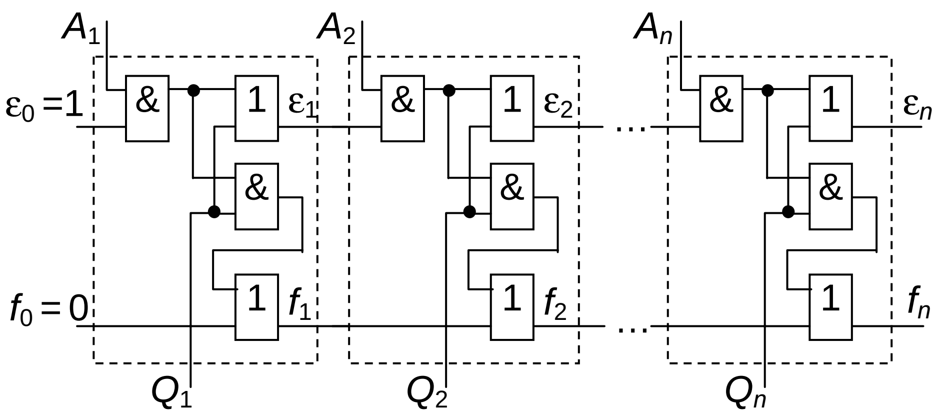
Ю. П. Шевелёв

СИМВОЛ-ИДС
Учебное пособие

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 2

Теория конечных автоматов
Комбинаторика
Теория графов



Томск 2003

Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Ю.П. Шевелёв

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 2

Теория конечных автоматов
Комбинаторика
Теория графов

(Автоматизированная технология обучения «Символ»)

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению и специальности «Прикладная математика и информатика»

Рекомендовано Сибирским региональным учебно-методическим центром высшего профессионального образования в качестве учебного пособия для студентов технических вузов и школьников старших классов

Томск 2003

УДК 512.563.3 (075)

Рецензенты:

Профессор кафедры защиты информации и криптографии Томского государственного университета, д-р техн. наук, А.М. Оранов

Отдел информатизации образования Томского политехнического университета, зав. отделом канд. техн. наук Ю.В. Карякин

Шевелев Ю. П.

Дискретная математика. Ч. 2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов (для автоматизированной технологии обучения «Символ»): Учебное пособие. — Томск: Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2003. — 130 с.

Изложены основные сведения из прикладной теории конечных автоматов: рассмотрены контактные и электронные логические схемы, описаны методы синтеза комбинационных и многотактных автоматов, приведена теорема Поста о функциональной полноте. Из комбинаторики представлены основные формулы — перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без повторений, рассмотрен ряд комбинаторных задач. Изложены основные понятия теории графов и показано их применение на примерах контактных схем, транспортной сети и др. Рассмотрены элементы теории трансверсалей. Во второй части более 2000 упражнений, снабженных кодами информационно-дидактической системы СИМВОЛ. Благодаря кодам возможна самостоятельная работа над пособием в режиме автоматизированного самоконтроля в системах дистанционного образования.

Для студентов технических вузов и техникумов, учащихся старших классов общеобразовательных школ и для лиц, желающих ознакомиться с вводными положениями прикладной дискретной математики.

Библ. 62 назв.
Табл. 27.
Илл. 302.

Компьютерный набор и верстка автора

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

КОМБИНАТОРИКА

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

КРАТКО О СИСТЕМЕ «СИМВОЛ»

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

Конечным автоматом (с прикладной точки зрения) называется техническое устройство, каждый элемент которого может находиться в одном из нескольких устойчивых состояний. В инженерной практике наибольшее распространение получили **двоичные** (бистабильные) элементы, характеризующиеся только двумя состояниями. Построенные на них схемы работают по законам двузначной логики, в связи с чем их называют **логическими** устройствами (однотактными или многотактными). Полистабильные (имеющие более двух устойчивых состояний) элементы в инженерной практике применяются сравнительно редко, поэтому рассматривать их не будем и в дальнейшем все внимание сосредоточим на вопросах синтеза двоичных автоматов.

Данный курс теории конечных автоматов предназначен для тех, кто впервые знакомится с логическими схемами и многотактными устройствами дискретного действия. В первую очередь – это студенты технических вузов и школьники старших классов. Для понимания материала достаточно владеть основными положениями булевой алгебры, изложенными в первой части пособия, знать закон Ома и иметь представление о таких понятиях, как электрическая проводимость, односторонняя проводимость (диод), сопротивление электрическому току, падение напряжения, разность потенциалов, рассматриваемых в курсе физики средней школы. Для тех, кто этими понятиями владеет недостаточно свободно, в пособие включен раздел, содержащий упражнения по анализу работы простейших диодно-резисторных электрических схем.

Все упражнения закодированы, то есть перед их условиями записаны коды заданий в виде сочетаний букв и цифр. Назначение кодов – обеспечить возможность автоматизированного самоконтроля при помощи устройств «Символ» и их компьютерных аналогов.

Самоконтроль осуществляется следующим образом:

1) включить устройство и нажать кнопку СБРОС;
2) набрать на его клавиатуре код задания;
3) ввести ответ;
4) нажать кнопку КОНТРОЛЬ. Если загорится индикатор ПРАВИЛЬНО, то ответ признается верным. Если горит НЕПРАВИЛЬНО, то ответ является неверным.

При самоконтроле необходимо учитывать следующее:

1) если ответ представляет собой число с названием единиц измерения, то в устройство (либо компьютер) необходимо вводить только число;

2) если под одним кодом задания представлено несколько задач, то ответы необходимо вводить в строгом порядке: на первый вопрос, затем на второй и т. д. Все такие коды обозначены восклицательным знаком;

3) если ответ – булево выражение, то буквы необходимо упорядочить так, как они располагаются на карте Вейча, а при ее отсутствии – в алфавитном порядке;

4) пометка (лат.) обозначает: при вводе ответа необходимо использовать латинский алфавит;

5) при вводе инверсных букв сначала вводится знак инверсии (черточка), а затем – буква;

6) при наборе булевых формул знак конъюнкции вводить не нужно. Если же имеется знак дизъюнкции, то вводить его необходимо.

При самостоятельной работе над пособием уровень усвоения материала определяется числом выполненных упражнений (в идеале их следует выполнить все). Полученные при этом теоретические сведения могут быть использованы для проектирования относительно несложных комбинационных и многотактных схем. При разработке более сложных устройств ручные методы могут не дать желаемого эффекта. В таких случаях используют ЭВМ. Однако машинные методы проектирования схем выходят за рамки данного пособия. Для знакомства с ними необходимо обратиться к специальной литературе.

1. ДИОДНО-РЕЗИСТОРНЫЕ СХЕМЫ

1.1. Вводные понятия

При выполнении упражнений данного подраздела (и в дальнейшем) необходимо учитывать следующее:

а) электрическое сопротивление линий связи в схемах принимается равным нулю, вследствие чего падение напряжения на них всегда имеет нулевое значение независимо от величины протекающего по ним тока;

б) сопротивление диода принимается равным нулю, если он включен в проводящем направлении. Если же диод заперт (не проводит), то сопротивление его бесконечно велико и ток через него не протекает;

в) вольтметр, подключенный к каким-либо точкам схемы, состояние ее не меняет, поскольку предполагается, что вольтметр имеет бесконечно большое входное сопротивление.

Рассмотрим пример.

На рис. 1 сопротивления всех резисторов указаны в омах. (ДОО). Найти ток (в амперах), протекающий через точку *a*. (ЯЯН). Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам: *a-b, a-d, a-c, c-f, f-k*, (первая буква показывает, к какой точке подключена клемма ПЛЮС вольтметра, а вторая буква указывает точку, к которой подключена клемма МИНУС)?

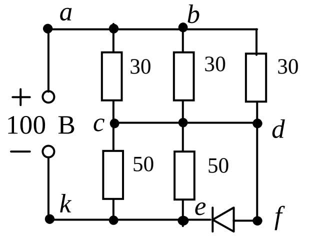


Рис. 1

Определим ток, протекающий через проводник в точке *a*. Так как диод включен в проводящем направлении, то потенциалы точек *c* и *k* равны. Ток протекает только через три резистора. Их общее сопротивление равно 10 Ом. Следовательно, ток (согласно закону Ома) равен 10 А.

Проверим, верным ли является этот ответ. Вводим в устройство «Символ»: ДОО 10, где ДОО – код задания, 10 – ответ. (Знак пробела здесь и в дальнейшем не набираем.) После нажатия кнопки КОНТРОЛЬ загорится индикатор ПРАВИЛЬНО.

Перейдем к показаниям вольтметра:

а) разность потенциалов между точками *a* и *b* равна нулю, т. е. $U_{a\text{-}b} = 0$, поскольку в соответствии с законом Ома $U_{a\text{-}b} = IR$, где I – ток, протекающий по участку цепи *a-b*, R – сопротивление участка. Сопротивление проводника равно нулю, следовательно, $U_{a\text{-}b} = 0$;

б) так как через диод протекает ток и потенциалы точек *c*, *d* и *k* одинаковы, то $U_{a\text{-}d} = U_{a\text{-}c} = 100$ В;

в) точки c и f соединены проводником, поэтому разность потенциалов между ними равна нулю, т. е. $U_{c\text{-}f} = 0$;

г) так как точки f и k соединены диодом, находящимся в проводящем состоянии, то $U_{f\text{-}k} = 0$.

Для контроля в устройство «Символ» вводим код и все ответы: ЯЯН 0 100 100 0 0. С нажатием кнопки КОНТРОЛЬ загорается индикатор ПРАВИЛЬНО.

1.2. Простейшие диодно-резисторные схемы

Сопротивления всех резисторов на схемах данного подраздела даны в омах.

1. На схеме (рис. 2) последовательно соединены источник тока напряжением 20 В, резистор, сопротивление которого равно 50 Ом, и вольтметр V_1. Взяли второй вольтметр V_2. Сколько вольт покажут вольтметры V_1 и V_2, если вольтметр V_2 подключить к точкам:

(У41) *a - b* ? (753) *a - d* ? (ТТ5) *a - c* ?
(552) *b - d* ? (БТ4) *b - c* ? (Р96) *c - d* ?

2. Сколько вольт покажет вольтметр (рис. 3), если его подключить к точкам:

(ОЙМ)! *a - b, a - c, a - d* ? (ИПК)! *b - c, b - d, c - d* ?

3. Какое напряжение (в вольтах) покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 4):

(ЕЗА)! *a - c, a - f, a - e* ? (ШЛО)! *a - d, b - d, c - e* ?
(РЗУ)! *b - f, b - e, f - d* ?

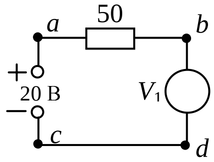


Рис. 2

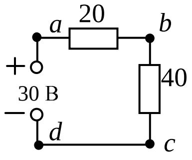


Рис. 3

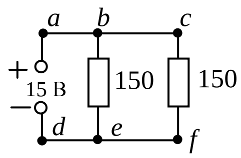


Рис. 4

4. Определите показания вольтметров V_1 и V_2 на рис. 5 – 8.

5. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 9):

(2Р1)! *a - b, b - c* ? (ШВХ)! *c - d, e - d, a - c* ?
(ТБЗ)! *b - d, c - e* ? (ЭВИ)! *a - d, a - c, b - e* ?

6. Какое напряжение (в вольтах) покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 10):

(1П1)! *a - b, b - c* ? (ИШ2)! *c - d, e - d, a - e* ?
(САЗ)! *b - d, c - e* ? (ЛБЧ)! *a - d, a - c, b - e* ?

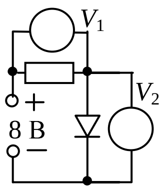


Рис. 5. (2Р1)

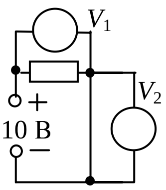


Рис. 6. (ГА2)

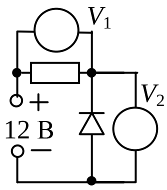


Рис. 7. (5П3)

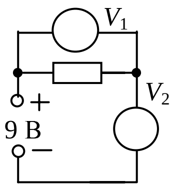


Рис. 8. (ПР4)

7. Определите разность потенциалов между точками (рис. 11):

(УХ6)! *a - b, a - c, a - e* ; (ТТ8)! *a - f, b - e, b - c* ;
(ЧА7)! *b - c, b - d, a - d* ; (609)! *d - c, d - e, d - f.*

8. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 12):

(ЖТА)! *a - e, a - d, a - f*; (УХЭ)! *d - e, c - d, b - f* ;
(АХО)! *a - b, a - c, b - c*; (УВЕ)! *e - c, e - d, b - c.*

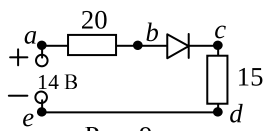


Рис. 9

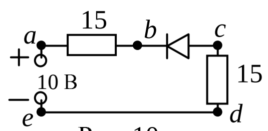


Рис. 10

9. Определите разность потенциалов между точками (рис. 13):

(БУР)! *a - b, a - d, a - f*; (5ПС)! *a - k, a - e, d - k*;
(ЛЯТ)! *b - d, b - f, a - c*; (ЕКУ)! *d - e, d - f, c- d*;
(УКФ)! *c - e, c - k, b - k.*

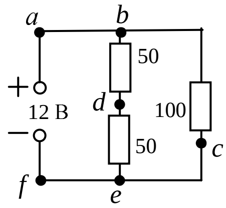


Рис. 11

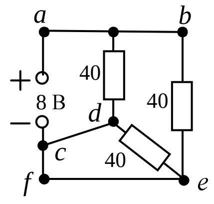


Рис. 12

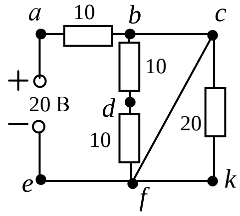


Рис. 13

10. Определите разность потенциалов между точками (рис. 14):

(А44)! *a - b, a - k, a - c, a - f* ; (Р89)! *d - c, c - f, c - k*;
(400)! *d - b, b - k, a - d* ; (87Я)! *d - f; d - e; e - k*;
(ЛЫУ)! *b - e, b - f, b - k.*

11. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 15):

(АПА)! *a - b, a - c* ; (БУБ)! *a - d, a - e, d - e* ;
(МУТ)! *c - d, c - e, c - f* ; (ЕЗК)! *b - e, b - d, b - f.*

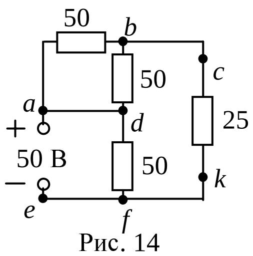


Рис. 14

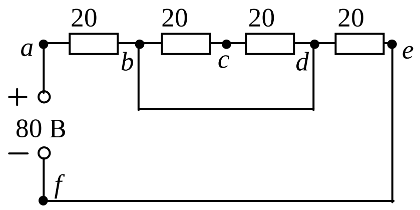


Рис. 15

12. Определите разность потенциалов между точками (рис. 16):

(814) *a - b, a - c, a - d* ; (МТ5) *a - e, a - f, b - c* ;
(856) *b - d, b - f, b - e* ; (А77) *c - d, c - e, c - f* ;
(У18) *d - e, d - f, e - f.*

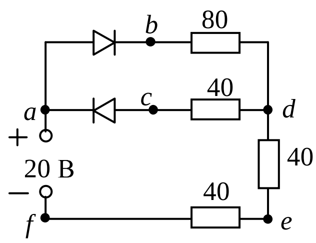


Рис. 16

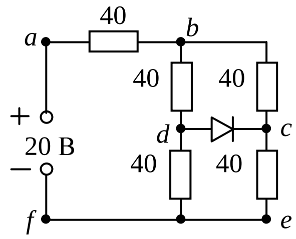


Рис. 17

13. Определите разность потенциалов между точками (рис. 17):

(Е91) *a - b, a - e, a - f* ; (2У2) *d - c, b - c, b - d* ;
(363) *d - f, c - e, a - c* ; (ВР4) *e - f, d - e, b - c* ;
(285) *b - f, b - e, d - e.*

14. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 18):

(5Р1) *a - b, a - c, a - d* ;
(472) *a - e, a - f, a - k* ;
(РКЗ) *a - m, b - c, b - d* ;
(КР4) *b - e, b - f, b - k* ;
(ВВ5) *b - m, c - d, c - e* ;
(4А6) *c - f, c - k, c - m* ;
(737) *d - e, d - f, d - k* ;
(458) *d - m, e - f, e - k* .

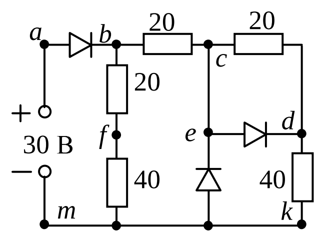


Рис. 18

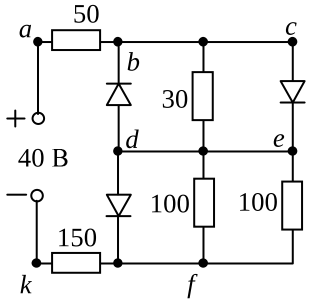


Рис. 19

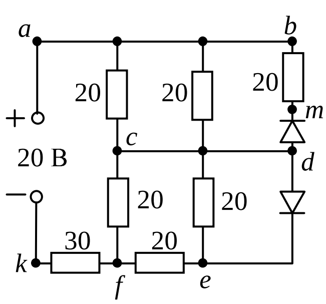


Рис. 20

15. Определите разность потенциалов между точками (рис. 19):
(66А) *a - b, a - c, a - d, a - e*; (БББ) *a - f, a - k, b - c, b - d*;
(5ПВ) *b - c, b - f, b - k, b - e*; (НАГ) *c - d, c - e, c - f, c - k*;
(56У) *d - e, d - f, d - k, e - f*; (ПВЕ) *e - k, f - k, b - f*.

16. Найдите разность потенциалов между точками (рис. 20):

(220) *a - b, a - c, a - d*; (181) *a - e, a - f, a - k*;
(МВ2) *b - c, b - d, b - e*; (ПОЗ) *b - f, b - k, c - d*;
(ИТ4) *c - e, c - f, c - k*; (КТ5) *d - e, d - f, d - k*;
(УХ6) *e - f, e - k, f - k*. (НУН) *m - c, m - e, m - k*.

1.3. Выпрямительный мост

Выпрямительный диодный мост предназначен для преобразования переменного тока в постоянный. Электрическая схема его проста, но логика работы не тривиальна. Это обстоятельство в данном пособии использовано для подготовки ряда упражнений, способствующих формированию умений прослеживать пути прохождения тока при наличии в схеме диодов, что необходимо для понимания работы диодно-резисторных логических элементов. Кроме того, диодный мост – это вообще уникальная схема. Она используется практически во всех преобразователях переменного тока в постоянный и находит широчайшее применение в радиоэлектронных устройствах. Поэтому знакомство с ее работой само по себе является полезным.

Следует отметить, что термин «постоянный ток» применительно к выпрямительному мосту является крайне неудачным. Батарейка для карманного фонарика тоже дает постоянный ток. Но он меньше всего напоминает тот ток, который мы получаем на выходе выпрямительного моста. Выпрямленный ток – это не постоянная его величина. Он точно так же пульсирует, как и переменный ток, но с постоянной полярностью. Таким образом, в названии «постоянный ток» отражен лишь тот факт, что после выпрямления неизменной является **полярность**, но не **величина** тока, которая с течением времени непрерывно меняется. Чтобы превратить такой пульсирующий ток в действительно постоянный, к выходу моста подключают специальные фильтры (простейшим фильтром является конденсатор большой емкости – сотни и тысячи микрофарад), способные дать постоянный ток, мало отличающийся от тока, который дает аккумулятор или батарейка для карманного фонарика.

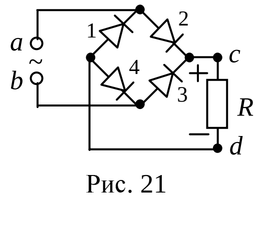


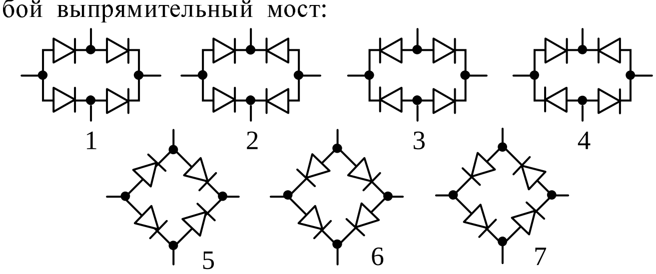
Рис. 21

Схема диодного моста приведена на рис. 21. Выясним, каким образом входное переменное напряжение преобразуется в выходное, обеспечивающее протекание тока через нагрузку *R* только в одном направлении.

Зафиксируем момент, когда напряжение клеммы *a* положительно по отношению к клемме *b*. Ток протекает от точки *a* через диод 2, нагрузку *R*, диод 4 к точке *b*, т. е. фактически точка *c* непосредственно подключена к клемме *a*, а точка *d* – к клемме *b* источника переменного тока. Пусть теперь полярность входного напряжения стала обратной: ПЛЮС – на клемме *b*, МИНУС – на клемме *a*. Тогда ток пойдет от точки *b* через диод 3, нагрузку *R*, диод 1 к точке *a*, т. е. точка *c* оказалась подключенной к клемме *b*, а точка *d* – к клемме *a*. Таким образом, мост как бы следит за полярностью входного напряжения и точку *c* нагрузки подключает только к положительной из клемм *a* и *b*, вследствие чего ток через нагрузку протекает всегда в одну сторону.

Упражнения

1. (РЖК). Укажите номера схем, представляющих собой выпрямительный мост:



2. (АМ.48). Укажите выводы (рис. 22), на которые подается переменное напряжение (лат.).

3. Укажите номера диодов (рис. 22), направление включения которых необходимо изменить на противоположное, чтобы получился выпрямительный мост с выводом МИНУС: (У8.46) в точке *b*; (ПУ.46) в точке *c*; (64.46) в точке *d*.

4. (ЯУ.45). Допустим, что к точкам *a* и *c* (рис. 22) подключено постоянное напряжение, причем ПЛЮС подан на вывод *a*. Укажите номера диодов, которые находятся в проводящем состоянии.

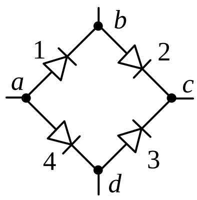


Рис. 22

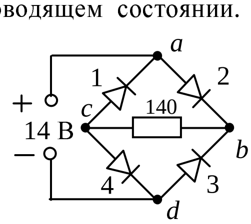


Рис. 23

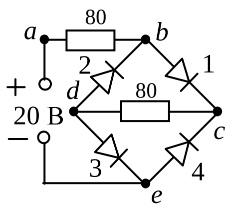


Рис. 24

5. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 23):
(АШН) *a - b, b - c, a - c*? (РВО) *a - d, b - d, c - d*?

6. Укажите номера диодов (рис. 22), направление включения которых необходимо изменить на противоположное, чтобы получился мост с выводом ПЛЮС: (64.50) в точке *b*; (У8.50) в точке *d*; (ЯУ.50) в точке *a*.

7. (К4.4Т). К точкам *a* и *d* (рис. 23) подключено постоянное напряжение, причем ПЛЮС подан на вывод *a*. Укажите номера проводящих диодов.

8. Допустим, что точки *a* и *b* на рис. 23 соединены проводником. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:
(022) *a - b, b - c, c - d*? (ББЗ) *a - d, b - d, a - c*?

9. Допустим, что диод 2 на рис. 23 удален. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:
(ОСИ) *a - d, b - c, c - d*? (135) *a - b, a - c, b - d*?

10. Допустим, что диод 3 на рис. 23 удален. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

(086) $a - b,\ b - c,\ c - d$? (ТШ7) $b - d,\ a - c,\ a - d$?

11. (1П2). Какой ток (мА) протекает через диоды 1, 2, 3, 4 моста (рис. 23)?

12. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам (рис. 24):

(МБМ) $b - c,\ b - d,\ b - e$? (ВИВ) $c - e,\ d - e,\ c - d$?
(УХО) $a - b,\ a - c,\ a - d,\ a - e$?

13. Допустим, что точки c и d на рис. 24 соединены проводником. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

(ТКР) $a - c,\ b - c,\ c - d$? (ЛКТ) $a - d,\ b - d,\ c - e$?
(ТЯП) $a - b,\ a - e,\ b - e,\ d - e$?

14. На рис. 24 диод 1 включили «наоборот», т. е. проводимостью от точки c к точке b. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

(ЭЭР) $a - c,\ c - d,\ a - e$? (РЕМ) $c - e,\ d - e,\ a - d$?
(МКК) $b - c,\ a - b,\ b - d,\ b - e$?

15. (ДЗЕ). На рис. 23 вывод b – это ПЛЮС. Укажите номера диодов, направление включения которых необходимо сменить на противоположное, чтобы ПЛЮС оказался в точке c.

16. Удалим диод 1 на рис. 24. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

(ЭФФ) $a - b,\ a - e,\ b - e$? (8О5) $a - c,\ a - d,\ c - e$?
(РНЕ) $b - c,\ b - d,\ c - d,\ d - e$?

17. На рис. 24 диод 2 включили «наоборот», т. е. проводимостью от точки b к точке d. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

(АЛТ) $b - c,\ b - d,\ b - e$? (ИМК) $a - d,\ c - e,\ a - e$?
(5ЯХ) $a - b,\ a - e, c - d,\ d - e$?

18. Пусть диоды 2 и 4 на рис. 24 включены «наоборот», т. е. от точки b к точке d и от точки c к точке e. Сколько вольт покажет вольтметр, если его подключить к точкам:

(НЭР) $a - c,\ c - d,\ a - e$? (ЛЯТ) $c - e,\ d - e,\ a - d$?
(МЕП) $b - c,\ a - b,\ b - d,\ b - e$?

2. КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ

2.1. Контактные элементы

Теория контактных структур, составляющих предмет исследования одного из важнейших разделов дискретной математики, возникла в 30-х годах XX столетия (СССР, США, Япония и др.). В ее создании участвовали М.А. Гаврилов, В.Н. Рогинский, С. Колдуэлл, К. Шеннон и многие другие.

Что такое контактный элемент? Это техническое устройство, замыкающее и размыкающее электрическую цепь. К контактным элементам относятся кнопки (клавиши), электромагнитные реле, шаговые искатели, различные переключатели и др. Принцип их работы носит четко выраженный двоичный характер (включено – выключено), благодаря чему при синтезе контактных сетей широкое применение нашла булева алгебра, явившаяся существенным подспорьем в руках инженера, разрабатывающего переключательные схемы.

С логической точки зрения совершенно безразлично, какие рассматриваются элементы, – реле, кнопки или переключатели, поэтому можно говорить об абстрактных электрических контактах, обладающих только одним свойством – замыкать и размыкать электрическую цепь на некотором участке. Однако из дидактических соображений имеет смысл выбрать какой-либо вид контактного устройства, рассмотреть на его примере ряд схем и лишь затем перейти к вопросам анализа и синтеза абстрактных контактных структур.

Наиболее простым контактным элементом является кнопка (клавиша), с которой и начнем изучение контактных схем. На рис. 1,*а* показано условное обозначение кнопки с нормально разомкнутым контактом. Слово

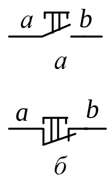


Рис. 1

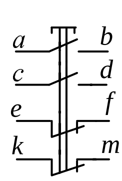


Рис. 2

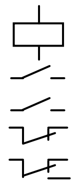


Рис. 3

«нормально» говорит о том, что контакт на схеме изображен в состоянии, когда кнопка не нажата. В исходном состоянии (кнопка не нажата) между выводами a и b проводимости нет, т. е. цепь разомкнута. Если же кнопку нажать, то выводы a и b электрически соединятся. После отпускания кнопки эти выводы снова разъединятся.

На рис. 1,*б* приведено условное изображение кнопки с нормально замкнутым контактом. В исходном состоянии, когда кнопка не нажата, выводы a и b соединены (в отличие от рис. 1,*а*). Если же кнопку нажать, то вывод a отключится от вывода b, т. е. между ними не будет проводимости. После отпускания кнопки выводы a и b соединятся снова.

Одна и та же кнопка может объединять в своей конструкции несколько нормально разомкнутых и несколько нормально замкнутых контактов. Пример такой кнопки приведен на рис. 2. В исходном состоянии между выводами a и b проводимости нет. Нет ее и между выводами c и d. Но выводы e и f соединены между собой. Соединены между собой и выводы k и m. Нажмем кнопку. Тогда все нормально разомкнутые контакты замкнутся, а все нормально замкнутые – разомкнутся.

Примечание. На рис. 2 через все контакты проведены две параллельные линии. Они не являются токопроводящими и обозначают тот факт, что нажатие кнопки действует на все контакты, через которые проходят эти параллельные линии.

Другим контактным элементом, получившим по сравнению с многочисленными кнопками и переключателями не меньшее распространение в промышленности и быту, являются электромагнитные реле. Различие между кнопками и реле состоит только в том, что все кнопки изменяют свое состояние под действием внешних механических сил, в то время как в электромагнитных реле для переключения контактов точки приложения внешних механических сил не предусмотрены, а изменение состояния контактов вызывается электрическим током, подаваемым на обмотку электромагнита, имеющегося у каждого реле. Под действием электромагнита перемещается стальной якорь, который и переключает контакты.

Реле могут иметь несколько одновременно работающих контактов. При необходимости увеличить число контактов достаточно взять два, три (и более) реле и обмотки их электромагнитов соединить параллельно.

Условное изображение электромагнитного реле приведено на рис. 3, где прямоугольником обозначена обмотка электромагнита. Более подробные сведения об устройстве реле, их разновидностях и сфере применения можно найти в монографии [26], а также в [1; 12; 13; 18; 24; 36; 60].

2.2. Контактная реализация логических операций И, ИЛИ, НЕ

Контакты можно соединять последовательно и параллельно. На рис. 4 изображена цепь, содержащая индикаторную лампочку *H* и два последовательно соединенных контакта *A* и *B*. Буквы *A* и *B* – это не только обозначения кнопок, но и двоичные логические переменные со следующей интерпретацией: если кнопка *A* нажата, то $A = 1$, если не нажата, то $A = 0$; если $A = 1$, то кнопка *A* нажата, если $A = 0$, то кнопка *A* находится в ненажатом состоянии. То же самое относится и к кнопке *B*.

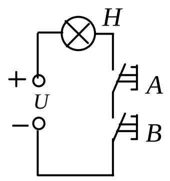


Рис. 4

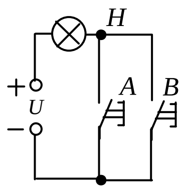


Рис. 5

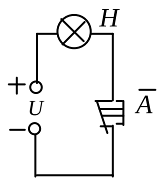


Рис. 6

По схеме (рис. 4) видно, что индикатор загорится только в том случае, когда $A = B = 1$ (то есть обе кнопки нажаты). Следовательно, состояние лампочки есть функция состояний кнопок. Обозначим ее буквой *f*. Очевидно, что функция *f* – это конъюнкция аргументов *A* и *B* (операция И): $f = AB$. Таким образом, последовательному соединению контактов соответствует операция конъюнкции.

На рис. 5 приведена схема управления лампочкой, когда контакты соединены параллельно. Лампочка не горит только в одном случае: если ни одна кнопка не нажата. Следовательно, состояние лампочки есть функция аргументов *A* и *B* вида $f = A + B$, т. е. параллельному соединению контактов соответствует операция дизъюнкции.

На рис. 6 лампочкой управляет одна кнопка $\overline{A}$. При ненажатой кнопке лампочка горит, что соответствует случаю, когда $A = 0$. Если кнопку нажать (то есть принять $A = 1$), то лампочка погаснет. Следовательно, состояние лампочки есть функция вида $f = \overline{A}$, т. е. нормально замкнутый контакт реализует операцию инверсии (операцию НЕ).

Упражнения

1. Запишите выражения функций, описывающих состояния лампочек на схеме (функция f_1 соответствует индикатору H_1, f_2 – индикатору H_2) (лат.):

(15П) рис. 7. $f = \ldots$; (АЗО) рис. 8. $f_1 = \ldots$;
(629) рис. 8. $f_2 = \ldots$; (УЯМ) рис. 9. $f_1 = \ldots$;
(АУК) рис. 9. $f_2 = \ldots$; (ТВП) рис. 10. $f = \ldots$

2. (АКИ). На рис. 7 контакт *B* заменили проводником. Напишите выражение функции, описывающей состояние лампочки *H* (лат.).

3. (221). На рис. 5 контакт *A* заменили проводни-ком. Напишите выражение функции, описывающей со-стояние лампочки *H* (лат.).

4. (МОМ). На рис. 8 точки *a* и *b* соединили проводником. Найдите функции f_1 и f_2 (лат.).

5. (ПИН). На рис. 8 проводником соединили точки *b* и *d*. Найдите функции f_1 и f_2 (лат.).

6. Запишите функции f_1 и f_2 (рис. 9), если проводником соединены точки: (870) *a* и *b*; (0Р0) *a* и *b*, *d* и *e*; (ГУ0) *b* и *d*; (АШУ) *b* и *d*, *b* и *k* (лат.).

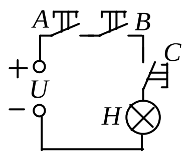


Рис. 7

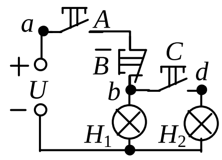


Рис. 8

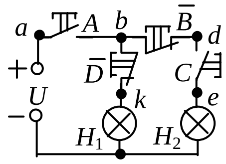


Рис. 9

7. (ПКТ). Лампочка управляется четырьмя кнопками: *A*, *B*, *C*, *D*. Запишите выражение функции, описывающей состояние лампочки, если она загорается, когда нажаты кнопки *A* и *C*, а остальные не нажаты (лат).

8. (ППМ). Лампочка управляется четырьмя кнопками: *A*, *B*, *C*, *D*. В исходном состоянии лампочка горит. Гаснет же в единственном случае, когда нажаты кнопки *B* и *C* и не нажаты кнопки *A* и *D*. Запишите выражение функции, описывающей состояние лампочки (лат).

9. (ЯКЕ)! Сколько существует наборов значений аргументов *A*, *B*, *C*, при которых горит лампочка H_1 (рис. 8)? То же самое определите для лампочки H_2.

10. (АЛК). Сколько существует наборов значений аргументов *A*, *B*, *C*, *D*, при которых горит лампочка H_1 (рис. 9)? То же самое определите для лампочки H_2.

2.3. Построение контактной структуры по булевой функции

Всякой булевой функции соответствует некоторая контактная структура. Выясним, как построить эту структуру. Пусть булева функция имеет вид

$$f = A\overline{B} + CD\overline{E}\ .$$

Из предыдущего подраздела известно, что конъюнкции соответствует последовательное соединение контактов. В записи заданной функции имеется две конъюнкции. Следовательно, строим две цепи контактов, а сами цепи соединяем параллельно, так как конъюнкции объединены знаком дизъюнкции (рис. 11). Заметим, что всем аргументам, входящим в выражение функции со знаком инверсии, в контактной структуре соответствуют нормально замкнутые контакты.

