchilar loyiha ishi bo'yicha izlanishlarini yil davomida odatda darsdan tashqari, mustaqil mashg'ulotlarda olib borishadi.

Loyiha ishi mavzulari *amaliy*, *nazariy* va *tadqiqot* xarakterida bo'lishi mumkin.

**Amaliy loyiha ishida** fanlarda o'zlashtirilgan bilim va ko'nikmalar hayotiy vaziyatlardagi muammolarni (keyslar) yechishda qo'llanadi. Ma'lum bir fan yoki fanlarga doir amaliy ko'nikma va malakalarni rivojlantirish zaruriyati paydo bo'lganda amaliy yo'naltirilgan loyihalardan foydalanish yaxshi samara beradi. Eng oddiy holatda o'qituvchi o'quvchilarga fanga doir qo'shimcha o'quv materiallari, testlar to'plamini, taqdimot, tarqatma materiallarni yoki glossariy (atamalar lug'ati)ni tuzish, ko'rgazmali o'quv quroli modelini yaratish va yasash kabi topshiriqlarni berishi mumkin. Amaliy yo'naltirilgan loyihalar bilan ishlash jarayonida o'quvchilarda fanga doir bilim, ko'nikma va malakalar rivojlanadi, faoliyatga doir kompetentlik qaror topadi.

**Nazariy loyiha ishida** esa fanlarning biror mavzusi chuqurroq o'rganiladi. Bunday loyiha ishida berilgan mavzu bo'yicha ma'lumotlar to'planadi, qayta ishlanadi, tahlil qilinadi, tasniflanadi, umumlashtiriladi hamda foydali va qo'shimcha yozma o'quv resursi sifatida taqdim etiladi.

**Tadqiqot loyiha ishida** esa biror nostandart masala yoki hayotiy muammoni yechish ustida kichik ilmiy izlanish olib boriladi. O'quvchilarning tahliliiy, tanqidiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirish, idrok etishning mantiqiy usullarini o'zlashtirish va katta hajmdagi axborotlarni qayta ishlash maqsad qilib qo'yilsa, tadqiqotchilikka doir o'quv loyihasidan foydalanish maqsadga muvofiq. Mazkur o'quv loyihasining maqsadi loyiha farazini asoslab berishdan iborat. Ushbu maqsadga erishish uchun tajriba-sinov ishlari o'tkazish, olingan natijalarni tahlil etish, umumlashtirish, taqqoslash, rivojlanish qonuniyatlarini aniqlash, bundan tashqari, xulosalar chiqarish, o'z nuqtayi nazarini asoslash zarur. Ana shu tarzda tadqiqotchilikka doir o'quv loyihasida asosiy e'tibor fikriy kompetentlikni rivojlantirishga qaratiladi.

O'quv loyihasida eng katta e'tiborni o'quvchilarda ijo-



diy qobiliyatlarni rivojlantirishga qaratish lozim. Aynan ijodiy loyiha o'quvchilarga o'zini namoyon eta olish, istalgan janrdagi asarni yaratish imkonini beradi. Shuningdek, ijodiy loyihalar o'quvchilarning guruhdagi maqomi oshirish, o'z-o'zini baholashga imkon berish orqali ularning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantiradi. Har qanday ijodiy ish uni taqdim etish va sinf jamoasi bilan aloqani taqozo etadi. Ana shu sababli ijodiy loyihalar o'quvchilarda kommunikativ kompetentlikni rivojlantirishga katta ta'sir ko'rsatadi.

Loyiha ishi mavzusi ustida o'quvchilar alohida-alohida yoki 3-4 kishilik guruh bo'lib ishlashlari mumkin. Loyiha ishi o'quv yili oxirida o'tkaziladigan himoya (kichik konferensiya) bilan tugaydi. Loyiha ishi ustidagi ish jarayoni quyidagi o'quv faoliyatlarni o'z ichiga olishi mumkin:

- loyiha ishi bo'yicha faoliyatni rejalashtirish;
- vazifalarni o'zaro taqsimlab olish;
- o'quv maqsadlarini qo'yish;
- kerakli ma'lumotlarni izlab topish;
- mavzuga doir muammoli vaziyat yechimlarini qidirish;
- yechimlardan eng maqbulini tanlash va uni asoslash;
- zarur hollarda so'rovlar yoki tajribalar o'tkazish;
- loyiha ishi natijalari bo'yicha hisobot tayyorlash;
- o'z faoliyatlarini tahlil qilish va baholash;
- loyiha ishi himoyasi uchun taqdimot tayyorlash;
- loyiha ishini himoya qilish.

Bu mashg'ulot davomida o'quvchilarga loyiha ishi haqida ma'lumot beriladi. Loyiha ishi mavzulari o'quvchilar orasida taqsimlanadi. Biror loyiha ishi namuna sifatida ko'rsatiladi.

### Loyiha ishining namunaviy mavzulari

(bu mavzulardan tashqari boshqa mavzular ham taklif qilinishi mumkin)

1. Yevklid geometriyasi.
2. Lobachevskiy geometriyasi.
3. Ko'pyoqlar geometriyasi.
4. Misr piramidalarining jumboqlari.
5. Ko'pyoq sirti.
6. Mening shahrim geografiyasi va geometriyasi.
7. Geometrik mozaika.
8. Geometrik paradokslar.
9. Minoralar arxitekturasidagi geometrik shakllar.
10. Yo'laklarni loyihalash va bezashda geometrik shakllar.
11. Qadimgi naqqoshlikda geometriya.



**S**tereometriya yoki fazoviy geometriya geometriyaning turli fazoviy jismlarning shakli, o'lchamlari va xossalari o'rganuvchi bo'limi hisoblanadi.

U yunoncha "stereo" - jism va "metrio" - o'lchash so'zlaridan kelib chiqqan hamda tom ma'noda "jismlarni o'lchash" degan ma'noni anglatadi. Stereometriya ham planimetriya kabi insonning amaliy faoliyati ehtiyojlari bilan bog'liq holda paydo bo'lgan va rivojlangan.

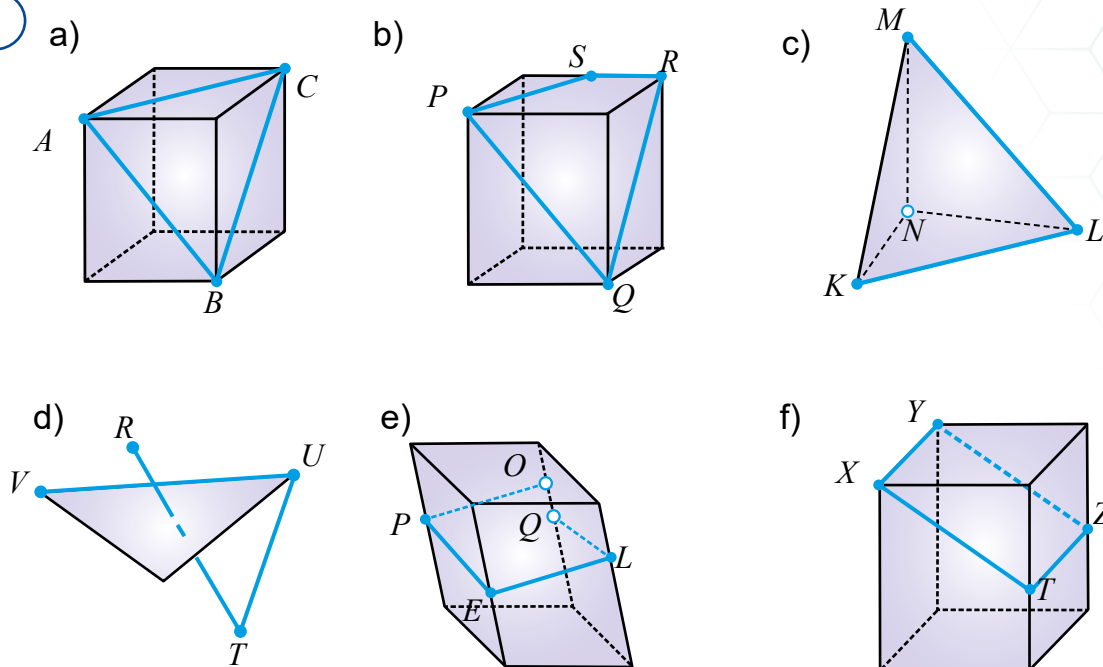


Eng qadimgi va eng mashhur maktablardan biri - Pifagor maktabi (miloddan avvalgi VI-V asrlar), uning asoschisi Pifagor nomi bilan atalgan. Pifagorchilar o'zlarining falsafiy nazariyalarida muntazam ko'pburchaklardan foydalanganlar. Ularning shakllari mavjudlik asoslariga berilgan. Qadimgi tadqiqotchilar: olov – tetraedr, yer (tuproq) – kub, havo – oktaedr, suv – ikosaedr, butun koinot - dodekaedr shakliga ega deb bilishgan.

12. Rasm, haykal va arxitektura geometriyasi.
13. Muzeydagi rasmlarda geometriya.
14. Naqshli geometriya.
15. Bino va inshootlarning geometriyasi va me'moriy ko'rinishlari.
16. Katalarda geometriya.
17. Markaziy Osiyo arxitekturasida geometriya.
18. Misr piramidasining matematik xususiyatlari.
19. Stereometrik jismlar.
20. Tabiatda simmetriya.
21. Geometriya atamaları lug'ati.
22. "Simmetriya nima?" o'quv filmi.
23. "Ko'pyoqlarning kesimi" mavzusidagi didaktik material.
24. Geometriyadan testlar to'plami.
25. "Geometrik jang" o'yini ssenariysini tuzish.
26. O'lchov birliklari haqida hikoya - animatsiya.
27. "Geometrik sarguzashtlar" sahna ko'rinishi ssenariysini ishlab chiqish.
28. Geometrik masalalar yechish trenajori.
29. Geometrik kalkulyator.
30. "Geometrik shakllar" o'rgatuvchi multimediali ilova.
31. Simmetriya elektron ko'rgazmali qurol.
32. "Geometriya" o'quv-test dasturi.
33. Stereometriya bo'yicha elektron qo'llanma.
34. Geometriyaning kelib chiqish, rivojlanishi va insoniyat tomonidan qo'llanishi.
35. Fizikada matematika
36. Kimyoda matematika
37. Biologiya va tibbiyotda matematika
38. Ekologiyada matematika
39. Geografiyada matematika
40. Iqtisodiyotda matematika
41. San'atda matematika
42. GeoGebra dasturidan stereometriya darslarida foydalanish
43. Stereometriyani o'rganish uchun foydali elektron resurslar ro'yxati
44. Baholash bo'yicha xalqaro tadqiqotlarda stereometrik masalalar

10.1. 1-rasmda tasvirlangan sinq chiziq yassimi yoki fazoviy?

1

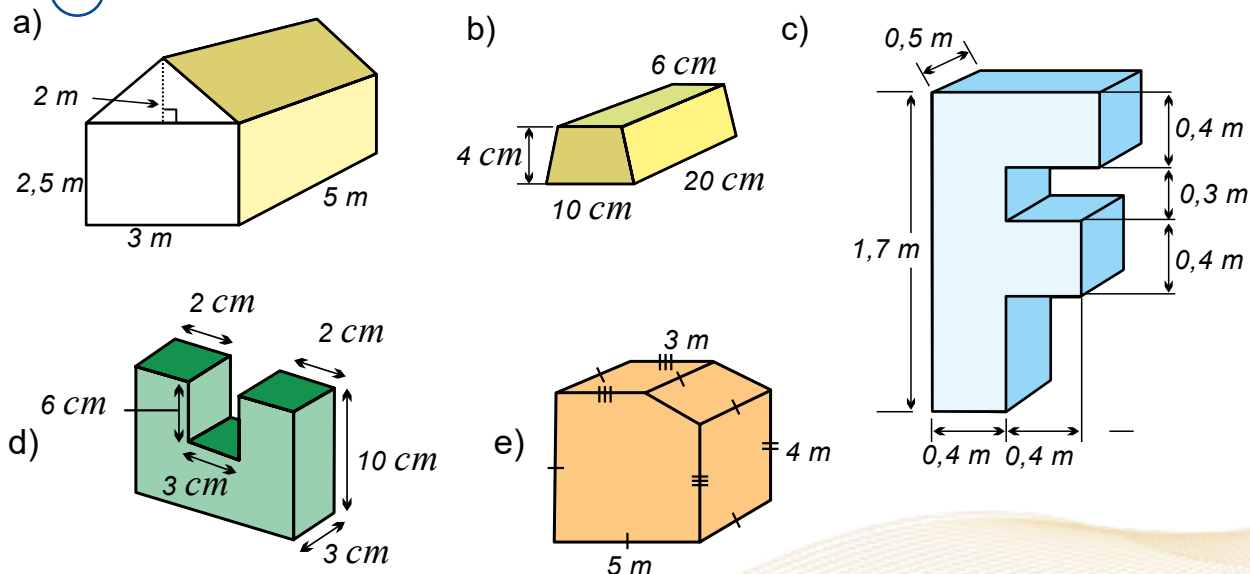


10.2. Muntazam to'rtburchakli piramida asosi  $12\text{ cm}$  ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi  $16\text{ cm}$  ga teng. Piramida: a) yon qirradi va apofemasini; b) yon sirtini; c) to'la sirtini toping.

10.3\*.  $REFGH$  piramida asosi tomonlari  $10\text{ cm}$  va  $18\text{ cm}$  bo'lgan va yuzi  $90\text{ cm}^2$  ga teng bo'lgan  $EFGH$  parallelogrammdan iborat. Piramida uchi –  $R$  ni asos diagonallari kesishish nuqtasi –  $O$  bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi  $6\text{ cm}$  ga teng va u bu diagonallarga perpendikulyar. Piramida: a) yon qirralarini; b) yon sirtini; c) to'la sirtini toping.

10.4. 2-rasmda tasvirlangan jismlarning to'la sirtini toping.

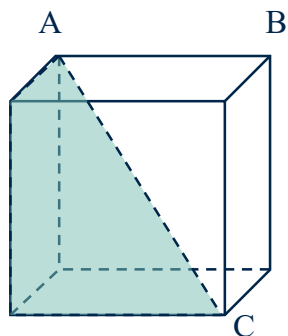
2



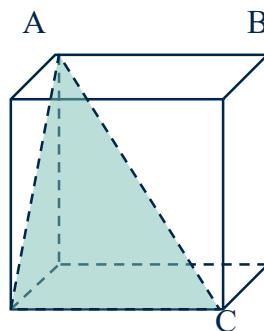
10.5. Kubni tekislik bilan kesgan payt kesimda 3-rasmda tasvirlangan qaysi holatlar bo'lishi mumkin? Qaysilari bo'lishi mumkin emas?

3

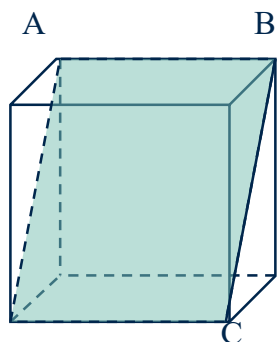
a)



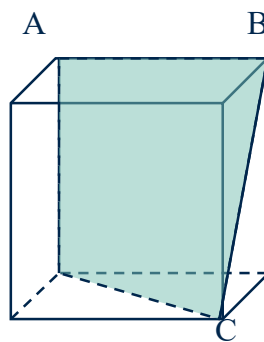
b)



c)



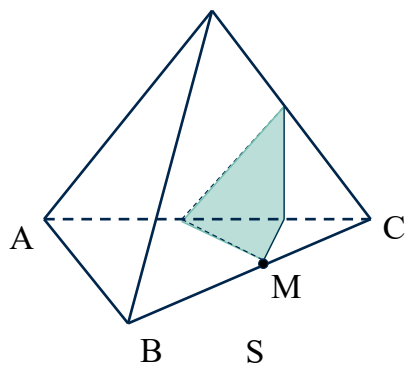
d)



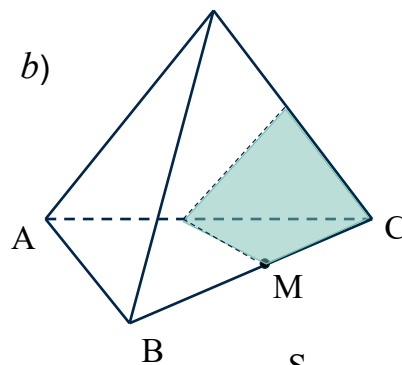
10.6. Qaysi rasmda  $M$  nuqtadan o'tuvchi va tetraedrning  $SAB$  yog'iga parallel bo'lgan kesim tasvirlangan?

4

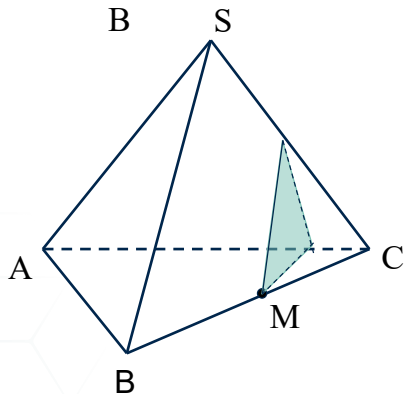
a)



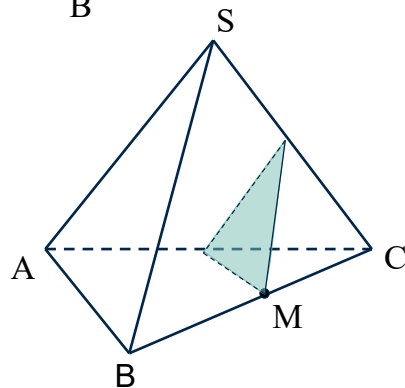
b)



c)



d)



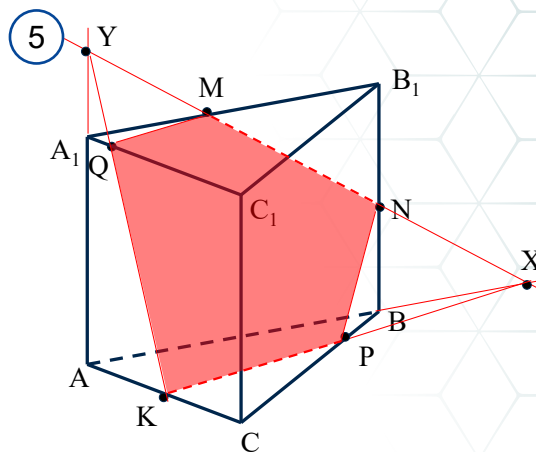


**10.7.** Quyidagi algoritm asosida prizmaning berilgan nuqtalardan o'tuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

$ABCA_1B_1C_1$  prizmaning  $M, N, P$  va  $Q$  nuqtalaridan o'tuvchi kesimini yasash algoritmi:

1.  $M \leftrightarrow N, MN \cap AB = X$
2.  $X \leftrightarrow K, XK \cap BC = P$
3.  $MN \cap AA_1 = Y$
4.  $Y \leftrightarrow K, YK \cap A_1C_1 = Q$
5.  $P \leftrightarrow N, Q \leftrightarrow M$
6.  $MNKPQ$  izlanayotgan kesim bo'ladi.

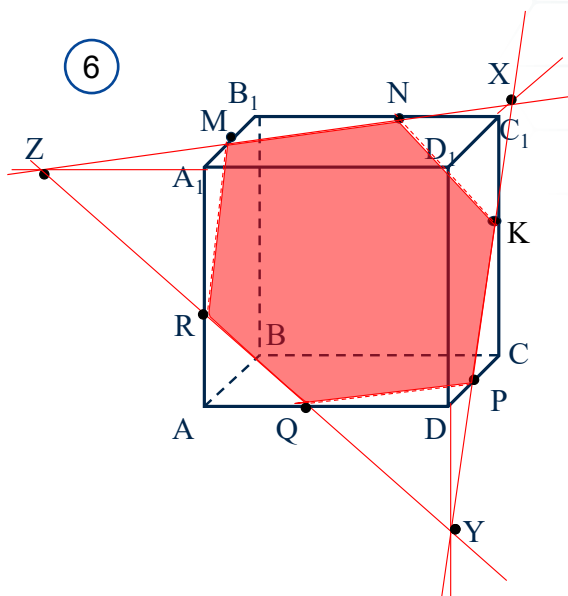
Bu yerda  $M \leftrightarrow N$  belgilash –  $M$  va  $N$  nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni o'tkazamiz,  $MN \cap AB = X$  belgilash esa  $MN$  va  $AB$  to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasini  $X$  bilan belgilaymiz degan ma'noni anglatadi.



**10.8.** Quyidagi algoritm asosida kubning berilgan nuqtalardan o'tuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning  $M \in A_1 B_1, N \in B_1 C_1$  va  $K \in CC_1$  nuqtalaridan o'tuvchi kesimini yasash algoritmi:

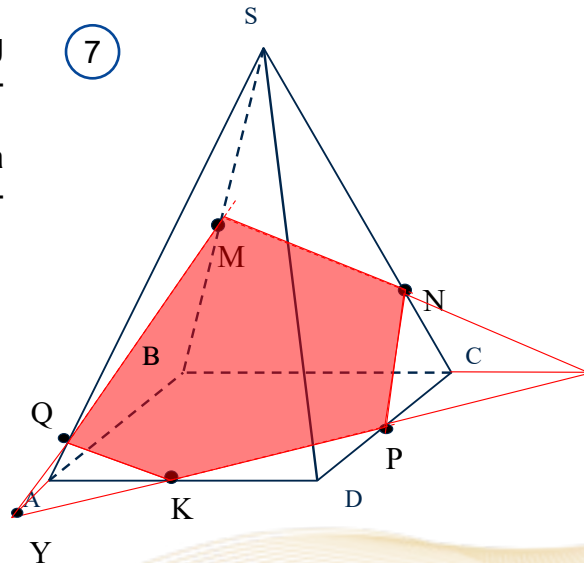
1.  $M \leftrightarrow N$ ;
2.  $MN \cap D_1 C_1 = X$ ;
3.  $N \leftrightarrow K, X \leftrightarrow K$ ;
4.  $XK \cap DC = P$ ;
5.  $KP \cap DD_1 = Y$ ;
6.  $MN \cap A_1 D_1 = Z$ ;
7.  $Y \leftrightarrow Z$
8.  $YZ \cap AD = Q$ ;
9.  $YZ \cap AA_1 = R$ ;
10.  $Q \leftrightarrow P, R \leftrightarrow M$ ;
11.  $MNKPQR$  izlanayotgan kesim bo'ladi.



**10.9.** Quyidagi algoritm asosida piramidaning berilgan nuqtalardan o'tuvchi kesimini yasang va yasash jarayonini izohlang.

$SABCD$  piramidaning  $M \in SB, N \in SC$  va  $K \in AD$  nuqtalaridan o'tuvchi kesimini yasash algoritmi:

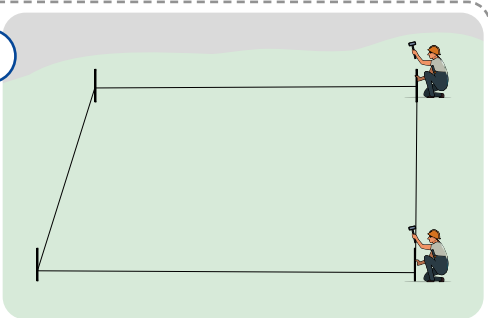
1.  $M \leftrightarrow N$
2.  $MN \cap BC = X$
3.  $X \leftrightarrow K$
4.  $XK \cap DC = P$
5.  $XK \cap AB = Y$
6.  $Y \leftrightarrow M$
8.  $YM \cap SA = Q$
9.  $P \leftrightarrow N, K \leftrightarrow Q$
10.  $MNPKQ$  izlanayotgan kesim bo'ladi.





## Tatbiqlar va amaliy kompetensiyalarni shakllantirish

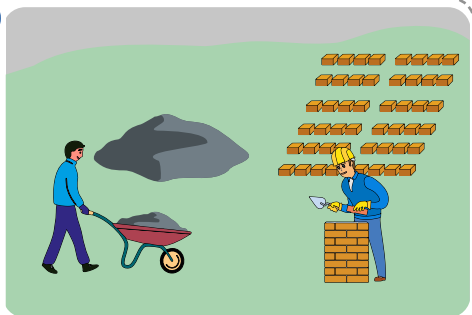
1



1. Nima sababdan biror imorat uchun o'ra (chuqur) qazishdan oldin belgilash ishlari tarang tortilgan ip yordamida bajariladi? (1-rasm)

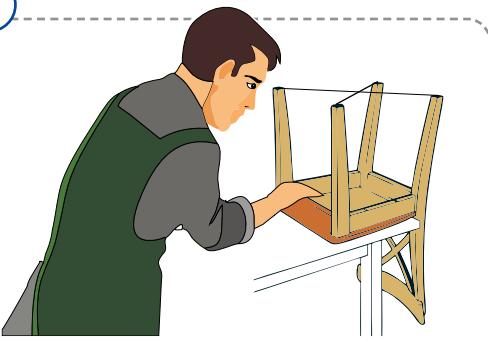
**Javob:** ikkita tekislik kesishmasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

2



2. Gisht quyish jarayonida qolipga loy soliniib, tekis yog'och bo'lagi qolip ustida yurgizilib, loyning ortiqcha qismi sidirib olib tashlanadi. Bunda nima sababdan g'ishtning sirti tekis chiqadi? (2-rasm)

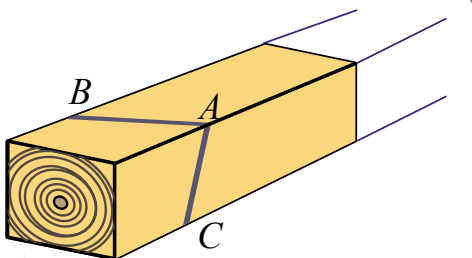
3



3. Yasalgan stulning oyoqlari bir tekislikda yotganini tekshirish uchun duradgorlar stulning qarama-qarshi oyoqlariga ip tortib tekshiradi. Bu usulni qo'llab ko'ring va u nimaga asoslanganligini ayting. (3-rasm)

**Javob:** ikki kesishuvchi chiziq yagona tekislikni aniqlaydi.

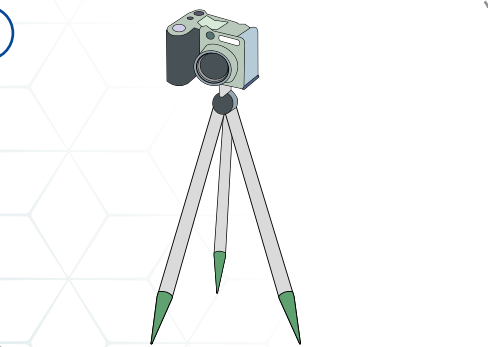
4



4. Bir bo'lak yog'och taxtani arralayotib duradgor arralash sirtining tekis bo'lishiga qanday erishadi? (4-rasm)

**Javob:** yog'och taxtaning ikki qo'shni yoqlariga  $AB$  va  $AC$  kesmalarni chizadi va arrani imkoni boricha shu kesmalardan o'tadigan qilib qo'yib, arralashni bajaradi. Natijada ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik yagona bo'lgani uchun arralash sirti tekis chiqadi.

5



5. Fotoapparatni o'rnatish uchun mo'ljallangan tag moslama nima sababdan uch oyoqli qilib yasaladi? (5-rasm)

**Javob:** bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o'tadi.

6. Duradgor ishlov berilgan taxta sirtining tekisligini qanday tekshiradi? Bu usul nimaga asoslangan? (6-rasm)

**Javob:** agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikda yotsa, uning o'zi ham butunligicha shu tekislikda yotadi.

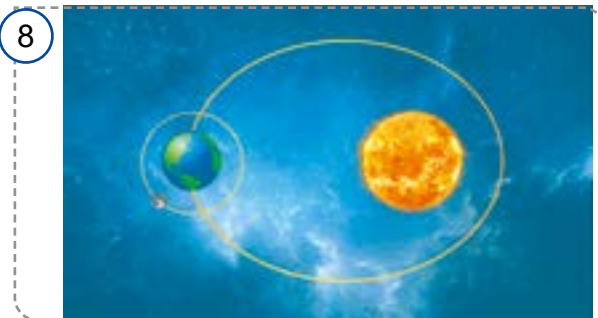


7. Nima sababdan uch oyoqli mototsikl ikki oyoqlisiga nisbatan ancha turg'un bo'ladi? (7-rasm)

**Javob:** bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o'tadi.

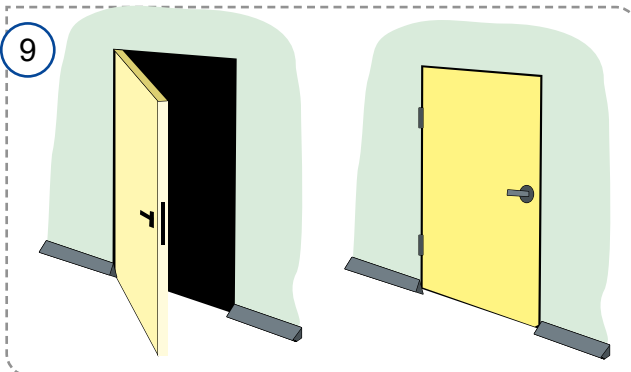


8. Quyosh, Yer va Oy markazlari bitta tekislikda yotishi mumkinmi? Bitta to'g'ri chiziqda-chi? Qachon? (8-rasm)



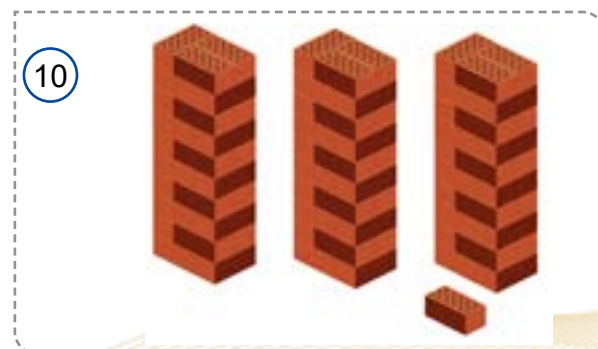
9. Nima uchun ochiq eshiklar yelvizakda o'z holicha harakatga keladi? Nima sababdan bu holat yopiq eshiklar bilan sodir bo'lmaydi? (9-rasm)

**Javob:** to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.



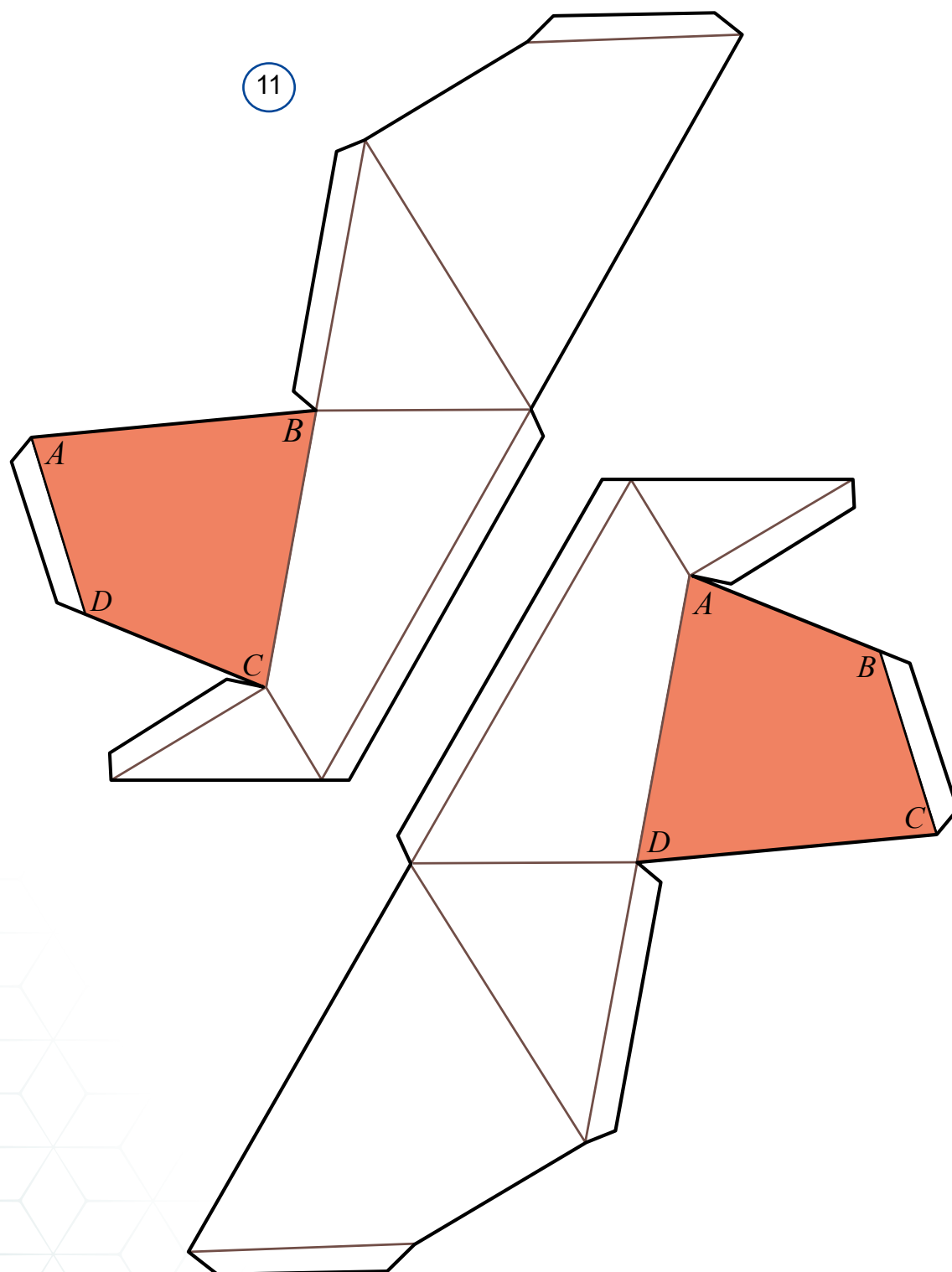
10. Kesimi tomoni 7 dm bo'lgan kvadratdan iborat, balandligi 4 m bo'lgan 18 ta ustunni qurish uchun qancha g'isht kerak bo'ladi? (G'ishtning o'lchamlari: 1 : 1,5 : 3 dm. Qurish jarayonida 5% g'isht chiqitga ketadi). (10-rasm)

**Javob:** 8200 dona.



## Amaliy ish

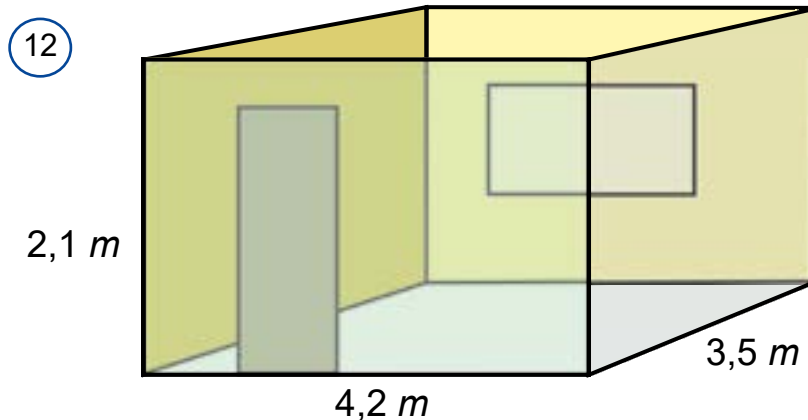
1. 11-rasmda berilgan yoyilmalarni qalin qog'ozga chizib oling. Ularni qaychi bilan qirqib olib, tegishli chiziqlar bo'yicha buklab, so'ng yelimlang. Natijada tetraedrning qandaydir tekislik bilan kesgandagi ikkita bo'lagining modeli hosil bo'ladi. Ularni birlashtirib,  $ABCD$  kesimli butun tetraedrni hosil qiling.





2. 12-rasmda tasvirlangan xonani ta'mirlash kerak. Xonada o'lchamlari  $0,8\text{ m}$  va  $2,2\text{ m}$  bo'lgan eshik va o'lchamlari  $183\text{ cm}$  va  $91\text{ cm}$  bo'lgan deraza bor. Eshikning ikki tomoni ham bo'yalishi lozim. Jadvalda ikki xil bo'yoqning narxlari berilgan. Bu ma'lumotlardan foydalanib tejamli ta'mirlash uchun qancha mablag' kerakligini hisoblang.

Bo'yoq turi	Hajmi	Bo'yash yuzi	Narxi (so'mda)
Devor uchun	4 l	$16\text{ m}^2$	32450
	2 l	$8\text{ m}^2$	20800
Eshik uchun	2 l	$10\text{ m}^2$	23600
	1 l	$5\text{ m}^2$	15400



## Geometrik joziba



*Yirik bino va inshootlarni qurishgan ota-bobolarimiz katta geometrik bilim va salohiyatga ega bo'lgan. Buni birgina Samarqand shahridagi Registon maydonidagi tarixiy yodgorliklardan ham bilib olish mumkin (13-rasm).*



*Xiva shahridagi Ichanqal'a rasmda (14-rasm) qanday geometrik shakllarni ko'ryapsiz?*



*"Tojmahal" – dunyoning yangi yetti mo'jizalaridan biri (15-rasm), Hindistonning Agra shahrida boburiy hukmdor Shoh jahon qurdirgan qadimiy yodgorlik. Uni qurgan ustalar geometriyadan mukammal bilimga ega bo'lganliklari kundek ravshan.*



*Sidney shahri opera teatri (16-rasm) – Avstraliyadagi zamonaviy me'morchilik namunasi. O'zining g'aroyib geometrik ko'rinishi bilan diqqatga sazovordir.*

*Go'zal geometrik tasavvur egasi, iroqlik mashhur arxitektor ayol – Zaha Hadidning loyihasi asosida Xitoy poytaxti Pekin shahrida qad rostlagan "Galaxy Soho" dam olish kompleksining ajabtovur ko'rinishidan zavq olmaslikning iloji yo'q (17-rasm).*





17



18

*Mamlakatimiz poytaxtida qad ko'tarayotgan "Tashkent city" majmuasining loyihasi ham kishini hayratga soladi. Bunday g'aroyib inshootlarni yaratishda muhandis-quruvchilarga qay darajadagi geometrik bilimlar kerak bo'lganini tasavvur qilish mumkin (18 – 19-rasmlar).*

19



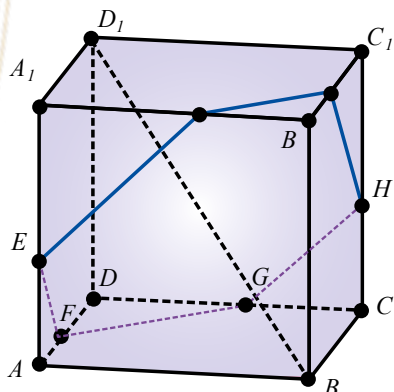
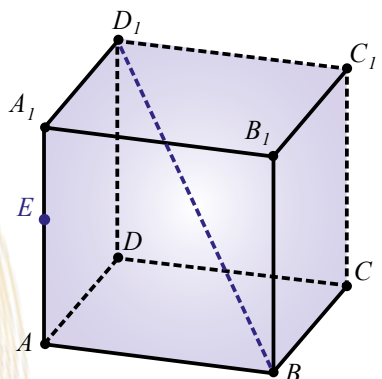


## Ko‘pyoqlar kesimlarini yasash

Kubning berilgan  $E$  nuqtasidan o‘tuvchi va  $BD_1$  chizig‘iga perpendikulyar kesimni yasang.

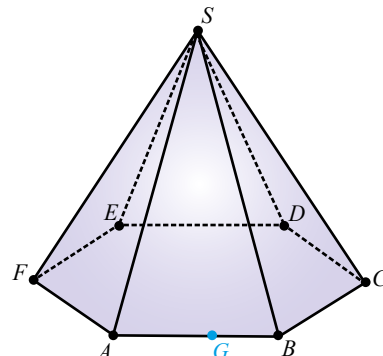
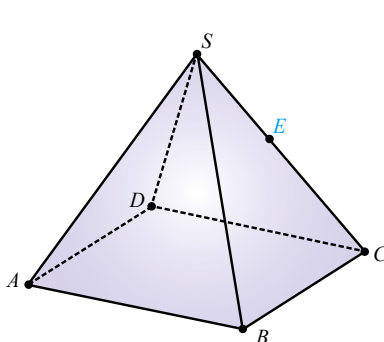
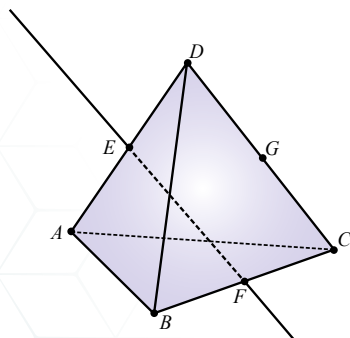
**Yasash:**

- “GeoGebra”da yangi oyna oching.
- “GeoGebra” interfeysini “Настройки”– “3D Графика” ko‘rinishiga o‘tkazing.



## Kesimni yasash bosqichlari

1		Ixtiyoriy kub yasaladi.
2		Kub $AA_1$ qirrasida $E$ nuqta belgilanadi.
3		$BD_1$ chiziq o‘tkaziladi.
4		$E$ nuqta va $BD_1$ chiziqdan perpendikulyar tekislik o‘tkaziladi.
5		Kubning $E$ nuqtasidan o‘tuvchi kesim hosil qilinadi.
6		Tekislikning keraksiz qismi yashirin holatga o‘tkaziladi.
7		$E$ nuqtani siljitish orqali kesim to‘g‘ri bajarilgani tekshiriladi.



1.  $ABCD$  muntazam tetraedr  $CD$  qirrasining  $G$  o‘rtasi va  $EF$  perpendikulyar chiziqdan o‘tuvchi tekislik kesimi qanday shakl bo‘lishini aniqlang. Bu yerda  $E, F$  nuqtalar –  $AD$  va  $BC$  qirralarning o‘rtasi.
2. Muntazam to‘rtburchakli piramidaning  $SC$  qirrasidagi  $E$  nuqtadan o‘tuvchi va shu qirrasiga perpendikulyar tekislik kesimini chizing.
3. Muntazam oltiburchakli piramidaning berilgan  $G$  nuqtasidan o‘tuvchi va  $SAF$  tekisligiga parallel tekislik kesimini chizing.



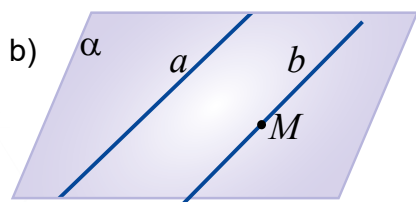
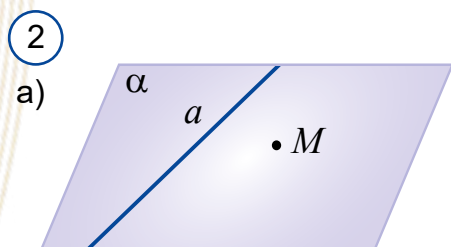
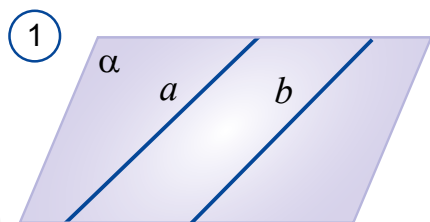


# III BOB

## FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI

**Bu bobni o‘rganish natijasida quyidagi bilim va ko‘nikmalarga ega bo‘lasiz:**

- fazoda parallel to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish;
- parallel to‘g‘ri chiziqlarning xossalarini bilish hamda ularni isbotlashga doir va amaliy masalalar yechishda qo‘llash;
- parallelepipedning xossalarini bilish va ularni masalalar yechishda qo‘llash;
- ayqash to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish;
- to‘g‘ri chiziqlarning ayqashlik alomatini bilish va uni masalalar yechishda qo‘llash;
- fazoda to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash;
- ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash;
- perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni tasavvur qilish;
- tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq ta‘rifini bilish;
- tekislikka parallel to‘g‘ri chiziqlarning xossalarini bilish va ularni qo‘llay olish;
- parallel va kesishuvchi tekisliklar ta‘rifini bilish;
- ikki tekislikning parallelligi alomatini bilish va undan foydalanish;
- parallel tekisliklarning xossalarini bilish va ularni qo‘llay olish;
- parallel proyeksiyaning xossalarini bilish va ularni qo‘llay olish;
- o‘rganilgan tushunchalar, faktlar va metodlarni notanish yoki hayotiy vaziyatlarda qo‘llay olish.



### Fazoda parallel to'g'ri chiziqlar

Fazoda bir tekislikda yotib, o'zaro kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar *parallel to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (1-rasm).

$a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarning parallelligi  $a \parallel b$  tarzda yoziladi.

Tekislikda berilgan nuqta orqali berilgan to'g'ri chiziqqa yagona parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Bunday xossa fazoda ham o'rinli bo'ladi.



**Teorema 3.1.** *Fazoda berilgan to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa yagona parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.*

**Isbot.**  $a$  – berilgan to'g'ri chiziq va  $M$  bu to'g'ri chiziqda yotmagan nuqta bo'lsin (2a-rasm). 34-betdagi 1-natijaga ko'ra,  $a$  berilgan to'g'ri chiziq va unda yotmagan  $M$  nuqta orqali yagona  $\alpha$  tekislik o'tkazish mumkin.

$\alpha$  tekislikda esa  $M$  nuqta orqali  $a$  – berilgan to'g'ri chiziqqa parallel yagona  $b$  – to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkin (2b-rasm).

Xuddi shu  $b$  to'g'ri chiziq izlangan yagona parallel to'g'ri chiziq bo'ladi.

Tekislikda ikkita parallel to'g'ri chiziqlardan biri uchinchi to'g'ri chiziqni kesib o'tsa, ularning ikkinchisi ham bu to'g'ri chiziqni kesib o'tadi. Shunga o'xshash xossa fazoda ham o'rinli bo'ladi.



**Teorema 3.2.** *Fazoda ikkita parallel to'g'ri chiziqlardan biri tekislikni kesib o'tsa, ularning ikkinchisi ham bu tekislikni kesib o'tadi.*

**Isbot.**  $b$  va  $c$  parallel to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, ularning biri –  $b$  to'g'ri chiziq  $\beta$  tekislikni  $M$  nuqtada kesib o'tsin (3-rasm).

$b$  va  $c$  to'g'ri chiziqlar parallel bo'lgani uchun ular bitta tekislikda yotadi. Bu  $\gamma$  tekislik bo'lsin.

$\beta$  va  $\gamma$  tekisliklar uchun  $M$  – umumiy nuqta. Unda  $S_3$  aksiomaga ko'ra, bu tekisliklar bitta  $l$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Bu to'g'ri chiziq  $\gamma$  tekislikda yotadi va  $b$  to'g'ri chiziqni  $M$  nuqtada kesib o'tadi. Shuning uchun bu to'g'ri chiziq  $b$  to'g'ri chiziqqa parallel  $c$  to'g'ri

chiziqni ham  $N$  nuqtada kesib o'tadi.

$l$  to'g'ri chiziq  $\beta$  tekislikda ham yotgani uchun  $N$  nuqta  $\beta$  tekislikka ham tegishli bo'ladi. Demak,  $N$  nuqta –  $\beta$  va  $\gamma$  tekisliklar uchun umumiy nuqta.

Endi  $c$  to'g'ri chiziqning  $\beta$  tekislik bilan boshqa umumiy nuqtasi yo'qligini ko'rsatamiz.

Teskarisini faraz qilamiz. Aytaylik,  $c$  to'g'ri chiziqning  $\beta$  tekislik bilan yana boshqa –  $K$  umumiy nuqtasi bor bo'lsin. Unda  $S_2$  aksiomaga ko'ra,  $c$  to'g'ri chiziq  $\beta$  tekislikda yotadi. Unda  $c$  to'g'ri chiziq  $\beta$  va  $\gamma$  tekisliklar uchun umumiy bo'ladi. Lekin  $l$  to'g'ri chiziq edi. Bundan  $c$  to'g'ri chiziqning  $l$  to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushishi kelib chiqadi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Chunki  $b$  to'g'ri chiziq  $c$  to'g'ri chiziqqa parallel va  $l$  to'g'ri chiziqni kesib o'tadi. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.

Planimetriyadan sizga ma'lumki, ikki to'g'ri chiziqning har biri uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi. Bu xossa fazoda ham o'rinli bo'lib, u to'g'ri chiziqning *parallelizm alomati* deb yuritiladi.

 **Teorema 3.3. Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel ikki to'g'ri chiziq o'zaro paralleldir.**

**Isbot.** Aytaylik,  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlar  $p$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin (4-rasm).  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishi va o'zaro kesishmasligini, ya'ni parallel ekanini ko'rsatamiz.

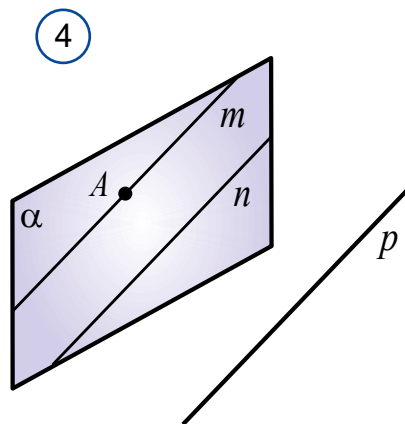
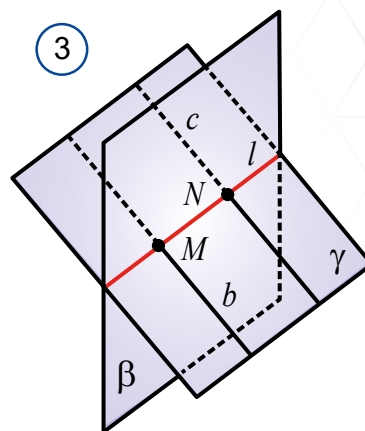
$m$  to'g'ri chiziqda  $A$  nuqtani olamiz hamda bu nuqta va  $n$  to'g'ri chiziq orqali  $\alpha$  tekislik o'tkazamiz.  $m$  to'g'ri chiziqning  $\alpha$  tekislikda yotishini isbotlaymiz.

Aytaylik, bunday bo'lmasin.  $m$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo'lgani uchun tekislikni kesib o'tadi. Unda 3.2-teoremaga ko'ra, bu tekislikni  $m$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan  $p$  to'g'ri chiziq ham,  $p$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan  $n$  to'g'ri chiziq ham kesib o'tadi. Lekin bunday bo'lishi mumkin emas, chunki  $n$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi.

Demak,  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikda yotadi.

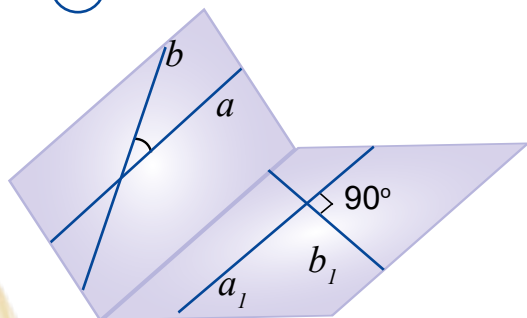
Endi bu to'g'ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlaymiz.

Yana teskarisini faraz qilamiz.  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlar qandaydir  $B$  nuqtada kesishsin. Unda  $B$  nuqta orqali  $p$  to'g'ri chiziqqa parallel ikkita –  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlar o'tadi. 3.1-teoremaga ko'ra esa, bunday bo'lishi mumkin emas.





5



Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi kesmalar (nurlar) o'zaro **parallel kesmalar (nurlar)** deb ataladi.

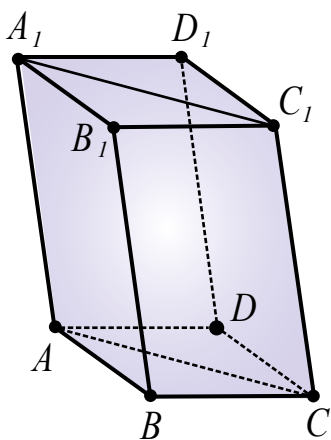
Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan qo'shni burchaklarning kichigi **ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak** deyiladi (5-rasm).

Orasidagi burchak  $90^\circ$  ga teng to'g'ri chiziqlar **perpendikulyar to'g'ri chiziqlar** deb ataladi.

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak 0 ga teng deb hisoblanadi.

Endi parallelepipedning quyidagi xossalarini isbotlaymiz. Buning uchun II bo'limda berilgan parallelepiped va uning elementlari ta'rifini eslashga to'g'ri keladi.

6



### Parallelepipedning xossalari

**Xossa 1.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelepipedda asos diagonallari va yon qirralaridan tuzilgan  $ACC_1 A_1$  to'rtburchak parallelogrammdan iborat bo'ladi (6-rasm).

**Isbot.** Haqiqatan, parallelepipedning  $ABB_1 A_1$  va  $BCC_1 B_1$  yoqlari ta'rifiga ko'ra, parallelogrammdan iborat.

Bu parallelogrammlarning qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng bo'ladi.

Xususan,  $AB = A_1 B_1$  va  $BC = B_1 C_1$ .

Parallelepiped ta'rifiga ko'ra,  $AA_1 \parallel BB_1$  va  $BB_1 \parallel CC_1$ . Unda 3.3-teoremaga ko'ra,  $AA_1 \parallel CC_1$  va  $AA_1 = CC_1$  bo'ladi.

Demak,  $AC_1 C A_1$  to'rtburchak – parallelogramm.

**Xossa 2.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng (6-rasm).

**Isbot.** Yuqoridagi xossaga ko'ra,  $AC_1 C A_1$  – parallelogramm va  $AC = A_1 C_1$ .

Unda  $ABC$  va  $A_1 B_1 C_1$  uchburchaklar uchta tomon bo'yicha teng bo'lib,  $ABC$  va  $A_1 B_1 C_1$  burchaklar ham o'zaro teng bo'ladi. Natijada  $ABCD$  va  $A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelogrammlar ham o'zaro teng bo'ladi.

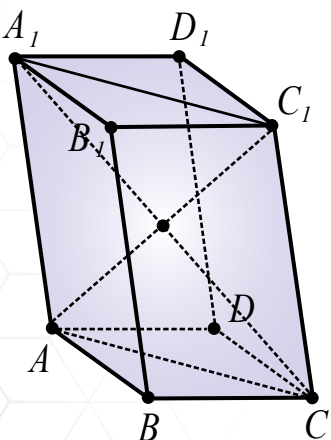
Boshqa qarama-qarshi yoqlarning tengligi ham shu tariqa isbotlanadi.

**Xossa 3.** Parallelepipedning barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi (7-rasm).

**Isbot.** 1-xossaga ko'ra,  $ACC_1 A_1$  – parallelogramm. Unda bu parallelogramm diagonallari  $A_1 C$  va  $AC_1$  bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Qolgan diagonallarning kesishishi va bu nuqtada

7





teng ikkiga bo'linishi shunga o'xshash isbotlanadi.

**Masala.** Uchlari bitta tekislikda yotmaydigan fazoviy to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari bo'lishini isbotlang.

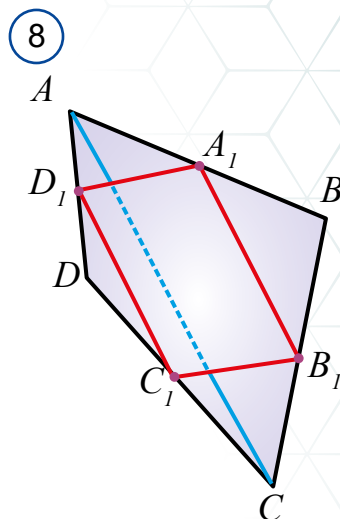
**Isbot.**  $ABCD$  – fazoviy to'rtburchak va  $A_1, B_1, C_1$  va  $D_1$  to'rtburchak tomonlarining o'rtalari bo'lsin (8-rasm). U holda  $A_1B_1$  kesma –  $ABC$  uchburchakning  $AC$  tomoniga parallel o'rta chizig'i,  $C_1D_1$  esa  $ACD$  uchburchakning  $AC$  tomoniga parallel o'rta chizig'i bo'ladi.

3.3-teoremaga ko'ra,  $A_1B_1$  va  $C_1D_1$  to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi. Demak, ular bir tekislikda yotadi.

$A_1D_1$  va  $B_1C_1$  to'g'ri chiziqlarning parallelligi ham xuddi shunday isbotlanadi.

Shunday qilib,  $A_1B_1C_1D_1$  to'rtburchak bitta tekislikda yotadi va uning qarama-qarshi tomonlari parallel.