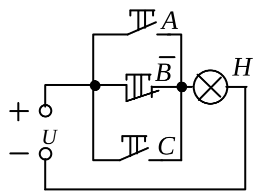


Рис. 10

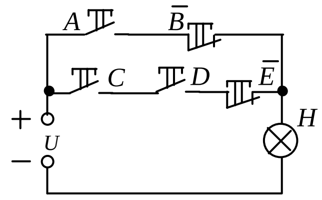


Рис. 11

Графическое изображение схемы, приведенной на рис. 11, можно упростить без потери информации о логических связях в структуре, если удалить изображения кнопок. Получим схему, приведенную на рис. 12. Так как на схеме остались одни контакты, то можно говорить, что достигнута определенная степень абстракции: контакты могут принадлежать и кнопкам, и электромагнитным реле, и другим контактным элементам.

Схему (рис. 12) можно еще упростить, если удалить графическое изображение контактов, а в образовавшиеся разрывы вписать соответствующие буквы. Получим схему, приведенную на рис. 13. Наконец, можно удалить источник электропитания и лампочку. Тогда схема превратится в двухполюсник (рис. 14). В таком виде мы и будем в дальнейшем изображать все контактные структуры.

Пусть дана булева функция, представленная в КНФ:

$$f = (A + B)(C + D + \overline{E})(\overline{F} + \overline{K}).$$

В записи этой функции содержится три дизъюнкции, в соответствии с чем изображаем три параллельно соединенные группы контактов, а сами группы соединяем последовательно (рис. 15).

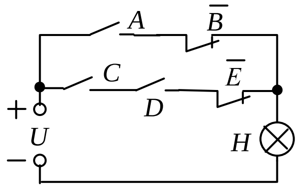


Рис. 12

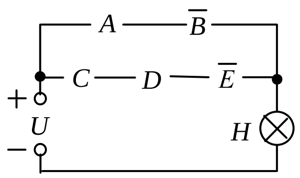


Рис. 13

В двух рассмотренных примерах функции являются бесповторными, т. е. каждый аргумент в их записи встречается только один раз. Пусть теперь функция содержит повторяющиеся аргументы:

$$f = A\,B\,\overline{C} + \overline{B}\,C\,D + \overline{E}\,.$$

Контактную структуру строим обычным образом: две цепи последовательно соединенных контактов включаем параллельно и также параллельно подключаем к ним нормально замкнутый контакт $\overline{E}$. По схеме (рис. 16) видно, что кнопки B и C должны содержать по два контакта, один из которых является нормально замкнутым, а второй – нормально разомкнутым.

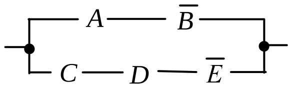


Рис. 14

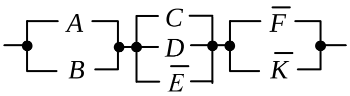


Рис. 15

В предыдущих примерах рассматривались нормальные формы функций. Выясним, как построить структуру по выражению функции, имеющей порядок выше второго. Пусть функция имеет вид

$$f = (A\,B + C)(\overline{A}\,\overline{B} + D) + K\,.$$

Сначала строим структуры скобочных выражений и соединяем их последовательно, после чего ко всей структуре параллельно подключаем контакт K (рис. 17).

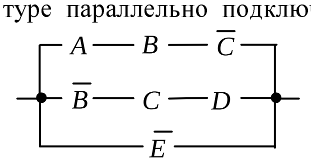


Рис. 16

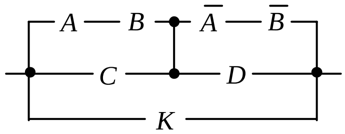


Рис. 17

Таким образом, на основе любой булевой функции можно построить контактную структуру. Но всякая булева функция имеет много форм аналитического представления. Следовательно, многими способами может быть реализована и каждая контактная структура. Рассмотрим, например, функцию вида

$$f = A\,B\; + \;\overline{A}\,C\; + \;\overline{B}\,C\,.$$

Ее схема приведена на рис. 18. Для построения схемы необходимо использовать три сложных элемента (кнопки либо реле): два из них должны иметь один нормально замкнутый контакт и один нормально разомкнутый, а третий – два нормально разомкнутых контакта.

Рис. 18

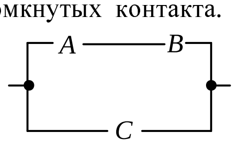


Рис. 19

Упростим функцию:

$$f = A\,B + \;\overline{A}\,C + \;\overline{B}\,C = A\,B + C\,.$$

Соответствующая ей контактная структура приведена на рис. 19.

Структуры, изображенные на рис. 18 и 19, являются логически равными, поскольку описывающие их булевы функции тождественно равны. Но первая структура сложнее второй, поэтому практический интерес представляет лишь вторая структура. Таким образом, физический смысл минимизации булевых функций, описывающих работу контактных структур, состоит в том, что обеспечивается возможность найти **минимальную структуру**, содержащую наименьшее число контактов.

Упражнения

1. Постройте контактную структуру, если

$$f = A\,\overline{B} + C\overline{D} + \overline{P}\,\overline{Q}\,:$$

а) (Е41). Найдите число нормально разомкнутых контактов и число нормально замкнутых контактов, необходимых для построения этой структуры;

б) (ТЫС). Ниже приведено шесть наборов значений аргументов A, B, C, D, P, Q, Укажите номера тех наборов, на которых двухполюсник замкнут:

1) 0 1 0 1 1 0 ; 3) 0 1 1 0 1 1 ; 5) 1 1 1 1 1 0 ;
2) 1 1 0 0 0 0 ; 4) 0 0 1 1 0 1 ; 6) 1 0 1 0 0 1 ;

в) (ТБМ). Пусть кнопка P нажата (т. е. P=1). Укажите все наборы значений аргументов A,B,C,D (в десятичной системе), при которых двухполюсник замкнут.

2. (Г12). Найдите общее число контактных элементов (реле или кнопок) и число элементов, содержащих только нормально разомкнутые контакты, если

$$f = (A + B)(C + D) + (P\,Q + \;\overline{A}\,\overline{B})\overline{R}\,.$$

3. (ОРМ). Найдите общее число контактных элементов структуры, описываемой функцией

$$f = (\overline{A}B + A\overline{B})(C\overline{D} + \overline{C}D) + AF + FPQR\,.$$

4. (А47). Укажите номера логически равных структур на рис. 20.

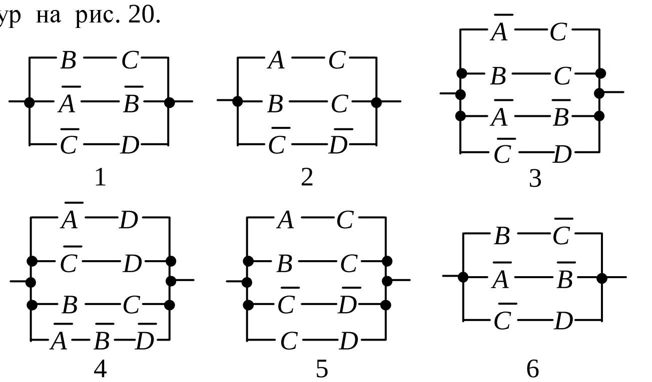


Рис. 20

5. Найдите минимальную ДНФ такой булевой функции, контактная структура которой является логически равной структуре, приведенной на рис. 17:

а) (ИЛ.СИ). Наберите эту функцию (лат.);

б) (ТН). Сколько нормально разомкнутых и сколько нормально замкнутых контактов имеет структура, построенная по найденной минимальной ДНФ функции;

в) (ИЖ). Для $K = 0$ укажите десятичные эквиваленты наборов значений аргументов A, B, C, D, на которых структура является проводящей (т. е. вход соединен с выходом);

г) (34). То же самое для $K = 1$.

2.4. Логический синтез контактных структур

Пусть заданы условия работы некоторой контактной схемы. Чтобы построить структуру, работающую в соответствии с этими условиями, необходимо осуществить ее логический синтез, т. е. выполнить определенные операции, в результате которых разработчик получит полную информацию о том, как должны быть соединены между собой контактные элементы. В большинстве практических случаев логический синтез сводится к нахождению одной или нескольких булевых функций, описывающих работу искомой структуры. В общем случае последовательность действий при синтезе контактных структур состоит в следующим:

1) определяем число n контактных элементов;

2) строим таблицу всех n-разрядных двоичных чисел, в которых согласно принятой интерпретации логических переменных нуль обозначает исходное состояние контактного элемента, а единица – его активное состояние (кнопка нажата, реле включено и др.). Тогда каждое n-значное двоичное число таблицы можно рассматривать как n-разрядный набор состояний контактных элементов;

3) каждому двоичному n-разрядному числу ставим в соответствие единицу или нуль (записываем их справа от n-разрядных двоичных чисел) в зависимости от того, должна ли структура быть проводящей или разомкнутой;

4) полученную таблицу рассматриваем как таблицу соответствия (истинности), по которой находим СДНФ булевой функции (либо СКНФ);

5) минимизируем булеву функцию;

6) по минимальной форме строим искомую схему.

На этапе построения контактной структуры ее логический синтез заканчивается. После этого остается только выбрать вариант подключения построенной структуры к управляемому объекту. На рис. 21 показан основной способ включения контактного двухполюсника в контур релейного управления объектом. На рис. 22 приведена разновидность той же схемы, особенность которой состоит в том, что один полюс (любой) контактного двухполюсника всегда подключен к общей точке.

Рис. 21

Рис. 22

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Три кнопки A, B, C управляют лампочкой так, что она загорается в том случае, если одновременно нажаты кнопки A и B либо одновременно нажаты кнопки B и C. Построить контактную структуру.

Таблица 1

	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

В данном случае число контактных элементов равно 3, следовательно, таблица содержит восемь строк (табл.1). В каждой ее строке записано трехразрядное двоичное число. Левая колонка является вспомогательной, в ней указаны десятичные эквиваленты двоичных чисел. Правая часть таблицы обозначена буквой f. Согласно условию лампочка должна загораться, если нажаты одновременно две кнопки: A и B. При этом о кнопке C ничего не говорится. Следовательно, если нажать все кнопки, то лампочка также должна гореть. Это значит, что в колонке f необходимо поставить единицы в строках, где записаны двоичные числа 110 и 111.

Согласно второму условию лампочка горит, если нажать одновременно кнопки B и C. При этом о кнопке A также ничего не сказано. Следовательно, в колонке f на пересечении со строками, в которых записаны двоичные коды 011 и 111, ставим единицы. Поскольку в строке 111 уже есть единица, то вторично ее не записываем. Все остальные строки колонки f заполняем нулями. Получилась **таблица соответствия**. Согласно таблице после минимизации получаем: $f = B(A + C)$. Соответствующая контактная структура приведена на рис. 23.

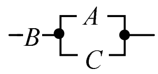


Рис. 23

Пример 2. Найти минимальную контактную структуру, работающую согласно условиям: кнопки A, B, C, D управляют лампочкой; лампочка горит, если одновременно нажаты кнопки B и C, либо одновременно нажаты кнопки A, C, D, а кнопка B не нажата, либо одновременно нажаты кнопки C и D, а кнопки A и B не нажаты.

Без применения булевой алгебры эта задача больше походит на головоломку, для решения которой потребуются значительные усилия. С применением же булевой алгебры задачу легко и быстро решит каждый, кто освоил предыдущий материал.

В задаче сформулировано три условия, при которых лампочка горит. Для удобства каждому из них поставим в соответствие отдельную функцию. Согласно первому условию лампочка горит, если нажаты кнопки B и C, а о кнопках A и D ничего не сказано. Следовательно, функция f_1 принимает единичное значение на всех наборах, на которых $B = C = 1$. Всего существует четыре таких набора: 0110, 0111, 1110, 1111. В соответствии с этим в табл. 2 на пересечении строк 6, 7, 14, 15 и колонки f_1 записываем единицы, а все остальные места занимаем нулями. В результате получаем СДНФ: $f_1 = (6,7,14,15)$.

Таблица 2

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0
10	1	0	1	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	0	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	1	0	0

Во втором условии упоминаются все кнопки: лампочка загорается всякий раз при $A = C = D = 1$, $B = 0$, т. е. контактная структура замкнута только на одном наборе 1011. В колонке f_2 на пересечении со строкой 11 записываем единицу, а во всех остальных строках ставим нули. СДНФ функции имеет вид $f_2 = (11)$.

В третьем условии также упоминаются все четыре кнопки: лампочка горит на наборе 0011. СДНФ функции f_3 имеет вид $f_3 = (3)$.

Согласно условию задачи все три функции необходимо объединить в одну. В результате такого объединения получаем СДНФ искомой функции:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = (3, 6, 7, 11, 14, 15).$$

После минимизации функция принимает вид

$$f = C(B + D).$$

Получился очень интересный результат. Во-первых, каждая буква входит в выражение функции только один раз. Следовательно, можно использовать лишь простейшие кнопки. Во-вторых, в минимальной форме функции f нет буквы A. Это значит, что кнопка A на состояние лампочки никакого влияния не оказывает. На лицевой панели устройства, где должны быть размещены кнопки, кнопка A вообще может не иметь контактов.

Пример 3. Построить контактную структуру, управляющую лампочкой при помощи четырех кнопок A,B,C,D следующим образом. Лампочка горит, если одновременно нажато не менее двух любых кнопок, либо нажата одна кнопка A, но кнопки B и C не нажаты, либо нажата кнопка D, а кнопки B и C не нажаты.

Рассмотрим первое условие. Что значит «нажато не менее двух кнопок»? Это значит, что одновременно нажаты либо все четыре кнопки, либо три из них (любые), либо две (также любые).

Случаю, когда нажаты все четыре кнопки, соответствует булева функция вида

$$f_1 = (15) = ABCD.$$

Если нажаты любые три кнопки, то получаем симметрическую функцию с a-числом, равным трем:

$$f_2 = S_3(A,B,C,D) = (7,11,13,14).$$

Если нажаты любые две кнопки, то

$$f_3 = S_2(A,B,C,D) = (3,5,6,9,10,12).$$

Согласно второму и третьему условиям имеем:

$$f_4 = (8,9); \qquad f_5 = (1,9).$$

Все пять функций объединяем в одну и упрощаем:

$$f = (1,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15) = A + D + BC.$$

Как и в предыдущем случае, для построения структуры достаточно четырех простейших кнопок, содержащих по одному нормально разомкнутому контакту.

Упражнения

1. Постройте контактную структуру, работающую следующим образом: лампочка горит только в том случае, если нажаты кнопки B и D, а кнопки A и C не нажаты. (218)! Найдите булеву функцию f =…, описывающую состояние лампочки (лат.); определите число нормально замкнутых контактов.

2. Постройте контактную структуру на четырех кнопках A,B,C,D. Лампочка горит, если одновременно нажаты кнопки B и C, а кнопка A не нажата. (289). В устройство введите минимальную ДНФ булевой функции f =… (лат.) и число нормально замкнутых контактов.

3. (УБО). Лампочка управляется четырьмя кнопками A,B,C,D и горит на наборах 3,5,6,7,9,11,13,14,15. Для минимальной ДНФ постройте контактную структуру. В устройство введите числа a, b, c, d, где a – число контактов кнопки A, b – число контактов кнопки B, c – число контактов кнопки C, d – число контактов кнопки D.

4. Три кнопки управляют лампочкой так, что если все кнопки не нажаты, то лампочка горит. При нажатии любой кнопки лампочка гаснет. Постройте минимальную контактную структуру. (ЭЙО)! Найдите число нормально разомкнутых и число нормально замкнутых контактов.

5. На основе минимальной ДНФ постройте контактную структуру при условии, что лампочка, управляемая кнопками A,B,C,D, горит в двух случаях: когда нажаты все кнопки и когда не нажато ни одной кнопки. (УТМ)! Найдите число всех контактов и число нормально замкнутых контактов.

6. (ХНН)! Три кнопки управляют одной лампочкой. Эта лампочка загорается только в том случае, если нажаты точно две любые кнопки. Сколько всего контактов в структуре, построенной на основе минимальной ДНФ функции, описывающей эту структуру? Сколько всего контактов в структуре, построенной на основе минимальной КНФ?

7. (Б50)! Четыре кнопки управляют одной лампочкой так, что лампочка горит, если нажаты точно две кнопки (любые). Сколько всего контактов в схеме, построенной на основе минимальной ДНФ булевой функции, описывающей эту схему? Сколько всего контактов в схеме, построенной на основе минимальной КНФ?

8. (ФУТ). Четыре кнопки A, B, C, D управляют одной лампочкой следующим образом: лампочка горит, если нажато четное число кнопок. Постройте структуру на основе минимальной ДНФ булевой функции. В устройство введите общее число контактов всей структуры.

9. (ГНИ)! Две группы кнопок A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 управляют одной лампочкой так, что лампочка загорается всякий раз, когда набор значений аргументов группы A равен набору значений аргументов группы B (схема равенства). Постройте контактную структуру на основе минимальной булевой функции (третьего порядка). В устройство введите общее число контактов всей структуры и число нормально замкнутых контактов.

10. (ПО.СИ). В устройство четырьмя кнопками вводятся двоичные коды, где нажатой кнопке соответствует единица. Контактная структура включает лампочку всякий раз, когда вводимый код является простым числом. Коды 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 подаваться на вход устройства не будут. Наберите минимальную ДНФ булевой функции, описывающей контактную структуру (функцию упростите с учетом неопределенных состояний).

2.5. Мостиковые структуры

При помощи булевых функций можно строить только последовательно-параллельные схемы. Однако кроме них существуют так называемые мостиковые структуры. Простейшим примером может служить схема, приведенная на рис. 24. Мостиковые структуры отличаются следующими особенностями. Во-первых, непосредственно по выражениям булевых функций их построить нельзя, но для всякой мостиковой структуры можно найти булеву функцию. (Для нахождения булевой функции, описывающей сложную мостиковую структуру, можно использовать метод, изложенный в подразделе 2.3 «Теории графов» данного пособия.) Во-вторых, мостиковые структуры часто значительно экономичнее соответствующих параллельно-последовательных схем. Например, схема (рис. 24) содержит пять контактов (букв), а минимальная ДНФ функции, описывающей работу этой схемы, содержит 10 букв:

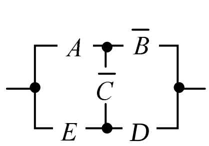


Рис. 24

$$f = A\overline{B} + A\overline{C}D + \overline{B}\,\overline{C}E + DE.$$

Даже путем повышения порядка функции уменьшить число букв удается только до восьми:

$$f = A(\overline{B} + \overline{C}D) + E(D + \overline{B}\,\overline{C}).$$

То же самое относится и к конъюнктивным формам этой функции.

Как же строят мостиковые структуры? Существуют ли методы, позволяющие по булевой функции найти самую (абсолютно) экономичную структуру? Нет. До сих пор не существует общего метода нахождения мостиковых структур по заданной булевой функции, тем более – абсолютно экономичных. Однако для частных случаев разработано много различных способов и методов построения мостиковых структур, хотя и без гарантий того, что они являются абсолютно экономичными. С некоторыми из них можно ознакомиться по [26].

Упражнения

1. Найдите минимальную ДНФ булевой функции по мостиковой структуре (рис. 25). (ПП1). Определите число простых импликант и число вхождений аргументов для минимальной ДНФ.

2. По схеме, приведенной на рис. 26, найдите минимальную ДНФ. (ТАФ)! Определите число вхождений аргументов и число простых импликант для минимальной ДНФ. Найдите число вхождений аргументов для минимальной КНФ.

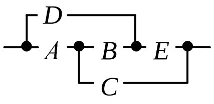


Рис. 25

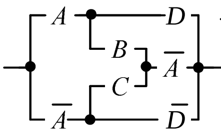


Рис. 26

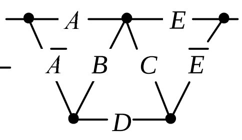


Рис. 27

3. По рис. 27 найдите минимальную ДНФ. (У01). Определите число вхождений аргументов.

2.6. Симметрические структуры

Симметрической называется контактная структура, реализующая симметрическую булеву функцию. Известно, что симметрические булевы функции с одиночными a-числами не поддаются минимизации в смысле Квайна (см. первую часть данного пособия), поэтому контактные структуры, построенные на их основе, являются чрезвычайно громоздкими. Однако в классе мостиковых схем существуют очень экономичные контактные структуры, реализующие любые симметрические булевы функции. Например, на рис. 28 показана мостиковая схема, реализующая симметрическую булеву функцию вида

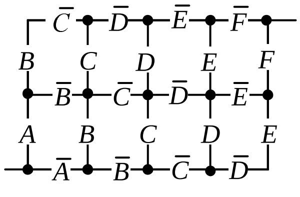


Рис. 28

$$f = S_2(A,B,C,D,E,F),$$

зависящую от шести аргументов. Аналитическое представление этой функции в минимальной ДНФ содержит 15 конъюнкций по 6 переменных каждая, среди которых две переменные представлены в неинверсной (прямой) форме, а все остальные являются инверсными. Если по такой функции построить контактную структуру (в классе параллельно-последовательных схем), то в ней окажется 90 контактов, в то время как мостиковая структура (рис. 28) содержит всего лишь 22 контакта.

Пусть n – число аргументов симметрической булевой функции $S_2(n)$, представленной в ДНФ. Тогда число N вхождений ее аргументов равно:

$$N = nC_n^2 = \frac{n^2(n-1)}{2}.$$

Если порядок функции не повышать, то для ее реализации потребуется столько же контактов.

Число M контактов, входящих в мостиковую структуру, построенную по функции $S_2(n)$, равно ($n \geq 2$):

$$M = 5n - 8.$$

Если параллельно-последовательная схема построена на основе ДНФ симметрической функции $S_2(n)$, то мостиковая структура экономичнее параллельно-последовательной в k раз:

$$k = \frac{n^2(n-1)}{2(5n-8)}.$$

По этой формуле видно, что с ростом числа переменных экономичность мостиковой структуры возрастает. Например, при $n = 6$ мостиковая структура экономичнее параллельно-последовательной в 4,1 раза; при $n = 10$ – в 10,7 раз; при $n = 20$ – в 41,3 раза и т. д.

С увеличением a-числа до $n/2$ экономичность мостиковой структуры также возрастает. Например, число N вхождений аргументов функции $S_3(n)$ равно:

$$N = nC_n^3 = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}.$$

Число M контактов, входящих в мостиковую структуру, для той же функции $S_3(n)$ равно:

$$M = 7n - 18.$$

При $n = 6$ мостиковая структура экономичнее параллельно-последовательной в 5 раз; при $n = 10$ – в 23,1 раза; при $n = 20$ – в 187 раз и т. д.

Упражнения

1. (ФОК). Сколько контактов потребуется для реализации симметрической функции $S_2(8)$ в виде мостиковой структуры?

2. (136)! Сколько контактов необходимо для реализации функции $S_3(4)$ в классе параллельно-последовательных схем (без повышения порядка) и сколько – в мостиковой структуре?

3. (ТУК). Мостиковая структура, реализующая функцию $S_2(n)$, имеет 32 контакта. Сколько контактов потребуется для реализации функции в классе параллельно-последовательных схем, если порядок функции не повышать?

4. Требуется построить контактную структуру, реализующую функцию вида

$$f = S_2(A, B, C, D, E, F) \cdot S_3(P,Q,R,S,T).$$

а) (987). Сколько контактов необходимо для реализации этой функции с помощью мостиковой структуры?

б) (У87). Сколько контактных элементов (например, реле) потребуется для построения этой структуры?

в) (ЗЕЛ). Сколько всего контактов потребуется, если по этой функции построить параллельно-последовательную схему (порядок функции не повышать)?

г) (ЯС5). Сколько инверсных букв в схеме, представленной в виде мостиковой структуры?

5. Определите число контактов для двух реализаций нижеприведенных функций – сначала в классе параллельно-последовательных схем, затем с помощью мостиковых структур:

а) (А79)! $S_0(A,B,C,D,)$; в) (ВЕЮ)! $S_5(A,B,C,D,E)$;
б) (АЯН)! $S_1(P,Q,R,S,T)$; г) (ГЕО)! $S_5(A,B,C,D,E,F)$.

6. (ИТП). Мостиковую структуру, реализующую функцию $S_2(5)$, удлинили вдвое по числу аргументов. Сколько контактов в новой структуре?

7. (280). В мостиковой структуре, реализующей симметрическую функцию $S_3(6)$, приняли $A = 1$. При этом некоторые контакты перестали участвовать в работе схемы и их можно удалить. Сколько контактов останется в структуре после удаления всех неработающих контактов?

2.7. Полная симметрическая структура Шеннона

Шеннон (ударение на букву «е») Клод Эльвуд – американский инженер и математик, специалист по математической теории информации, теории релейно-контактных схем, математической теории связи, кибернетике.

Полная симметрическая структура Шеннона – это контактная сеть, имеющая общий полюс и $n+1$ выходных полюсов, каждому из которых соответствует симметрическая функция n аргументов с определенным a-числом. На рис. 29 приведена полная структура для симметрических функций пяти аргументов. Структура имеет шесть выходов. Если контактными элементами являются реле, то выход $S_0(5)$ соединен с общим полюсом при выключенных всех пяти реле. Выход $S_1(5)$ соединяется с общим полюсом, если включено любое одно реле. Выход $S_2(5)$ соединяется с общим полюсом при двух включенных реле (любых) и так далее до выхода $S_5(5)$, который соединяется с общим полюсом, когда включены все пять реле.

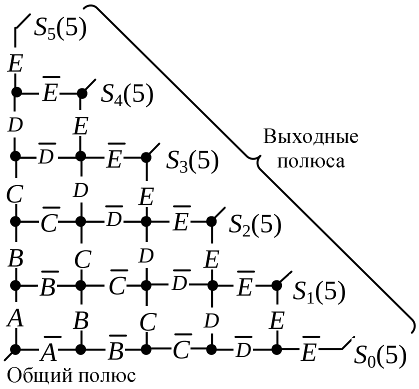


Рис. 29

По схеме (рис. 29) видно, что симметрическая структура Шеннона имеет однородное строение, и ее можно наращивать до любых пределов. На основе полной структуры построено много различных схем, имеющих большое практическое значение [26].

Упражнения

1. Пусть номерами выходов на рис. 29 являются a-числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Укажите номера выходов, соединенных с общим полюсом, если:

а) (281) $A = B = 1, \quad C = D = E = 0$;

б) (ВЛИ) $B = C = E = 1, \quad A = D = 0$;

в) (ШЕЛ) $B = C = D = E = 1, \quad A = 0$.

2. Сколько существует наборов значений аргументов A,B,C,D,E, на которых с общим полюсом соединен выход: (МОК) $S_2(5)$; (229) $S_3(5)$; (839) $S_4(5)$; (ТВС) $S_5(5)$.

3. (АЯМ). Структуру, изображенную на рис. 29, расширили на два контактных элемента F и K. Сколько всего контактов в расширенной структуре?

4. (289). Полная симметрическая структура содержит 380 контактов. Сколько в ней контактных элементов?

5. (ЯВЭ). При помощи основной симметрической структуры реализовали функцию $S_1(5) + S_4(5)$. Сколько контактов в получившейся схеме?

2.8. Структура «чет-нечет»

Применение полной симметрической структуры проиллюстрируем на примере следующей задачи. В комнате имеется n дверей, на потолке ее укреплена лампочка. Рядом с каждой дверью расположен двухпозиционный переключатель. Любой входящий через какую-либо дверь включает лампочку (при помощи переключателя), если она не горит, и выключает ее, выходя через ту же или другую дверь. Требуется построить схему соединения лампочки с переключателями и источником электрической энергии [24; 26; 31; 33; 56]. Такую схему нередко называют структурой «чет-нечет».

В [26, с. 269–272] эта задача решена следующим образом. В основной симметрической структуре соединили все выходы с четными a-числами. Затем схему упростили путем свертки, т. е. удалили лишние контакты. В результате получилась структура, приведенная на рис. 30.

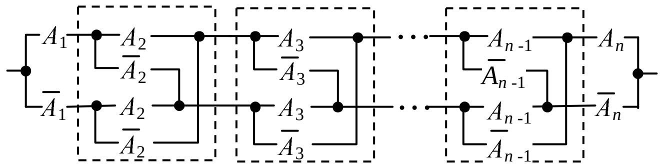


Рис. 30

По схеме (рис. 30) видно, что, последовательно соединяя ячейки, можно построить схему любой длины.

Аналогичная схема получается в результате свертки основной симметрической стркутуры, если объединить ее входы, соответствующие нечетным a-числам.

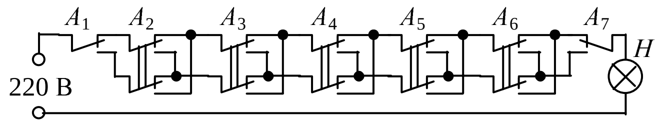


Рис. 31

На рис. 31 для $n = 7$ представлена схема «чет», где в качестве контактных элементов использованы двухпозиционные переключатели, иногда называемые тумблерами. Для построения схемы использовано 7 тумблеров, каждый из которых содержит по две переключательные группы контактов, за исключением первого и последнего, содержащих по одной переключательной группе. (Тумблер – малогабаритный механический переключатель на 2 положения, иногда на 3. В переводе с английского tumble – опрокидываться [47].) В том состоянии тумблеров, в каком они изображены на рис. 31, лампочка горит. Переведем какой-либо тумблер во второе положение – лампочка погаснет. Включить ее можно любым тумблером, переведя его в противоположное состояние.

Упражнения

1. (ТТО). Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_7$ – разряды двоичного числа на рис. 31. Сколько существует 7-значных чисел, при которых лампочка горит?

2. (899). Укажите номера нижеприведенных двоичных чисел, при которых лампочка на рис. 31 горит, если $A_1, A_2, \ldots, A_7$ – разряды двоичного числа (все тумблеры изображены в нулевом состоянии):

1) 1 0 0 1 1 0 1; 4) 1 1 1 0 1 1 1; 7) 1 0 0 1 0 0 0;
2) 0 0 1 0 1 0 1; 5) 0 1 0 1 1 1 0; 8) 1 1 1 0 0 0 1;
3) 0 0 0 0 1 1 1; 6) 0 0 1 0 0 0 0; 9) 1 1 0 0 0 0 1.

2.9. Пример практического применения структуры «чет-нечет»

В многоэтажных жилых домах электрические лампы, освещающие лестничные площадки, бесполезно горят в течение всего темного времени суток (а иногда и светлого). Для жильцов это очень удобно, особенно при отсутствии лифта: в любой момент можно подняться на тот или иной этаж, пройти с одного этажа на другой. При этом хорошо видно номера квартир, нет риска оступиться на ступеньках лестницы. Но это удобство обеспечивается за счет явного перерасхода электрической энергии.

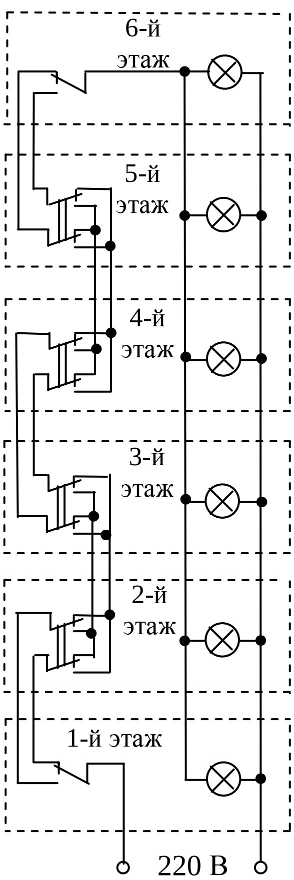


Рис. 32

Наилучшим представляется вариант, когда освещение включается только при необходимости, а в течение всего остального времени лампы не горят. В связи с этим задачу сформулируем следующим образом. В подъезде жилого дома шесть этажей. На лестничной площадке каждого этажа имеется одна осветительная лампа. Требуется установить на этажах по одному двухпозиционному переключателю (тумблеру) так, чтобы любым из них можно было включить освещение на всех этажах одновременно и любым выключить.

Схема такого управления освещением лестничных площадок приведена на рис. 32. Ее основу составляет схема «чет-нечет». Пунктирными прямоугольниками на схеме обозначены лестничные площадки. Внутри прямоугольников изображены осветительные лампы и переключатели, а также указаны номера этажей. Все лампы соединены параллельно, благодаря чему они либо все горят, либо все погашены.

На схеме переключатели изображены так, что лампы не горят. Допустим, что жильцу пятого этажа потребовалось пройти на второй этаж. Он переводит свой переключатель в противоположное состояние – включается освещение на всех этажах. На втором этаже он таким же переключателем гасит все лампы.

По схеме видно, что она представляет собой последовательность одинаковых ячеек, поэтому может быть использована в домах с любым числом этажей. Ячейки соединяются между собой четырьмя проводниками. Из них два проводника реализуют схему «чет-нечет», и два использованы для параллельного соединения осветительных ламп.

2.10. Структуры с перестраиваемой схемой соединений

Суть задач, рассматриваемых в данном подразделе, состоит в следующем. Дан некоторый набор элементов, из которых можно составить несколько различных пронумерованных схем. Требуется построить контактную структуру так, чтобы путем перевода контактных элементов в то или иное состояние можно было получить схему с заданным номером. Все такие задачи решаются табличным методом. Поясним это на примерах.

Пример 1. Две лампочки управляются переключателями A и B следующим образом. На наборе значений аргументов 00 обе лампочки не горят. На наборе 01 обе лампочки горят, но соединены последовательно. На наборе 10 горит одна лампочка (любая). На наборе 11 горят обе лампочки, соединенные параллельно. По-строить структуру согласно условиям ее работы.

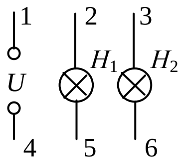


Рис. 33

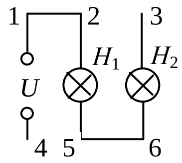


Рис. 34

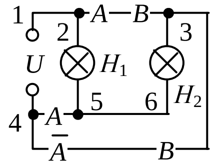


Рис. 35

В условии сказано, что имеется три объекта: источник питания U и две лампочки H_1 и H_2. Если эти три объекта никуда не подключены, то имеем шесть свободных выводов (рис. 33). Некоторые из них можно соединить заранее. Например, при параллельном включении лампочек должны быть соединены между собой выводы 2 и 3, а также выводы 5 и 6. При последовательном соединении одну из этих пар необходимо разомкнуть, вторая останется замкнутой. Поскольку одна пара выводов является замкнутой в обоих случаях, то такое соединение можно сделать заранее. Пусть это будут выводы 5 и 6. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что заранее можно соединить и выводы 1 и 2. В результате получим рис. 34. Все остальные соединения могут быть осуществлены только при помощи контактов.

Строим таблицу. В левой ее части записываем наборы значений аргументов A и B (табл. 3). В правой располагаем колонки f_{4-5}, f_{3-4}, f_{2-3}, где f_{4-5} – это функция, описывающая структуру контактного двухполюсника, соединяющего выводы 4 и 5 на рис. 34; f_{3-4} – функция, описывающая работу двухполюсника, соединяющего выводы 3 и 4; f_{2-4} – функция, описывающая двухполюсник, соединяющий выводы 2 и 3. Код 00 обозначает: обе лампочки не горят. Следовательно, в колонке f_{4-5} необходимо поставить нуль. То же самое и в колонке f_{3-4}. В колонке f_{2-3} ставим крестик, обозначающий неопределенное состояние, так как при $f_{4-5} = f_{3-4} = 0$ обе лампочки не горят независимо от состояния цепи f_{2-3}.

Таблица 3

A B	f_{4-5}	f_{3-4}	f_{2-3}
0 0	0	0	×
0 1	0	1	0
1 0	1	×	0
1 1	1	0	1

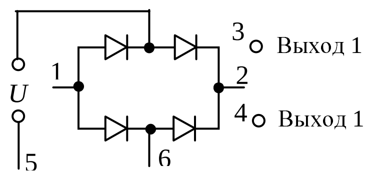


Рис. 36

Переходим к строке 01. Лампочки необходимо соединить последовательно и подключить к источнику U. Так как для этого достаточно соединить точки 3 и 4, то в колонке f_{3-4} ставим единицу, а в двух оставшихся колонках записываем нули.

Рассмотрим строку 10. Гореть должна одна лампочка, для чего достаточно соединить точки 4 и 5. В колонке f_{4-5} записываем единицу. Выводы 2 и 3 необходимо разомкнуть, следовательно, в колонке f_{2-3} ставим нуль. Выводы 3 и 4 можно замкнуть, но можно и разомкнуть – в обоих случаях лампочка H_2 гореть не будет. В колонке f_{3-4} записываем крестик.

Последняя строка соответствует случаю, когда обе лампочки соединены параллельно и подключены к источнику питания U. Для этого соединяем выводы 4 и 5, а также 2 и 3, что обозначаем единицами в колонках f_{4-5} и f_{2-3}. В колонке f_{3-4} записываем нуль, поскольку выводы 3 и 4 должны быть разомкнутыми.

Находим минимальные формы полученных функций:

$$f_{4-5} = A; \qquad f_{3-4} = \overline{A}B; \qquad f_{2-3} = AB.$$

Вставив соответствующие контактные структуры между выводами 4 – 5, 3 – 4, 2 – 3, получим схему, работающую согласно заданным условиям (рис. 35).

Пример 2. На рис. 36 приведен выпрямительный мост, источник переменного тока U и две выходные клеммы «Выход 1» и «Выход 2». Контактные элементы A и B управляют схемой следующим образом. На наборе 00 мост отключен от источника U. На наборе 01 мост подключен к источнику U, и постоянное напряжение подается: ПЛЮС – на выход 1, МИНУС – на выход 2. На наборе 10 напряжение подается: ПЛЮС – на выход 2, МИНУС – на выход 1. Набор 11 является неиспользуемым. Построить схему согласно этим условиям.

Таблица 4

A	B	f_{5-6}	f_{1-3}	f_{2-4}	f_{1-4}	f_{2-3}
0	0	0	×	×	×	×
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	×	×	×	×	×

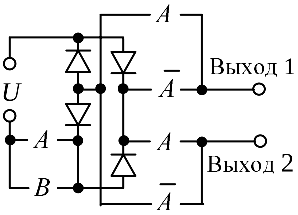


Рис. 37

Строим таблицу (табл. 4). По таблице находим булевы функции, описывающие работу схемы. После минимизации получаем:

$$f_{5-6} = A + B; \qquad f_{1-3} = f_{2-4} = A; \qquad f_{1-4} = f_{2-3} = \overline{A}.$$

Найденные контактные структуры включаем между соответствующими точками схемы, изображенной на рис. 36. Окончательный вариант схемы, работающей согласно заданным условиям, приведен на рис. 37.

Упражнения

1. На схеме (рис. 38) при помощи контактов соедините точки 1, 2, 3, 4 так, чтобы обеспечивалось два варианта подключения резисторов к клеммам a и b: если A = 0, то к клеммам подключаются последовательно соединенные резисторы; если A = 1, то к выходам подключаются те же резисторы, но соединенные параллельно. (ККН)! Найдите выражения следующих функций:

$$f_{1-3} = \ldots; \qquad f_{2-3} = \ldots; \qquad f_{2-4} = \ldots .$$

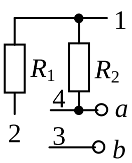


Рис. 38

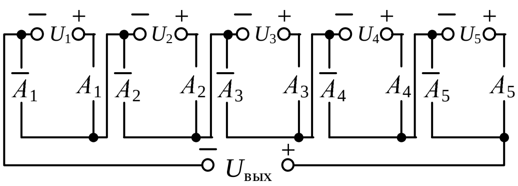


Рис. 39

2. На рис. 39 приведено пять источников ЭДС: U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, подключенных к выходным клеммам $U_{вых}$ при помощи пяти контактных элементов – тумблеров A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. При этом U_1 = 48 В; U_2 = 24 В; U_3 = 12 В; U_4 = 6 В; U_5 = 3 В. Пусть буквы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 соответствуют разрядам пятизначного двоичного числа, где A_5 – младший разряд. Сколько вольт составит напряжение $U_{вых}$, если при помощи тумблеров установить число:

(СНО) 10011? (УПО) 11110? (ЮЖЕ) 00011?
(З70) 00001? (КШИ) 00000? (ИЯШ) 10010?

3. Пусть на рис. 39 U_1 = 80 В; U_2 = 40 В; U_3 = 20 В; U_4 = 10 В; U_5 = 5 В. Какое двоичное число необходимо установить при помощи тумблеров A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, чтобы $U_{вых}$ было равно:

(ОТС) 125 В? (АКР) 45 В? (ЛГИ) 95 В?
(ЕЖВ) 150 В? (КЛТ) 60 В? (АОХ) 15 В?

2.11. Примеры контактных структур

Булева алгебра и созданные на ее основе методы синтеза контактных структур обычно дают хорошие результаты, но далеко не во всех случаях. Нередко для того чтобы построить экономичную контактную структуру, от разработчика в гораздо большей степени требуется инженерная смекалка, чем знание формальных методов проектирования контактных схем.

Таблица 5

A	B	f_{1-5}	f_{1-4}	f_{2-4}
0	0	0	×	×
0	1	0	×	×
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

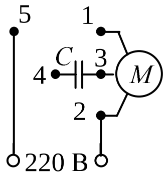


Рис. 40

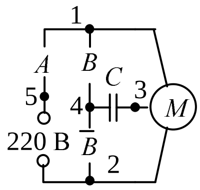


Рис. 41

Пример 1. Конденсаторный электрический двигатель M имеет три вывода: 1, 2, 3. На выводы 1 и 2 подается переменное напряжение (обычно 220 В). Вывод 3 подключается к выводу 1 через конденсатор. Двигатель при этом вращается, допустим, по часовой стрелке. Если вывод 3 присоединить через конденсатор к выводу 2, то двигатель будет вращаться в другую сторону. Требуется построить схему управления двигателем, используя два переключателя (тумблера) A и B, содержащие по одной переключательной группе контактов: если A = 0, то двигатель выключен; если A = 1, B = 0, то двигатель вращается по часовой стрелке; если A = B = 1, то двигатель вращается в другую сторону.

При наличии некоторого опыта эту задачу нетрудно решить и без применения булевой алгебры. Но в данном случае возможно применение табличного метода, рассмотренного в предыдущем подразделе.

На рис. 40 показано, какие выводы можно соединить постоянно. Введем обозначения: f_{1-5}, f_{1-4}, f_{2-4} – контактные структуры, соединяющие выводы 1 и 5, 1 и 4, 2 и 4 соответственно. Условия работы схемы приведены в табл. 5. Состояния 00 и 01 тумблеров соответствуют случаю, когда двигатель выключен. Крестики обозначают безразличные состояния. Код 10 обозначает вращение двигателя по часовой стрелке, 11 – против часовой стрелки. По таблице находим:

$$f_{1-5} = A; \qquad f_{1-4} = \overline{B}; \qquad f_{2-4} = B.$$

Схема, построенная в соответствии с этими функциями, приведена на рис. 41.

Пример 2. Дано: два тумблера, в каждом из которых содержится по две переключательные группы контактов (как на рис. 31); трансформатор, имеющий сетевую обмотку на 220 В и выходную обмотку на 30 В; нагрузка, например, осветительная лампа накаливания. Два тумблера имеют четыре состояния 00, 01, 10, и 11. Требуется соединить перечисленные элементы так, чтобы к нагрузке можно было подключить 0 В; 190 В; 220 В; 250 В.

Эту задачу легко решить формальным путем (табличным методом) точно так же, как это показано в предыдущем примере. Однако, идя таким путем, мы будем получать решения, не укладывающиеся в заданные условия по числу контактов. Подобные задачи больше походят на головоломки, для решения которых требуется некоторая изобретательность.

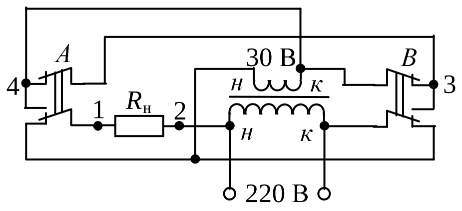


Рис. 42

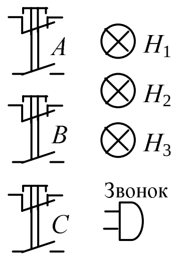


Рис. 43

Одно из возможных решений приведено на рис. 42. В состоянии 00, т. е. когда $A = B = 0$ (как изображено на рис. 42), к нагрузке $R_н$ подключено 220 В.

Пусть $B = 1$, тогда к нагрузке подключится сетевое напряжение 220 В и напряжение 30 В по цепи: точка 2 нагрузки – *н* (начало сетевой обмотки) – *к* (конец сетевой обмотки) – точка 3 – точка 4 – *к* (конец вторичной обмотки) – точка 1 нагрузки. По этой цепи видно, что к нагрузке подключена разность сетевого напряжения и напряжения вторичной обмотки, т. е. 190 В.

Пусть теперь $A = 1$, $B = 0$. К нагрузке подключена сумма напряжений сети и вторичной обмотки трансформатора, равная 250 В, по цепи 2 – *н* – *к* – *н* – *к* – 4 – 1.

Если $A = B = 1$, то напряжения на нагрузке нет.

Пример 3. Даны три кнопки, каждая из которых содержит один нормально разомкнутый контакт и один нормально замкнутый; три осветительные лампы накаливания и электрический звонок (рис. 43). Требуется соединить их так, чтобы при нажатии любой кнопки загоралась соответствующая лампа и звенел звонок. Если какая-либо лампа перегорит, звонок звенит по-прежнему с нажатием любой кнопки.

Для решения предыдущей задачи, в принципе, можно использовать булеву алгебру, если снять ограничение на число контактов. В данном же случае мы имеем дело с чистой головоломкой и булева алгебра здесь не поможет.

Решение приведено на рис. 44. Схема имеет регулярную структуру и может быть расширена до любого числа кнопок и соответствующих им осветительных ламп.

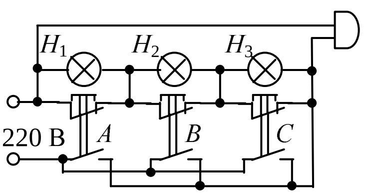


Рис. 44

Пример 4. Объекты *P* и *Q* соединены двумя проводниками. На объекте *P* расположены источник электрической энергии и два тумблера *A* и *B*. На объекте *Q* находятся две индикаторные лампочки. Если $A = 0$, то обе лампочки не горят. Если $A = 1$, $B = 0$, то горит только первая лампочка. При $A = B = 1$ горит только вторая. Построить схему согласно этим условиям.

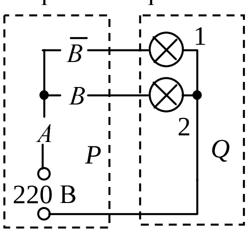


Рис. 45

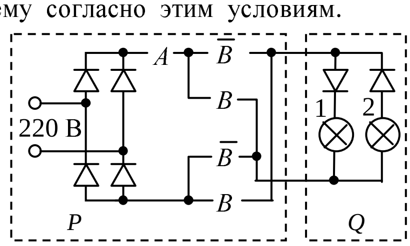


Рис. 46

Обычный логический расчет приводит к схеме, в которой для соединения объектов *P* и *Q* требуется три проводника (рис. 45), что не удовлетворяет условию задачи. Одно из правильных решений приведено на рис. 46. Суть его в том, что переменное напряжение выпрямляется при помощи диодного моста. Последовательно с лампочками включены диоды в противоположных направлениях. Тумблер *B* при переключении меняет полярность напряжения, подаваемого на объект *Q*. При той полярности, как изображено на схеме, горит лампочка 1. Если принять $B = 1$, то гореть будет только лампочка 2.

Эта схема, как и предыдущая, является головоломкой. Однако булева алгебра здесь частично может быть применена (при построении схемы контактных соединений), если сначала догадаться использовать диоды.

Пример 5. Два объекта *P* и *Q* соединены двумя проводниками. На объекте *P* расположены источник электрической энергии и два тумблера *A* и *B*. На объекте *Q* находятся две индикаторные лампочки. Если $A = B = 0$, то обе лампочки не горят. При $A = 1$, $B = 0$ горит первая лампочка, вторая не горит. При $A = 0$, $B = 1$ горит вторая лампочка, первая не горит. При $A = B = 1$ горят обе лампочки. Построить схему согласно этим условиям.

Булева алгебра здесь не поможет. Это задача на смекалку. Решение ее приведено на рис. 47.

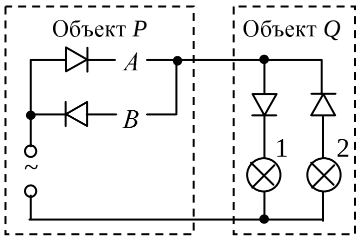


Рис. 47

Таким образом, несмотря на существование хорошо разработанной теории контактных структур, во многих случаях наилучшие решения обеспечивают не формальные методы, а опыт, инженерная интуиция и смекалка разработчика.

Упражнения

1. (762). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (см. рис. 42).

1) к выходной обмотке трансформатора (обозначенной «30 В») подключили индикаторную лампочку, загорающуюся при 30 В. Верно ли, что лампочка будет гореть, если напряжение на нагрузке равно нулю?

2) будет ли лампочка гореть, если $A = B = 0$?

3) протекает ли ток через нагрузку $R_н$ при $A = B = 1$?

4) верно ли, что на схеме имеются нормально замкнутые контакты, соединенные параллельно?

5) верно ли, что если к нагрузке $R_н$ приложено 220 В, то напряжение выходной обмотки равно нулю?

6) верно ли, что трансформатор остается включенным независимо от положения тумблеров?

2. (Р92). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (см. рис. 44).

1) будет ли звонок звенеть при нажатии какой-либо из кнопок, если все лампы перегорят?

2) верно ли, что при нажатии любых двух кнопок соответствующие лампы соединятся параллельно?

3) будет ли звенеть звонок, если одновременно нажать две любые кнопки?

4) верно ли, что при ненажатых кнопках ток через лампы не протекает?

5) верно ли, что при нажатии кнопки *A* ток протекает через все три лампы?

6) верно ли, что лампы горят одинаково ярко независимо от числа нажатых кнопок?

2.12. Контактные структуры с элементами памяти

До сих пор мы рассматривали контактные структуры, в которых элементы, моделирующие логические переменные (кнопки, тумблеры, реле), устанавливались в то или иное состояние извне. Теперь рассмотрим несколько примеров, где комбинационные структуры управляют элементами памяти, в качестве которых будем использовать электромагнитные реле, причем эти реле сами участвуют в работе тех или иных структур.

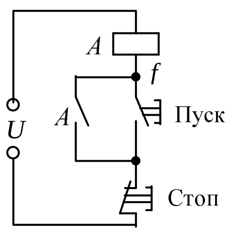


Рис. 48

Пример 1. Простейшей является схема, содержащая одно реле A (рис. 48). В исходном состоянии реле выключено, т. е. по его обмотке, обозначенной прямоугольником, ток не протекает. При нажатии кнопки «Пуск» реле включается (говорят: «срабатывает»), контакт A замыкается и ток протекает по двум параллельным цепям – через контакт кнопки «Пуск» и через замкнувшийся контакт A. При отпускании кнопки «Пуск» реле останется во включенном состоянии (говорят: «реле встало на самоблокировку»), и при повторном ее нажатии состояние схемы не меняется, в чем и заключается эффект запоминания. Чтобы реле выключить, надо нажать кнопку «Стоп».

По схеме видно, что структура, управляющая обмоткой реле (точка f), работает в соответствии с булевой функцией

$$f = (A + \Pi)\,\overline{C}\,,$$

где П – кнопка «Пуск», С – кнопка «Стоп».

Схема, приведенная на рис. 48, нашла широчайшее применение в промышленности для включения различных электротехнических объектов, таких как однофазные и многофазные электродвигатели, трансформаторы, электромагниты, нагревательные элементы, мощные осветительные лампы и др.

Пример 2. Рассмотрим более сложную схему с самоблокировкой реле (рис. 49). На схеме пять реле, управляемых контактными структурами вида

$$f_i = \Pi_i + A_i\, S_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5),$$

где Π_i – кнопка «Пуск», управляющая i-м реле (i = 1, 2, 3, 4, 5); $S_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ – симметрическая булева функция с a-числом, равным единице.

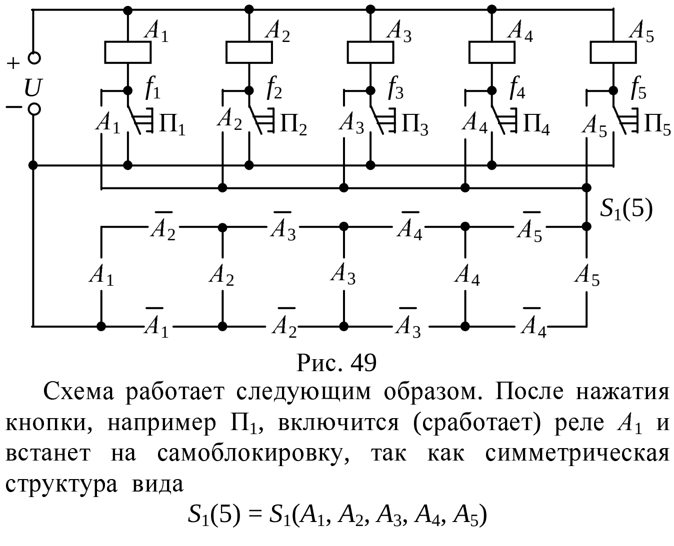


Рис. 49

Схема работает следующим образом. После нажатия кнопки, например Π_1, включится (сработает) реле A_1 и встанет на самоблокировку, так как симметрическая структура вида

$$S_1(5) = S_1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$$

при $A_1 = 1$ замкнута. Нажмем теперь другую кнопку, допустим, Π_3. Окажутся включенными два реле: A_1 и A_3. Но при $A_1 = A_3 = 1$ структура $S_1(5)$ разомкнута, вследствие чего реле A_1 выключится, структура $S_1(5)$ замкнется и реле A_3 встанет на самоблокировку. Таким образом, при нажатии i-й кнопки i-е реле включается, а ранее включенное реле, номер которого не равен i, выключается.

Пример 3. Рассмотрим схему простейшего реле времени, в котором, как и в предыдущих случаях, используется самоблокировка (рис. 50). В исходном состоянии реле выключено, конденсатор заряжен до напряжения источника питания U. Нажмем кнопку «Пуск». Реле включится и контактом A встанет на самоблокировку, а контактом $\overline{A}$ схема отключится от источника питания. Когда конденсатор разрядится, реле выключится, конденсатор начнет заряжаться через резистор R, если к этому времени кнопка «Пуск» будет отпущена.

Выдержка, т. е. время, в течение которого реле включено, может достигать 10 – 15 с. Для больших выдержек данную схему использовать нецелесообразно, так как потребуется батарея конденсаторов слишком большой емкости.

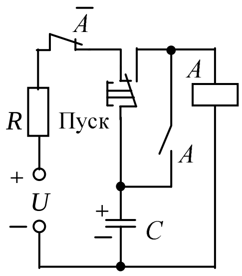


Рис. 50

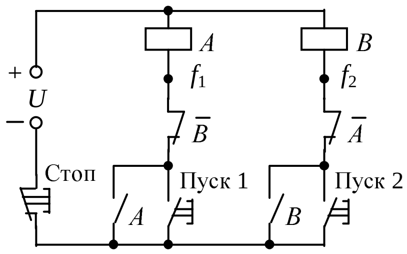


Рис. 51

Пример 4. В схемах управления реверсивными двигателями используются два реле, две кнопки «Пуск» и одна кнопка «Стоп» (рис. 51). Если нажать кнопку «Пуск 1», двигатель начнет вращаться, допустим, по часовой стрелке. Если нажать кнопку «Пуск 2», двигатель будет вращаться против часовой стрелки (двигатель на рис. 51 не изображен). Главное требование к схеме заключается в том, чтобы исключить одновременное срабатывание обоих реле (во избежание короткого замыкания в цепях электропитания двигателя). Это условие выполнится, если контактные структуры, управляющие обмотками реле, представить булевыми функциями вида:

$$f_1 = \overline{B}\,(A + \Pi_1)\,\overline{C}\,;$$

$$f_2 = \overline{A}\,\,(B + \Pi_2)\,\overline{C}\,,$$

где Π_1 – кнопка «Пуск 1», Π_2 – кнопка «Пуск 2», С – кнопка «Стоп». Если $A = 1$ (включено реле A под действием кнопки «Пуск 1»), то $f_2 = 0$ и реле B включить невозможно. При С = 1 (нажата кнопка «Стоп») обе функции равны нулю и реле A выключается. Теперь можно нажать кнопку «Пуск 2». Реле B включится и встанет на самоблокировку. Так как $B = 1$, то $f_1 = 0$ и реле A включить невозможно.

Таким образом, смена направления вращения двигателя осуществляется только через кнопку «Стоп», чем исключается одновременное включение обоих реле. Однако если при выключенных реле кнопки Π_1 и Π_2 нажать одновременно, то на какое-то время оба реле все же, в принципе, могут включиться. Чтобы исключить и это явление, можно использовать сложные кнопки Π_1 и Π_2, содержащие по одному нормально разомкнутому контакту и по одному нормально замкнутому, а функции f_1 и f_2 представить в виде:

$$f_1 = \overline{B}\,(A + \Pi_1)\,\overline{C}\;\overline{\Pi}_2;$$

$$f_2 = \overline{A}\,(B + \Pi_2)\,\overline{C}\;\overline{\Pi}_1.$$

Пример 5. На схеме простейшего кодового замка для сейфа (рис. 52) обозначено: A_1, A_2, …, A_6 – тумблеры, расположенные на внутренней стороне двери сейфа; с их помощью устанавливается «правильный» код, являющийся ключом для замка; B_1, B_2, …, B_6 – кнопки, выведенные на внешнюю сторону той же двери; с их помощью вводится ключ, чтобы открыть дверь сейфа; A – реле, срабатывающее при вводе «правильного» кода. Кнопка «Пуск» нажимается после ввода ключа. При помощи этой кнопки подается питание на электромагнит, перемещающий ригель (задвижку) замка. В случае ввода «неправильного» кода реле A не включается и под действием кнопки «Пуск» сирена подает сигнал тревоги.

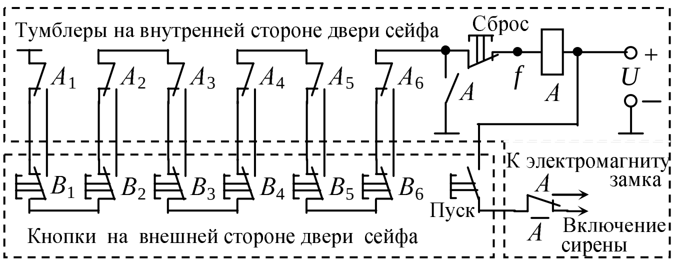


Рис. 52

Главной в схеме является структура, управляющая обмоткой реле A и описываемая функцией

$$f = (\varphi + A)\,\overline{C},$$

где С – кнопка «Сброс»; φ – функция, описывающая схему равенства двух двоичных чисел, одно из которых – ключ, второе – код, заданный при помощи тумблеров:

$$\varphi = (A_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1)(A_2B_2 + \overline{A}_2\overline{B}_2)\,\&\ldots\&\,(A_6B_6 + \overline{A}_6\overline{B}_6).$$

В исходном состоянии (как изображено на рис. 52) имеем: $f = 1$. Это нерабочее состояние. При помощи тумблеров установим какой-либо ненулевой код, например 110010. Тогда

$$A_1 = A_2 = A_5 = 1,$$
$$A_3 = A_4 = A_6 = 0$$

и функция f принимает вид

$$f = (B_1\,B_2\,\overline{B}_3\,\overline{B}_4\,B_5\,\overline{B}_6 + A)\;\overline{C},$$

По этой записи видно, что если одновременно нажать три кнопки B_1, B_2 и B_5 и не нажимать ни одной из других кнопок, то $f = 1$, при этом реле включается, становится на самоблокировку и аргумент A принимает единичное значение. Теперь под действием кнопки «Пуск» сейф откроется.

Схема, приведенная на рис. 52, управляется шестью кнопками. Если ключ неизвестен, то при однократной попытке, случайно нажимая кнопки, сейф можно открыть с вероятностью, равной 1/64 (если учитывать и нулевой код). Чтобы снизить эту вероятность, достаточно увеличить число кнопок (и тумблеров). Например, при 20 кнопках вероятность случайного ввода «правильного» кода равна 1/1048576. В общем же случае вероятность случайно открыть сейф равна $1/2^n$, где n – число кнопок на внешней стороне двери.

Пример 6. Три реле P, Q, R управляются тремя кнопками Π_1 – «Пуск 1», Π_2 – «Пуск 2» и Π_3 – «Пуск 3». Если нажать одну из этих кнопок, то соответствующее реле включается, но на самоблокировку не становится. Если же нажать одновременно любые две из пусковых кнопок, то соответствующие реле включаются и оба становятся на самоблокировку. При нажатии всех кнопок включаются все три реле и также становятся на самоблокировку. Выключаются реле кнопкой С – «Стоп». Построить схему, работающую согласно перечисленным условиям.

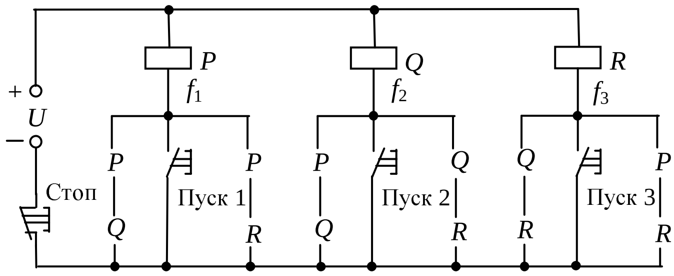


Рис. 53

Решение приведено на рис. 53. Символами f_1, f_2, f_3 обозначены функции, моделирующие контактные структуры двухполюсников, управляющих работой реле:

$$f_1\,(C,\Pi_1,P,Q,R) = \overline{C}\,(\Pi_1 + PQ + PR);$$

$$f_2\,(C,\Pi_2,P,Q,R) = \overline{C}\,(\Pi_2 + PQ + QR);$$

$$f_3\,(C,\Pi_3,P,Q,R) = \overline{C}\,(\Pi_3 + QR + PR),$$

где цепи самоблокировки представлены функциями

$$\lambda_1 = \overline{C}\,(PQ + PR);$$

$$\lambda_2 = \overline{C}\,(PQ + QR);$$

$$\lambda_3 = \overline{C}\,(QR + PR).$$

В исходном состоянии все переменные равны нулю. Если нажать кнопку «Пуск 1», то включится реле P. Тогда набор значений переменных примет вид:

$$C = 0;\quad \Pi_1 = 1;\quad \Pi_2 = 0,\quad \Pi_3 = 0,\quad P = 1,\ Q = 0,\ R = 0.$$

На этом наборе получим следующие значения функций:

$$f_1 = 1;\quad f_1 = 0;\quad f_1 = 0;$$
$$\lambda_1 = 0;\quad \lambda_2 = 0;\quad \lambda_3 = 0.$$

Цепь самоблокировки не замкнется, так как $\lambda_1 = 0$. Следовательно, после отпускания кнопки «Пуск 1» реле P выключится.

Очевидно, что схема работает точно так же, если нажать только одну из кнопок «Пуск 2» и «Пуск 3». В обоих случаях цепи самоблокировки остаются разомкнутыми.

Нажмем одновременно две первые кнопки. Включатся реле P и Q. Набор значений переменных примет вид:

$$C = 0;\quad \Pi_1 = 1;\quad \Pi_2 = 1,\quad \Pi_3 = 0,\quad P = 1,\ Q = 1,\ R = 0.$$

Цепи самоблокировки первых двух реле замкнутся, так как на этом наборе $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Следовательно, после отпускания кнопок реле P и Q останутся во включенном состоянии.

Если нажать одновременно первую и третью кнопки, то реле P и R встанут на самоблокировку, так как при этом $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$. То же самое относится и к реле P и R.

На этом краткое знакомство с контактными структурами закончим. При необходимости в существующей литературе можно найти подробности по любому вопросу, связанному с синтезом релейных схем, их применением и перспективами развития.

3. КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

3.1. Логические элементы

В данном разделе рассматриваются сети бесконтактных (электронных) логических элементов, относящихся к классу комбинационных логических схем (структур). В названии «комбинационная схема» отражен тот факт, что выходной сигнал логической структуры полностью определяется комбинацией входных двоичных сигналов. Это значит, что в самой структуре нет никаких запоминающих элементов, которые могли бы привести к различной реакции логической схемы на одни и те же комбинации входных сигналов.

В современных устройствах дискретного действия используется большой набор логических элементов. Однако основными из них являются только три: схема И, схема ИЛИ, схема НЕ (инвертор). Все остальные логические схемы представляют собой различные комбинации этих трех элементов. Из них может быть построен любой комбинационный преобразователь двоичных кодов. Как строить такие преобразователи – это главный вопрос, которому посвящен данный раздел.

3.2. Элемент И

Обратимся к рис. 1. На нем изображено: источник питания U, два переключателя A и B, два резистора R_1 и R_2, два диода V_1 и V_2. Пунктиром обведен логический элемент И, имеющий два входа 1 и 2 и один выход. Переключатели A и B предназначены для подачи двоичных сигналов на входы схемы И. Переключатели выполняют двойную функцию. Во-первых, они используются как запоминающие элементы, т. е. моделируют двоичные логические аргументы. Во-вторых, подают на входы элемента И напряжение, равное нулю либо равное U. Условимся считать, что если A = 0, то на вход схемы И подается нулевой (низкий) уровень напряжения. Если же A = 1, то подается единичный (высокий) уровень. И наоборот, если напряжение равно нулю, то аргумент A имеет нулевое значение. Если же напряжение принимает значение высокого уровня, то A = 1. Эта интерпретация сохраняется и в случае любых других логических элементов, рассматриваемых в данной книге.

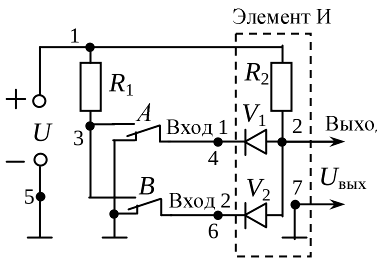


Рис. 1

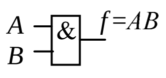


Рис. 2

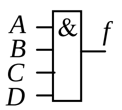


Рис. 3

На рис. 1 переключатели изображены в нулевом состоянии. Это значит, что $A = B = 0$, то есть на входы элемента И поданы низкие уровни напряжения. Поскольку диоды находятся в проводящем состоянии, то падение напряжения на них равно нулю. Следовательно, $U_{вых}$ также равно нулю. Таким образом, если $A = B = 0$, то $U_{вых} = 0$. Если $U_{вых} = 0$, то говорят: схема заперта.

Пусть B = 1. Тогда на вход 2 поступит высокий уровень, равный напряжению источника U. Выходное напряжение останется равным нулю, так как диод V_1 проводит.

Переключатель A переведем в единичное положение, а B – в нулевое. Выходное напряжение по-прежнему будет равно нулю, так как через диод V_2 протекает ток. Переведем в единичное положение оба переключателя, то есть примем $A = B = 1$. Выходное напряжение будет равно U. В этом случае говорят: схема открыта.

Таблица 1

A	B	f	$U_{вых}$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	U

Буквой f на рис. 1 обозначен выход схемы И. Это функция, зависящая от значений входных сигналов. Как логическая переменная, она может принимать два значения: 0 и 1. Условимся считать, что ее нулевому значению соответствует низкий уровень напряжения, а единичному – высокий.

В табл. 1 для каждого набора значений аргументов указаны логические значения выходного сигнала (колонка f). В колонке $U_{вых}$ даны значения выходного напряжения. По таблице видно, что элемент И реализует операцию конъюнкции.

Логический элемент И принято обозначать так, как показано на рис. 2. Буквы A и B обозначают входные сигналы, f – выходной сигнал элемента И.

Мы рассмотрели элемент И с двумя входами. В общем случае число входов может быть любым. Например, на рис. 3 изображен логический элемент с четырьмя входами, реализующий конъюнкцию вида $f = ABCD$.

Упражнения

1. Пусть на рис. 1 U = 5 В. Определите напряжение (в вольтах) между точками (при $A = B = 0$):

(73Р)! 1–6; 1–2; 2–7; (62У)! 1–5; 3–2; 2–6;
(БЛВ)! 5–6; 2–5; 1–3; (58Е)! 3–4; 3–5; 3–6;
(ЯЦТ)! 1–7; 1–4; 2–4; (ЛВХ)! 3–7; 4–5; 4–6.

2. При U = 5 В и A = 1, B = 0 (рис. 1) определите напряжение (в вольтах) между точками:

(323)! 3–5; 3–6; 2–6; 2–4; 2–7;
(ФИИ)! 4–6; 5–7; 6–7; 3–7; 1–2.

3. (ТОК)! Чему равно выходное напряжение на схеме логического элемента И (рис.1) при U = 5 В, если $A = B = 0$? $A = B = 1$? A = 0, В = 1? A = 1, B = 0?

4. Вставьте пропущенные числа (рис. 1; U = 8 В):
(ВЛТ)! Если A=1, B=0, то $U_{вх\,1}$ =…; $U_{вх\,2}$ =…; $U_{вых}$ =… .
(РЯК)! Если A=B=0, то $U_{вх\,1}$ = …; $U_{вх\,2}$= …; $U_{вых}$ = … .
(ЦТР)! Если $A = B$ = 1, то $U_{вх\,1}$ =…; $U_{вх\,2}$ = …; $U_{вых}$ = … .

5. Пусть U_A (рис. 3) обозначает входное напряжение, подаваемое на вход A, U_B – напряжение, подаваемое на вход B, и т. д. Вставьте пропущенные числа:
(САМ) если $U_A = U_C$ = 0 В, $U_B = U_D$= 5 В, то $U_{вых}$ = … ; A = … ; B = … ; C = … ; D = … ,
где A, B, C, D – значения логических аргументов;
(826) если $U_A = U_B = U_C = U_D$ = 1, то $U_{вых}$ = … ; A = … ; B = … ; C = … ; D = … .

3.3. Элемент ИЛИ

Обратимся к рис. 4, на котором приведена логическая схема ИЛИ с двумя входами. Переключатели изображены в нулевом положении, т. е. $A = B = 0$. По схеме видно, что при этом и f = 0.