Demak, u parallelogrammdir.



### Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Parallel to'g'ri chiziqlarning qanday xossalarini bilasiz?
2. To'g'ri chiziqlarning parallellik alomatini ayting.
3. Parallelepipedning qanday xossalarini bilasiz?

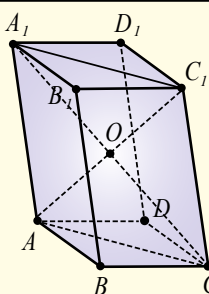


### Amaliy mashq va tatbiq

**11.1.** Jadvalda 11-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

1. Parallel to'g'ri chiziqlar			
Ta'rifi	Alomatlari		
<p><math>a \parallel b</math>, <math>a</math> va <math>b</math> to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotib, o'zaro kesishmasa, <b>parallel to'g'ri chiziqlar</b> deb ataladi.</p>	<p>Agar <math>a \parallel b</math>, <math>a \parallel c</math> bo'lsa, <math>b \parallel c</math> bo'ladi.</p>	<p>Agar <math>\alpha \cap \beta = b</math>, <math>a \subset \alpha</math> va <math>a \parallel \beta</math> bo'lsa, <math>b \parallel a</math> bo'ladi.</p>	<p>Agar <math>\alpha \cap \beta = b</math>, <math>a \parallel \alpha</math> va <math>a \parallel \beta</math> bo'lsa, <math>a \parallel b</math> bo'ladi.</p>

## 2. Parallelepipedning xossalari



**1-xossa.** Asosining diagonallari va yon qirralaridan tuzilgan to'rtburchak ( $AA_1C_1C$ ) parallelogrammdir.

**2-xossa.** Qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng ( $AA_1B_1B = DD_1C_1C$ ).

**3-xossa.** Barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi ( $AO = OC_1, CO = OA_1$ ).

9

a)



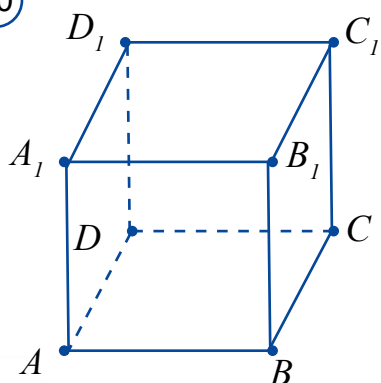
b)



c)



10



**11.2.** 9-rasmda fazoda parallel to'g'ri chiziqlarning timsollarini aniqlang.

**11.3.** 10-rasmda tasvirlangan a)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelepipeddagi; b)  $ABCA_1 B_1 C_1$  prizmadagi parallel qirralar juftlarini aniqlang.

**11.4.** Qanday piramidalarda parallel qirralar bo'ladi?

**11.5.** Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq parallel to'g'ri chiziqlardan birini kesib o'tsa, ikkinchisini ham kesib o'tadi. Bu xossa fazoda ham o'rinli bo'ladimi?

**11.6.**  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar  $c$  to'g'ri chiziqqa parallel.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishi mumkin?

**11.7.** 10-rasmda tasvirlangan  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelepipedda  $BC_1$  va  $AD_1$  diagonallar o'zaro teng va parallel ekanini isbotlang.

**11.8.**  $A$  uchi  $\alpha$  tekislikda yotgan  $AB$  kesmadan  $C$  nuqta tanlangan.  $B$  va  $C$  nuqtalardan o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikni mos ravishda  $B_1$  va  $C_1$  nuqtalarda kesib o'tadi. Agar: a)  $C$  nuqta  $B$  kesmaning o'rtasi va  $BB_1 = 14$  cm; b)  $AC : CB = 3 : 2$  va  $BB_1 = 50$  cm bo'lsa,  $CC_1$  kesmaning uzunligini toping.

**11.9.** Bitta tekislikda yotmaydigan  $MNOP$  parallelogramm va  $EK$  asosli  $MNEK$  trapetsiya berilgan.

1)  $PO$  va  $EK$  to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini aniqlang. 2) Trapetsiyaning asoslari  $MN = 45$  cm,  $EK = 55$  cm ga teng bo'lib, unga ichki aylana chizish mumkin. Trapetsiyaning perimetrini toping.

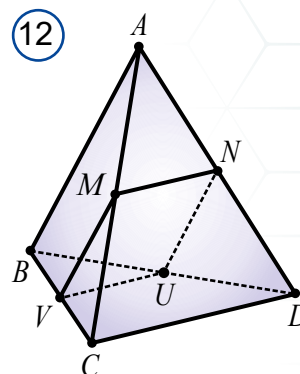
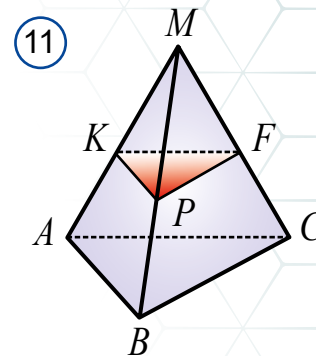
**11.10.** Quyidagi xossalarning qaysilari parallelepipedga tegishli? To'g'ri javoblarni belgilang.

- A) Asos diagonallaridan va yon qirralardan tuzilgan to'rtburchak parallelogrammdan iborat.
- B) Yon yoqlari asosiga perpendikulyar.
- C) Asos diagonallaridan va yon qirralardan tuzilgan to'rtburchak parallelogrammdan iborat bo'ladi.
- D) Barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi.
- E) Qarama-qarshi qirralari o'zaro parallel.
- F) Hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchakdan iborat.
- G) Qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng.
- H) Qirralari o'zaro ayqash.
- J) Qirralari orasida o'zaro ayqashlari ham bor.

**11.11.** Fazoda bitta to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladimi?

**11.12.** 11-rasmda  $M$  nuqta  $ABC$  uchburchak tashqi sohasida yotibdi.  $MA, MB, MC$  kesmalarning o'rtalari mos ravishda  $K, F, P$  nuqtalar bilan belgilangan. 1)  $KP$ ; 2)  $PF$ ; 3)  $KF$ ; 4)  $KM$ ; 5)  $PM$ ; 6)  $FM$ ; 7)  $AB$ ; 8)  $BC$ ; 9)  $AC$  to'g'ri chiziqlardan qaysilari o'zaro papallel?

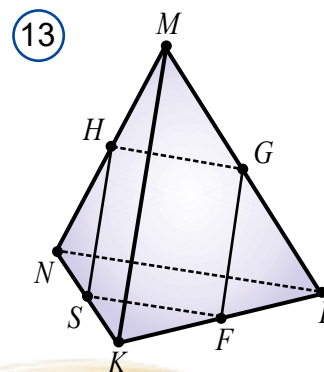
**11.13.** Quyidagi jummalarni o'qing. Jumla to'g'ri bo'lsa "+", noto'g'ri bo'lsa "-" belgisini yonidagi katakka qo'ying.



1	Fazoda to'g'ri chiziqqa unda yotmagan nuqtadan unga parallel ko'plab to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkin.	
2	Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel ikki to'g'ri chiziq o'zaro kesishadi.	
3	Agar ikki to'g'ri chiziq tekislikda yotsa, ular kesishadi.	
4	To'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan o'tuvchi ikkita tekislik o'tkazish mumkin.	
5	Fazoning tekislikda yotmagan nuqtasidan bu tekislikni kesadigan ko'plab to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkin.	

**11.14.**  $M, N, U, V$  nuqtalar –  $ABCD$  piramidaning mos ravishda  $AC, AD, BD$  va  $BC$  qirralarining o'rtalari (12-rasm). Agar  $AB = 20\text{ cm}, CD = 30\text{ cm}$  bo'lsa,  $MNUV$  to'rtburchakning perimetrini toping.

**11.15.**  $H, G, F, S$  nuqtalar –  $KLMN$  uchburchakli piramidaning mos ravishda  $MN, ML, LK$  va  $KN$  qirralarining o'rtalari (13-rasm). Agar  $LK = 18\text{ mm}, MN = 22\text{ mm}$  bo'lsa,  $HGFS$  to'rtburchakning perimetrini toping.





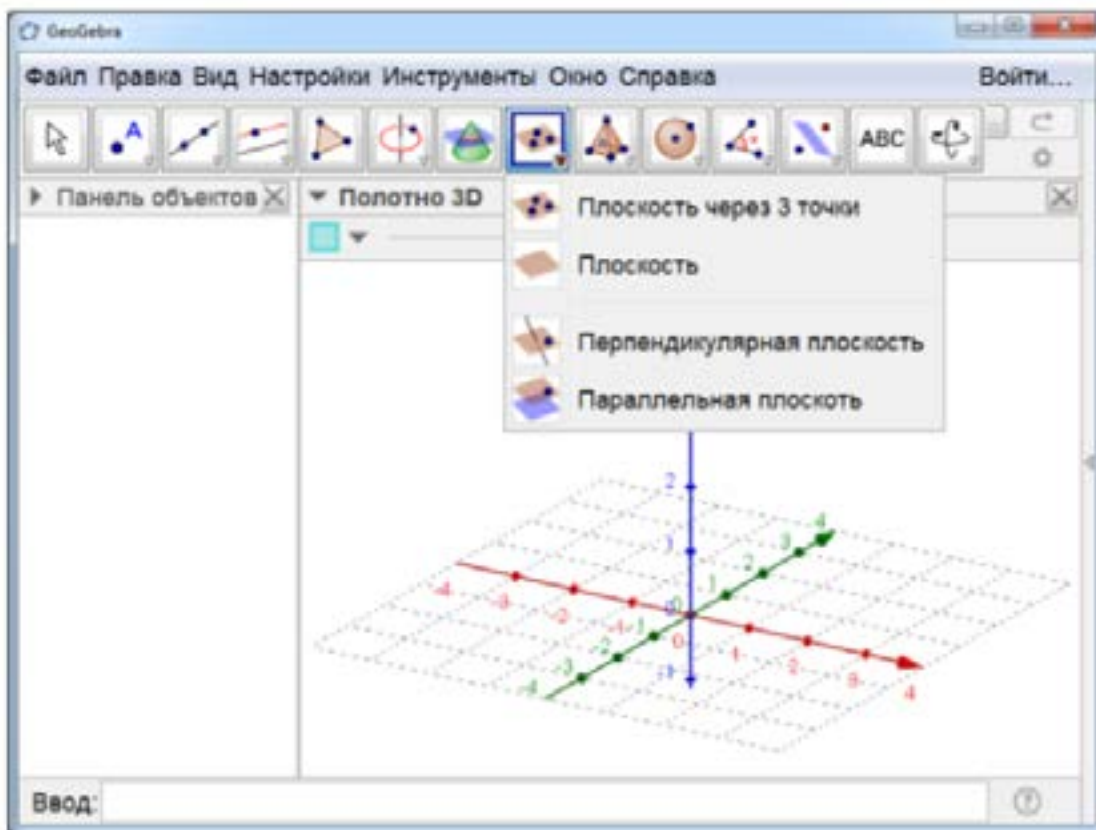
## “GeoGebra”ni qo‘llab

### 3D kalkulyatori yordamida turli tekisliklarni yasash



3D kalkulyatori uskunalar panelidagi “Плоскость через три точки” (“Uch nuqta orqali tekislik”) vositasi ustiga sichqonchanning chap tugmasi bosilsa, yangi darchada uning boshqa yana 3 ta imkoniyati:

- “Плоскость” (“Tekislik”),
- “Перпендикулярная плоскость” (“Perpendikulyar tekislik”);
- “Параллельная плоскость” (“Parallel tekislik”) ochiladi.



Bu uskunalar quyidagi vazifalarni bajaradi:



“Плоскость” (“Tekislik”) yordamida tekislik yasaladi.



“Перпендикулярная плоскость” (“Perpendikulyar tekislik”) yordamida perpendikulyar tekislik yasaladi.



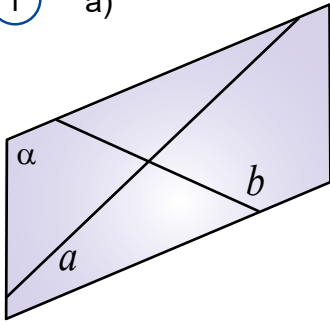
“Параллельная плоскость” (“Parallel tekislik”) yordamida parallel tekislik yasaladi.

### Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

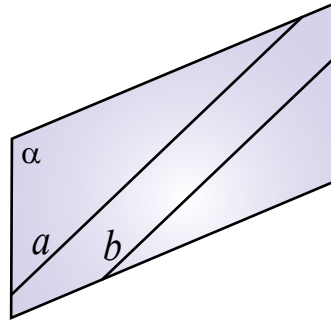
1. Ixtiyoriy uchta nuqta belgilang. Ular orqali o‘tuvchi tekislik yasang.
2. Biror tekislik yasang, so‘ng unga perpendikulyar tekislik yasang.
3. Biror tekislik yasang, so‘ng unga parallel tekislik yasang.



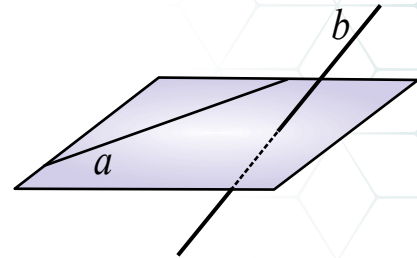
1 a)



b)



c)



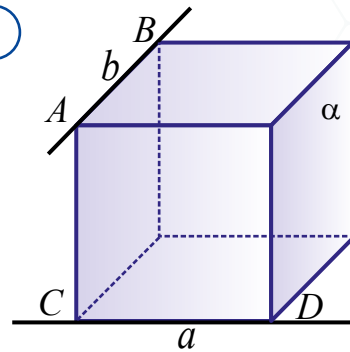
Agar fazoda ikki to'g'ri chiziq o'zaro kesishsa yoki o'zaro parallel bo'lsa, ular bitta tekislikda yotadi (1a- va 1b-rasm).

Fazoda bitta tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziqlar *ayqash to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (1c-rasm).  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarning ayqashligi  $a \div b$  tarzda ifodalanadi.

Ayqash to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarni *ayqash kesmalar* deb ataymiz. 2-rasmda kubning  $AB$  va  $CD$  ayqash qirralari ko'rsatilgan.

Ayqash to'g'ri chiziqlarni quyidagi alomatga ko'ra tanib olish mumkin:

2



**Teorema 3.4.** Agar ikki to'g'ri chiziqdan biri biror tekislikda yotsa, ikkinchisi esa bu tekislikni birinchi to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtada kesib o'tsa, u holda bu to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi.

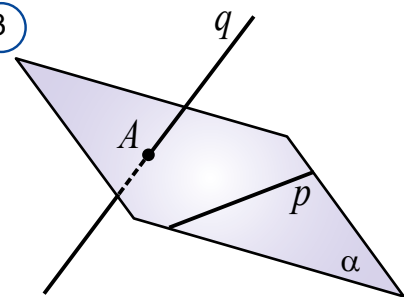
**Isbot.** Aytaylik,  $p$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotsin.  $q$  to'g'ri chiziq esa bu tekislikni  $p$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan  $A$  nuqtada kesib o'tsin (3-rasm).  $p$  va  $q$  to'g'ri chiziqlarning ayqash ekanini isbotlaymiz.

Teskarisini faraz qilamiz:  $p$  va  $q$  to'g'ri chiziqlar birorta  $\beta$  tekislikda yotsin. U holda  $\beta$  tekislikka  $p$  to'g'ri chiziq va  $A$  nuqta tegishli bo'ladi. O'z navbatida  $A$  nuqta  $\alpha$  tekislikka ham tegishli. Demak,  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar ustma-ust tushadi. Natijada shartga ko'ra,  $\alpha$  tekislikka tegishli bo'lmagan  $q$  to'g'ri chiziq bu tekislikka tegishli bo'lib qoldi. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.

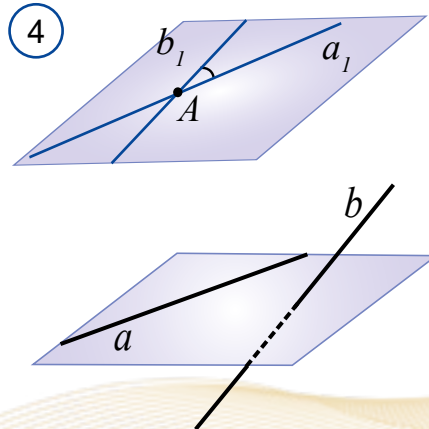
*Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak* deb bu to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.

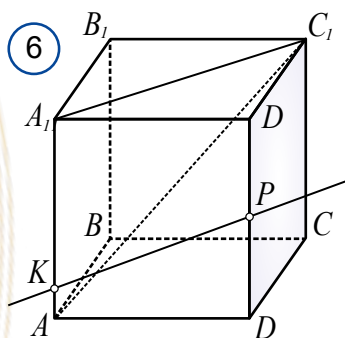
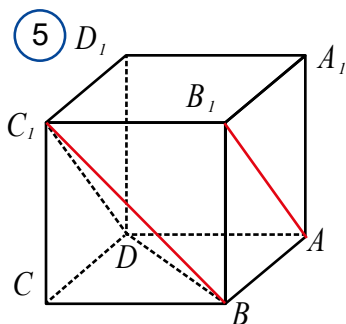
Amalda  $a$  va  $b$  ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish uchun (4-rasm):

3



4





- 1) biror  $A$  nuqta tanlanadi;
- 2)  $A$  nuqtadan ayqash to'g'ri chiziq'larga parallel  $a_1$  va  $b_1$  to'g'ri chiziq'lar o'tkaziladi;
- 3) bu to'g'ri chiziq'lar orasidagi burchak o'lchanadi.

Bu algoritm natijasi –  $A$  nuqtaga bog'liq emasligi haqida o'ylab ko'ring.

**Masala.** Kub qo'shni yoqlarining ayqash diagonallari orasidagi burchakni toping.

**Yechish.** Shartga ko'ra,  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – kub qo'shni  $ABA_1 B_1$  va  $CBC_1 B_1$  yoqlarining  $AB_1$  va  $C_1 B$  diagonallari orasidagi burchakni topish kerak (5-rasm).

$AB_1$  ga parallel bo'lgan  $DC_1$  diagonalni o'tkazamiz. U holda ta'rifga ko'ra,  $AB_1$  va  $BC_1$  diagonallari orasidagi burchak –  $DC_1$  va  $C_1 B$  diagonallar orasidagi  $DC_1 B$  burchakka teng bo'ladi.

$DC_1 B$  – teng tomonli uchburchak.

Demak,  $DC_1 B = 60^\circ$ .



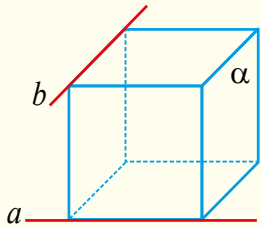
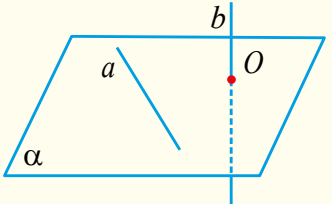
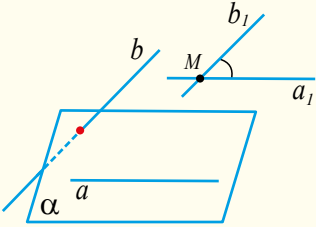
### Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. To'g'ri chiziq'larning ayqashlik alomatini ayting.
2. To'g'ri chiziq'lar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
3. Ayqash to'g'ri chiziq'lar parallel bo'lishi mumkinmi?
4. Ayqash to'g'ri chiziq'lar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
5. Fazoda to'g'ri chiziq'lar o'zaro qanday joylashishi mumkin?
6. Fazoda o'zaro kesishmaydigan to'g'ri chiziq'lar har doim ham parallel bo'ladimi?



### Amaliy mashq va tatbiq

12.1. Jadvalda 12-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

1. Ayqash to'g'ri chiziq'lar		
Ta'rifi	Alomati	Orasidagi burchak
 <p>Bitta tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziq'lar <b>ayqash to'g'ri chiziq'lar</b> deb ataladi va <math>a \div b</math> tarzda ifodalanadi.</p>	 <p>Agar <math>a \subset \alpha</math>, <math>\alpha \cap b = O</math>, <math>O \notin a</math> bo'lsa, <math>a \div b</math> bo'ladi.</p>	 <p><b>Ayqash to'g'ri chiziq'lar orasidagi burchak</b> deb ularga parallel bo'lgan, kesishuvchi to'g'ri chiziq'lar orasidagi burchakka aytiladi.</p>

**12.2.** 6-rasmda  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli parallelepiped va uning  $AA_1$  va  $DD_1$  qirralaridagi mos ravishda  $K$  va  $P$  nuqtalar tasvirlangan. Jadvalda keltirilgan to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvidan kelib chiqib, jadvalning mos kataklariga tegishli belgi ( $\otimes$  – keshishish va  $\dot{-}$  – ayqashlik) qo'yilgan. Jadvaldagi xatoliklarni toping.

	$AB$	$BB_1$	$A_1 D_1$
$KP$	$\otimes$	$\dot{-}$	$\otimes$
$C_1 A_1$	$\dot{-}$	$\dot{-}$	$\otimes$
$C_1 B$	$\otimes$	$\otimes$	$\dot{-}$

**12.3.**  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi. Bu to'g'ri chiziqlarning mumkin bo'lgan o'zaro joylashishlarini ko'rsating.

- A) parallel      B) kesishadi      C) kesishmaydi  
D) ayqash      E) perpendikulyar

**12.4.** a)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelepiped; b)  $ABCA_1 B_1 C_1$  prizma; d)  $ABCD$  tetraedr; e)  $SABCD$  piramidani chizing va undagi ayqash qirralar juftlarini aniqlang.

**12.5.**  $a$  to'g'ri chiziq  $b$  to'g'ri chiziqqa,  $b$  to'g'ri chiziq esa  $c$  to'g'ri chiziqqa ayqash bo'lsa,  $a$  to'g'ri chiziq  $c$  to'g'ri chiziqqa ayqash bo'ladimi?

**12.6.** 7-rasmdagi ayqash to'g'ri chiziqlar timsollarini toping.

**12.7.** 8-rasmda tasvirlangan  $EF$  va  $GH$  kesmalarining o'zaro joylashuvi qanday?

**12.8.** 9-rasmda tasvirlangan  $EH$  va  $FG$  kesmalar o'zaro kesishadimi?

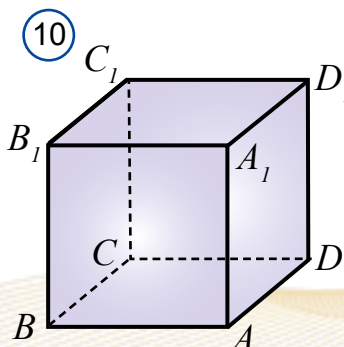
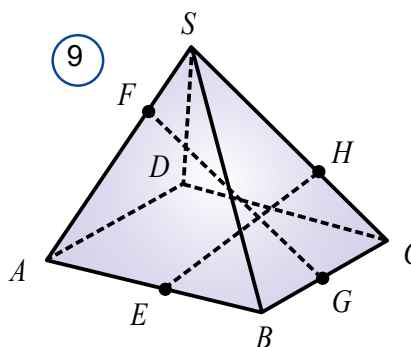
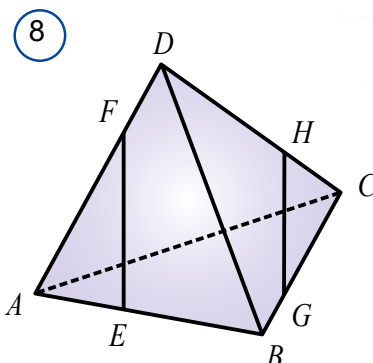
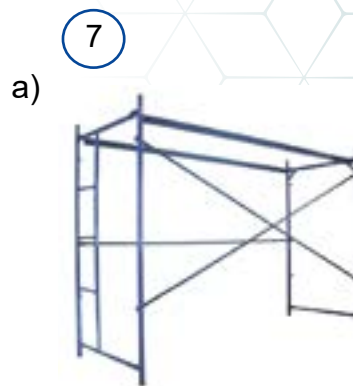
**12.9.**  $K, Z, M, N$  nuqtalar – mos ravishda  $SABC$  uch-burchakli muntazam piramidaning  $SA, AC, BC, SB$  qirralarining o'rtalari. Agar piramidaning yon qirralari  $b$ , asosining tomoni  $a$  ga teng bo'lsa,  $KZMN$  to'rtburchak perimetrini toping.

**12.10.** 10-rasmdagi  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubda quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping: a)  $DC$  va  $BC$ ; b)  $AB$  va  $BB_1$ ; c)  $AA_1$  va  $D_1 C$ ; d)  $AA_1$  va  $D_1 C_1$ ; e)  $A_1 C_1$  va  $AC$ ; f)  $AB$  va  $B_1 D_1$ .

**12.11.**  $XU$  va  $VT$  to'g'ri chiziqlar parallel,  $XY$  va  $VT$  to'g'ri chiziqlar esa ayqash. Agar: a)  $\angle YXU = 40^\circ$ ;

b)  $\angle YXU = 135^\circ$ ; c)  $\angle YXU = 90^\circ$  bo'lsa,  $XY$  va  $VT$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

**12.12.**  $l$  to'g'ri chiziq  $ABCD$  parallelogramning  $BC$  tomoniga parallel va uning tekisligida yotmaydi.  $l$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlar ayqash ekanini isbotlang. Agar parallelogramning burchaklaridan biri: a)  $58^\circ$ ; b)  $133^\circ$  bo'lsa,  $l$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



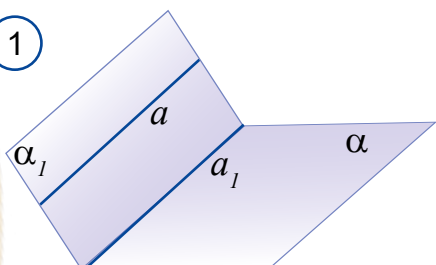


Agar to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishmasa, *to'g'ri chiziq va tekislik parallel* deyiladi. To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallelligi quyidagi alomat orqali aniqlanadi.



**3.5-teorema** Agar tekislikda yotmagan to'g'ri chiziq shu tekislikdagi biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning o'ziga ham parallel bo'ladi.

1



**Isbot.** Aytaylik,  $\alpha$  – tekislik,  $a$  – unda yotmagan to'g'ri chiziq,  $a_1$  esa  $\alpha$  tekislikda yotgan va  $a$  ga parallel to'g'ri chiziq bo'lsin.

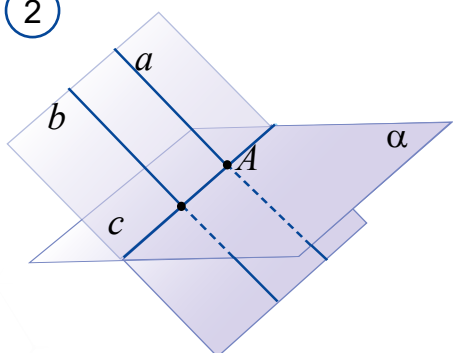
$a$  va  $a_1$  to'g'ri chiziqlar orqali  $a_1$  tekislikni o'tkazamiz (1-rasm). Ravshanki,  $\alpha$  va  $\alpha_1$  tekisliklar  $a_1$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.

Agar  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni kesib o'tsa, u holda kesishish nuqtasi  $a_1$  to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lar edi. Ammo buning iloji yo'q, chunki  $a$  va  $a_1$  to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel. Shunday qilib,  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni kesib o'ta olmaydi.

Demak,  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel.

**Masala.** Agar tekislik ikki parallel to'g'ri chiziqdan birini kesib o'tsa, ikkinchisini ham kesib o'tishini isbotlang.

2



**Isbot.**  $a$  va  $b$  – ikki parallel to'g'ri chiziq,  $\alpha$  esa  $a$  to'g'ri chiziqni  $A$  nuqtada kesib o'tuvchi tekislik bo'lsin (2-rasm).

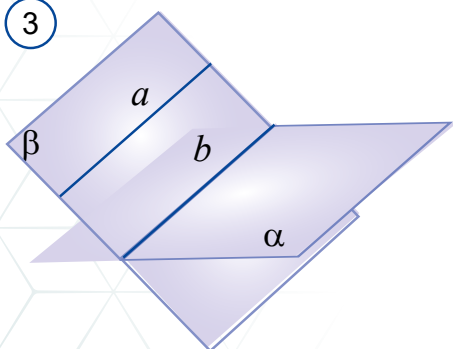
$a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlardan tekislik o'tkazamiz. U  $\alpha$  tekislikni biror  $c$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi.  $c$  to'g'ri chiziq  $a$  to'g'ri chiziqni  $A$  nuqtada kesib o'tadi.

Demak, unga parallel bo'lgan  $b$  to'g'ri chiziqni ham kesib o'tadi.  $c$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotgani uchun  $\alpha$  tekislik  $b$  to'g'ri chiziqni ham kesib o'tadi.



**Teorema 3.6.** Agar bir tekislik ikkinchi tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tsa, bu tekisliklarning kesishish to'g'ri chizig'i ham berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi.

3



**Isbot.** Aytaylik,  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel va  $\beta$  tekislikda yotsin.  $b$  to'g'ri chiziq esa  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning kesishish chizig'i bo'lsin (3-rasm). U holda  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar  $\beta$  tekislikda yotadi va o'zaro kesishmaydi. Aks holda  $a$  to'g'ri chiziq  $\beta$  tekislikni kesib o'tar edi.

Demak,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel.





## Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. To'g'ri chiziq va tekislik fazoda o'zaro qanday joylashishi mumkin?
2. To'g'ri chiziq va tekislik qachon parallel bo'ladi?
3. To'g'ri chiziqning tekislikka parallellik alomatini ayting.
4. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning joylashuvi bilan bog'liq qanday xossalarni bilasiz?

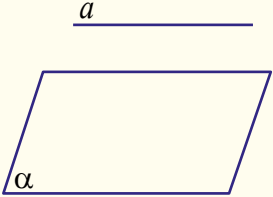
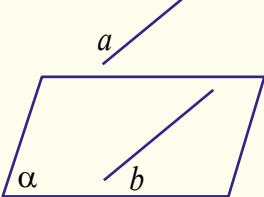
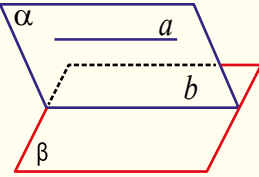
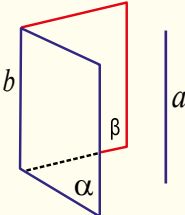


## Amaliy mashq va tatbiq

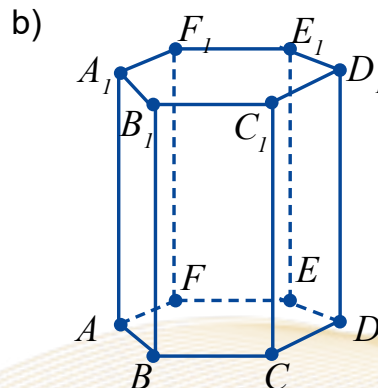
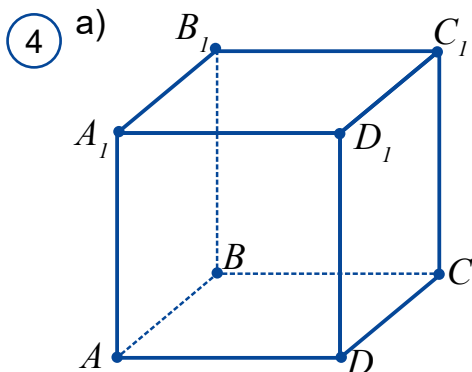
13.1. Jadvalda 13-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

$a$ to'g'ri chiziq va $\alpha$ tekislik	ko'p umumiy nuqtalarga ega.	to'g'ri chiziq tekislikda yotadi: $a \subset \alpha$ .
	bitta umumiy nuqtaga ega.	to'g'ri chiziq tekislikni kesadi: $a \otimes \alpha$ .
	umumiy nuqtaga ega emas.	to'g'ri chiziq tekislikka parallel: $a \parallel \alpha$ .

### To'g'ri chiziq va tekisliklarning Parallelligi

Ta'rifi	Alomatlari	Xossalari
 <p>Agar <math>a</math> to'g'ri chiziq <math>\alpha</math> tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, <b>to'g'ri chiziq va tekislik parallel</b> deyiladi va <math>a \parallel \alpha</math> tarzda ifodalanadi.</p>	 <p>Agar <math>a</math> to'g'ri chiziq <math>\alpha</math> tekislikda yotmasa va <math>a \parallel b</math>, <math>b \subset \alpha</math> bo'lsa, u holda <math>a \parallel \alpha</math> bo'ladi.</p>	 <p>Agar <math>b</math> to'g'ri chiziq <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar kesishish chizig'i, <math>a \subset \alpha</math> va <math>a \parallel \beta</math> bo'lsa, u holda <math>b \parallel a</math> bo'ladi.</p>
		 <p>Agar <math>b</math> to'g'ri chiziq <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar kesishish chizig'i, <math>a \parallel \alpha</math> va <math>a \parallel \beta</math> bo'lsa, <math>a \parallel b</math> bo'ladi.</p>

13.2. Rasmga qarab a)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning; b)  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  muntazam oltiburchakli prizmaning bir-biriga parallel bo'lgan qirra va yoqlarini aniqlang (4-rasm).



5



**13.3.** 5-rasmda kombayn tasvirlangan. Uning dala maydoniga (tekisligiga) nisbatan qaysi qismlari parallel ekanini aniqlang.

**13.4.** 6-rasmda tasvirlangan duradgorlar asbobi – reysmus yordamida yog‘och taxtaning qaysi yog‘iga nisbatan parallel to‘g‘ri chiziq chizilayotganligini aniqlang.

**13.5.** Quyidagi jummalarni o‘qing. Jumla to‘g‘ri bo‘lsa “+”, noto‘g‘ri bo‘lsa, “–” belgisini yonidagi katakka qo‘ying.

1	Agar tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq shu tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning o‘ziga ham parallel bo‘ladi.	
2	Bitta tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel bo‘ladi.	
3	Tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq bu tekislikda yotgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa ham parallel bo‘ladi.	
4	Agar bir tekislik ikkinchi tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tsa, bu tekisliklarning kesishish to‘g‘ri chizig‘i ham berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.	
5	Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishmasa, to‘g‘ri chiziq va tekislik <i>parallel</i> deyiladi.	
6	Orasidagi burchak $90^\circ$ ga teng to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar to‘g‘ri chiziq deb ataladi.	
7	Ayqash to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deb bu to‘g‘ri chiziq larga parallel bo‘lgan kesishuvchi to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakka aytiladi.	

6

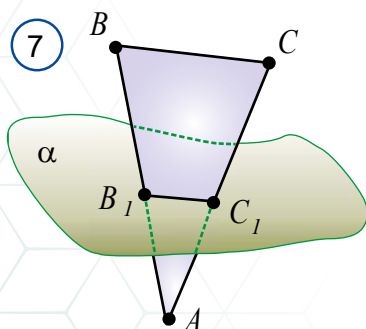


**13.6.**  $A$  va  $C$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikda yotadi.  $B$  va  $D$  nuqtalar  $\beta$  tekislikda yotadi.  $AC, CD, BD, AB, BC$  va  $AD$  to‘g‘ri chiziq lardan qaysilari  $\beta$  tekislikni kesib o‘tadi?

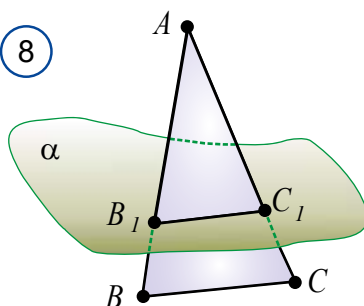
**13.7.**  $ABC$  uchburchak  $\alpha$  tekislikni  $B_1$  va  $C_1$  nuqtalarda kesib o‘tadi (7-rasm). Agar  $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$ ,  $BC = 15$  cm,  $BC \parallel B_1C_1$  bo‘lsa,  $B_1C_1$  kesmaning uzunligini toping.

**13.8.**  $\alpha$  tekislik  $ABC$  uchburchakning  $AB$  va  $AC$  tomonlarini  $B_1$  va  $C_1$  nuqtalarda kesib o‘tadi (8-rasm). Agar  $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$ ,  $B_1C_1 = 12$  cm,  $BC \parallel \alpha$  bo‘lsa,  $BC$  kesmaning uzunligini toping.

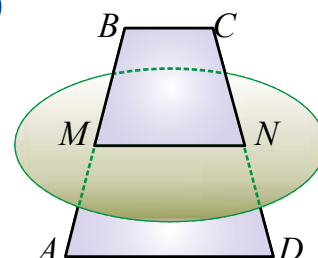
7



8



9



- 13.9.**  $\alpha$  tekislik  $ABCD$  trapetsiyani uning  $AD$  asosiga parallel va yon tomonlarining o'rtasi  $M$  va  $N$  nuqtalarda kesib o'tadi (9-rasm). Agar  $AD = 17$  cm,  $BC = 9$  cm bo'lsa,  $MN$  kesmaning uzunligini toping.
- 13.10.** Tekislikka unda yotmagan nuqtadan nechta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin?
- 13.11.**  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel. To'g'ri tasdiqlarni toping.
- A)  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikning faqat bitta to'g'ri chizig'iga parallel bo'ladi.
- B)  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikning bitta to'g'ri chizig'idan boshqa barcha to'g'ri chiziqlariga ayqash bo'ladi.
- C)  $\alpha$  tekislikda  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel va ayqash bo'lgan ko'plab to'g'ri chiziqlar topiladi.
- D)  $\alpha$  tekislikda faqat bitta  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel va bu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq mavjud.
- 13.12.**  $A, B, C, D$  nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi.  $M, N, K, Z$  nuqtalar mos ravishda  $AD, BD, BC, AC$  kesmalarining o'rtalari. Agar  $CD=AB$  bo'lsa,  $MK$  va  $NZ$  to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligini isbotlang.
- 13.13.**  $ABCD$  parallelogramning  $AB$  va  $BC$  tomonlari  $\alpha$  tekislikni kesib o'tadi.  $AD$  va  $DC$  to'g'ri chiziqlar ham  $\alpha$  tekislikni kesib o'tishini isbotlang.
- 13.14.**  $ABC$  va  $ABD$  uchburchaklar bitta tekislikda yotmaydi.  $CD$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ixtiyoriy to'g'ri chiziqning bu uchburchaklar tekisligini kesib o'tishini isbotlang.
- 13.15.** Berilgan ikki to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotishini isbotlang.
- 13.16.**  $ABCD$  kvadratining  $C$  uchi orqali kvadrat tekisligida yotmagan  $CK$  to'g'ri chiziq o'tadi:
- a)  $CK$  va  $AD$  ayqash ekanini isbotlang;
- b)  $CK$  va  $AD$  orasidagi burchakni toping.
- 13.17.** Tadbirkor alyuminiydan 10-rasmda tasvirlangan narvonni ishlab chiqarmoqchi. Narvon har birida 7 ta zina bo'lgan, bir-biriga mahkamlangan ikkita qismdan iborat.
- 1) Narvonning qaysi bo'laklari o'zaro parallel va qaysilari o'zaro ayqash ekanini aniqlang.
- 2) Agar narvonning kengligi  $0,5$  m, balandligi kengligidan 3,5 marta uzun ekani ma'lum bo'lsa, bitta narvonni tayyorlash uchun necha  $m$  quvur kerak bo'ladi?
- 3)  $1$  m alyuminiy quvurning narxi 20 000 so'm bo'lsa, bitta narvonni ishlab chiqarish uchun necha so'm alyuminiy quvur kerak bo'ladi?



Eng so'nggi falsafa maktabi – Iskandariya maktabi dunyoga miloddan avvalgi 300-yillarda yashagan mashhur olim Yevklidni bergan. Geometriyaning aksiomatik tuzilishi birinchi marta Yevklidning "Negizlar" asarining o'n uchinchi kitobida taqdim etilgan. Taxminan ikki ming yil davomida bu ish geometriyaning tizimli kursini o'rganish uchun asos bo'lib qolmoqda. Rivoyatlarga qaraganda, qiroli Ptolemey Yevkliddan geometriyani o'rganishning "Negizlar" dagiga qaraganda qisqaroq va osonroq usulini topish mumkin emasmi, deb so'ragan. Yevklid unga: "Geometriyada qirolik yo'li yo'q", deb javob bergan

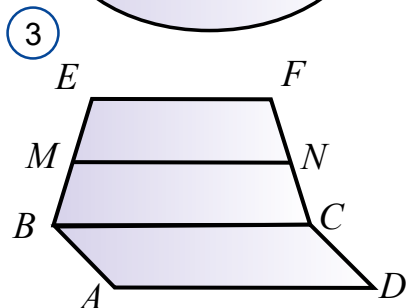
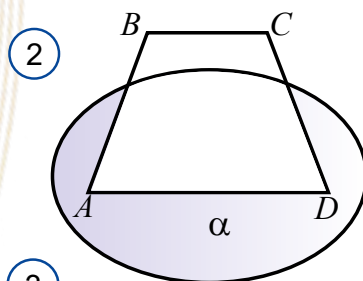
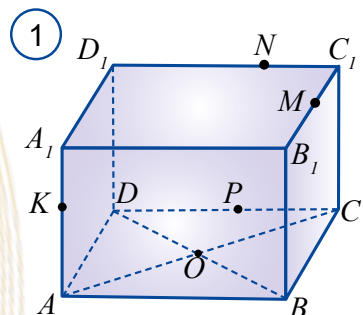
10





## O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

1. 1-rasmda  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli parallelepiped va uning  $B_1 C_1$ ,  $C_1 D_1$ ,  $CD$  va  $AA_1$  qirralarining o'rtalari – mos ravishda  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $K$  nuqtalar tasvirlangan.  $O$  nuqta –  $ABCD$  asos markazi. Jadvalda keltirilgan to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvini rasmdan aniqlab, jadvalning mos katagiga tegishli belgi ( $\otimes$  – keshishish,  $//$  – parallellik va  $\perp$  – ayqashlik)ni yozing.



To'g'ri chiziqlar	$MN$	$NP$	$C_1 O$	$NO$
$AA_1$				
$BC_1$				
$BD$				
$AC$				

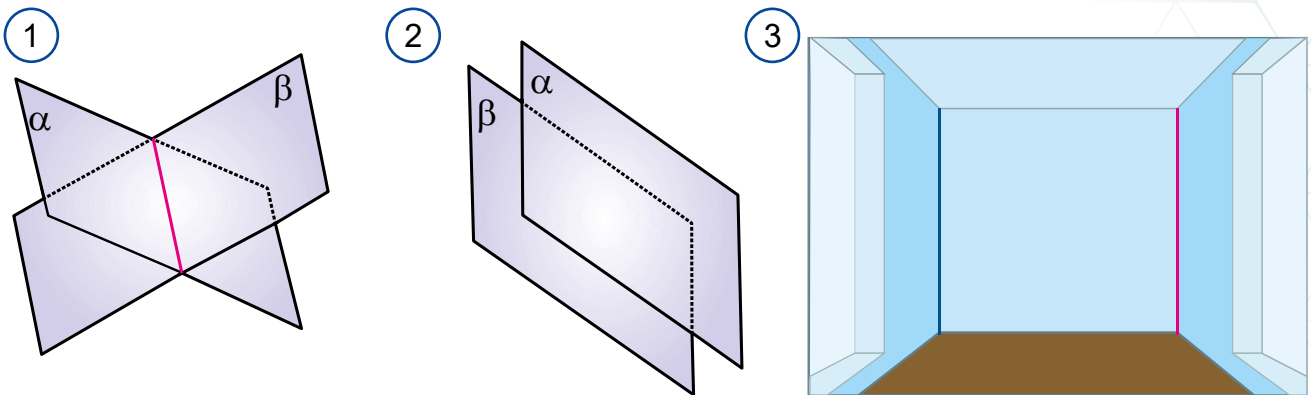
2.  $A, B, C, D$  nuqtalar bir tekislikda yotadi.  $AB$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlar haqida nima deyish mumkin?  
 A) parallel bo'ladi B) kesishadi C) ayqash bo'ladi
3.  $ABCD$  to'rtburchakning  $AD$  tomoni orqali tekislik o'tkazilgan (2-rasm). Agar  $\angle BCA = \angle CAD$  bo'lsa,  $BC$  tomon  $\alpha$  tekislikka parallel ekanini isbotlang.
4.  $ABCD$  kvadrat va  $BEFC$  trapetsiya (3-rasm) bir tekislikda yotmaydi.  $M$  va  $N$  nuqtalar – mos ravishda  $BE$  va  $FC$  kesmalarining o'rtasi. 1)  $MN$  ning  $AD$  ga parallel ekanini isbotlang.  
 2) Agar  $AD = 10$  cm,  $EF = 6$  cm bo'lsa,  $MN$  ni toping.
5.  $ABCD$  parallelogrammning  $AD$  tomonida  $A_1$  nuqta shunday tanlanadiki,  $DA_1 = 4$  cm.  $AC$  diagonalga parallel tekislik  $A_1$  nuqtadan o'tadi va  $CD$  tomonini  $C_1$  nuqtada kesib o'tadi.  
 1)  $C_1 D A_1$  va  $ABC$  uchburchaklarning o'xshashligini isbotlang.  
 2) Agar  $BC = 10$  cm,  $A_1 C_1 = 6$  cm bo'lsa,  $AC$  ni toping.
6.  $\alpha$  tekislik  $BAC$  burchak tomonlarini  $A_1$  va  $B_1$  nuqtalarda, unga parallel  $\beta$  tekislik esa  $A_2$  va  $B_2$  nuqtalarda kesadi.  $A_1 B_1 = 18$ ,  $AA_1 = 24$ ,  $AA_2 = \frac{1}{2} A_1 A_2$  bo'lsa,  $A_2 B_2$  va  $AA_2$  ni toping.
7.  $FA$  to'g'ri chiziq  $ABCD$  parallelogrammning uchidan o'tadi va parallelogramm tekisligida yotmaydi.  
 1)  $FA$  va  $CD$  ayqash ekanini isbotlang.  
 2)  $FAB$  burchagi  $30^\circ$  bo'lsa,  $FA$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.
8.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubining qirrası  $a$  ga teng.  $AD_1$  to'g'ri chiziqdan va  $BC$  kesma o'rtasidan o'tadigan tekislik bilan kub kesganda hosil bo'ladigan kesimini yasang. Kesimning yuzini toping.
9. Muntazam to'rtburchakli piramidaning yon qirrası  $8$  cm bo'lib, asos tekisligi bilan  $30^\circ$  li burchak hosil qiladi. Piramidaning balandligi va yon sirtining yuzini toping.
10.  $A, B, C$  va  $D$  nuqtalar bir tekislikda yotmaydi. Agar  $AB$  va  $BC$  kesmalar o'rtalari orasidagi masofa  $6$  ga teng va  $AC = 16$ ,  $BD = 20$  bo'lsa,  $AC$  va  $BD$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



Ikki tekislik yoki umumiy nuqtaga ega, yoki umumiy nuqtaga ega bo'lmashligi mumkin. Birinchi holda  $S_3$  aksiomaga ko'ra, bu tekisliklar umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi, ya'ni to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi (1-rasm). Ikkinchi holda tekisliklar kesishmaydi (2-rasm).

Kesishmaydigan tekisliklar *parallel tekisliklar* deb ataladi. Parallel tekisliklar haqida xonaning poli va shifti, qarama-qarshi devorlar tasavvur berishi mumkin (3-rasm).

Ikki tekislikning parallelligi quyidagi alomat orqali aniqlanadi.



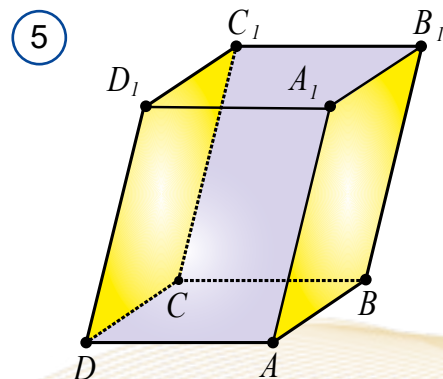
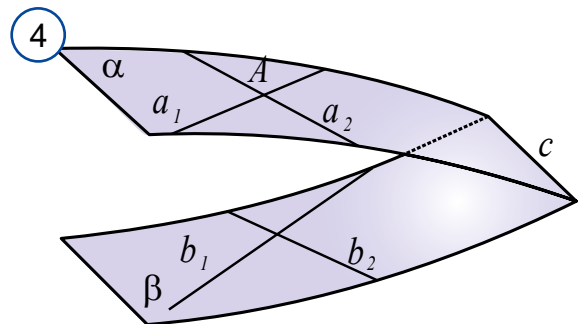
**Teorema 3.7.** Agar bir tekislikdagi kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lsa, bu tekisliklar parallel bo'ladi.

**Isbot.** Aytaylik,  $\alpha$  va  $\beta$  – berilgan tekisliklar,  $a$  va  $b$  –  $\alpha$  tekislikda yotgan va  $A$  nuqtada kesishuvchi to'g'ri chiziq,  $a_1$  va  $b_1$  esa  $\beta$  tekislikda yotgan va mos ravishda  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq'larga parallel to'g'ri chiziq'larga bo'lsin (4-rasm).

Faraz qilamiz,  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar o'zaro parallel bo'lmasin, ya'ni qandaydir  $c$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin. U holda 3.6-teoremaga ko'ra,  $a_1$  va  $a_2$  to'g'ri chiziq'larga mos ravishda  $b_1$  va  $b_2$  to'g'ri chiziq'larga parallel bo'lib,  $\beta$  tekislikka ham parallel bo'ladi. Shuning uchun ular bu tekislikda yotgan  $c$  to'g'ri chiziqni ham kesib o'tmaydi.

Shunday qilib,  $\alpha$  tekislikda yotgan  $A$  nuqta orqali  $c$  to'g'ri chiziqqa parallel ikkita:  $a_1$  va  $a_2$  to'g'ri chiziq'larga o'tmoqda. Parallellik aksiomasiga ko'ra, bunday bo'lishi mumkin emas. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.

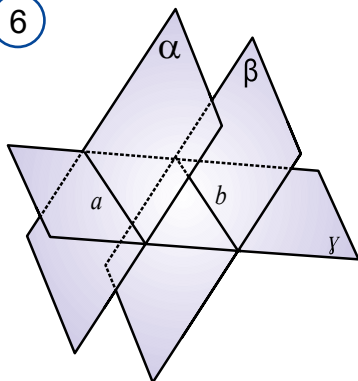
Parallelepipedning yon yoqlari (5-rasm) parallel bo'lishini ushbu teoremdan foydalanib mustaqil isbotlang.





**Teorema 3.8.** *Ikki parallel tekislikning uchinchi tekislik bilan kesishish to'g'ri chiziqlari o'zaro parallel bo'ladi.*

6



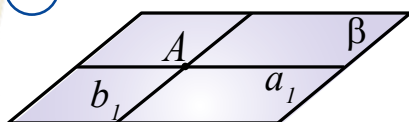
**Isbot.** Aytaylik,  $\alpha$  va  $\beta$  parallel tekisliklar  $\gamma$  tekislikni mos ravishda  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tsin (6-rasm).  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar parallel ekanini isbotlaymiz.

Faraz qilamiz,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar biror  $Q$  nuqtada kesishsin. U holda  $Q$  nuqta  $\alpha$  tekislikda yotadi, chunki  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi. Shuningdek,  $Q$  nuqta  $\beta$  tekislikda yotadi, chunki  $b$  to'g'ri chiziq  $\beta$  tekislikda yotadi. Natijada  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar umumiy  $Q$  nuqtaga ega bo'lmoqda. Buning esa shartga ko'ra iloji yo'q. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.



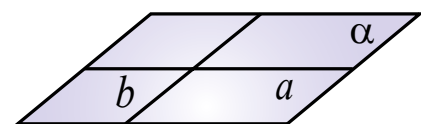
**Teorema 3.9.** *Berilgan tekislikka undan tashqaridagi nuqtadan yagona parallel tekislik o'tkazish mumkin.*

7



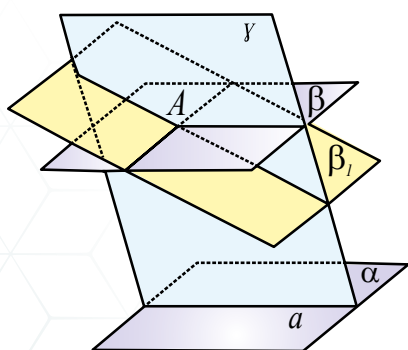
**Isbot.** Berilgan  $\alpha$  tekislikda kesishadigan ikkita  $a$ ,  $b$  to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Berilgan  $A$  nuqtadan ularga parallel  $a_1$ ,  $b_1$  to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz (7-rasm).

$a_1$ ,  $b_1$  to'g'ri chiziqlar orqali  $\beta$  tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik 3.7-teoremaga ko'ra,  $\alpha$  tekislikka parallel bo'lib, izlanayotgan tekislik bo'ladi.



Endi bu tekislikning yagonaligini ko'rsatamiz. Faraz qilamiz,  $\alpha$  tekislikka parallel yana bitta  $\beta_1$  tekislik mavjud bo'lsin (8-rasm).  $A$  nuqtadan va  $a$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi  $\gamma$  tekislikni o'tkazamiz. Bu tekislik  $\beta$  tekislikni  $a_1$  to'g'ri chiziq bo'ylab,  $\beta_1$  tekislikni  $a_2$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi.  $a_1$ ,  $a_2$  to'g'ri chiziqlar 3.6-teoremaga ko'ra  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi. Lekin bunday bo'lishi mumkin emas, chunki tekislikda unda yotmagan nuqtadan faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.

8



**Teorema 3.10.** *Uchinchi tekislikka parallel ikki tekislik o'zaro parallel bo'ladi.*

Bu teoremani mustaqil isbotlang.



**Teorema 3.11.** *Parallel tekisliklar orasidagi parallel to'g'ri chiziqlar kesmalari tengdir.*

**Isbot.** Aytaylik,  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $k$  va  $l$  to'g'ri chiziqlardan  $AC$  va  $BD$  kesmalarni ajratsin (9-rasm). Bu kesmalarning tengligini ko'rsatamiz.

$k$  va  $l$  to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi  $\gamma$  tekislik parallel tekisliklarni  $AC$  va  $BD$  to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tadi. Natijada qarama-qarshi tomonlari parallel bo'lgan  $ABCD$  to'rtburchakka, ya'ni parallelogrammga ega bo'lamiz. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng bo'ladi. Xususan,  $AB = CD$ .



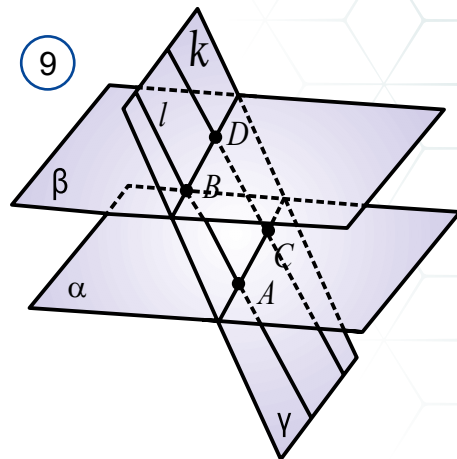
**Teorema 3.12.** *Uchta parallel tekisliklar orasidagi ixtiyoriy to'g'ri chiziqlar kesmalari o'zaro proporsional bo'ladi.*

Bu teoremani ham mustaqil isbotlang.



### Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Tekisliklar fazoda qanday joylashishi mumkin?
2. Parallel tekisliklar deb qanday tekisliklarga aytiladi?
3. Tekisliklarning parallellik alomatini ayting.
4. Fazoda tekisliklarning joylashuvi bilan bog'liq qanday xossalarni bilasiz?
5. Parallelepipedning yon yoqlari parallel bo'lishini asoslang.



### Amaliy mashq va tatbiq

14.1. Jadvalda 14-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

$\alpha$ va $\beta$ tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishadi	$\alpha \cap \beta$
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel	$\alpha // \beta$

Tekisliklarning paralleligi		
Ta'rifi	Alomati	Xossasi
<p>Kesishmaydigan <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar <b>parallel tekisliklar</b> deb ataladi va <math>a // b</math> tarzda ifodalanadi.</p>	<p>Agar <math>a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = O, a_1 \subset \beta, b_1 \subset \beta, a_1 \cap b_1 = O_1, a // a_1, b // b_1</math> bo'lsa, <math>\alpha // \beta</math> bo'ladi.</p>	<p>Agar <math>\alpha // \beta</math> va <math>\gamma</math> kesuvchi tekislik, <math>\alpha \cap \gamma = AD</math> va <math>\beta \cap \gamma = BC</math> bo'lsa, <math>AD // BC</math> bo'ladi.</p>

14.2. 10-rasmdan parallel tekisliklar timsoli nimalar orqali berilganini aniqlang.