Переведем в единичное положение переключатель B. Тогда диод V_2 окажется в проводящем состоянии. Если $R_2 >> R_1$, то выходное напряжение практически равно U, что соответствует высокому уровню напряжения и, следовательно, f = 1.

Вернем переключатель B в нулевое положение, а переключатель A переведем в единичное. Очевидно, что и в этом случае $f = 1$.

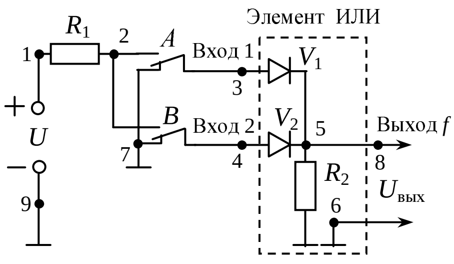


Рис. 4

Таблица 2

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

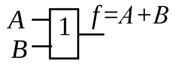


Рис. 5

Если в единичное положение перевести оба переключателя, то по-прежнему выходное напряжение будет иметь высокий уровень.

В табл. 2 каждому из четырех наборов значений аргументов поставлено в соответствие состояние выхода элемента ИЛИ. По таблице видно, что схема ИЛИ реализует логическую операцию дизъюнкции.

Двухвходовую схему ИЛИ принято обозначать так, как показано на рис. 5. В общем случае схема ИЛИ, как и логический элемент И, может иметь любое число входов.

Упражнения

1. Пусть на рис. 4 $U = 5$ В. Определите напряжение (в вольтах) между точками при $A = B = 0$:
(УАК)! 1–2; 1–7; 1–5; 1–8; (ДЕМ)! 2–6; 3–4; 8–6; 6–9;
(УПЛ)! 2–5; 2–7; 3–5; 8–5; (ОВН)! 5–7; 2–9; 2–8; 2–3.

2. При $U = 10$ В, $A = 1$, $B = 0$, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 90$ Ом (рис. 4) определите напряжение между точками:
(КММ)! 1–2; 5–7; 1–5; 1–6; 1–8;
(ШОН)! 2–7; 1–3; 1–4; 2–3; 2–4;
(МЯО)! 2–5; 2–6; 2–8; 5–6; 3–6;
(АЗЯ)! 5–9; 8–7; 8–6; 8–9; 5–4.

3. (АИР)! Чему равно выходное напряжение схемы ИЛИ (рис. 4) при $U = 10$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 90$ Ом, если $A = B = 0$? $A = 1, B = 0$? $A = 0, B = 1$? $A = B = 1$?

4. (УИС)!Чему равно выходное напряжение схемы ИЛИ (рис. 4) при $U = 5$ В, $R_1 = 0$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, если $A = B = 0$? $A = B = 1$? $A = 1, B = 0$? $A = 0, B = 1$?

5. (ШУО)! Определите выходное напряжение элемента ИЛИ (рис. 4) при $U = 5$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 0$ Ом, если $A = B = 0$; $A = B = 1$; $A = 1, B = 0$ $A = 0, B = 1$.

6. Вставьте пропущенные числа (рис. 4; $U = 10$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 90$ Ом):
(РЕТ) если $A = 0$, $B = 1$, то $U_{вх\,1} = \ldots$; $U_{вх\,2} = \ldots$; $U_{вых} = \ldots$;
(ФОМ) если $A = B = 0$, то $U_{вх\,1} = \ldots$; $U_{вх\,2} = \ldots$; $U_{вых} = \ldots$;
(ЗИН) если $A = B = 1$, то $U_{вх\,1} = \ldots$; $U_{вх\,2} = \ldots$; $U_{вых} = \ldots$

7. Пусть U_A обозначает напряжение, подаваемое на вход A четырехвходового логического элемента ИЛИ, U_B – на вход B и т. д. Вставьте пропущенные числа:

(ТЭП)! Если $U_A = U_B = 8$ В; $U_C = U_D = 0$ В; то $A = \ldots$; $B = \ldots$; $C = \ldots$; $D = \ldots$; $f = \ldots$; $U_{вых} = \ldots$ В; $U = \ldots$ В (при $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 80$ Ом; рис. 4);

(АВТ)! Если $U_A = U_C = 14$ В; $U_B = U_D = 0$ В, то $A = \ldots$; $B = \ldots$; $C = \ldots$; $D = \ldots$; $f = \ldots$; $U_{вых} = \ldots$ В; $U = \ldots$ В (при $R_1 = 12$ Ом; $R_2 = 84$ Ом; рис. 4).

3.4. Инвертор и схема И-НЕ

Принципиальная схема инвертора – логического элемента НЕ – приведена на рис. 6 (обведена пунктирным контуром). По схеме видно, что при $A = 0$ (как изображено на рис. 6) ток через базу не протекает и транзистор заперт. Следовательно, выходное напряжение $U_{вых} = U$, т. е. при $A = 0$ имеем $f = 1$.

Переведем переключатель A в единичное положение, т. е. примем $A = 1$. Ток, протекающий от источника U через токоограничивающий резистор R_1 и базу, поддерживает транзистор в открытом (проводящем) состоянии. Падение напряжения на открытом транзисторе можно считать равным нулю. Следовательно, $f = 0$, если $A = 1$. Таким образом, инвертор реализует булеву функцию

$$f = \overline{A}\,.$$

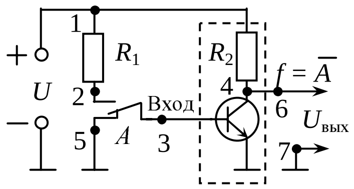


Рис. 6

На рис. 7,*а* показано обозначение инвертора. Очевидно, что инвертор может быть только одновходовым элементом.

Из более сложных логических схем рассмотрим элемент И-НЕ (рис. 7,*б*). Буквами A и B обозначены входы (входные сигналы) элемента И. Выход элемента И подключен к входу инвертора. В результате получился элемент, реализующий булеву функцию $f = \overline{AB}$. Эту схему называют **элементом Шеффера**. На рис. 7,*в* изображена та же схема И-НЕ с использованием условных обозначений элементов И и НЕ, а на рис. 7,*г* – в виде одного элемента И-НЕ.

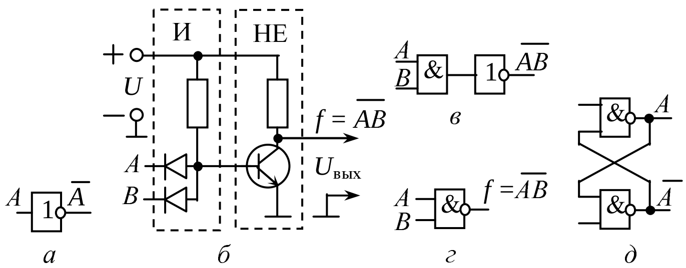


Рис. 7

На схемах И-НЕ можно построить электронный запоминающий элемент – триггер (рис. 7,*д*), имеющий два устойчивых состояния, условно названных нулевое и единичное. Триггеры, как и двухпозиционные переключатели, используются в комбинационных схемах для физического моделирования логических аргументов, в связи с чем все переключатели на рис. 1, 4, 6 можно заменить триггерами. Для комбинационных схем триггер не является основным элементом, так как его роль сводится лишь к хранению значений логических аргументов, поэтому в данном разделе триггеры не рассматриваются. Вся информация о триггерах, наиболее важная с логической точки зрения, приведена в разделе, посвященном многотактным схемам, в которых триггерам отводится ведущая роль.

Упражнения

1. Вставьте пропущенные числа (рис. 6; $U = 6$ В):
(ЯШС) если $A = 0$, то $U_{вх} = \ldots$ В; $U_{вых} = \ldots$ В;
(55С) если $A = 1$, то $U_{1\text{–}4} = \ldots$ В; $U_{вых} = \ldots$ В.

2. Пусть $U = 6$ В (рис. 6). Определите напряжение между точками (при $A = 0$):
(983) 1–2, 1–4, 1–7, 6–7;
(934) 2–3, 4–3, 4–7, 5–7;
(АУ6) 1–6, 1–5, 4–7, 2–4, 2–6;
(КЕЛ) 3–5, 3–7, 4–6, 2–7, 2–5.

3. Пусть U = 7 В, A = 1 (рис. 6). Определите напряжение между точками:

(КВМ) 1–4, 2–4, 6–7, 3–4, 2–7;
(ХЛК) 2–5, 2–3, 1–7, 1–3, 1–6;
(ИРО) 4–7, 2–6, 3–6, 3–7, 6–7.
(63П) 3–5, 5–7, 5–6, 1–2, 1–5.

3.5. Понятие суперпозиции

На рис. 1, 4, 6 сигналы на входы элементов поступают с выходов переключателей, формирующих нулевые и единичные уровни напряжения. Однако, как уже упоминалось, на входы элементов сигналы можно подавать и с выходов логических схем (рис. 7,*в*).

Рассмотрим два логических элемента (рис. 8), реализующих булевы функции вида

$$f_1 = AB; \qquad f_2 = C + D.$$

Заметим, что в данном случае A, B, C, D – это логические аргументы, физически представленные триггерами (рис. 7,*д*) либо переключателями, как на рис. 1 и 4. Отключим от выхода триггера C (рис. 8) вход элемента ИЛИ и присоединим его к выходу элемента И. Математически это обозначает подстановку функции f_1 вместо аргумента C. Получим новую функцию: $f_3 = AB + D$, логическая схема которой приведена на рис. 9.

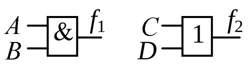


Рис. 8

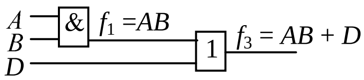


Рис. 9

Функцию f_3 также можно изменить, подставив вместо какого-либо аргумента другую функцию. Подставим, например, вместо аргумента B функцию $f = C + E$. Тогда получим новую функцию f_4, не совпадающую с функцией f_3:

$$f_4 = A(C + E) + D.$$

Таким образом, новые функции можно получать путем подстановки вместо аргументов других булевых выражений, в том числе и таких, как:

$$f = 1, \quad f = 0, \quad f = A, \quad f = B, \quad f = \overline{C} \quad \text{и т. д.}$$

Согласно [13, 14, 18, 35, 46] подстановка в функцию вместо ее аргументов других функций называется **суперпозицией**. Очевидно, что при помощи операции суперпозиции из всякой функции можно получить любую другую, если на выбор функций, используемых для подстановки, ограничений нет. Пусть, например, из функции

$$f_1 = A + BCD + EF$$

требуется получить функцию

$$f_2 = PQR + \overline{AC}.$$

Подставим P вместо B, Q вместо C, R вместо D, 0 вместо A, 1 вместо F. Тогда получим

$$f_3 = PQR + E.$$

В этом выражении сделаем подстановку $\overline{A}$ вместо E:

$$f_4 = PQR + \overline{A}.$$

Вместо A подставляем AC и получаем окончательно:

$$f_5 = PQR + \overline{AC}.$$

Упражнения

1. (58.ИИ). Запишите выражение f_3 = …, которое получится в результате подстановки функции $f_2 = CD$ вместо аргумента C функции $f_1 = AB + C$.

2. (ШС.45). Найдите минимальную ДНФ функции f_3, которая получится на основе функции $f_1 = AB + CD$, если в нее вместо аргумента D подставить функцию $f_2 = A\overline{B}$.

3. (ВКТ). Дана функция $f_1 = AB + BC + CD$. Подставим в нее вместо аргумента C функцию $f_2 = AB$. Найдите минимальную форму получившейся функции f_3.

4. (Б61). Дана функция $f_1 = AB + \overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$. Вместо аргумента D в эту функцию подставили аргумент C. Получили функцию f_2. Укажите номера функций, тождественно равных функции f_2:

1) $f = AB + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}$;
5) $f = (A + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$;
2) $f = B\overline{C} + AC + \overline{A}\,\overline{B}$;
6) $f = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + C)$;
3) $f = AB + B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}$;
7) $f = (\overline{A} + B + C)(A + \overline{B} + \overline{C})$;
4) $f = AB + AC + \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{C}$;
8) $f = (\overline{A} + \overline{B} + C)(A + B + \overline{C})$.

3.6. О нагрузочной способности логических элементов

На рис. 9 нагрузкой элемента И является вход элемента ИЛИ. Выход схемы И по нагрузочной способности отличается от контактного переключателя. Если сопротивление резистора R_1 принять равным нулю (рис. 1), то контактный переключатель всегда обеспечит два уровня напряжения – 0 и U – независимо от нагрузки. Но в схеме И имеется резистор, удалить который невозможно. Не изменится ли при этом высокий (или низкий) уровень выходного напряжения схемы ИЛИ? Чтобы разобраться в этом вопросе, изобразим логическую схему, приведенную на рис. 9, в расшифрованном виде (рис. 10).

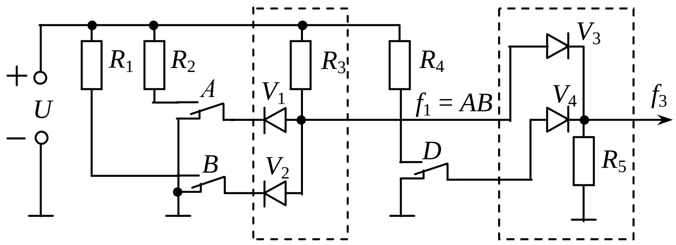


Рис. 10

Если A = B = 0, либо A = 1, B = 0, либо A = 0, B = 1, то при D = 1 уровень выходного напряжения (на выходе f_3) зависит от соотношения величин сопротивлений R_4 и R_5. Так как сопротивление резистора R_3 не может быть равным нулю, то необходимо принять $R_5 >> R_3$. Лишь в этом случае выходное напряжение элемента ИЛИ будет мало отличаться от величины U.

Таким образом, если нагрузкой элемента И является элемент ИЛИ, то вся схема работает согласно соответствующей булевой функции, но при условии, что сопротивление резистора схемы ИЛИ многократно превышает сопротивление резистора элемента И.

В принципе, сопротивления резисторов R_5 и R_3 могут быть и равными. При этом схема (рис.10) будет работать также в соответствии с функцией $f_3 = AB + D$, но только в том случае, если значение высокого уровня выходного сигнала принять равным U/2.

Теперь рассмотрим другой вариант соединения тех же элементов. Пусть даны два логических элемента, приведенных на рис. 8. Соответствующие им булевы функции имеют вид:

$$f_1 = AB; \qquad f_2 = C + D.$$

Применим к этим функциям операцию суперпозиции следующим образом: вместо аргумента B подставим функцию f_2. Тогда получим новую функцию вида

$$f_3 = A(C + D).$$

Логическая схема ее приведена на рис. 11. Изобразим эту же схему в расшифрованном виде (рис. 12).

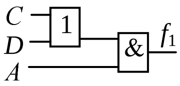


Рис. 11

Пусть $C = D = 0$, $A = 1$, тогда функция f_3 примет нулевое значение. Очевидно, что при этом выходное напряжение (рис.12) должно быть равно нулю. А на самом деле?

Диоды V_1 и V_2 не проводят, так как переключатели C и D находятся в нулевом состоянии. Не проводит и диод V_4, так как $A = 1$. В проводящем состоянии находится только диод V_3. Резисторы R_4 и R_5 образуют делитель напряжения. Если принять за основу положение о том, что, как было сказано выше, сопротивление резистора схемы ИЛИ должно быть во много раз больше сопротивления резистора схемы И, то для данного делителя необходимо принять $R_5 >> R_4$. Но в этом случае при $C = D = 0$ и $A = 1$ выходной сигнал $U_{\text{вых}}$ вместо нулевого примет единичное значение.

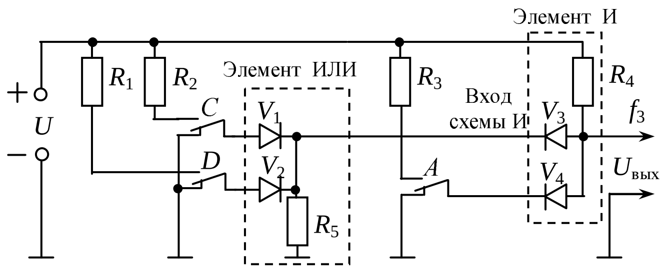


Рис. 12

Можно считать, что значение высокого уровня напряжения равно $U/2$. Тогда сопротивления всех резисторов (рис. 12) могут быть равными между собой. Нетрудно убедиться, что и в этом случае при $C = D = 0$ и $A = 1$ выходной сигнал принимает единичное значение (вместо нулевого).

Таким образом, логические элементы И (рис. 1) и ИЛИ (рис. 4) не могут быть использованы для построения любых комбинационных схем из-за недостаточной нагрузочной способности этих элементов. Для повышения нагрузочной способности в схему каждого элемента включают дополнительные цепи в виде усилительных устройств, обеспечивающих возможность соединения логических элементов в любых сочетаниях. Проиллюстрируем это на примере элемента ИЛИ. На рис. 13 изображен трехвходовый элемент ИЛИ, к выходу которого подключен усилитель на двух транзисторах. В принципе, достаточно и одного транзистора. Но в этом случае мы получим отрицание дизъюнкции. Благодаря второму транзистору отрицание дизъюнкции инвертируется, в результате чего получается «чистая» дизъюнкция. Если на всех трех входах элемента ИЛИ поддерживается низкий (равный нулю) уровень напряжения, то первый транзистор заперт, поскольку ток через его базу не протекает. Второй транзистор открыт, так как через его базу протекает ток, ограничиваемый резисторами R_1 и R_2. Выходное напряжение равно падению напряжения на проводящем транзисторе (практически оно равно нулю). Если на какой-либо из входов подать высокий уровень, то первый транзистор откроется. На его выходе напряжение станет почти равным нулю, вследствие чего второй транзистор окажется запертым и выходное напряжение будет равным U.

Если вместо элемента ИЛИ (рис. 12) включить схему, приведенную на рис. 13, то при $C = D = 0$ и $A = 1$ второй транзистор будет открыт и диод V_3 окажется в проводящем состоянии. Тогда получаем: $U_{\text{вых}} = 0$; $f_3 = 0$, что полностью соответствует булевой функции

$$f_3 = A(C + D).$$

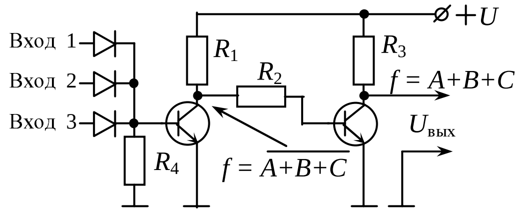


Рис. 13

Благодаря усилительным каскадам на выход каждого логического элемента можно подключать не один, а несколько элементов, но не более некоторого числа, характеризующего максимальную нагрузочную способность данного элемента.

Упражнения

1. Укажите номера резисторов (рис. 10), через которые протекает ток, и номера диодов, находящихся в проводящем состоянии (указывать необходимо только номера, буквы не использовать), если:

(ИУС)! $A = B = D = 0$; (35К)! $A = 0$, $B = D = 1$;

(НЦТ)! $A = B = 1$, $D = 0$; (ПХН)! А = 1, $B = D = 0$.

2. (ЮУ1).Укажите номера всех резисторов, через которые не протекает ток ни при каких состояниях переключателей A, B, D (рис. 10).

3. Переключатели A, B, D (рис. 10) могут находиться в одном их восьми возможных состояний. Укажите все состояния (в десятичной системе), при которых:

(Т12) диод V_1 открыт;

(ТТЗ) диод V_3 открыт;

(822) через резистор R_3 протекает ток;

(633) через резистор R_5 протекает ток.

4. (674). Определите ток (в миллиамперах), протекающий через резистор R_3 при $A = B = 0$, если $U = 20$ В, $R_3 = 500$ Ом (рис. 10).

5. (795). Укажите все десятичные наборы значений переменных A, C, D (рис. 12), на которых $f_3 = 1$ при $R_1 = R_2 = \ldots = R_5$.

6. (АРХ). Найдите минимальные ДНФ функций f_3 и $\bar{f}_3$ при $D = 1$ (рис. 12).

7. (ЛОЛ). Допустим, что на рис. 12 вместо элемента ИЛИ вставлена схема, приведенная на рис. 13. Укажите десятичные наборы значений переменных A, C, D, на которых $f_3 = 0$.

3.7. Комбинационные схемы и булевы функции ДНФ и КНФ

В подразделе 2.2 было показано, что на основе всякой булевой функции можно построить контактную структуру в классе параллельно-последовательных схем. Точно так же всякую булеву функцию можно представить в виде комбинационной схемы, используя логические элементы И, ИЛИ, НЕ.

Пусть дана некоторая булева функция, например:

$$f = BC + DEF + \overline{B}\,\overline{C} + A. \qquad (1)$$

Можно предположить, что эта функция получена на основе выражения $f = P + Q + R + A$, где

$$P = BC; \quad Q = DEF; \quad R = \overline{B}\,\overline{C},$$

путем подстановки конъюнкции BC вместо P, DEF вместо Q, $\overline{B}\,\overline{C}$ вместо R.

В соответствии с операцией суперпозиции выход элемента И, реализующего конъюнкцию BC, подключаем ко входу элемента ИЛИ, содержащего четыре входа и реализующего дизъюнкцию $P + Q + R + A$. Ко второму и третьему входам схемы ИЛИ подключаем выходы элементов И, которым соответствуют выражения DEF и $\overline{B}\,\overline{C}$. Четвертый вход схемы ИЛИ подключается к устройству, моделирующему логическую переменную A.

В выражении (1) две переменные являются инверсными. Если устройства, моделирующие логические переменные, не имеют инверсных выходов, то для реализации операции отрицания необходимо использовать инверторы (рис. 6). Однако в схемах триггеров обычно предусматривают парафазные выходы – прямой и инверсный (рис. 7,*д*). На одном из них – высокий уровень, на втором – низкий. При смене состояния триггера уровни меняются местами. То же самое нетрудно сделать и при помощи переключателей. На рис. 14 показан сдвоенный переключатель, моделирующий переменную B. Переключатель изображен в нулевом состоянии. При этом на неинверсном выходе поддерживается низкий уровень, а на выходе $\overline{B}$ (инверсном) – высокий. Если переключатель перевести в единичное состояние, то высокий уровень окажется на выходе B, а низкий – на выходе $\overline{B}$. В дальнейшем будем считать, что парафазные выходы имеет каждый двоичный запоминающий элемент.

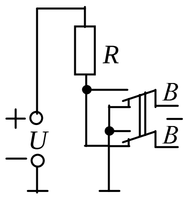


Рис. 14

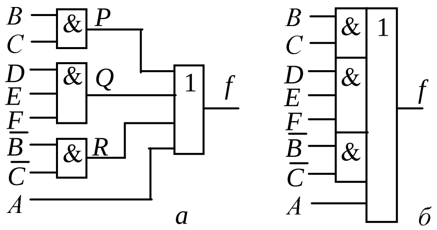


Рис. 15

На рис. 15,*а* изображена схема, реализующая булеву функцию (1). На рис. 15,*б* приведена та же схема, но в более компактном представлении. На схеме не показаны переключатели, моделирующие логические переменные, указаны лишь обозначающие их буквы. Подобные обозначения использованы на рис. 8, 9, 11. Еще раз отметим, что эти буквы обозначают устройства, моделирующие логические переменные, и служат адресами, показывающими, куда должны быть подключены те или иные входы комбинационной схемы. Например, первый сверху вход схемы (рис.15,*а*) обозначен буквой B. Это значит, что его необходимо подключить к неинверсному выходу устройства, моделирующего переменную B. Им может быть переключатель (рис. 14) или триггер (рис. 7,*д*). Подобными обозначениями мы будем пользоваться и в дальнейшем.

На рис. 15 приведена схема, реализующая булеву функцию, представленную в ДНФ. Аналогичным образом можно построить логическую схему на основе КНФ булевой функции.

Проиллюстрируем это на примере следующего выражения:

$$f = (A + B)(C + \overline{D})(\overline{A} + \overline{B} + D)EF. \qquad (2)$$

Введем промежуточные обозначения:

$$P = A + B; \quad Q = C + \overline{D}; \quad R = \overline{A} + \overline{B} + D. \qquad (3)$$

Тогда функция (2) представится в виде

$$f = PQREF.$$

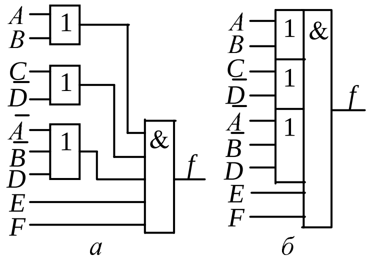


Рис. 16

Это выражение, а также функции (3) реализуются отдельными логическими элементами. Применив к ним операцию суперпозиции, получим заданную функцию и соответствующую ей комбинационную схему (рис. 16,*а*). Эта же схема приведена на рис. 16,*б* но в более компактном представлении.

3.8. Комбинационные схемы и булевы функции высших порядков

Если булева функция представлена в форме высшего порядка, то при помощи системы подстановок можно также однозначно построить соответствующую логическую схему. Проиллюстрируем это на примере функции

$$f = A + B(C + DE).$$

Запишем ее в виде $f = A + \varphi_1$, где $\varphi_1 = B(C + DE)$. Очевидно, что хотя полученное выражение $A + \varphi_1$ может быть представлено отдельным логическим элементом, изобразить схему мы не можем, так как неизвестно, откуда взять выход φ_1. Поэтому введем новое обозначение: $\varphi_1 = B\varphi_2$, где $\varphi_2 = C + DE$. И в этом случае схему построить невозможно, поскольку неизвестно, что такое φ_2. Продолжим обозначения:

$$\varphi_2 = C + \varphi_3, \text{ где } \varphi_3 = DE.$$

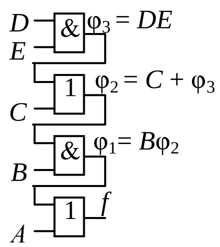


Рис.17

Начать построение схемы можно лишь с того выражения, в котором нет знаков для промежуточных обозначений. В данном случае это выражение $\varphi_3 = DE$. С этой конъюнкции и начинаем изображать схему. Двигаясь в обратном направлении по системе обозначений, строим всю искомую комбинационную схему (рис. 17).

Рассмотрим более сложную функцию:

$$f = \overline{[(AB+\overline{A}\,\overline{B})C\overline{D}E + AC + BD]DEF} + \overline{D}\,\overline{F}. \qquad (4)$$

Система обозначений имеет вид:

$$f = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ где } \varphi_1 = \overline{[(AB+\overline{A}\,\overline{B})C\overline{D}E + AC + BD]DEF};$$

$$\varphi_2 = \overline{D}\,\overline{F}.$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 DEF, \text{ где } \varphi_3 = \overline{(AB+\overline{A}\,\overline{B})C\overline{D}E + AC} + BD.$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 + \varphi_5, \text{ где } \varphi_4 = \overline{(AB+\overline{A}\,\overline{B})C\overline{D}E + AC}; \quad \varphi_5 = BD.$$

$$\varphi_4 = \overline{\varphi}_6, \text{ где } \varphi_6 = (AB+\overline{A}\,\overline{B})C\overline{D}E + AC.$$

$$\varphi_6 = \varphi_7 + \varphi_8, \text{ где } \varphi_7 = (AB+\overline{A}\,\overline{B})C\overline{D}E; \quad \varphi_8 = AC.$$

$$\varphi_7 = \varphi_9 C\overline{D}E, \quad \text{где } \varphi_9 = AB + \overline{A}\,\overline{B}.$$

$$\varphi_9 = \varphi_{10} + \varphi_{11}, \quad \text{где } \varphi_{10} = AB; \quad \varphi_{11} = \overline{A}\,\overline{B}.$$

Комбинационная схема, построенная в соответствии с этой системой подстановок, приведена на рис. 18.

В аналитической записи функции (4) некоторые аргументы повторяются по два раза. Это $A, B, C, D, \overline{D}, E$. На рис. 18 эти буквы также повторяются по два раза.

Например, буква A обозначает входной сигнал для двух элементов И: φ_8 и φ_{10}. Следовательно, оба входа, обозначенные буквой A, должны быть подключены к выходу одного и того же запоминающего устройства A, т. е. элемент A нагружен на две логические схемы И. То же самое относится и к запоминающим элементам B, C, D, E, причем элемент D нагружен на две схемы *И* по прямому выходу и на две схемы И – по инверсному.

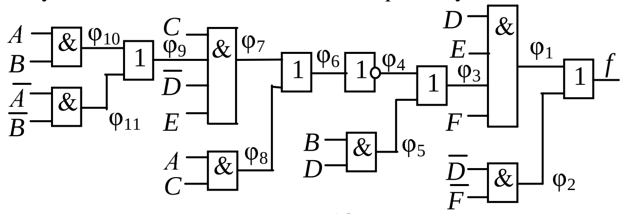


Рис. 18

В предыдущем разделе было сказано, что существуют параллельно-последовательные контактные структуры и мостиковые. Каждой из них соответствует вполне определенная булева функция. Но на основе заданной функции можно построить только параллельно-последовательную схему. Мостиковые структуры образуют особый класс. Для их построения необходимо разрабатывать специальные методы. Бесконтактные логические схемы гораздо проще, так как в них нет аналога мостиковым контактным структурам. В этом состоит одно из самых существенных отличий контактных структур от бесконтактных комбинационных схем.

Упражнения

1. Сколько элементов И и сколько элементов ИЛИ необходимо для построения комбинационной схемы на основе булевой функции (число входов логических элементов не ограничено):

(ЯК1) $f = ABC + DE + P$?

(МУЗ) $f = A(B + C)D + Q$?

(НЫХ) $f = A(B + CD) + EF + Q$?

(344) $f = (A + B + C)(D + E + PQ) + R$?

2. Сколько элементов И, сколько элементов ИЛИ и сколько инверторов необходимо для построения комбинационной схемы на основе булевой функции вида:

(541) $f = \overline{\overline{A+\overline{B}}+P+Q}+\overline{A+C}$?

(ЛЕХ) $f = \overline{A+B+C}\,D+\overline{A}+\overline{\overline{B}+\overline{C}+D}$?

(2ПЕ) $f = \overline{AB+C}\,DE+\overline{A+BC}\,E$?

(533) $f = \overline{\overline{\overline{ABC}D}E}+\overline{PQ}$?

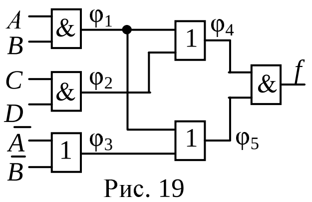


Рис. 19

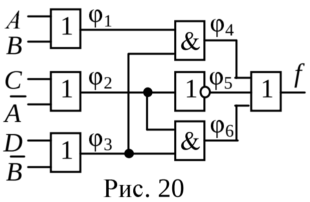


Рис. 20

3. Найдите булеву функцию f по комбинационной схеме, приведенной на рис. 19.

(ТЯМ). Перечислите номера ее минтермов.

(РЫН). Для минимальной ДНФ функции определите: число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов.

(620). Для минимальной ДНФ инверсии функции определите: число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов.

4. (ТСС). По схеме, приведенной на рис. 19, найдите минимальную ДНФ функции φ_5.

5. (ЕКУ). Какие значения (0 или 1) принимает функция f (рис. 17) на наборах 0, 3, 8, 12, 15, 20, 31?

6. (ЕНН). По схеме, приведенной на рис. 20, найдите минимальную ДНФ функции φ_5.

7. (529). Для минимальной ДНФ функции φ_4 (рис. 20) определите: число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов.

8. (МИН). Укажите десятичные номера наборов значений аргументов A, B, C, D, на которых выходной сигнал f (рис. 20) принимает нулевое значение.

3.9. Логический синтез комбинационных схем

Логическое проектирование комбинационных схем обычно сводится к построению таблиц соответствия с последующим нахождением и минимизацией булевых функций, на основе которых затем строится комбинационная схема. При переходе к реальным логическим элементам необходимо учитывать их ограничения по таким характеристикам, как число входов, нагрузочная способность, быстродействие и др. Учет этих ограничений осуществляется путем преобразования булевых функций, описывающих работу проектируемой схемы.

Главным и самым трудоемким является этап логического проектирования, заканчивающийся построением комбинационной схемы без учета особенностей реальных логических элементов.

Многие практические задачи отличаются настолько высокой сложностью, что решение их при помощи таблиц соответствия является совершенно невозможным. Например, схема сумматора для сложения двух десятизначных двоичных чисел представляется системой булевых функций, самая сложная из которых зависит от 20 аргументов. Таблица соответствия при этом содержит более миллиона строк. Во всех подобных случаях задачу синтеза схемы подвергают предварительному анализу, чтобы выяснить, нельзя ли схему разбить на простые блоки, а еще лучше – не удастся ли ее представить в виде определенным образом соединенных между собой относительно несложных ячеек, одинаковых по своей логической структуре (см. подразделы 3.14 – 3.18).

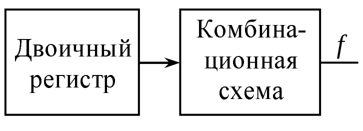


Рис. 21

Процесс логического проектирования комбинационных схем проиллюстрируем на нескольких простых примерах, после чего перейдем к более сложным схемам.

Пример 1. На рис.21 приведена схема, состоящая из двух блоков – двоичного регистра и комбинационной схемы. **Двоичный регистр** – это набор двоичных запоминающих элементов, при помощи которых хранят двоичные числа. Допустим, что в качестве запоминающих элементов используются переключатели (рис. 14), моделирующие триггеры с парафазными выходами (рис.7,*д*). Поставим в соответствие каждому переключателю двоичный разряд и сформулируем задачу для разработки комбинационной схемы: единичный сигнал (высокий уровень напряжения) на выходе f появляется в том случае, когда число N, занесенное в регистр, является простым, при этом $N < 14$.

Строим таблицу соответствия. Наибольшее число, которое может находиться в регистре, равно 13 (в двоичном виде – это четырехзначный код). Следовательно, необходим четырехразрядный двоичный регистр.

Таблица 3

	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	×
15	1	1	1	1	×

Обозначим элементы регистра буквами A, B, C, D, где элемент A соответствует старшему разряду четырехзначного двоичного числа, а D – младшему. Озаглавим этими буквами колонки в таблице соответствия (таблица 3) и перечислим в ней все 16 наборов значений аргументов. Слева расположим еще одну колонку. В ней запишем десятичные эквиваленты двоичных чисел, указанных в строках. Правую колонку обозначим буквой f. Это функция, которую требуется найти. Обозначим единицами в колонке f простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13. В строках 14 и 15 ставим крестики, так как эти числа в регистр никогда записываться не будут (по условию).

По карте Вейча (рис. 22) получаем:

$$f = BD + CD + \overline{A}\overline{B}C.$$

Это минимальная ДНФ, полученная при следующем доопределении: на наборе 1110 примем значение функции, равное нулю, на наборе 1111 – единице.

Минимальная КНФ имеет вид

$$f = (\overline{A} + D)(B + C)(\overline{B} + D).$$

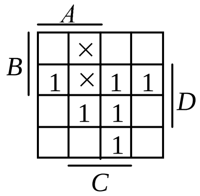


Рис. 22

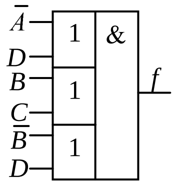


Рис. 23

Минимальная КНФ экономичнее, поэтому ее будем считать решением сформулированной задачи. Соответствующая комбинационная схема приведена на рис. 23.

Пример 2. Комбинационная схема может иметь несколько выходов. В этом случае каждому выходу ставится в соответствие отдельная булева функция. Пусть требуется построить преобразователь двоичного числа $N < 12$ в выходное число вида $N + 4$ (также представленное в двоичной системе). Наибольшее выходное двоичное число имеет вид 1111, следовательно, в комбинационной схеме необходимо предусмотреть четыре выхода.

Таблица 4

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0
7	0	1	1	1	1	0	1	1
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	0
11	1	0	1	1	1	1	1	1
12	1	1	0	0	×	×	×	×
13	1	1	0	1	×	×	×	×
14	1	1	1	0	×	×	×	×
15	1	1	1	1	×	×	×	×

Строим таблицу соответствия (табл. 4). В отличие от предыдущего примера в данном случае правая часть таблицы содержит четыре колонки, обозначенные символами f_1, f_2, f_3, f_4, где f_1 соответствует старшему разряду выходного числа, f_4 – младшему. В табл. 4 состояния 12, 13, 14, 15 обозначены крестиками. На этих состояниях все функции не определены. При помощи карт Вейча (рис. 24) находим минимальные формы искомых функций:

$$f_1 = A + B; \quad f_2 = \overline{B}; \quad f_3 = C; \quad f_4 = D.$$

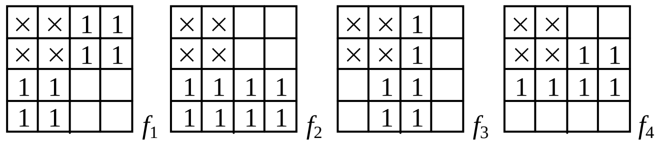


Рис. 24

Комбинационная схема, являющаяся решением поставленной задачи, приведена на рис. 25. Очень интересная получилась схема. Для ее реализации достаточно одного логического элемента ИЛИ, содержащего два входа.

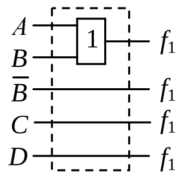


Рис. 25

Это выход, представленный функцией f_1. Все остальные функции не требуют для своей реализации никакого оборудования (кроме проводников), т.е. выходные сигналы снимаются непосредственно с выходов соответствующих запоминающих элементов.

Упражнения

1. Назовите двоичное число, которое подано на вход схемы (рис. 25), если выходное число равно:

(ОСЕ) 1101; (653) 0110; (525) 1001; (ЭЭХ) 1110.

2. Постройте преобразователь числа N в выходное число $N + 6$, где $N = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

(АЙФ)! Сколько двоичных разрядов содержится во входном числе и сколько в выходном?

(132). Назовите все числа (в десятичной системе), которые не могут появиться на выходе комбинационной схемы.

(ФЯЗ). Назовите все числа (в десятичной системе), которые не будут подаваться на вход схемы.

(454). Сколько существует наборов значений аргументов, на которых выходные функции не определены?

Найдите минимальные ДНФ функций (функции f_1 соответствует старший разряд выходного двоичного числа):

(А15) $f_1 = \ldots$; (ХВЛ) $f_3 = \ldots$;
(11.СИ) $f_2 = \ldots$; (АЛИ) $f_4 = \ldots$

От каких аргументов не зависит функция:

(Б76) f_1? (ЧАН) f_2? (УЛО) f_3? (БЭФ) f_4 =?

(ЕСЛ)! Сколько элементов И и сколько элементов ИЛИ необходимо для построения преобразователя?

По условию на вход преобразователя не будут подаваться числа, превышающие 9. Снимем это ограничение. Какие числа (в десятичном представлении) будут на выходе схемы, если на вход подать двоичное число:

(ОРЫ) 1010? (ДОО) 1100? (882) 1110? (039) 1011?

3.10. Синтез преобразователя двоичного числа в код «2 из 5»

В названии выходного кода отражена его структура: код состоит из пяти двоичных разрядов, причем в каждом пятизначном числе содержится две единицы и три нуля. Например: 11000, 10010, 00110 и др. Всего существует 10 таких кодов, следовательно, $N < 10$, где N – входное четырехзначное двоичное число.

Строим таблицу соответствия (табл. 5). В левой ее части перечислены 10 входных двоичных чисел. В правой части указаны коды «2 из 5», расположенные в порядке возрастания, если их рассматривать как обычные двоичные числа. (В общем случае между входными двоичными и выходными кодами «2 из 5» может быть установлено любое соответствие. В табл. 5 указано одно из них.) Поскольку кодов «2 из 5» существует всего 10, то шесть входных двоичных чисел являются неиспользуемыми. Состояния 10, 11, 12, 13, 14, 15 при минимизации можно рассматривать как неопределенные.

Таблица 5

	A	B	C	D	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1	0	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	0	0

Рассмотрим колонку f_1. В ней четыре единицы в строках 6, 7, 8, 9. Наносим эти единицы на карту Вейча (рис. 26). На эту же карту наносим неопределенные состояния, обозначив их крестиками. Доопределив функцию единицами и упростив, получаем ее минимальную ДНФ:

$$f_1 = A + BC.$$

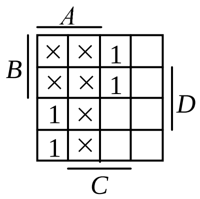


Рис. 26

Наносим на карту Вейча (рис. 27) вторую функцию (неопределенными являются те же состояния). После минимизации получаем:

$$f_2 = AD + B\overline{C} + \overline{B}CD.$$

Аналогично находим остальные три функции:

$$f_3 = A\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{B}C\overline{D};$$

$$f_4 = BCD + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D};$$

$$f_5 = BC\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}CD.$$

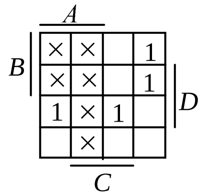


Рис. 27

На рис. 28 приведена комбинационная схема преобразователя. Заметим, что функции f_2 и f_5 содержат конъюнкцию $\overline{B}CD$. Эту конъюнкцию достаточно реализовать один раз, а использовать дважды так, как показано на рис. 28. На схеме есть еще один элемент, выход которого также используется неоднократно. Это элемент И, реализующий конъюнкцию BC. В результате ее трехкратного использования число логических элементов не уменьшилось, но некоторая экономия все же достигнута: заменены двухвходовыми элементами два трехвходовых элемента И (BCD и $BC\overline{D}$). Однако необходимо отметить, что порядок функций f_4 и f_5 повысился и стал равным трем. Это допустимо, если от комбинационной схемы не требуется предельно высокого быстродействия. Если же требование быстродействия является основным, экономить на числе входов элементов не следует. Неоднократно использовать можно лишь те фрагменты схемы, которые не приводят к повышению порядка, например, как в случае конъюнкции $\overline{B}CD$ (рис. 28).

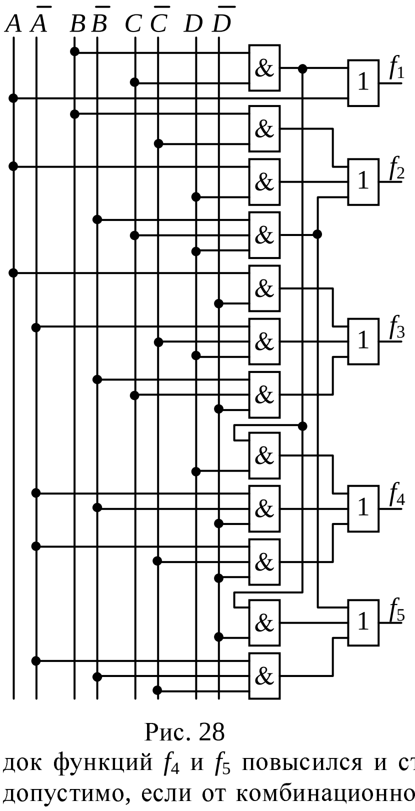


Рис. 28

Упражнения

1. Какое двоичное число подано на вход схемы (рис. 28), если выходное число в десятичном представлении равно:

(Б21) 10? (ТЫХ) 12? (457) 17? (868) 24?

2. На рис. 28 дан преобразователь двоичного числа в код «2 из 5», работающий в соответствии с табл. 5. Постройте обратный преобразователь. На его входы подаются двоичные коды «2 из 5», т. е. числа (в десятичном представлении): 3, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 24. На выходе получаются двоичные числа, соответственно: 0000, 0001, 0010, …,1001. Числа, не относящиеся к кодам «2 из 5», на вход преобразователя подаваться не будут, т. е. их можно рассматривать как неопределенные состояния. Запоминающие элементы для хранения кодов «2 из 5» обозначьте буквами A, B, C, D, E, выходы схемы – f_1, f_2, f_3, f_4, где f_1 – выход, соответствующий старшему разряду выходного числа.

(АНЕ)! Сколько двоичных разрядов имеет входное число и сколько – выходное?

(НИХ). Сколько существует состояний, на которых функции, описывающие схему преобразователя, не определены?

Укажите десятичные номера наборов, на которых единицами доопределены функции:

(ЮРЕ) f_1; (ПРИ) f_2; (115) f_3; (ТУК) f_4.

Найдите минимальные ДНФ функций, описывающих работу преобразователя:

(БИЛ) f_1; (ЛИ.В4) f_2; (АА.ВИ) f_3; (КУ.СИ) f_4.

(РНК)! Сколько элементов И и сколько элементов ИЛИ необходимо для реализации преобразователя?

(ЛТ5)! Сколько в схеме трехвходовых элементов И? Сколько в схеме трехвходовых элементов ИЛИ?

3.11. Полный дешифратор

На практике широко применяется комбинационная схема, получившая название «дешифратор» (избирательная схема [7, с. 398]). **Дешифратор** – это комбинационный преобразователь двоичного n-разрядного кода в двоичное число, содержащее не более одной единицы. При этом входное n-разрядное двоичное число обычно совпадает с номером выхода, на котором поддерживается высокий уровень.

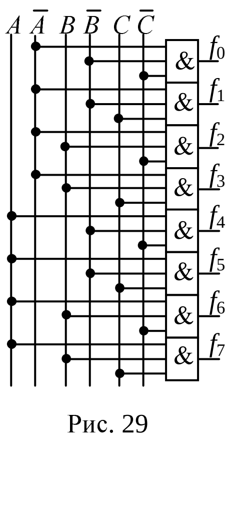


Рис. 29

Полный дешифратор содержит 2^n выходов. Каждому выходу соответствует булева функция в виде минтерма n переменных. Например, если $n = 3$, то схему полного дешифратора образуют следующие восемь минтермов:

$f_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; $f_1 = \overline{A}\,\overline{B}C$; $f_2 = \overline{A}B\overline{C}$;
$f_3 = \overline{A}BC$; $f_4 = A\overline{B}\,\overline{C}$; $f_5 = A\overline{B}C$;
$f_6 = AB\overline{C}$; $f_7 = ABC$.

Логическая схема его приведена на рис. 29, из которой видно, что она состоит из восьми трехвходовых

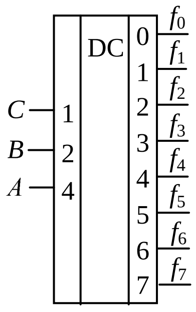


Рис. 30

логических схем И. Условное изображение полного трехвходового дешифратора приведено на рис. 30. Слева на этом рисунке указаны числа 1, 2, 4, обозначающие веса входного двоичного кода. На вход 1 необходимо подавать младший разряд кода, на вход 4 – старший разряд. Справа указаны номера выходов. Если входной код равен 000, то $f_0 = 1$, а все остальные функции равны нулю. Если на вход подать 001, то $f_1 = 1$ и т. д.

Полный дешифратор с четырьмя входами содержит 16 выходов и состоит из 16 схем И, где каждая схема И реализует определенный минтерм четырех аргументов. Полный дешифратор с пятью входами состоит из 32 пятивходовых элементов И, с шестью входами – из 64 шестивходовых схем И и т. д.

Упражнения

1. (Т81). Сколько выходов имеет полный дешифратор, если число его входов равно 8?

2. (ИР9). Дешифратор имеет пять входов. Какой код подан на вход дешифратора, если на десятом выходе имеется единица, а на всех остальных выходах – нули?

3. (САФ). Сколько вхождений аргументов имеет система булевых функций, описывающая работу полного пятивходового дешифратора?

3.12. Синтез неполного дешифратора

Дешифратор называется неполным, если число его выходов меньше чем 2^n, где n – число двоичных разрядов входного кода. Все n-значные коды в этом случае распадаются на два множества. Первое множество образуют рабочие коды. Каждому из них соответствует определенный выход в схеме дешифратора. Второе множество состоит из нерабочих кодов. Для них выходы в схеме дешифратора не предусмотрены. При подаче на входы любого из нерабочих кодов на всех выходах дешифратора устанавливается нулевой уровень напряжения.

Если же условия работы дешифратора таковы, что нерабочие коды на его входы подаваться не будут, то при нахождении минимальных форм булевых функций, описывающих схему дешифратора, нерабочие коды можно использовать как неопределенные состояния.

Синтез неполного дешифратора проиллюстрируем на примере кода «2 из 5», представленного в табл. 5. Будем считать, что эти коды подаются на входы дешифратора. Так как всего существует 10 входных кодов «2 из 5», то и дешифратор должен иметь лишь 10 выходов. Обозначим их $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_9$.

Логика работы дешифратора представлена в табл. 6. Заполнена она следующим образом. Если на вход дешифратора подать код 00011, то высокий уровень должен быть только на выходе f_0. В связи с этим в колонке f_0 строки 00011 ставим единицу, а во всех остальных колонках этой же строки записываем нули. Точно так же заполняем все строки таблицы.

На карте Вейча для функции f_0 (рис. 31) крестиками указаны неопределенные состояния (22 числа). Если на наборах 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 функцию доопределить единицами, а на всех остальных нерабочих наборах – нулями, то получим:

$$f_0 = DE.$$

Таблица 6

A	B	C	D	E	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Точно таким же образом находим минимальные формы остальных функций. Полный их список имеет вид:

$f_0 = DE$; $f_2 = CD$; $f_4 = BD$; $f_6 = AE$; $f_8 = AC$;
$f_1 = CE$; $f_3 = BE$; $f_5 = BC$; $f_7 = AD$; $f_9 = AB$.

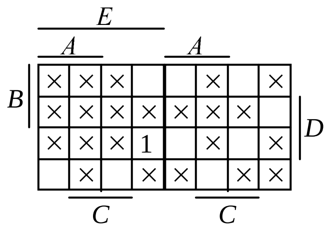


Рис. 31

Таким образом, получилась схема, состоящая из десяти двухвходовых логических элементов И. Для сравнения заметим, что при использовании полного дешифратора с пятью входами потребовалось бы 32 элемента И по пять входов каждый.

Упражнения

1. На входы дешифратора подаются четырехразрядные двоичные числа, являющиеся двоичными эквивалентами десятичных цифр. Постройте схему неполного дешифратора.

(330). Укажите нерабочие коды (в виде десятичных чисел в порядке их возрастания).

(489). Сколько в схеме двухвходовых, трехвходовых и четырехвходовых элементов И?

(5ТМ). Укажите наборы (десятичные), на которых функция f_8 доопределена единицами.

(КПК)! Найдите функции: $f_2 = \ldots$; $f_9 = \ldots$.

2. (795). На входы дешифратора (см. предыдущее упражнение) подан нерабочий код 1111. Укажите номера выходов, на которых будут высокие уровни напряжения.

3.13. Мультиплексор

Мультиплексор (селектор, согласно [56, с. 145]) – это комбинационная схема, имеющая n адресных входов, 2^n информационных входов 0, 1, 2, …, $2^n - 1$ (в случае полного мультиплексора) и один выход f_n, где индекс n говорит о том, что мультиплексор имеет n адресных входов. Если на адресные входы подать n-значное двоичное число i, то выход f_n подключится к i-му информационному входу, т. е. информация, поступающая на i-й вход, будет проходить на выход независимо от того, какие сигналы поступают на остальные информационные входы ($i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$). Булева функция, описывающая полный мультиплексор для $n = 3$, имеет вид

$$f_3 = Q_0\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + Q_1\overline{A}\,\overline{B}C + Q_2\overline{A}D\overline{C} + Q_3\overline{A}BC + Q_4A\overline{B}\,\overline{C} +$$
$$+ Q_5A\overline{B}C + Q_6AB\overline{C} + Q_7ABC,$$

где $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_7$ – информационные входы; A, B, C – адресные входы, при этом букве A соответствует старший разряд кода адреса.

Если n = 4, то получим схему полного мультиплексора на 16 информационных входов. Булева функция, описывающая эту схему, имеет вид

$$f_4 = Q_0\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + Q_1\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + Q_2\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + ... + Q_{15}ABCD.$$

По этим двум функциям видно, что основу мультиплексора составляет дешифратор. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_7$ – выходы полного трехвходового дешифратора. Если к его выходам подключить логическую схему, описываемую булевой функцией вида

$$f_3 = Q_0\varphi_0 + Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2 + \ldots + Q_7\varphi_7,$$

то получим полный мультиплексор на 8 информационных входов.

В общем случае на базе n-входового дешифратора можно построить мультиплексор в соответствии с булевой функцией вида

$$f_n = Q_0\varphi_0 + Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2 + \ldots + Q_r\varphi_r,$$

где $r = 2^n - 1$.

Полный мультиплексор кроме своего прямого назначения может быть использован в качестве схемы, реализующей произвольную булеву функцию до n аргументов, что следует из выражения f_n. Пусть булева функция имеет вид $f = AB\overline{C} + \overline{B}D$. Представим ее в СДНФ:

$$f = (1, 3, 9, 11, 12, 13).$$

Для реализации этой функции при помощи мультиплексора достаточно установить на его входах с номерами 1, 3, 9, 11, 12, 13 высокие уровни напряжения, а на всех остальных – низкие. Если теперь на адресные входы подать какой-либо набор значений аргументов, то на выходе получим уровень напряжения в точном соответствии с заданной функцией.

С математической точки зрения мультиплексор реализует операцию дифференцирования булевой функции, описывающей структуру этого мультиплексора, если дифференцирование осуществляется по переменным Q_i ($i = 0,1,2,3, \ldots,r$). Например, для функции $f_2(A,B)$ имеем

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = \overline{A}B,$$

откуда следует, что если $\overline{A}B = 1,$ то $f_2 = Q_1$, т. е. функция f_2 меняет свое состояние одновременно с изменением значения аргумента Q_1.

Следует отметить, что с технической точки зрения реализация булевых функций при помощи мультиплексора является неэффективной даже в том случае, если реализуемая функция имеет наиболее сложную минимальную ДНФ. Примером может служить функция «нечет». Эта функция содержит 2^{n-1} минтермов, каждый из которых является простой импликантой (см. подраздел 2.8). При n = 4 для ее реализации в классе ДНФ требуется 8 четырехвходовых элементов И и одна восьмивходовая схема ИЛИ, в то время как соответствующий мультиплексор, описываемый функцией f_4, состоит из 16 пятивходовых элементов И и одной 16-входовой схемы ИЛИ. Но если в соответствии с логикой работы некоторого цифрового устройства требуется быстро менять булеву функцию, то применение мультиплексора вполне оправданно.

Мультиплексор является неполным, если число его информационных входов меньше 2^n. Как и в случае неполного дешифратора, неиспользуемые адресные коды можно рассматривать как неопределенные состояния и учитывать их при минимизации булевой функции, описывающей схему неполного мультиплексора. В качестве примера рассмотрим мультиплексор с 10 информационными входами 1, 2, 3 ,4, 5, 6, 8, 9, 10, 12. Если считать, что остальные шесть кодов (при n = 4) на адресные входы подаваться не будут, то мультиплексор представится минимальной булевой функцией вида (в классе ДНФ)

$$f_4 = Q_1\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + Q_2\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + Q_3CD + Q_4\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + Q_5BD +$$
$$+ Q_6BC + Q_8\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + Q_9AD + Q_{10}AC + Q_{12}AB.$$

Упражнения

1. (ЛВЕ). Сколько вхождений аргументов имеет булева функция f_6, описывающая схему мультиплексора с 64 информационными входами?

2. (ХБФ). Известно, что f_3 = 0, если на адресные входы подавать коды 001, 011, 100, 110, 111, и f_3 = 1 на всех остальных кодах. Найдите значения $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_7$.

3. (КТ1). Неполный мультиплексор имеет 11 информационных входов: 0, 1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции, описывающей схему этого мультиплексора?

3.14. Однородные среды

Схема называется однородной, если она состоит из одинаковых ячеек, определенным образом соединенных между собой. Простейшим примером может служить многовходовая схема И (рис. 32).

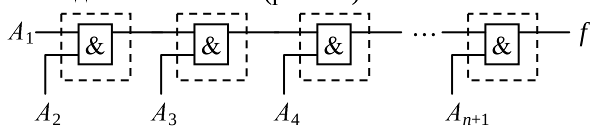


Рис. 32

На рис. 32 каждая ячейка содержит один двухвходовый элемент И, все ячейки одинаковы и соединяются между собой, образуя ленточную однородную среду. Если на рис. 32 элементы И заменить элементами ИЛИ, то получится многовходовая схема ИЛИ.

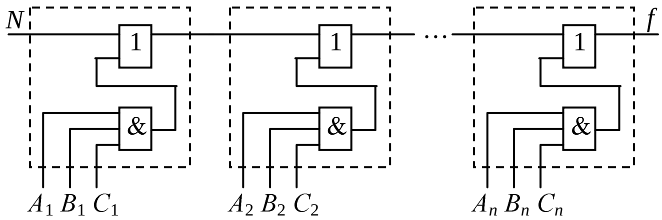


Рис. 33

На рис. 33 приведен пример однородной среды с более сложными ячейками. В общем виде эта структура обеспечивает реализацию ДНФ булевых функций, в которых число аргументов каждой конъюнкции не превышает 3. Самая сложная из этих функций имеет вид

$$f = N + A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2 + A_3B_3C_3 + \ldots + A_nB_nC_n, \qquad (5)$$

где N – вход, предназначенный для подключения предыдущих ячеек, но может рассматриваться и как самостоятельный вход.

Функция (5) зависит от $3n$ + 1 аргументов. При n = 4 получим однородную среду, обеспечивающую реализацию некоторого множества булевых функций до 13 вхождений аргументов. Например, введем подстановки:

$N = A;\ A_1 = B;\ A_2 = C;\ A_3 = D;\ A_4 = E;$

$B_1 = C_1 = B_2 = C_2 = B_3 = C_3 = B_4 = C_4 = 1,$

тогда булева функция, реализуемая однородной средой, примет вид

$$f = A + B + C + D + E.$$

Подстановки $N = 0$; $A_1 = A$; $B_1 = B$; $C_1 = 1$; $A_2 = \overline{B}$; $B_2 = C$; $C_3 = 1$; $A_3 = A_4 = 0$ дают функцию

$$f = AB + \overline{B}C.$$

Если $N = 1$, то независимо от состояния всех остальных входов функция примет единичное значение.

Заменим элементы ИЛИ (рис. 33) двухвходовыми элементами И, а элементы И заменим трехвходовыми элементами ИЛИ. Тогда получим однородную среду, реализующую КНФ функции, в которой каждая дизъюнкция содержит до трех переменных:

$$f = N(A_1 + B_1 + C_1)(A_2 + B_2 + C_2) \dots (A_n + B_n + C_n), \qquad (6)$$

где N – вход, предназначенный, как и в случае формулы (5), для подключения предыдущих ячеек, но при их отсутствии может быть самостоятельным входом.

Необходимо отметить, что строить однородную среду отдельно для КНФ нет необходимости, если запоминающие элементы имеют парафазные выходы. Пусть дана функция, представленная в КНФ. Проинвертируем ее по теореме де Моргана. Получим ДНФ инверсии заданной функции. Эту инверсию реализуем при помощи однородной среды (рис. 33). Если выходной сигнал проинвертировать, воспользовавшись элементом НЕ, то получим заданную функцию. Аналогичным образом может быть реализована ДНФ при помощи однородной среды, построенной на основе функции (6).

В следующих подразделах (3.15 – 3.18) приведены примеры относительно несложных ленточных однородных сред комбинационного типа, построенных путем тождественных преобразований булевых функций и представления их в виде рекуррентных соотношений. Вообще же синтез ячеек для однородных сред относится к тем задачам, для решения которых от разработчика требуется не только знание булевой алгебры, но и определенная изобретательность.

Упражнения

1. (551). Укажите значения аргументов на рис. 32, если $n = 4$; $f = 1$.

2. (ШВЗ). Укажите номера функций, которые могут быть реализованы при помощи однородной среды, приведенной на рис. 33, если $n = 4$:

1) $f = A$;
2) $f = ABC + BCDE + F + K$;
3) $f = A + B$;
4) $f = 1$;
5) $f = A + B + C + D + E + F$;
6) $f = ABC + E + F + K$;
7) $f = AB + CDE + EFKL + PQ$.

3. Запишите минимальную ДНФ функции, реализуемой однородной средой при $n = 3$ (рис. 33), если на входы подано:

(ЦВХ) $N = 1$; $A_1 = B_1 = C_1 = P$; $A_2 = Q$; $B_2 = C_2 = A_3 = B_3 = C_3 = 0$;
(ФИЛ) $N = 0$; $A_1 = A$; $B_1 = B$; $C_1 = C$; $A_2 = B_2 = C_2 = A_3 = B_3 = C_3 = 0$;
(РТК) $N = B$; $A_1 = A_2 = A_3 = A$; $B_1 = B_2 = B_3 = B$; $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

3.15. Схемы сравнения двух двоичных чисел

Примером однородной среды является схема равенства двух двоичных чисел. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – запоминающие элементы регистра A, в котором хранится n-разрядное двоичное число a; $B_1, B_2, \dots, B_n$ – запоминающие элементы регистра B для хранения числа b. Числа равны, если цифры в каждой паре разрядов с одинаковыми весами совпадают. Булева функция, описывающая схему равенства, имеет вид (см. пример 5 подраздела 2.11)

$$f = (A_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1)(A_2B_2 + \overline{A}_2\overline{B}_2)\dots(A_nB_n + \overline{A}_n\overline{B}_n). \quad (7)$$

Первое скобочное выражение соответствует младшему разряду сравниваемых чисел. Очевидно, что оно примет единичное значение только в том случае, если $A_1 = B_1 = 0$ либо $A_1 = B_1 = 1$. Точно так же интерпретируются все остальные скобочные выражения, каждое из которых относится к определенному разряду чисел a и b.

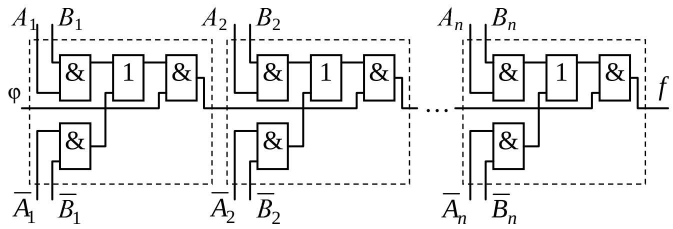


Рис. 34

Однородная среда, соответствующая выражению (7), приведена на рис. 34. Согласно этому выражению для реализации схемы равенства необходимо $2n$ двухвходовых элементов И, n двухвходовых элементов ИЛИ и одна n-входовая схема И. Эта n-входовая схема И рассредоточена на рис. 34 по ячейкам так, как показано на рис. 32. Вход φ предназначен для подключения предыдущих ячеек. Если это первая ячейка, то необходимо принять $\varphi = 0$.

Если проинвертировать выражение (7), то получим булеву функцию, описывающую структуру схемы неравенства ($\varphi = 1$ при $a \neq b$):

$$\varphi = \overline{A}_1B_1 + A_1\overline{B}_1 + \overline{A}_2B_2 + A_2\overline{B}_2 + \dots + \overline{A}_nB_n + A_n\overline{B}_n.$$

Эту функцию легко реализовать при помощи однородной среды, приведенной на рис. 33, если использовать $2n$ ячеек и принять $N = 0$.

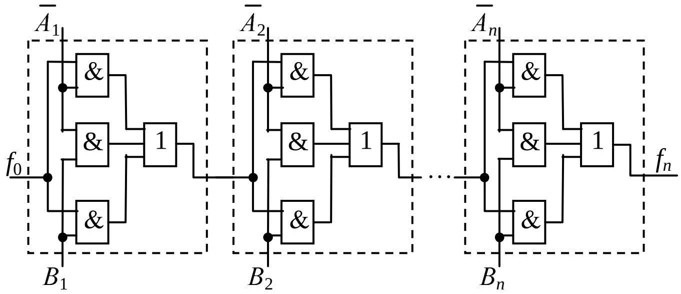


Рис. 35

На рис. 35 приведена однородная среда, реализующая булеву функцию f_n, принимающую единичное значение при $a < b$. Однородная среда построена на основе рекуррентного выражения (вывод его в [60, с. 143–149]) вида

$$f_n = B_n\overline{A}_n + B_n f_{n-1} + \overline{A}_n f_{n-1},$$

где A_n и B_n – запоминающие элементы, в которых хранятся старшие разряды сравниваемых двоичных чисел.

На вход f_0 первой ячейки необходимо подать низкий уровень, тогда функция f_1 примет вид $f_1 = \overline{A}_1B_1$.

Выход второй ячейки представлен функцией

$$f_2 = \overline{A}_2B_2 + f_1\overline{A}_2 + f_1B_2.$$

Для третьей ячейки получаем аналогично

$$f_3 = \overline{A}_3B_3 + f_2\overline{A}_3 + f_2B_3 \quad \text{и т. д.}$$

Упражнения

1. Найдите число a и число b (в десятичной системе), если при $n = 4$ задано (рис. 34):

(ПИЙ) $A_1 = A_2 = A_3 = B_2 = 0$; $B_1 = B_3 = B_4 = A_4 = 1$;
(138) $B_1 = B_2 = B_3 = A_3 = A_4 = 1$; $A_1 = A_2 = B_4 = 0$;
(РЕХ) $A_1 = A_2 = A_3 = B_4 = 1$; $B_1 = B_2 = B_3 = A_4 = 0$.

2. (КНН)! Найдите число b (в десятичной системе) и укажите значение φ, если при $n = 4$ на рис. 34 задано:

$A_1 = A_3 = 1$; $A_2 = A_4 = 0$; $f = 1$.

3. (920)! На рис. 34 при $n = 5$ задано:

$$\overline{A}_1 = \overline{B}_3 = A_5 = 1; \quad \overline{B}_2 = \overline{A}_4 = 0; \quad f = 1.$$

Найдите число b и значение φ.

4. (856)! На рис. 34 при $n = 5$ задано:

$$A_1 = \overline{B}_3 = 1; \quad \overline{A}_2 = B_4 = \overline{B}_5 = 0; \quad f = 1.$$

Найдите число a и число b. Укажите значение φ.

5. (695). Найдите значение функции f (рис. 35), если при $n = 4$ задано: $a = b = 1100$, $\varphi = 0$.

6. (АТЗ). На рис. 35 при $n = 4$ задано:

$A_1 = A_2 = B_4 = 0$; $A_3 = A_4 = B_1 = B_2 = B_3 = 1$.

Найдите числа a и b (в десятичном представлении).

7. В нижеприведенных двоичных числах a и b младший разряд находится справа. Укажите значения функций f_1, f_2, …, f_n, (рис. 35), если при $n = 6$ и $f = 0$:

(524) $a = 001101$; $b = 010011$;
(ЕЯЗ) $a = 001000$; $b = 000100$;
(ДАФ) $a = 101100$; $b = 101110$;
(472) $a = 100010$; $b = 100000$.

8. Пусть схема сравнения (рис. 35) состоит из шести ячеек. Сколько существует различных чисел b, при которых $f_6 = 1$, если:

(ЕСЕ) $a = 36$? (ШТЗ) $a = 0$? (695) $a = 63$?
(552) $a = 1$? (СЕИ) $a = 12$? (Г76) $a = 60$?

9. Сколько существует различных чисел b (рис. 35, $n = 6$), при которых $f_6 = 0$, если:

(ЕВЭ) $a = 25$? (БТМ) $a = 63$? (Т97) $a = 1$?

10. (ЮУС). Сколько ячеек потребуется для построения однородной среды, если каждое из сравниваемых чисел не превышает 10000 (десять тысяч)?

3.16. Схема «чет-нечет»

В подразделе 2.8 приведена схема «чет», обеспечивающая проводимость в том случае, когда в единичном состоянии находится четное число контактных элементов. На рис. 30 и 31 раздела «Контактные структуры» эта схема представлена в виде однородной ленточной среды. Аналогичным образом может быть реализована и логическая схема «чет-нечет» на бесконтактных элементах И, ИЛИ, НЕ.

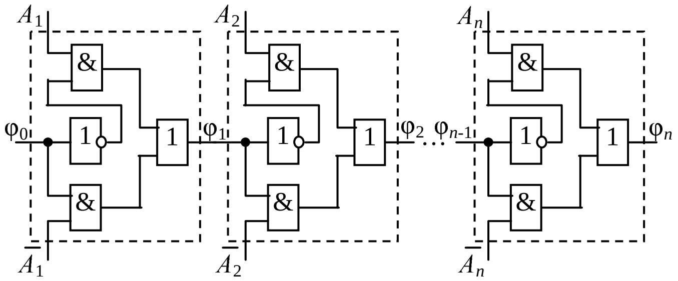


Рис. 36

Пусть A_1, A_2, …, A_n – двоичные запоминающие элементы, образующие регистр для хранения n-разрядных двоичных чисел. Для одной ячейки, когда $n = 1$, имеем

$$\varphi_1 = \overline{A}_1,$$

так как индекс одноразрядного двоичного числа является четным только в том случае, когда число равно нулю.

Удлиним схему, добавив второй разряд:

$$\varphi_2 = \overline{A}_1\overline{A}_2 + A_1A_2 = \varphi_1\overline{A}_2 + \overline{\varphi}_1A_2.$$

Для n-разрядного числа имеем

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}\overline{A}_n + \overline{\varphi}_{n-1}A_n.$$

Таким образом, получили рекуррентное соотношение, в соответствии с которым нетрудно построить однородную среду, если каждой из функций φ_1, φ_2, φ_3, …, φ_n поставить в соответствие отдельную ячейку (рис. 36). Вход φ_0 является управляющим. Если $\varphi_0 = 1$, то однородная среда реализует схему «чет». Если же $\varphi_0 = 0$, то однородная среда реализует схему «нечет».

Упражнения

1. Определите индекс следующих двоичных чисел:

(ЦНП) 001100; (52Т) 111110; (75К) 00000.

2. Укажите номера чисел с четными индексами:

(СПИ)	(ОНК)	(ХА8)
1) 0011001;	1) 1000001;	1) 000111;
2) 111011;	2) 0111110;	2) 1100;
3) 11110;	3) 11;	3) 111001;
4) 00000;	4) 1111;	4) 0000;
5) 111111;	5) 0;	5) 1111;
6) 011001;	6) 00011;	6) 111110011.