14.3. 1)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  parallelepipedning; 2)  $ABCA_1 B_1 C_1$  prizmaning parallel yoqlarini aniqlang.

14.4. Birorta ham umumiy nuqtasi bo'lmagan  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar fazoda qanday joylashadi?

10

a)



b)

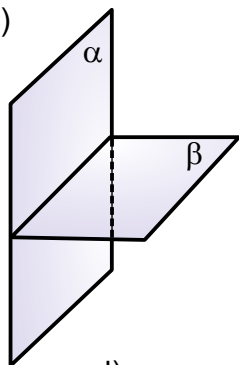


c)

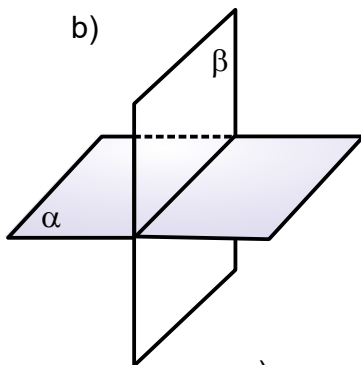


11

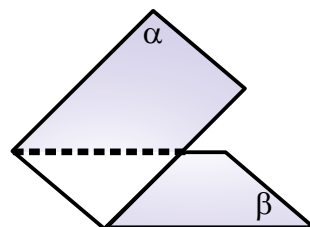
a)



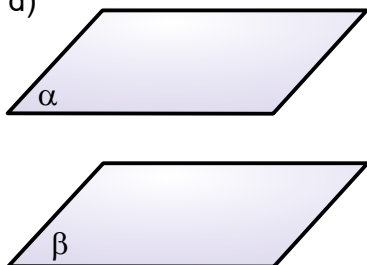
b)



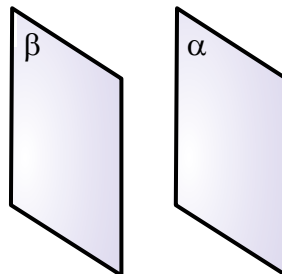
c)



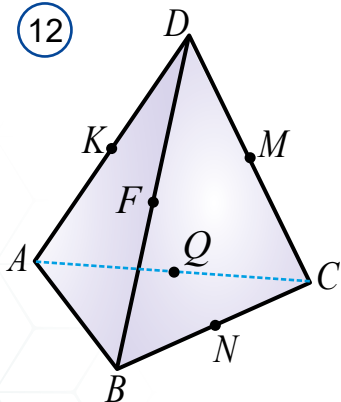
d)



e)



12



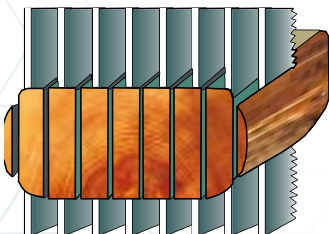
14.5.  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar parallel.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikda yotadi,  $c$  va  $d$  to'g'ri chiziqlar esa  $\beta$  tekislikda yotadi. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

- A)  $\alpha \parallel b$       B)  $c \parallel b$       C)  $b \parallel \beta$       D)  $\beta \parallel a$   
 E)  $c \parallel a$       F)  $d \parallel b$       G)  $a \parallel \alpha$       H)  $d \parallel \alpha$

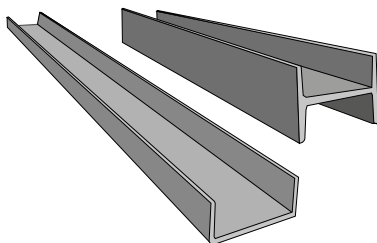
14.6. Kesishuvchi ikkita tekislik tasvirlangan uchta rasmni ko'rsating (11-rasm).

14.7.  $K, F, M, N, Q$  nuqtalar 12-rasmda tasvirlangan  $ABCD$  tetraedr mos qirralarining o'rtalari bo'lsa, a)  $K$  nuqtadan o'tuvchi va  $ABC$  tekislikka parallel; b)  $BD$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va  $MNQ$  tekislikka parallel bo'lgan tekislikni aniqlang.

13



14



14.8. 13- va 14-rasmlardan parallel tekisliklarni aniqlang.



**14.9.** 15-rasmda  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kub va uning ba'zi qirralarining o'rtalari –  $M, N, P, K$  va  $L$  nuqtalar tasvirlangan.  $O$  nuqta –  $ABCD$  asos markazi. Jadvalda keltirilgan tekisliklarning o'zaro joylashuvini rasmdan aniqlab, jadvalning mos katagiga tegishli belgi ( $\otimes$  – kesishish,  $//$  – parallelizm)ni yozing.

Tekisliklar	$ADC$	$PLN$	$MNP$	$A_1 C_1 C$
$A_1 B_1 C_1$				
$MNK$				
$MKP$				
$A_1 DC_1$				

**14.10.**  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar parallel. Ularning hech biriga tegishli bo'lmagan nuqtadan  $\gamma$  tekislik o'tkazilgan. To'g'ri tasdiqlarni ko'rsating.

- $\gamma$  tekislik –  $\alpha$  tekislikka parallel bo'lgan yagona tekislik;
- $\gamma$  tekislik –  $\beta$  tekislikni kesib o'tuvchi yagona tekislik;
- $\gamma$  tekislik –  $\beta$  tekislikka parallel bo'lgan yagona tekislik;
- $\gamma$  tekislik –  $\alpha$  tekislikni kesib o'tuvchi yagona tekislik;
- $\gamma$  tekislik –  $\alpha$  tekislikka ham,  $\beta$  tekislikka ham parallel bo'lgan yagona tekislik.

**14.11.** 16-rasmda  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli paralelepiped tasvirlangan.

- $A_1 B_1 C_1 D_1$  va  $B_1 A_1 D_1 C_1$ ;    b)  $ADD_1 A_1$  va  $ABCD$ ;
- $ABB_1 A_1$  va  $C_1 D_1 DC$ ;    d)  $BADC$  va  $ABB_1 A_1$ ;
- $CC_1 B_1 B$  va  $ADD_1 A_1$  tekisliklarning o'zaro joylashishini aniqlang.

**14.12.**  $AB, BC$  kesmalar  $ABCD$  parallelogrammning tomonlari bo'lib, ular mos ravishda  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq-larga parallel (17-rasm).  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq-larga parallel va  $\alpha$  tekislikka tegishli.  $ABCD$  va  $\alpha$  tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

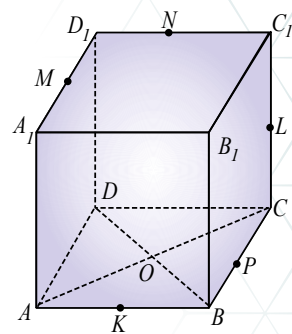
**14.13.**  $a$  va  $b$  ayqash to'g'ri chiziq-lar berilgan.  $a$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va  $\beta$  tekislikka parallel bo'lgan nechta tekislik o'tkazish mumkin?

**14.14.** Ikkita  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning kesishish chizig'i uchinchi –  $\gamma$  tekislikka parallel.  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

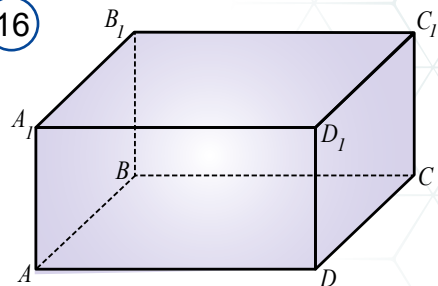
**14.15.**  $AB$  va  $CD$  parallel to'g'ri chiziq-lar orqali o'tkazilgan  $\gamma$  tekislik  $\alpha$  va  $\beta$  parallel tekisliklarni mos ravishda  $AC$  va  $BD$  to'g'ri chiziq-lar bo'ylab kesib o'tadi. Agar  $BD = 15$  cm bo'lsa,  $AC$  kesma uzunligini toping. (18-rasm).

**14.16.** Yog'och taxta bo'lagining hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchakdan iborat (19-rasm). Taxtani qanday

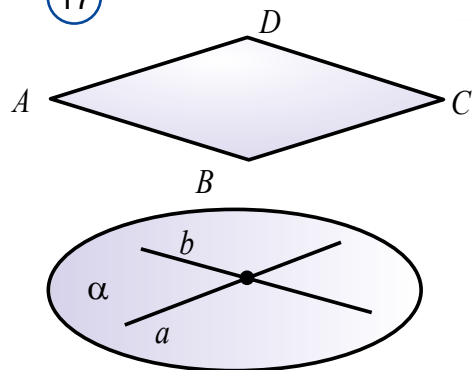
15



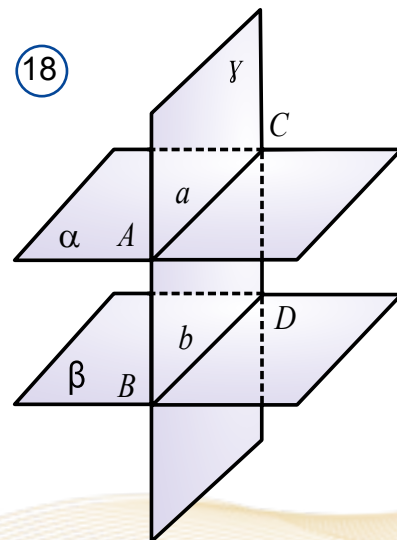
16



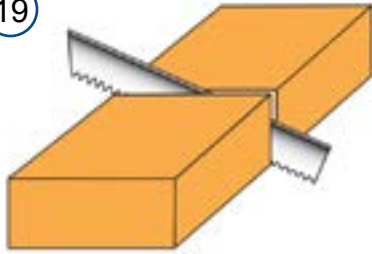
17



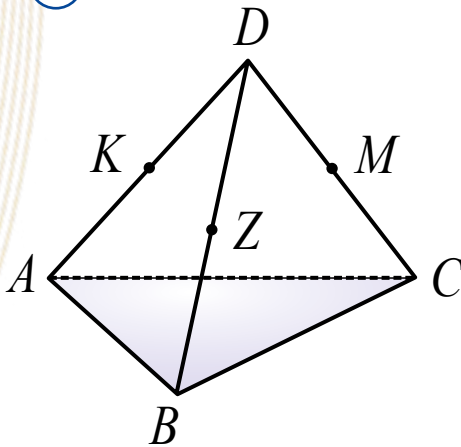
18



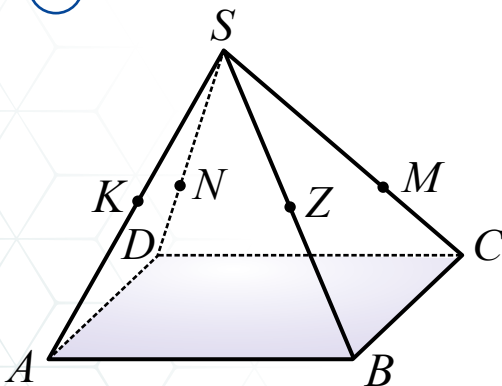
19



20



21



yo'nalishda arralamaylik, har doim kesim parallelogramm bo'lishini isbotlang.

**14.17.** Ixtiyoriy ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orqali yagona parallel tekisliklar juftini o'tkazish mumkinligini isbotlang.

**14.18.**  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar parallel.  $\alpha$  tekislikda yotuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq  $\beta$  tekislikka parallel bo'lishini isbotlang.

**14.19.**  $O$  nuqta – bir tekislikda yotmaydigan  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  kesmalarning umumiy o'rtasi.  $ABC$  va  $A_1B_1C_1$  tekisliklar parallel ekanini isbotlang.

**14.20.**  $ABCD$  parallelogramm va uni kesmaydigan tekislik berilgan. Parallelogrammning  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  uchlaridan tekislikni mos ravishda  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  nuqtalarda kesib o'tadigan parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar  $AA_1 = 4 m$ ,  $BB_1 = 3 m$  va  $CC_1 = 1 m$  bo'lsa,  $DD_1$  kesma uzunligini toping.

**14.21.** Ikkita parallel tekislik berilgan. Bir tekislikning  $A$  va  $B$  nuqtalaridan ikkinchi tekislikni  $A_1$  va  $B_1$  nuqtalarda kesib o'tuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar  $AB = a$  bo'lsa,  $A_1B_1$  kesma uzunligini toping.

**14.22.**  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar parallel.  $\alpha$  tekislikning  $M$  va  $N$  nuqtalaridan  $\beta$  tekislikni  $K$  va  $L$  nuqtalarda kesib o'tuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan.  $MNLK$  parallelogramm ekanini isbotlang. Agar  $ML = 14 cm$ ,  $NK = 8 cm$  va  $MK : MN = 9 : 7$  bo'lsa,  $MNLK$  to'rtburchak perimetrini toping.

**14.23.**  $OF$  va  $OP$  nurlar  $\alpha$  va  $\beta$  parallel tekisliklarni mos ravishda  $F_1$ ,  $P_1$ ,  $F_2$ ,  $P_2$  nuqtalarda kesib o'tadi. Agar  $F_1P_1 = 3 cm$ ,  $F_2P_2 = 5 cm$  va  $P_1P_2 = 4 cm$  bo'lsa,  $OP_1$  kesma uzunligini toping.

**14.24.**  $OA$  va  $OB$  nurlar  $\alpha$  va  $\beta$  parallel tekisliklarni mos ravishda  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  nuqtalarda kesib o'tadi. Agar  $OA_1 = 16 cm$ ,  $A_1A_2 = 24 cm$  va  $A_2B_2 = 50 cm$  bo'lsa,  $A_1B_1$  kesma uzunligini toping.

**14.25.**  $D$  nuqta  $ABC$  uchburchak tekisligiga tegishli emas (20-rasm).  $K$ ,  $M$ ,  $Z$  nuqtalar – mos ravishda  $DA$ ,  $DB$  va  $DC$  kesmalarning o'rtasi.  $ABC$  va  $KZM$  tekisliklarning o'zaro joylashuvini aniqlang.

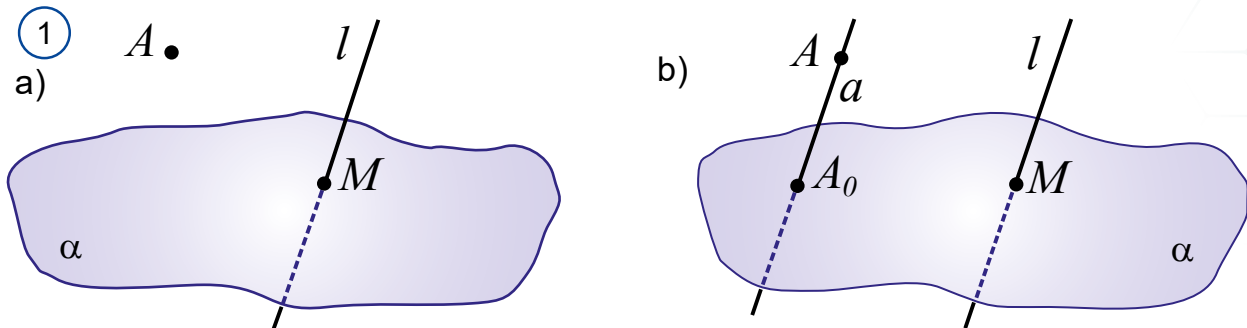
**14.26.**  $S$  nuqta  $ABCD$  parallelogramm tekisligiga tegishli emas (21-rasm).  $K$ ,  $Z$ ,  $M$ ,  $N$  nuqtalar mos ravishda  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  va  $SD$  kesmalarga tegishli. Agar  $SK = AK$ ,  $SZ = BZ$ ,  $CM : MC = 2 : 1$ ,  $SN : ND = 2 : 1$  bo'lsa,  $ABCD$  va  $KZMN$  tekisliklarning o'zaro joylashuvini aniqlang.

Fazodagi shakllar turli usullar bilan tekislikda tasvirlanadi. Quyida ular bilan tanishamiz.

*Fazodagi shaklni tekislikka parallel proyeksiyalash* deb shunday akslantirishga aytiladiki, unda shaklning har bir nuqtasi berilgan proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar bo'lab tekislikka ko'chiriladi.

Parallel proyeksiyalashni yorug'lik nurlari yordamida biror narsaning devor yoki poldagi soyasiga qiyoslash mumkin.

Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda biror shakl va *proyeksiyalash tekisligi* deb nomlanuvchi tekislik olinadi hamda *proyeksiyalash yo'nalishi*, ya'ni biror to'g'ri chiziq tanlanadi. Albatta, bu to'g'ri chiziq proyeksiya tekisligi bilan kesishishi lozim.



Aytaylik, ixtiyoriy  $\alpha$  tekislik va proyeksiyalash to'g'ri chizig'i  $l$  va tekislikda ham, to'g'ri chiziqda ham yotmagan  $A$  nuqta berilgan bo'lsin (*1a-rasm*).

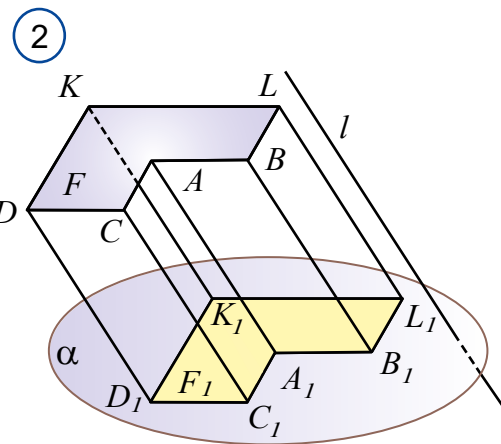
$A$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikka  $l$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni  $A_0$  nuqtada kesib o'tsin (*1b-rasm*).

Topilgan  $A_0$  nuqta  $A$  nuqtaning  $\alpha$  tekislikka *parallel proyeksiyasi* deb ataladi.

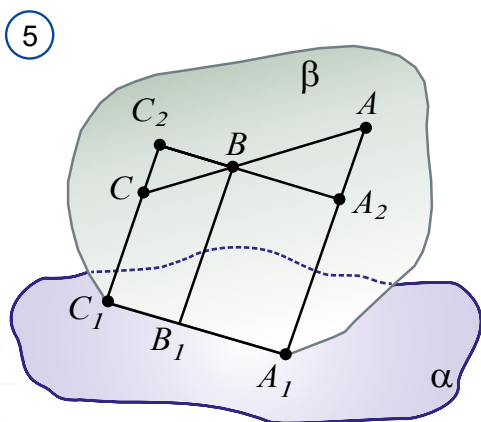
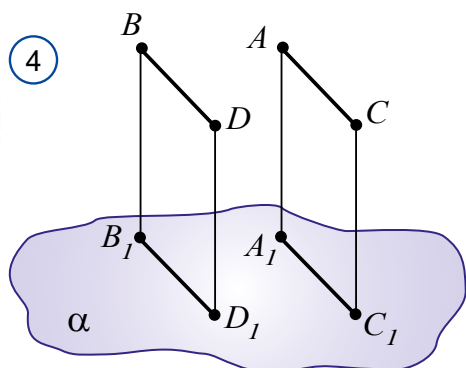
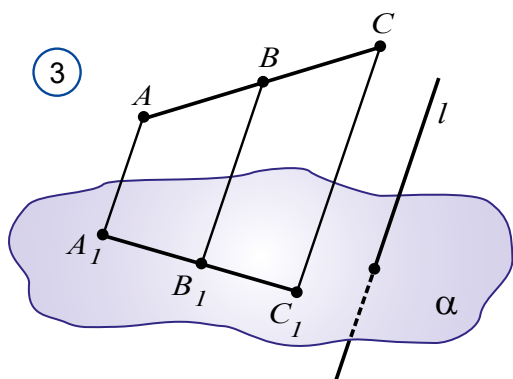
Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda nuqta nuqtaga o'tar ekan.

Aytaylik, biror  $F$  shaklni  $\alpha$  tekislikka  $l$  yo'nalish bo'yicha parallel proyeksiyalash lozim bo'lsin. Buning uchun  $F$  shaklning ixtiyoriy nuqtasini olamiz, undan  $l$  ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning  $\alpha$  tekislik bilan kesishish nuqtasini belgilaymiz. Bunday nuqtalar  $\alpha$  tekislikda qandaydir  $F_1$  shaklni hosil qiladi. Aynan shu  $F_1$  shakl  $F$  shaklning  $\alpha$  tekislikdagi parallel proyeksiyasi bo'ladi. 2-rasmda  $F$  shaklning  $\alpha$  tekislikka proyeksiyasi  $F_1$  shakl tasvirlangan.

Parallel proyeksiyalashning quyidagi xossalari ham keltirib o'tamiz. Ularni mustaqil isbotlab ko'ring.







6



Parallel proyeksiyalashda kesma kesmaga, to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa o'tadi.

Parallel to'g'ri chiziqlar proyeksiyalari parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi.

Albatta, bu xossalr proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lmagan kesma va to'g'ri chiziqlar uchun o'rinli bo'ladi. Endi quyidagi xossalarni isbotlaylik.

**1-xossa.** *Parallel proyeksiyalashda shakllarning to'g'ri chiziqli kesmalari ham kesmalarga o'tadi.*

Haqiqatan,  $AC$  kesmaning nuqtalarini proyeksiyalovchi barcha to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikni  $A_1C_1$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tuvchi tekislikda yotadi (3-rasm).  $AC$  kesmaning ixtiyoriy  $B$  nuqtasi  $A_1C_1$  kesmaning  $B_1$  nuqtasiga o'tadi.

**2-xossa.** *Parallel proyeksiyalashda shakllarning parallel kesmalari ham parallel kesmalarga o'tadi.*

Haqiqatan,  $AC$  va  $BD$  biror shaklning parallel kesmalari bo'lsin (4-rasm). Ularning proyeksiyalari  $A_1C_1$  va  $B_1D_1$  kesmalar ham parallel bo'ladi, chunki ular ikki parallel tekislikni  $\alpha$  tekislik bilan kesganda hosil bo'ladi.

**3-xossa.** *Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklari nisbati ularning parallel proyeksiyalari uzunliklari nisbatiga teng.*

Haqiqatan, 5-rasmda  $AC$  va  $A_1C_1$  to'g'ri chiziqlar  $\beta$  tekislikda yotadi.  $AC$  kesmaning  $B$  nuqtasidan  $A_1C_1$  ga parallel bo'lgan  $A_2C_2$  to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan  $BAA_2$  va  $BCC_2$  uchburchaklar o'xshash bo'ladi. Uchburchaklarning o'xshashligi va  $A_1B_1 = A_2B$  va  $B_1C_1 = BC_2$  tengliklardan izlanayotgan nisbatda bo'lamiz:  $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$ .

Shunday qilib, parallel proyeksiyalashda to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklarning nisbati saqlanar ekan.

Xususan, kesmaning o'rtasi proyeksiya o'rtasiga o'tadi.





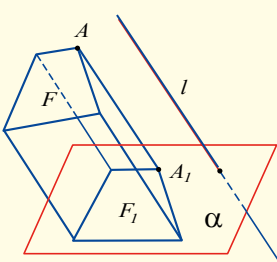
## Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Fazodagi shaklni tekislikka parallel proyeksiyalash deb qanday akslantirishga aytiladi?
2. Nuqtaning tekislikka parallel proyeksiyasi qanday topiladi?
3. 6-rasmdagi "soyalar teatri" jonivorlari qanday hosil qilinyapti?
4. Parallel proyeksiyalash tekisligi va proyeksiyalash yo'nalishi deb nimaga aytiladi?
5. Parallel proyeksiyalashning qanday xossalarini bilasiz?
6. Parallel proyeksiyalashdan qayerda foydalanish mumkin?



## Amaliy mashq va tatbiq

**15.1.** Jadvalda 15-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Parallel proyeksiyalash		
Ta'rifi	Parallel proyeksiyalashda shakllarning xossalari	
	Saqlanadi	Saqlanmaydi
 <p><math>F</math> – shakl,  <math>\alpha</math> – proyeksiyalash tekisligi,  <math>l</math> – proyeksiyalash yo'nalishi,  <math>F_1</math> – <math>F</math> shakl proyeksiyasi.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Shakllarning sinflarga tegishliligi (nuqta nuqtaga, to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa, kesma kesmaga, uchburchak uchburchakka o'tadi);</li> <li>2) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa tegishliligi;</li> <li>3) nuqtalarning to'g'ri chiziqda joylashuvi;</li> <li>4) to'g'ri chiziqning parallelligi;</li> <li>5) bitta yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarining tengligi (yoki proporsionalligi).</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) kesma uzunligi;</li> <li>2) burchak kattaligi;</li> <li>3) to'g'ri chiziqning perpendikulyarligi;</li> <li>4) burchaklar tengligi (proporsionalligi);</li> <li>5) kesishuvchi to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarining tengligi (proporsionalligi).</li> </ol>

- 15.2.** Parallel proyeksiyalashda kesmaning proyeksiyasi: a) kesma; b) nuqta; c) ikki nuqta; d) nur; e) to'g'ri chiziq bo'lishi mumkinmi?
- 15.3.** Parallel proyeksiyalashda kvadratning proyeksiyasi: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) romb; d) to'g'ri to'rtburchak; e) trapetsiya; f) kesma bo'lishi mumkinmi?
- 15.4.** Parallel tekisliklardan birida yotgan uchburchak ikkinchi tekislikka parallel proyeksiyalansa, uning yuzi o'zgarmasligini isbotlang.
- 15.5.** Parallelogrammning parallel proyeksiyasi trapetsiya bo'lishi mumkinmi? Javobingizni asoslang.

- 15.6. Muntazam uchburchakning parallel proyeksiyasi mutazam uchburchak bo'ladimi?
- 15.7. To'g'ri burchakli uchburchakning parallel proyeksiyasi to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladimi?
- 15.8.  $ABC$  uchburchakning parallel proyeksiyasi  $A_1B_1C_1$  uchburchakdan iborat. Bu proyeksiyalashda  $ABC$  uchburchakning: a) medianasi; b) balandligi; c) bissektrisasi  $A_1B_1C_1$  uchburchakning mos: a) medianasi; b) balandligi; c) bissektrisasi o'tadimi?
- 15.9.  $ABC$  uchburchakning parallel proyeksiyasi  $A_1B_1C_1$  uchburchakdan iborat. Agar  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 20 \text{ cm}$  bo'lsa,  $\angle A_1 = 30^\circ$ ,  $B_1C_1 = 20 \text{ cm}$  bo'ladimi?
- 15.10.  $AB$  kesmaning parallel proyeksiyasi  $A_1B_1$  kesmadan iborat.  $AB$  kesmadan olingan  $C$  nuqtaning proyeksiyasi esa  $C_1$  nuqta.  $AB = 48 \text{ cm}$ ,  $A_1B_1 = 36 \text{ cm}$ . Agar  $AC$  kesma uzunligi: a)  $24 \text{ cm}$ ; b)  $12 \text{ cm}$ ; c)  $8 \text{ cm}$ ; d)  $32 \text{ cm}$ ; e)  $36 \text{ cm}$  bo'lsa,  $A_1C_1$  kesmaning uzunligini toping.

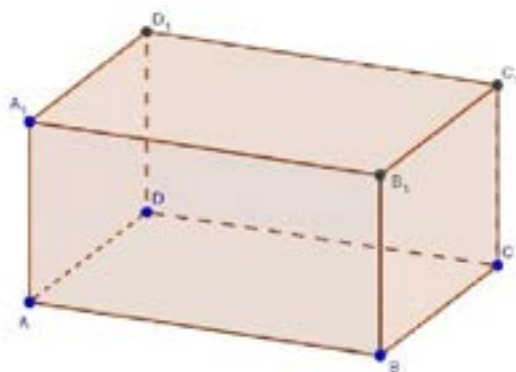
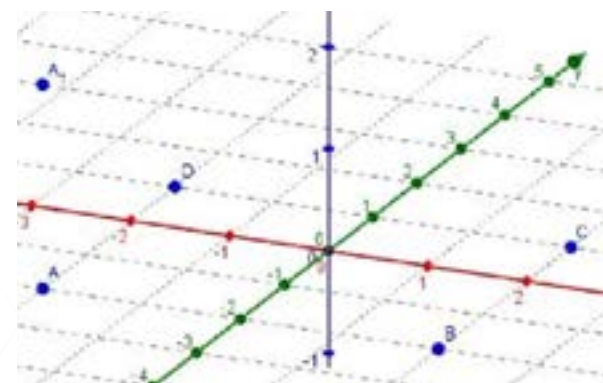


### “GeoGebra”ni qo'llab

### 3D kalkulyatori yordamida to'g'ri burchakli parallelepipedni yasash



“Ввод” (“Kiritish”) satri orqali  $xOy$  tekisligida 4 ta  $A, B, C, D$  nuqtalarni va  $xOz$  tekisligida esa bitta  $A_1$  nuqtani chap tomondagi rasmda ko'rsatilgandek qilib yasaymiz.

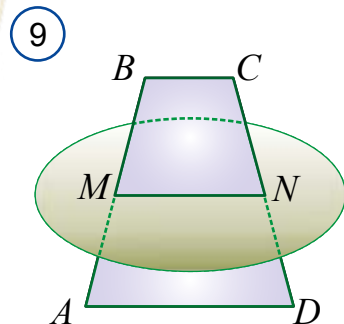
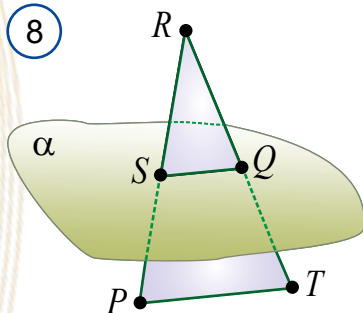
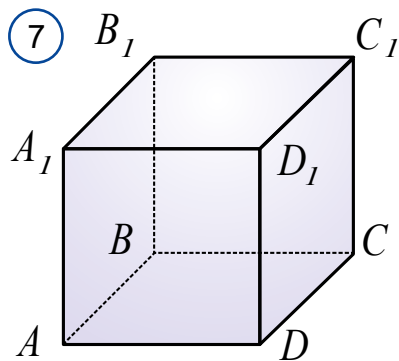


“Призма” (“Prizma”) uskunasi tanlaymiz va ketma-ket  $A, B, C, D$  nuqtalarni ustiga bosib chiqamiz, so'ng  $A_1$  nuqtani bosamiz va natijada o'ng tomondagi rasmdagi to'g'ri burchakli parallelepipedni hosil qilamiz.

### Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Yuqorida yasalgan to'g'ri burchakli parallelepipedning parallel yoqlarini aniqlang va “GeoGebra” 3D kalkulyatori yordamida ularning parallelligini tekshiring.
2. Birorta kub yasang. Uning parallel yoqlarini “GeoGebra” 3D kalkulyatori yordamida aniqlang.
3. Birorta kub yasang. Uning qo'shni yoqlarining ayqash diagonallari orasidagi burchakni “GeoGebra” 3D kalkulyatori yordamida aniqlang.

- 16.1.** a) Ikki to'g'ri chiziq; b) to'g'ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin?
- 16.2.** a) Ikki to'g'ri chiziq; b) to'g'ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkinmi?
- 16.3.** To'rtta nuqta bitta tekislikda yotmaydi. a) ulardan uchasi bitta to'g'ri chiziqda yotishi mumkinmi; b) ular orqali nechta tekislik o'tkazish mumkin?
- 16.4.**  $m$  va  $n$  to'g'ri chiziqlar kesishadi,  $d$  to'g'ri chiziq esa  $n$  to'g'ri chiziqqa parallel.  $m$  va  $d$  to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishi mumkin?
- 16.5.**  $ABC$  uchburchakning  $C$  uchidan o'tuvchi va  $AB$  tomoniga parallel bo'lgan nechta tekislik o'tkazish mumkin?
- 16.6.**  $ABCD$  va  $ABKZ$  parallelogrammlar turli tekisliklarda yotadi. Parallel to'g'ri chiziqlarni ko'rsating.  
 A)  $DA$  va  $KB$       B)  $CD$  va  $KZ$       C)  $BC$  va  $AZ$   
 D)  $DA$  va  $ZA$       E)  $CB$  va  $KB$
- 16.7.**  $A$  va  $C$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikka,  $B$  va  $D$  nuqtalar  $\beta$  tekislikka tegishli.  $AC$ ,  $CD$ ,  $BD$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$  to'g'ri chiziqlardan qaysilari  $\beta$  tekislikni kesib o'tadi?
- 16.8.**  $AB$ ,  $AC$ ,  $KB$ ,  $KD$  kesmalar  $\alpha$  tekislikni kesib o'tadi.  $AK$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $KC$ ,  $CD$  to'g'ri chiziqlardan qaysilari  $\alpha$  tekislikni kesib o'tadi?
- 16.9.** Bir tekislikda yotmagan  $AB$ ,  $AC$  va  $AD$  to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikni  $B_1$ ,  $C_1$  va  $D_1$  nuqtalarda kesib o'tadi.  $B_1$ ,  $C_1$  va  $D_1$  nuqtalar ketma-ket tutashtirilsa, qanday shakl paydo bo'ladi?
- 16.10.**  $\alpha$  tekislikni kesib o'tmaydigan  $MN$  kesma uchlaridan va o'rtasidan parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar bu to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikni mos ravishda  $M_1$ ,  $N_1$  va  $K_1$  nuqtalarda kesib o'tsa va  $KK_1 = 9$  cm,  $NN_1 = 15$  cm bo'lsa,  $MM_1$  kesma uzunligini toping.
- 16.11.**  $\alpha$  tekislikning  $P$  va  $Z$  nuqtalaridan undan tashqarida uzunliklari  $PK = 6$  cm va  $ZM = 9$  cm bo'lgan parallel kesmalar tushirilgan.  $MK$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni  $O$  nuqtada kesib o'tadi. Agar  $MK = 6$  cm bo'lsa,  $MO$  kesma uzunligini toping.
- 16.12.** Parallelogrammni parallel proyeksiyalashda kvadrat hosil bo'lishi mumkinmi?
- 16.13.** Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalari qanday yasaladi?
- 16.14.**  $MNZ$  uchburchak va  $MNPS$  ( $BC$  – asos) parallelogramm bitta tekislikda yotmaydi.  $Q$  va  $R$  nuqtalar –  $CB$  va  $DA$  kesmalarining o'rtasi,  $M$  va  $N$  esa  $DP$  va  $CZ$  kesmalarining o'rtasi.  $MN$  va  $QR$  to'g'ri chiziqlarning parallel ekanini isbotlang.



16.15.  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  kubning (7-rasm)  $AA_1D_1D$ ;  $BB_1C_1C$ ;  $ABCD$ ;  $DD_1C_1C$ ;  $B_1C_1D_1A_1$ ;  $ADD_1A_1$  yoqlaridan qaysilari  $A_1B_1$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi?

16.16.  $PRT$  uchburchak berilgan.  $PT$  to'g'ri chiziqqa parallel  $\alpha$  tekislik  $PR$  tomonni  $S$  nuqtada,  $RT$  tomonni  $Q$  nuqtada kesib o'tadi (8-rasm). Agar  $SR = 7$  cm,  $SQ = 3$  cm va  $SP = 35$  cm bo'lsa,  $PT$  tomonni toping.

16.17.  $\alpha$  tekislik  $ABCD$  teng yonli trapetsiya asosi  $AD$  ga parallel hamda  $AB$  va  $CD$  tomonlarini  $M$  va  $N$  nuqtalarda kesib o'tadi (9-rasm).  $AD = 20$  cm,  $MN = 16$  cm. Agar  $M$  nuqta –  $AB$  kesma o'rtasi va  $AB = 8$  cm bo'lsa, trapetsiya perimetrini toping.

16.18.  $\alpha$  tekislikning  $P$  va  $Z$  nuqtalaridan undan tashqarida  $PK = 6$  cm va  $ZM = 9$  cm kesmalar o'tkazilgan.  $MK$  to'g'ri chiziq tekislikni  $O$  nuqtada kesib o'tadi. Agar  $MK = 6$  cm bo'lsa,  $MO$  masofani toping.

16.19.  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakning  $AB$  tomoni  $\alpha$  tekislikka parallel,  $AD$  tomoni esa bu tekislikka parallel emas.  $ABCD$  va  $\alpha$  tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

16.20.  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  to'g'ri burchakli parallelepipedning quyida berilgan yoqlaridan qaysilari  $ABCD$  yog'iga parallel bo'ladi?

A)  $D_1A_1AD$  B)  $D_1A_1B_1C_1$  C)  $ABB_1A_1$  D)  $D_1C_1CD$

16.21. Rombning ikki diagonali  $\alpha$  tekislikka parallel. Romb tekisligi va  $\alpha$  tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

16.22. Jadvalning chap ustunida tekislikdagi, o'ng ustunida esa fazodagi geometrik shakllarning bir-biriga o'xshash ba'zi xossalari keltirilgan. Ularni ko'z oldingizga keltiring va qanday o'xshashlikka ega ekanini aniqlang, so'ng bo'sh kataklarni to'ldiring. Tekislik va fazodagi yana qanday o'xshash xossalarni keltirish mumkin?

Tekislikda	Fazoda
Agar to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular shu nuqtada kesishadi.	Agar tekisliklar umumiy to'g'ri chiziqqa ega bo'lsa, ular shu to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.
Tekislikning biror nuqtasidan cheksiz ko'p to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.	
	Tekislikda yotmagan to'g'ri chiziq orqali berilgan tekislikka parallel bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.
Bitta to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar o'zaro paralleldir.	





## Amaliy kompetensiyalarni shakllantirishga doir topshiriqlar

1. Temiryo'l vagonlari g'ildiraklarining o'qlari bir-biriga nisbatan qanday joylashgan (1-rasm)?
2. Temiryo'l vagonlari g'ildiragining o'qi relslarga nisbatan qanday joylashgan (1-rasm)?
3. Tevarak-atrofdan parallel va ayqash to'g'ri chiziqlarga misollar keltiring.

1



2



4. Nima uchun yozuv stoli tortmalari ba'zida silliq ochilmaydi (2-rasm)?
5. Nima uchun nasos porsheni uning ichida silliq harakatlanadi (3-rasm)?

3



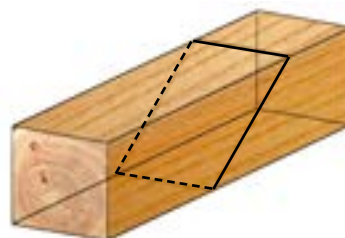
6. Tikuvchilik tasmasi yoki istalgancha uzun tayoq yordamida dahliz poli chekkasiga qoqilgan reykalarning parallelligini qanday tekshirsa bo'ladi (4-rasm)?

4



7. Yog'ochdan ishlangan brus (taxta)ning hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchak shaklida. Uni ko'ndalang qirralari bo'ylab qanday arralamang, hosil bo'lgan hamma kesimlar parallelogramm bo'lishini isbotlang (5-rasm).

5

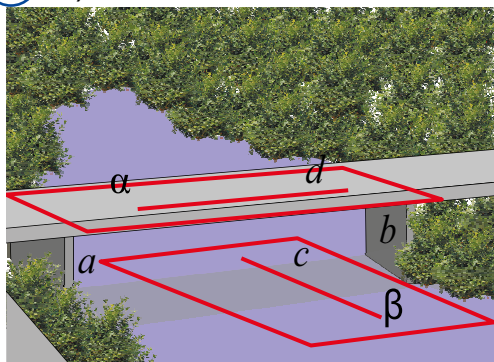


## O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

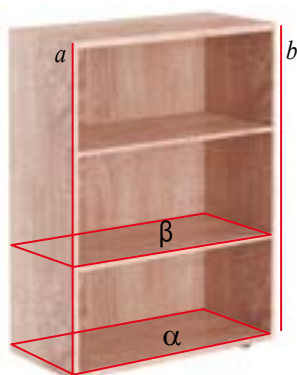
1. Quyidagi jummalarni o'qing. Jumlar ma'nosidan kelib chiqib, ularning har doim, ba'zida to'g'ri bo'lishi yoki hech qachon to'g'ri bo'lmasligini aniqlang va "+" belgisini tegishli ustunga qo'ying. Javobingizni izohlang.

	Jumla	Har doim	Ba'zida	Hech qachon
a	Fazoda ikki to'g'ri chiziq kesishmaydi.			
b	Fazoda ikki tekislik kesishmaydi.			
c	Fazoda to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishadi.			
d	Fazoda to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi.			
e	Tekislikda to'g'ri chiziqlar ayqash bo'ladi.			
f	Tekislikni kesuvchi to'g'ri chiziqlar kesishadi.			
g	Tekislikka parallel to'g'ri chiziqlar kesishadi.			

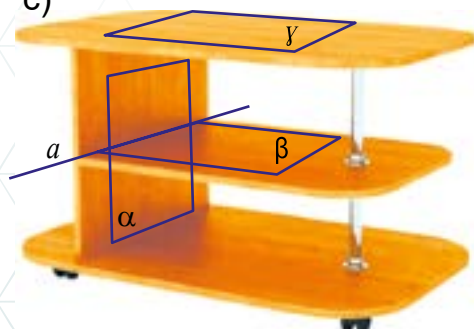
1 a)



b)



c)



2. 1-rasmda ba'zi obyektlar fazoviy geometrik shakllar timsoli sifatida chizib ko'rsatilgan. Qanday fazoviy geometrik shakllarni ko'rayapsiz? Ular o'zaro qanday joylashganligini aniqlab, yozing.

3. Bitta tekislikda yotib, bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar qanday nomlanadi?

A) ayqash B) kesishuvchi C) parallel

4. Ayqash to'g'ri chiziqlar nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin?

A) 1 ta B) 0 ta C) 2 ta

5. Bitta tekislikda yotib, umumiy nuqtaga ega bo'lmagan to'g'ri chiziqlar qanday nomlanadi?

A) ayqash B) kesishuvchi C) parallel

6. To'g'ri chiziqdan turli ikkita tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

7. Bitta tekislikda yotmagan to'rtta nuqta berilgan. Ularning uchtasidan o'tuvchi nechta tekislik o'tkazish mumkin?

8.  $A, B, C$  nuqtalar berilgan ikkita tekisliklarning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

9.  $a$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikkita tekislik berilgan.  $b$  to'g'ri chiziq ulardan birida yotadi va ikkinchisini kesib o'tadi.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarning kesishishini isbotlang.

10. Uchta tekislikning har ikkitasi o'zaro kesishadi. Tekisliklarning kesishish to'g'ri chiziqlaridan ikkitasi biror nuqtada kesishsa, uchinchi kesishish chizig'i ham bu nuqtadan o'tishini isbotlang.

11. Agar fazodagi to'rtburchakning diagonallari kesishsa, unda uning uchlari bitta tekislikda yotishini isbotlang. Rasmda tasvirlangan to'g'ri chiziqlar qanday nomlanadi?

A) ayqash B) kesishuvchi C) parallel

12.  $ABCD$  parallelogramning  $A$  va  $C$  uchlari orqali parallelogram tekisligida yotmaydigan  $A_1C$  va  $C_1C$  parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazildi.  $A_1AB$  va  $C_1CD$  tekisliklarining parallelligini isbotlang.

13. Trapetsiyaning asoslari qandaydir tekislikka parallel. Trapetsiyaning tomonlari ham shu tekislikka parallel bo'lishi mumkinmi? Javobingizni asoslang.

14. Kvadratning  $A$  va  $B$  uchlari va diagonallari kesishish nuqtasi –  $O$  ning proyeksiyalari  $A_1, B_1$  va  $O_1$  nuqtalardan iborat ekani ma'lum.  $ABCD$  kvadratining proyeksiyasini yasang.

15. 2-rasmga ko'ra berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro qanday joylashganini aniqlang va ularning orasiga mos ( $\otimes$  – keshishish,  $//$  – parallellik,  $\div$  – ayqashlik va  $\subset$  – tegishli) belgilarni qo'ying.

To'g'ri chiziqlar/ tekisliklar	$AA_1$	$BC_1$	$CC_1$	$CB_1$	$AB_1$
$ADD_1$					
$AA_1B_1$					
$ABD$					
$AA_1D$					
$BCD$					

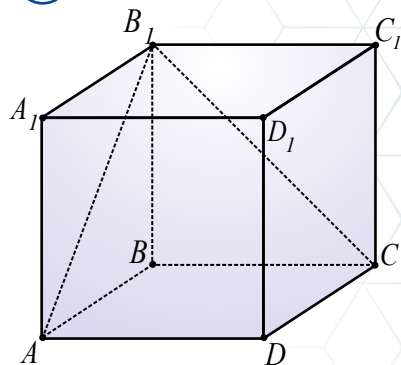
16. 3-rasmdagi  $ABCD$  trapetsiyaning  $AB$  asosi  $\alpha$  tekislikda yotadi,  $CD$  asosi esa  $\alpha$  tekislikda yotmaydi. Berilgan to'g'ri chiziqlar va  $\alpha$  tekislikning o'zaro joylashishini ifodalaydigan jummalarni to'ldiring:

a)  $DB$  to'g'ri chiziq berilgan tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo'lgani uchun u  $\alpha$  tekislik bilan \_\_\_\_\_;

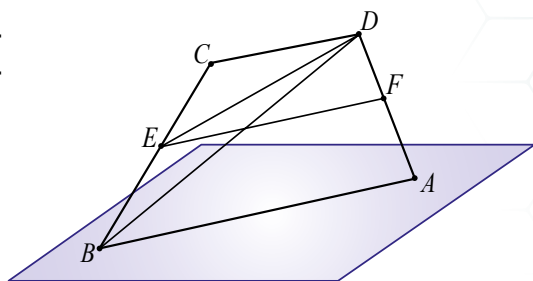
b) trapetsiyaning  $EF$  o'rta chizig'i uning asoslariga parallel bo'lgani uchun  $\alpha$  tekislikka \_\_\_\_\_ bo'ladi.

17. 4-rasmdagi  $ABC$  uchburchakning  $AB$  va  $AC$  tomonlarida  $D$  va  $E$  nuqtalar shunday belgilanganki,  $DE = 5\text{ cm}$  va  $AD : BD = 3 : 4$ .  $B$  va  $C$  nuqtalardan  $DE$  kesmaga parallel  $\alpha$  tekislik o'tkazilgan.  $BC$  tomon uzunligini toping.

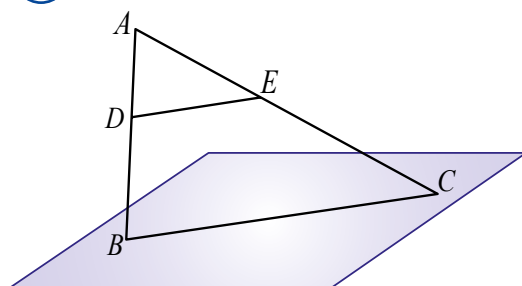
2



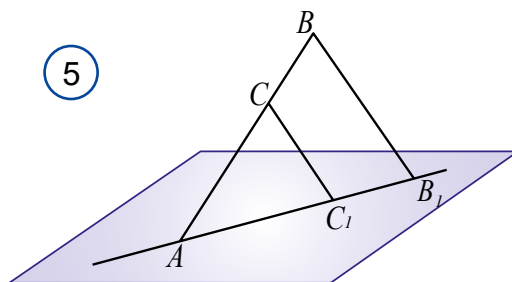
3



4

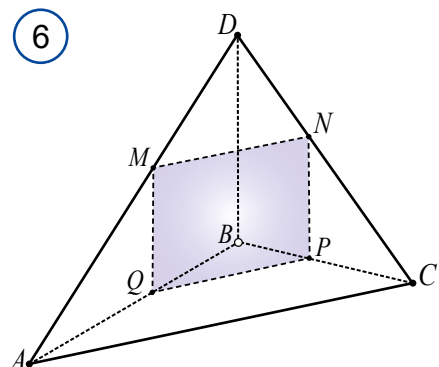


5

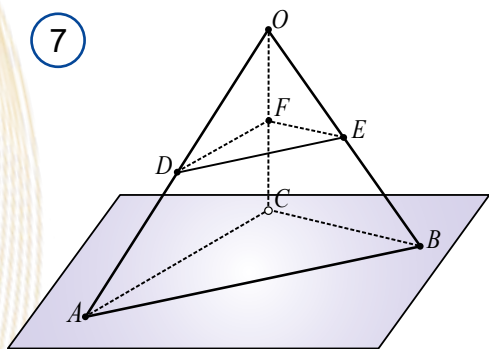




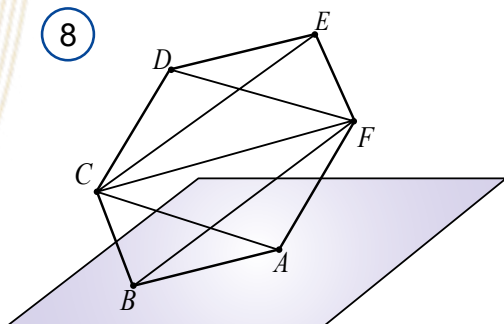
6



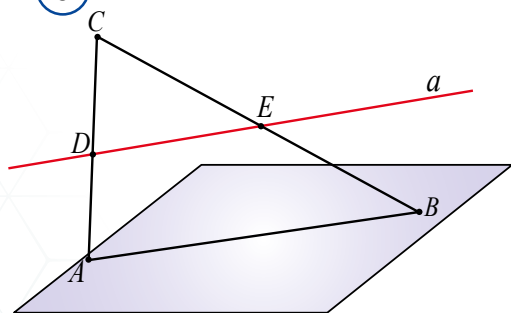
7



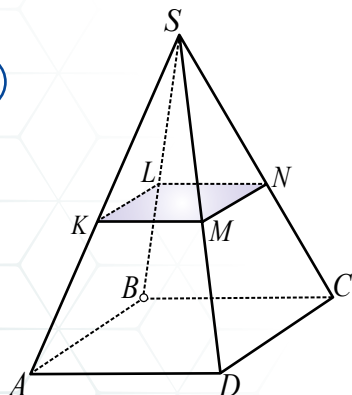
8



9



10



18. 5-rasmdagi  $C$  nuqta  $AB$  kesmaga tegishli.  $A$  nuqtadan tekislik,  $B$  va  $C$  nuqtalardan esa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqlar tekislikni mos ravishda:  $B_1$  va  $C_1$  nuqtalarda kesib o'tadi. Agar  $AC : BC = 3 : 2$  va  $BB_1 = 9$  bo'lsa,  $CC_1$  kesma uzunligini toping.

19.  $a$  va  $b$  parallel to'g'ri chiziqlar ikkita parallel tekislikdan birini mos ravishda  $A_1$  va  $B_1$  nuqtalarda, ikkinchisini esa  $A_2$  va  $B_2$  nuqtalarda kesib o'tadi:  
a)  $A_1B_1$  ning  $A_2B_2$  ga parallel ekanini isbotlang;  
b)  $\angle A_1A_2B_2 = 140^\circ$  bo'lsa,  $\angle A_2A_1B_1$  ni toping.

20.  $\alpha$  tekislik  $BAC$  burchak tomonlarini  $A_1$  va  $B_1$  nuqtalarda, unga parallel  $\beta$  tekislik esa  $A_2$  va  $B_2$  nuqtalarda kesadi.  $A_1B_1 = 8$ ,  $AA_1 = 12$ ,  $AA_2 = 0,5 A_1A_2$  bo'lsa,  $A_2B_2$  va  $AA_2$  ni toping.

21.  $D$  nuqta  $ABC$  uchburchak tekisligida yotmaydi.  $K, Z$  va  $M$  nuqtalar – mos ravishda  $DA, DB,$  va  $DC$  kesmalarning o'rtalari.  $ABC$  va  $KZM$  tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

22. 6-rasmdagi  $M, N, P, Q$  nuqtalar – mos ravishda  $AB, CD, BC, AB$  kesmalarning o'rtasi. Agar  $AC = 10 \text{ cm}$ ,  $BD = 18 \text{ cm}$  bo'lsa,  $MNPQ$  to'rtburchak perimetrini toping.

23. 7-rasmdagi  $O$  nuqta  $ABC$  uchburchak tekisligida yotmaydi.  $D, E, F$  nuqtalar – mos ravishda  $AO, BO, CO$  kesmalarning o'rtasi. Agar  $ABC$  uchburchak yuzi  $380 \text{ cm}^2$  bo'lsa,  $DEF$  uchburchak yuzini toping.

24. 8-rasmdagi  $ABCDEF$  muntazam oltiburchakning  $AB$  tomoni  $\alpha$  tekislikda yotadi. Berilgan  $\alpha$  tekislik bilan  $DE, CD$  va  $EC$  to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini aniqlang.

25. 9-rasmdagi  $A$  va  $B$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikda yotadi.  $C$  nuqta esa  $\alpha$  tekislikda yotmaydi.  $AC$  va  $BC$  kesmalar o'rtasidan  $a$  to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel ekanini isbotlang.

26. 10-rasmdagi  $SABCD$  muntazam piramida asosiga parallel  $KLMN$  tekislik bilan kesilgan.

1)  $BS$  va  $CS$ ;  $AB$  va  $KL$ ;  $CS$  va  $KL$  to'g'ri chiziqlar;  
2)  $ASD$  va  $DSC$ ;  $ABD$  va  $ASC$  tekisliklarning o'zaro joylashuvini aniqlang.



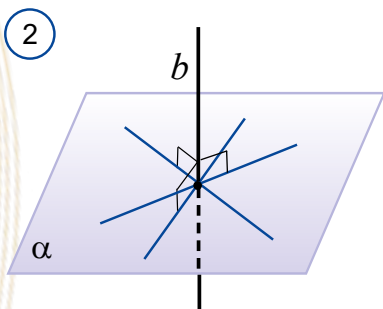
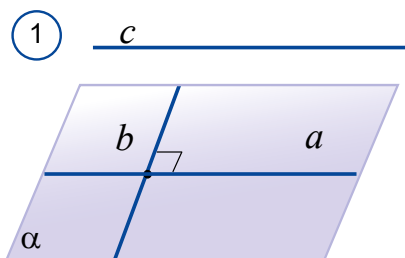


# IV BOB

## FAZODA TO'G'RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULYARLIGI

**Bu bobni o'rganish natijasida quyidagi bilim va ko'nikmalarga ega bo'lasiz:**

- tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlarni tasavvur qilish, ularning xossalarini, to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarlik alomatini bilish va ularni masalalar yechishda qo'llay olish;
- umumlashgan Pifagor teoremasini bilish va uni masalalar yechishda qo'llay olish;
- fazoda tekislikka tushirilgan perpendikulyar va og'ma haqida tushunchaga ega bo'lish va ularni amaliy masalalar yechishda qo'llay olish;
- nuqtadan to'g'ri chiziqqacha va tekislikkacha, to'g'ri chiziqdan unga parallel bo'lgan tekislikkacha bo'lgan masofalarni aniqlab topa olish;
- parallel tekisliklar orasidagi, ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofalarni aniqlab topa olish;
- uch perpendikulyar haqidagi teoremani bilish va uni masalalar yechishda qo'llay olish;
- tekisliklar orasidagi burchakni chizmada tasvirlay olish va hisoblay olish;
- fazoda perpendikulyar tekisliklar haqidagi teoremalarni va tekisliklarning perpendikulyarlik alomatlarini masalalar yechishda qo'llay olish;
- ortogonal proyeksiya va ulardan texnikada foydalanish haqida ma'lumotga ega bo'lish;
- ko'pburchakning ortogonal proyeksiyasining yuzini topa olish.



Eslatib o'tamiz, fazoda berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak  $90^\circ$  ga teng bo'lsa, ular o'zaro *perpendikulyar to'g'ri chiziq*lar deyiladi.

Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar kesishuvchi va ayqash bo'lishi mumkin. 1-rasmda  $a$  va  $b$  perpendikulyar to'g'ri chiziqlar kesishuvchi,  $b$  va  $c$  perpendikulyar to'g'ri chiziqlar esa ayqashdir.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqning perpendikulyarligi  $a \perp b$  tarzda yoziladi.

Tekislikdagi ixtiyoriy to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq *tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq* deb ataladi (2-rasm).

$\alpha$  tekislik va  $b$  to'g'ri chiziqning perpendikulyarligi  $b \perp \alpha$  tarzda yoziladi.

Tevarak-atrofdan o'zaro perpendikulyar shakllarga ko'plab misollar keltirish mumkin. Odatda uy devorlari va ustunlari, minoralar, chiroq ustunlari va simyog'ochlar yerga nisbatan tik, ya'ni perpendikulyar qilib quriladi (3-rasm).

Xonadagi shkaf, stol va muzlatkichlar ham polga nisbatan tik qilib o'rnatiladi.



Endi fazodagi perpendikulyar to'g'ri chiziqning ba'zi xossalari haqida to'xtalamiz.

Agar  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotsa yoki unga parallel bo'lsa, unda  $\alpha$  tekislikda yotgan,  $a$  to'g'ri chiziqqa parallell boshqa  $b$  to'g'ri chiziq ham topiladi.

Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq bu tekislikni albatta kesib o'tadi.





**Teorema 4.1.** Agar ikki to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.

**Isbot.**  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar bo'lsin (4-rasm). Bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro parallel ekanini isbotlaymiz.

$a$  to'g'ri chiziqning biror  $M$  nuqtasidan  $b$  to'g'ri chiziqqa parallel  $a_1$  to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.

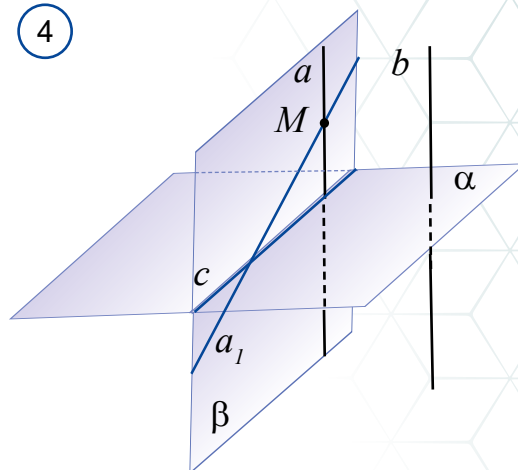
U holda  $a_1 \perp \alpha$  bo'ladi.

$a$  va  $a_1$  to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishini ko'rsatamiz. Aytaylik, unday bo'lmasin,  $a$  va  $a_1$  to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushmasin. Unda  $a$  va  $a_1$  to'g'ri chiziqlar yotgan  $\beta$  tekislikdagi  $M$  nuqtadan  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning kesishish chizig'i –  $c$  to'g'ri chiziqqa ikkita –  $a$  va  $a_1$  perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tadi. Bunday bo'lishi esa imkonsiz. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanini ko'rsatadi.

Demak,  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel.

Endi to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarlik alomatini keltiramiz.

4



**Teorema 4.2.** Agar to'g'ri chiziq tekislikda yotgan ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

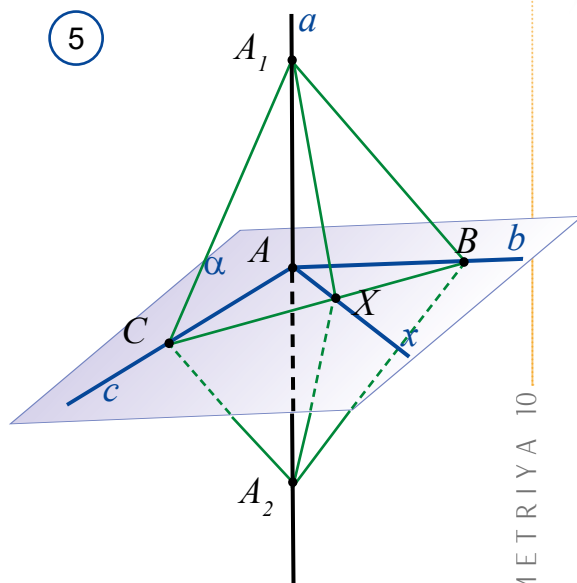
**Isbot.**  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotgan ikkita –  $b$  va  $c$  to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar bo'lsin. U holda  $a$  to'g'ri chiziq  $b$  va  $c$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi  $A$  orqali o'tadi (5-rasm).  $a$  to'g'ri chiziqning  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar bo'lishini isbotlaymiz.

$\alpha$  tekislikning  $A$  nuqtasi orqali ixtiyoriy  $x$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning  $a$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lishini ko'rsatamiz.  $\alpha$  tekislikda  $A$  nuqtadan o'tmaydigan,  $b$ ,  $c$  va  $x$  to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadigan  $x$  to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Mazkur kesishish mos ravishda  $B$ ,  $C$  va  $X$  nuqtalar bo'lsin.

$a$  to'g'ri chiziqda  $A$  nuqtaning turli tomonlarida  $AA_1$  va  $AA_2$  teng kesmalarni qo'yamiz. Hosil bo'lgan  $A_1BA_2$  va  $A_1CA_2$  uchburchaklar teng yonli bo'ladi (buni mustaqil asoslang). Bundan  $A_1BC$  va  $A_2BC$  uchburchaklar teng bo'lishi kelib chiqadi (buni ham mustaqil asoslang). O'z navbatida, bundan  $A_1BX$  va  $A_2BX$  burchaklarning teng bo'lishi va nihoyat  $A_1BX$  va  $A_2BX$  uchburchaklarning ham teng bo'lishi kelib chiqadi (buni ham mustaqil asoslang).

Xususan,  $A_1X = A_2X$  bo'ladi. Unda  $A_1XA_2$  uchburchak teng yonli bo'ladi. Shuning uchun uning  $XA$  medianasi uning balandligi ham bo'ladi. Bu esa, o'z navbatida,  $x$  to'g'ri chiziqning  $a$  to'g'ri chiziqqa per-

5



pendikulyar bo'lishini ko'rsatadi.

Demak,  $a$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar.

Bu teoremadan natija sifatida quyidagi xossalar kelib chiqadi. Ularni mustaqil asoslang.



**4.3-teorema.** Agar to'g'ri chiziq ikkita parallel tekislikning biriga perpendikulyar bo'lsa, ikkinchisiga ham perpendikulyar bo'ladi.



**4.4-teorema.** Agar ikkita tekislik bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, ular parallel bo'ladi.

Quyida "mavjudlik va yagonalik teoremlari" deb ataluvchi xossalarni ham mustaqil isbotlash uchun keltiramiz.

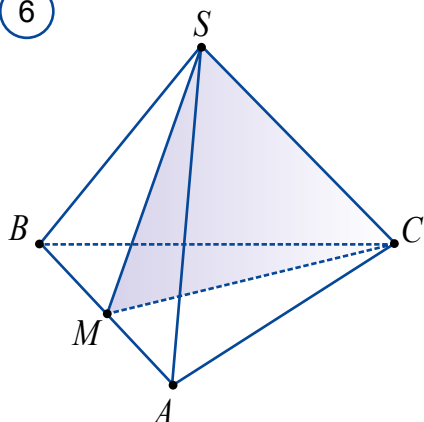


**4.5-teorema.** Fazoning ixtiyoriy nuqtasidan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar yagona tekislik o'tkazish mumkin.



**4.6-teorema.** Fazoning ixtiyoriy nuqtasidan berilgan tekislikka perpendikulyar yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

6



**1-masala.**  $SABC$  muntazam uchburchakli piramidada  $M$  nuqta –  $AB$  qirraning o'rtasi (6-rasm).  $AB$  to'g'ri chiziqning  $SMC$  tekislikka perpendikulyar ekanini isbotlang.

**Isbot.** Shartga ko'ra,  $SABC$  piramida muntazam bo'lgani uchun uning asosi teng tomonli, yon yoqlari esa teng yonli uchburchaklardan iborat bo'ladi.

U holda  $ABC$  va  $ABS$  uchburchaklarning  $CM$  va  $SM$  medianalari ularning balandliklari ham bo'ladi.

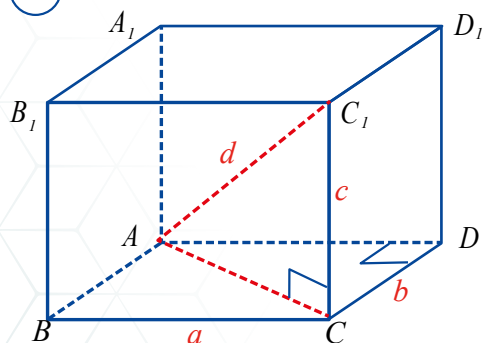
Unda  $AB$  to'g'ri chiziq ham  $CM$ , ham  $SM$  to'g'ri chiziq'larga perpendikulyar bo'ladi.

Natijada  $AB$  to'g'ri chiziq  $SMC$  tekislikda yotuvchi ikkita  $SM$  va  $CM$  to'g'ri chiziq'larga perpendikulyar ekanini aniqladik.

Bu esa, 4.2-teoremaga ko'ra  $AB$  to'g'ri chiziqning  $SMC$  tekislikka perpendikulyar ekanini anglatadi.

Endi to'g'ri burchakli parallelepiped uchun umumlashgan Pifagor teoremasini isbotlaymiz. Buning uchun III bo'limda berilgan parallelepipedning xos-salarini eslashga to'g'ri keladi.

7



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



**4.7-teorema.** (umumlashgan Pifagor teoremasi). To'g'ri burchakli parallelepiped diagonalining kvadrati uning uchta o'lchami kvadratlari yig'indisiga teng.

**Isbot.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli parallelepiped bo'lsin (7-rasm).

$CC_1$  qirra  $ABCD$  yoqqa perpendikulyar bo'lgani uchun  $ACC_1$  to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi.

Unda Pifagor teoremasiga ko'ra,



$$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2. \quad (1)$$

$A_1DC$  ham to'g'ri burchakli uchburchak.  
(Nega?)

Yana Pifagor teoremasini qo'llasak:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2. \quad (2)$$

Unda (1) va (2) ga ko'ra:

$$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2 = CC_1^2 + AD^2 + DC^2.$$

$AD = BC$  bo'lgani uchun

$$A_1C^2 = CC_1^2 + BC^2 + DC^2.$$

Agar to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalini  $d$ , uning uchta o'lchamini  $a$ ,  $b$  va  $c$  harflari bilan belgilasak, umumlashgan Pifagor teoremasini quyidagicha yozish mumkin:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



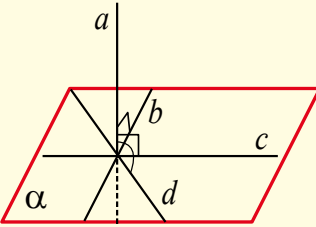
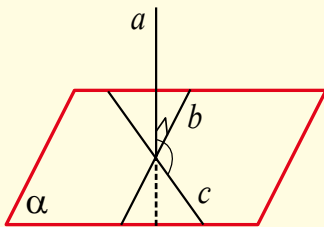
## Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Fazoda qanday to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
2. Ayqash to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lishi mumkinmi?
3. 7-rasmda qaysi shahar tasvirlangan? Unda siz qanday to'g'ri chiziqlarni va tekisliklarni ko'ryapsiz? Rasmdan parallel, perpendikulyar va ayqash to'g'ri chiziqlarga misollar keltiring.
4. Qanday to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar deb ataladi?
5. Bitta tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlarning xossalarini ayting.
6. To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik alomatini ayting.
7. Parallel tekisliklarning biriga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning xossasini ayting.
8. Bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekisliklarning xossasini ayting.
9. Umumlashgan Pifagor teoremasi nima haqida?

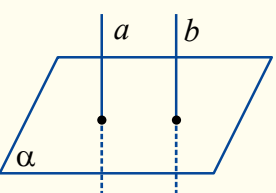
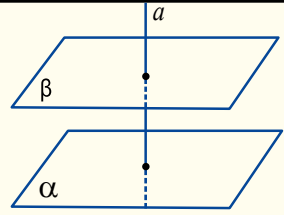


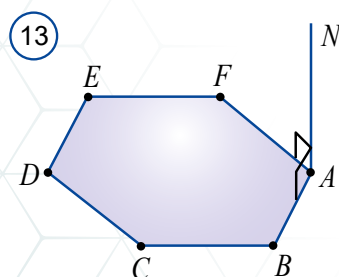
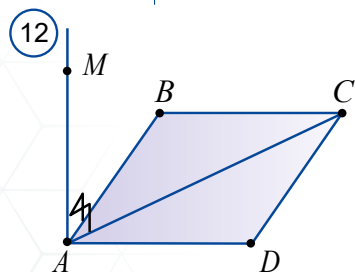
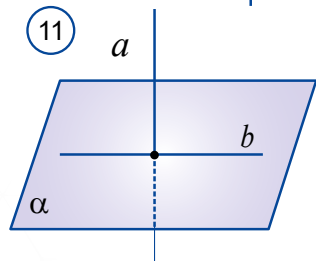
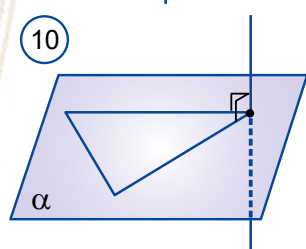
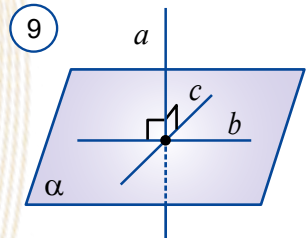
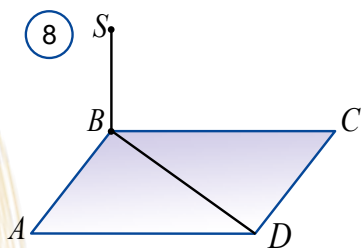
## Amaliy mashq va tatbiq

17.1. Jadvalda 17-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi	
Ta'rifi	Alomati
 <p>Agar ixtiyoriy <math>b \in \alpha</math> uchun <math>a \perp b</math> bo'lsa, <math>a \perp \alpha</math> deb ataladi.</p>	 <p>Agar <math>b \in \alpha</math>, <math>c \in \alpha</math> uchun <math>a \perp b</math>, <math>a \perp c</math> bo'lsa, <math>a \perp \alpha</math> bo'ladi.</p>

## Tekisliklarning parallelligi va perpendikulyarligi orasidagi bog'lanishlar

	<p>Agar <math>a // b</math>, <math>\alpha \perp a</math> bo'lsa, <math>\alpha \perp b</math> bo'ladi. Agar <math>\alpha \perp a</math>, <math>b \perp \alpha</math> bo'lsa, <math>a // b</math> bo'ladi.</p>
	<p>Agar <math>\alpha // \beta</math>, <math>a \perp \beta</math> bo'lsa, <math>a \perp \alpha</math> bo'ladi. Agar <math>\alpha \perp a</math>, <math>\beta \perp a</math> bo'lsa, <math>\alpha // \beta</math> bo'ladi.</p>



**17.2.**  $SB$  kesma  $ABCD$  parallelogramm tekisligiga perpendikulyar (8-rasm).  $SB$  kesma perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarni ayting.

**17.3.** 9-rasmda  $\alpha$  tekislikda yotgan  $b$  va  $c$  to'g'ri chiziq'larga perpendikulyar bo'lgan  $a$  to'g'ri chiziq tasvirlangan.  $a \perp \alpha$  ekanini asoslang.

**17.4.** 10-rasmdagi to'g'ri chiziq uchburchakning ikki tomoniga perpendikulyar. Uning uchburchak tekisligiga perpendikulyar ekanini asoslang.

**17.5.** 11-rasmda  $a \perp \alpha$ .  $a$  to'g'ri chiziqning  $\alpha$  tekislikda yotgan  $b$  to'g'ri chiziqqa ham perpendikulyar bo'lishini asoslang.

**17.6.** 12-rasmda  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakning  $A$  uchiga  $MA$  perpendikulyar tushirilgan. Agar  $MA \perp AB$  va  $MA \perp AC$  bo'lsa,  $MA \perp AD$  bo'lishini asoslang.

**17.7.** 13-rasmda  $ABCDEF$  oltiburchakning  $A$  uchiga  $NA$  perpendikulyar tushirilgan. Agar  $NA \perp AB$  va  $NA \perp AF$  bo'lsa, a)  $NA \perp AC$ ; b)  $NA \perp AD$ ; c)  $NA \perp AE$  bo'lishini asoslang.

**17.8.**  $ABC$  uchburchakning  $A$  uchidan uning  $AB$  va  $AC$  tomonlariga perpendikulyar bo'lgan  $AK$  to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziq uchburchakning  $A$  nuqtasidan tushirilgan balandligi, medianasi va bissektrisasiga perpendikulyar bo'lishini asoslang.

**17.9.**  $l$  to'g'ri chiziq  $ABC$  uchburchakning  $AB$  va  $AC$  tomonlariga perpendikulyar.  $l$  to'g'ri chiziq va  $ABC$  uchburchak tekisligining o'zaro joylashishini aniqlang.

A)  $l$  to'g'ri chiziq  $ABC$  tekislikni kesib o'tadi, lekin unga perpendikulyar emas.

B)  $l$  to'g'ri chiziq  $ABC$  tekislikka tegishli.

C)  $l$  to'g'ri chiziq  $ABC$  tekislikka perpendikulyar.

D)  $l$  to'g'ri chiziq  $ABC$  tekislikka parallel.

**17.10.**  $ABCD A_1 B_1 D_1 C_1$  to'g'ri burchakli paralelepiped berilgan. a)  $DD_1$  to'g'ri chiziq  $ABCD$  yoqqa; b)  $AD$  to'g'ri chiziq esa  $DD_1 C_1 C$  yoqqa perpendikulyar bo'lishini asoslang.

**17.11.** 14-rasmda  $ABCD A_1 B_1 D_1 C_1$  kub berilgan. a)  $AB_1 D$  to'g'ri burchali uchburchak; b)  $AB_1 C_1 D$  to'g'ri to'rtburchak ekanini asoslang.

**17.12.**  $CM$  to'g'ri chiziq  $ABC$  uchburchak tekisligiga perpendikulyar ( $\angle C = 90^\circ$ ). a)  $BC$  to'g'ri chiziq  $AC$  va  $CM$  to'g'ri chiziq'larga yotgan tekislikka perpendikulyar; b)  $AC$  to'g'ri chiziq

$BC$  va  $CM$  to'g'ri chiziqlar yotgan tekislikka perpendikulyar ekanini isbotlang.

**17.13.**  $CD$  to'g'ri chiziq  $ABC$  uchburchakning  $BC$  tomoniga perpendikulyar ( $\angle C = 90^\circ$ ). O'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziq va tekisliklarni aniqlang va izohlang.

**17.14.** 15-rasmdagi  $ABC$  va  $DBC$  to'g'ri burchakli uchburchaklar turli tekisliklarda yotibdi va  $BC$  tomon bo'yicha kesishadi. Qaysi to'g'ri chiziq va tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'ladi? Javobingizni asoslang.

**17.15.**  $KO$  to'g'ri chiziq  $ABCD$  parallelogramm tekisligiga perpendikulyar (16-rasm).  $KO$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziqni aniqlang

**17.16.**  $MB$  to'g'ri chiziq  $ABC$  uchburchakning  $AB$  va  $BC$  tomonlariga perpendikulyar (17-rasm).  $X$  nuqta  $AC$  tomonning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa,  $MBX$  uchburchak turini aniqlang.

**17.17.**  $ABCD$  to'rtburchakning tomonlari  $A_1B_1C_1D_1$  to'g'ri to'rtburchakning tomonlariga mos ravishda parallel.  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchak ekanini isbotlang.

**17.18.**  $\alpha$  tekislik  $m$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar,  $m$  to'g'ri chiziq esa  $n$  to'g'ri chiziqqa parallel.  $\alpha$  tekislikning  $n$  to'g'ri chiziqqa ham perpendikulyar bo'lishini isbotlang.

**17.19.**  $ABCD$  trapetsiyaning  $AB$  asosi yotgan to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar. Bu trapetsiyaning  $CD$  asosi yotgan to'g'ri chiziq ham  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar bo'lishini isbotlang.

**17.20.** Fazodagi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

**17.21.** Fazodagi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga ikkita turli perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

**17.22.**  $AB, AC, AD$  to'g'ri chiziqlar jufti-jufti bilan o'zaro perpendikulyar (18-rasm). Agar

1)  $AB = 3 \text{ cm}, BC = 7 \text{ cm}, AD = 1,5 \text{ cm};$

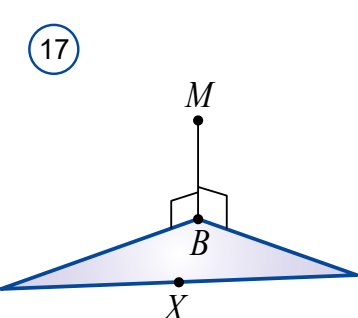
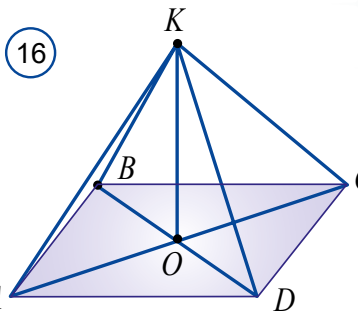
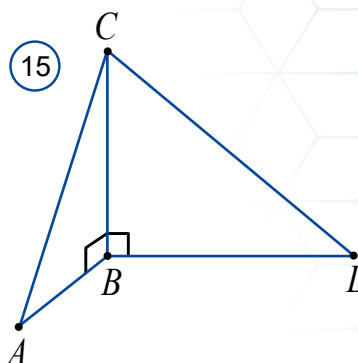
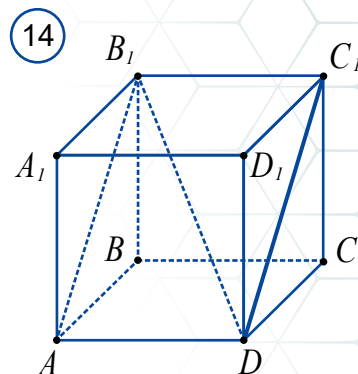
2)  $BD = 9 \text{ cm}, BC = 16 \text{ cm}, AD = 5 \text{ cm};$

3)  $AB = b \text{ cm}, BC = a \text{ cm}, AD = d \text{ cm};$

4)  $BD = c \text{ cm}, BC = a \text{ cm}, AD = d \text{ cm}$  bo'lsa,  $CD$  kesma uzunligini toping.

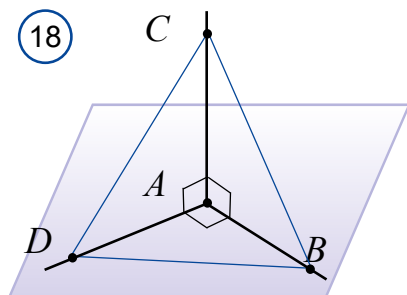
**17.23.**  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakning  $A$  uchida uning tekisligiga perpendikulyar  $AK$  to'g'ri chiziq o'tkazilgan.  $K$  nuqtadan to'g'ri to'rtburchakning boshqa uchlarigacha masofa  $6 \text{ m}, 7 \text{ m}, 9 \text{ m}$ .  $AK$  masofani toping.

**17.24.**  $A$  va  $B$  nuqtalardan  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar va uni mos ravishda  $C$  va  $D$  nuqtalarda kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar  $AC = 3 \text{ m}, BD = 2 \text{ m}$  va  $CD = 2,4 \text{ m}$  bo'lsa va  $AB$  kesma  $\alpha$  tekislikni kesib o'tmasa,  $A$  va  $B$  nuqtalar orasidagi masofani toping

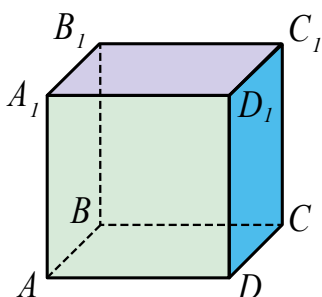




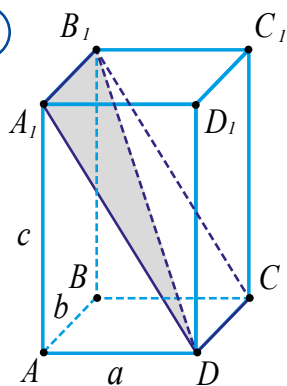
18



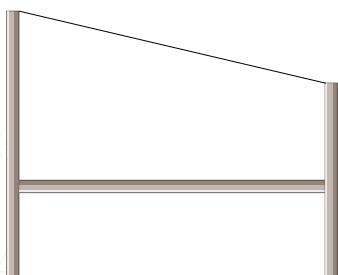
19



20



21



22



17.25. 19-rasmda tasvirlangan kubning qirrasi a)  $4\text{ cm}$ ; b)  $8\text{ cm}$  bo'lsa,  $AB_1C$  uchburchak perimetrini va  $DAC_1$  uchburchak yuzini toping.

17.26.  $CM$  to'g'ri chiziq tomoni  $a$  ga teng bo'lgan  $ABCD$  kvadrat tekisligiga perpendikulyar va  $CM = b$ . Agar a)  $a = 2\text{ cm}$ ,  $b = 1\text{ cm}$ ; b)  $a = 3\text{ cm}$ ,  $b = 4\text{ cm}$  bo'lsa,  $M$  nuqtadan kvadrat uchlarigacha bo'lgan masofalarni toping.

17.27.  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchakning  $C$  uchi orqali uning tekisligiga  $CD$  perpendikulyar tushirilgan. Agar a)  $AC = 6\text{ cm}$ ,  $BC = 8\text{ cm}$ ,  $CD = 12\text{ cm}$ ; b)  $AC = 12\text{ cm}$ ,  $BC = 16\text{ cm}$ ,  $CD = 24\text{ cm}$  bo'lsa,  $D$  nuqtadan uchburchakning gipotenuzasi o'rtasigacha bo'lgan masofani toping.

17.28. 20-rasmdagi  $ABCD A_1 B_1 D_1 C_1$  to'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari a)  $a = 12\text{ cm}$ ,  $b = 8\text{ cm}$ ,  $c = 16\text{ cm}$ ; b)  $a = 5\text{ cm}$ ,  $b = 10\text{ cm}$ ,  $c = 12\text{ cm}$  bo'lsa,  $A_1 B_1 D$  uchburchak va  $A_1 B_1 C D$  to'rtburchak yuzini toping.

17.29.  $ABCD A_1 B_1 D_1 C_1$  to'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari a)  $a = 12\text{ cm}$ ,  $b = 8\text{ cm}$ ,  $c = 16\text{ cm}$ ; b)  $a = 5\text{ cm}$ ,  $b = 10\text{ cm}$ ,  $c = 12\text{ cm}$ ; d)  $a = 2\text{ m}$ ,  $b = 12\text{ m}$ ,  $c = 6\text{ m}$  bo'lsa, uning diagonalini toping.

17.30. Muntazam to'g'ri burchakli parallelepiped asosining tomoni  $4\text{ cm}$  va balandligi  $5\text{ cm}$  bo'lsa, uning diagonalini toping.

17.31. To'g'ri burchakli parallelepiped asosining tomonlari  $12\text{ cm}$  va  $8\text{ cm}$  hamda diagonalini  $6\text{ cm}$  bo'lsa, uning balandligini toping.

17.32.  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchak tekisligiga uning  $C$  to'g'ri burchagi uchi orqali perpendikulyar tushirilgan.  $AD = a$ ,  $BD = b$ ,  $CD = c$  bo'lsa,  $ABC$  uchburchakning  $CM$  medianasini toping.

17.33.  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchak tekisligiga uning  $A$  uchi orqali  $AE$  perpendikulyar tushirilgan.  $E$  nuqtadan to'g'ri to'rtburchak qolgan uchlarigacha bo'lgan masofalar  $a$ ,  $b$  va  $c$  ( $a < c$ ,  $b < c$ ) bo'lsa,  $AE$  kesma va to'g'ri to'rtburchak tomonlari uzunliklarini toping.

17.34.  $ABC$  uchburchakda  $\angle C = 90^\circ$  va  $\angle A = 30^\circ$ . Uchburchak tekisligiga uning  $C$  uchi orqali  $CM$  perpendikulyar tushirilgan.  $AC = 18\text{ cm}$ ,  $cm = 12\text{ cm}$  bo'lsa,  $M$  nuqtadan  $AB$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

17.35. Bir-biriga parallel bo'lgan ustunlarning yuqori uchlari orasidagi masofa  $3,4\text{ m}$  (21-rasm). Ustunlar bir-biri bilan gorizonttal to'sin yordamida bog'langan. Birinchi ustun balandligi  $5,6\text{ m}$ , ikkinchi ustun balandligi  $3,9\text{ m}$  bo'lsa, to'sin uzunligini toping.

17.36. Uzunligi  $15\text{ m}$  bo'lgan telefon simi balandligi  $6\text{ m}$  bo'lgan telefon ustunidan balandligi  $20\text{ m}$  bo'lgan uyga tarang tortilgan (22-rasm). Ustun va uy orasidagi masofani toping.



$\alpha$  tekislikka unda yotmagan  $A$  nuqtadan perpendikulyar  $a$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz (1-rasm). Bu to'g'ri chiziq tekislikni  $B$  nuqtada kesib o'tsin. Shuningdek, tekislikning biror  $C$  nuqtasini  $A$  nuqta bilan tutashtiramiz. Natijada hosil bo'lgan

$AB$  kesma - *tekislikka tushirilgan perpendikulyar*,

$AC$  kesma - *tekislikka tushirilgan og'ma*,

$BC$  kesma - *og'maning tekislikdagi proyeksiyasi*,

$B$  nuqta - *perpendikulyarning asosi*,

$C$  nuqta - *og'maning asosi* deb ataladi.

$ABC$  uchburchak to'g'ri burchakli va unda  $AB$  katet,  $AC$  esa gipotenuza bo'lgani uchun, har doim  $AB < AC$  bo'ladi.

Demak, biror nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi shu nuqtadan o'tkazilgan ixtiyoriy og'maning uzunligidan kichik bo'ladi.

Biror nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar, og'malar va ularning proyeksiyalari haqida quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

**4.7-teorema.** Agar biror nuqtadan tekislikka perpendikulyar va og'malar tushirilgan bo'lsa, u holda: (2-rasm)

a) perpendikulyar uzunligi har qanday og'ma uzunligidan kichik bo'ladi;

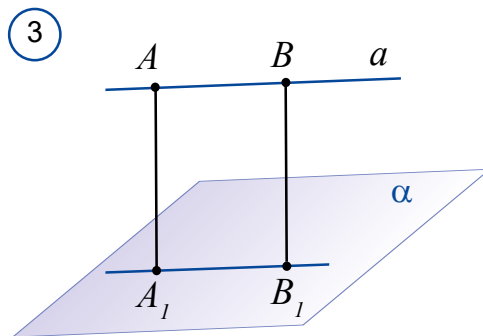
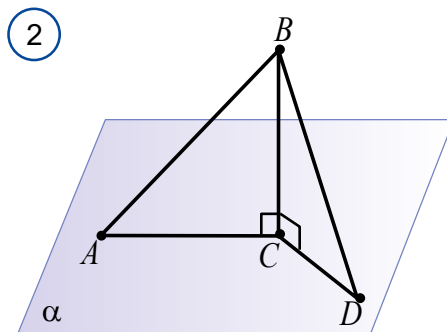
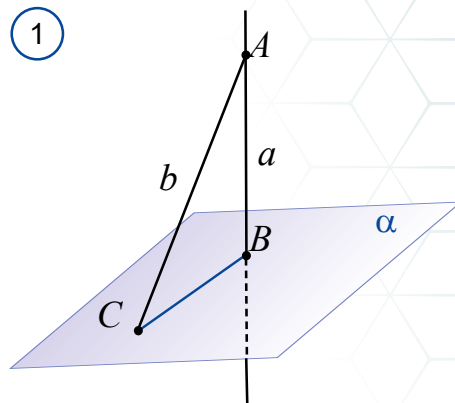
b) qaysi og'maning proyeksiyasi uzun bo'lsa, o'sha og'ma uzun bo'ladi;

c) qaysi og'ma uzun bo'lsa, o'sha og'maning proyeksiyasi uzun bo'ladi.

Endi parallel to'g'ri chiziqning quyidagi xossasini isbotlaylik

**4.8-teorema.** Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, u holda uning barcha nuqtalari tekislikdan baravar masofada bo'ladi.

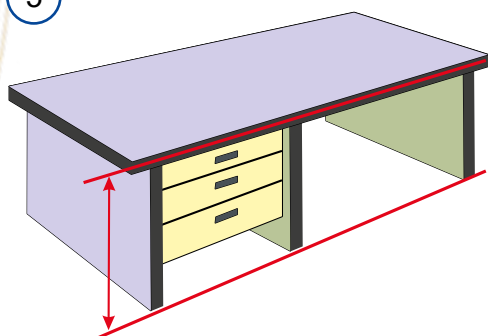
**Isbot.**  $a$  - berilgan to'g'ri chiziq va  $\alpha$  - berilgan tekislik bo'lsin (3-rasm).  $a$  to'g'ri chiziqda ikkita  $A$  va  $B$  nuqtalarni olamiz. Ulardan  $\alpha$  - tekislikka perpendikulyarlar tushuramiz. Bu perpendikulyarlar asosi mos ravishda  $A_1$  va  $B_1$  nuqtalar bo'lsin. Unda  $A$  va  $B$  nuqtalardan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan



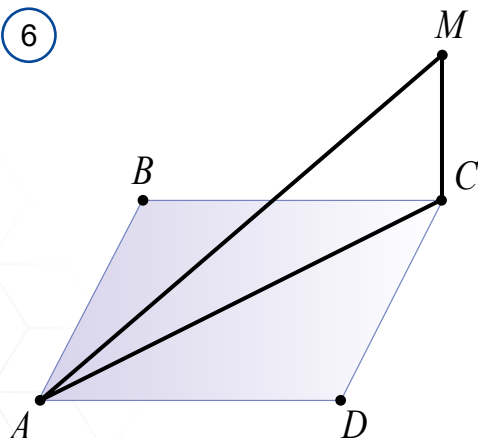
4



5



6



masofalar mos ravishda  $AA_1$  va  $BB_1$  kesmalar bo'ladi. 3.6-teoremaga ko'ra,  $AA_1$  va  $BB_1$  kesmalar parallel bo'ladi.

Demak, ular bitta tekislikda yotadi. Bu tekislik  $\alpha$  tekislikni  $A_1B_1$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesadi.

$a$  to'g'ri chiziq  $A_1B_1$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi, chunki u  $\alpha$  tekislikni kesib o'tmaydi.

Shunday qilib,  $ABA_1B_1$  to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari parallel.

Demak, u – parallelogramm. Bu parallelogrammda  $AA_1 = BB_1$ .

*Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa* deb nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar uzunligiga aytiladi.

Toshketdagi soat minorasining balandligi 30 m deyilganda, minoraning uchidan uning asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyar uzunligi tushuniladi (4-rasm).

*To'g'ri chiziqdan unga parallel bo'lgan tekislikkacha bo'lgan masofa* deb to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan shu tekislikkacha bo'lgan masofaga aytiladi.

Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasidan unga parallel bo'lgan tekislikkacha bo'lgan masofalar bir xil bo'ladi.

*Ikki parallel tekisliklar orasidagi masofa* deb bir tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofaga aytiladi.

5-rasmda tasvirlangan stolning balandligi pol va stol tekisliklari orasidagi masofaga teng bo'ladi.

**1-masala.**  $ABCD$  kvadratning  $C$  uchidan u yotgan tekislikka perpendikulyar  $CM$  chiqarilgan (6-rasm). Agar  $CM = 6$  cm, kvadrat tomoni  $4\sqrt{2}$  ga teng bo'lsa,  $M$  nuqtadan kvadratning  $A$  uchigacha bo'lgan masofani toping.

**Yechish.** Shartga ko'ra, berilgan kvadratning tomoni  $AD = 4\sqrt{2}$ .

$ABCD$  kvadratning  $AC$  diagonalini o'tkazamiz va uning uzunligini hisoblaymiz:

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm};$$

$CM$  tekislikka perpendikulyar bo'lgani uchun  $CM \perp AC$ .

Demak,  $ACM$  to'g'ri burchakli uchburchak.

Unda Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$MA = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (cm)}$$

**Javob:** 10 cm.

**4.9-teorema. Ikki ayqash to'g'ri chiziq yagona umumiy perpendikulyarga ega bo'ladi.**

**Isbot.**  $a$  va  $b$  ayqash to'g'ri chiziqlar bo'lsin (7a-rasm). Dastlab umumiy perpendikulyarning mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun, berilgan ayqash to'g'ri chiziqlarda shunday  $A$  va  $B$  nuqtalarni tanlash mumkinligini ko'rsatishimiz kerakki,  $AB$  to'g'ri chiziq ham  $a$  ga, ham  $b$  ga perpendikulyar bo'lsin.

$\alpha$  tekislik  $b$  to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin.  $a$  to'g'ri chiziqda  $C$  nuqtani olamiz va undan  $\alpha$  tekislikka  $CD$  perpendikulyar tushuramiz. Kesishuvchi  $a$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlardan  $\beta$  tekislikni o'tkazamiz.  $a_1$  to'g'ri chiziq -  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning kesishish chizig'i bo'lsin (7b-rasm).

$a_1 \parallel a$  bo'lgani uchun  $a_1$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar qandaydir  $B$  nuqtada kesishadi.  $B$  nuqtadan  $\beta$  tekislikda yotuvchi va  $a$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar  $BA$  to'g'ri chiziqni chiqaramiz.

Natijada,  $AB$  va  $CD$  to'g'ri chiziqning har ikkalasi ham  $\beta$  tekislikda yotadi va  $a$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun,  $AB \parallel CD$  va  $AB \perp a$  bo'ladi.

Demak,  $AB \perp a$  va  $AB \perp b$ , ya'ni  $AB$  izlayotgan to'g'ri chiziq bo'lib, u  $a$  va  $b$  ayqash to'g'ri chiziqning har ikkalasiga ham perpendikulyar bo'ladi.

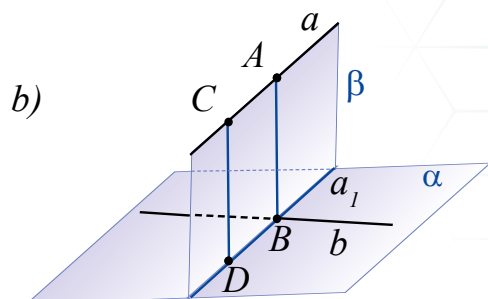
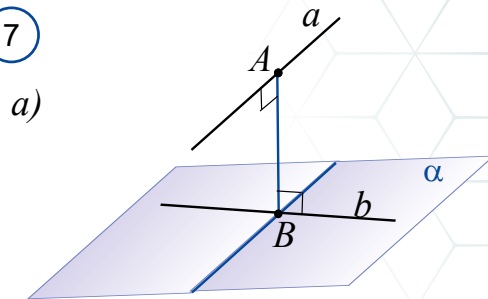
Umumiy perpendikulyarning yagonaligini mustaqil isbotlang.

**Ikki ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa** deb ularning umumiy perpendikulyari uzunligiga aytiladi.

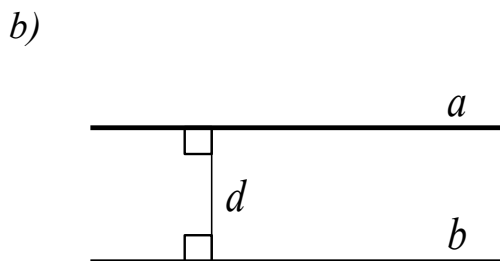
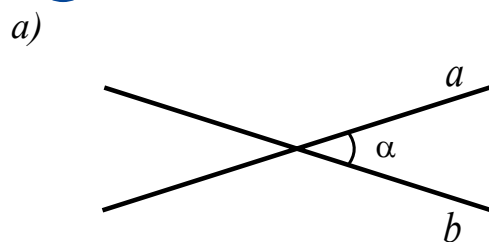
Yuqoridagi teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

**Xossa. Ikki ayqash  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa (8-rasm)  $a$  to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan  $b$  to'g'ri chiziq yotgan va  $a$  to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan  $\alpha$  tekislik-kacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi.**

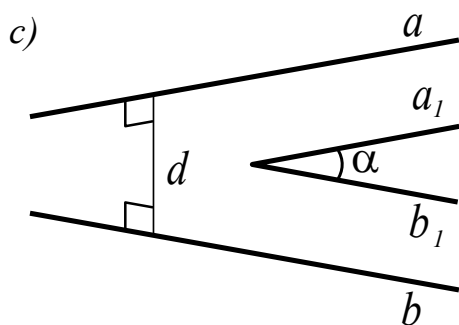
7



8







Yuqoridagilarga asosanib, endi biz fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishini sonlar yordamida tavsiflashimiz mumkin.

Agar fazoda ikki to'g'ri chiziq:

- o'zaro kesishsa, ular orasidagi  $\alpha$  burchak (8a-rasm),
- o'zaro parallel bo'lsa ular orasidagi  $d$  masofa (8b-rasm),
- o'zaro ayqash bo'lsa - ular orasidagi  $\alpha$  burchak va ular orasidagi  $d$  masofa (8c-rasm) mazkur to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini sonli tavsiflaydi.



### Mavzuga doir savollar va mashqlar

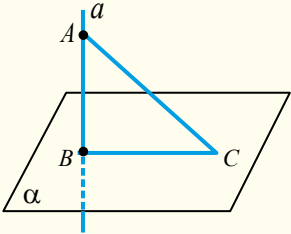
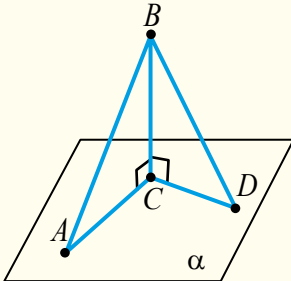


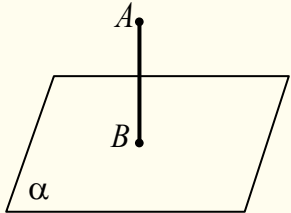
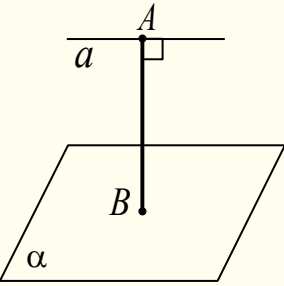
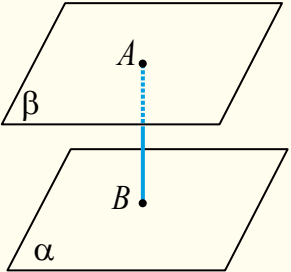
- 1) Tekislikka tushirilgan perpendikulyar va og'maga ta'rif bering.
- 2) 9-rasmlarda nima: a) perpendikulyar; b) og'ma timsolida tasvirlangan?
- 3) Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi deb nimaga aytiladi?
- 4) Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa qanday aniqlanadi?
- 5) Tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi masofa qanday topiladi?
- 6) Ikki parallel tekisliklar orasidagi masofa qanday aniqlanadi?
- 7) Ikki ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa qanday aniqlanadi?
- 8) Fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishini qaysi sonli kattaliklar aniqlaydi?



## Amaliy mashq va tatbiq

18.1. Jadvalda 18-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

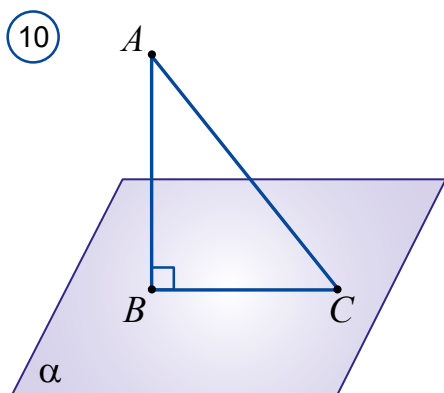
Perpendikulyar va og'ma	
Ta'rifi	Xossalari
 <p>Agar <math>a \perp \alpha</math>, <math>AB \notin \alpha</math> bo'lsa:  <math>AB</math> - <math>\alpha</math> tekislikka <math>A</math> nuqtadan tushirilgan perpendikulyar;  <math>AC</math> - og'ma,  <math>BC</math> - og'maning <math>\alpha</math> tekislikka proyeksiyasi</p>	 <p><math>BC &lt; AB</math>, <math>BC &lt; BD</math>;      agar <math>AB = BD</math> bo'lsa, <math>AC = CD</math> bo'ladi;      agar <math>AC = CD</math> bo'lsa, <math>AB = BD</math> bo'ladi;      agar <math>AC &gt; CD</math> bo'lsa, <math>AB &gt; BD</math> bo'ladi.</p>

Masofalar		
Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa	To'g'ri chiziqdan tekislikkacha bo'lgan masofa	Tekisliklar orasidagi masofa
 <p><math>A \notin \alpha</math>  <math>AB \perp \alpha</math></p>	 <p><math>a \parallel \alpha</math>,  <math>A \in a</math>, <math>AB \perp \alpha</math></p>	 <p><math>\alpha \parallel \beta</math>,  <math>A \in \beta</math>, <math>AB \perp \alpha</math></p>

18.2. 10-rasmdan a) perpendikulyar; b) og'ma; c) perpendikulyar asosi; d) og'ma proyeksiyasini aniqlang va yozing.

18.3. 11-rasmdan  $AD$  va  $DC$  kesmalar  $AB$  va  $BC$  og'malarining proyeksiyasi:

- Agar  $AD > DC$  bo'lsa, og'malar haqida nima deyish mumkin;
- Agar  $AB = BC$  bo'lsa, proyeksiyalar haqida nima deyish mumkin?

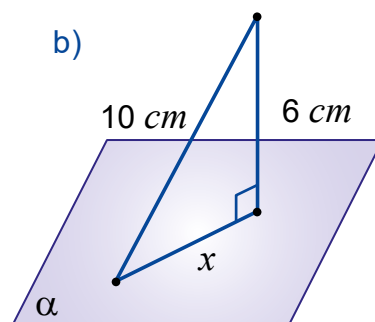
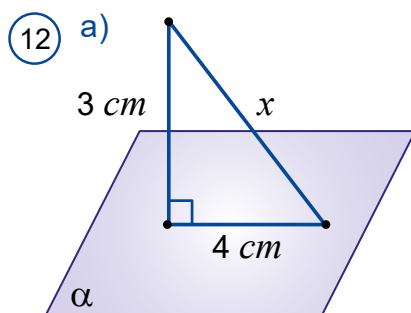
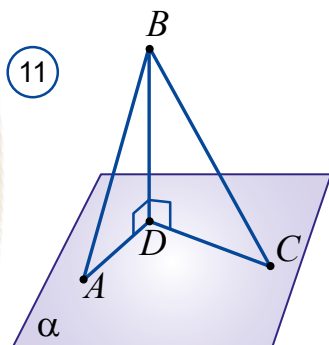


18.4. 12-rasmdagi noma'lum kesmalarning uzunligini toping.

18.5. 13-rasmdan berilganlardan foydalanib,  $MA$  va  $MC$  og'malar uzunliklarini o'zaro solishtiring.

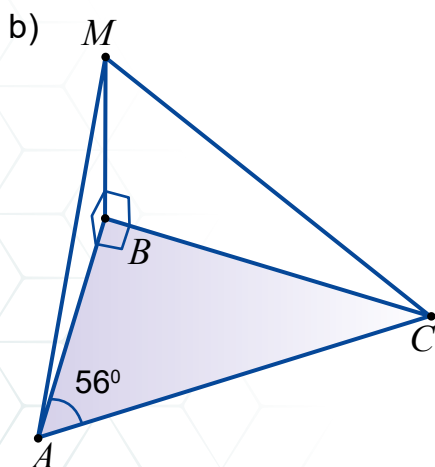
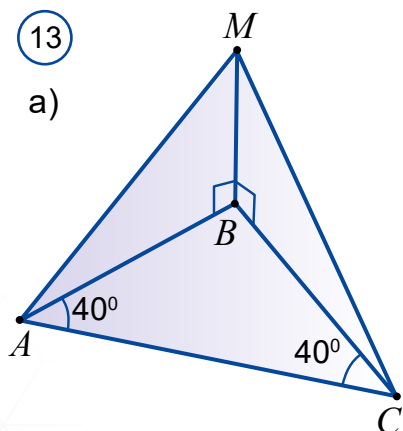
18.6.  $AB$  – perpendikulyar,  $AC$  – og'ma va  $BC$  og'ma proyeksiyasi bo'lsa, jadvalni berilganlardan foydalanib to'ldiring.

$AB$	24	15			12
$BC$	7		24	$4a$	
$AC$		25	26	$5a$	13



18.7.  $AB$  – perpendikulyar,  $AC$  – og'ma,  $BC$  – og'ma proyeksiyasi,  $\alpha$  – perpendikulyar va og'ma orasidagi burchak bo'lsa, jadvalni berilganlardan foydalanib to'ldiring.

$AB$			5	6	14
$BC$		4			14
$AC$	6	8		12	
$\alpha$	$30^\circ$		$45^\circ$		



18.8.  $M$  nuqtadan tekislikka o'zaro teng  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$ ,  $MD$  og'malar o'tkazilgan.  $ABCD$  to'rtburchak turi quyidagilardan qaysi biri bo'ladi: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) to'g'ri to'rtburchak. Javobingizni asoslang.

18.9. Agar parallelogrammning uchlaridan baravar uzoqlikda yotgan nuqta mavjud bo'lsa, bu parallelogramm to'g'ri to'rtburchak ekanini isbotlang.

18.10. Agar rombning uchlaridan baravar uzoqlikda yotgan nuqta mavjud bo'lsa, bu romb kvadrat ekanini isbotlang.

18.11.  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikka tegishli,  $M$  nuqta esa unga tegishli emas va  $MQ \perp \alpha$ .  $MA$ ,  $AQ$ ,  $MQ$ ,  $BQ$ ,  $MB$  kesmalarning qaysi biri: a) perpendikulyar; b) og'ma; c) og'ma proyeksiyasi ekanini aniqlang.



**18.12.**  $A$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikka  $AB$  va  $AC$  og'malar va  $AO$  perpendikulyar o'tkazilgan (9-rasm). Agar  $AB = 2,5 \text{ cm}$ ,  $AC = 3 \text{ cm}$  bo'lsa, og'malarning proyeksiyalarini o'zaro taqqoslang.

**18.13.** Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma tushirilgan (9-rasm). Agar og'malarning biri ikkinchisidan  $26 \text{ cm}$  uzun, proyeksiyalari esa  $12 \text{ cm}$  va  $40 \text{ cm}$  bo'lsa, bu og'malarning uzunliklarini toping.

**18.14.** Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak uchlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

**18.15.** Yuzi a)  $21 \text{ cm}^2$ ; b)  $96 \text{ cm}^2$ ; c)  $44 \text{ cm}^2$ ; d)  $69 \text{ cm}^2$ ; e)  $156 \text{ cm}^2$  bo'lgan  $ABCD$  kvadrat tekisligiga uzunligi  $10 \text{ cm}$  bo'lgan  $DM$  perpendikulyar tushirilgan.  $MA$  og'maning uzunligini toping.

**18.16.** To'g'ri burchagi  $C$  bo'lgan  $ABC$  uchburchakning o'tkir burchagi uchidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar  $AD$  to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Agar  $AC = c$ ,  $BC = b$  va  $AD = c$  bo'lsa,  $D$  nuqtadan  $B$  va  $C$  uchlarigacha bo'lgan masofalarni toping.

**18.17.** Bir-biridan  $4,2 \text{ m}$  uzoqlikda bo'lgan vertikal ustunlarning yuqori uchlari to'sin bilan tutashtirilgan. Ustunlarning balandliklari  $5,8 \text{ m}$  va  $4,1 \text{ m}$  bo'lsa, to'sin uzunligini toping.

**18.18.**  $20 \text{ m}$  uzunlikdagi telefon simi simyog'ochga yer sathidan  $8 \text{ m}$  balandlikda mahkamlangan va undan balandligi  $18 \text{ m}$  bo'lgan ko'pqavatli uy tomiga tarang tortilgan. Uy bilan ustun orasidagi masofani toping.

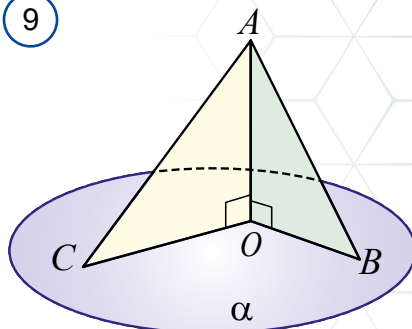
**18.19.** Tekislikka  $P$  nuqtadan tushirilgan  $PQ$  perpendikulyar uzunligi  $1$  ga,  $PA$  va  $PB$  og'malar uzunliklari esa  $2$  ga teng.  $C$  nuqta  $AB$  kesma o'rtasi. Agar a)  $\angle APB = 90^\circ$ ; b)  $\angle APB = \beta$  bo'lsa,  $QC$  kesma uzunligini toping.

**18.20.**  $ABCD$  parallelogrammning o'tmas  $B$  burchagi uchidan uning tekisligiga perpendikulyar bo'lgan  $BH$  kesma tiklangan. Agar  $AH = 5 \text{ cm}$ ,  $HD = HC = 8,5 \text{ cm}$ ,  $AC = 1,5\sqrt{33}$  bo'lsa, parallelogramm tomonlarini toping.

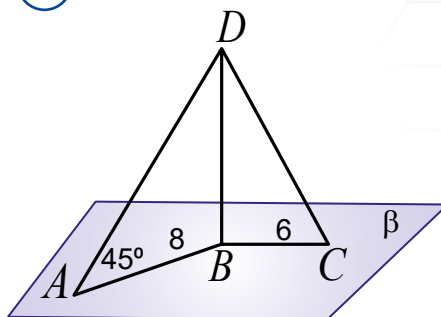
**18.21.**  $M$  nuqta tomoni  $60 \text{ cm}$  bo'lgan muntazam  $ABC$  uchburchakning har bir uchidan  $40 \text{ cm}$  masofada joylashgan.  $ABC$  uchburchak tekisligidan  $M$  nuqttagacha bo'lgan masofani toping.

**18.22.**  $\beta$  tekislikka  $BD$  perpendikulyar (10-rasm),  $AD$  va  $DC$  og'malar tushirilgan.  $\angle DCB = 45^\circ$ ,  $AB = 8$ ,  $BC = 6$ .  $CD$  ni toping.

9



10





### 3D kalkulyatori yordamida nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani aniqlash

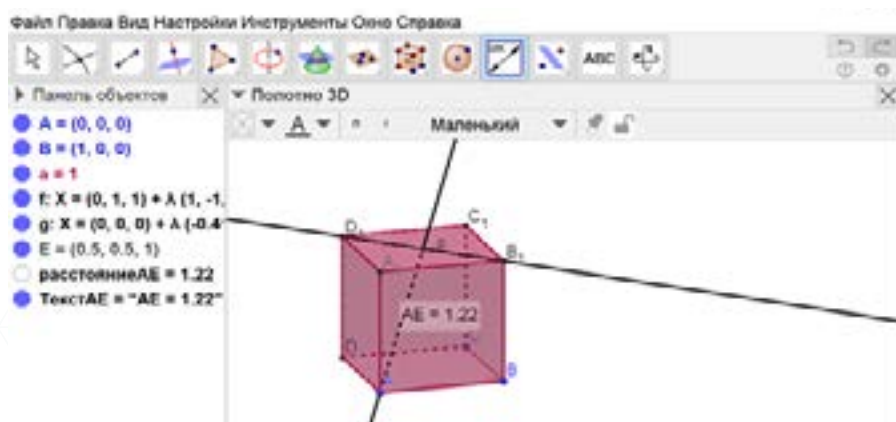
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  birlik kub berilgan. Kubning  $A$  uchidan  $B_1 D_1$  to'g'ri chizig'iga perpendikulyar tushirilgan.  $A$  uchidan  $B_1 D_1$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

**Yasash:**

- GeoGebra da yangi oyna oching.
- GeoGebra interfeysini “Настройки” – “3D Графика” ko'rinishiga o'tkazing.

**Masofani aniqlash bosqichlari**

1.		(“Kiritish”) satri orqali	$A=(0,0,0)$ nuqta yasaladi.
2.		(“Kiritish”) satri orqali	$B=(1,0,0)$ nuqta yasaladi.
3.		Куб (“Kub”)	Birlik kub yasaladi.
4.		“Переименовать” (“Qayta nomlash”)	$E, F, G, H$ nuqtalar mos ravishda $A_1, B_1, C_1, D_1$ ga o'zgartiriladi. Buning uchun nuqta ustiga bosiladi va yangi belgi kiritiladi.
5.		“Прямая” (“To'g'ri chiziq”)	$B_1 D_1$ to'g'ri chiziqni o'tkaziladi.
6.		“Перпендикулярная прямая” (“Perpendikulyar o'g'ri chiziq”)	Kubning $A$ uchidan $B_1 D_1$ to'g'ri chizig'iga perpendikulyar tushiriladi.
7.		“Пересечение” (“Kesishish”)	$B_1 D_1$ to'g'ri chiziq va o'tkazilgan perpendikulyar chiziqlar kesishish nuqtasi $E$ belgilanadi.
8.		“Расстояние или длина” (“Masofa yoki uzunlik”)	Kubning $A$ uchi va $E$ nuqtasi orasidagi masofa aniqlanadi: $AE = 1.22$ .