3. Укажите значения функций φ_1, φ_2, …, φ_n (рис. 36), если при $\varphi_0 = 1$:

(ЯНЕ) $a = 101011$; (ЖУХ) $a = 1110001$;
(963) $a = 0001101$; (А24) $a = 1001100111$;
(935) $a = 0000$; (КЛК) $a = 111111$.

4. Укажите значения функций φ_1, φ_2, …, φ_n (рис. 36), если при $\varphi_0 = 0$:

(РУЛ) $a = 011010$; (Т98) $a = 11011$;
(ХАН) $a = 010000$; (Т50) $a = 100001$;
(АРЕ) $a = 011111$; (РЕХ) $a = 1111111$.

5. (ШВЗ). Укажите номера правильных утверждений:

1) если структуру «чет» укоротить на одну ячейку, то она по-прежнему будет выполнять функцию «чет»;

2) если в структуре «чет» поменять местами входы A_i и $\overline{A}_i$ ($i = 1, 2, …, n$), то получим структуру «нечет»;

3) если из структуры «чет» удалить первую ячейку, а на вход φ_1 подать низкий уровень, то получим структуру «нечет»;

4) если в структуре «чет» принять $A_1 = 1$, а на оставшиеся входы подавать произвольные числа n, то структура будет выполнять функцию «нечет» относительно чисел n;

5) если в структуре «нечет» принять $A_3 = 0$, а на оставшиеся входы подавать произвольные числа n, то структура будет выполнять функцию «чет» относительно чисел n;

6) пусть на рис. 36 старшему разряду числа соответствует вход A_n. Если входу A_n поставить в соответствие младший разряд, а входу A_1 – старший, то схема по-прежнему будет выполнять функцию «нечет» при $\varphi_0 = 0$;

7) если при четном n структуру «нечет» разделить на две равные части, то каждая половинная структура будет выполнять функцию «чет».

3.17. Синтез двоичного сумматора

На рис. 37 приведена однородная среда, состоящая из пяти одинаковых ячеек – трехвходовых одноразрядных сумматоров, обозначенных символом SM, где каждой ячейке соответствует определенный разряд двоичного числа. По рис. 37 видно, что число ячеек может быть увеличено до любого числа без ограничений. Младшему разряду суммы соответствует выход Σ_1, старшему – Σ_6. Выход Σ_6 – это одновременно перенос P_5 из пятого разряда в шестой. Так как шестой ячейки нет, то выход P_5 используется в качестве старшего разряда суммы. Ячейка младшего разряда имеет вход P_0. По этому входу подается сигнал от предыдущей ячейки. Но предыдущей ячейки нет. Следовательно, необходимо принять $P_0 = 0$.

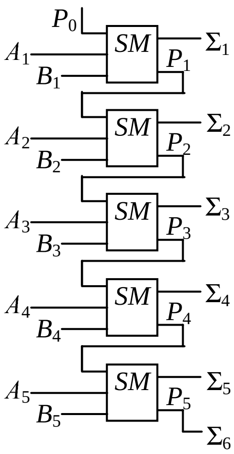


Рис. 37

Выберем какую-либо ячейку с номером i (первая ячейка является особой, поэтому ее не учитываем, тогда i = 2, 3, 4, 5). Ячейка имеет три входа: A_i, B_i, P_{i-1} и два выхода: Σ_i и P_i. В таблице 7 перечислены все возможные состояния входов и выходов i-й ячейки. Например, в строке 000 показано: в i-м разряде обоих чисел находятся нули и отсутствует перенос от предыдущего разряда. Поэтому в колонках Σ_i и P_i записаны нули. В следующей строке отмечен случай, когда в i-м разряде обоих чисел находятся нули, но от предыдущего разряда поступила единица переноса и т. д.

По табл. 7 после минимизации получаем:

$$\Sigma_i = \overline{A}_i\overline{B}_iP_{i-1} + \overline{A}_iB_i\overline{P}_{i-1} + A_i\overline{B}_i\overline{P}_{i-1} + A_iB_iP_{i-1}\,; \quad (8)$$

$$P_i = A_iB_i + A_iP_{i-1} + B_iP_{i-1}. \quad (9)$$

Таблица 7

A_i	B_i	P_{i-1}	Σ_i	P_i
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Логическую схему ячейки можно построить непосредственно по этим выражениям. Потребуется четыре трехвходовых элемента И, три двухвходовых элемента И, один четырехвходовый элемент ИЛИ, один трехвходовый элемент ИЛИ и один инвертор, реализующий выражение $\overline{P_i}$ для следующего разряда – всего 10 элементов.

Упростить схему можно путем повышения порядка выражений (8) и (9) и за счет повторного использования отдельных частей схемы. Прежде всего заметим, что функции (8) и (9) являются симметрическими и могут быть представлены в виде:

$$\Sigma_i = S_1 + S_3; \quad (10)$$

$$P_i = S_2 + S_3, \quad (11)$$

где индексы 1, 2, 3 представляют собой a-числа симметрических функций.

Проинвертируем выражение (10):

$$\overline{\Sigma}_i = S_0 + S_2. \quad (12)$$

Самой сложной составляющей выражений (11) и (12) является симметрическая функция S_2:

$$S_2 = A_iB_i\overline{P}_{i-1} + A_i\overline{B}_iP_{i-1} + \overline{A}_iB_iP_{i-1} =$$

$$= A_i\overline{B_iP_{i-1} + \overline{B}_i\overline{P}_{i-1}} + \overline{A}_iB_iP_{i-1}.$$

Введем обозначения: $\varphi_1 = B_iP_{i-1}$; $\varphi_2 = \overline{B}_i\overline{P}_{i-1}$, тогда

$$S_2 = A_i\overline{\varphi_1 + \varphi_2} + \overline{A}_i\varphi_1 = A_i\overline{\varepsilon} + \overline{A}_i\varphi_1, \text{ где } \varepsilon = \varphi_1 + \varphi_2;$$

$$\overline{\Sigma}_i = S_2 + \overline{A}_i\varphi_2 = A_i\overline{\varepsilon} + \overline{A}_i\varphi_1 + \overline{A}_i\varphi_2 = A_i\overline{\varepsilon} + \overline{A}_i\varepsilon;$$

$$P_i = S_2 + A_i\varphi_1 = A_i\overline{\varphi_1 + \varphi_2} + \overline{A}_i\varphi_1 + A_i\varphi_1 = A_i\overline{\varepsilon} + \varphi_1.$$

Обозначим: $\gamma = A_i\overline{\varepsilon}$, тогда получим окончательно:

$$\overline{\Sigma}_i = \gamma + \overline{A}_i\varepsilon; \qquad P_i = \gamma + \varphi_1.$$

На рис. 38 в соответствии с принятыми обозначениями приведена логическая схема i-й ячейки сумматора. В ней также 10 логических элементов, как и в схеме, построенной по выражениям (8) и (9). Но все же схема на рис. 38 значительно проще, так как в ней все элементы И и ИЛИ имеют только по два входа, а всего входов у всех элементов – 17, в то время как в схеме до упрощения было 26 входов.

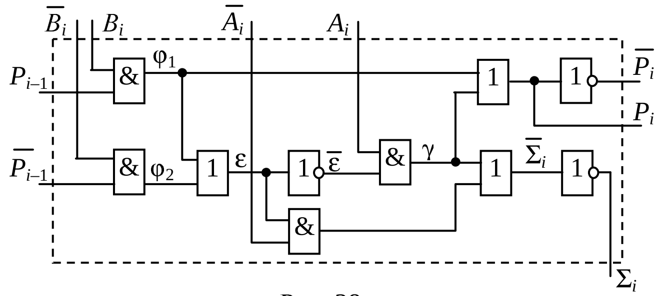


Рис. 38

Необходимо иметь в виду, что повышение порядка функций снижает быстродействие сумматора. Ячейка, изображенная на рис. 38, имеет 6-й порядок. Если суммируются, например, 40-разрядные двоичные числа, то при сложении двоичного числа, состоящего из 40 единиц, с числом 000 …01 (39 нулей) получится 41-разрядное число, в старшем разряде которого – единица, а во всех остальных 40 разрядах – нули. С момента подачи на входы сумматора этих чисел сигнал переноса должен пройти почти 240 элементов. Если каждый элемент задержит сигнал на 1 нс (10^{-9}с), то сумматор сможет выполнять не более 4 миллионов операций сложения в одну секунду.

Упражнения

1. (ЕЕР). Назовите числа a и b (в десятичной системе), участвующие в суммировании (рис. 37), если:

$A_1 = A_2 = A_5 = B_2 = B_3 = 1$; $\quad A_3 = A_4 = B_1 = B_4 = B_5 = 0$.

2. Укажите значения переносов в порядке: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 37), если суммируются числа:

(ККС) 12 и 14; (ШМГ) 31 и 31; (ШРЖ) 25 и 6;
(ЭРД) 10 и 10; (МЕЕ) 10 и 12; (ШИЦ) 31 и 1.

3. (ОКО). Назовите наибольшее значение суммы двух чисел, которое может быть получено при суммировании с использованием однородной среды, содержащей 12 ячеек. (Ответ в десятичной системе.)

3.18. Вычисление бесповторных булевых функций

В данном подразделе рассмотрим однородную среду, предназначенную для вычисления значений бесповторных булевых функций, заданных в ДНФ и не содержащих инверсных аргументов. Напомним, что булева функция называется бесповторной, если в ее записи каждый аргумент встречается только один раз. Например, функция $f = AB + CD + E$ является бесповторной, но ту же функцию, представленную в виде

$$f = AB + CD + E + E,$$

бесповторной назвать нельзя, так как в ее записи буква E встречается два раза.

Если бесповторная булева функция представлена в ДНФ, то ей можно поставить в соответствие двоичный код длины n, где n – число вхождений аргументов или число самих аргументов, что для бесповторной функции одно и то же. Пусть первая конъюнкция функции содержит n_1 аргументов. Поставим ей в соответствие код, состоящий из $n_1 - 1$ нулей и одной единицы, записываемой справа от $n_1 - 1$ нулей. Если вторая конъюнкция содержит n_2 аргументов, то ей поставим в соответствие n_2-разрядный код, где $n_2 - 1$ первых мест занимают нули, а на последнем месте стоит единица и т. д. Приставив один к другому эти частные коды в порядке записи соответствующих конъюнкций (т. е. применим к ним операцию конкатенации), получим искомый код всей функции, который условимся называть α-кодом. Например, если

$$f = \underset{0}{A_1}\,\underset{0}{A_2}\,\underset{1}{A_3} + \underset{1}{A_4} + \underset{0}{A_5}\,\underset{0}{A_6}\,\underset{0}{A_7}\,\underset{1}{A_8},$$

то α-код имеет вид 00110001.

Очевидно, что по α-коду функция восстанавливается однозначно. Например:

α-код: 010001101; функция: $f = A_1A_2+A_3A_4A_5A_6+A_7+A_8A_9$;
α-код: 11100111; функция: $f =A_1+A_2+A_3+A_4A_5A_6+A_7 +A_8$;
α-код: 000001; функция: $f = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$;
α-код: 11111; функция: $f = A_1 + A_2 +A_3 + A_4 + A_5$.

Код функции, полученный по ее аналитическому выражению, всегда оканчивается единицей. При необходимости удлинить код (но без изменения функции) справа необходимо приписать соответствующее количество нулей. Первые же n–1 разрядов могут занимать нули и единицы в любых сочетаниях. Следовательно, всего существует 2^{n-1} бесповторных булевых функций n аргументов, аналитически заданных в ДНФ и не содержащих инверсий.

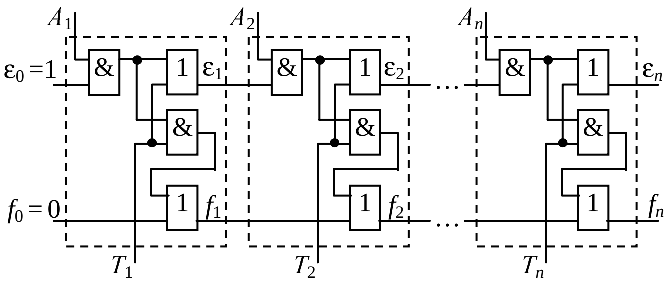


Рис. 39

На рис. 39 приведена однородная среда, состоящая из одинаковых ячеек, соединенных между собой двумя связями. Выходом является вывод f_n. Буквы $T_1, T_2, \ldots, T_n$ обозначают входы ячеек для подачи α-кода (будем называть их T-входами). На входы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ подаются значения аргументов. Если на T-входы подать α-код, то вся структура превратится в логическую схему, реализующую булеву функцию, соответствующую этому α-коду, т. е. α-код настраивает схему на реализацию той или иной функции. Пусть функция имеет вид

$$f = A_1A_2 + A_3.$$

Находим ее α-код: 011. В соответствии с этим кодом на T-входы подаем значения:

$$T_1 = 0,\ T_2 = 1,\ T_3 = 1.$$

На все остальные T-входы, если $n > 3$, подаем нули.

Первая ячейка не имеет предыдущей схемы, следовательно, на ее соединительные входы необходимо подать постоянные уровни: высокий – на вход ε_0, низкий – на вход f_0.

По схеме видно, что если α-код равен 011, то $\varepsilon_1 = A_1$ и $f_1 = 0$, так как $T_1 = 0$. Для второй ячейки: поскольку $T_2 =1$, то $\varepsilon_2 = 1$ и $f_2 = A_1A_2$. Для третьей ячейки: так как $T_3 =1$, то $\varepsilon_3 = 1$ и $f_3 = A_1A_2 + A_3$. Для четвертой: поскольку $T_4 = 0$, то $\varepsilon_4 = A_4$ и $f_4 = f_3 = A_1A_2 + A_3$. Очевидно, что для всех остальных ячеек

$$f_3 = f_4 = \ldots = f_n = A_1A_2 + A_3,$$

что совпадает с заданной функцией. Выход последней ячейки ε_n не является информационным.

Мы рассмотрели наиболее простые однородные комбинационные структуры – ленточные. Существуют и более сложные структуры, например, матричные (примером может служить комбинационная схема умножения двоичных чисел), однако их изучение выходит за рамки данного пособия.

Упражнения

1. (АЕП). Укажите номера функций, минимальные ДНФ которых являются бесповторными:

1) $f = (A_1+A_3)(A_1+A_4)(A_2+A_3)(A_2+A_4)$;
2) $f = A_1A_2A_3+A_4A_5+(A_6+A_7)(A_6+A_8)$;
3) $f = A_1A_3+A_5A_7$;
4) $f = A_1(A_2+A_3)$;
5) $f = A_2A_3+A_3A_4+A_3A_4$;
6) $f = (A_1+A_3)(A_1+A_4)$;
7) $f = A_2A_5$.

2. Запишите α-коды функций:

(581) $f = A_1A_2+A_3A_4$; (АОИ) $f = A_1A_2A_3A_4A_5$;
(ЦБШ) $f = A_1A_2A_3+A_4+A_5$; (К33) $f = A_1+A_2+A_3A_4A_5$.

3. Укажите число простых импликант и число вхождений аргументов, если минимальные ДНФ функций представлены α-кодами:

(АРХ) 00110011; (БАЛ) 00100111101;
(ИКК) 1110110001; (ОТМ) 0110110001.

4. Пусть задано α-число 0101 (рис. 39).

(721). Укажите значения функций f_1, f_2, f_3, f_4, если $A_1 = 0$, $A_2 = A_3 = A_4 =1$.

(В52). Укажите значения функций ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 на том же наборе.

3.19. Обнаружение одиночных искажений в двоичных кодах

В процессе передачи и обработки информации, представленной двоичными кодами, возможны искажения отдельных двоичных цифр, вызванные различными случайными помехами. В некоторых случаях эти помехи приводят к безобидным ошибкам без каких-либо последствий. Например, если мы получим слово «энциклопудия», то, возможно, и не заметим, что в нем вместо буквы «е» оказалась буква «у». В других случаях сообщение может оказаться бессмысленным либо (что еще хуже) понятным, но с другим смыслом.

Если сообщения передаются по каналу, помехи в котором неизбежны, то повысить помехоустойчивость передачи информации можно только одним путем – за счет введения кодовой избыточности, когда используется большее число двоичных разрядов, чем это необходимо.

Обычно информацию передают при помощи какого-либо алфавита. В него могут входить буквы, цифры и другие знаки (например, математические, химические, топографические и др.). В случае равномерных кодов все символы алфавита нумеруют в определенном порядке и номера представляют в виде двоичных кодов длины n, где $n = \log_2 N$ – число, округляемое в большую сторону; N – число символов алфавита. Величина n показывает, сколько двоичных знаков необходимо для кодирования каждого из N символов, т. е. n – это минимальная длина кода.

Добавим к каждому n-значному коду еще один двоичный знак и передавать информацию будем $(n+1)$-значными кодами. Какую же цифру использовать в качестве добавочной: единицу или нуль? Здесь возможны варианты. Для определенности договоримся: если в передаваемом n-значном коде содержится нечетное число единиц, то добавим к нему единицу, поставив ее, например, справа от младшего разряда n-значного кода (в принципе, поставить ее можно куда угодно, лишь бы это было постоянное место для всех передаваемых кодов). Если же в n-значном коде имеется четное число единиц, то добавим к нему нуль. В результате каждый передаваемый $(n + 1)$-значный код всегда будет иметь четный индекс, т. е. четное число единиц.

Пусть на приемном конце канала передачи информации имеется устройство, которое определяет, четное или нечетное число единиц содержится в принятом $(n+1)$-значном коде. Если в каком-либо коде окажется нечетное число единиц, то ясно, что в одном из $n + 1$ двоичных разрядов произошла замена единицы на нуль либо нуля на единицу. Возможно, что такая замена произошла в трех разрядах, в пяти, семи и т. д. Если же в принятом $(n+1)$-разрядном коде окажется четное число единиц, то можно предположить, что ошибок в коде нет либо в коде содержится две искаженные цифры, либо четыре, шесть и т. д. Практика показывает, что статистически наиболее вероятны одиночные ошибки. Следовательно, если вероятностью двух и более ошибок в одном и том же коде пренебречь, то проверкой на четность числа единиц можно обнаружить коды, содержащие одиночные искажения.

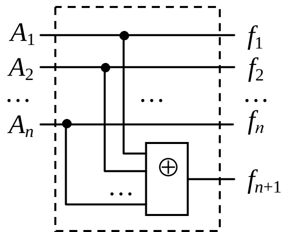


Рис. 40

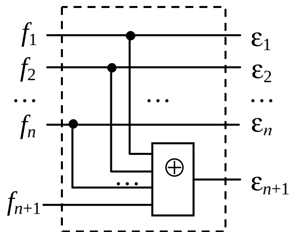


Рис. 41

На рис. 40 представлена схема, автоматически преобразующая n-значный двоичный код в $(n+1)$-разрядный, содержащий четное число единиц, где знаком $\oplus$ обозначена схема «нечет» (см. рис. 36).

Входной код представлен буквами $A_1, A_2, \ldots A_n$, где $A_i = 1$, если в i-м разряде входного двоичного кода находится единица, и $A_i = 0$, если в i-м разряде содержится нуль ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Выходной код представлен символами $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$:

$$f_i = A_i;$$
$$f_{n+1} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \ldots \oplus A_n, \tag{13}$$

где $\oplus$ – знак сложения по модулю два.

Выходной код $f_1\ f_2 \ldots f_{n+1}$ поступает на вход канала передачи информации.

На рис. 41 приведена схема, обеспечивающая обнаружение кодов, содержащих одиночные ошибки. На вход схемы поступают $(n+1)$-значные двоичные коды вида

$$f_1\ f_2\ f_3 \ldots f_n\ f_{n+1}.$$

Выходы схемы обозначены символами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Выходной код $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ является правильным (т. е. не содержит ошибок), если $\varepsilon_{n+1} = 0$, где

$$\varepsilon_{n+1} = f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_n \oplus f_{n+1}. \tag{14}$$

Если же $\varepsilon_{n+1} = 1$, то это значит, что в принятом коде содержится ошибка.

По рис. 40 и 41 видно, что схема, формирующая дополнительную цифру (контрольный разряд), отличается от схемы, распознающей одиночные ошибки в принятом коде, лишь числом входов: вторая схема содержит на один вход больше, чем первая. Следовательно, если во второй схеме на один из входов подать нулевой уровень напряжения, то она превратится в первую схему.

Схемы, изображенные на рис. 40 и 41, являются комбинационными, следовательно, их входы должны быть подключены к выходам триггерных регистров (см. с. 21). В первом случае необходим n-разрядный регистр, во втором – $(n + 1)$-разрядный.

Упражнения

1. (Б89). Укажите номера кодов (n = 8), для которых добавочной должна быть цифра 1 (проверка на четность):

1) 00001000;	4) 00000011;	7) 11001101;
2) 01111000;	5) 00000111;	8) 11111111;
3) 11111110;	6) 00000000;	9) 01010101.

2. (Б71). Какие из следующих $(n+1)$-разрядных кодов содержат одиночную ошибку, если n = 6:

1) 0110011;	4) 1110111;	7) 1000000;
2) 0100110;	5) 1001001;	8) 1111111;
3) 0011011;	6) 1110100;	9) 1001111?

3. Представьте выражение (13) в минимальной ДНФ и для $n = 8$ определите:

(Г52) число простых импликант;

(МБЗ) число вхождений аргументов;

(ХВИ) число вхождений инверсных аргументов;

(ЦВШ) число вхождений неинверсных аргументов.

4. (Г86). Сколько существует двоичных 8-значных наборов значений аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_8$, на которых функция (13) равна нулю?

5. (ШУ7). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) возможны ли случаи, когда код $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ совпадает с кодом $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ (рис. 41), а значение контрольного разряда равно единице, т. е. говорит о наличии ошибки?

2) верно ли, что функция (14) является симметрической функцией?

3) верно ли, что выражение (13) справедливо только при n четном?

4) верно ли, что выражение (13) справедливо только при n нечетном?

5) верно ли, что выражение (13) справедливо при любом n: четном и нечетном?

6) верно ли, что контрольный разряд можно расположить в любом месте $(n + 1)$-разрядного кода?

6. Передается код 001101100, где слева расположен контрольный разряд. После того как код приняли, оказалось, что $\varepsilon_9 = 1$ (рис. 41).

(ЮТ8). Сколько существует 9-значных кодов, для которых $\varepsilon_9 = 1$, если считать, что возможны только одиночные ошибки?

(ТИН). Сколько существует 9-значных кодов, для которых $\varepsilon_9 = 1$, если считать, что искажения возможны в любом числе разрядов?

3.20. Коды Хэмминга

Один контрольный разряд, добавленный к основному коду, обеспечивает решение простейшей задачи из области помехоустойчивого кодирования – обнаружение $(n+1)$-значных кодов, в которых под действием помех произошло искажение одной из $n+1$ двоичных цифр. С практической же точки зрения очень важно знать, в каком разряде произошел сбой, чтобы соответствующий знак заменить на противоположный и тем самым ошибку автоматически исправить. Для решения этой задачи необходимо увеличить число контрольных разрядов. Пусть n – длина основного кода $x_n x_{n-1} \dots x_2\ x_1$; m – число контрольных разрядов, образующих код $y_m y_{m-1} \dots y_2\, y_1$. Тогда по каналу передачи будут передаваться коды по $m + n$ двоичных знаков каждый. Очевидно, что величина m должна быть достаточной для того, чтобы пронумеровать все $m + n$ знаков в передаваемом $(m + n)$-разрядном коде, так как сбой может произойти в любом из $m + n$ разрядов. Следовательно, величины m и n должны быть связаны соотношением

$$2^m \geq m + n + 1, \tag{15}$$

где единице соответствует случай, когда принятый код не содержит ошибок.

Пусть информация передается при помощи 11-значных основных двоичных кодов. Тогда согласно формуле (15) число контрольных разрядов равно четырем. Где же расположить эти четыре знака? Ответ не является однозначным. Широкое распространение получил вариант, когда контрольные знаки занимают номера разрядов в передаваемом коде, представляющие собой степени числа 2, т.е. 1,2,4,8,… [26, с. 445]. Для случая $n = 11$ имеем:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ x_{11} & x_{10} & x_9 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & y_4 & x_4 & x_3 & x_2 & y_3 & x_1 & y_2 & y_1, \end{array} \tag{16}$$

где числа 1, 2, 3, …, 15 представляют собой номера разрядов 15-значного кода. Значения x_i в этом коде известны, поскольку они представляют собой цифры передаваемого основного кода, а значения y_j (j = 1, 2, 3, 4) определяются из выражений вида

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}; \\ y_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ y_3 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ y_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Допустим, что код (16) принят. Чтобы узнать, в каком разряде он содержит ошибку, достаточно найти значения следующих выражений:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = y_1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_7 \oplus x_9 \oplus x_{11}; \\ \varepsilon_2 = y_2 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ \varepsilon_3 = y_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}; \\ \varepsilon_4 = y_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10} \oplus x_{11}. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Значения ε_i (i = 1, 2, 3, 4) образуют двоичное четырехразрядное ε-число вида $\varepsilon_4\ \varepsilon_3\ \varepsilon_2\ \varepsilon_1$, где ε_4 – старший разряд, ε_1 – младший. Число ε – это и есть искомый номер разряда, в котором произошел сбой. Следовательно, чтобы исправить ошибку, цифру в разряде с номером ε необходимо проинвертировать. Если $\varepsilon = 0$, то это значит, что ошибки в принятом коде нет.

Рассмотрим пример. Пусть требуется передать по каналу связи двоичный код x = 10011110111. Согласно записи кода имеем:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{11} = 1;$$
$$x_4 = x_9 = x_{10} = 0.$$

Подставив эти значения в выражение (17), найдем контрольные цифры:

$$y_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$
$$y_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1;$$
$$y_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0;$$
$$y_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Согласно (16) получаем передаваемый код:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1, \end{array}$$

где числа 1, 2, 3, …, 15 – номера разрядов 15-разрядного кода, подаваемого на вход канала связи.

Допустим, что при передаче этого кода в пятом разряде произошел сбой: вместо единицы оказался нуль и на приемное устройство поступил код : 100111110100111.

Пронумеруем разряды принятого кода и укажем значения букв x_i и y_j согласно выражению (16):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1, \\ x_{11} & x_{10} & x_9 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & y_4 & x_4 & x_3 & x_2 & y_3 & x_1 & y_2 & y_1. \end{array} \tag{19}$$

Поиск ошибки на приемной стороне осуществляется при помощи выражений (18). Сначала проверим, не находится ли ошибка в левой части принятого кода, т. е. в разрядах 8, 9, …, 15. Так как согласно записи (19):

$$y_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{11} = 1; \qquad x_9 = x_{10} = 0,$$

то

$$\varepsilon_4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Проверка на четность левой части кода показала, что в соответствующих разрядах ошибки нет.

Аналогично находим все остальные цифры ε-числа:

$$\varepsilon_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1,$$

откуда следует, что ошибка в коде есть и она находится в одном из разрядов 4, 5, 6, 7. Определяем значение ε_2:

$$\varepsilon_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

следовательно, в разрядах 6 и 7 ошибки нет, она находится либо в разряде 4, либо 5. Находим значение ε_1:

$$\varepsilon_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Ошибка находится в пятом разряде, при этом ε-число равно 0101. Адрес ошибки найден. Теперь осталось проинвертировать цифру пятого разряда (нуль заменить единицей), отбросить контрольные разряды, и мы получим 11-значный код, не содержащий ошибки.

Рассмотренные коды, обеспечивающие исправление одиночных ошибок, называют кодами Хэмминга. О кодах Хэмминга и вообще о различных аспектах теории помехоустойчивого кодирования можно найти любые сведения в специальной литературе, например в [2, 4, 14, 20, 26, 39, 52].

Упражнения

1. (881). Информация передается блоками по 28 бит в каждом блоке (напомним, что бит – это один двоичный разряд). Сколько разрядов необходимо добавить к каждому блоку, чтобы получить возможность передавать информацию в кодах Хэмминга?

2. (Ф42). Известно, что в коде Хэмминга 25 разрядов. Сколько разрядов содержит основной код?

3. (Т23). Код Хэмминга имеет вид 110010101010001. Укажите в нем двоичные цифры контрольного кода при условии, что младший разряд расположен справа.

4. Найдите контрольные цифры (в двоичной системе) для кода Хэмминга (младший разряд справа), если передается код:

(АГИ) 01110011001; (П39) 111001000101101;
(ЭР5) 00011101110011; (УВО) 1111110000000000.

5. Укажите номера разрядов, где произошло искажение одиночной цифры, если принят код:

(М27) 111111000110; (ПАЖ) 001111010001;
(У38)! 110011110010; 011000100100;
(БЗЦ)! 110110000110; 110010110111.

3.21. Комбинационный формирователь кодов Хэмминга

Схема автоматического формирования кодов Хэмминга приведена на рис. 42. Прямоугольником на ней обозначена схема, реализующая систему четырех функций (17). Каждая из этих функций может быть реализована при помощи однородной ленточной структуры (рис. 36), если к быстродействию схемы не предъявляется особых требований. В противном случае схему следует строить на основе ДНФ либо КНФ функций (17).

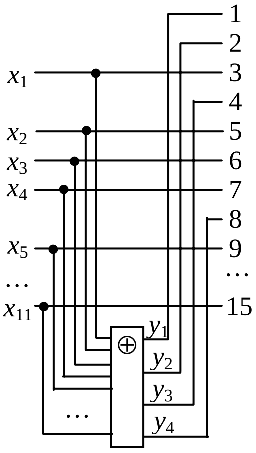


Рис. 42

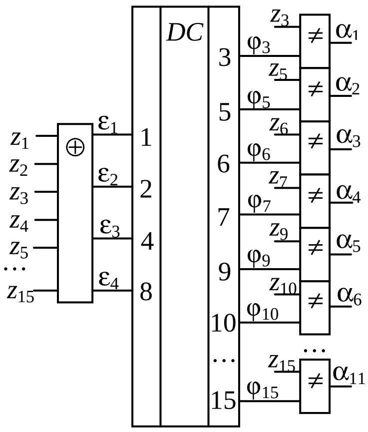


Рис. 43

Входы на рис. 42 обозначены символами x_1, x_2, …, x_{11}, выходы – числами 1, 2, 3, …, 15. С этих выходов код поступает на вход канала передачи информации. Пройдя канал, код поступит на вход схемы, исправляющей одиночные ошибки (рис. 43). Входы на схеме обозначены буквами z_1, z_2, …, z_{15}, выходы – α_1, α_2, …, α_{11}, где

$$\alpha_1 = z_3\overline{\varphi}_3 + \overline{z}_3\varphi_3;$$
$$\alpha_2 = z_5\overline{\varphi}_5 + \overline{z}_5\varphi_5;$$
$$\alpha_3 = z_6\overline{\varphi}_6 + \overline{z}_6\varphi_6;$$
$$\alpha_4 = z_7\overline{\varphi}_7 + \overline{z}_7\varphi_7;$$
$$\alpha_5 = z_9\overline{\varphi}_9 + \overline{z}_9\varphi_9;$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\alpha_{11} = z_{15}\overline{\varphi}_{15} + \overline{z}_{15}\varphi_{15}.$$

На формирователь ε-числа, обозначенный знаком «⊕», подается весь код Хэмминга, все его 15 разрядов, но на выход через одноразрядные схемы неравенства, обозначенные знаком «≠», поступают разряды лишь основного кода. Контрольные знаки на выход не проходят. Если ε-число равно 0000, то в коде ошибки нет, и на всех выходах неполного дешифратора *DC* поддерживаются низкие уровни, вследствие чего

$\alpha_1 = z_3$; $\alpha_2 = z_5$; $\alpha_3 = z_6$; $\alpha_4 = z_7$; $\alpha_5 = z_9$; … $\alpha_{11} = z_{15}$,

т. е. цифры принятого 15-значного кода, входящие в основной код, на выход схемы проходят без изменений.

В случае ошибки, например в пятом разряде принятого 15-значного кода, имеем: ε = 0101, $\varphi_5 = 1$, вследствие чего $\alpha_2 = \overline{z}_5$. Это значит, что если в пятом разряде передаваемого кода был нуль, а принятой оказалась единица, то в результате инвертирования единицы получится снова нуль. Если же передавалась единица, а принятым оказался нуль, то после инвертирования получится единица. Таким образом, в обоих случаях происходит автоматическое исправление ошибки.

3.22. Рефлексные коды. Коды Грея

В современной технике широко применяются аналого-дискретные преобразователи. Примером могут служить датчики механических перемещений. Один из таких датчиков представляет собой соосно укрепленный на валу прозрачный диск с нанесенной на него кодовой маской. Коды считываются при помощи системы каких-либо фотоэлементов. Главное назначение датчика – определить положение вала, т. е. угол его поворота по отношению к некоторому исходному состоянию.

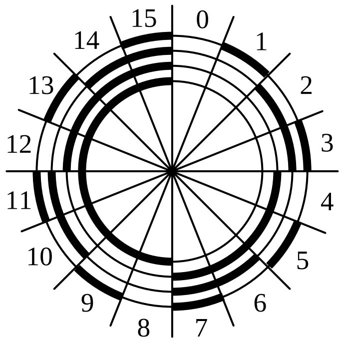


Рис. 44

Для примера на рис. 44 показан диск, разделенный на 16 равных частей – секторов (на практике их обычно тысячи). Все сектора пронумерованы и каждый номер представлен в двоичном коде в виде сочетаний темных и светлых участков, расположенных на четырех концентрических кольцах. Внутреннему кольцу поставлен в соответствие старший разряд номера, внешнему – младший. Нуль на диске обозначен светлой частью кольца, единица – зачернением. Считываются числа с диска параллельно, т. е. все четыре разряда одновременно, при помощи четырех фотоэлементов.

Главное достоинство датчика – его простота. Однако с практической точки зрения он почти непригоден. Дело в том, что параллельные коды хорошо считываются только в пределах каждого отдельного сектора, а при переходе от одного сектора к другому возникают помехи. Пусть число считывается в момент, когда под фотоэлементами проходит 15-й сектор, а за ним идет сектор с нулевым номером. Какое число получится на границе секторов? Это зависит от таких причин, как неточность изготовления маски и блока фотоэлементов, тепловая нестабильность, влияние различных вибраций и др. В общем случае на границе 15-го и нулевого секторов может быть считано любое число от 0 до 15. Помехи имеют место также при переходе от первого сектора ко второму, от третьего к четвертому, от пятого к шестому и др.

Погрешности считывания можно устранить, если воспользоваться невесовыми кодами, представляющими собой последовательности *n*-разрядных двоичных чисел, в которых каждые два соседних числа отличаются одно от другого только в одном разряде. У таких кодов много названий. В [52, с. 226] их называют кодами Грея, в [61] – рефлексными, в [48, с. 69] – рефлексными и отраженными; в [39, с. 278] – циклическими; в [26, с. 428] – циклическими, прогрессивными и кодами Грея.

В данном пособии используется термин «рефлексный код» и его частный случай, получивший наибольшее распространение, – «код Грея». С этого частного случая и начнем рассматривать рефлексные коды. Главная особенность кода Грея, обеспечившая ему широкое практическое применение, состоит в простоте его построения. Пусть a – двоичное n-разрядное число обычной (весовой) системы счисления, b – соответствующее число в коде Грея. Тогда правило, по которому можно найти код Грея по заданному числу a, представится формулой вида

$$b_i = a_i \oplus a_{i+1},$$

где $\oplus$ – знак сложения по модулю 2; i – порядковый номер разряда в числе a; i = 1, 2, 3, …, n; счет начинается с младшего разряда.

Чтобы по этому правилу найти код Грея, достаточно поразрядно сложить по модулю 2 число a с самим собой, но сдвинутым вправо на один разряд с потерей цифры младшего разряда и записью нуля в старшем разряде:

$$\begin{array}{l} a = a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_2\ a_1 \\ \underline{\quad 0\ \ a_n\ \ a_{n-1} \ldots a_3\ a_2} \\ b = b_n\ \ b_{n-1}\ \ b_{n-2} \qquad b_2\, b_1\,, \end{array} \qquad (20)$$

где $b_1 = a_1 \oplus a_2$; $b_2 = a_2 \oplus a_3$; … $b_{n-1} = a_{n-1} \oplus a_n$; $b_n = a_n$.

Например, при n = 4 последовательность кодов Грея имеет вид: 0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0111, 0101, 0100, 1100, 1101, 1111, 1110, 1010, 1011, 1001, 1000.

Код Грея является невесовым в отличие от обычной двоичной системы счисления. Это значит, что образующие его двоичные числа надо рассматривать только как упорядоченные наборы нулей и единиц без присвоения им весов. Например, двоичному весовому числу 10011 (в десятичной системе – это 19) соответствует код Грея 11010, и если его считать весовым, то получится число 26 (в десятичной системе). В связи с этим каждому невесовому коду обычно присваивается та или иная величина либо с применением правила, как в случае кода Грея, либо при помощи таблицы.

Если на рис. 44 вместо обычной двоичной (весовой) системы использовать код Грея, то на границах секторов всегда будет изменяться цифра только в одном какомлибо разряде. Благодаря этому в моменты перехода диска от одного кода к другому помехи появиться не могут.

Упражнения

1. Укажите двоичный код Грея, соответствующий шестизначному весовому числу:

(ПАФ) 32; (862) 12; (ОВЗ) 19;
(СГИ) 24; (035) 36; (ВУК) 40.

2. Назовите десятичные эквиваленты двоичных чисел (в порядке их возрастания), которые в принципе могут быть считаны с диска на границе секторов (рис. 44):

(ТЭЛ) 5 и 6; (МТМ) 9 и 10; (ИКЭ) 13 и 14.

3.23. Преобразователь кода Грея в весовой двоичный код

Числа, формируемые преобразователем угла поворота вала в код Грея, обычно подвергаются дальнейшей обработке при помощи компьютера либо специализированного устройства. Однако прежде чем обрабатывать эти числа, их необходимо представить в обычной весовой системе счисления, так как операции над невесовыми кодами Грея являются очень сложными.

Для построения преобразователя кода Грея в весовую двоичную систему счисления воспользуемся тем, что если $b_i = a_i \oplus a_{i+1}$, то

$$a_i = b_i \oplus a_{i+1}. \qquad (21)$$

Убедиться в справедливости этого далеко не очевидного утверждения можно путем сплошного перебора значений всех переменных. Полный их перечень приведен в табл. 8, из которой видно, что на каждом наборе значений переменных b_i, a_i и a_{i+1} в обоих выражениях имеет место либо равенство левой и правой частей, либо в обоих случаях левая часть не равна правой, что и доказывает справедливость утверждения (21).

Таблица 8

$b_i\ a_i\ a_{i+1}$	$b_i = a_i \oplus a_{i+1}$	$a_i = b_i \oplus a_{i+1}$
0 0 0	$0 = 0 \oplus 0$	$0 = 0 \oplus 0$
0 0 1	$0 \neq 0 \oplus 1$	$0 \neq 0 \oplus 1$
0 1 0	$0 \neq 1 \oplus 0$	$1 \neq 0 \oplus 0$
0 1 1	$0 = 1 \oplus 1$	$1 = 0 \oplus 1$
1 0 0	$1 \neq 0 \oplus 0$	$0 \neq 1 \oplus 0$
1 0 1	$1 = 0 \oplus 1$	$0 = 1 \oplus 1$
1 1 0	$1 = 1 \oplus 0$	$1 = 1 \oplus 0$
1 1 1	$1 \neq 1 \oplus 1$	$1 \neq 1 \oplus 1$

Пусть n = 5, т. е. на вход комбинационного преобразователя поступают пятизначные коды Грея вида $b_5\, b_4\, b_3\, b_2\, b_1$. Тогда на выход преобразователя будут проходить весовые двоичные числа $a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1$, где a_5 – старший разряд, a_1 – младший.

Выходные сигналы являются функциями входных. Их список, полученный из формулы (21), имеет вид:

$$\begin{aligned} &a_5 = b_5; \\ &a_4 = b_4 \oplus a_5 = b_4 \oplus b_5; \\ &a_3 = b_3 \oplus a_4 = b_3 \oplus b_4 \oplus b_5; \\ &a_2 = b_2 \oplus a_3 = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5; \\ &a_1 = b_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5. \end{aligned}$$

Комбинационная схема, реализующая эту систему функций, приведена на рис. 45 в виде ленточной однородной среды, i-я ячейка которой имеет один информационный вход b_i, один соединительный вход, связывающий

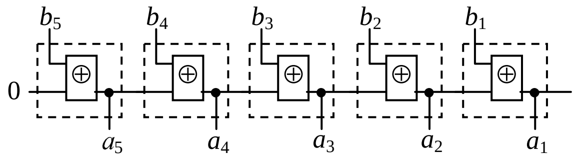


Рис. 45

ячейки между собой, один информационный выход a_i и один соединительный выход, совпадающий с информационным (i = 1, 2, 3, 4, 5). На соединительный вход ячейки старшего разряда необходимо подать низкий (нулевой) уровень напряжения. Если же подать высокий (единичный) уровень, то каждая цифра выходного кода проинвертируется и на выход преобразователя поступит обратный (т. е. проинвертированный, инверсный) код.

Упражнения

1. На вход преобразователя (рис. 45) поступило пятизначное число в коде Грея. Найдите выходное число в весовой двоичной системе, если:

(ЗРЗ) b = 00111; (БК5) b = 01101; (ЕВХ) b = 10001;
(291) b = 11011; (294) b = 10111; (ШИК) b = 11100.

2. На соединительный вход левой ячейки (рис. 45) подан единичный уровень напряжения. Найдите выходной код, если входное число b равно:

(МЕЛ) b = 10000; (ОЗФ) b = 01010; (459) b = 00000;
(ИРН) b = 11111; (БТХ) b = 01110; (128) b = 00010.

3.24. Преобразование произвольного рефлексного кода в двоичный весовой код

Кроме кодов Грея существует большое число других рефлексных кодов. Все их можно получить при помощи карты Вейча n переменных, если учесть, что двоичные номера минтермов, расположенных в соседних клетках карты, отличаются друг от друга только в одном разряде [26, с. 426 – 431] (напомним: клетки на карте являются соседними, если соответствующие им минтермы склеиваются). Выберем какую-либо клетку на карте и запишем ее номер. Перейдем в соседнюю клетку и новый номер запишем справа от прежнего и т. д. На рис. 46 показан вариант обхода карты. Если начать с нулевого номера, то получим рефлексный код, представленный в табл. 9. Слева в этой таблице указаны обычные двоичные (весовые) числа, а справа – соответствующие им невесовые числа рефлексного двоичного кода.

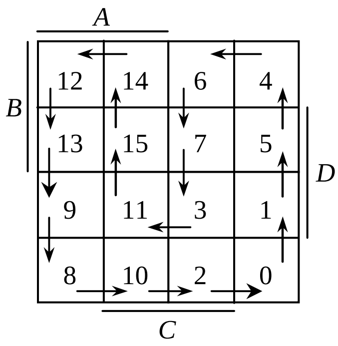


Рис. 46

Обычно в таблицах соответствия в левой части записывают входные коды преобразователя, а в правой указывают, во что должны быть преобразованы подаваемые на вход коды. Это значит, что по табл. 9 можно построить преобразователь весовых двоичных кодов в рефлексные. Но в данном случае нас интересует обратная задача – преобразование рефлексного кода в весовой двоичный. Чтобы построить преобразователь рефлексного кода в двоичный весовой, левую и правую части табл. 9 необходимо поменять местами. Получим табл. 10. Буквами A, B, C, D в ней обозначены двоичные разряды входных чисел преобразователя, символами f_1, f_2, f_3, f_4 – его выходы. Старшему разряду выходного числа соответствует выход f_1, младшему – f_4. Рассматривая таблицу 10 как таблицу соответствия для четырех функций, получаем систему функций:

$f_1 = AB + A\overline{C} + \overline{B}C\overline{D}$; $f_3 = B\overline{C} + \overline{B}C$;

$f_2 = \overline{A}C + A\overline{B}$; $f_4 = S_3 + S_1$,

где S_1 и S_3 – симметрические функции с a-числами, равными 1 и 3:

$$S_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D};$$

$$S_3 = ABC\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}CD + \overline{A}BCD.$$

Так как функция f_4 не поддается минимизации в смысле Квайна, то для ее реализации следует использовать однородную структуру «чет-нечет» (см. подраздел 3.16).

Таблица 9

8 4 2 1	Рефлексные коды
0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1
0 0 1 0	0 1 0 1
0 0 1 1	0 1 0 0
0 1 0 0	0 1 1 0
0 1 0 1	0 1 1 1
0 1 1 0	0 0 1 1
0 1 1 1	1 0 1 1
1 0 0 0	1 1 1 1
1 0 0 1	1 1 1 0
1 0 1 0	1 1 0 0
1 0 1 1	1 1 0 1
1 1 0 0	1 0 0 1
1 1 0 1	1 0 0 0
1 1 1 0	1 0 1 0
1 1 1 1	0 0 1 0

Таблица 10

	Рефлексные коды	8 4 2 1
	$A\ B\ C\ D$	$f_1\ f_2\ f_3\ f_4$
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1
5	0 1 0 1	0 0 1 0
4	0 1 0 0	0 0 1 1
6	0 1 1 0	0 1 0 0
7	0 1 1 1	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 1 1 0
11	1 0 1 1	0 1 1 1
15	1 1 1 1	1 0 0 0
14	1 1 1 0	1 0 0 1
12	1 1 0 0	1 0 1 0
13	1 1 0 1	1 0 1 1
9	1 0 0 1	1 1 0 0
8	1 0 0 0	1 1 0 1
10	1 0 1 0	1 1 1 0
2	0 0 1 0	1 1 1 1

В последовательность рефлексного кода может входить и меньшее количество чисел, чем 2^n. Например, для кодирования десятичных цифр можно использовать последовательность вида 0000, 0010, 1010, 1011, 1111, 1101, 1100, 1110, 0110, 0100. Если учесть, что на вход преобразователя будут подаваться только эти числа, то при разработке соответствующей комбинационной схемы неиспользуемые коды можно рассматривать как неопределенные состояния. С учетом этого список минимальных ДНФ булевых функций, описывающих комбинационную схему преобразователя, имеет вид

$f_1 = \overline{A}B$; $f_2 = AB$; $f_3 = A\overline{D} + A\overline{B}$;

$f_4 = \overline{C}D + \overline{B}D + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + ABC\overline{D}.$

Замкнутая последовательность чисел рефлексного кода, когда первое и последнее числа отличаются друг от друга также лишь в одном разряде, всегда содержит четное количество чисел. Если число кодов в последовательности нечетно, то эта последовательность разомкнута.

Упражнения

1. Постройте комбинационную схему, преобразующую рефлексный код 0000, 0100, 0110, 0111, 0101, 0001, 0011, 0010, 1010, 1110, 1111, 1011, 1001, 1101, 1100, 1000 в двоичные числа весовой системы счисления. Сколько вхождений неинверсных и сколько вхождений инверсных аргументов имеет минимальная ДНФ функции:

(ОУР) f_1, (ПУС) f_2, (АГГ) f_3, (ЯНД) f_4,

если функция f_1 соответствует старшему разряду выходного кода?

2. Пусть комбинационный преобразователь (см. предыдущее упражнение) построен на основе минимальных ДНФ булевых функций.

(ВР1). Сколько в схеме двухвходовых элементов И и сколько двухвходовых элементов ИЛИ?

(УР3). Сколько в схеме четырехвходовых элементов И и сколько четырехвходовых элементов ИЛИ?

3. Постройте комбинационную схему, преобразующую рефлексный код 0011, 0010, 1010, 1011, 1001, 1101, 1111, 0111, 0101, 0001 в двоичные весовые коды десятичных цифр. Отсутствующие в рефлексном коде двоичные комбинации считать неопределенными состояниями. Входному коду 0011 соответствует выходной код 0000. Сколько вхождений неинверсных и сколько инверсных аргументов имеет минимальная ДНФ функции: (ЯРФ) f_1, (922) f_2, (АРЗ) f_3, (734) f_4? Здесь функция f_1 соответствует старшему разряду выходного кода.

4. Пусть комбинационный преобразователь (см. предыдущее упражнение) построен на основе минимальных ДНФ булевых функций.

(ПОЧ)! Сколько в схеме трехвходовых элементов И? Сколько трехвходовых элементов ИЛИ?

(МОК)! Сколько в схеме четырехвходовых элементов И? Сколько четырехвходовых элементов ИЛИ?

5. (СИЛ). Укажите номера последовательностей, которые представляют собой разомкнутый рефлексный код:

1) 0001, 0101, 0111, 1111, 1101;
2) 0010, 0011, 0111, 0110, 1110, 1111, 1011, 1010;
3) 0111, 0101, 0001, 0000, 0010, 1010, 1000, 1001;
4) 0000, 0100, 0110, 1110, 0111, 0010, 0011;
5) 1001, 1100, 1010, 1011, 1001;
6) 1100, 1101;
7) 1110, 0110, 0111, 1111;
8) 1110, 1100, 1000, 0000, 0001, 0011, 0111;
9) 1001, 1101, 1011, 110.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1. Понятие функциональной полноты

При помощи трех логических элементов, реализующих булевы операции конъюнкции, дизъюнкции и инверсии, может быть построена любая комбинационная схема. Это значит, что достаточно освоить массовый выпуск логических элементов И, ИЛИ, НЕ, и специалисты по вычислительной технике получат в свое распоряжение набор элементов, обеспечивающий возможность построения любых вычислительных устройств дискретного действия. Такие наборы (базисы, согласно [16]) принято называть **функционально полными**.

Возникают вопросы: верно ли, что элементы И, ИЛИ, НЕ действительно образуют полный набор, и как это доказать? Нельзя ли обойтись двумя элементами, т. е. не образуют ли функционально полный набор, например, элементы И и ИЛИ? Может быть, следует выпускать не простейшие логические схемы И, ИЛИ, НЕ, а какие-либо другие, реализующие более сложные булевы функции, допустим, такие как $f_1 = AB + \overline{A}\,\overline{B}$; $f_2 = A\overline{B} + BC + \overline{D}$; $f_3 = ABC + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + E\overline{F}$ и др.? Можно ли обойтись одним логическим элементом и как убедиться в том, что он является универсальным, т. е. сам по себе образует функционально полный набор? На все подобные вопросы ответы дает теорема о функциональной полноте, сформулированная и доказанная выдающимся американским математиком Эмилем Л. Постом (иногда ее называют теоремой Поста-Яблонского [18, с. 29]). Этой теореме посвящен основной материал данного раздела. Но сначала изучим основные свойства пяти замечательных классов булевых функций: самодвойственных, линейных, монотонных, сохраняющих нуль и сохраняющих единицу. Затем сформулируем теорему о функциональной полноте и рассмотрим все функции двух переменных. Завершим раздел обзором базовых систем булевых функций, где каждая система обладает функциональной полнотой.

4.2. Самодвойственные функции

Функция называется **самодвойственной**, если имеет место равенство [16, с. 57; 18, с. 29]:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \overline{f}(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n). \qquad (1)$$

Согласно определению самодвойственная функция на противоположных наборах значений аргументов принимает противоположные значения. Два набора являются противоположными (взаимно инверсными), если их арифметическая сумма в десятичном представлении есть число $2^n - 1$, где n – число разрядов в каждом наборе. По заданному набору найти ему противоположный очень легко: достаточно в заданной двоичной последовательности нули заменить единицами, а единицы – нулями. Например, если 01100 – заданный набор, то противоположный ему – 10011.

В левой части табл. 1 перечислены все четырехзначные наборы значений аргументов *A*, *B*, *C*, *D*. В таблице наблюдается своеобразная симметрия: наборы, расположенные на одинаковых расстояниях от начала и конца таблицы, являются противоположными. Это значит, что в диапазоне наборов 0000 – 0111 включительно в колонке, где записываются значения функции, единицы и нули можно располагать произвольным образом. При этом всякий раз будет получаться самодвойственная функция, если на противоположных наборах всюду записывать противоположные значения функции. В табл. 1 приведены три примера самодвойственных функций:

$$f_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D};$$

$$f_2 = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}; \qquad (2)$$

$$f_3 = B\overline{C}\,\overline{D} + BCD + AC\overline{D} + A\overline{C}D. \qquad (3)$$

Таблица 1

	A B C D	f_1 f_2 f_3
0	0 0 0 0	1 1 0
1	0 0 0 1	1 1 0
2	0 0 1 0	0 1 0
3	0 0 1 1	0 1 0
4	0 1 0 0	1 1 1
5	0 1 0 1	0 1 0
6	0 1 1 0	1 1 0
7	0 1 1 1	1 0 1
8	1 0 0 0	0 1 0
9	1 0 0 1	0 0 1
10	1 0 1 0	1 0 1
11	1 0 1 1	0 0 0
12	1 1 0 0	1 0 1
13	1 1 0 1	1 0 1
14	1 1 1 0	0 0 1
15	1 1 1 1	0 0 1

Сколько существует самодвойственных функций? При $n = 4$ значения функции произвольно выбираются только на восьми наборах, следовательно, всего существует 256 самодвойственных функций четырех аргументов. При n аргументах значения функции произвольно выбираются на половине всех возможных наборов, следовательно, в общем случае число N самодвойственных функций равно:

$$N = 2^{2^{n-1}}.$$

Класс самодвойственных функций функционально замкнут. Доказательство этого утверждения можно найти в [35].

Что это значит: класс функционально замкнут? Пусть дано множество всех возможных самодвойственных функций. Выберем из них некоторую функцию и применим к ней операцию суперпозиции, т. е. вместо какого-либо аргумента подставим другую самодвойственную функцию. Получится новая функция. Может ли она быть несамодвойственной? Нет, применение операции суперпозиции в классе самодвойственных функций всегда дает только самодвойственные функции. С технической точки зрения это значит, что если логический элемент реализует самодвойственную функцию, то он не является универсальным, т. е. из таких элементов несамодвойственную функцию реализовать невозможно.

Рассмотрим пример. Подставим функцию (2) вместо аргумента A функции (3). Получится новая функция f_4:

$$f_4 = B\overline{C}\,\overline{D} + BCD + f_2C\overline{D} + f_2\overline{C}D =$$
$$= \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}C\overline{D} + BCD + B\overline{C}\,\overline{D}.$$

Эта функция является самодвойственной, в чем нетрудно убедиться, если ее представить в виде таблицы соответствия.

Упражнения

1. Сколько существует самодвойственных функций:
(МУ1) двух переменных? (2УЗ) трех переменных?
(УП2) пяти переменных? (В54) одной переменной?

2. Укажите десятичные эквиваленты наборов, которые являются противоположными наборам вида:
(НИЙ) 00110; (УМК) 110010; (Ш97) 1001.

3. Сколько существует наборов значений аргументов, на которых самодвойственная функция принимает единичное значение, если она зависит от:
(Х00) пяти аргументов? (ЗУБ) шести аргументов?
(ШАВ) трех аргументов? (2ПТ) n аргументов?

4. (УС2). Самодвойственная функция трех переменных принимает единичное значение на наборах 0, 1, 2, 4. Укажите десятичные эквиваленты наборов, на которых эта функция принимает нулевое значение.

5. Укажите номера самодвойственных функций:

(Н28)	(ЛУН)
1) $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;	1) $f = A\overline{C}\,\overline{D} + ABC + \overline{A}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}$;
2) $f = A\overline{B} + \overline{A}B$;	2) $f = A\overline{B}\,\overline{C} + ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\overline{C}D$;
3) $f = A$;	3) $f = A\overline{C}\,\overline{D} + ACD + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}D$;
4) $f = \overline{A}$;	4) $f = AB\overline{C} + AC\overline{D} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$;
5) $f = AB + A\overline{C} + B\overline{C}$;	5) $f = A\overline{C}D + ABC + \overline{A}CD + \overline{A}B\overline{C}$;
6) $f = A\overline{C} + BC$;	6) $f = A\overline{B}\,\overline{C} + ACD + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}D$;
7) $f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}$;	7) $f = A\overline{C}\,\overline{D} + ABC + \overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}$.

6. Известно, что самодвойственная функция на k наборах принимает нулевое значение. Сколько существует наборов, на которых она равна единице, если:

(ББД) k =64? (ТМЕ) k =256? (ОРЖ) k =1024?

4.3. Линейные функции

Функция называется **линейной**, если в алгебре Жегалкина она может быть представлена в виде полинома первой степени (т. е. без конъюнкций). Например, функции

$$f_1 = A \oplus B, \qquad f_2 = A \oplus B \oplus C \oplus 1, \qquad f_3 = B \oplus 1$$

являются линейными. Функция $f = AC \oplus B$ содержит конъюнкцию, поэтому не относится к классу линейных.

Если n – число аргументов, то все линейные функции можно получить из выражения

$$f = a_0 \oplus a_1A_1 \oplus a_2A_2 \oplus \ldots \oplus a_nA_n, \qquad (4)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – логические переменные $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – коэффициенты, равные нулю либо единице.

Каждому набору коэффициентов соответствует некоторая линейная функция. Так как всего имеется $n + 1$ коэффициентов, то число M линейных функций равно:

$$M = 2^{n+1}.$$

Например, если $n = 0$ (логические аргументы отсутствуют), то M = 2. Это значит, что функции константа нуль и константа единица являются линейными.

Пусть задана булева функция, выраженная через операции И, ИЛИ, НЕ. Для того чтобы установить, является ли она линейной, ее необходимо перевести в алгебру Жегалкина. Если после упрощения в полиноме Жегалкина не останется конъюнкций, то, как было сказано выше, заданная функция является линейной. Например:

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Переведем эту функцию в алгебру Жегалкина:

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{B} = AB \oplus (1 \oplus A)(1 \oplus B) =$$
$$= AB \oplus 1 \oplus A \oplus B \oplus AB = A \oplus B \oplus 1.$$

Таким образом, функция $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$ относится к классу линейных.

Класс линейных функций является функционально замкнутым, т. е. в результате суперпозиции линейных функций будут получаться только линейные функции. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, подставим вместо какого-либо аргумента, например A_1, выражения (4) линейную функцию вида

$$f_1 = b_0 \oplus b_1B_1 \oplus b_2B_2 \oplus \ldots \oplus b_kB_k.$$

Тогда получим:

$$f' = a_0 \oplus a_1(b_0 \oplus b_1B_1 \oplus \ldots \oplus b_kB_k) \oplus a_2A_2 \oplus \ldots \oplus a_nA_n.$$

Очевидно, что при $a_1 = 0$ имеем $f' = f$, где f – это выражение (4), представляющее собой линейную функцию. Если же $a_1 = 1$, то функция f', если в ней раскрыть скобки, будет содержать конъюнкции только констант, следовательно, и в этом случае функция f' окажется линейной.

Упражнения

1. Укажите номера линейных функций:

(УИФ)	(У32)
1) $f_1 = A + B$;	1) $f_1 = \overline{ABC}$;
2) $f_2 = A \oplus C$;	2) $f_2 = ABC + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C}$;
3) $f_3 = A \oplus 1$;	3) $f_3 = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;
4) $f_4 = \overline{A}$;	4) $f_4 = A + B + C + D$;
5) $f_5 = 1$;	5) $f_5 = AB \oplus A \oplus B \oplus AB$;
6) $f_6 = AB$;	6) $f_6 = \overline{A \oplus B}$;
7) $f_7 = A + B + C$;	7) $f_7 = A + B + 1$.

2. Сколько существует линейных функций, если число переменных:

(Т53) равно 5? (Ц84) равно 6? (Д75) равно 9?

3. (ААК). Укажите номера верных утверждений:

1) если f – линейная булева функция, то $\overline{f}$ – также является линейной функцией;

2) если f_1 и f_2 – линейные функции, то при $f_1 \neq f_2$ их дизъюнкция всегда является нелинейной функцией;

3) если f_1 и f_2 – линейные булевы функции, то их конъюнкция всегда является нелинейной функцией;

4) если f – нелинейная булева функция, то конъюнкция этой функции и ее инверсии есть линейная функция;

5) если f – нелинейная булева функция, то ее инверсия есть линейная функция;

6) если f – нелинейная булева функция, то $f \oplus f$ является линейной функцией;

7) если f – нелинейная булева функция, то дизъюнкция этой функции и ее инверсии есть линейная функция.

4. (317). Укажите номера верных утверждений:

1) всякая линейная функция самодвойственна;

2) всякая самодвойственная функция линейна;

3) если f_1 – линейная функция, а f_2 – нелинейная, то их дизъюнкция не всегда является нелинейной функцией;

4) если f_1 – линейная функция, а f_2 – нелинейная, то их сумма по модулю 2 всегда нелинейна;

5) инверсия всякой линейной функции является нелинейной функцией;

6) применяя операцию суперпозиции к нелинейной функции, всегда можно получить линейную функцию;

7) всякая симметрическая функция линейна.

4.4. Монотонные функции

Булева функция n аргументов является **монотонной**, если при любом возрастании наборов значения функции не убывают [7, с. 38]. Появилось новое понятие – **возрастающие наборы**. Пусть даны два набора a и b

$$a = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\, a_n; \qquad b = b_1 b_2 \ldots b_{n-1}\, b_n,$$

где a_i и b_i (i = 1, 2, 3, …, n) – двоичные значения отдельных разрядов наборов a и b. Если одновременно выполняются условия:

$$b_1 \geq a_1, \quad b_2 \geq a_2, \quad \ldots, \quad b_{n-1} \geq a_{n-1}, \quad b_n \geq a_n, \qquad (5)$$

то $b \geq a$. Говорят, что набор b не меньше набора a.

Наборы, на которых выполняются условия (5), называются **сравнимыми**. Все остальные наборы являются **несравнимыми**. Например, относительно наборов $a = 010010$ и $b = 100011$ нельзя сказать, что $b \geq a$ либо $a \geq b$, так как для первых разрядов имеем $b_1 > a_1$, а для вторых – $a_2 > b_2$.

В вышеприведенном определении монотонной функции говорится только о сравнимых наборах. В связи с этим необходимо отметить, что на несравнимых наборах значения монотонной функции могут и убывать, т. е. переходить с единичного значения на нулевое. Такой случай приведен в табл. 2. При переходе с набора 010 на сравнимый с ним набор 011 функция возрастает, а при переходе с набора 011 на несравнимый с ним набор 100 – убывает.

Таблица 2

	A	B	C	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

На несравнимых наборах функция может не только убывать, но и оставаться неизменной.

Всякая монотонная функция имеет единственную минимальную ДНФ, которая совпадает с сокращенной ДНФ, и единственную минимальную КНФ, совпадающую с сокращенной КНФ, причем обе формы не содержат инверсных аргументов. Например, в результате минимизации монотонной функции

$$f = (3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

получаем минимальные ДНФ и КНФ без инверсий:

$$f = AB + AC + BD + CD; \qquad f = (A + D)(B + C).$$

Верно и обратное утверждение: если в аналитической записи функции отсутствуют инверсные аргументы, то функция является монотонной. Это утверждение можно использовать в качестве критерия для распознавания монотонных функций. Если же распознавание осуществляется при помощи таблицы соответствия, то в общем случае следует проверить все пары наборов, число N которых равно:

$$N = C_{2^n}^2 = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{2n-1} - 2^{n-1},$$

где n – число двоичных знаков в наборе. Например, в случае трехразрядных наборов необходимо проверить 28 пар, в случае четырехразрядных – 120 и т. д. Очевидно, что метод сплошного перебора всех пар наборов достаточно эффективен лишь при использовании ЭВМ.

Монотонные функции образуют функционально замкнутый класс. Это значит, что никакая система монотонных функций не обладает функциональной полнотой. Доказательство этого утверждения можно найти в [35, с. 53].

Упражнения

1. Укажите пары, содержащие сравнимые наборы:

(БАШ)
1) 01100 и 11100;
2) 00000 и 11111;
3) 00001 и 00010;
4) 11100 и 11100;
5) 0011 и 1100;
6) 1001 и 1001;
7) 10001 и 01110;

(ЖУЖ)
1) 1100 и 11000;
2) 0000 и 11111;
3) 1111 и 1111;
4) 10101 и 01010;
5) 10001 и 11101;
6) 00000 и 10000;
7) 10000 и 00001.

2. (ЮАИ). Укажите номера наборов, которые больше набора 10001:

1) 11100; 4) 10000; 7) 10001;
2) 01101; 5) 10011; 8) 11110;
3) 11001; 6) 11111; 9) 11011.

3. Укажите номера монотонных функций:

(ШВЕ)
1) $f_1 = ABC$;
2) $f_2 = A + B + C$;
3) $f_3 = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$;
4) $f_4 = 0$;
5) $f_5 = A + \overline{A}$;
6) $f_6 = A(\overline{A} + \overline{B})$;
7) $f_7 = A + \overline{A}B$;

(А73)
1) $f_1 = A(\overline{A} + B)$;
2) $f_2 = AB + A\overline{B}$;
3) $f_3 = A\overline{B} + \overline{A}B$;
4) $f_4 = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;
5) $f_5 = (A + B)(A + \overline{B})$;
6) $f_6 = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C$;
7) $f_7 = AB\overline{C} + A\overline{B}C$.

4. Укажите номера монотонных функций:

(ТАМ)
1) $f_1 = AB + \overline{A}BC$;
2) $f_2 = (A + B)(\overline{A} + B + C)$;
3) $f_3 = A + \overline{B}C$;
4) $f_4 = AB\overline{C} + C$;
5) $f_5 = B + \overline{A}C$;
6) $f_6 = C + A\overline{B}\,\overline{C}$;
7) $f_7 = AB + AC + A\overline{B}\,\overline{C}$;

(КП7)
1) $f_1 = S_4(A, B, C, D)$;
2) $f_2 = S_{2,3}(A, B, C, D)$;
3) $f_3 = S_{2,3,4}(A, B, C, D)$;
4) $f_4 = A + B + \overline{A}\,\overline{B}$;
5) $f_5 = A + B + C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;
6) $f_6 = S_{1,2}(A, B, C, D)$;
7) $f_7 = S_{3,4}(A, B, C, D)$.

5. (ЕТК). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли линейная функция быть монотонной?

2) может ли самодвойственная функция быть монотонной?

3) существуют ли монотонные функции, инверсии которых представляют собой монотонные функции?

4) является ли монотонной конъюнкция двух монотонных функций?

5) всегда ли функция немонотонна, если в ее аналитической записи есть инверсные аргументы?

6) верно ли, что если в ДНФ функции нет инверсных аргументов и все простые импликанты различны, то она представлена в минимальной форме?

7) всегда ли монотонна функция $f_1 \oplus f_2$, если f_1 и f_2 – монотонные функции?

4.5. Функции, сохраняющие единицу

Булева функция **сохраняет единицу**, если на единичном наборе значений аргументов она принимает единичное значение. Набор называется **единичным**, если он состоит только из единиц, то есть в нем нет нулей. Примером функции, сохраняющей единицу, может служить выражение

$$f = AB\overline{C} + BCD + \overline{A}\,\overline{C}D.$$

Если в этом выражении принять $A=B=C=D=1$ (набор имеет вид 1111), то функция примет единичное значение. Функция

$$f = \overline{A}BC + BC\overline{D} + A\overline{C}\,\overline{D}$$

не сохраняет единицу, так как $f = 0$ при $A=B=C=D=1$.

Пусть некоторая булева функция представлена в СДНФ. Чтобы определить, сохраняет она единицу или не сохраняет, достаточно выяснить, входит ли в нее минтерм с максимальным индексом, т. е. с индексом, равным $2^n - 1$, где n – число аргументов функции. Например, функция трех аргументов сохраняет единицу, если в нее входит минтерм m_7. Функция четырех аргументов сохраняет единицу, если в нее входит минтерм m_{15}, и т. д.

Пусть функция представлена в ДНФ. Чтобы узнать, сохраняет ли она единицу, нет необходимости вычислять ее значение на единичном наборе. Достаточно выяснить, входит ли в нее хотя бы одна конъюнкция без инверсий. Если такая конъюнкция есть, то функция сохраняет единицу, поскольку во всякую конъюнкцию, не содержащую инверсий, входит минтерм с индексом $2^n - 1$. В этом легко убедиться, если конъюнкцию, в которой нет инверсий, разложить по всем не входящим в нее переменным. Пусть, например, некоторая функция $f(A, B, C, D)$ содержит конъюнкцию AC. В результате разложения ее по переменным B и D получаем:

$$AC = A(\overline{B} + B)C(\overline{D} + D) =$$
$$= A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + ABC\overline{D} + ABCD.$$

Из этого выражения видно, что в конъюнкцию AC входит минтерм $m_{15} = ABCD$, принимающий единичное значение на наборе 1111, следовательно, заданная функция $f(A, B, C, D)$ сохраняет единицу.

Пусть функция представлена в КНФ. Эта функция сохраняет единицу, если в каждую ее дизъюнкцию входит хотя бы один неинверсный аргумент. Примером может служить функция вида

$$\varphi = (A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + C)(A + \overline{B} + D).$$

Если в этом выражении раскрыть скобки, т. е. представить его в ДНФ, то среди всех конъюнкций окажутся выражения AC и ACD, в которые входит минтерм m_{15}. Следовательно, функция φ сохраняет единицу.

Сколько существует функций n аргументов, сохраняющих единицу? Определить это очень легко. В каждую из этих функций входит минтерм с индексом $2^n - 1$. Все остальные минтермы, число которых равно $2^n - 1$, могут входить в функцию в любых сочетаниях. Следовательно, число R функций, сохраняющих единицу, равно

$$R = 2^{2^n - 1}.$$

При $n = 0$ имеем $R=1$. Это функция константа единица. Если $n = 1$, то $R = 2$. Это функции $f = 1$ и $f = A$. Если $n = 2$, то $R = 8$, и т. д. Таким образом, половина всех функций n аргументов сохраняет единицу и половина – не сохраняет.

Функции, сохраняющие единицу, образуют функционально замкнутый класс, т. е. если в этом классе применять операцию суперпозиции, то всегда будут получаться только функции, сохраняющие единицу. Доказательство можно найти в [7].

Упражнения

1. (ОАФ). Укажите значения следующих функций на наборе 1111:

1) $f = \overline{A}B + \overline{C}D$; 4) $f = (A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})D$;

2) $f = BCD + \overline{A}BC$; 5) $f = A + B + C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$;

3) $f = A(B + C\overline{D})$; 6) $f = (\overline{A} + B)(B + \overline{C})(\overline{C} + \overline{D})$.