#### Mustaqil bajarish uchun topshiriq

1.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  birlik kub berilgan. Kubning  $A$  uchidan  $BD_1$  to'g'ri chizig'iga perpendikulyar tushirilgan.  $A$  uchidan  $BD_1$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

2.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  birlik kubning  $AA_1$  yog'ining o'rtasi –  $E$  dan  $BD_1$  chizig'iga perpendikulyar tushirilgan.  $E$  nuqtadan  $BD_1$  chiziqqacha bo'lgan masofani toping.



**Teorema 4.9.** Agar tekislikka tushirilgan og‘maning asosidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq og‘maning proyeksiyasiga perpendikulyar bo‘lsa, u holda u og‘maning o‘ziga ham perpendikulyar bo‘ladi.

**Isbot.** Aytaylik,  $AB$  kesma  $\alpha$  tekislikka tushirilgan perpendikulyar,  $AC$  kesma esa og‘ma bo‘lsin.

$c$  to‘g‘ri chiziq esa  $\alpha$  tekislikda yotuvchi,  $C$  nuqtadan o‘tuvchi va og‘ma proyeksiyasiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin (1-rasm).

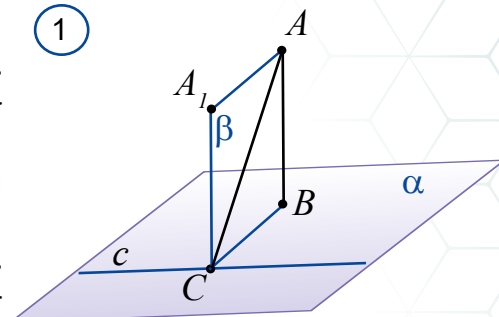
$AB$  ga parallel  $A_1C$  to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar bo‘ladi.

$AB$  va  $A_1C$  to‘g‘ri chiziqlar orqali  $\beta$  tekislikni o‘tkazamiz.  $c$  to‘g‘ri chiziq  $CA_1$  to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi. Shartga ko‘ra, u  $CB$  to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulyar edi. Unda  $c$  to‘g‘ri chiziq  $\beta$  tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

Demak,  $c$  to‘g‘ri chiziq  $\beta$  tekislikda yotgan  $AC$  og‘maga ham perpendikulyar bo‘ladi.

Mazkur teoremda uchta perpendikulyarlar haqida gap borayotgani uchun u “Uch perpendikulyarlar haqidagi teorema” nomini olgan. Bu teoreмага teskari bo‘lgan teorema ham o‘rinli bo‘ladi. Uni mustaqil isbotlang.

①



**Teorema 4.10.** Agar tekislikka tushirilgan og‘maning asosidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq og‘maga perpendikulyar bo‘lsa, u holda u og‘maning proyeksiyasiga ham perpendikulyar bo‘ladi.

**1-masala.** Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan (2-rasm). Bu to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

**Isbot.** Aytaylik,  $A, B, C$  – uchburchak tomonlarining aylana bilan kesishish nuqtalari,  $O$  – aylana markazi,  $S$  esa perpendikulyardagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin.

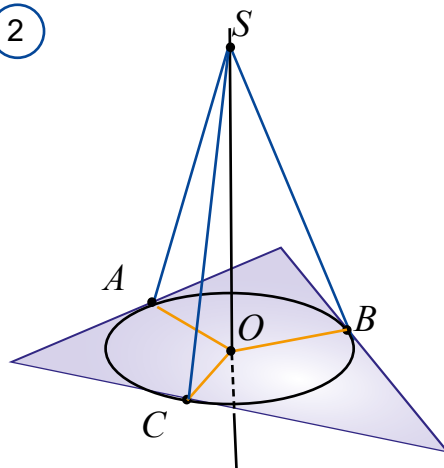
$OA$  uchburchak tomoniga perpendikulyar bo‘lgani uchun, uch perpendikulyarlar haqidagi teoremda ko‘ra,  $OA$  ham bu tomonga perpendikulyar bo‘ladi. Unda  $SAO$  to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘ladi. Bu uchburchakda Pifagor teoremasiga ko‘ra,

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$$

bu yerda  $r$  – aylana radiusi.

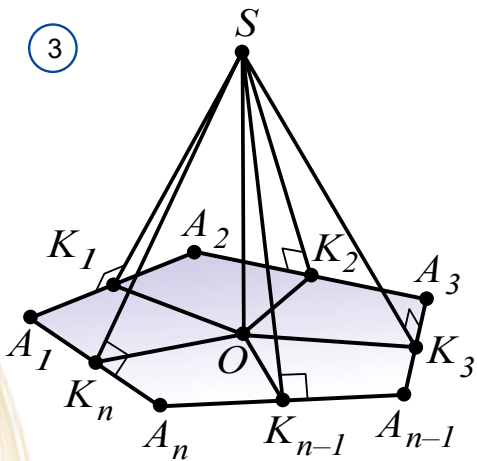
Xuddi shunga o‘xshash,  $SBO$  to‘g‘ri burchakli uchburchakdan  $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$  va  $SCO$  to‘g‘ri burchakli uchburchakdan esa  $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$  ekanini topamiz.

②





3



Demak,  $SA = SB = SC$ .

Bu xossaning ixtiyoriy ko'pburchak uchun umumiyroq hollarini ham ko'rib chiqamiz.

**2-masala.** Fazodagi nuqta ko'pburchakning tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgan bo'lib, undan ko'pburchak tekisligiga perpendikulyar tushirilgan. Bu perpendikulyar asosi nuqta ko'pburchakka ichki chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini isbotlang (3-rasm).

**Isbot.** Aytaylik,  $S$  – berilgan nuqta,  $A_1A_2...A_{n-1}A_n$  – berilgan ko'pburchak va  $O$  esa  $S$  nuqtadan ko'pburchak tekisligiga tushirilgan perpendikulyar asosi bo'lsin.

U holda, shartga ko'ra,  $SK_1, SK_2, \dots, SK_n$  –  $S$  nuqtadan ko'pburchakning tomonlarigacha bo'lgan masofalar (ya'ni bu tomonlarga tushirilgan perpendikulyarlar) o'zaro teng bo'ladi:

$$SK_1 = SK_2 = \dots = SK_n.$$

$O$  nuqtani  $K_1, K_2, \dots, K_n$  nuqtalar bilan tutashtirib chiqamiz. Natijada,  $\triangle SOK_1, \triangle SOK_2, \dots, \triangle SOK_n$  – bitta  $SO$  umumiy katetga va teng gipotenuzalarga ega to'g'ri burchakli uchburchaklarni hosil qilamiz.

Bitta kateti va gipotenuzalari tengligi hamda uchburchaklar tenglik alomatiga ko'ra, bu to'g'ri burchakli uchburchaklar teng bo'ladi.

Unda ularning ikkinchi katetlari –  $OK_1, OK_2, \dots, OK_n$  ham o'zaro teng bo'ladi:  $OK_1 = OK_2 = \dots = OK_n$ .

Bu tengliklar perpendikulyar asosi –  $O$  nuqta ko'pburchakka ichki chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini ko'rsatadi.

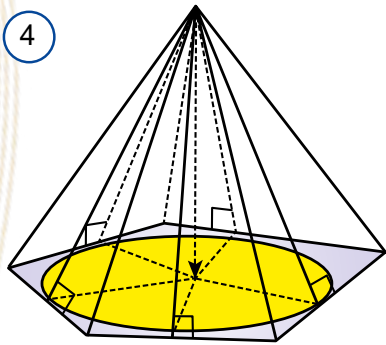
Bu xossadan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi.

**Xulosa.** Agar piramidaning barcha yon yoqlarining balandliklari o'zaro teng bo'lsa (yoki yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qilsa), u holda bu piramidaning balandligi asosiga ichki chizilgan aylana markaziga tushadi (4-rasm).

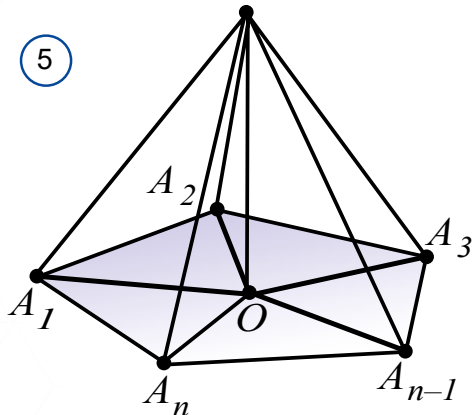
**3-masala.** Fazodagi nuqta ko'pburchakning uchlariidan baravar uzoqlikda joylashgan bo'lib, undan ko'pburchak tekisligiga perpendikulyar tushirilgan. Bu perpendikulyar asosi ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini mustaqil isbotlang (5-rasm).

**Xulosa.** Agar piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'lsa (yoki yon qirralari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil qilsa), u holda bu piramidaning balandligi asosga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi (6-rasm).

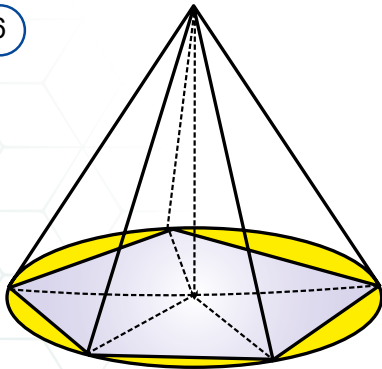
4



5



6





**4-masala.** Fazoda berilgan nuqtadan tekislikka ikkita og'ma tushirilgan. Bu og'malarning biri ikkinchisidan  $26\text{ cm}$  uzun bo'lib, ularning proyeksiyalari uzunligi mos ravishda  $12\text{ cm}$  va  $40\text{ cm}$ . Og'malarning uzunligini toping.

**Yechish.** Aytaylik,  $AB$  – perpendikulyar,  $AC$  va  $AD$  esa mos og'malar bo'lsin (7-rasm).

$AC = x\text{ cm}$  deb olamiz. Unda shartga ko'ra;

$AD = x + 26\text{ cm}$  bo'ladi.

1)  $ABC$  - to'g'ri burchakli uchburchak. Pifador teoremasiga ko'ra:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ yoki } AB^2 = x^2 + 144.$$

2)  $ABD$  – ham to'g'ri burchakli uchburchak. Pifador teoremasiga ko'ra:

$$AD^2 = BD^2 + AB^2 \text{ yoki } AB^2 = (x + 26)^2 - 1600.$$

1 va 2 dan  $x^2 + 144 = (x + 26)^2 - 1600$  ni hosil qilamiz.

Undan  $x = 16\text{ cm}$  ekanini aniqlaymiz.

Demak,  $AC = 15\text{ cm}$ ,  $AD = x + 26 = 41\text{ (cm)}$  bo'ladi.

**Javob:**  $AC = 15\text{ cm}$ ,  $AD = 41\text{ cm}$ .

**5-masala.**  $ABC$  uchburchak tekisligiga uning  $A$  nuqtasidan perpendikulyar chiqarilgan (8-rasm). Agar  $AB = 13$ ,  $BC = 20$ ,  $AC = 11$  va  $AD = 36$  ga teng bo'lsa,  $D$  nuqtadan  $BC$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

**Yechish.** Izlanayotgan masofa  $D$  nuqtadan  $BC$  tomonga tushirilgan perpendikulyar uzunligiga teng bo'ladi. Bu kesmani tushurish uchun uning  $BC$  tomondagi asosini topish lozim bo'ladi. Buning uchun  $ABC$  uchburchakning  $A$  uchidan  $BC$  tomoniga  $AO$  balandlikni tushiramiz:  $AO \perp BC$ .

Unda uch perpendikulyarlar haqidagi teorema ko'ra,  $BC \perp DO$  bo'ladi. Demak,  $DO$  izlanayotgan kesma ekan.

Endi  $DO$  kesmaning uzunligini topamiz. Buning uchun, oldin  $ABC$  uchburchak yuzini Geron formula-sidan foydalanib topamiz:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+11+13}{2} = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

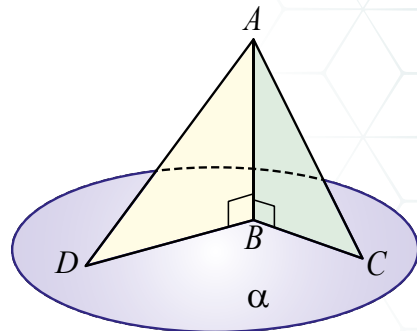
$$= \sqrt{22 \cdot (22-20) \cdot (22-11) \cdot (22-13)} = 66$$

$$AO = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6,6$$

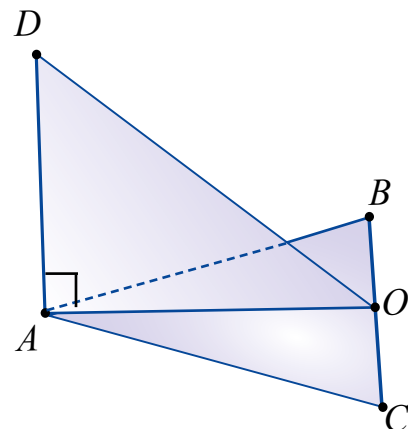
$ADO$  to'g'ri burchakli uchburchakda, Pifagor teoremasiga ko'ra:

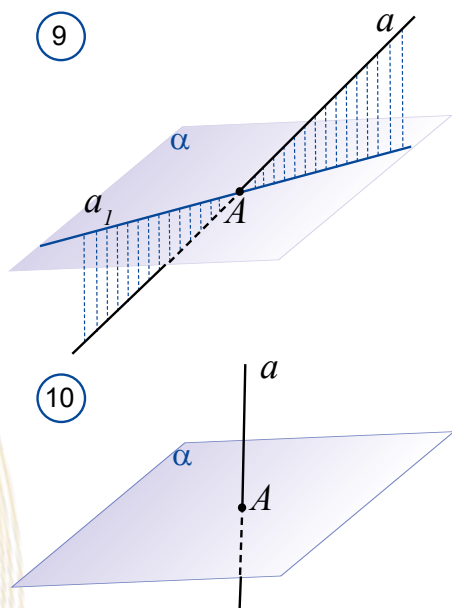
$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6$$

7



8





Aytaylik,  $\alpha$  tekislik va uni kesib o'tuvchi va bu tekislikka perpendikulyar bo'lmagan  $a$  to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin (9-rasm).  $a$  to'g'ri chiziqning har bir nuqtasidan perpendikulyarlar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning asoslari  $a_1$  to'g'ri chiziqni tashkil qiladi.

$a_1$  to'g'ri chiziq  $a$  to'g'ri chiziqning  $\alpha$  tekislikdagi **proyeksiyasi** deb ataladi.

$a$  to'g'ri chiziq va  $\alpha$  tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziq bilan uning bu tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi.

Agar to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa (10-rasm), u bilan tekislik orasidagi burchak  $90^\circ$  ga, agar parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak  $0^\circ$  ga teng deb olinadi.



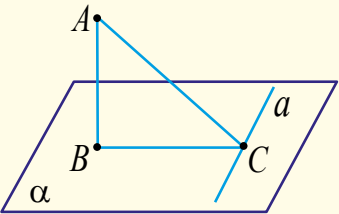
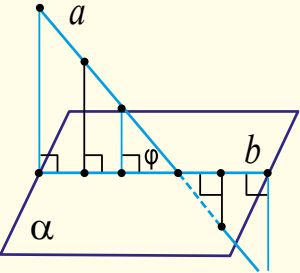
### Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Uch perpendikulyarlar haqidagi teoremani sharhlang. Nima sababdan u shunday nomlangan?
2. Uch perpendikulyarlar haqidagi teoreмага teskari teoremani ayting va izohlang.
3. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
4. Tekislik va unga perpendikulyar to'g'ri chiziq orasidagi burchak necha gradus?

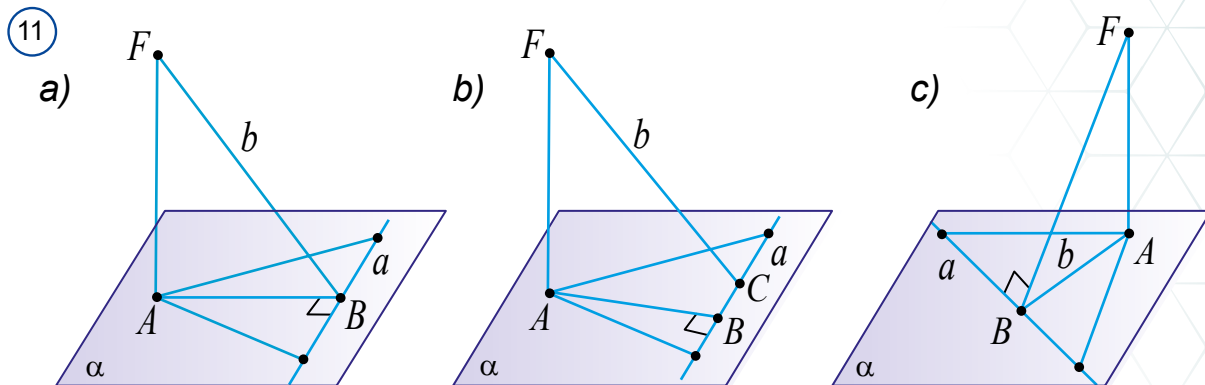


### Amaliy mashq va tatbiq

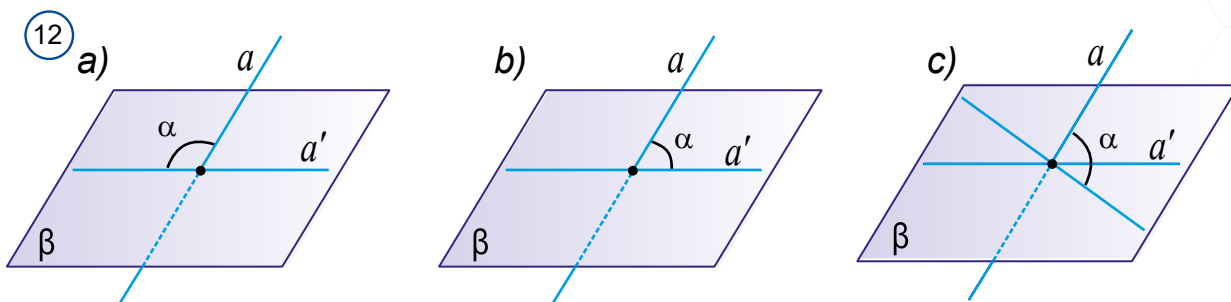
19.1. Jadvalda 19-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Uch perpendikulyarlar haqidagi teorema	To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak
 <p style="text-align: center;"><math>AB \perp \alpha</math></p> <p>Agar <math>a \perp BC</math> bo'lsa, <math>a \perp AC</math> bo'ladi. Agar <math>a \perp AC</math> bo'lsa, <math>a \perp BC</math> bo'ladi.</p>	 <p><math>b</math> – <math>a</math> ning <math>\alpha</math> tekislikdagi proyeksiyasi. <math>\varphi</math> – <math>a</math> va <math>\alpha</math> tekislik orasidagi burchak.</p>

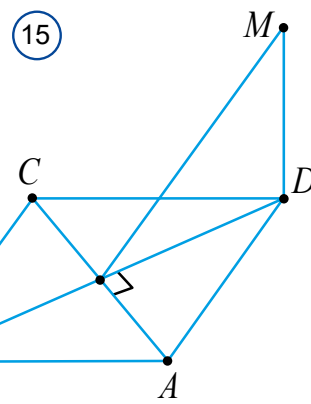
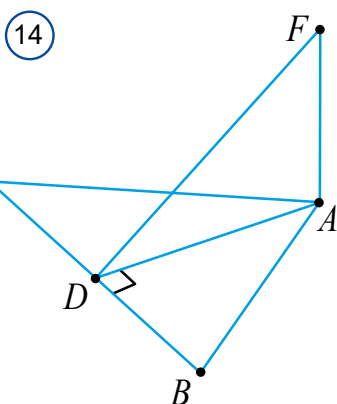
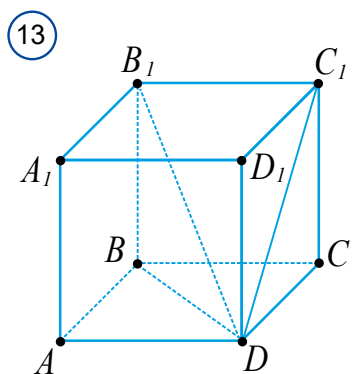
19.2. 11-rasmda  $AF \perp \alpha$ .  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvini aniqlang.



19.3. 12-rasmda  $a'$  to'g'ri chiziq –  $a$  to'g'ri chiziqning  $\beta$  tekislikdagi proyeksiyasi. Rasmlarning qaysi birida  $a$  to'g'ri chiziq va  $\beta$  tekislik orasidagi  $\alpha$  burchak to'g'ri ko'rsatilgan?



19.4. 13-rasmda  $ABCD A_1 B_1 D_1 C_1$  kub berilgan. a)  $DD_1 C_1 C$  yoqning  $DC_1$  diagonali va  $ABCD$  asos tekisligi orasidagi; b) kubning  $B_1 D$  diagonali va  $ABCD$  asos tekisligi orasidagi; c) kubning  $B_1 D$  diagonali va  $DD_1 C_1 C$  yoq tekisligi orasidagi burchakni aniqlang.



19.5 14- va 15- rasmlarga doir masalalar tuzing va ularni yeching.

19.6. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto'g'ri?

- A) Agar ikki to'g'ri chiziq bitta tekislikka perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'richiziqlar paralleldir.
- B) Agar tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziq tekislikdagi birorta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, tekislik va to'g'ri chiziq o'zaro paralleldir.
- C) Agar tekislikka tushirilgan og'ma tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, uning proyeksiyasi ham to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.

- D) Tekislikda yotuvchi ikki to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan, to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.
- E) Ikkita to'g'ri chiziqning har biri uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar paralleldir.

**19.7.** Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto'g'ri?

- A) Agar tekislik ikkita parallel tekisliklardan biriga perpendikulyar bo'lsa, u holda bu tekislik ikkinchi tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.
- B) Tekislikda yotuvchi kesishuvchi ikki to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.
- C) Fazodagi ikki to'g'ri chiziq uchinchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, ular o'zaro paralleldir.
- D) Agar tekislikdagi to'g'ri chiziq tekislikka tushirilgan og'maga perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq og'maning proyeksiyasiga ham perpendikulyar bo'ladi.
- E) Ikki parallel tekislikni uchinchi tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi.

**19.8.**  $A$  nuqta tomoni  $a$  ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchakning uchlaridan  $a$  masofada yotadi.  $A$  nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

**19.9.**  $\alpha$  tekislikning tashqarisidagi  $S$  nuqtadan unga uchta teng  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  og'malar va  $SO$  perpendikulyar o'tkazilgan. Perpendikulyarning  $O$  asosi  $ABC$  uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi bo'lishini isbotlang.

**19.10.** Teng tomonli uchburchakning tomonlari  $3 m$  ga teng. Uchburchak har bir uchidan  $2 m$  masofada bo'lgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

**19.11.** Teng yonli uchburchak asosi va balandligi  $4 m$  ga teng. Berilgan nuqta uchburchak takisligidan  $6 m$  masofada va uning uchlaridan bir xil masofada yotadi. Shu masofani toping.

**19.12.**  $A$  nuqtadan kvadratning uchlarigacha bo'lgan masofa  $a$  ga teng. Kvadratning tomoni  $b$  ga teng bo'lsa,  $A$  nuqtadan kvadrat tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

**19.13.** Berilgan nuqtadan tekislikka o'tkazilgan berilgan uzunlikdagi og'malar asoslarining geometrik o'rnini toping.

**19.14.** Berilgan nuqtadan tekislikka uzunliklari  $10 cm$  va  $17 cm$  bo'lgan ikkita og'ma o'tkazilgan. Bu og'malar proyeksiyasining ayirmasi  $9 cm$  ga teng. Og'malar proyeksiyalarini toping.

**19.15.** Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Agar: a) ulardan biri ikkinchisidan  $26 cm$  uzun, og'malarning proyeksiyalari  $12 cm$  va  $40 cm$  bo'lsa; b) og'malar uzunliklari  $1 : 2$  nisbatda bo'lib, ularning proyeksiyalari  $1 cm$  va  $7 cm$  ga teng bo'lsa, og'malarning uzunliklarini toping.

**19.16.**  $\alpha$  tekislikdan  $d$  masofada yotgan  $A$  nuqtaga tekislik bilan  $30^\circ$  burchak tashkil qiluvchi  $AB$  va  $AC$  og'malar o'tkazilgan. Ularning  $\alpha$  tekislikka proyeksiyalari o'zaro  $120^\circ$  li burchak tashkil qiladi.  $BC$  kesma uzunligini toping.

**19.17.** Agar to'g'ri burchakli va teng yonli uchburchakning katetlaridan biri tekislikka tegishli, ikkikchisi esa u bilan  $45^\circ$  li burchak tashkil qilsa, gipotenuza bu tekislik bilan  $30^\circ$  li burchak tashkil qilishini isbotlang.

**19.18.**  $ABC$  uchburchak tekisligiga  $MA$  perpendikular tushirilgan.  $\angle MBC = 45^\circ$ .  $\angle ACB = 90^\circ$ .  $MA = MC$ .  $\angle AMB$  ni toping (16-rasm).

**19.19.**  $a$  og'ma  $\alpha$  tekislik bilan  $45^\circ$  li burchak tashkil qiladi, tekislikning  $b$  to'g'ri chizig'i esa



og'ma proyeksiyasi bilan  $45^\circ$  li burchak tashkil qiladi.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning  $60^\circ$  ga teng ekanini isbotlang.

**19.20.**  $P$  nuqta tomoni  $a$  ga teng  $ABCD$  kvadratning har bir uchidan  $a$  masofada yotadi. Kvadrat tekisligi va  $AP$  to'g'ri chiziq orasidagi burchakni toping.

**19.21.** Uchburchakli piramidaning hamma qirralari o'zaro teng. Piramidaning qirradi va bu qirra tegishli bo'lmagan yog'i orasidagi burchakni toping.

**19.22.** To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari  $a$ ,  $b$  va  $c$  ga teng. Parallelepiped diagonali bilan uning yoqlari diagonallari orasidagi masofani toping.

**19.23.**  $AB \perp \alpha$ ,  $CD \perp \alpha$ ,  $AB = CD$  ekanligi berilgan (17-rasm).  $ABCD$  to'rtburchak turini aniqlang.

**19.24.**  $ABCD A_1 B_1 D_1 C_1$  kub berilgan.  $AD \perp DCC_1$  ekanini isbotlang.

**19.25.**  $S$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar  $SO$ ,  $SA$  va  $SB$  og'malar o'tkazilgan.  $SA = 20$  cm,  $AO = 16$  cm,  $OB = 5$  cm bo'lsa,  $SB$  ni toping.

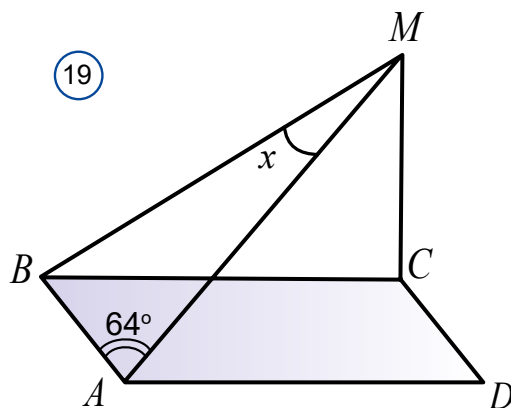
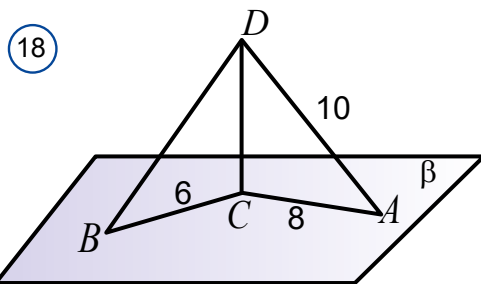
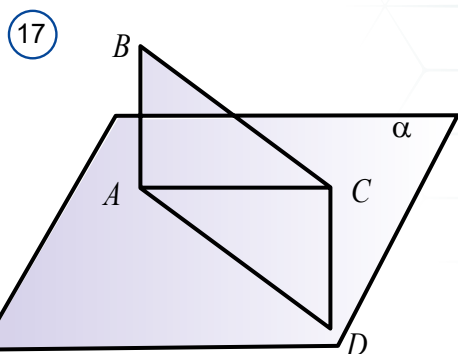
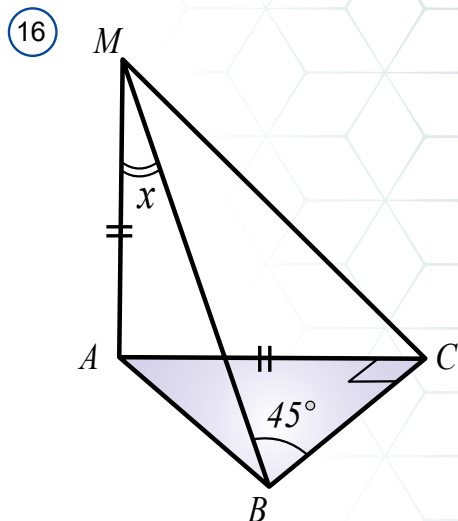
**19.26.**  $S$  nuqta  $ABCD$  to'rtburchak tekisligida yotmaydi va uning uchlaridan teng masofada joylashgan.  $S$  nuqtadan  $ABC$  tekislikkacha bo'lgan masofa  $24$  cm,  $AB = 12$  cm,  $BC = 16$  cm bo'lsa,  $S$  nuqtadan to'rtburchakning uchlarigacha bo'lgan masofalarni toping.

**19.27.** Nuqtadan katetlari  $15$  cm va  $20$  cm bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak tekisligiga, uzunligi  $16$  cm bo'lgan perpendikulyar o'tkazilgan. Perpendikulyarning asosi uchburchakning to'g'ri burchakli uchida. Bu nuqtadan gipotenuzagacha bo'lgan masofani toping.

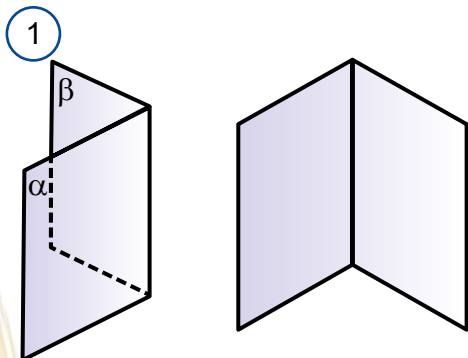
**19.28.**  $A$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikka tekislik bilan  $60^\circ$  burchak hosil qiluvchi  $AB$  va  $AC$  og'malar o'tkazilgan. Agar  $BC = AC = 6$  bo'lsa,  $AB$  ni toping.

**19.29.**  $\beta$  tekislikka  $CD$  perpendikulyar (18-rasm),  $AD$  va  $BD$  og'malar tushirilgan.  $BC = 6$ ,  $AD = 10$ ,  $AC = 8$ .  $\angle DBC$  ni toping.

**19.30.** 19-rasmda  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchak.  $MC$  to'g'ri to'rtburchak tekisligiga perpendikulyar.  $\angle BAM = 64^\circ$ .  $\angle AMB$  ni toping.



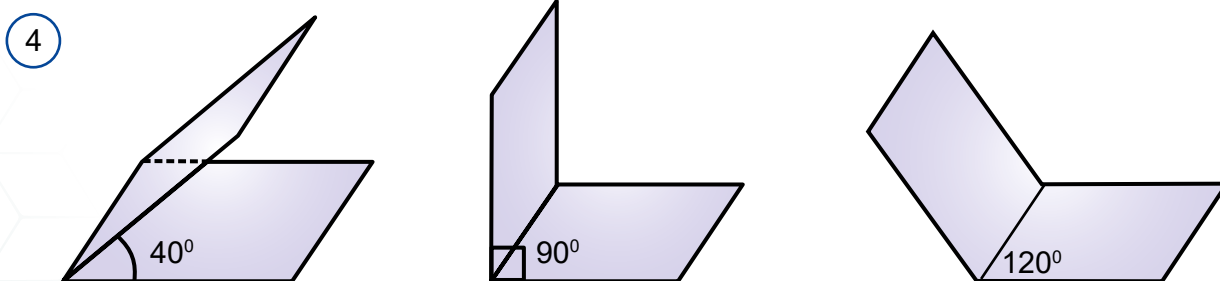
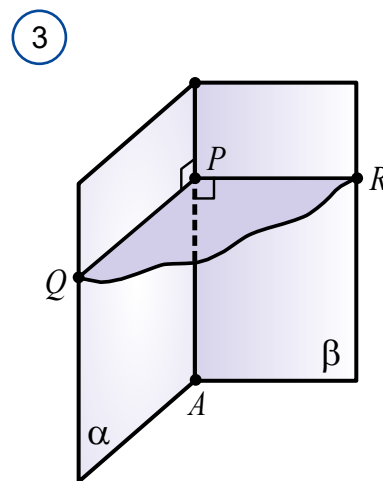
# 20 FAZODA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULARLIGI



Ikki yarimtekislik va ularni chegaralab turgan umumiy to'g'ri chiziqdan iborat geometrik shaklga *ikki yoqli burchak* deb ataladi (1-rasm). Yarimtekisliklar ikki yoqli burchakning *yoqlari*, ularni chegaralovchi to'g'ri chiziq esa ikki yoqli burchakning *qirrasini* deb ataladi.

Ikki yoqli burchaklar haqida tevarak-atrofdagi quyidagi narsalar tasavvur beradi (2-rasm): kitob, noutbuk, ochilq eshik va imorat tomi.

Ikki yoqli burchak qirrasining ixtiyoriy nuqtasidan uning yoqlarida yotuvchi va bu qirraga perpendikulyar bo'lgan nurlarni chiqaramiz. Bu nurlar hosil qilgan burchak ikki yoqli burchakning *chiziqli burchagi* deb ataladi (3-rasm).



Ta'rifdan ko'rinadiki, ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi qirrada tanlangan nuqta bilan aniqlanadi va cheksiz ko'p bo'ladi. Shunday bo'lsa-da, ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi kattaligi qirrada tanlangan nuqtaga bog'liq emas, ya'ni ularning hammasi o'zaro teng bo'ladi.

Ikki yoqli burchaklar kattaligi uning chiziqli burchagi kattaligi bilan aniqlanadi. Chiziqli burchaklarning o'tkir, to'g'ri, o'tmas va yoyiq bo'lishiga qarab, ikki yoqli burchaklar ham mos ravishda o'tkir, to'g'ri, o'tmas va yoyiq-ikki yoqli burchaklarga ajratiladi. 4-rasmda turli xil ikki yoqli burchaklar tasvirlangan.

Ikki kesishuvchi tekislik butun fazoni umumiy qirraga ega bo'lgan to'rtta ikki yoqli burchakka ajratadi (5-rasm). Bu ikki yoqli burchaklarning biri  $\alpha$  ga teng bo'lsa, ulardan yana bitasining qiymati ham  $\alpha$  ga teng bo'ladi. Qolgan ikkitasining qiymati esa  $180^\circ - \alpha$  ga teng bo'ladi.

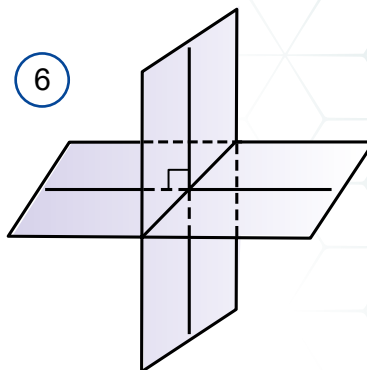
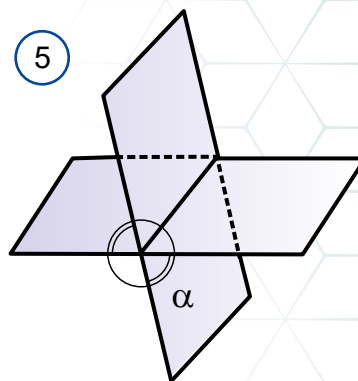
Mazkur ikki yoqli burchaklar ichida  $90^\circ$  dan kichigi ham bo'ladi. Shu burchakning qiymati kesishuvchi **tekisliklar orasidagi burchak** deb olinadi.

Agar ikki yoqli burchaklarning biri to'g'ri, ya'ni  $90^\circ$  ga teng bo'lsa, qolgan uchtasi ham to'g'ri bo'ladi (6-rasm).

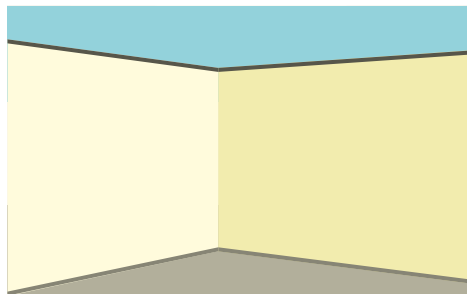
To'g'ri burchak ostida kesishuvchi tekisliklar - **perpendikulyar tekisliklar** deb ataladi.

Perpendikulyar tekisliklarga tevarak-atrofdan misol sifatida xona poli va devorlarini, umumiy qirraga ega xona devorlari, umumiy qirraga ega rubik kubi yoqlari va Yer sathi va uy devorlari hamda uying bir-biriga tutashgan devorlarini misol tariqasida keltirish mumkin (7-rasm).

$\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning perpendikulyarligi to'g'ri chiziqdagi kabi " $\perp$ " belgi yordamida,  $\alpha \perp \beta$  tarzda yoziladi.



7



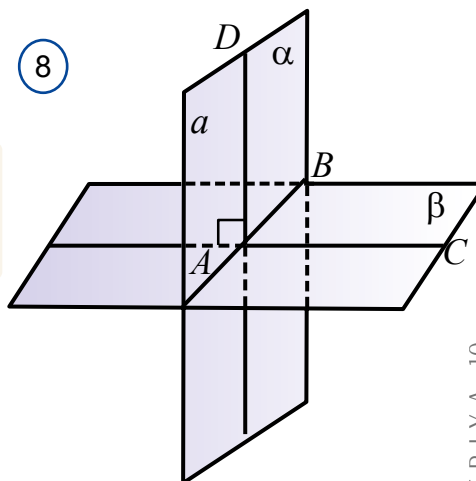
Endi perpendikulyar tekisliklarning xossalariga to'xtalamiz. Quyidagi teorema tekisliklarning perpendikulyarlik alomati deb nomlanadi.

**4.11-teorema.** Agar tekisliklardan biri ikkinchisiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tsa, bunday tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

**Isbot.** Aytaylik,  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar berilgan bo'lib,  $\alpha$  tekislik  $\beta$  tekislikka perpendikulyar bo'lgan  $a$  to'g'ri chiziqdan o'tsin (8-rasm).  $\beta$  tekislik bilan  $a$  to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi  $A$  bo'lsin.  $\alpha \perp \beta$  ekanini isbotlaymiz.

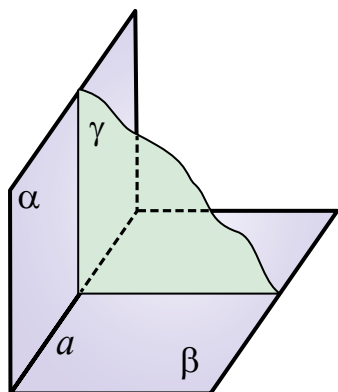
$\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $AB$  to'g'ri chiziq bo'yab kesishyapti. Unda  $AB \perp a$  bo'ladi, chunki shartga ko'ra  $\beta \perp a$ .  $\beta$  tekislikda yotgan va  $AB$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan  $AC$  to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Natijada hosil bo'lgan  $\angle DAC$   $\alpha, \beta$  - ikki yoqli burchakning chizikli burchagi bo'ladi. Shartga ko'ra,  $a \perp \beta$ . Unda  $\angle DAC$  - to'g'ri burchak. Demak,  $\alpha \perp \beta$ .

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

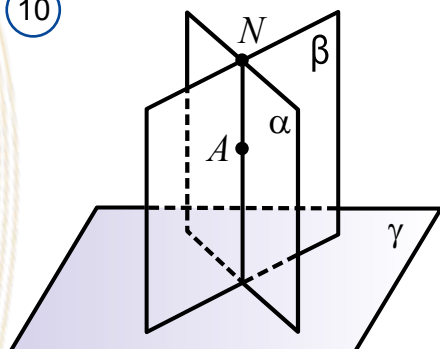




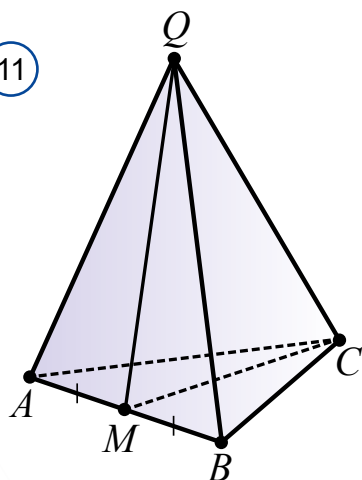
9



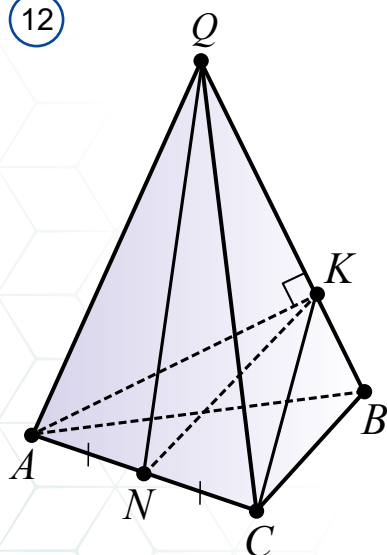
10



11



12



**Natija.** Agar tekislik ikki tekislikning kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lsa, bu tekisliklarning har biriga ham perpendikulyar bo'ladi (9-rasm).

4.11-teoremaga teskari teorema ham o'rinli bo'ladi. Uni isbotsiz keltiramiz.



**Teorema 4.12.** Agar ikki perpendikulyar tekisliklardan birining biror nuqtasidan ikkinchisiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilsa, bu to'g'ri chiziq birinchi tekislikda yotadi.

**Natija.** Agar ikki perpendikulyar tekislik uchinchi tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ularning kesishish chizig'i ham bu tekislikka perpendikulyar bo'ladi (10-rasm).

**1-masala.**  $M$  nuqta  $QABC$  muntazam piramida asosidagi qirrasining o'rtasi bo'lsa (11-rasm),  $QCM$  tekislik piramida asosi tekisligi  $ABC$  ga perpendikulyar ekanini isbotlang.

**Isbot.**  $AB$  kesma teng yonli  $AQB$  va  $ACB$  uchburchaklarning asosi bo'lgani uchun bu uchburchaklar medianalari  $QM$  va  $CM$  ga ham perpendikulyar bo'ladi. Shu bilan birga,  $AB$  kesma  $QCM$  tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi. Unda 4.12-teoremaga ko'ra,  $ABC$  tekislik  $QCM$  tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

**2-masala.**  $QABC$  muntazam piramidaning uchi-dagi yassi  $AQB$  burchagi  $\alpha$  ga teng. Uning yon qirrasidagi ikki yoqli burchagini toping (12-rasm).

**Yechish.** Aytaylik,  $N$  nuqta  $AC$  qirraning o'rtasi,  $AK$  esa  $A$  nuqtadan  $BQ$  qirraga tushirilgan perpendikulyar bo'lsin.

$ABQ$  va  $CBQ$  uchburchaklarning tengligidan  $CK \perp BQ$  bo'ladi. Shuning uchun,  $AKC$  burchak  $BQ$  ikki yoqli burchakning chizikli burchagi bo'ladi.

$AKQ$  va  $ANQ$  to'g'ri burchakli uchburchaklardan  $AK = \sin \alpha$ ,  $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$  ekanini topamiz.

$AKN$  to'g'ri burchakli uchburchaklardan esa:

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \text{ ga egamiz.}$$

$$\text{Bundan } \angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$





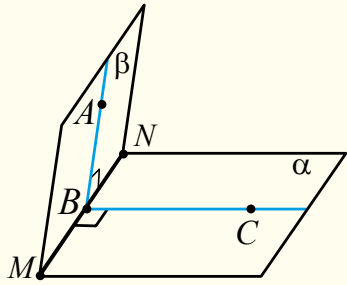
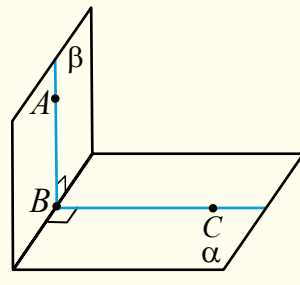
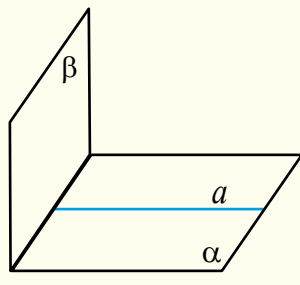
## Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Ikki yoqli burchak deb nimaga aytiladi?
2. Qanday burchakka tekisliklar orasidagi burchak deb ataladi?
3. To'g'ri burchak ostida kesishuvchi tekisliklar qanday nomlanadi?
4. Tekisliklarning perpendikulyarlik alomatini ayting.
5. Perpendikulyar tekisliklarning xossalarini ayting va sharhlang.

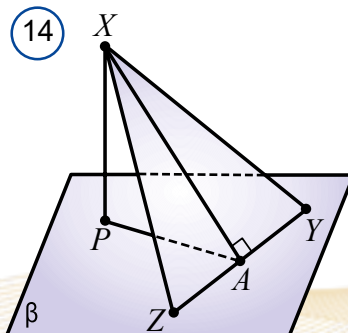
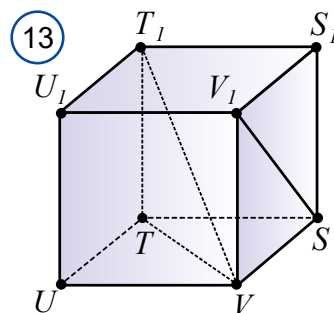


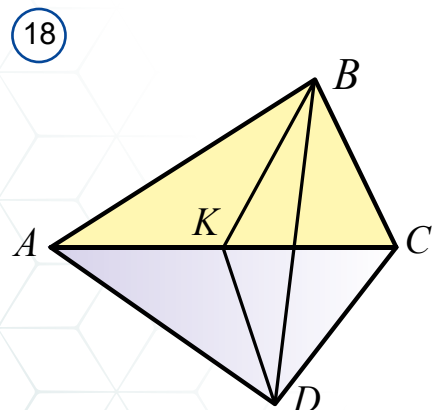
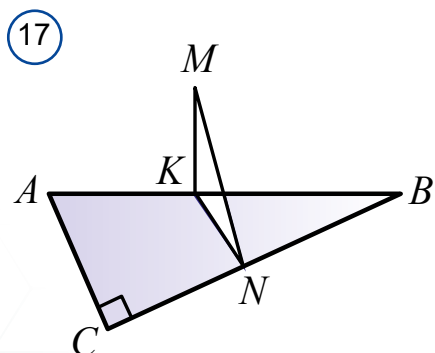
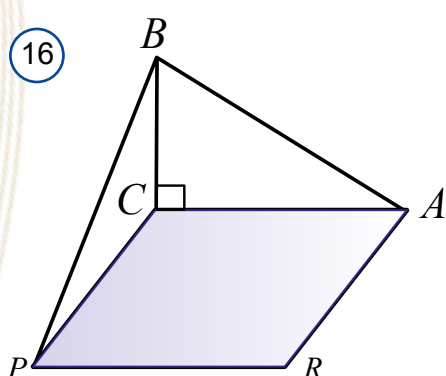
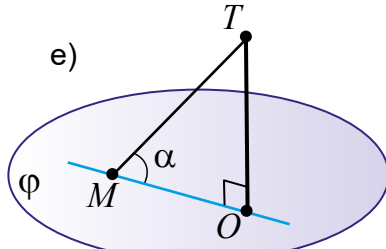
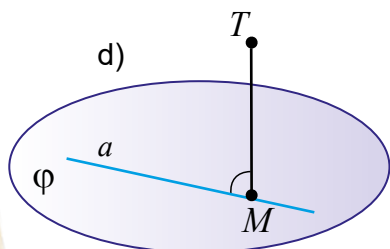
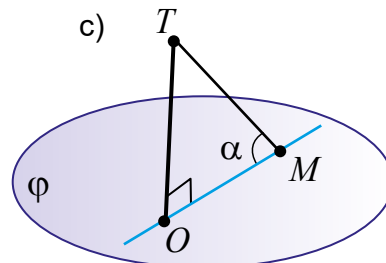
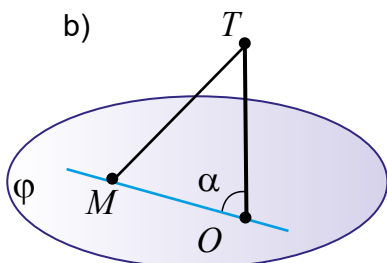
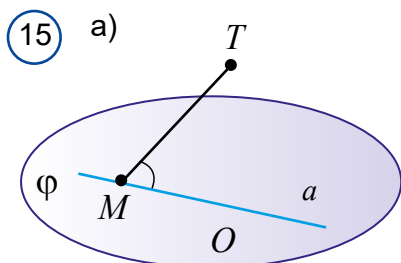
## Amaliy mashq va tatbiq

20.1. Jadvalda 20-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Tekisliklarning perpendikulyarligi		
Tekisliklar orasidagi burchak	Tekisliklarning perpendikulyarligi	Tekisliklarning perpendikulyarlik alomati
 <p>Agar <math>AB \perp MN</math> va <math>CB \perp MN</math> bo'lsa, <math>\angle ABC</math> – <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar orasidagi burchak</p>	 <p>Agar <math>\angle ABC = 90^\circ</math> bo'lsa, <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar perpendikulyar deyiladi</p>	 <p>Agar <math>a \subset \alpha</math> va <math>a \perp \beta</math> bo'lsa, <math>\alpha \perp \beta</math> bo'ladi</p>

- 20.2. a)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli parallelepipedning; b)  $ABCA_1 B_1 C_1$  to'g'ri prizmaning perpendikulyar yoqlarini aniqlang va to'g'ri ikki yoqli burchalarini ayting.
- 20.3.  $STUVS_1 T_1 U_1 V_1$  kubda (13-rasm) a)  $TVT_1$  burchak; b)  $T_1 ST$  burchak  $T_1 SVT$  ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladimi?  $V_1 UTS$  ikki yoqli burchakning qiymatini toping.
- 20.4. Ikkita ikki yoqli burchakning bittadan yog'i umumiy, qolgan yoqlari birgalikda tekisikni tashkil qiladi. Bu ikki yoqli burchaklarning yig'indisi  $180^\circ$  ga teng ekanini isbotlang.
- 20.5.  $XYZ$  uchburchakning  $YZ$  tomoni  $\beta$  tekislikda yotadi. Uning  $X$  uchidan  $XA$  balandlik va  $\beta$  tekislikka  $XP$  perpendikulyar tushirilgan (14-rasm).  $XAP$  burchak  $XYZP$  ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi ekanini isbotlang.
- 20.6. Uchburchakli  $ABCD$  piramidaning  $CD$  qirrasi  $ABC$  tekislikka perpendikulyar.  $AB = BC = AC = 6$  va  $BD = 3\sqrt{7}$  bo'lsa,  $DACB$ ,  $DABC$ ,  $BDCA$  ikki yoqli burchaklarni toping.





20.7.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  muntazam parallelepipedning  $AA_1 C_1 C$  va  $BB_1 D_1 D$  diagonal kesimlari o'zaro perpendikulyar ekanligi isbotlang.

20.8.  $T$  nuqtadan  $\varphi$  tekislikka og'ma tushirilgan (15-rasm). Quyidagi rasmlarning qaysilarida tekislik va og'ma orasidagi  $\alpha$  burchak to'g'ri belgilangan?

20.9. Uchburchakli  $ABCD$  piramidada  $DAB, DAC, ACB$  burchaklar to'g'ri,  $AC = CB = 5$  va  $DB = 5\sqrt{5}$  bo'lsa,  $ABCD$  ikki yoqli burchagini toping.

20.10. Ikki yoqli burchak chiziqli burchagining tekisligi uning har bir yog'ida perpendikulyar ekanini isbotlang.

20.11. Ikki yoqli burchakning bitta yog'ida yotgan ikkita nuqta uning qirrasidan mos ravishda  $51\text{ cm}$  va  $34\text{ cm}$  uzoqlikda yotibdi. Bu nuqtalarning birinchisi boshqa yog'idan  $15\text{ cm}$  uzoqlikda yotganligi ma'lum bo'lsa, shu yoqdan ikkinchi nuqttagacha bo'lgan masofani toping.

20.12.  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchak ( $\angle C = 90^\circ$ ) va  $ACPR$  kvadrat tekisliklari o'zaro perpendikulyar (16-rasm). Kvadrat tomoni  $6\text{ cm}$ , uchburchak gipote-nuzasi  $10\text{ cm}$ .  $BP$  kesma uzunligini toping.

20.13.  $MK$  kesma to'g'ri burchakli  $ABC$  uchburchak ( $\angle C = 90^\circ$ ) tekisligiga perpendikulyar (17-rasm).  $KN \parallel AC$ ,  $AK = KB$ ,  $AC = 12\text{ cm}$ ,  $MK = 8\text{ cm}$  bo'lsa,  $MN$  kesma uzunligini toping.

20.14.  $ABC$  va  $ADC$  teng yonli uchburchaklar tekisliklari perpendikulyar (18-rasm).  $AC$  ularning umumiy asosi.  $BK$  kesma  $ABC$  uchburchak medianasi.  $BK = 8\text{ cm}$ ,  $DK = 15\text{ cm}$  bo'lsa,  $BD$  kesma uzunligini toping.

20.15. Muntazam to'rtburchakli piramida asosining tomoni orqali uning qarshisidagi yon yoqqa perpendikulyar tekislik o'tkazilgan. Asosining tomoni  $a = 30\text{ cm}$ , piramidaning balandligi  $h = 20\text{ cm}$ . Hosil bo'lgan kesimning yuzini aniqlang.



## “GeoGebra”ni qo‘llab

### 3D kalkulyatori yordamida nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlash

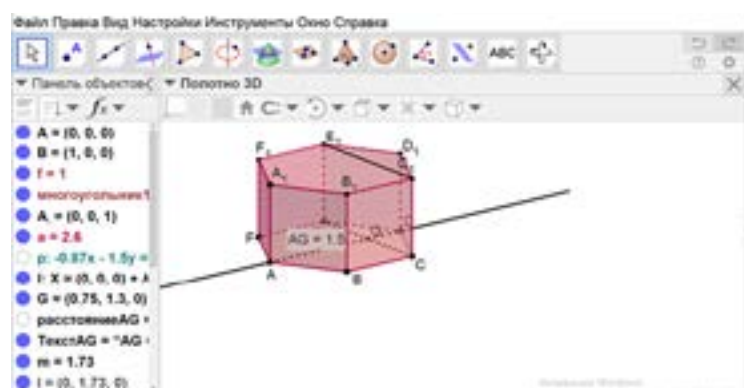
Barcha qirralari 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchakli prizmaning  $A$  uchidan  $CC_1E_1$  tekisligiga perpendikulyar tushirilgan. Prizmaning  $A$  uchidan shu tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

#### Yasash:

- GeoGebrada yangi oyna oching.
- GeoGebra interfeysini “Настройки” – “3D Графика” ko‘rinishiga o‘tkazing.

#### Masofani aniqlash bosqichlari

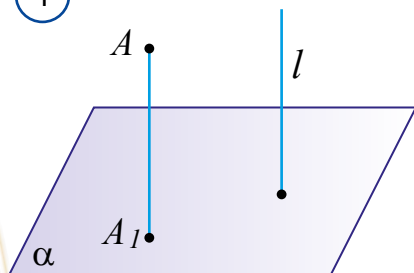
1		Ввод (Kiritish)	$A=(0,0,0)$ nuqta yasaladi.
2		Ввод (Kiritish)	$B=(1,0,0)$ nuqta yasaladi.
3		Правильный многоугольник (Muntazam ko‘pburchak)	Tomoni 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchak yasaladi.
4		Призма (Prizma)	Qirralari 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchakli to‘g‘ri prizma yasaladi.
5		Переименовать (Qayta nomlash)	Tegishli nuqtalar mos ravishda $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ ga deb qayta nomlanadi.
6		Плоскость через 3 точки (3 nuqta orqali tekislik)	$CC_1E_1$ tekislik yasaladi.
7		Перпендикулярная прямая (Perpendikulyar o‘g‘ri chiziq)	Prizmaning $A$ uchidan $CC_1E_1$ tekisligiga perpendikulyar tushiriladi.
8		Пересечение (Kesishish)	$A$ nuqta va $CC_1E_1$ tekislik kesishish nuqtasi – $G$ nuqta belgilanadi.
9		Расстояние или длина (Masofa yoki uzunlik)	Prizmaning $A$ uchi va $G$ nuqtasi orasidagi masofa aniqlanadi: $AG = 1,5$ .



### Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Barcha qirralari 1 ga teng bo‘lgan muntazam oltiburchakli prizmaning  $A$  uchidan  $CC_1D_1$  tekislikka perpendikulyar uzunligini toping.
2. Barcha qirralari 1 ga teng bo‘lgan uchburchakli to‘g‘ri prizmaning  $A_1$  uchidan  $AB_1C_1$  tekislikka perpendikulyar uzunligini toping.

1



Buyuk italyan olimi Galeleo Galiley ta'bi-ri bilan aytganda, "geometriya aqliy qobiliyatimizni charxlashning eng kuchli quroli bo'lib, to'g'ri fikr yuritish va mulohaza yuritish imkoniyatini beradi".

Agar proyeksiya yonalishi  $l$  proyeksiyalash tekisligi  $\alpha$  ga perpendikulyar bo'lsa, bunday parallel proyeksiyalash *ortogonal proyeksiyalash* deb ataladi.

1-rasmda  $l \perp \alpha$  bo'lib,  $A$  nuqtaning  $\alpha$  tekislikka ortogonal proyeksiyasi –  $A_1$  nuqta tasvirlangan.

Ortogonal proyeksiyalashda hosil bolgan shaklga berilgan shaklning *ortogonal proyeksiyasi* yoki qisqacha *proyeksiyasi* deb aytiladi.

2-rasmda turli fazoviy shakllarning  $\alpha$  tekislikka ortogonal proyeksiyalari tasvirlangan.

Ortogonal proyeksiyalash parallel proyeksiyalashning xususiy holi bo'lgani uchun parallel proyeksiyalashning hamma xossalari ortogonal proyeksiyalashda ham o'rinli bo'ladi. Ortogonal proyeksiyalashda:

a) nuqta nuqtaga, kesma kesmaga, to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa o'tadi;

b) parallel to'g'ri chiziqlar proyeksiyalari parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi;

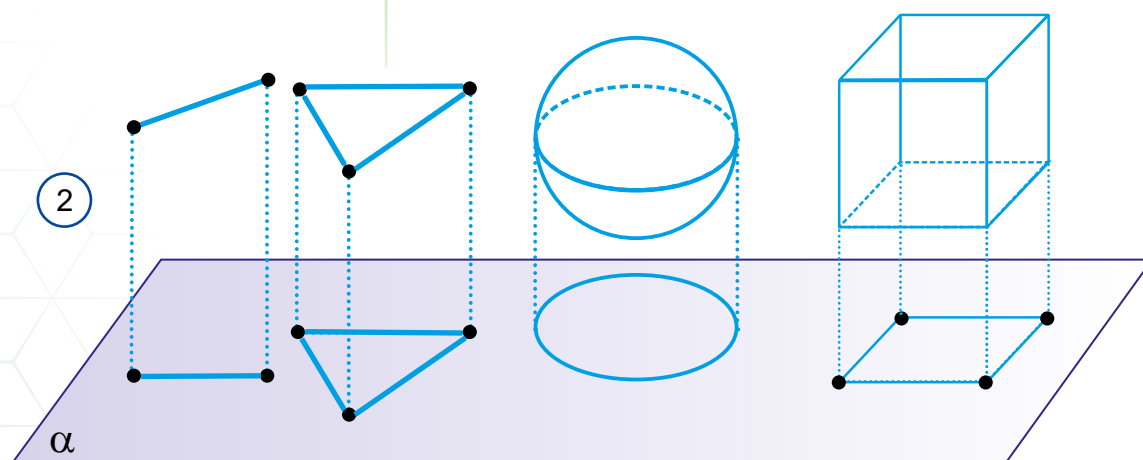
c) shakllarning to'g'ri chizikli kesimlari proyeksiyasi ham kesmalardan iborat bo'ladi;

d) shaklning parallel kesmalari proyeksiyasi ham parallel kesmalardan iborat bo'ladi;

e) bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziq-larda yotgan kesmalar uzunliklari nisbati ularning proyeksiyalari uzunliklari nisbatiga teng bo'ladi, kesmalar uzunliklari nisbati saqlanadi.

Albatta bu xossalari proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lmagan kesma va to'g'ri chiziqlar uchun o'rinli bo'ladi,

2





Quyida faqat ortogonal proyeksiyaga tegishli bo'lgan muhim xossani isbotlaymiz.

**Teorema 4.15.** *Ko'pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi ko'pburchak yuzi bilan uning tekisligi va proyeksiya tekisligi orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga teng.*

**Isbot.** 1. Avval xossani uchburchak va uning biror tomonidan o'tuvchi tekislikdagi proyeksiyasi uchun qarab chiqamiz. Aytaylik,  $ABC$  uchburchakning  $a$  tekislikdagi proyeksiyasi  $AB_1C$  uchburchak bo'lsin (3-rasm).

$ABC$  uchburchakning  $BK$  balandligini tushiramiz. Uch perpendikulyarlar haqidagi teorema ko'ra,  $B_1K$  kesma  $KBB_1$  uchburchakning balandligi bo'ladi.

$BKB_1$  burchak – uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi orasidagi  $\varphi$  burchakdan iborat bo'ladi.  $BKB_1$  uchburchakda:  $KB_1 = KB \cdot \cos\varphi$ .

$$\text{U holda: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB, \quad S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2}$$

$$AC \cdot KB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot KB \cdot \cos\varphi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Natijada  $S_{\Delta AB_1C} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$  ni hosil qilamiz.

2.  $\alpha$  tekislik o'rniga unga parallel bo'lgan, boshqa  $\beta$  tekislik olinganda ham teorema o'rinli bo'ladi (4-rasm). Bu parallel proyeksiyalash xossasidan foydalanib isbotlanadi.

3. Endi umumiy ko'pburchak holiga keladigan bo'lsak (5-rasm). Bu holda teorema, ko'pburchakni diagonallari yordamida uchburchaklarga bo'lish yordamida yuqorida ko'rilgan xususiy holga keltirib isbotlanadi.

Bu proyeksiyalar qaysi yo'nalishda proyeksiyalanganligiga qarab, vertikal (tik), gorizont va frontal proyeksiyalar deb ham ataladi.

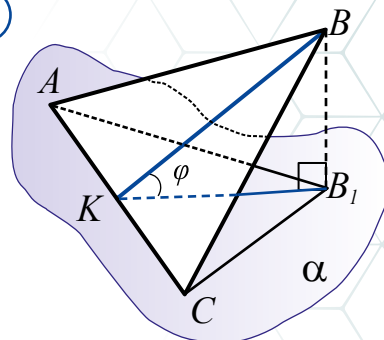
Ortogonal proyeksiyadan texnik chizmachilikda turli xil detallarni loyihalashda foydalaniladi. Turli mashina detallari chizmalari bitta, ikkita yoki uchta o'zaro perpendikulyar proyeksiyalar tekisliklariga ortogonal proyeksiyalash yo'li bilan hosil qilinadi (6-rasm).

**Masala.**  $ABC$  uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 13 cm, 14 cm va 15 cm bo'lgan  $ACB_1$  uchburchakdan iborat (3-rasm). Uchburchak tekisligi proyeksiya tekisligi bilan  $60^\circ$  li burchak tashkil qiladi.  $ABC$  uchburchak yuzini toping.

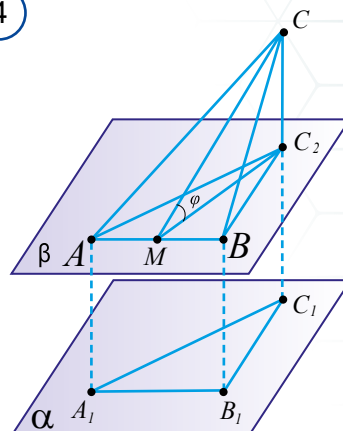
**Yechish.** Ma'lumki, 4.15-teoremaga ko'ra uchburchak proyeksiyasi yuzi  $S_{\Delta AB_1C} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\varphi$  formula yordamida topiladi.

Bu yerda  $\varphi$  – uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi orasidagi burchak.

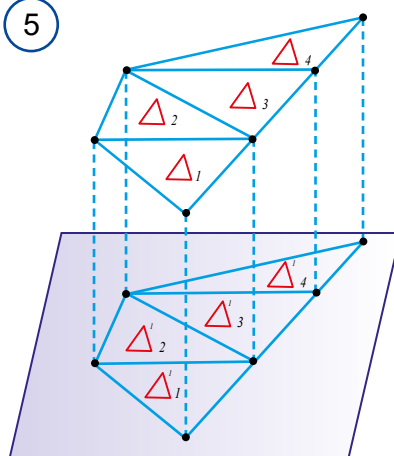
3



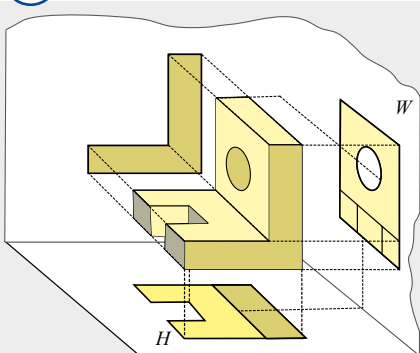
4



5



6



$ACB_1$  uchburchak yuzini Geron formulasidan foydalanib hisoblaymiz:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$S_{\Delta AB_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = 84$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta AB_1C}}{\cos \varphi} = \frac{84}{\cos 60^\circ} = 84 : \frac{1}{2} = 168$$

**Javob:**  $168 \text{ cm}^2$ .



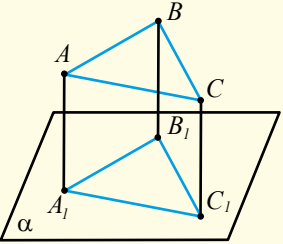
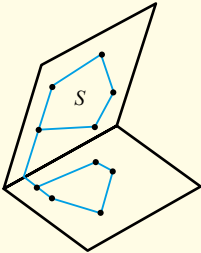
### Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Ortogonal proyeksiyalash deb nimaga aytiladi?
2. Ortogonal proyeksiyalash xossalarini sanang.
3. Ko'pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi qanday topiladi?
4. Ortogonal proyeksiyalashdan texnikada qanday foydalaniladi?



### Amaliy mashq va tatbiq

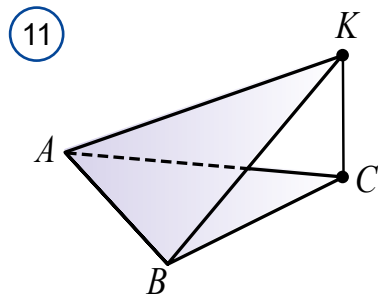
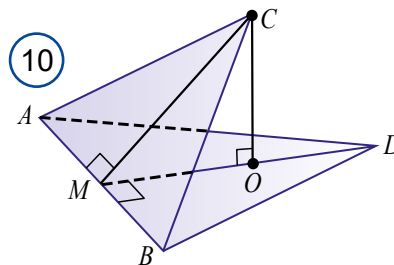
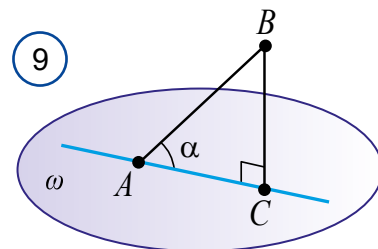
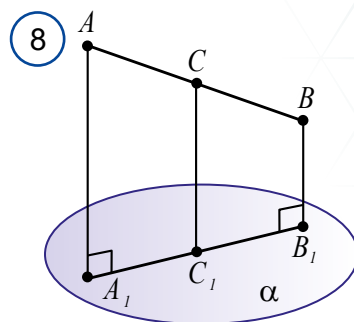
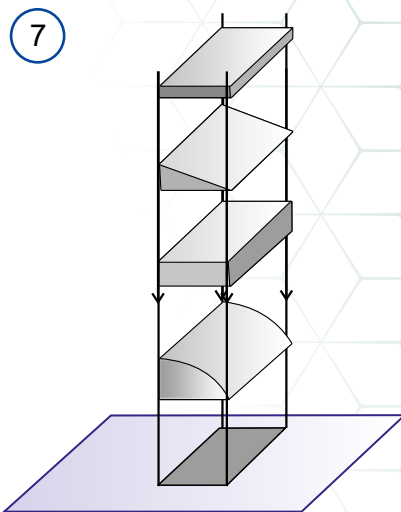
**21.1.** Jadvalda 21-mavzuning asosiy tayanch ma'lumotlari keltirilgan. Ularni sinchiklab o'rganib chiqing va izohlang.

Fazoda ortogonal proyeksiya	Ko'pburchak proyeksiyasining yuzi
 <p>Ortogonal proyeksiyada: <math>l \perp \alpha</math>.  <math>l</math> – proyeksiyalash yo'nalishi;  <math>\alpha</math> – proyeksiyalash tekisligi.</p>	 $S_1 = S \cdot \cos \varphi$ <p><math>S</math> – ko'pburchak yuzi;  <math>S_1</math> – ko'pburchak ortogonal proyeksiyasining yuzi;  <math>\varphi</math> – ko'pburchak va proyeksiya tekisliklari orasidagi burchak</p>

**21.2.** Trapetsiyaning ortogonal proyeksiyasi a) kvadrat; b) kesma; c) to'g'ri to'rtburchak; d) parallelogramm; e) trapetsiya bo'lishi mumkinmi?

**21.3.** 7-rasmga qarab ortogonal proyeksiyasi to'g'ri to'rtbur-

- chak bo'lgan geometrik shakllarni ayting.
- 21.4.**  $A_1B_1$  kesma  $AB$  kesmaning  $\alpha$  tekislikka ortogonal proyeksiyasi (8-rasm). Agar  $AB = 20$  cm,  $AC = 10$  cm,  $A_1B_1 = 12$  cm bo'lsa,  $B_1C_1$  kesma uzunligini toping.
- 21.5.** Uzunligi 5 cm bo'lgan  $AB$  kesmaning  $\omega$  tekislikka ortogonal proyeksiyasi uzunligi 3 cm bo'lgan  $AC$  kesmadan iborat (9-rasm).  $AB$  kesmaning  $\omega$  tekislikka og'ish burchagi kosinusini toping.
- 21.6.** Tomoni  $a$  ga teng bo'lgan muntazam uchburchak berilgan. Uchburchak tekisligi bilan: a)  $30^\circ$ ; b)  $45^\circ$ ; c)  $60^\circ$  li burchak tashkil qiluvchi tekislikka uning ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.
- 21.7.** Umumiy  $AB$  tomonga ega bo'lgan  $ABC$  va  $ABD$  teng yonli uchburchaklar turli tekisliklarda yotadi. Agar a)  $AB = 24$  cm,  $AC = 13$  cm,  $AD = 27$  cm,  $CD = 35$  cm; b)  $AB = 32$  cm,  $AC = 65$  cm,  $AD = 20$  cm,  $CD = 63$  cm bo'lsa,  $ABC$  uchburchakning  $ABD$  uchburchakka ortogonal proyeksiyasi yuzini toping. Shuningdek,  $ABD$  uchburchakning  $ABC$  uchburchakka ortogonal proyeksiyasi yuzini ham toping.
- 21.8.** Agar  $AB$  to'g'ri chiziqdan  $C$  nuqttagacha bo'lgan masofa (10-rasm)  $C$  nuqtadan  $ABD$  tekislikkacha bo'lgan masofadan ikki marta katta bo'lsa,  $ABC$  va  $ABD$  tekisliklar orasidagi burchakni toping.
- 21.9.**  $ABC$  uchburchak yuzi  $18$  cm<sup>2</sup> ga teng (11-rasm).  $KC \perp ABC$ . Agar  $ABK$  va  $ABC$  uchburchaklar tekisliklari orasidagi burchak: a)  $\alpha = 30^\circ$ ; b)  $\alpha = 45^\circ$ ; c)  $\alpha = 60^\circ$  bo'lsa,  $ABK$  uchburchak yuzini toping.
- 21.10.**  $ABC$  va  $ABD$  uchburchaklar tekisliklari orasidagi burchak  $60^\circ$  ga teng. Agar  $AB = 4\sqrt{3}$  bo'lsa,  $CD$  masofani toping.
- 21.11.** To'g'ri to'rtburchakning yuzi 72 ga teng. Uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi kvadratdan iborat. Tekislik va to'g'ri to'rtburchak yotgan tekislik orasidagi burchak  $60^\circ$  ga teng. Kvadratning perimetrini toping.
- 21.12.** Yuzi  $48$  cm<sup>2</sup> ga teng bo'lgan uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 14 cm, 16 cm va 6 cm bo'lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni hisoblang.
- 21.13.** Yuzi  $12$  cm<sup>2</sup> ga teng bo'lgan uchburchakning ortogonal proyeksiyasi tomonlari 13 cm, 14 cm va 15 cm bo'lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni hisoblang.
- 21.14.** Asosi 8 cm va yon tomoni 12 cm bo'lgan teng yonli uchburchakning ortogonal proyeksiyasi - tomonlari 8 cm, 6 cm va 6 cm bo'lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni toping.



**22.1.** Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto'g'ri?

- A) Agar bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lsa, bu tekisliklar paralleldir.
- B) Agar ikki to'g'ri chiziq, uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro paralleldir.
- C) Tekislikda yotgan to'g'ri chiziq og'maning proyeksiyasiga perpendikulyar bo'lsa, og'maning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi.
- D) To'g'ri chiziq tekislikda yotgan ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.
- E) Og'ma va uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchaklardan eng kichigiga og'ma va tekisliklar orasidagi burchak deyiladi.

**22.2.** Quyidagi mulohazalarning qaysi biri noto'g'ri?

- A) Agar fazoda ikki to'g'ri chiziq uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular o'zaro paralleldir.
- B) Tekislikda og'maning asosidan uning proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq og'maning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi.
- C) Fazodagi uchta nuqta orqali faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.
- D) To'g'ri chiziq yoki parallel to'g'ri chiziqlar kesmalarining nisbati parallel proyeksiyalashda o'zgarmaydi. (proyeksiyalanadigan kesmalar proyeksiyalash yo'nalishiga parallel emas).
- E) Tekislikdan tashqarida yotgan to'g'ri chiziq bu tekislikdagi biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq va tekislik o'zaro paralleldir.

**22.3.**  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchak tekisligiga uning  $B$  uchi orqali  $BM$  perpendikulyar tushirilgan. a)  $AD$  to'g'ri chiziq  $AB$  va  $BM$  to'g'ri chiziq yotgan tekislikka; b)  $CD$  to'g'ri chiziq  $BC$  va  $BM$  to'g'ri chiziq yotgan tekislikka perpendikulyar bo'lishini isbotlang.

**22.4.**  $A$  va  $B$  nuqtalardan  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar va uni mos ravishda  $C$  va  $D$  nuqtalarda kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Agar  $AC = 3 m$ ,  $BD = 2 m$  va  $CD = 2,4 m$  bo'lsa hamda  $AB$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni kesmasa,  $A$  va  $B$  nuqtalar orasidagi masofani toping.

**22.5.** To'g'ri burchakli parallelepipedning uchta o'lchamlariga ko'ra uning diagonali uzunligini toping: a) 1, 2, 2; b) 2, 3, 6; c) 6, 6, 7.

**22.6.** Kubning qirrasi  $a$  ga teng. Kubning uchidan uning boshqa ikki uchini tutashtiruvchi diagonali orasidagi masofani toping.

**22.7.** To'g'ri burchakli parallelepiped asosining tomonlari  $7 cm$  va  $24 cm$ , balandligi  $8 cm$ . Parallelepiped diagonal kesimining yuzini toping.

**22.8.** To'g'ri burchakli parallelepipedning uchta o'lchamlariga ko'ra uning to'la sirti yuzini toping:  $10 cm$ ,  $22 cm$ ,  $16 cm$ .



**22.9.** To'g'ri burchakli parallelepipedning balandligi  $h$ , asosining yuzi  $Q$ , diagonal kesimining yuzi  $M$  bo'lsa, uning yon sirtining yuzini toping.

**22.10.** To'g'ri burchakli parallelepipedning bitta uchida uchrashuvchi yoqlarining diagonalari:  $a, b, c$  ga teng (1-rasm). Parallelepipedning uchta o'lchamlari uzunliklarini toping.

**22.11.** Perpendikulyar bilan og'ma orasidagi burchak  $60^\circ$  ga teng. Perpendikulyarning uzunligi 20 ga teng. Og'maning uzunligini toping.

**22.12.** Tekislikka tushirilgan og'ma bilan perpendikulyar orasidagi burchak  $60^\circ$ , og'maning uzunligi  $20\sqrt{3}$ . Perpendikulyarning uzunligini toping.

**22.13.** Tekislikka o'tkazilgan perpendikulyar bilan og'ma orasidagi burchak  $30^\circ$ , perpendikulyarning uzunligi esa 10 ga teng. Og'maning uzunligini toping.

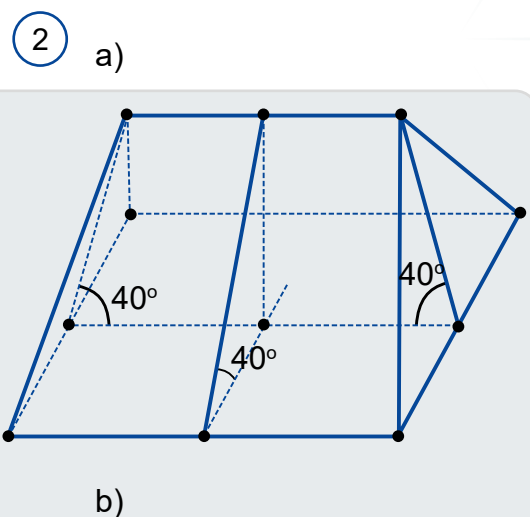
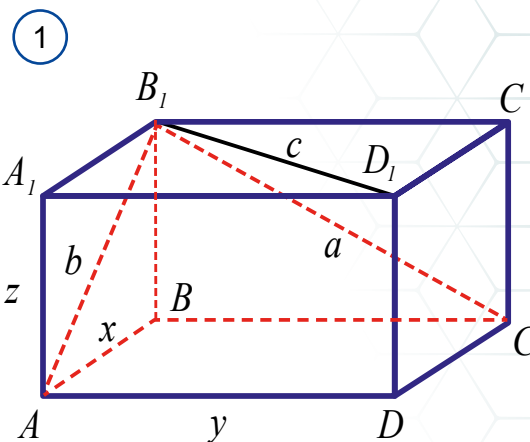
**22.14.** Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Agar og'malar  $1 : 2$  ga teng nisbatda bo'lib, ularning proyeksiyalari 1 va 7 ga teng bo'lsa, og'malarning uzunligini toping.

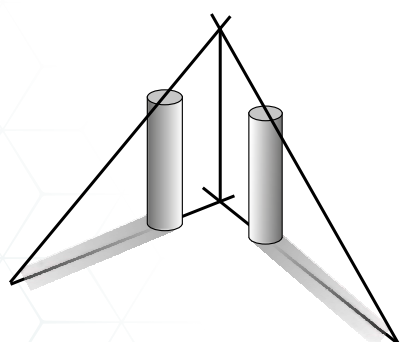
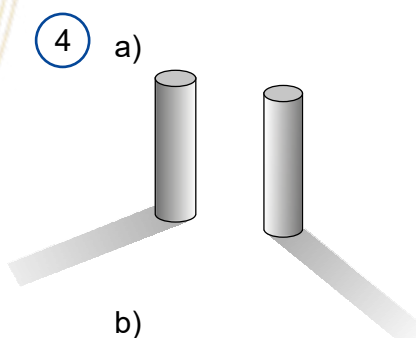
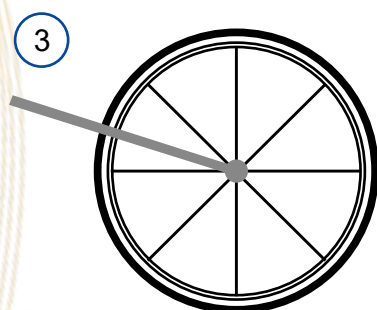
**22.15.**  $ABC$  uchburchakning to'g'ri burchakli  $B$  uchidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq  $b$  o'tkazilgan.  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ .  $b$  va  $AC$  to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

**22.16.** Uzunliklari  $10\text{ cm}$  va  $15\text{ cm}$  bo'lgan ikki kesmaning uchlari o'zaro parallel tekisliklarda yotadi. Birinchi kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi  $\sqrt{19}\text{ cm}$  bo'lsa, ikkinchi kesmaning proyeksiyasi necha  $\text{cm}$  bo'ladi?

**22.17.** O'chamlari  $12,5\text{ m}$  va  $7,2\text{ m}$  bo'lgan uy tomi to'rtta qiya yoqlar bilan 2-rasmda ko'rsatilgandek qilib yopilgan. Har bir yoq tom tekisligi bilan  $40^\circ$  li burchak tashkil qiladi. a) Har bir qiya yoq yuzini toping; b) Tomning jami qiya yoqlari yuzini toping. c) Agar tomni tunuka bilan yopganda uning 6 foizi isrof bo'lishi ma'lum bo'lsa, tomni yopishga qancha tunuka kerak bo'ladi?

**22.18.**  $AB$  va  $CD$  – o'zaro  $60^\circ$  li burchak hosil qilib kesishuvchi ikki tekislikda yotgan parallel to'g'ri chiziqlar.  $A$  va  $D$  nuqtalar tekisliklarning kesishish chizig'idan  $8\text{ cm}$  va  $6,3\text{ cm}$  uzoqlikda.  $AB$  va  $CD$  orasidagi masofani toping.





- Ikki qo'shni xona devorlari tutashgan chiziqning polga perpendikulyarligini qanday qilib o'lchashlar yordamida tekshirsa bo'ladi?
- Uzunlik o'lchov asbobi – ruletka yordamida ustunning tikligini qanday tekshirsa bo'ladi?
- G'ildirak o'qi tekisligining u g'ildirayotgan tekislikka perpendikulyarligini qanday tekshirsa bo'ladi?
- Nima sababdan qishda tomdan osilib turgan sumalaklarni, ularning qalinligini hisobga olmasdan, o'zaro parallel deyish mumkin?
- O'quvchi amaliy ish bajaryapti. Bir nechta o'rnatilgan ustunlarning yerga nisbatan tikligini tekshirish uchun ularidan faqat bittasini tekshirdi. Qolgan ustunlarning tikligini quyidagicha tekshirdi: hamma ustunlarning balandligini, ularning pastki asoslari va yuqori uchlari orasidagi masofalarni o'lchab qaror qabul qildi. U bu ishni to'g'ri bajardimi?
- Nima sababdan eshik, u ochiqmi yoki yopiqmi har safar polga nisbatan perpendikulyar bo'ladi?
- To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligiga yaqqol misol sifatida g'ildirak simlari yotgan tekislikning g'ildirak o'qiga bo'lan joylashuvini keltirish mumkin (*3-rasm*). O'q g'ildirakning har bir simiga perpenikular. Harakat davomida g'ildirak simlari har bir nuqtada kesishadigan kesmalardan iborat doira tekisligini hosil qiladi. Agar o'q gorizontall joylashgan bo'lsa, g'ildirak qanday tekislikda aylanadi? Nega?

**Ko'rsatma:** g'ildirak o'qiga perpendikulyar tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

- Balandlikka sakrash mashqi bajarilmoqda. To'siq tayoqni ma'lum balandlikka o'rnatish uchun qirradi  $25\text{ cm}$  bo'lgan kub va o'lchamlri  $25\text{ cm} \times 25\text{ cm} \times 50\text{ cm}$  bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedlardan foydalanilmoqda. 1)  $125\text{ cm}$ ; 2)  $150\text{ cm}$ ; 3)  $175\text{ cm}$  balandlikka sakrash mashqlarini qanday tashkil qilsa bo'ladi?
- 4-rasmda ikkita vertikal ustun va ularning soyasi tasvirlangan. Shu ma'lumotlardan foydalanib, yorug'lik manbasi (chiroq) joylashgan nuqtani va uning gorizontall tekislikka proyeksiyasini toping va quyidagi savollarga javob bering. 1) Ustunlarning vertikaligining ahamiyati bormi? 2) Soya tushayotgan tekislikning gorizontalligining ahamiyati bormi? 3) Rasmda berilgan ma'lumotlarning hammasi ham muhimmi?

**Yechish.** 4-rasmda tegishli yasashlar keltirilgan. Yorug'lik manbasining joyini topishda ustunlarning yo'nalishi ahamiyatga ega emas, lekin ularning vertikal ekanligi muhim hisoblanadi. Agar ustunlar vertikal va soya gorizontall

tekislikka tushayotgan bo'lsa, masalani yechish uchun rasmdagi bitta ustunning soyasini va ikkinchi ustundan tushayotgan soyaning yo'nalishini bilish kifoya (4b-rasm).

10. Qalinligi  $5\text{ m}$ , yuzi  $4\text{ m}^2$  bo'lgan, kvadrat shaklidagi po'lat platforma to'rtta uchidan tros sim bilan gorizont osilgan. Har bir tros sim uzunligi  $2\text{ m}$ . Tros simlarning platformaga nisbatan og'ish burchagini toping. Balandligi  $0,9\text{ m}$ , asosining diametri  $0,6\text{ m}$  bo'lgan silindr shaklidagi bakni bu platformaga joylashtirib bo'ladimi?

**Javob:**  $45^\circ$ , bakni joylashtirib bo'ladi.

11. Suv to'rt tomonidan oqib tushadigan tom asosiga ortogonal proyeksiyalangan. Tom qirralarining proyeksiyasi to'g'ri to'rtburchak shaklidagi tom asosi burchagining bissektrisasi bo'lishini isbotlang.

12. Asosi  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakdan iborat uyga yomg'ir suvi to'rt tomonidan oqib tushadigan tom o'rnatish kerak (5-rasm).  $AB = 2a\text{ m}$ ,  $BC = 2b\text{ m}$ . Tomning hamma yoqlari asos tekisligi bilan  $\alpha$  burchak tashkil qiladi. Bu tomni yopish uchun qancha tunuka kerak bo'ladi? Bunda tom sirti yuzining  $k$  foizi miqdoridagi tunuka chiqitga ketishini hisobga oling.

**Javob:**  $4ab(1 + 0,01k) / \cos \alpha$ .

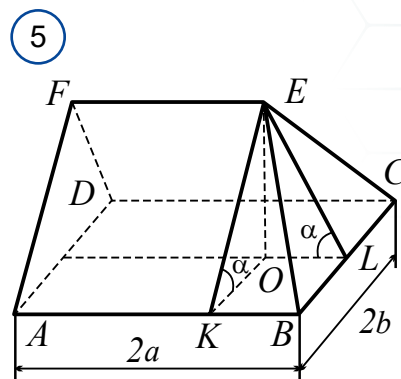
13. Shamolsiz havoda yomg'ir qiyalab yog'moqda. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi faner bo'lagi yordamida yomg'irning gorizont tekisligiga nisbatan qiyaligini qanday aniqlasa bo'ladi? Tegishli chizmani chizing.

**Ko'rsatma.** Faner bo'lagini shunday joylashtirish kerakki, uning tekisligi yomg'ir tomchilari harakat trayektoriyasi va ularning gorizont tekislikka proyeksiyasi aniqlagan tekislikka taxminan perpendikulyar bo'lsin. Shunda gorizont tekislikda yomg'ir tushmaydigan to'g'ri to'rtburchak hosil bo'ladi. So'ng tegishli kesmalarning uzunliklari o'lchanadi va ular orasidagi burchakning tangensi hisoblanadi.

14. Yuzi  $S_1$  ga, uzunligi  $n$  ga teng bo'lgan bolalar krovati ustini ikkita bir xil to'g'ri to'rtburchak shaklidagi pardalar bilan yopish kerak. Har bir pardaning yuzi  $S_2$  ga, uzunligi esa krovat uzunligiga teng. Har ikkala pardaning yuqori cheti krovat ustida parallel o'rnatilgan va krovat uzunligiga teng simga mahkamlangan. Simning krovatdan qanday balandlikda o'rnatilganligini toping. Masalani quyidagi sonli shartlarda yeching:

$n = 1\text{ m } 20\text{ cm}$ ,  $S_1 = 6000\text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 7800\text{ cm}^2$ . Tegishli chizmani chizing.

**Ko'rsatma.**  $\frac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$ . **Javob:**  $0,5\text{ m}$ .

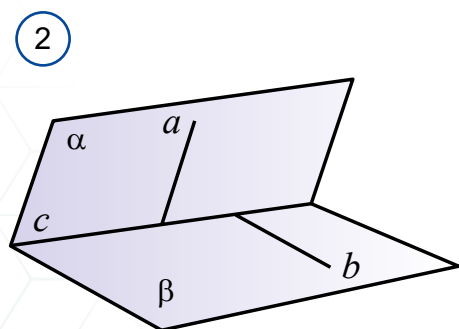
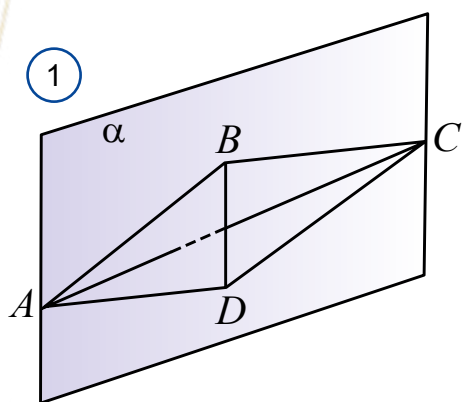




## O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

### Testlar

- Qaysi mulohaza to'g'ri?
  - Agar ikkita to'g'ri chiziqdan biri uchinchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, ikkinchi to'g'ri chiziq ham shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.
  - Agar ikkita to'g'ri chiziq uchinchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, ular parallel.
  - Agar ikkita to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ular parallel.
- $m$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotgan  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq'larga perpendikulyar, lekin  $m$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar emas.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq'lari haqida nima deyish mumkin?
  - parallel
  - kesishadi
  - ayqash
- $\alpha$  tekislik  $ABCD$  rombning  $A$  uchidan o'tadi va  $AC$  diagonaliga perpendikulyar. U holda  $BD$  diagonal ...
  - $\alpha$  tekislikka perpendikulyar
  - $\alpha$  tekislikka parallel
  - $\alpha$  tekislikda yotadi
- $a \parallel \alpha, b \perp \alpha$ . Bu holda  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziq'lari qanday bo'lishi mumkin emas?
  - kesishuvchi
  - perpendikulyar
  - parallel
- $ABCD$  parallelogramm,  $BD \perp \alpha, AC \perp \alpha$  (1-rasm). U holda  $ABCD$  nima bo'la olmaydi?
  - to'g'ri to'rtburchak
  - kvadrat
  - romb
- To'g'ri chiziq doira tekisligiga perpendikulyar bo'ladi, agar u ...
  - ikkita radiusga perpendikulyar bo'lsa
  - ikkita diametrga perpendikulyar bo'lsa
  - ikkita vatarga perpendikulyar bo'lsa.
- $\alpha \cap \beta = c, a \in \alpha, b \in \beta$  (2-rasm). Qaysi shart bajarilganda,  $\angle(ab)$  -  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi?
  - $b \perp \alpha$  bo'lsa





- B)  $a \perp c$  bo'lsa  
 C)  $a \perp c, b \perp c$  bo'lsa

8. Qaysi mulohaza to'g'ri?

- A) ikki yoqli burchakning qirrasini uning chiziqli burchagi tekisligiga perpendikulyar bo'lishi mumkin emas.  
 B) Bir tekislikka perpendikulyar bo'lgan ikkita tekislik parallel bo'lishi mumkin emas.  
 C) Bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan ikkita tekislik parallel bo'lolmaydi.

9.  $ABC \perp ABD$  (3-rasm).  $D$  nuqtadan  $ABC$  tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi ...

- A)  $ABC$  uchburchakdan tashqarida yotadi  
 B)  $AB$  tomonida yotadi  
 C)  $ABC$  uchburchak ichida yotadi

10. Qaysi mulohaza noto'g'ri?

- 1) Agar ikkita tekislikdan biri ikkinchi tekislikka perpendikulyar bo'lgan chiziqdan o'tsa, bunday tekisliklar perpendikulyar bo'ladi.  
 2) Agar tekisliklar perpendikulyar bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i shu tekisliklarning birida yotgan har qanday to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.  
 3) Berilgan ikkita tekislikning kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lgan tekislik shu tekisliklarning har biriga perpendikulyar.

11. Parallelepipedning ikki yoqli burchaklari soni nechta?

- A) 18 ta  
 B) 12 ta  
 C) 24 ta

12.  $ABC$  uchburchakda  $AN$  va  $CM$  balandliklar (4-rasm).  $DO \perp ABC$ .  $ABCD$  ikki yoqli burchakning gradus o'lchovi qaysi burchak gradus o'lchoviga teng?

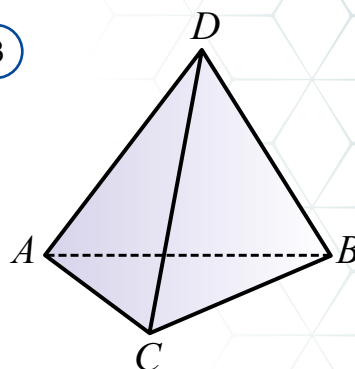
- A)  $ABD$   
 B)  $AND$   
 C)  $ACD$

13.  $AF \perp \alpha$  (5-rasm). Qaysi tengsizlik o'rinli emas?

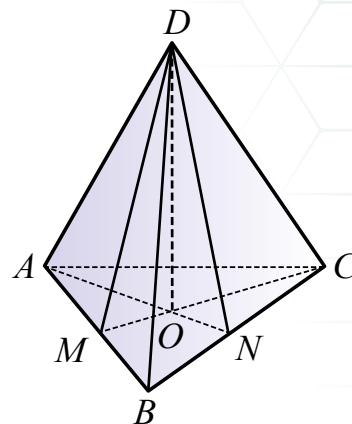
- A)  $FM > AF$   
 B)  $FA > FK$   
 C)  $AK < FK$

14.  $BF \perp ABC$  (6-rasm).  $ABCD$  qanday bo'lsa,  $CD$  va  $CF$  to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'ladi?

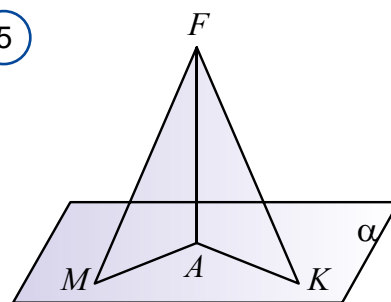
3



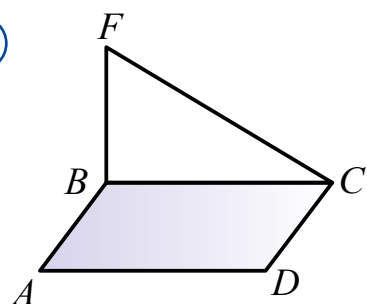
4



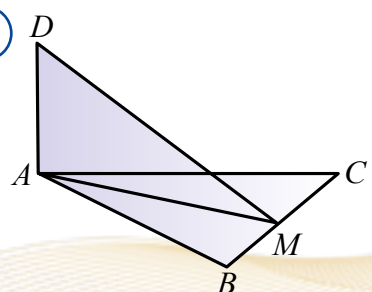
5

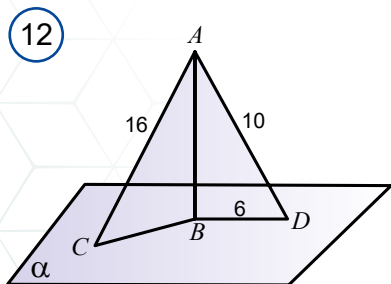
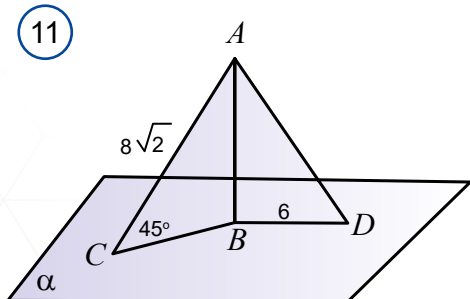
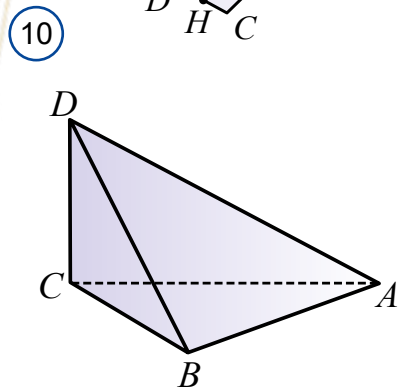
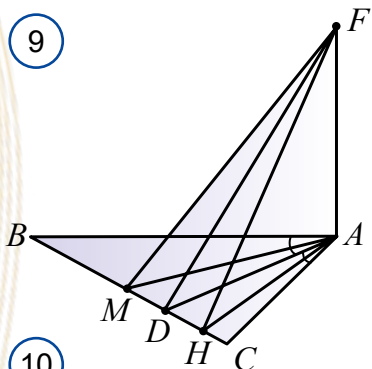
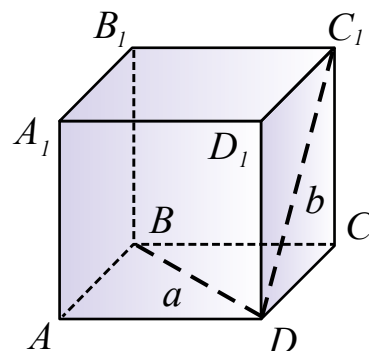
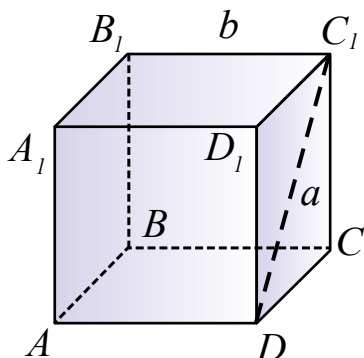
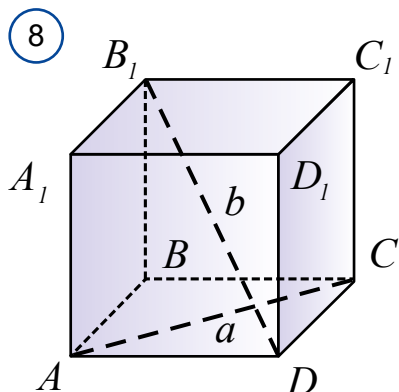


6



7





- A) to'rtburchak
- B) romb
- C) kvadrat

15.  $AD \perp ABC$  (7-rasm).  $MA$  nima bo'lsa,  $DM$  va  $BC$  to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'ladi?

- A) bissektrisa
- B) mediana
- C) balandlik

16.  $M$  nuqta  $ABC$  uchburchak uchlaridan teng masofada joylashgan.  $M$  nuqtaning  $ABC$  tekislikdagi proyeksiyasi qaysi kesmalar kesishish nuqtasidan iborat bo'ladi?

- A) uchburchak balandliklarining
- B) uchburchak bissektisalarining
- C) uchburchak tomonlariga tushirilgan o'rta perpendikulyarlarining

17.  $ABC$  uchburchakda  $AM$  – mediana,  $AD$  – bissektrisa,  $AH$  balandlik (8-rasm).  $AF \perp ABC$ .  $F$  nuqtadan  $BC$  to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qaysi kesma uzunligiga teng bo'ladi?

- A)  $FM$
- B)  $FD$
- C)  $FH$

18. 9-rasmda  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kub tasvirlangan.  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar qaysi rasmda perpendikulyar emas?

19.  $ABCD$  tetraedrda (10-rasm)  $\angle BCD = \angle ACD = 90^\circ$ .  $CD$  ga perpendikulyar bo'lgan barcha qirralarni ko'rsating.

- A)  $AB, CB, CA$
- B)  $AB, BD, AD$
- C)  $CB, CA$
- D)  $AB$

20.  $\alpha$  tekislikka  $A$  nuqtadan  $AB$  perpendikulyar,  $AC$  va  $AD$  og'malar tushirilgan (11-rasm).

$\angle ACB = 45^\circ$ ,  $AC = 8\sqrt{2}$ ,  $BD = 6$ .  $AD$  ni toping.

- A)  $2\sqrt{13}$ ;
- B) 10;
- C) 14
- D) 4

21.  $\alpha$  tekislikka  $AB$  perpendikulyar (12-rasm),  $AD$  va  $AC$  og'malar tushirilgan.  $BD = 6$ ,  $AD = 10$ ,  $AC = 16$ .  $\angle ACB$  ni toping.

- A)  $45^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $90^\circ$

### Masalalar

1.  $KS$  kesma  $ABC$  uchburchak tekisligiga perpendikulyar,  $KB$  kesma  $AB$  ga perpendikulyar.

1)  $ABC$  to'g'ri burchakli uchburchak ekanini isbotlang.

2)  $KAC$  va  $ABC$  tekisliklarning perpendikulyarligini isbotlang.

3) Agar  $AC = 14$ ,  $BC = 6$  va  $\angle KBC = 45^\circ$  bo'lsa,  $KB$  kesma uzunligini toping.

2.  $A$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikka tekislik bilan  $60^\circ$  burchak hosil qiluvchi  $AB$  va  $AC$  og'malar o'tkazilgan. Agar  $BC = AC = 6$  bo'lsa,  $AB$  ni toping.

3.  $KA$  kesma  $ABC$  tekisligiga perpendikulyar.  $M$  nuqta –  $BC$  kesmaning o'rtasi.  $KM$  to'g'ri chiziq  $BC$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va  $AB = BC$ .

1)  $ABC$  teng yonli uchburchak ekanini isbotlang.

2)  $KBC$  va  $KAM$  tekisliklarining perpendikulyarligini isbotlang.

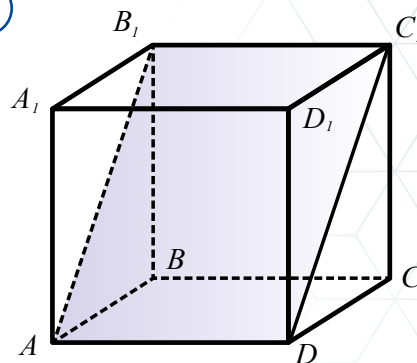
4. Agar  $BK = 8$ ,  $KA = 39$ ,  $BC = 6$  bo'lsa,  $ABC$  uchburchakning yuzini toping.

5.  $S$  nuqta to'g'ri burchakli uchburchak uchlaridan  $3\text{ cm}$  uzoqda joylashgan.  $AB = 9$  bo'lsa,  $SABC$  ikki yoqli burchakni toping.

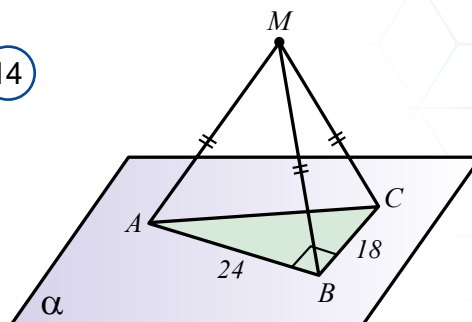
6.  $O$  nuqta  $60^\circ$  ga teng  $ABC$  burchak bissektrisasida yotadi.  $DO$  kesma  $ABC$  tekisligiga perpendikulyar va  $AB = AC$ .

1)  $D$  nuqta  $A$  va  $C$  nuqtalardan teng maso-

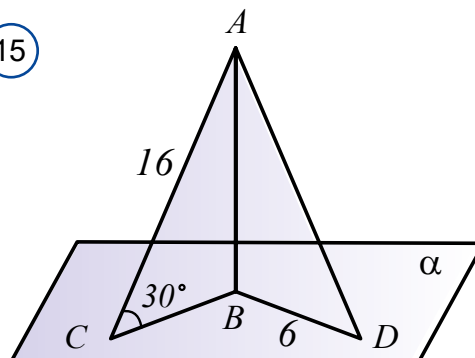
13



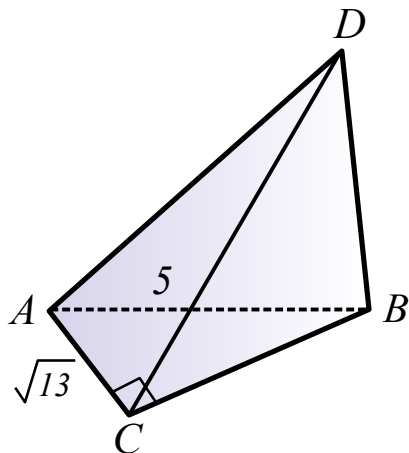
14



15



16



Geometriya qadim zamonlardan beri odamlarga dunyoni bilishga yordam berib keladi. Masalan, Yerning aylanasi qadimgi yunon olimi Eratosfen tomonidan, odamlar Yerning sharsimon shaklga ega ekanini tan olishlaridan bir necha asr oldin aniq hisoblab chiqilgan. Buning uchun Eratosfen geometrik qoidalardan foydalangan va zamonaviy o'lchovlar ko'rsatishicha, u deyarli xato qilmagan - eski va yangi o'lchovlar o'rtasidagi farq ahamiyatsiz bo'lib chiqqan. U Quyosh Syene (Afrikadagi shahar) tepasida turganida, 800 km uzoqlikda joylashgan Iskandariyadagiga qaraganda vertikal-dan  $7^\circ$  ga og'ishini aniqladi. Eratosfen Quyosh Yerning markazidan  $7^\circ$  burchak ostida ko'rinadi va shuning uchun Yer sharining aylanasi  $360 : 7 \times 800 = 41140$  km, degan xulosaga kelgan.

fada yotishini isbotlang.

2)  $DAC$  va  $DOB$  tekisliklarning perpendikulyarligini isbotlang.

3)  $AC = 12$  va  $DO = 8$  bo'lsa,  $DB$  ni toping.

7. 13-rasmda kub berilgan.  $AD = 42$ .  $AB_1C_1D$  tekislik va  $A_1D_1$  to'g'ri chiziq orasidagi masofani toping.
8.  $ABC$  va  $ADC$  teng yonli uchburchaklar umumiy  $AC$  asosga ega.  $BASD$  ikki yoqli burchak - to'g'ri. Agar  $\angle ACD = 45^\circ$  va  $\angle CAB = 60^\circ$  bo'lsa,  $DCBA$  ikki yoqli burchakni toping.
9. 14-rasmda  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $MA = MB = MC$ .  $ABC$  uchburchak tekisligi va  $M$  nuqta orasidagi masofa 8 ga teng.  $MA$  kesma uzunligini toping.
10.  $SA$  to'g'ri chiziq  $ABCD$  to'rtburchakning uchidan o'tadi va uning  $AB$  va  $AD$  tomonlariga perpendikulyar.  $SAD$  va  $ABC$  tekisliklarning perpendikulyarligini isbotlang.
11.  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  kubining qirrasini 4 ga teng.  $AB$  va  $CC_1$  to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.
12. Umumiy asosli  $ABD$  va  $ABC$  teng yonli uchburchaklar tekisliklari o'zaro perpendikulyar. Agar  $AD = \sqrt{31}$  cm,  $AB = 6$  cm,  $\angle ACB = 60^\circ$  bo'lsa,  $CD$  ni toping.
13. Perpendikulyar  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar  $l$  to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarda yotuvchi  $OA$  va  $OB$  kesmalar mos ravishda  $l$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyar va ularning umumiy uchi  $O$  nuqta  $l$  to'g'ri chiziqda yotadi. Agar  $OA = 20$  cm,  $OB : AB = 12 : 13$  bo'lsa,  $AB$  ni toping.
14.  $ABC$  teng yonli uchburchakning  $B$  uchi orqali  $AC$  asosga parallel tekislik o'tkazildi. Uchburchakning yuzi  $48$   $cm^2$  ga teng. Agar asos  $AC = 12$  cm va u tekislikdan  $5$  cm uzoqlikda joylashgan bo'lsa, uchburchak yon tomonlarining ushbu tekislikka qiyalik burchaklarini toping.
15.  $AB \perp \alpha$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,  $AC = 16$  cm,  $BD = 6$  cm (15-rasm).  $AD$  ni toping.
16.  $ABC$  uchburchakda  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 5$  cm,  $AC = \sqrt{13}$  cm (16-rasm).  $BD \perp ABC$ ,  $\angle (CD, ABC) = 30^\circ$ .  $BD$  perpendikulyar uzunligini toping.





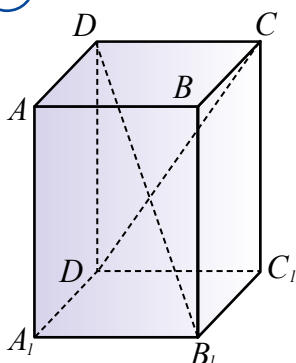
# V BOB

## TAKRORLASH

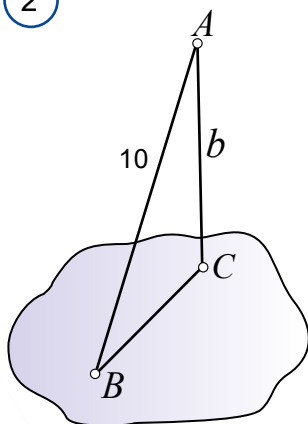
**Bu bobni o'rganish natijasida siz 10-sinfda shakllantirilgan bilim va ko'nikmalaringizni mustahkamlab olasiz**

- Tekislikka perpendikular va og'malar;
- To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak;
- Parallel to'g'ri chiziqlar va tekisliklar;
- Tekislikka parallel to'g'ri chiziq;
- Parallel tekisliklar;
- Perpendikular tekisliklar.

1



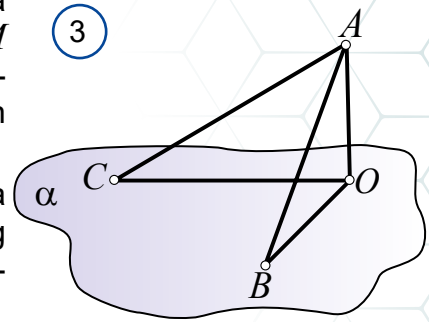
2



### 1. Tekislikka perpendikulyar va og'malar

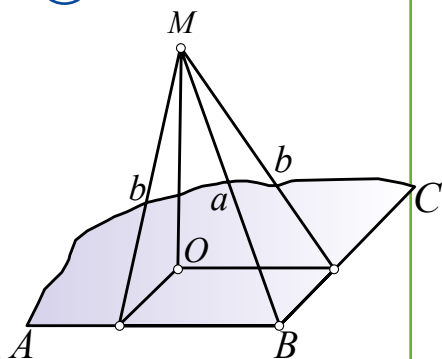
- 1-rasmda to'g'ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. 1)  $DB_1$  va  $D_1C$  to'g'ri chiziqlar kesishadimi?  $BB_1$  va  $D_1C$  to'g'ri chiziqlar-chi? 2)  $AO$  va  $B_1C_1$  to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazish mumkinmi?  $DC$  va  $DB_1$  orqali-chi?  $BC$  va  $AA_1$  orqali-chi?
- To'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari  $3\text{ cm}$ ,  $4\text{ cm}$  va  $7\text{ cm}$ . Bir uchidan chiqqan uchta qirra uchlari orqali o'tkazilgan kesimning yuzini toping.
- Muntazam prizmaning asosi tomoni  $a$  ga teng bo'lgan uchburchakdan iborat. Prizmaning balandligi  $b$  ga teng. Ostki asosi tomonlarining biri va ustki asosining shu tomon qarshisida yotgan uchi orqali tekislik o'tkazing. Hosil bo'lgan kesimning yuzini hisoblang.
- To'g'ri chiziqda olingan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazing.
- To'g'ri chiziq tashqarisida olingan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazing.
- Tekislikdan  $b\text{ cm}$  masofada turgan  $A$  nuqtadan, shu tekislikka uzunligi  $10\text{ cm}$  bo'lgan  $AB$  og'ma o'tkazilgan. Uning shu tekislikka tushirilgan  $BC$  proyeksiyasini toping (2-rasm).
- Tekislikdan tashqarida yotgan nuqtadan berilgan masofada turgan nuqtalarning berilgan tekislikdagi geometrik o'rnini toping.
- Doira markazidan uning tekisligiga perpendikulyar o'tkazilgan. Agar perpendikulyarning uzunligi  $a$  ga, doiraning yuzi  $Q$  ga teng bo'lsa, perpendikulyarning ustki uchidan aylanadagi nuqttagacha bo'lgan masofani aniqlang.
- Berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnini toping.
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  to'g'ri burchakli parallelepipedning yon qirralari  $AA_1 = 56\text{ cm}$ , asosining tomonlari:  $AB = 33\text{ cm}$  va  $AO = 40\text{ cm}$ .  $AD$  va  $B_1 C_1$  qirralaridan o'tkazilgan kesimning yuzini aniqlang.
- $O$  nuqta – tomoni  $a$  bo'lgan kvadratning markazi,  $OA$  – kvadrat tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'lib, uzunligi  $b$  ga teng.  $A$  nuqtadan kvadratning uchlorigacha bo'lgan masofani toping.
- $\alpha$  tekislikdan  $d = 4$  masofada turgan  $M$  nuqtadan shu tekislikka  $MA$ ,  $MB$  va  $MC$  og'malar o'tkazilgan. Bu og'malar bilan  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar bo'lgan  $MO$  to'g'ri chiziq orasidagi burchaklar:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .  $MA$ ,  $MB$  va  $MC$  og'malarning uzunliklarini aniqlang.

13.  $\alpha$  tekislikka biror  $M$  nuqtadan o'zaro teng uchta og'ma  $MA$ ,  $MB$  va  $MC$  o'tkazilgan.  $MA = MB$  va  $O$  nuqta  $M$  nuqtaning proyeksiyasi.  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalarning (og'malarning  $\alpha$  tekislikdagi asoslari) markazi  $O$  nuqta bo'lgan aylanada yotishini ko'rsating.
14. Tekislikka fazoning bir nuqtasidan uzunligi  $20\text{ cm}$  va  $15\text{ cm}$  bo'lgan ikki og'ma o'tkazilgan. Birinchi og'maning tekislikdagi proyeksiyasi  $16\text{ cm}$ . Ikkinchi og'maning proyeksiyasini toping.
15. Tekislikka fazodagi bir nuqtadan perpendikulyar va og'ma o'tkazilgan. Perpendikulyarning uzunligi  $6\text{ cm}$ , og'maning uzunligi  $9\text{ cm}$ . Perpendikulyarning og'maga tushirilgan proyeksiyasini toping.
16. Biror  $A$  nuqtadan berilgan  $\alpha$  tekislikka (3-rasm)  $AO$  - perpendikulyar va bir-biriga teng  $AB$  va  $AC$  og'malar o'tkazilgan. Og'malar perpendikulyar bilan  $\angle BAO = \angle CAO = 60^\circ$  li, o'zaro esa  $\angle CAB = 90^\circ$  li burchak hosil qiladi.  $AO = 1\text{ cm}$ . Og'malarning asoslari orasidagi  $BC$  masofani toping.
17. Teng yonli uchburchakning asosi va balandligi  $4\text{ cm}$  dan. Berilgan nuqta uchburchak tekisligidan  $b\text{ cm}$  masofada va uning uchlaridan baravar masofada turadi. Shu masofa topilsin.
18. Teng yonli  $ABC$  uchburchak berilgan, uning asosi  $b = 6\text{ cm}$  va yon tomoni  $a = 5\text{ cm}$ . Uchburchakka ichki chizilgan aylananing  $O$  markazidan uchburchak tekisligiga  $OK = 2\text{ cm}$  perpendikulyar o'tkazilgan.  $K$  nuqtadan uchburchakning tomonlarigacha va  $B$  uchigacha bo'lgan masofani toping.
19.  $ABC$  uchburchakda  $B$  burchak to'g'ri bo'lib, katet  $BC = a$ .  $A$  uchidan uchburchak tekisligiga  $D$  perpendikulyar o'tkazilgan.  $D$  va  $C$  nuqtalar orasidagi masofa  $f$  ga teng bo'lsa,  $D$  nuqtadan  $BC$  katetgacha bo'lgan masofani toping.
20.  $ABC$  uchburchakda  $C$  - to'g'ri burchak.  $CD$  shu uchburchak tekisligiga o'tkazilgan perpendikulyar.  $D$  nuqta  $A$  va  $B$  nuqtalar bilan tutashtirilgan. Agar  $CA = 3\text{ dm}$ ,  $BC = 2\text{ dm}$  va  $CD = 1\text{ dm}$  bo'lsa,  $AOB$  uchburchakning yuzini aniqlang.
21.  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakning  $A$  uchidan uning tekisligiga  $AK$  perpendikulyar o'tkazilgan, uning  $K$  uchi to'rtburchakning boshqa uchlaridan  $6\text{ cm}$ ,  $7\text{ cm}$  va  $9\text{ cm}$  masofada yotadi.  $AK$  perpendikulyarning uzunligini toping.
22.  $A$  va  $B$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikda yotadi.  $AC$  va  $BE$  shu tekislikka o'tkazilgan perpendikulyarlardir. Agar:  $AC = a$  va  $BD = b$  bo'lsa,  $AD$  va  $BC$  chiziqlarning kesishishini isbot qiling, hamda ularning kesishish nuqtasidan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan masofani toping.





4



Geometriya matematikaning bo'limlaridan biri deb hisoblanadi. Ammo Qadimgi Yunonistonda "matematika" va "geometriya" so'zlari o'rtasida teng belgi qo'yilgan va hatto mashhur Platon maktabining kirish qismiga "Bu yerga geometriyani bilmagan kishi kirmasin!" degan yozuv yozib qo'yilgan.

23. Berilgan to'g'ri burchak tekisligidan tashqarida yotgan  $M$  nuqta uning  $B$  uchidan  $a$  uzoqlikda, har qaysi tomonidan esa  $b$  uzoqlikda yotadi. To'g'ri burchak tekisligidan  $M$  nuqttagacha bo'lgan  $MO$  masofa qanchaga teng (4-rasm)?
24.  $\alpha$  tekislikda  $AB$  va  $CD$  parallel to'g'ri chiziq berilgan, ular orasidagi masofa  $a$  ga teng.  $\alpha$  tekislik tashqarisida  $AB$  dan  $b$  uzoqlikda va  $CD$  dan  $c$  uzoqlikda  $S$  nuqta berilgan. Agar: a)  $a = 66$ ,  $b = c = 65$ ; b)  $a = 6$ ,  $b = 25$ ,  $c = 29$  ekani ma'lum bo'lsa,  $S$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlang.
25. Agar tekislikda yotgan burchakning uchidan tekislikka burchakning tomonlari bilan teng burchaklar hosil qiladigan og'ma o'tkazilsa, bu og'maning proyeksiyasi berilgan burchakning bissektrisasi bo'lishini isbotlang.

## 2. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak

- To'g'ri burchakli parallelepiped asosining qirralari  $4\text{ cm}$  va  $3\text{ cm}$ , parallelepipedning balandligi  $5\text{ cm}$ . Uning diagonalini va diagonalning asos tekisligi bilan hosil qilgan burchagini toping.
- To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalni parallelepiped asosining tekisligi bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiladi. Asosining tomonlari  $120\text{ cm}$  va  $209\text{ cm}$ . Parallelepipedning balandligini aniqlang.
- Muntazam to'rtburchakli piramidaning balaidligi  $h$ , apofemaning asos tekisligiga og'ish burchagi  $60^\circ$ . Piramidaning yon qirralarini toping.
- Muntazam uchburchakli piramidaning yon qirradi  $b$  ga teng bo'lib, piramida asosi bilan  $30^\circ$  li burchak hosil qiladi. Piramida asosining tomonini toping.
- Og'ma  $a$  ga teng. Agar og'ma proyeksiyalar tekisligi bilan: 1)  $45^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ ; 3)  $30^\circ$  li burchak hosil qilsa, bu og'maning tekislikdagi proyeksiyasi uzunligini toping.
- Nuqta tekislikdan  $h$  uzotqlikda yotibdi. Shu nuqtadan tekislikka o'tkazilgan va  $u$  bilan: a)  $30^\circ$ ; b)  $45^\circ$ ; c)  $60^\circ$  li burchaklar hosil qilgan og'maning uzunligini toping.
- Kesmaning tekislikka tushirilgan proyeksiyasi uning o'zidan ikki marta kichik bo'lishi uchun kesmani tekislikka qanday burchak ostida og'ma qilib o'tkazish kerak?
- Tekislikdan  $a$  masofada turgan nuqtadan unga ikkita og'ma o'tkazilgan. Bu og'malar tekislik bilan  $45^\circ$  li burchak, o'zaro esa  $60^\circ$  li burchak hosil qiladi. Og'malarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
- Tekislikdan  $a$  uzoqlikda turgan nuqtadan tekislik bilan  $30^\circ$  li burchak yasovchi ikki og'ma o'tkazilgan. Ular-



ning tekislikdagi proyeksiyalari o'zaro  $120^\circ$  li burchak hosil qiladi. Og'malarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.

11.  $AB$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikda yotadi.  $B$  nuqtadan  $AB$  ga perpendikulyar  $BC$  va  $BD$  to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Ular  $\alpha$  tekislikning bir tomonida bo'lib, unga  $50^\circ$  va  $15^\circ$  ga og'ishgan.  $CBD$  burchakni toping.
12. Agar teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti  $\alpha$  tekislikda yotib, ikkinchi kateti  $\alpha$  tekislik bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiladi. Bu holda gipotenuza  $\alpha$  tekislik bilan  $30^\circ$  li burchak hosil qilishini asoslang.
13. Agar  $AB$  og'ma  $\alpha$  tekislik bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qilsa,  $\alpha$  tekislikda yotgan  $AC$  to'g'ri chiziq  $AB$  og'maning proyeksiyasi bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiladi. U holda  $\angle BAC = 60^\circ$  bo'lishini isbotlang.
14. Agar muntazam uchburchakli piramidaning balandligi asosining tomoniga teng bo'lsa, yon qirralari asos tekisligi bilan  $60^\circ$  li burchak tashkil qilishini isbotlang.

### 3. Parallel to'g'ri chiziqlar va tekisliklar

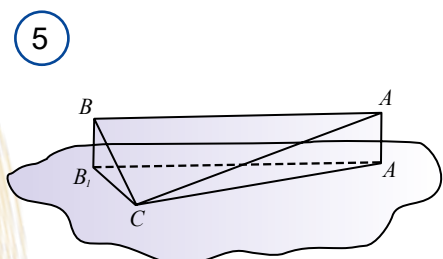
1.  $A$  va  $B$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikning tashqarisida yotibdi.  $AC$  va  $BD$  shu tekislikka perpendikulyar.  $AC = 3$  m,  $BD = 2$  m,  $CD = 24$  dm.  $A$  va  $B$  nuqtalar orasidagi masofani aniqlang.
2.  $125$  cm uzunlikdagi kesmaning uchlari tekislikdan  $100$  cm va  $56$  cm uzoqlikda. Kesma proyeksiyasining uzunligini toping.
3.  $\alpha$  tekislikning  $A$  nuqtasidan og'ma to'g'ri chiziq o'tkazilgan va unda  $B$  hamda  $C$  nuqtalar olingan.  $AB = 8$  cm va  $AC = 14$  cm.  $B$  nuqta  $\alpha$  tekislikdan  $6$  cm uzoqlikda.  $\alpha$  tekislikdan  $C$  nuqttagacha bo'lgan masofani toping.
4.  $10$  cm uzunlikdagi kesma tekislikni kesadi. Uning uchlari tekislikdan  $5$  cm va  $3$  cm uzoqlikda. Kesmaning tekislikdagi proyeksiyasining uzunligini toping.
5. Kesma tekislikni kesadi. Uning uchlari tekislikdan  $8$  cm va  $2$  cm uzoqlikda. Kesmaning o'rtasidan tekislikkacha bo'lgan masofani toping.
6. Tekislik bilan kesishmaydigan kesmaning uchlari tekislikdan  $30$  cm va  $50$  cm uzoqlikda. Shu kesmani  $3 : 7$  nisbatda bo'luvchi nuqta tekislikdan qancha uzoqlikda bo'ladi? (ikki holni qarang)
7. Muntazam uchburchak tekislikka proyeksiyalangan. Uning uchlari tekislikdan  $10$  dm,  $15$  dm va  $17$  dm uzoqlikda. Uchburchakning markazidan proyeksiyalar tekisligigacha bo'lgan masofani toping.
8. Tekislikka parallel  $AB$  kesma berilgan, uning uzunligi  $a$  ga teng.  $B$  uchi bilan ikkinchi uchining  $A_1$  proyeksiyasini tutashtiruvchi  $BA_1$  kesma tekislik bilan  $60^\circ$  li burchak hosil qiladi.  $BA_1$  kesmaning uzunligini aniqlang.
9.  $\alpha$  tekislikning  $A$  va  $B$  nuqtalaridan uning tashqarisiga o'zaro parallel kesmalar chizilgan:  $AC = 8$  cm va  $BD = 6$  cm.  $C$  va  $D$  nuqtalar orqali o'tkazilgan to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikni  $E$  nuqtada kesadi.  $AB = 4$  cm bo'lsa,  $BE$  masofani aniqlang.
10.  $a$  ga teng  $AB$  kesma  $\alpha$  tekislikda yotadi, har biri  $b$  ga teng  $AC$  va  $BD$  kesmalar  $\alpha$  tekislikda yotmaydi.  $AC$  kesma  $\alpha$  tekislikka perpendikulyar,  $AB$  ga perpendikulyar  $BD$  esa  $\alpha$  tekislik bilan  $30^\circ$  li burchak hosil qiladi.  $CD$  masofani aniqlang.

### 4. Tekislikka parallel to'g'ri chiziq

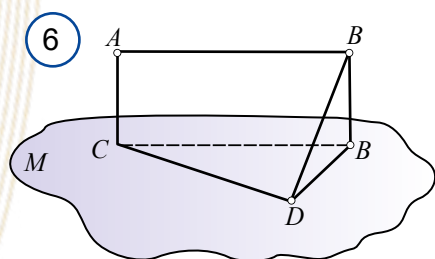
1. a) Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkazing.  
b) Berilgan nuqtadan shunday  $a$  kesma o'tkazingki, uning berilgan tekislikdagi proyeksiyasi o'ziga teng bo'lsin.
2. Muntazam uchburchakli prizma asosining  $a$  tomoni va  $b$  yon qirrasiga asosan prizmaning yon qirradi va o'qi orqali o'tkazilgan kesimning yuzini toping.
3. Tashqi  $A$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikka  $AB$  kesma o'tkazilgan. Bu kesma  $C$  nuqtada ( $A$  dan  $B$  ga

qarab) 3 : 4 nisbatda bo'lingan va undan  $\alpha$  tekislikka parallel  $CD = 2 \text{ cm}$  kesma o'tkazilgan.  $\alpha$  tekislikka  $D$  nuqta orqali  $ADE$  kesma o'tkazilgan.  $B$  va  $E$  nuqtalar orasidagi masofani toping.

4.  $AB$  va  $CD$  – bir-biri bilan kesishgan ikki tekislikdagi parallel kesmalar.  $AE$  va  $DF$  tekisliklarning kesishish chizig'iga o'tkazilgan perpendikulyarlardir.  $AD = 5 \text{ cm}$  va  $EF = 4 \text{ cm}$  bo'lsa,  $AB$  va  $CD$  to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

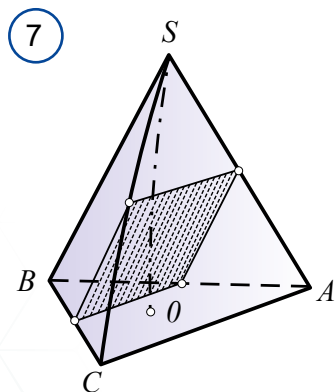


5.  $ABCD$  parallelogramning  $A$  va  $D$  uchlari  $M$  tekislikda,  $B$  va  $C$  uchlari uning tashqarisida,  $AD = 10 \text{ cm}$ ,  $AB = 15 \text{ cm}$ ,  $AC$  va  $BD$  diagonalning  $M$  tekislikdagi proyeksiyalari mos ravishda  $13,5 \text{ cm}$  va  $10,5 \text{ cm}$  ga teng. Diagonallarni aniqlang.



6. Romb tomonlarining biri orqali qarshidagi tomondan  $4 \text{ cm}$  masofada tekislik o'tkazilgan. Romb diagonalining shu tekislikdagi proyeksiyalari  $8 \text{ cm}$  va  $2 \text{ cm}$ . Romb tomonlarning proyeksiyalarini toping.

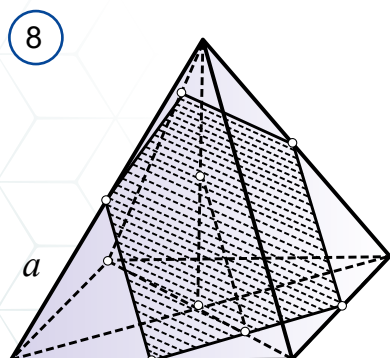
7. To'g'ri burchakli  $ABC$  uchburchakning  $C$  to'g'ri burchagi uchidan gipotenuzaga parallel va undan  $1 \text{ dm}$  masofada tekislik o'tkazilgan (5-rasm). Katetlarning bu tekislikdagi proyeksiyalari  $3 \text{ dm}$  va  $5 \text{ dm}$ , Gipotenuzaning shu tekislikdagi proyeksiyasini aniqlang.



8.  $AB$  va  $CD$  - bir-biridan  $28 \text{ cm}$  masofadagi,  $\alpha$  tekislikda yotgan ikki parallel chiziq,  $EF$  – tashqi to'g'ri chiziq,  $AB$  ga parallel va  $AB$  dan  $17 \text{ cm}$ ,  $\alpha$  tekislikdan esa  $15 \text{ cm}$  uzoqlikda,  $EF$  bilan  $CD$  orasidagi masofani toping (ikki holni qarang).

9.  $\alpha$  tekislikka parallel  $AB$  kesmaning uchlariidan o'sha tekislikka  $AC$  perpendikulyar va  $BD \perp AB$  og'ma o'tkazilgan. Agar  $AB = a$ ,  $AC = b$  va  $BD = c$  bo'lsa,  $CD$  masofani aniqlang (6-rasm).

10. Muntazam to'rtburchakli piramida asosining diagonali orqali yon qirraga parallel tekislik o'tkazilsin. Asosining tomoni  $a$  ga teng, yon qirradi esa  $b$  ga teng. Hosil bo'lgan kesimning yuzini aniqlang.



11. Muntazam uchburchakli  $SABC$  piramida asosining tomoni  $a$ , yon qirradi esa  $b$ . Bu piramidaning  $AB$  va  $BC$  qirralari o'rtasidan  $SB$  qirraga parallel tekislik o'tkazing. Hosil bo'lgan kesimning yuzini aniqlang (7-rasm).

12. Muntazam to'rtburchakli piramidaning har bir qirradi  $a$  ga teng. Asosining ikki qo'shni tomoni o'rtalaridan va balandligining o'rtasidan tekislik o'tkazing (8-rasm) hamda uning yuzini toping.

## 5. Parallel tekisliklar

1. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka parallel tekislik o'tkazing.
2. Qirrasi  $a$  ga teng bo'lgan kubga shunday tekislik o'tkazilsinki, bu tekislik ustki asosining ikki qo'shni tomoni o'rtalaridan va ostki asosining markazidan o'tsin. Kesimning perimetrini hisoblang.
3. Ikki parallel tekislik oralig'i  $8\text{ dm}$ . Uzunligi  $10\text{ dm}$  bo'lgan kesmaning uchlari shu tekisliklarga tiralgan. Kesmaning har qaysi tekislikka tushirilgan proyeksiyasini aniqlang.
4.  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklar parallel.  $\alpha$  tekislikning  $A$  va  $B$  nuqtalaridan  $\beta$  tekislikka  $AC = 37\text{ cm}$  va  $BD = 125\text{ cm}$  og'malar o'tkazilgan.  $AC$  og'maning tekisliklardan biridagi proyeksiyasi  $12\text{ cm}$ .  $BD$  og'maning proyeksiyasi uzunligini toping.
5. Ikki parallel tekislik orasiga  $4\text{ m}$  uzunlikda perpendikulyar va  $6\text{ m}$  uzunlikda og'ma o'tkazilgan. Har qaysi tekislikda ularning uchlari orasidagi masofa  $3\text{ m}$  dan. Perpendikulyar bilan og'maning o'rtalari orasidagi masofani toping.
6. Yig'indisi  $c$  ga teng bo'lgan ikki kesmaning uchlari ikki parallel tekislikka tiraladi. Ularning proyeksiyalari  $a$  va  $b$  bo'lsa, kesmalar uzunliklarini toping.
7. Ikki parallel tekislik  $\alpha$  va  $\beta$  orasiga  $AC$  va  $BD$  kesmalar o'tkazilgan ( $A$  va  $B$  nuqtalar  $\alpha$  tekislikda yotadi).  $AC = 13\text{ cm}$ ,  $BD = 15\text{ cm}$ ,  $AC$  va  $BD$  ning berilgan tekisliklardan biridagi proyeksiyalari uzunliklarining yig'indisi  $14\text{ cm}$ . Bu proyeksiyalarning uzunliklarini va tekisliklar orasidagi masofani toping.
8.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubning  $AA_1$  va  $CC_1$  qarama-qarshi qirralarining  $K$  va  $L$  o'rtalari to'g'ri chiziqlar orqali kubning  $B$  va  $D_1$  uchlari bilan tutashtirilgan. Kubning qirrasi  $a$  ga teng. Hosil qilingan  $KBLD_1$  to'rtburchakning tomonlari va diagonallari topilsin hamda uning shakli aniqlansin.
9.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubda tartib bilan quyidagi qirralarning o'rtalari tutashtirilsin:  $AA_1$ ,  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$ ,  $C_1 C$ ,  $CD$ ,  $DA$  va  $AA_1$ . Hosil bo'lgan shaklning muntazam oltiburchak ekanini isbot qiling. Agar kubning qirrasi  $a$  ga teng bo'lsa, oltiburchak yuzini toping.
10. Muntazam prizmaning asosi - tomoni  $3\text{ dm}$  li oltiburchakdan iborat. Prizmaning balandligi  $13\text{ dm}$ . Prizmaning ustki va ostki asoslarining ikki qarama-qarshi tomonlari orqali o'tkazilgan kesimning yuzini aniqlang.

## 6. Perpendikulyar tekisliklar

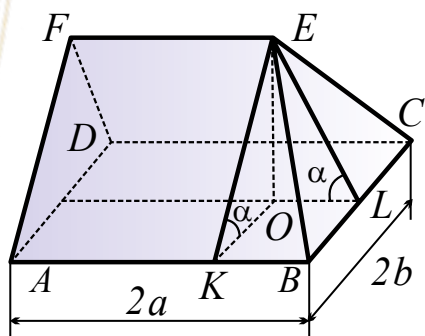
1. To'g'ri prizmaning asosi  $ABC$  teng yonli uchburchak bo'lib, uning  $AB$  va  $BC$  tomonlari  $7\text{ cm}$  dan, uchinchi –  $AC$  tomoni esa  $2\text{ cm}$ .  $AC$  tomon orqali asos tekisligi bilan  $30^\circ$  li burchak yasab, qarshidagi yon qirra bilan  $D$  nuqtada kesishuvchi tekislik o'tkazilgan. Olingan kesimning yuzini va yon qirraning  $BD$  kesmasini aniqlang.
2. Ikkita teng yonli uchburchak umumiy asosga ega, ularning tekisliklari esa bir-biriga nisbatan  $60^\circ$  og'gan. Umumiy asos  $16\text{ cm}$  ga teng. Bir uchburchakning yon tomoni  $17\text{ cm}$  ga teng, ikkinchisining yon tomonlari esa o'zaro perpendikulyar. Uchburchaklarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
3. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari  $7\text{ cm}$  va  $24\text{ cm}$ . Gipotenuza orqali o'tuvchi va uchburchak tekisligi bilan  $30^\circ$  li burchak yasovchi tekislik o'tkazilgan. Shu tekislikdan to'g'ri burchak uchigacha bo'lgan masofani aniqlang.
4.  $AB$  to'g'ri chiziq  $\alpha$  tekislikka parallel bo'lib, undan  $a$  uzoqlikda yotibdi.  $AB$  orqali  $\beta$  tekislik o'tadi, bu tekislik  $\alpha$  tekislik bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiladi.  $\beta$  tekislikda  $AB$  bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Shu to'g'ri chiziqning  $AB$



bilan  $\alpha$  tekislik orasidagi kesmasini aniqlang.

5. Berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan va shu tekislikda berilgai to'g'ri chiziq bilan kesishadigan to'g'ri chiziqlarning geometrik o'rnini toping.
7. Berilgan nuqtadan boshqa bir tekislikka perpendikulyar tekislik o'tkazing.
8.  $AB$  – o'zaro perpendikulyar bo'lgan  $\alpha$  va  $\beta$  tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'i.  $CD$  esa  $\alpha$  tekislikdagi kesma bo'lib,  $AB$  ga parallel va undan  $60\text{ cm}$  masofada turadi.  $\beta$  tekislikdagi  $E$  nuqta  $AB$  dan  $91\text{ cm}$  masofada turadi.  $E$  dan  $CD$  gacha bo'lgan masofani toping.
9.  $AB$  to'g'ri chiziq o'zaro perpendikulyar tekisliklardagi  $A$  va  $B$  nuqtalarni tutashtiradi.  $A$  va  $B$  nuqtalardan tekisliklarning kesishgan chizig'iga tushirilgan perpendikulyarlar mos ravishda  $a$  va  $b$  ga teng. Ularning asoslari orasidagi masofa esa  $c$  ga teng.  $AB$  kesmaning uzunligini va uning berilgan tekisliklarga tushirilgan proyeksiyalarining uzunliklarini aniqlang.

9



10. Munazam oltiburchakli piramidaning yon qirradi  $8\text{ dm}$  ga, asosining tomoni esa  $4\text{ dm}$  ga teng. Asosning ikki qo'shni tomoni o'rtalari orqali asosga perpendikulyar tekislik o'tkazilgan. Kesimning yuzini toping.
11. Asosi  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchakdan iborat uyga yomg'ir suvi to'rt tomonidan oqib tushadigan tom o'rnatish kerak (9-rasm).  $AB = 18\text{ m}$ ,  $BC = 12\text{ m}$ . Tomning hamma yoqlari asos tekisligi bilan  $40^\circ$  li burchak tashkil qiladi. Agar tomning  $1\text{ m}^2$  ini yopish uchun 15 dona cherepitsa ishlatilsa, tomni yopish uchun necha dona cherepitsa kerak bo'ladi?



### Amaliy kompetensiyalarni shakllantirishga doir masalalar

1. Oltiyoqli qalam va ochilgan kitob yordamida to'g'ri chiziqlar orasidagi, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi, tekisliklar orasidagi burchaklarning timsollarini ko'rsating.
2. Ikkita simmertiya o'qiga ega, 9-rasmda tasvirlangan tomdan yomg'ir suvi qaysi yo'nalishlarda oqib tushishini aniqlang.
3. Asosiga borib bo'lmaydigan minoraning balandligini aniqlash uchun qanday o'lchashlarni amalga oshirish kerak?
4. Balandligi ma'lum, lekin yaqiniga borib bo'lmaydigan binogacha bo'lgan masofani topish uchun qanday o'lchashlarni amalga oshirish kerak?
5. Nega soyalar choshgohda (tushda) yo'qoladi?
6. Daraxt tepasiga chiqmasdan uning balandligini qanday o'lchasa bo'ladi?
7. Dumaloq stolga tomoni  $a$  ga teng bo'lgan kvadrat shak-



lidagi katta dasturxon solingan. Doira markazi kvadrat markazi bilan ustma-ust tushadi. Dasturxonning uchlari uning tomonlari o'rtalariga nisbatan qanchalar polga yaqinroq?

**Javob:**  $a \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0,207 a$ .

8. Devorlarning tikligi shoqul (bir uchiga tosh bog'langan ip) bilan tekshiriladi. Agar shoqulning ipi devorga qanchalik yopishib tursa, shunchalik devor tik degan qarorga kelinadi. Bu qaror qanchali to'g'ri? Bu tekshirish usuli nimaga asoslangan?
9. Arralash sirti arralanayotgan taxtaning hamma qirralariga perpendikulyar bo'lishini ta'minlash uchun (10-rasm) taxta sirtida arralash chiziqlarini qanday belgilash kerak?
10. Xonaning qo'shni devorlarining o'zaro perpendikulyarligini tekshirish uchun Pifagor teoremasidan qanday foydalansa bo'ladi?
11. Ustunning tikligini tekshirish uchun ustun asosi bilan bitta to'g'ri chiziqda yotmagan ikki nuqtadan kuzatiladi. Bunday tekshirish usulini asoslang.

**Ko'rsatma.** *To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik alomatidan foydalaning.*

12. Borib bo'lmaydigan tepalikdagi nuqtada baland ustun o'rnatilgan. Shoqul yordamida uning tikligini qanday tekshirsa bo'ladi?

**Yechish.** *Ustunning biror vertikal to'g'ri chiziq bilan bitta tekislikda yotishini va yana boshqa vertikal to'g'ri chiziq bilan bitta (boshqa) tekislikda yotishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Shoqulni shunday oldimizga qo'yamizki, uning va ustunning yuqori uchlari hamda ko'zimiz bitta to'g'ri chiziqda yotganda, shoqul ipi va ustun bitta to'g'ri chiziqda yotsin. Bu usul quyidagilarga asoslangan: 1) vertikal ustun ixtiyoriy vertikal to'g'ri chiziq bilan bitta tekislikda yotishi kerak; 2) agar ikki parallel to'g'ri chiziqlar ikkita kesishuvchi tekisliklarda yotsa, bu to'g'ri chiziqlar tekisliklarning kesishish chizig'iga ham parallel bo'ladi.*

13. Ikki vertikal joylashgan yassi oyna berilgan. Bu oynalarning biri sirtiga parallel bo'lgan, gorizontaal nur ikkinchi oynadan birinchi oyna sirtiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq bo'yicha qaytadi. Oynalar orasidagi burchakni toping.

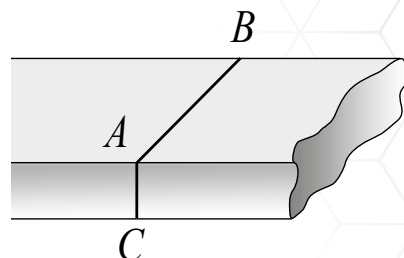
**Ko'rsatma.** *Yorug'likning qaytish qonunidan foydalaning.*

**Javob:**  $45^\circ$ .

14. Gorizontaal nur ikki vertikal goylashgan yassi oynalardan qaytmoqda. Dastlab nur birinchi oyna sirtiga parallel bo'lgan bo'lsa, ikki marta akslanish natijasida ikkinchi oyna tekisligiga parallel bo'lib qolmoqda. Oynalar orasidagi burchakni toping.

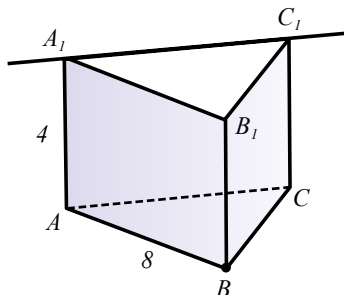
**Javob:**  $60^\circ$ .

10

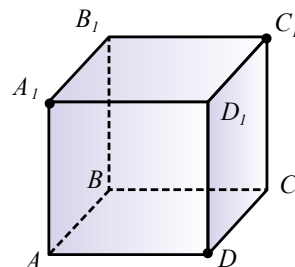


## O'ZINGIZNI SINAB KO'RING

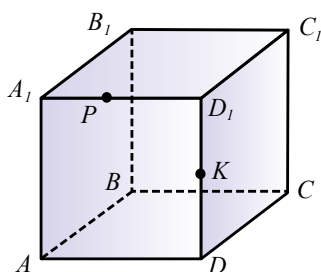
1. Muntazam uchburchakli prizma berilgan. Uning  $A_1C_1$  qirrasini va  $B$  uchidan o'tuvchi kesimi yuzini toping.



2. Kubning to'la sirti 12 ga teng. Uning  $A_1, C_1$  va  $D$  uchidan o'tuvchi kesimi yuzini toping.

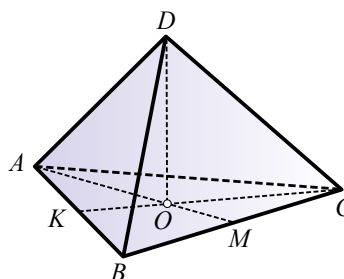


3.  $PK$  to'g'ri chiziq qaysi to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadi?



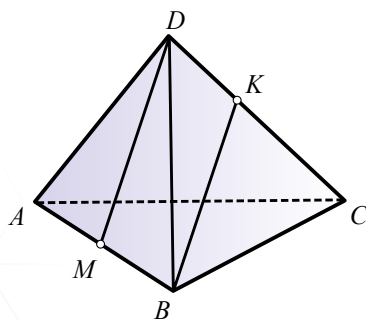
- A.  $A_1B_1$  va  $DC$
- B.  $A_1A_1$  va  $AD$
- C.  $A_1B_1$  va  $AD$
- D.  $D_1C_1$

4.  $AOD$  tekislik  $BDC$  tekislikni qaysi to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi?



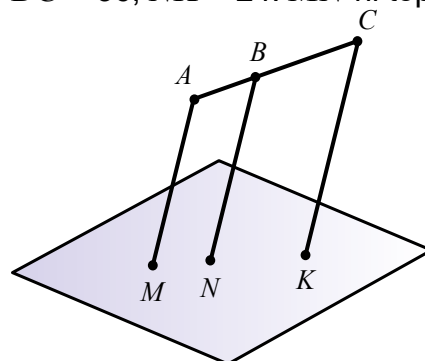
- A.  $DO$
- B.  $AM$
- C.  $DM$
- D.  $DC$

5. To'g'ri mulohazani ko'rsating:  $MD$  to'g'ri chiziq ...

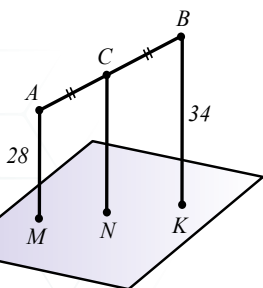


- A.  $BK$  to'g'ri chiziqni kesib o'tadi
- B.  $BK$  to'g'ri chiziqqa parallel
- C.  $BK$  to'g'ri chiziqqa ayqash
- D.  $BKC$  tekislik bilan kesishmaydi

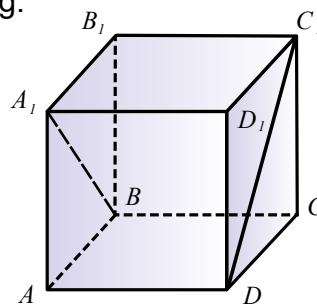
6. Rasmda  $AM \parallel BN \parallel CK$ ,  $AB = 18$ ,  $BC = 36$ ,  $NK = 24$ .  $MN$  ni toping.



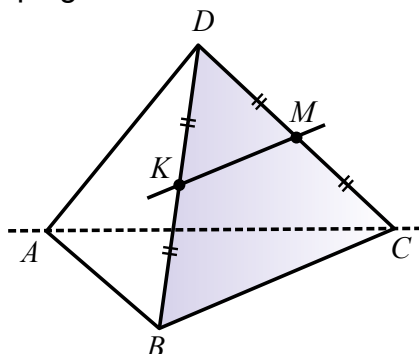
7. Rasmda  $AM \parallel CN \parallel BK$ ,  $AM = 28$ ,  $BK = 34$ .  $CN$  ni toping.



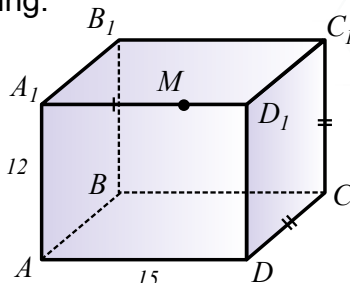
8. Kub berilgan.  $BA_1$  va  $DC_1$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



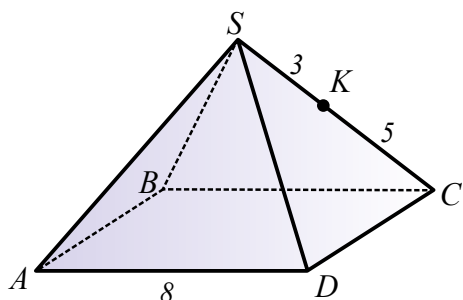
9. Muntazam tetraedr berilgan.  $KM$  va  $AC$  to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.



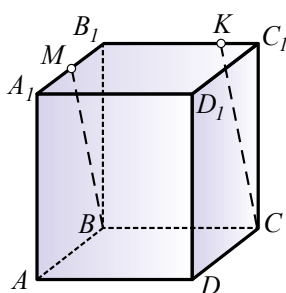
10. To'g'ri burchakli parallelepiped berilgan.  $DC = CC_1$ ,  $A_1M : MD_1 = 2 : 1$ ,  $AA_1 = 12$ ,  $AD = 15$ . Parallelepipedning  $CDM$  tekislik bilan kesimi perimetrini toping.



11.  $SABCD$  – muntazam piramida.  $KC = 5$ ,  $KS = 3$ ,  $AD = 8$ . Piramidaning  $ADK$  tekislik bilan kesimi perimetrini toping.

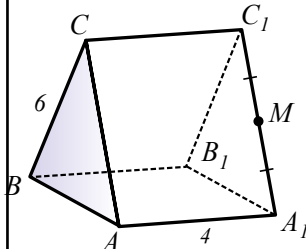


12.  $AOD$  tekislik  $BDC$  tekislikni qaysi to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi?



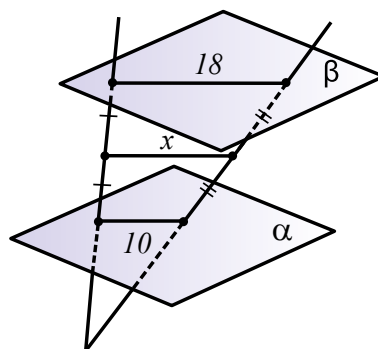
- A.  $AA_1D_1$  tekislikni kesib o'tadi
- B.  $BM$  to'g'ri chiziqqa parallel
- C.  $AA_1B_1$  tekislikka parallel
- D.  $ABA_1$  tekislikni kesib o'tadi

13. Muntazam prizma berilgan.  $BC = 6$ ,  $AA_1 = 4$ . Prizmaning  $BMC$  tekislik bilan kesimi perimetrini toping.

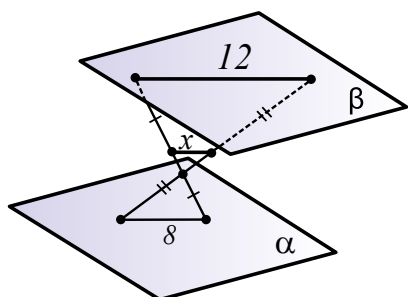


- A.  $AA_1D_1$  tekislikni kesib o'tadi;
- B.  $BM$  to'g'ri chiziqqa parallel;
- C.  $AA_1B_1$  tekislikka parallel;
- D.  $ABA_1$  tekislikni kesib o'tadi.

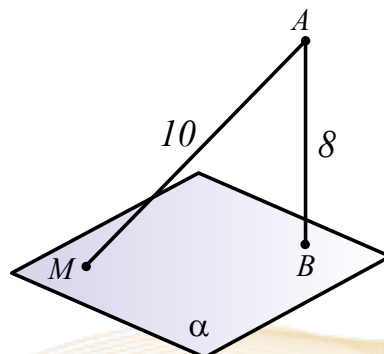
14.  $\alpha \parallel \beta$ .  $x = ?$



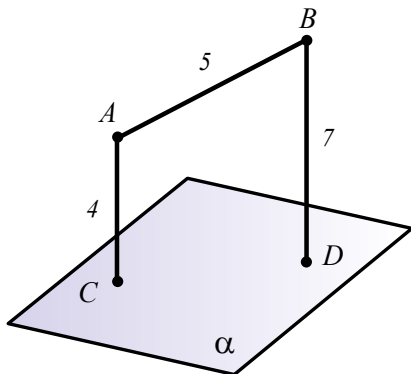
15.  $\alpha \parallel \beta$ .  $x = ?$



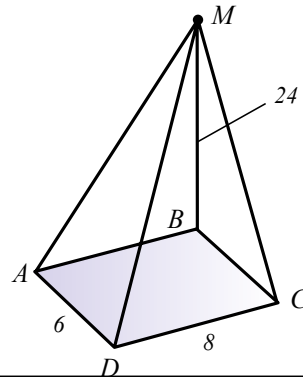
16.  $AB \perp \alpha$ .  $MB = ?$



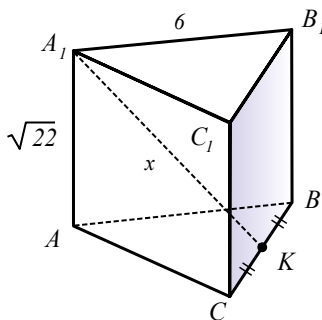
17.  $AC \perp \alpha, BD \perp \alpha. CD = ?$



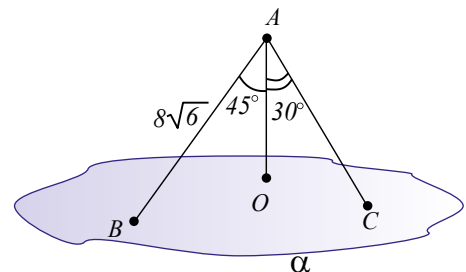
18.  $ABCD$  to'g'ri to'rtburchak.  $MB \perp AB, MB \perp BC. MD = ?$



19. Muntazam piramida berilgan.  $A_1K$  ni toping.



20.  $AO \perp \alpha, AB = 8\sqrt{6}, \angle SAO = 45^\circ. \angle CAO = 30^\circ. OC = ?$



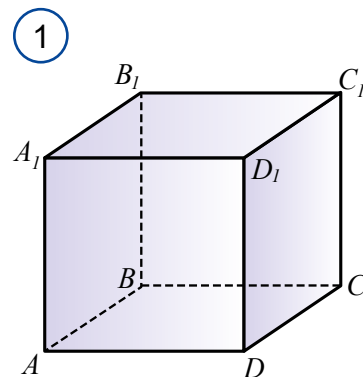
21. Kubning bir uchidan chiqqan uch qirrasining uchlaridan o'tadigan tekislik o'tkazing. Kubning qirradi  $a$  ga teng. Kesimning yuzini hisoblang.
22. Teng tomonli uchburchakning tomoni  $3 \text{ cm}$ . Uchburchakning har bir uchidan  $2 \text{ cm}$  uzoqlikdagi nuqta bilan uning tekisligi orasidagi masofani toping.
23. Teng yonli uchburchakning  $AC$  asosi  $\alpha$  tekislikda yotadi. Agar  $AB = 5, AC = 6$  va uchburchak tekisligi bilan  $\alpha$  tekislik orasidagi ikki yoqli burchak  $60^\circ$  ga teng bo'lsa,  $b$  nuqtadan  $\alpha$  tekislikkacha bo'lgan masofani toping.
24.  $10 \text{ cm}$  uzunlikdagi kesma tekislikni kesadi. Uning uchlari tekislikdan  $3 \text{ cm}$  va  $2 \text{ cm}$  uzoqlikda. Berilgan kesma bilan tekislik orasidagi burchakni toping.
25.  $ABCD$  trapetsiyaning  $DA$  asosi  $\alpha$  tekislikda,  $CB$  asosi esa undan  $5 \text{ cm}$  narida. Agar  $DA : CB = 7 : 3$  bo'lsa,  $P$  tekislikdan shu trapetsiya diagonallarining kesishgan  $M$  nuqtasigacha bo'lgan masofani toping.
26.  $AB$  kesma  $\alpha$  tekislikka parallel.  $AC$  va  $BD$  kesmalar  $\alpha$  tekislikka o'tkazilgan ikki teng og'ma bo'lib,  $AB$  kesmaga perpendikulyar va undan turli yo'nalishda o'tkazilgan.  $AB = 2 \text{ cm}$  bo'lib,  $\alpha$  tekislikdan  $7 \text{ cm}$  uzoqlikda turadi,  $AC$  va  $BD$  kesmalarining har biri  $8 \text{ cm}$  dan.  $CD$  masofani aniqlang.
27.  $AB$  to'g'ri chiziq –  $90^\circ$  ga teng ikki yoqli burchakning qirradi.  $AA_1$  va  $BB_1$  to'g'ri chiziqlar bu burchakning turli yoqlarida te-



gishli.  $AA_1 \parallel BB_1$ ,  $BB_1$  kesma  $AB$  ga perpendikulyar.  $AA_1$  va  $BB_1$  to'g'ri chiziqlarning kesishishini isbotlang. Ushbu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

28.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubda  $AB_1 C_1 D$  va  $A_1 D_1 C B$  kesimlar tekisliklari orasidagi chiziqli burchakni yasang va gradus o'lchovini toping.
29. Muntazam tetraedrning qirrasi  $a$  ga teng.  $AB$  qirradan o'tib, uni 1 : 3 nisbatda bo'ladigan va  $BC$  qirraga parallel tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan kesimni yasang. Kesimning yuzini toping.
30. To'g'ri parallelepipedning asosi diagonallari 48 va 20 cm bo'lgan rombdan iborat. Parallelepipedning katta diagonali asos tekisligi bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiladi. Uning to'la sirtining yuzini toping.
31. Piramidaning asosi yuzi  $16\sqrt{3}$  ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Ikki yon yoqlari asos tekisligiga perpendikulyar, uchinchi esa asos bilan  $45^\circ$  li burchak tashkil qiladi. Piramida qirralarining uzunligini va yon sirtining yuzini toping.
32. To'g'ri prizma asosi katetlari 12 cm va 9 cm bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat. Agar prizmaning yon qirrasidan o'tuvchi eng kichik kesim - kvadrat bo'lsa, uning yon sirti yuzini toping.
33. Piramidaning asosi kichik diagonali  $d$  va o'tmas burchagi  $\alpha$  bo'lgan rombdan iborat. Piramida asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar  $\beta$  ga teng. Piramidaning yon sirti yuzini toping.
34.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubining qirrasi  $a$  ga teng. Kubni  $AA_1$ ,  $AD$ ,  $A_1 B_1$  qirralarining o'rtasidan o'tadigan tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimni yasang.
35. 1-rasmga ko'ra, berilgan to'g'ri chiziqlarning o'zaro qanday joylashganligini aniqlang va ularning orasiga mos ( $\otimes$  - kesishish,  $\parallel$  - parallellik,  $\perp$  - ayqashlik) belgilarni qo'ying.

To'g'ri chiziqlar	$AA_1$	$BC_1$	$CC_1$	$CB_1$	$AB_1$
$AD$					
$A_1 B_1$					
$AB$					
$A_1 D$					
$BD$					



36. 1- rasmga ko'ra berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro qanday joylashganligini aniqlang va ularning orasiga mos ( $\otimes$  - kesishish,  $\parallel$  - parallellik,  $\perp$  - ayqashlik va  $\subset$  - tegishli) belgilarni qo'ying.

To'g'ri chiziqlar\ Tekisliklar	$AA_1$	$BC_1$	$CC_1$	$CB_1$	$AB_1$
$ADD_1$					

$AA_1B_1$					
$ABD$					
$AA_1D$					
$BCD$					

37. Berilgan tekislikka bir nuqtadan perpendikulyar va og'ma o'tkazilgan. Ularning orasidagi burchak  $45^\circ$ . Perpendikulyarning uzunligi  $a$  ga teng. Og'maning uzunligini toping.
38. Tekislikka berilgan nuqtadan, har biri  $2\text{ cm}$  ga teng ikki og'ma o'tkazilgan. Ular orasidagi burchak  $60^\circ$ , proyeksiyalari orasidagi burchak esa to'g'ri burchak. Berilgan nuqta bilan tekislik orasidagi masofani toping.
39. Berilgan tekislikka bir nuqtadan ikkita teng og'ma o'tkazilgan. Ular orasidagi burchak  $60^\circ$ , proyeksiyalari orasidagi burchak - to'g'ri. Har bir og'ma va uning proyeksiyasi orasidagi burchaklarni toping.
40. To'g'ri burchakli  $ABC$  uchburchakning katetlari -  $15\text{ m}$  va  $20\text{ m}$ . To'g'ri burchakning  $C$  uchidan bu uchburchak tekisligiga perpendikulyar qilib  $CD = 35\text{ m}$  kesma o'tkazilgan.  $D$  nuqtadan  $AB$  gipotenuzagacha bo'lgan masofani toping.
41. Uchburchakning tomonlari:  $10\text{ cm}$ ,  $17\text{ cm}$  va  $21\text{ cm}$ . Shu uchburchakning katta burchagi uchidan uning tekisligiga  $16\text{ cm}$  uzunlikda perpendikulyar o'tkazilgan. Uning uchlaridan uchburchakning katta tomonigacha bo'lgan masofalarni aniqlang.
42.  $ABC$  uchburchakning  $A$  uchidan uning tekisligi tashqarisida  $AD$  to'g'ri chiziq o'tkazilgan, u to'g'ri chiziq  $AB$  va  $AC$  tomonlar bilan teng o'tkir burchaklar hosil qiladi. Agar  $AB = 51\text{ m}$ ,  $AC = 34\text{ m}$  va  $BC = 30\text{ m}$  bo'lsa,  $AD$  to'g'ri chiziqning uchburchak tekisligiga tushirilgan proyeksiyasi  $BC$  tomonni qanday bo'laklarga bo'ladi?
43. Tekislikdan  $a$  uzoqlikda turgan nuqtadan ikki og'ma o'tkazilgan, bu og'malar tekislik bilan  $45^\circ$  li va  $30^\circ$  li burchak, o'zaro esa to'g'ri burchak hosil qiladi. Og'malarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
44. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel tekislik o'tkazing. Bunday tekisliklardan nechta o'tkazish mumkin?
45. Tekislik va unga parallel to'g'ri chiziq berilgan. Tekislikda olingan nuqta orqali, berilgan to'g'ri chiziqqa parallel qilib, usha tekislikda to'g'ri chiziq o'tkazilsin.
46. Ikki parallel tekislik orasidagi ikki to'g'ri chiziq kesmasining uzunliklari  $51\text{ cm}$  va  $53\text{ cm}$ . Ularning bu tekisliklardan biriga tushirilgan proyeksiyalarining nisbati  $6 : 7$  kabi. Berilgan tekisliklar orasidagi masofani aniqlang.
47. Fazoda ikki to'g'ri burchak shunday joylashganki, ularning mos tomonlari bir-biriga parallel va bir xilda yo'nalgan hamda ularning uchlarini tutashtiruvchi kesmaga perpendikulyardir. Bu kesmaning uzunligi  $a$  ga teng. Bir burchakning bir tomonida uning uchidan boshlab  $b$  kesma ajratilgan. Ikkinchi burchakning, unga parallel bulmagan tomonida  $c$  kesma ajratilgan. Shu kesmalarning uchlari orasidagi masofani aniqlang.
48. Yon yoqlari kvadrat bo'lgan muntazam oltiburchakli prizma ostki asosining bir tomoni va ustki asosining unga qarshi yotgan tomoni orqali o'tgan tekislik bilan kesilgan. Asosning tomoni  $a$  ga teng. Hosil qilingan kesimning yuzini aniqlang.
49.  $ABC$  uchburchak tomonlari:  $AB = 9$ ,  $BC = 6$  va  $AC = 5$ .  $AC$  tomon orqali uchburchak tekisligi bilan  $45^\circ$  li burchak hosil qiluvchi  $\alpha$  tekislik o'tadi.  $\alpha$  tekislik bilan  $B$  uchi orasidagi masofani toping.
50. Berilgan to'g'ri chiziqdan ikkinchi bir tekislikka perpendikulyar tekislik o'tkazing. Nechta shunday tekislik o'tkazish mumkin?

## I. Planimetriya

### 1.1. Burchaklar va to'g'ri chiziqlar

#### Parallel va kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

Tekislikda ikki to'g'ri chiziq yoki parallel (1-rasm) yoki kesishuvchi (2-rasm) bo'lishi mumkin.

#### Qo'shni va vertikal burchaklar

Qo'shni burchaklar yig'indisi  $180^\circ$  ga teng (3-rasm). Vertikal burchaklar teng (4-rasm).

**Ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesganda hosil bo'ladigan burchaklar (5-rasm):**

1)  $\angle 1$  va  $\angle 5$ ,  $\angle 2$  va  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  va  $\angle 7$ ,  $\angle 4$  va  $\angle 8$  - mos burchaklar;

2)  $\angle 3$  va  $\angle 6$ ,  $\angle 4$  va  $\angle 5$  - **ichki bir tomonli burchaklar**;

3)  $\angle 3$  va  $\angle 5$ ,  $\angle 4$  va  $\angle 6$  - **ichki almashinuvchi burchaklar** deb ataladi

#### To'g'ri chiziqlarning parallellik alomatlari

Agar ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesganda (5-rasm),

1) ichki almashinuvchi burchaklar teng bo'lsa yoki;

2) mos burchaklar teng bo'lsa yoki;

3) ichki bir tomonlama burchaklar yig'indisi  $180^\circ$  ga teng bo'lsa, berilgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi.

#### Parallel to'g'ri chiziqlarning xossalari:

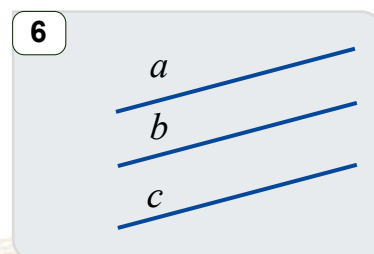
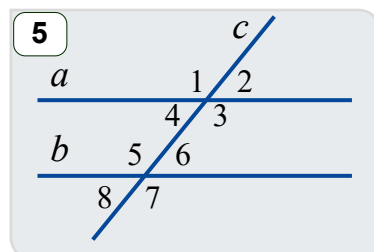
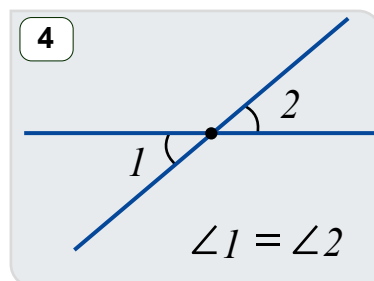
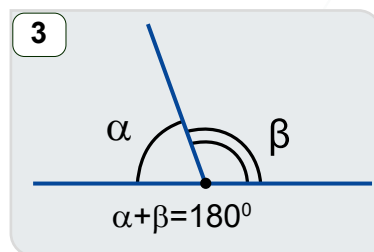
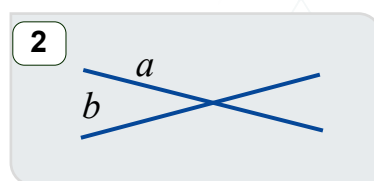
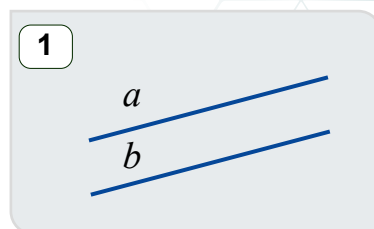
Agar ikki parallel to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib o'tsa (5-rasm):

1) ichki almashinuvchi burchaklar teng bo'ladi;

2) mos burchaklar teng bo'ladi;

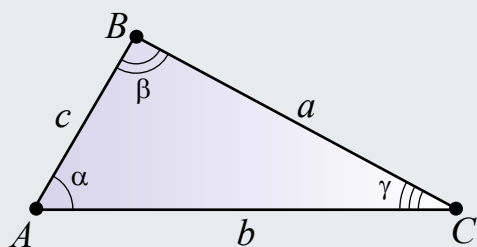
3) ichki bir tomonlama burchaklar yig'indisi  $180^\circ$  ga teng bo'ladi.

Agar  $a \parallel b$  va  $a \parallel c$  bo'lsa,  $b \parallel c$  bo'ladi (6-rasm).



## 1.2. Uchburchaklar

1



### 1°. Asosiy tushunchalar

Tekislikda bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtalarning har ikkitasini kesmalar bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan shaklga *uchburchak* deyiladi. Nuqtalar uchburchakning *uchlari*, kesmalar esa *tomonlari* deyiladi. Belgilanishi:  $A, B, C$  – uchlar,  $a, b, c$  – tomonlar (*1-rasm*).

Uchburchak uchta ichki burchakka ega:  $\angle BAC$ ,  $\angle CBA$ ,  $\angle ACB$ .

Belgilanishi:  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Uchburchakning o'rta chizig'i – uning ikkita tomoni o'rtalarini tutashtiruvchi kesma.

*Mediana* – uchburchak uchini uning qarshisidagi tomon o'rtasi bilan tutashtiruvchi kesma. Uchburchakda 3 ta mediana bo'lib, ular  $m_a, m_b, m_c$  kabi belgilanadi.

*Bissektrisa* – uchburchak uchini uning qarshisidagi tomon bilan tutashtiruvchi va shu uchdagi burchak bissektrisasida yotuvchi kesma. Uchburchakda uchta bissektrisa bo'lib, ular  $l_a, l_b, l_c$  kabi belgilanadi.

*Balandlik* – uchburchak uchidan uning qarshisidagi tomon yotgan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar. Uchburchakda uchta balandlik bo'lib, ular  $h_a, h_b, h_c$  kabi belgilanadi. *O'rta chiziq* – ikki tomon o'rtalarini tutashtiruvchi kesma. O'rta chiziqlar soni ham 3 ta.

*Perimetr* – uchala tomon uzunliklari yig'indisi. Belgilanishi:  $P$ .

Uchburchaklar tomonlariga qarab uch turga ajratiladi: a) teng tomonli ( $a = b = c$ ); b) teng yonli ( $A, B, C$  larning qandaydir ikkisi teng); c) turli tomonli ( $A, B, C$  larning hech qaysi ikkisi teng emas).

Uchburchakning uchala tomoniga urinib o'tuvchi aylana unga ichki chizilgan *aylana* deyiladi (bunday aylana mavjud va yagona). Ichki chizilgan aylana radiusi  $r$  orqali belgilanadi.

Uchburchakning uchala uchidan o'tuvchi aylana unga *tashqi chizilgan aylana* deyiladi va uning radiusi  $R$  orqali belgilanadi (bunday aylana mavjud va yagona).

### 2°. Asosiy munosabatlar

1)  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Uchburchak ichki burchaklari yig'indisi  $180^\circ$  ga teng.

2) Uchala mediana bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta medianani 2 : 1 nisbatda bo'ladi. Mediana uchburchakni ikkita yuzlari teng uchburchaklarga ajratadi. Medianalar

uzunliklari:  $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ ;  $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ ;  $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ .

formulalardan topiladi.

3) Uchala bissektrisa bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta ichki chizilgan aylana markazi bo'ladi. Bissektrisa o'zi tushirilgan tomonni qolgan tomonlarga proporsional bo'laklarga ajratadi (*2-rasm*).

$BD$  bissektrisa bo'lsa,  $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$ .



Bissektrisa uzunliklarini ushbu formulalardan topish mumkin.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}; \quad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \sqrt{p(p-c)}, \text{ bu yerda } p = a+b+c.$$

4) Uchburchak balandliklari yoki ularning davomlari bir nuqtada kesishadi.

Balandlik uzunliklarini

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c};$$

formulalardan topish mumkin.

Bu yerda  $S$  – uchburchak yuzi.

5) Uchburchak tomonlarining o'rtta perpendikulyari bir nuqtada kesishadi. Bu nuqta uchburchakka *tashqi chizilgan aylana markazi* bo'ladi.

6) Uchburchakning o'rtta chizig'i uchinchi tomonga parallel va uning yarmiga teng.

7) Sinuslar teoremasi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

8) Kosinuslar teoremasi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

9) Uchburchak yuzini hisoblash formulalari:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta;$$

10) Geron formulasi:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \quad S = \frac{abc}{4R}; \quad S = pr.$$

### 3°. Muhim xususiy hollar

a) To'g'ri burchakli uchburchak (3-rasm).

$\angle \gamma = 90^\circ$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $AC$  va  $BC$  – katetlar,  $AB$  – gipotenuza.

Pifagor teoremasi:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

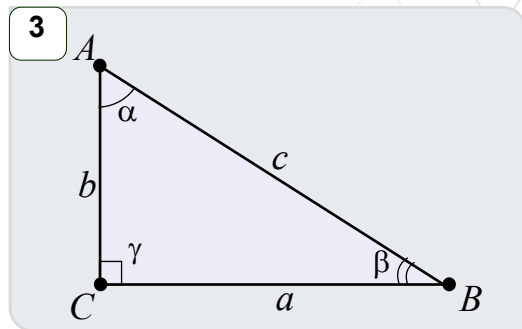
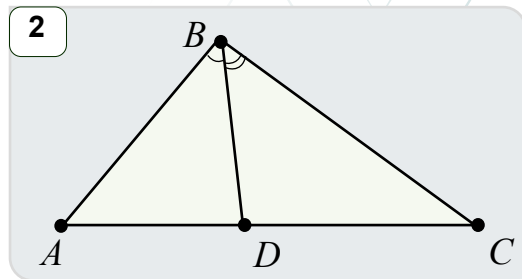
$$S = \frac{1}{2}ab; \quad R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b+c}{2};$$

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha; \quad \frac{a}{c} = \cos \beta; \quad \frac{b}{c} = \sin \beta; \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha;$$

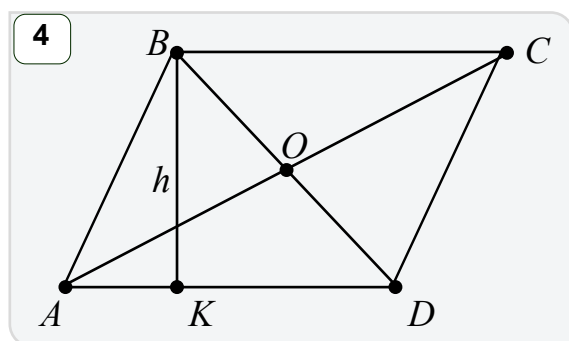
$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \beta; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta.$$

b) Teng tomonli uchburchak

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



### 1.3. To'rtburchaklar



#### 1°. Parallelogramm

Qarama-qarshi tomonlari parallel bo'lgan to'rtburchak *parallelogramm* deyiladi (4-rasm).

Qo'shni bo'lmagan uchlarni tutashtiruvchi kesma *diagonal* deyiladi.

$AB$  va  $CD$ ;  $AD$  va  $BC$  parallel tomonlar;  
 $BD$  va  $AC$  diagonal.

#### Asosiy xossalar va munosabatlar:

- 1) Diagonallar kesishish nuqtasi parallelogrammning simmetriya markazi bo'ladi.
- 2) Qarama-qarshi tomonlarning uzunliklari o'zaro teng:  
 $AB = CD$  va  $AD = BC$ ;
- 3) Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari o'zaro teng:  
 $\angle BAD = \angle BCD$  va  $\angle ABC = \angle ADC$ ;
- 4) Qo'shni burchaklar yig'indisi  $180^\circ$  ga teng;
- 5) Diagonallar kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi:  $BO = OD$  va  $AO = OC$ ;
- 6) Tomonlari kvadratlarining yig'indisi diagonalari kvadratlarining yig'indisiga teng:  
 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$  yoki  $2 \cdot (AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$ ;
- 7) Parallelogramm yuzi: a)  $S = ah_a$ , bu yerda:  $a = AD$  tomon,  $h_a = BK$  – balandlik;  
b)  $S = ab \sin \alpha$ , bu yerda:  $b = AB$  – tomon,  $\alpha = \angle BAD$  –  $AB$  va  $AD$  tomonlar orasidagi burchak.

#### 2°. Romb

Barcha tomonlari o'zaro teng bo'lgan parallelogramm *romb* deyiladi.

Parallelogramm uchun o'rinli bo'lgan barcha xossalar romb uchun ham o'rinli.

#### Rombning qo'shimcha xossalari.

- 1) Romb diagonalari o'zaro perpendikulyar.
- 2) Romb diagonalari ichki burchaklarning bissektrisalari bo'ladi.
- 3) Romb yuzi  $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ , bu yerda:  $d_1, d_2$  – romb diagonalari.

#### 3°. To'g'ri to'rtburchak

Barcha burchaklari  $90^\circ$  ga teng bo'lgan parallelogramm *to'g'ri to'rtburchak* deyiladi.

- 1) To'g'ri to'rtburchak diagonalari o'zaro teng.
- 2) To'g'ri to'rtburchak yuzi  $S = a \cdot b$ , bu yerda:  $a$  va  $b$  – to'g'ri to'rtburchakning qo'shni tomonlari.

#### 4°. Kvadrat

Barcha tomonlari o'zaro teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak *kvadrat* deyiladi.

Romb va to'g'ri to'rtburchaklar uchun o'rinli bo'lgan barcha xossalar kvadrat uchun ham o'rinli.

Agar  $a$  – kvadrat tomoni,  $d$  esa diagonal bo'lsa:  $S = a^2$ ;  $S = \frac{d^2}{2}$ ;  $d = a\sqrt{2}$ .

## 5°. Trapetsiya

Asoslar deb ataluvchi ikki tomoni o'zaro parallel va yon tomonlar deb ataluvchi qolgan ikki tomoni esa parallel bo'lmagan to'rtburchak *trapetsiya* deyiladi.

Yon tomonlar o'rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning *o'rta chizig'i* deyiladi.

### Asosiy xossalar:

1) trapetsiya o'rta chizig'i asoslarga parallel va asoslar yig'indisining yarmiga teng bo'ladi;

2) trapetsiya yuzi  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ , bu yerda  $a$  va  $b$  — asoslar,  $h$  esa balandlik (5-rasm).

### 1.4. Aylana, doira

1°. Musbat son  $R$  va tekislikda  $O$  nuqta berilgan bo'lsin.  $O$  nuqtadan  $R$  masofada joylashgan nuqtalardan tashkil topgan shakl *aylana* deyiladi.  $O$  nuqta *aylana markazi*, markaz bilan aylanadagi nuqtani tutashtiruvchi kesma *radius*,  $R$  son esa *radius uzunligi* deyiladi. Aylanadagi ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma *vatar*, markazdan o'tuvchi vatar esa *diametr* deyiladi.

Tekislikning aylana bilan chegaralangan chekli qismi *doira* deb ataladi.

### Asosiy munosabatlar:

1)  $D = 2R$ , bu yerda:  $D$  – diametr uzunligi.

2)  $L = 2\pi R$  – aylana uzunligi.

3)  $S = \pi R^2$  – doira yuzi.

4)  $AB$  va  $CD$  vatarlar  $K$  nuqtada kesishsa (6-rasm),  $AK \cdot KB = CK \cdot KD$  munosabat bajariladi.

5) Vatarni teng ikkiga bo'luvchi diametr shu vatarga perpendikulyardir;

6) Teng vatarlar markazdan teng masofalarda joylashgan va, aksincha, markazdan teng masofada joylashgan vatarlar o'zaro teng;

### 2°. Urinma

Aylana (yoki doira) bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq *urinma* deyiladi. Nuqta esa *urinish nuqtasi* deyiladi (7-rasm).

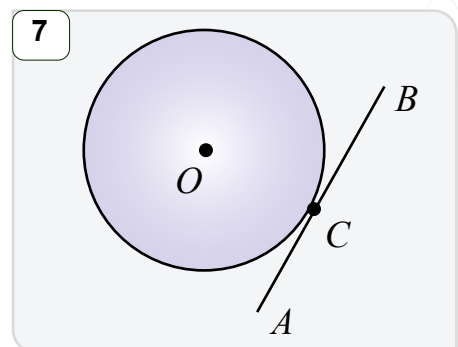
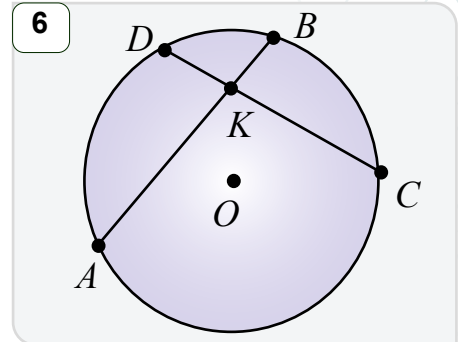
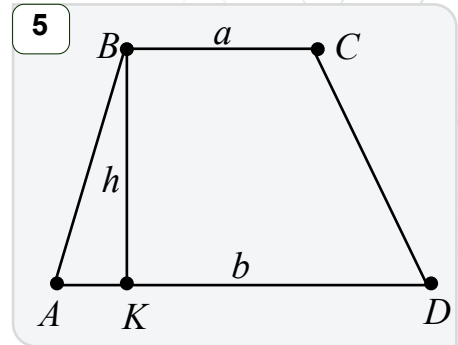
Aylana bilan 2 ta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq *kesuvchi* deb ataladi.

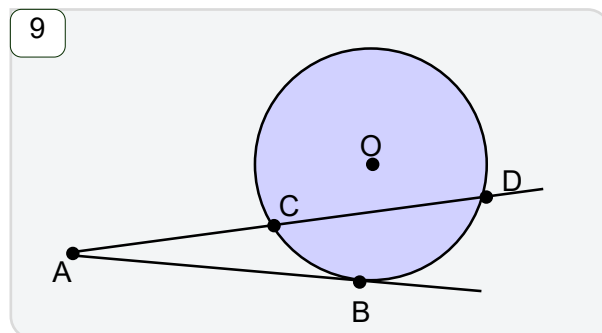
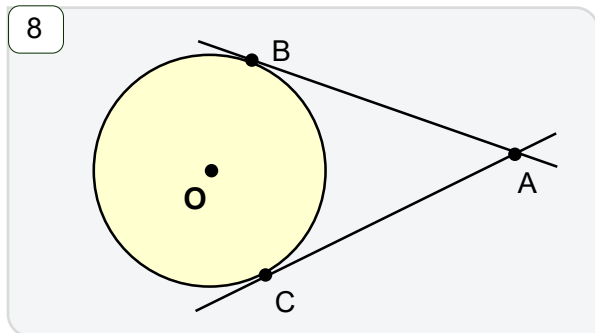
### Urinmaning xossalari:

1) Urinish nuqtasiga o'tkazilgan radius urinmaga perpendikulyardir;

2) Doira tashqarisidagi nuqtadan shu doiraga ikkita urinma o'tkazish mumkin, bu urinmalarning kesmalari o'zaro teng (8-rasm):  $AB = AC$ ;

3) Agar  $AC$  kesuvchi bo'lib, aylanani  $C$  va  $D$  nuqtalarda kesib o'tsa,  $AB$  esa urinma bo'lsa,  $AB^2 = AD \cdot AC$  tenglik o'rinli (9-rasm).



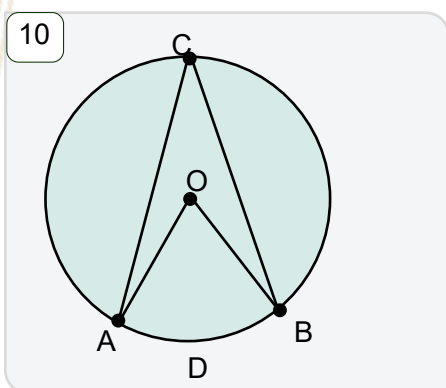


### 3°. Markaziy va ichki chizilgan burchaklar

Aylanadagi ikki nuqta yordamida aylana ikki bo'lakka ajraladi. Bu bo'laklar *yoylar* deb ataladi. Belgilanishi:  $ADB, ACB$ .

$AOB$  burchak  $ADB$  yoyga tiralgan *markaziy burchak* (10-rasm),  $ACB$  burchak esa  $ADB$  yoyga tiralgan va aylanaga *ichki chizilgan burchak* deyiladi. Bu burchaklar orasida  $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$  munosabat o'rinli.

Xususan, yarim aylanaga tiralgan ichki burchak to'g'ri burchak bo'ladi (11-rasm). Bitta yoyga tiralgan aylanaga ichki chizilgan burchaklar o'zaro teng bo'ladi.



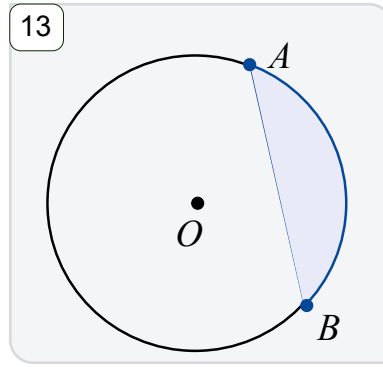
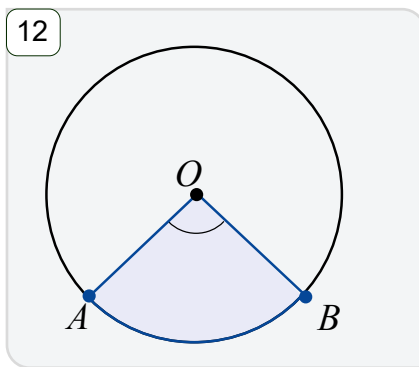
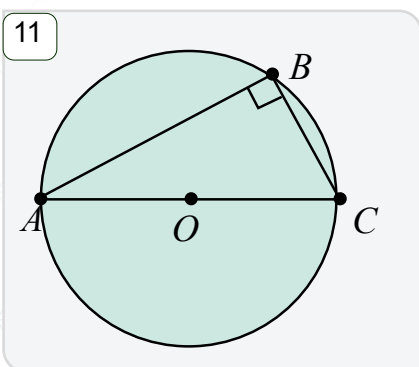
### 4°. Sektor va segment

Doiraning ikki radius bilan chegaralangan bo'lagi *sektor* deyiladi (12-rasm). Sektor yoyining uzunligi:

$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$ , bu yerda  $\alpha$  – markaziy burchakning gradus o'lchovi.

Sektor yuzi:  $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$ ;  $S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot l$ .

*Segment* – doiraning vatar va shu vatar tiralgan yoy bilan chegaralangan bo'lagi (13-rasm).



Segment yuzi:  $S = S_{sektor} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \alpha$ .



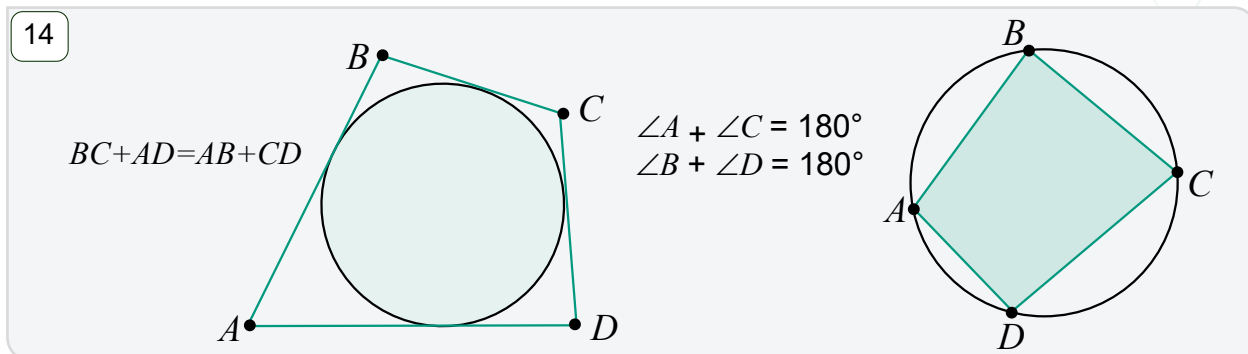
## 1.5. Muntazam ko'pburchaklar

Muntazam  $n$  burchakning tomoni  $a_n$ , perimetri  $P_n$ , yuzi  $S_n$ , ichki chizilgan aylana radiusi  $r_n$ , tashqi chizilgan aylana radiusi  $R_n$ , ichki burchagi  $\alpha_n$  bo'lsa,

$$P_n = n \cdot a_n; \quad S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot r_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a_n \cdot r_n; \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

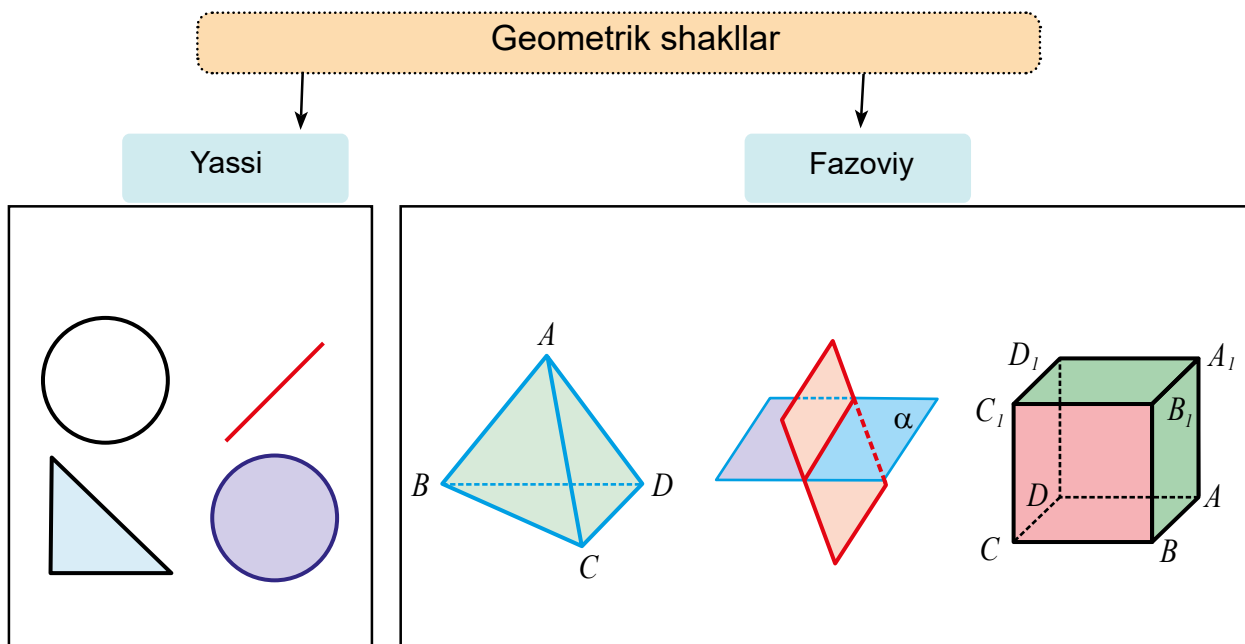
$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}; \quad r_n = \frac{a_n}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Aylanaga tashqi va ichki chizilgan to'rtburchaklar (14-rasm).



## II. Stereometriya

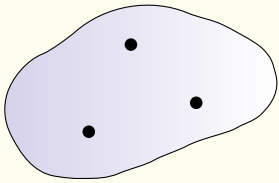
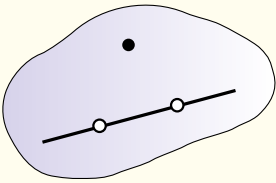
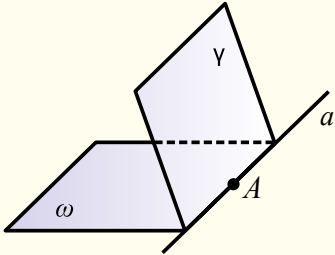
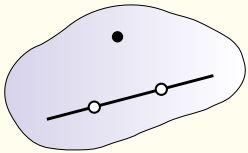
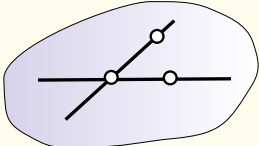
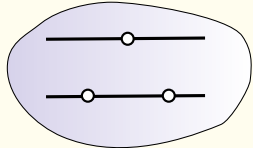
Fazoda geometrik shakllar tekislikda to'liq yotgan yoki yotmaganiga qarab yassi va fazoviy shakllarga ajratiladi.



## 2.1. Stereometriyaning asosiy tushunchalari

Geometriyaning *stereometriya* bo'limi fazoviy geometrik shakllarning (yoki jismlarning) xossalarini o'rganadi. Stereometriya so'zi grekchadan olingan bo'lib, "*stereos*" – fazoviy, "*metreo*" – o'lchayman degan ma'noni anglatadi.

Fazodagi asosiy geometrik shakllar nuqta, to'g'ri chiziq va tekislikdir. Ular stereometriyaning asosiy tushunchalari bo'lib, ularga ta'rif berilmaydi.

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
 <p><b>S<sub>1</sub> aksioma.</b> Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>	 <p><b>S<sub>2</sub> aksioma.</b> Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.</p>	 <p><b>S<sub>3</sub> aksioma.</b> Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda ular shu nuqtadan o'tuvchi umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi.</p>
 <p><b>1-natija.</b> To'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>	 <p><b>2-natija.</b> Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>	 <p><b>3-natija.</b> Parallel ikki to'g'ri chiziq orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.</p>

## 2.2. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning joylashuvi

### Fazoda to'g'ri chiziqlar

Fazoda ikki to'g'ri chiziq bir tekislikda yotishi yoki yotmasligi mumkin

Bitta tekislikda yotgan va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar *kesishuvchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.

Bitta tekislikda yotgan va o'zaro kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar esa *parallel to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.

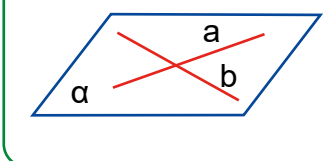
Fazoda bir tekislikda yotmaydigan ikki to'g'ri chiziqqa *ayqash to'g'ri chiziqlar* deyiladi.

### Fazoda $a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar

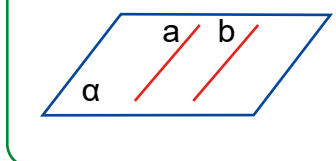
Bitta tekislikda yotadi

Bitta tekislikda yotmayadi

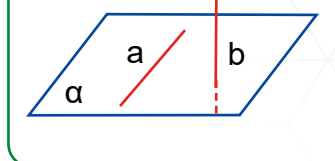
Kesishadi



Parallel



Ayqash



### Fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklar

To'g'ri chiziq tekislikda yotishi, uni kesib o'tishi yoki kesib o'tmasligi ya'ni tekislikka parallel bo'lishi mumkin.

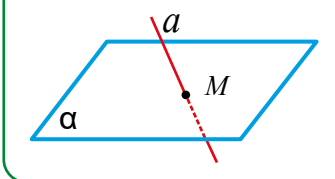
### Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik

Bitta kesishish nuqtasiga ega

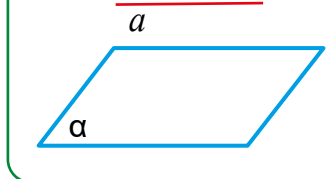
Kesishish nuqtasiga ega emas

Ikkita kesishish nuqtasiga ega

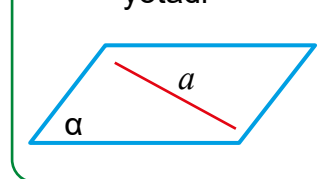
Kesishadi



Parallel



Bitta tekislikda yotadi

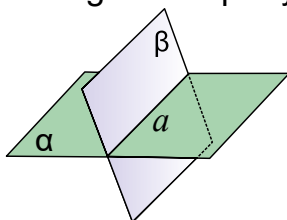


### Fazoda tekisliklar

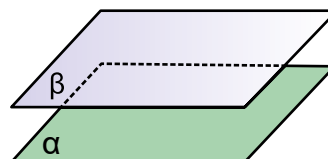
Fazoda tekisliklar biror to'g'ri chiziq bo'ylab kesishishi yoki umumiy nuqtaga ega bo'lmashligi ya'ni o'zaro parallel bo'lishi mumkin.

### Fazoda tekisliklar

Kesishadi  
(biror to'g'ri chiziq bo'ylab)



Parallel  
(umumiy nuqtaga ega emas)



Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuni		
$a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar	Bitta tekislikda yotadi.	Bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $a \otimes b$
		umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a // b$
	Bitta tekislikda yotmaydi		Ayqash: $a \div b$

Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashuni		
$a$ to'g'ri chiziq va $\alpha$ tekislik	$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotmaydi.	$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi $a \otimes \alpha$
		$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislik bilan bitta umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a // \alpha$
	$a$ to'g'ri chiziq $\alpha$ tekislikda yotadi.		$a \subset \alpha$

Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi	
$\alpha$ va $\beta$ tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $\alpha \cap \beta = a$ to'g'ri chiziq.
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $\alpha // \beta$ .

## 2.3. Ko'pyoqlar

### Fazoviy jism va ko'pyoq

Fazoviy jismlarni qandaydir moddiy jism egallagan borliqning bo'lagi sifatida tasavvur qilish mumkin. Fazoviy jismni uning sirti chegaralab turadi.

Sirti yassi ko'pburchakdan iborat jismga ko'pyoq deyiladi.

#### Prizma

Prizma deb ikki yog'i teng ko'pburchaklardan iborat, parallel tekisliklarda yotuvchi va qolgan barcha qirralari o'zaro parallel ko'pyoqqa aytiladi.

**Muntazam prizma** deb shunday to'g'ri prizmaga aytiladiki, uning asoslari muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'ladi.

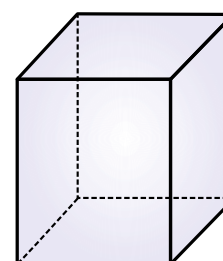
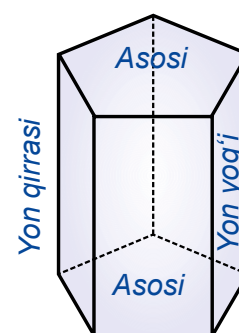
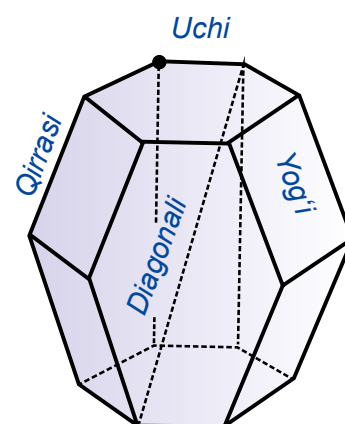
To'g'ri prizmaning yon sirti asosining perimetri bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

#### Parallelepiped

Asosi parallelogrammdan iborat prizmaga parallelepiped deyiladi. Uning barcha oltita yoqlari parallelogrammdan iborat.

#### Parallelepipedning xossalari:

- 1) Parallelepipedning diagonallari o'rtalari uning simmetriya markazi deyiladi;
- 2) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari teng va parallel;
- 3) Parallelepipedning barcha to'rtta diagonali ham bir





nuqtada kessishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Yon qirralari asos tekisligiga perpendikulyar *to'g'ri parallelepiped* deyiladi.

To'g'ri burchakli parallelepiped to'g'ri parallelepiped bo'lib, asoslari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat. To'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari teng bo'lsa, bunday *parallelepiped kub* deyiladi.

Kubning hamma yoqlari teng kvadratlardan iborat.

### Piramida

*Piramida deb*, uning bitta yog'i ixtiyoriy ko'pburchakdan, qolgan yoqlari umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat ko'pyoqqa aytiladi.

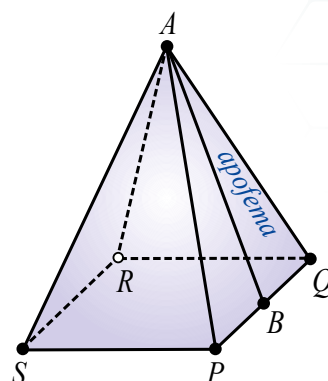
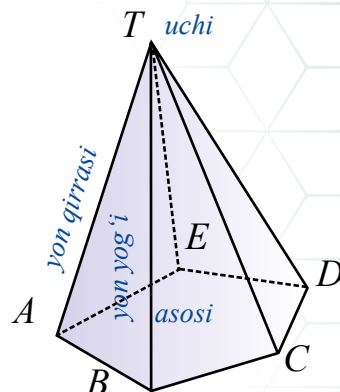
*Piramidaning balandligi* deb piramidaning uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

*Muntazam piramida* deb asosi muntazam ko'pburchakdan iborat bo'lib, balandligi asosining markaziga tushuvchi piramidaga aytiladi. Muntazam piramidaning barcha yon qirralari bir-biriga teng; barcha yon yoqlari teng yonli uchburchaklardir.

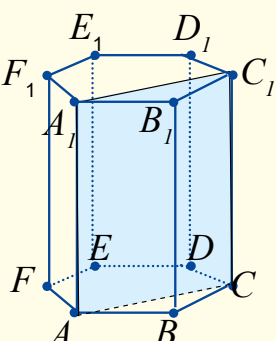
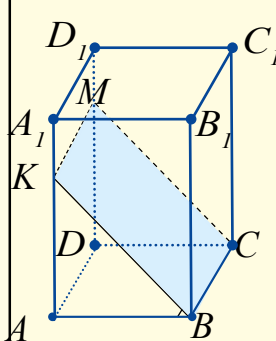
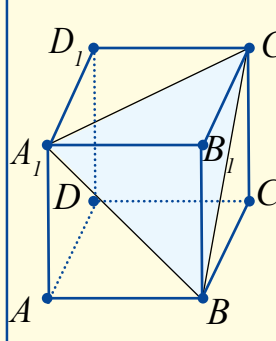
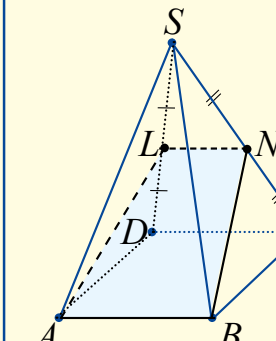
Agar piramidaning asosi  $n$  – burchakdan iborat bo'lsa,  $u$  holda bunday piramida  $n$  – burchakli piramida deyiladi. Uchburchakli piramida tetraedr deyiladi.

Agar tetraedrning barcha qirralari teng bo'lsa, bunday tetraedr muntazam tetraedr deyiladi.

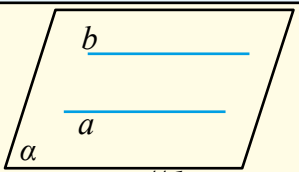
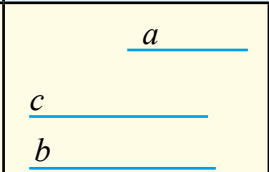
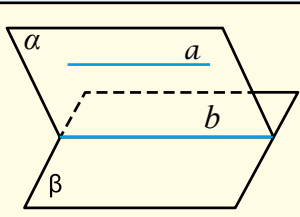
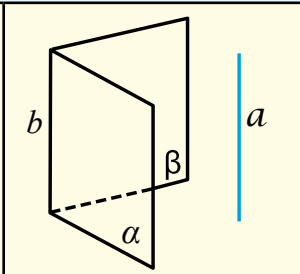
Muntazam piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida hisoblanadi:  $S_{yon} = P \cdot h$ , bu yerda  $P$  – piramida asosining perimetri,  $h$  – apofema.

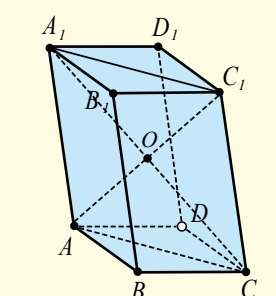


Ko'pyoqlar			
Prizma	To'g'ri burchakli parallelepiped	Kub	Piramida
<p>Asoslari – ko'pburchak, yoqlari – parallelogrammlar</p>	<p>Asoslari – to'g'ri to'rtburchak, yoqlari – to'g'ri to'rtburchaklar</p>	<p>Asoslari – kvadrat, yoqlari – kvadrat</p>	<p>Asosi – ko'pburchak, yoqlari – uchburchak</p>

Ko'pyoqlarning sodda kesimlari			
Ko'pburchakli prizma	To'g'ri burchakli paralelepiped	Kub	Piramida
 <p><math>ACC_1 - A, C, C_1</math> nuqtalardan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; <math>ACC_1A_1</math> – kesim</p>	 <p><math>CBK - K</math> nuqta va <math>CB</math> to'g'ri chiziqdan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; <math>CBKM</math> – kesim</p>	 <p><math>A_1BC_1 - BC_1</math> va <math>BA_1</math> to'g'ri chiziqdan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; <math>A_1C_1B</math> – kesim</p>	 <p><math>ABN - AB</math> va <math>LN</math> parallel to'g'ri chiziqdan o'tuvchi, kesuvchi tekislik; <math>ABNL</math> – kesim.</p>

## 2.4. Fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning parallelligi

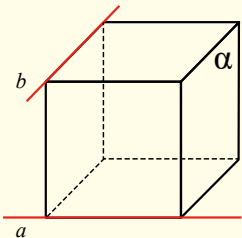
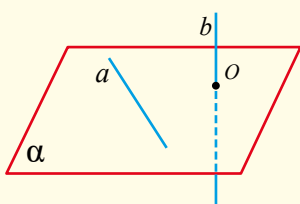
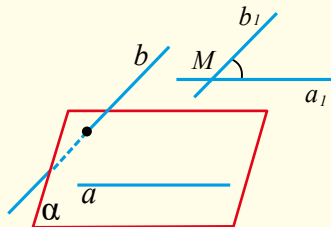
Parallel to'g'ri chiziqlar			
Ta'rifi	Alomatlari		
 <p><math>a // b</math>, <math>a</math> va <math>b</math> to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotib o'zaro kesishmasa <b>parallel to'g'ri chiziqlar</b> deb ataladi.</p>	 <p>Agar <math>a // b</math>, <math>a // c</math> bo'lsa, <math>b // c</math> bo'ladi.</p>	 <p>Agar <math>\alpha \cap \beta = b</math>, <math>a \subset \alpha</math> va <math>a // \beta</math> bo'lsa, <math>b // a</math> bo'ladi.</p>	 <p>Agar <math>\alpha \cap \beta = b</math>, <math>a // \alpha</math> va <math>a // \beta</math> bo'lsa, <math>a // b</math> bo'ladi.</p>

Paralelepipedning xossalari	
	<p>1-xossa. Asosining diagonallari va yon qirralaridan tuzilgan to'rtburchak (<math>AA_1C_1C</math>) parallelogrammdir.</p> <p>2-xossa. Qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng (<math>AA_1B_1B = DD_1C_1C</math>).</p> <p>3-xossa. Barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi (<math>AO = OC_1</math>, <math>CO = OA_1</math>).</p>

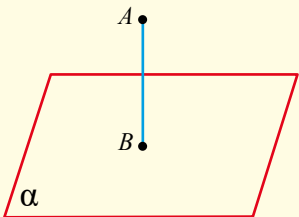
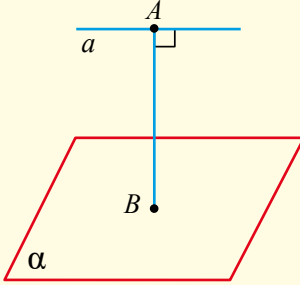
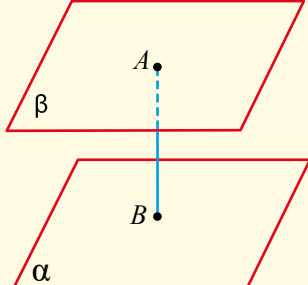
## 2.5. Fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning perpendikulyarligi

### To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarligi

Agar tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o'tuvchi istalgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq shu tekislikka perpendikulyar deb ataladi.

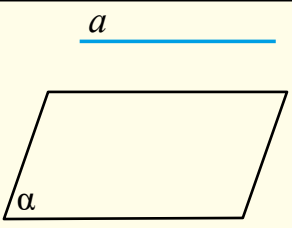
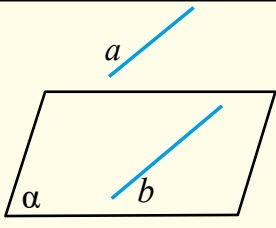
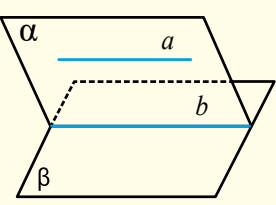
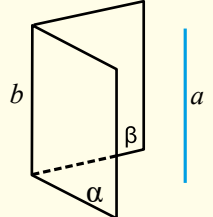
Aygash to'g'ri chiziqlar		
Ta'rifi	Alomati	Orasidagi burchak
 <p>Bitta tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziqlar <i>aygash to'g'ri chiziqlar</i> deb ataladi va <math>a \div b</math> tarzda ifodalanadi.</p>	 <p>Agar <math>a \subset \alpha</math>, <math>\alpha \cap b = O</math>, <math>O \notin a</math> bo'lsa, <math>a \div b</math> bo'ladi.</p>	 <p>Aygash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb ularga parallel bo'lgan, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.</p>

Shakllar	Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi		
$a$ va $b$ to'g'ri chiziqlar	Bitta tekislikda yotadi	Bitta umumiy nuqtaga ega.	Kesishuvchi: $a \otimes b$ .
		Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $a // b$ .
	Bitta tekislikda yotmaydi		Aygash: $a \div b$ .

Fazoda masofalar		
Nuqtadan tekislikka bo'lgan masofa	To'g'ri chiziqdan tekislikka bo'lgan masofa	Tekisliklar orasidagi masofa
 <p><math>A \notin \alpha</math> <math>AB \perp \alpha</math></p>	 <p><math>a // \alpha</math>, <math>A \in a</math>, <math>AB \perp \alpha</math></p>	 <p><math>\alpha // \beta</math>, <math>A \in \beta</math>, <math>AB \perp \alpha</math></p>

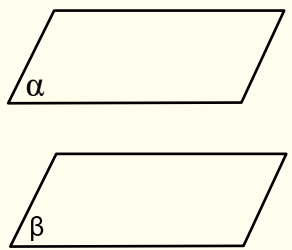
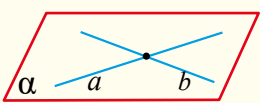
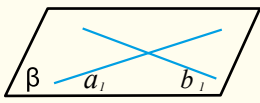
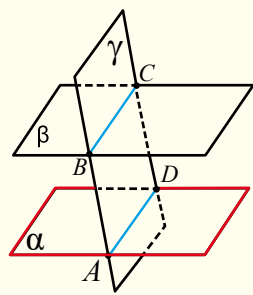
### Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning parallelligi

$a$ to'g'ri chiziq va $\alpha$ tekislik	Ko'p umumiy nuqtalarga ega.	To'g'ri chiziq tekislikda yotadi: $a \subset \alpha$ .
	Bitta umumiy nuqtaga ega.	To'g'ri chiziq tekislikni kesadi: $a \otimes \alpha$ .
	Umumiy nuqtaga ega emas.	To'g'ri chiziq tekislikka parallel: $a // \alpha$ .

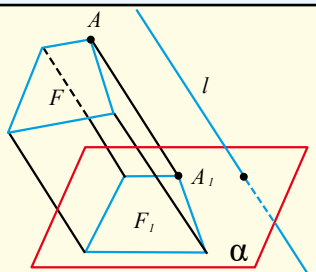
Ta'rif	Alomatlari	Xossalari
 <p>Agar <math>a</math> to'g'ri chiziq <math>\alpha</math> tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, to'g'ri chiziq va tekislik parallel deyiladi va <math>a \parallel \alpha</math> tarzda belgilanadi</p>	 <p>Agar <math>a</math> to'g'ri chiziq - <math>\alpha</math> tekislikda yotmasa va <math>a \parallel b, b \subset \alpha</math> bo'lsa, u holda <math>a \parallel \alpha</math> bo'ladi</p>	 <p>Agar <math>b</math> to'g'ri chiziq - <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar kesishish chizig'i, <math>a \subset \alpha</math> va <math>a \parallel \beta</math> bo'lsa, u holda <math>b \parallel a</math> bo'ladi</p>  <p>Agar <math>b</math> to'g'ri chiziq - <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar kesishish chizig'i, <math>a \parallel \alpha</math> va <math>a \parallel \beta</math> bo'lsa, <math>a \parallel b</math> bo'ladi</p>

### Fazoda tekisliklarning parallelligi

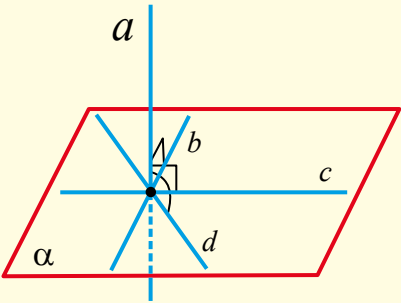
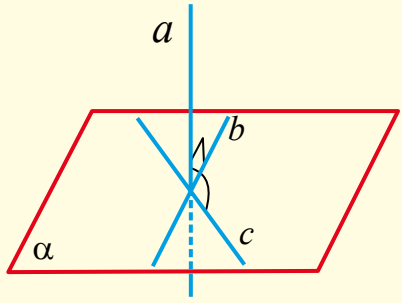
$\alpha$ va $\beta$ tekisliklar	Umumiy nuqtaga ega.	Kesishadi: $\alpha \cap \beta$ .
	Umumiy nuqtaga ega emas.	Parallel: $\alpha \parallel \beta$ .

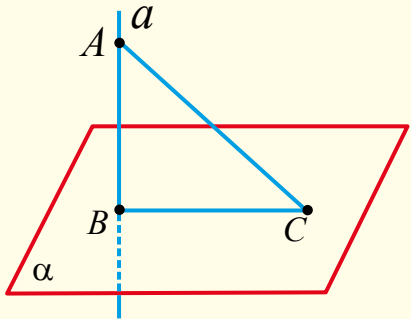
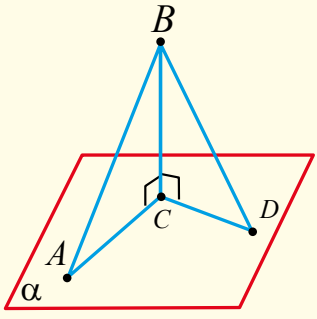
Ta'rif	Alomati	Xossasi
 <p>Kesishmaydigan <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar <b>parallel tekisliklar</b> deb ataladi va <math>\alpha \parallel \beta</math> tarzda belgilanadi.</p>	  <p>Agar <math>a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b</math>, <math>a_1 \subset \beta, b_1 \subset \beta, a_1 \cap b_1</math>, <math>a \parallel a_1, b \parallel b_1</math> bo'lsa, <math>\alpha \parallel \beta</math> bo'ladi.</p>	 <p>Agar <math>\alpha \parallel \beta</math> va <math>\gamma</math> kesuvchi tekislik, <math>\alpha \cap \gamma = AD</math> va <math>\beta \cap \gamma = BC</math> bo'lsa, <math>AD \parallel BC</math> bo'ladi.</p>

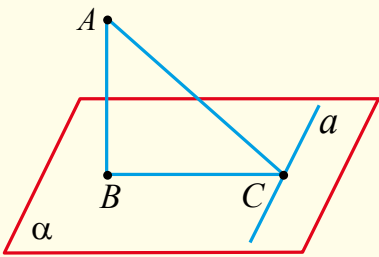
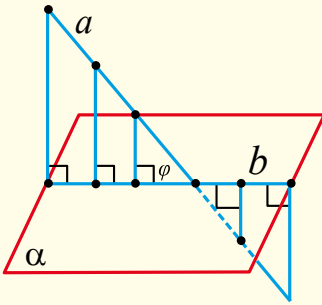
### Parallel proyeksiyalash

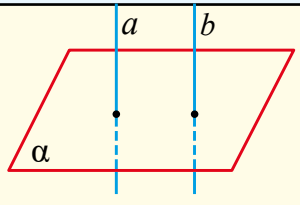
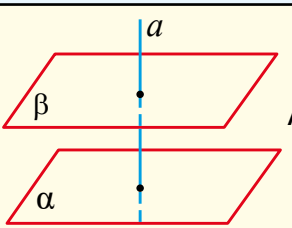
Ta'rif	Parallel proyeksiyalashda shakllarning xossalari	
	Saqlanadi	Saqlanmaydi
 <p><math>F</math> - shakl, <math>\alpha</math> - proyeksiyalash tekisligi, <math>l</math> - proyeksiyalash yo'nalishi, <math>F_1</math> - <math>F</math> shakl proyeksiyasi.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) nuqta nuqtaga, to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqqa, kesma kesmaga, uchburchak uchburchakka o'tadi;</li> <li>2) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa tegishliligi;</li> <li>3) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa nisbatan joylashuvi;</li> <li>4) to'g'ri chiziqlarning parallelligi;</li> <li>5) bitta yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalar tengligi (yoki proporsionalligi).</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) kesma uzunligi;</li> <li>2) burchak kattaligi;</li> <li>3) to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligi;</li> <li>4) burchaklar tengligi (proporsionalligi);</li> <li>5) kesishuvchi to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalar tengligi (proporsionalligi).</li> </ol>

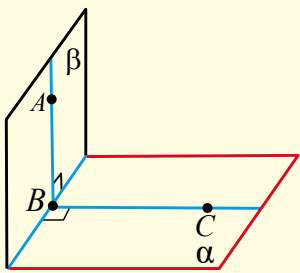
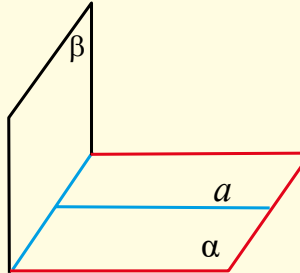
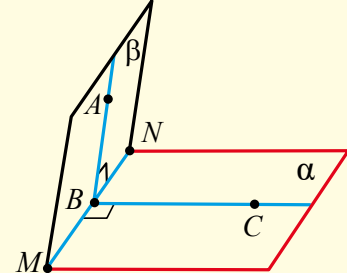


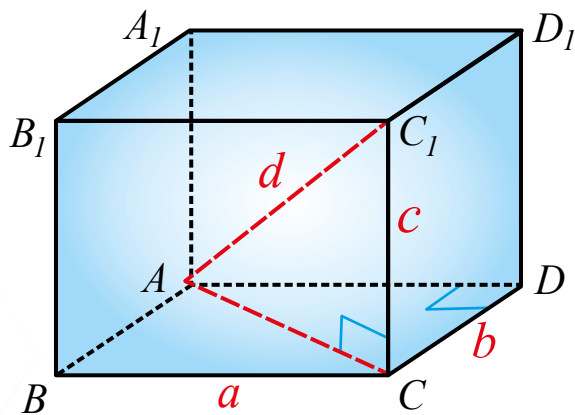
To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi	
Ta'rifi	Alomati
 <p>Agar ixtiyoriy <math>b \in \alpha</math> uchun <math>a \perp b</math> bo'lsa, <math>a \perp \alpha</math> deb ataladi.</p>	 <p>Agar <math>b \in \alpha, c \in \alpha</math> uchun <math>a \perp b, a \perp c</math> bo'lsa, <math>a \perp \alpha</math> bo'ladi.</p>

Perpendikulyar va o'g'ma	
Ta'rifi	Xossalari
 <p>Agar <math>a \perp \alpha, AB \notin \alpha</math> bo'lsa, <math>AB</math> - <math>\alpha</math> tekislikka <math>A</math> nuqtadan tushirilgan perpendikulyar; <math>AC</math> - og'ma, <math>BC</math> - og'maning <math>\alpha</math> tekislikka proyeksiyasi</p>	 <p><math>BC &lt; AB, BC &lt; BD</math>.          Agar <math>AB = BD</math> bo'lsa, <math>AC = CD</math> bo'ladi.          Agar <math>AC = CD</math> bo'lsa, <math>AB = BD</math> bo'ladi.          Agar <math>AC &gt; CD</math> bo'lsa, <math>AB &gt; BD</math> bo'ladi.</p>

Uch perpendikulyarlar haqidagi teorema	To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak
 <p><math>AB \perp \alpha</math>          Agar <math>a \perp BC</math> bo'lsa, <math>a \perp AC</math> bo'ladi.          Agar <math>a \perp AC</math> bo'lsa, <math>a \perp BC</math> bo'ladi.</p>	 <p><math>b</math> - <math>a</math> ning <math>\alpha</math> tekislikdagi proyeksiyasi.  <math>\varphi</math> - <math>a</math> va <math>\alpha</math> tekislik orasidagi burchak.</p>

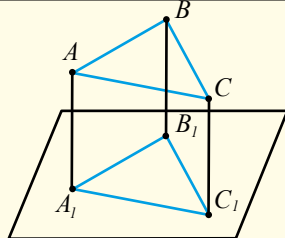
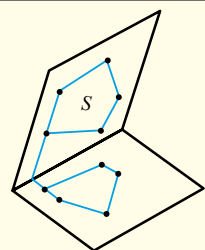
Tekisliklarning parallelligi va perpendikulyarligi orasidagi bog'lanishlar	
	<p>Agar <math>a // b</math>, <math>\alpha \perp a</math> bo'lsa, <math>\alpha \perp b</math> bo'ladi. Agar <math>\alpha \perp a</math>, <math>b \perp \alpha</math> bo'lsa, <math>a // b</math> bo'ladi.</p>
	<p>Agar <math>\alpha // \beta</math>, <math>a \perp \beta</math> bo'lsa, <math>a \perp \alpha</math> bo'ladi. Agar <math>\alpha \perp a</math>, <math>\beta \perp a</math> bo'lsa, <math>\alpha // \beta</math> bo'ladi.</p>

Tekisliklarning perpendikulyarligi		
Ta'rifi	Alomati	Tekisliklar orasidagi burchak
 <p>Agar <math>\angle ABC = 90^\circ</math> bo'lsa, <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar perpendikulyar deyiladi.</p>	 <p>Agar <math>a \subset \alpha</math> va <math>a \perp \beta</math> bo'lsa, <math>\alpha \perp \beta</math> bo'ladi.</p>	 <p>Agar <math>AB \perp MN</math> va <math>CB \perp MN</math> bo'lsa, <math>\angle ABC</math> – <math>\alpha</math> va <math>\beta</math> tekisliklar orasidagi burchak.</p>



Umumlashgan Pifagor teoremasi

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Fazoda ortogonal proyeksiya	Ko'pburchak proyeksiyasining yuzi
 <p>Ortogonal proyeksiyada: <math>l \perp \alpha</math>. <math>l</math> – proyeksiyalash yo'nalishi; <math>\alpha</math> – proyeksiyalash tekisligi;</p>	 <p><math>S_1 = S \cdot \cos \varphi</math></p> <p><math>S</math> – ko'pburchak yuzi; <math>S_1</math> – ko'pburchak proyeksiyasining yuzi; <math>\varphi</math> – ko'pburchak va proyeksiya tekisliklari orasidagi burchak.</p>

# GEOMETRIYA

Umumiy o'рта ta'lim maktablarining  
10-sinfi uchun darslik

*Muharrir*  
*Texnik muharrir* Sulaymonov Akmal  
*Musahhih* –  
*Sahifalovchi* Salohitdinov Ixvoldin  
*Rassom* Sulaymonov Umid

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi \_\_.\_\_.2022. Bichimi 70x90<sup>1</sup>/16. "Arial" garniturası. Ofset bosma usulda bosildi. Shartli bosma tabog'i 14,0. Nashr bosma tabog'i 13,0. Nusxasi \_\_\_\_\_. Buyurtma N\_\_\_\_\_.

Shartnoma N\_\_\_\_\_.

## Ijaraga berilgan darslik holatini ko'rsatuvchi jadval

T/r	O'quvchining ismi va familiyasi	O'quv yili	Darslikning olingandagi holati	Sinf rahbarining imzosi	Darslikning topshirilgandagi holati	Sinf rahbarining imzosi
1						
2						
3						
4						
5						
6						

**Darslik ijaraga berilib, o'quv yili yakunida qaytarib olinganda yuqoridagi jadval sinf rahbari tomonidan quyidagi baholash mezonlariga asosan to'ldiriladi:**

Yangi	Darslikning birinchi marotaba foydalanishga berilgandagi holati.
Yaxshi	Muqova butun, darslikning asosiy qismidan ajralmagan. Barcha varaqlari mavjud, yirtilmagan, ko'chmagan, betlarida yozuv va chiziqlar yo'q.
Qoniqarli	Muqova ezilgan, birmuncha chizilib, chetlari yedirilgan, darslikning asosiy qismidan ajralish holati bor, foydalanuvchi tomonidan qoniqarli ta'mirlangan. Ko'chgan varaqlari qayta ta'mirlangan, ayrim betlariga chizilgan.
Qoniqarsiz	Muqovaga chizilgan, yirtilgan, asosiy qismdan ajralgan yoki butunlay yo'q, qoniqarsiz ta'mirlangan. Betlari yirtilgan, varaqlari yetishmaydi, chizib, bo'yab tashlangan. Darslikni tiklab bo'lmaydi.