2. Укажите функции, сохраняющие единицу:

(Р52)

1) $f = AB + \overline{C}$;

2) $f = A(\overline{B} + C)$

3) $f = (B + C)(A + B)\overline{D}$;

4) $f = (B + \overline{C})A + \overline{A}C$;

(ЗИЦ)

1) $f = A \oplus B$;

2) $f = A + \overline{A}$;

3) $f = (B + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})\overline{D}$;

4) $f = ABC + \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

3. Сколько существует булевых функций, сохраняющих единицу, если они зависят от:

(Т86) трех переменных? (С57) четырех переменных?

4. Укажите функции, сохраняющие единицу:

(ТВИ)

1) $f = (A + B)(A + B)$;

2) $f = (A + B\overline{C})\overline{A}$;

3) $f = A$;

4) $f = BC + \overline{C}D$;

5) $f = (A + \overline{A})(B + \overline{B})$;

6) $f = \overline{A}(A + \overline{A})$;

7) $f = (A + B)(B + C)\overline{D}$;

(РВ5)

1) $f(A, B, C, D) = (0,1,4,7)$;

2) $f = S_{2,3,4}(A, B, C, D)$;

3) $f = \overline{S}_{0,1,2}(A, B, C, D)$;

4) $f = \overline{A + B}CD$;

5) $f = (B + C)\overline{\overline{B} + \overline{C}}$;

6) $f = A + \overline{\overline{B}(\overline{C} + D)}$;

7) $f = \overline{A} + \overline{\overline{B}(\overline{C} + D)}$.

5. (Ф78). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что функция $\bar{f}$ не сохраняет единицу, если функция f единицу сохраняет?

2) верно ли, что всякая линейная функция не сохраняет единицу?

3) верно ли, что существуют самодвойственные функции, не сохраняющие единицу?

4) верно ли, что всякая монотонная функция сохраняет единицу?

5) верно ли, что функция $f_1 + f_2$ сохраняет единицу, если функция f_1 сохраняет единицу, а f_2 – не сохраняет?

6) верно ли, что функция $f_1 \cdot f_2$ сохраняет единицу, если функция f_1 сохраняет единицу, а f_2 – не сохраняет?

7) верно ли, что функция $f_1 \oplus f_2$ сохраняет единицу, если единицу сохраняют обе функции?

6. (229). Сколько конъюнкций, не содержащих инверсий, имеет минимальная ДНФ симметрической функции $S_{2,3,4,5}(A, B, C, D, E)$?

7. (Л60). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что функция $f_1 \oplus f_2$ сохраняет единицу, если функция f_1 сохраняет единицу, а f_2 – не сохраняет?

2) верно ли, что функция $f_1 \cdot \bar{f}_2$ сохраняет единицу, если единицу не сохраняют обе функции?

3) верно ли, что функция $f_1 + \bar{f}_2$ сохраняет единицу, если единицу не сохраняют обе функции?

4) верно ли, что функция $f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$ сохраняет единицу, если единицу сохраняет каждая из функций f_1, f_2, f_3?

5) верно ли, что функция $f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$ сохраняет единицу, если единицу сохраняет каждая из функций f_1, f_2, f_3, f_4?

6) верно ли, что существует хотя бы одна монотонная функция, не сохраняющая единицу?

4.6. Функции, сохраняющие нуль

Булева функция **сохраняет нуль**, если на **нулевом наборе** она принимает нулевое значение. Нулевой набор состоит из n нулей, где n – число аргументов булевой функции. Например, функция

$$f = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{A}CD$$

сохраняет нуль, так как она равна нулю на наборе 0000, т. е. когда $A = B = C = D = 0$. Функция

$$f = AB + \overline{A}\,\overline{C} + A\overline{C}D$$

не сохраняет нуль, поскольку на нулевом наборе она принимает единичное значение.

Функция, представленная в СДНФ, сохраняет нуль, если в нее не входит минтерм m_0.

Булева функция, представленная в ДНФ, сохраняет нуль, если в ее записи нет ни одной конъюнкции, содержащей только инверсные переменные. Например, функция $f = \overline{A}B + BC\overline{D} + AC\overline{D}$ сохраняет нуль, так как неинверсные аргументы есть в каждой конъюнкции. При подстановке значений $A = B = C = D = 0$ все конъюнкции становятся равными нулю, вследствие чего и сама функция принимает нулевое значение.

Функция, представленная в КНФ, сохраняет нуль, если в ее записи содержится хотя бы одна дизъюнкция (скобочное выражение), все аргументы которой не содержат инверсий. Например, функция

$$f = (\overline{A} + B)(B + C + D)(A + B + \overline{D})$$

сохраняет нуль, так как дизъюнкция $B+C+D$ не содержит инверсных переменных, следовательно, на нулевом наборе она равна нулю, вследствие чего и вся функция принимает нулевое значение.

Функция, заданная в КНФ, сохраняет нуль и в том случае, если в ее записи имеется хотя бы один неинверсный аргумент, находящийся за скобками. Например:

$$f = (A + \overline{B})(\overline{A} + B + \overline{C})D.$$

Буква D в этом выражении находится за скобками. На нулевом наборе $D = 0$, следовательно, и $f = 0$, т. е. функция сохраняет нуль.

Сколько существует функций, сохраняющих нуль? Если в функцию входит минтерм m_0, то функция нуль не сохраняет, поскольку на нулевом наборе значений аргументов она принимает единичное значение. Следовательно, число Q функций, не сохраняющих нуль, равно:

$$Q = 2^{2^n - 1}.$$

Все остальные функции нуль сохраняют. Число V сохраняющих нуль функций равно:

$$V = 2^{2^n} - 2^{2^n - 1} = 2^{2^n - 1} \cdot 2 - 2^{2^n - 1} = 2^{2^n - 1}.$$

Таким образом, число функций, сохраняющих нуль, равно числу функций, нуль не сохраняющих.

Функции, сохраняющие нуль, образуют функционально замкнутый класс, т. е. в результате применения операции суперпозиции к функциям, сохраняющим нуль, всегда будут получаться только сохраняющие нуль функции. Доказательство этого можно найти в [7].

Упражнения

1. Укажите функции, принимающие нулевое значение на нулевых наборах значений аргументов:

(2Д2)	(МЯЛ)
1) $f = A\overline{B} + BC + AC$;	1) $f = (A + \overline{B})(\overline{B} + \overline{C})(C + D)$;
2) $f = A + \overline{B}$;	2) $f = A(\overline{B} + \overline{C})(D + E)$;
3) $f = ABC + \overline{B}\overline{C} + \overline{D}$;	3) $f = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{D} + \overline{E})F$;
4) $f = \overline{A}B + A\overline{B}$;	4) $f = \overline{A}\overline{B}\overline{C}(D + \overline{E} + F)$;
5) $f = AB + BC + \overline{C}\,\overline{D}$;	5) $f = (\overline{A} + \overline{B})D(\overline{E} + \overline{F})$.

2. (ШУМ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что инверсия функции, сохраняющей нуль, нуль не сохраняет?

2) верно ли, что всякая сохраняющая нуль функция сохраняет единицу?

3) всякая ли монотонная функция сохраняет нуль?

4) существуют ли функции, одновременно сохраняющие нуль и сохраняющие единицу?

5) сохраняет ли нуль функция $f_1 + f_2$, если f_1 и f_2 – функции, сохраняющие нуль?

6) сохраняет ли нуль функция $f_1 \cdot f_2$, если функция f_1 нуль сохраняет, а функция f_2 – не сохраняет?

3. Укажите функции, сохраняющие нуль:

(ЛУШ)	(АВЕ)
1) $f = A$;	1) $f = (A + \overline{A}B)\overline{C}$;
2) $f = B\overline{C}D\overline{E} + \overline{B}\,\overline{D}$;	2) $f = (P + Q)(\overline{P} + \overline{Q})$;
3) $f = \overline{A}$;	3) $f = (\overline{P} + Q)RS\overline{T}$;
4) $f = 0$;	4) $f = 1$;
5) $f = (A + B)(A + \overline{B})$;	5) $f = \overline{D}\,\overline{E}(F + K)(\overline{F} + \overline{K})$;
6) $f = (\overline{A} + B)(A + \overline{B})$;	6) $f = A + \overline{B}(C + D)$;
7) $f = (A + \overline{B})C$;	7) $f = AB + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + AB$.

4. (Ц84). Сколько существует функций, сохраняющих нуль, если число аргументов равно трем?

5. (УКЗ). Сколько существует функций четырех аргументов, сохраняющих нуль и одновременно сохраняющих единицу?

6. (ДС2). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что получится функция, не сохраняющая нуль, если вместо аргумента B функции $f = A\overline{B} + C$ подставить функцию, не сохраняющую нуль?

2) верно ли, что инверсия функции $f = A \oplus B$ сохраняет нуль?

3) верно ли, что сохраняет нуль инверсия функции $f = S_{0,1,2}(A, B, C, D)$?

4) верно ли, что число функций, сохраняющих нуль, больше числа функций, сохраняющих единицу?

5) верно ли, что если из функции удалить минтерм m_0, то получится функция, сохраняющая нуль?

6) сохраняет ли нуль функция $\overline{f}$, если f – это функция, не сохраняющая ни нуль, ни единицу?

7) сохраняет ли нуль функция $\overline{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3}$, если каждая из функций f_1, f_2, f_3 содержит минтерм m_0?

4.7. Теорема Поста о функциональной полноте

В предыдущих подразделах рассмотрено пять замечательных классов булевых функций, главная особенность которых состоит в том, что в результате применения операции суперпозиции к функциям того или иного класса получаются функции только того же класса. Кроме этих пяти классов существуют и другие функционально замкнутые классы, однако для проверки полноты системы функций вполне достаточно вышерассмотренных классов самодвойственных, линейных, монотонных, сохраняющих единицу и сохраняющих нуль функций. Критерий полноты дает теорема Поста. Формулируется она следующим образом [7; 16; 35; 43; 56].

Система булевых функций называется функционально полной, если она содержит хотя бы одну нелинейную функцию, хотя бы одну немонотонную, хотя бы одну несамодвойственную, хотя бы одну, не сохраняющую единицу, и хотя бы одну, не сохраняющую нуль.

Доказательство теоремы приведено в [56, с. 152].

На первый взгляд может показаться, что функционально полная система должна содержать не менее пяти функций. На самом деле это не так. Существуют функции, обладающие одновременно несколькими свойствами из перечисленных в теореме Поста. Например, функция $f = AB+CD$ одновременно является нелинейной и несамодвойственной. Функция $f = AB + AC + BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

несамодвойственна, нелинейна, немонотонна, не сохраняет нуль. А функция $f=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ одна образует функционально полную систему, так как она одновременно является несамодвойственной, нелинейной, немонотонной, не сохраняющей нуль и не сохраняющей единицу.

Упражнения

1. (ОАС). Укажите функционально полные системы:

1) $f_1=ABC$; $f_2=A+B+CD$; $f_3=1$;

2) $f_1=A\overline{B}+\overline{A}B$; $f_2=AB+\overline{A}\overline{B}$; $f_3=A\overline{B}$;

3) $f_1=\overline{A}B$; $f_2=\overline{A}+B$; $f_3=A+B$;

4) $f_1=ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; $f_2=AB+CD$; $f_3=0$;

5) $f_1=A+\overline{B}CD$; $f_2=A+BCDE$; $f_3=A\oplus B\oplus C$;

6) $f_1=A\oplus B$; $f_2=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

2. Укажите номера функций, каждая из которых образует функционально полную систему:

(ЯМТ)	(ЕРТ)
1) $f=A+\overline{B}+\overline{C}$;	1) $f=\overline{A+B}$;
2) $f=AB+\overline{CD}$;	2) $f=A+\overline{B+C+D}$;
3) $f=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;	3) $f=A+\overline{B}+\overline{C}$;
4) $f=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$;	4) $f=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$;
5) $f=ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;	5) $f=A+\overline{B}\overline{C}\overline{D}$;
6) $f=A\overline{B}+A\overline{C}+B\overline{C}$;	6) $f=\overline{A}+\overline{BCD}$.

3. Используя обозначения:

0 – функция, не сохраняющая нуль;
1 – функция, не сохраняющая единицу;
Л – нелинейная функция;
М – немонотонная функция;
С – несамодвойственная функция,

укажите, какими из этих свойств обладают функции (при вводе ответов соблюдайте порядок: 0, 1, Л, М, С):

(КОК) $f=ABC+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(Я52) $f=\overline{A+B+C}+A+B+C$;

(ШЕФ) $f=ABC+DE$;

(НАЗ) $f=(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$;

(ЭК7) $f=A\overline{B}\overline{C}+\overline{B}C\overline{D}$;

(АМЭ) $f=\overline{AB\overline{\overline{CD}}}+C$.

4.8. Функции двух аргументов

Два аргумента A и B образуют четыре минтерма:

$$m_0=\overline{A}\overline{B};\quad m_1=\overline{A}B;\quad m_2=A\overline{B};\quad m_3=AB.$$

Всякое их подмножество определяет некоторую **элементарную булеву функцию**. Следовательно, всего существует 16 различных булевых функций двух аргументов. Все они представлены в табл. 3. Эта таблица отличается одной особенностью: функции, расположенные на одинаковых расстояниях от начала и конца, являются взаимно инверсными. Например: $f_0=\overline{f}_{15}$; $f_1=\overline{f}_{14}$; $f_2=\overline{f}_{13}$ и так далее до $f_7=\overline{f}_8$. В связи с этим рассматривать функции будем соответствующими парами.

Первой в табл. 3 указана функция **константа нуль**. Она принимает нулевое значение независимо от значений аргументов. СДНФ функции константа нуль не содержит ни одного минтерма. Если ее представить в СКНФ, то получим выражение, в которое входят все макстермы двух аргументов: $f=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(A+B)=0$.

Инверсией функции константа нуль является функция **константа единица** $f_{15}=1$. Эта функция принимает единичное значение независимо от значений аргументов. Ее СДНФ представляет собой дизъюнкцию всех возможных минтермов двух аргументов:

$$f_{15}=\overline{A}\overline{B}+\overline{A}B+A\overline{B}+AB=1.$$

СКНФ функции константа единица отсутствует, так как в нее не входит ни одного макстерма.

Таблица 3

m_0	m_1	m_2	m_3	Название функции
0	0	0	0	Константа нуль $f_0=0$
0	0	0	1	Конъюнкция $f_1=A\,B$
0	0	1	0	Отрицание импликации от A к B $f_2=A\,\overline{B}$
0	0	1	1	Переменная A $f_3=A$.
0	1	0	0	Отрицание импликации от B к A $f_4=\overline{A}\,B$.
0	1	0	1	Переменная B $f_5=B$
0	1	1	0	Неравнозначно $f_6=\overline{A}\,B+A\,\overline{B}$
0	1	1	1	Дизъюнкция $f_7=A+B$.
1	0	0	0	Операция Пирса $f_8=\overline{A}\,\overline{B}$
1	0	0	1	Равнозначно $f_9=\overline{A}\,\overline{B}+A\,B$
1	0	1	0	Инверсия B $f_{10}=\overline{B}$
1	0	1	1	Импликация от B к A $f_{11}=A+\overline{B}$
1	1	0	0	Инверсия A $f_{12}=\overline{A}$
1	1	0	1	Импликация от A к B $f_{13}=\overline{A}+B$
1	1	1	0	Операция Шеффера $f_{14}=\overline{A}+\overline{B}$
1	1	1	1	Константа единица $f_{15}=1$

Во второй строке табл. 3 записана функция $f_1=AB$. Это конъюнкция. Ее инверсия $f_{14}=\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ известна в литературе под названием **операции Шеффера** (штрих Шеффера, функция Шеффера) [7; 15; 16]. Функция Шеффера является универсальной, так как она удовлетворяет всем требованиям теоремы Поста и, следовательно, образует функционально полную систему.

Следующая пара функций f_2 и f_{13}. Функция

$$f_{13}=\overline{A}\overline{B}+\overline{A}B+AB=\overline{A}+B$$

называется **импликацией от *A* к *B*** и обычно обозначается $A\to B$. Читается эта запись так: «Если A, то B». В качестве примера приведем высказывание, в котором содержится следующее утверждение: «Если Саша сдаст экзамен, то пойдет в театр». Введем обозначения: A – Саша сдал экзамен; B – Саша пошел в театр. Здесь возможны четыре случая в зависимости от истинностных значений переменных A и B:

$A=B=0$ – Саша не сдал экзамен и не пошел в театр;
$A=B=1$ – Саша сдал экзамен и пошел в театр;
$A=0$, $B=1$ – Саша не сдал экзамен, но пошел в театр;
$A=1$, $B=0$ – Саша экзамен сдал, но в театр не пошел.

Если $A=B=1$, то ясно, что высказывание $A\to B$ является истинным, т. е. принимает единичное значение. Если $A=1$, $B=0$, т. е. Саша экзамен сдал, но в театр почему-то не пошел, то импликация $A\to B$ является ложной, так как противоречит утверждению, приведенному в высказывании. В принципе, можно предположить, что Саша, сдав экзамен, решит все же не пойти в театр, но согласно высказыванию этот вариант полностью исключен. Иное дело, если $A=0$. Что будет, если Саша не сдаст экзамен? Об этом в высказывании ничего не говорится. Но мы можем рассуждать. Если $A=0$, то возможны следующие две ситуации:

а) Саша не сдал экзамен (т. е. $A = 0$), но в театр пошел ($B = 1$). Можно считать ложным это высказывание? Нет. Саша в исходном утверждении не обещал не ходить в театр (и не говорил, что пойдет) при неудачной сдаче экзамена. Но если высказывание не является ложным, то оно истинно;

б) Саша не сдал экзамен ($A = 0$) и не пошел в театр ($B = 0$). Ложно ли это высказывание? Тоже нет. И по той же причине: Саша не обещал не ходить в театр (и не говорил, что пойдет), если не сдаст экзамен. Следовательно, и в этом случае импликацию $A \to B$ необходимо признать истинной.

Таким образом, высказывание $A \to B$ является ложным только в том случае, когда оно противоречит утверждению, содержащемуся в импликации. Если принять $A \to B = 1$ при $A = 0$, то противоречия не получим, следовательно, $A \to B = 1$ при $A = B = 0$ и при $A = 0$, $B = 1$.

Таблица 4

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Сведем все рассмотренные случаи в табл. 4, из которой видно, что

$$A \to B = \overline{A} + B.$$

Функция f_2 табл. 3 является инверсией импликации от A к B.

Ни импликация $A \to B$, ни ее инверсия в отдельности не образуют функционально полную систему, но вместе обладают функциональной полнотой.

Импликацию $B \to A$ и ее инверсию образуют функции f_{11} и f_4.

Функции f_9 (равнозначно) и f_6 (неравнозначно, т. е. сумма по модулю два) в алгебре Жегалкина имеют вид:

$$f_9 = A \oplus B \oplus 1; \qquad f_9 = A \oplus B,$$

откуда следует, что обе они являются линейными. Кроме того, функция f_6 сохраняет нуль, а функция f_9 сохраняет единицу.

Функция f_7 – дизъюнкция. Ее инверсию

$$f_8 = \overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$$

называют **операцией Пирса** [15, с. 28]. Функцию f_8 называют также операцией Вебба [16, с. 59; 1, с. 27]. Операция Пирса, как и операция Шеффера, образует функционально полную систему.

Таким образом, среди всех 16 элементарных функций двух аргументов две функции обладают функциональной полнотой: операция Шеффера и операция Пирса. Логические элементы, реализующие эти операции, получили широчайшее распространение на практике.

Упражнения

1. Укажите номера функций «равнозначно»:

(ВВЛ)	(Г46)
1) $f = A \oplus B$;	1) $f = \overline{A \oplus B \oplus 1}$;
2) $f = A \oplus B \oplus 1$;	2) $f = (\overline{A} + B)(A + \overline{B})$;
3) $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;	3) $f = \overline{A \oplus B}$;
4) $f = A\overline{B} + \overline{A}B$;	4) $f = (\overline{A} + \overline{B})(A + B)$;
5) $f = AB \oplus \overline{A}\,\overline{B}$;	5) $f = \overline{AB + \overline{A}\,\overline{B}}$;
6) $f = A\overline{B} \oplus \overline{A}B$;	6) $f = \overline{A\overline{B} \oplus \overline{A}B}$.

2. (М23). Укажите номера функций «неравнозначно»:

1) $f = AB \oplus A\overline{B} \oplus A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}$;	4) $f = S_0(A,B) + S_2(A,B)$;
2) $f = A\overline{B} \oplus AB \oplus \overline{A}B \oplus AB$;	5) $f = \overline{A \to B} \oplus \overline{A}B$;
3) $f = S_1(A,B)$;	6) $f = \overline{A \to B} + \overline{A}B$.

3. (БМХ). Укажите номера функций «неравнозначно»:

1) $f = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})$;	4) $f = (\overline{A} \to B)(B \to \overline{A})$;
2) $f = (A \to B)(B \to A)$;	5) $f = \overline{A \to B} \oplus \overline{A}B$;
3) $f = (\overline{A} \to B)(\overline{B} \to A)$;	6) $f = \overline{A \to B} + \overline{A}B$.

4. Укажите номера функций «импликация от A к B»:

(РАШ)	(ХВИ)
1) $f = \overline{A} + B$;	1) $f = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$;
2) $f = A \oplus B \oplus 1 \oplus \overline{A}B$;	2) $f = AB + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}$;
3) $f = A \oplus B \oplus \overline{A}B$;	3) $f = \overline{A \oplus B} + \overline{A}B$;
4) $f = \overline{A\overline{B}}$;	4) $f = B \oplus \overline{A}\,\overline{B}$;
5) $f = S_1(A,B) + AB$;	5) $f = B + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}$;
6) $f = \overline{A} + AB$;	6) $f = S_2(A,B) + S_1(A,B)$.

5. Укажите номера функций «импликация от B к A»:

(ЕРЫ)	(ПАН)
1) $f = AB \oplus \overline{B}$;	1) $f = S_1(A,B) + A\overline{B}$;
2) $f = A \oplus B \oplus AB$;	2) $f = S_{0,2}(A,B) + A\overline{B}$;
3) $f = A + \overline{B}$;	3) $f = \overline{B} + S_2(A,B)$;
4) $f = A \oplus \overline{B} \oplus AB$;	4) $f = \overline{B} + S_1(A,B)$;
5) $f = \overline{A} + B$;	5) $f = A + S_2(A,B)$;
6) $f = A + \overline{A}\,\overline{B}$;	6) $f = \overline{A \to B} + \overline{A + B}$.

6. Укажите номера функций «отрицание импликации от A к B»:

(Р86)	(Х96)
1) $f = (A + B)(\overline{A} + \overline{B})(A + \overline{B})$;	1) $f = A \to B$;
2) $f = \overline{\overline{A} + AB}$;	2) $f = (A + \overline{B})A\overline{B}$;
3) $f = \overline{\overline{B} + AB}$;	3) $f = 0$;
4) $f = AS_1(A,B)$;	4) $f = \overline{A \to B}$;
5) $f = BS_1(A,B)$;	5) $f = (B \to A)\,\overline{A \oplus B}$;
6) $f = AS_2(A,B)$;	6) $f = (B \to A)(A \oplus B)$.

7. Укажите номера функций «операция Шеффера»:

(РИШ)	(Р29)
1) $f = \overline{AB}$;	1) $f = \overline{B} + \overline{A}B$;
2) $f = \overline{A + B}$;	2) $f = (A \oplus B) + \overline{A}\,\overline{B}$;
3) $f = \overline{A} + A\overline{B}$;	3) $f = (A \oplus B) + AB$;
4) $f = \overline{A} + \overline{B}$;	4) $f = AB + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B$;
5) $f = \overline{A}\,\overline{B}$;	5) $f = S_1(A,B) + \overline{A}$;
6) $f = \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}$;	6) $f = S_1(A,B) + \overline{B}$.

8. Укажите номера функций, «операция Пирса»:

(НАЧ)	(ЗУЗ)
1) $f = \overline{A} + \overline{B}$;	1) $f = A + \overline{A}B$;
2) $f = \overline{A}\,\overline{B}$;	2) $f = (\overline{A} + \overline{B})(A + B)(A + \overline{B})$;
3) $f = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$;	3) $f = \overline{A}(A + \overline{B})$;
4) $f = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$;	4) $f = (\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B})(A + B)$;
5) $f = \overline{A + B}$;	5) $f = \overline{B}(\overline{A} + B)$;
6) $f = S_1(A,B) + AB$;	6) $f = (\overline{A} + \overline{B})(A + \overline{B})(\overline{A} + B)$.

9. (УРФ)! Сколько существует линейных и сколько монотонных функций двух аргументов?

10. (2Р2)! Сколько существует функций, сохраняющих нуль, и сколько самодвойственных, зависящих не более чем от двух аргументов?

11. (МТК)! Сколько существует функций, сохраняющих единицу и зависящих не более чем от двух аргументов? Сколько существует симметрических функций двух аргументов?

12. (ХНК). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что импликация от A к B сохраняет нуль?

2) верно ли, что операция «неравнозначно» в алгебре Жегалкина не содержит конъюнкций?

3) верно ли, что функция Шеффера монотонна?

4) самодвойственна ли функция «инверсия»?

5) верно ли, что операция (функция) «равнозначно» сохраняет нуль?

6) верно ли, что операция Пирса образует функционально полную систему?

13. (Б77). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) сохраняет ли нуль функция Шеффера?

2) верно ли, что функция Шеффера нелинейна?

3) сохраняет ли нуль отрицание импликации $A \to B$?

4) сохраняет ли нуль отрицание импликации $B \to A$?

5) сохраняет ли нуль функция константа единица?

6) монотонна ли функция константа нуль?

7) линейна ли функция константа единица?

14. Представьте в минимальной ДНФ выражения (запишите их через операции И, ИЛИ, НЕ):

(ТАФ) $f = A \to (A \to B)$; (ИУХ) $f = A \to (B \to C)$;

(113) $f = (A \to B) \to C$; (А15) $f = (A \to B) \to A$;

(ШАХ) $f = (A \oplus B) \to B$; (ТТЛ) $A \to (A \oplus B)$.

4.9. Минимальные полные системы элементарных функций

Функционально полная система называется **минимальной**, если она становится неполной после удаления из нее любой функции [18, с.31].

Сколько всего существует минимальных функционально полных систем (минимальных базисов) элементарных функций? Чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся методом Петрика точно так же, как и при нахождении всех тупиковых ДНФ [16, с. 58]. Основными объектами, над которыми осуществляются преобразования по методу Петрика, являются простые импликанты. В данном же случае – это элементарные функции. Всего в табл. 3 приведено 16 элементарных функций двух аргументов. Но учитывать их все в преобразованиях Петрика нет необходимости, т. е. список функций можно сократить.

Прежде всего заметим, что операции Пирса и Шеффера сразу можно включить в искомый список минимальных функционально полных систем. Функции $f_3 = A$ и $f_5 = B$ являются тривиальными, они не попадут ни в какую минимальную функционально полную систему, так как не удовлетворяют ни одному из требований теоремы Поста. Следовательно, в дальнейшем их можно не учитывать.

Рассмотрим функции $f_{11} = A + \overline{B}$ и $f_{13} = \overline{A} + B$. Обе они нелинейны, несамодвойственны, немонотонны, обе сохраняют единицу и обе не сохраняют нуль. Относительно функциональной полноты они являются неразличимыми, поэтому одну из них, например функцию f_{11}, удалим. Точно так же неразличимы и функции f_2 и f_4, из которых удалим функцию f_4. Наконец, неразличимыми являются функции $f_{10} = \overline{B}$ и $f_{12} = \overline{A}$. Одну из них, например функцию f_{10}, удалим.

Три рассмотренные пары функций обладают еще одним свойством: функции каждой пары переходят одна в другую путем простого переименования аргументов. Например, если в функции f_{11} аргументы A и B поменять местами, то получим функцию f_{13}. То же самое относится и к парам f_2, f_4 и f_{10}, f_{12}.

Функции $f_1 = A \cdot B$ и $f_7 = A + B$ сохраняют нуль, сохраняют единицу, монотонны, несамодвойственны и нелинейны, однако никакой заменой одних аргументов другими из конъюнкции невозможно получить дизъюнкцию и из дизъюнкции невозможно получить конъюнкцию, поэтому ни одну из этих функций не удаляем.

Таким образом, осталось девять функций. Сведем их в таблицу, подобную импликантной матрице (табл. 5).

Таблица 5

Лог. пер.	Функция	Не сохраняет нуль	Не сохраняет единицу	Нелинейная	Несамодвойственная	Немонотонная
a	$f_0 = 0$		1		1	
b	$f_1 = AB$			1	1	
c	$f_2 = A\overline{B}$		1	1	1	1
d	$f_6 = A \oplus B$		1		1	1
e	$f_7 = A+B$			1	1	
f	$f_9 = \overline{A}\,\overline{B} + AB$	1			1	1
k	$f_{12} = \overline{A}$	1	1			1
m	$f_{13} = \overline{A} + B$	1		1	1	1
n	$f_{15} = 1$	1			1	

В левой части таблицы приведена колонка «Лог. пер», содержащая вспомогательные логические переменные a, b, c, …, n. Переменная a принимает единичное значение в том случае, если функция f_0 входит в функционально полную систему, и принимает нулевое значение, если не входит. Точно так же интерпретируются все остальные вспомогательные логические переменные.

В правой части таблицы единицами отмечены функции, удовлетворяющие требованиям теоремы Поста. Например, в колонке «не сохраняет нуль» единицами обозначены функции f_9, f_{12}, f_{13}, f_{15}. Это значит, что все они нуль не сохраняют.

Составляем логическое уравнение согласно методу Петрика. В искомую функционально полную систему войдет функция, не сохраняющая нуль, если в нее включить хотя бы одну из функций f_9, f_{12}, f_{13}, f_{15}. Это условие можно записать в виде дизъюнкции вспомогательных аргументов:

$$\varphi_1 = f + k + m + n.$$

Аналогично получаем логические выражения для всех остальных четырех колонок табл. 5:

$$\varphi_2 = a + c + d + k;$$
$$\varphi_3 = b + c + e + m;$$
$$\varphi_4 = a + b + c + d + e + f + m + n;$$
$$\varphi_5 = c + d + f + k + m.$$

При выполнении условия

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\,\varphi_5 = 1 \qquad (6)$$

система функций будет функционально полной, так как в нее войдет функция, не сохраняющая нуль (при $\varphi_1=1$), войдет функция, не сохраняющая единицу (при $\varphi_2 = 1$), войдут нелинейная (при $\varphi_3 = 1$), несамодвойственная (при $\varphi_4 = 1$) и немонотонная (при $\varphi_5 = 1$) функции.

Запишем выражение (6) в развернутом виде:

$(f + k + m + n)(a + c + d + k)(b + c + e + m)\&$

$\&(a + b + c + d + e + f + m + n)(c + d + f + k + m) = 1.$

Раскроем скобки и выполним все операции поглощения. Сначала перемножим φ_1 и φ_5, а также φ_3 и φ_4:

$$\varphi_1\varphi_5 = (f + k + m + n)(c + d + f + k + m) = f + k + m + cn + dn; \qquad (7)$$

$$\varphi_3\varphi_4 = (a + b + c + d + e + f + m + n)(b + c + e + m) = b + c + e + m.$$

Затем находим конъюнкцию $\varphi_2\varphi_3\varphi_4$:

$$\varphi_2\varphi_3\varphi_4 = (a + c + d + k)(b + c + e + m) = c + ab + bd + bk + ae + de + ek + am + dm + km.$$

Последний результат умножаем на выражение (7):

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5 = (f + k + m + cn + dn)\&(c + ab + bd + bk + ae + de + ek + am + dm + km) = cf + ck + bk + ek + cm + cn + am + dm + km + abf + bdf + aef + def + bdn + den = 1.$$

Каждая из 15 конъюнкций полученного уравнения определяет минимальный базис, т. е. одну минимальную функционально полную систему. Например, при $cf = 1$ минимальную систему образуют функции:

$$f_2 = A\overline{B}; \qquad f_9 = AB + \overline{A}\,\overline{B}.$$

Таблица 6

Функция	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f_0 = 0$									1			1		1			
$f_1 = AB$					1							1	1			1	
$f_2 = A\overline{B}$			1	1			1	1									
$f_6 = A \oplus B$										1			1		1	1	1
$f_7 = A + B$						1								1	1		1
$f_8 = \overline{A}\,\overline{B}$	1																
$= f_9 = AB + \overline{A}\,\overline{B}$			1									1	1	1	1		
$f_{12} = \overline{A}$				1	1	1					1						
$f_{13} = \overline{A} + B$							1		1	1	1						
$f_{14} = \overline{A} + \overline{B}$		1															
$f_{15} = 1$								1								1	1

Добавим к этим 15 системам операции Пирса и Шеффера, каждая из которых обладает функциональной полнотой. Тогда окажется, что всего существует 17 минимальных функционально полных систем. Их полный перечень приведен в табл. 6. В верхней строке таблицы записаны порядковые номера систем функций. Единицы, расположенные в i-й колонке (i = 1, 2, …, 17), показывают, какие функции входят в i-ю функционально полную систему. Например, при i = 12 минимальный базис имеет вид

$$f_0 = 0; \qquad f_1 = AB; \qquad f_9 = \overline{A}\,\overline{B} + AB.$$

Заметим, что в таблице нет системы И, ИЛИ, НЕ, в которую входят три функции: конъюнкция, дизъюнкция и инверсия. Это говорит о том, что система И, ИЛИ, НЕ не является минимальной, она содержит избыточные функции. Из нее можно удалить либо функцию f_1 (конъюнкцию), либо функцию f_7 (дизъюнкцию). В обоих случаях полнота системы не нарушится.

Упражнения

1. (ШТК). Сколько существует минимальных базисов, в которые входит функция $f_6 = A \oplus B$?

2. (037)! Сколько существует минимальных базисов, содержащих по две функции? По три функции?

3. Укажите номера минимальных базисов:

(026)	(АЯМ)
1) $f = A\overline{B}$, $\varphi = 1$;	1) $f = A+B$, $\varphi = \overline{A}\,\overline{B}$, $\psi = \overline{A} + B$;
2) $f = AB$, $\varphi = B + \overline{A}$;	2) $f = AB$, $\varphi = A+B$, $\psi = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;
3) $f = A \oplus B$, $\varphi = \overline{A}$;	3) $f = A \oplus B$, $\varphi = A+B$, $\psi = \overline{A} + B$;
4) $f = \overline{A} + B$, $\varphi = \overline{A}B$;	4) $f = A\overline{B}$, $\varphi = \overline{A}$, $\psi = 1$;
5) $f = A + \overline{B}$, $\varphi = A+B$;	5) $f = A \oplus B$, $\varphi = A+B$, $\psi = 1$;
6) $f = A+B$, $\varphi = 0$;	6) $f = 0$; $\varphi = AB$, $\psi = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;
7) $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$, $\varphi = 0$;	7) $f = AB$, $\varphi = \overline{A}\,\overline{B}$, $\psi = \overline{A} + \overline{B}$.

4.10. О реальных системах логических элементов

В предыдущем подразделе показано, что существует две элементарные функции – Пирса и Шеффера, каждая из которых образует минимальный базис. Это значит, что достаточно освоить массовый выпуск двухвходовых логических элементов, реализующих, например, операцию Шеффера, и никаких других элементов, в принципе, не потребуется, поскольку всякую булеву функцию можно представить в виде комбинационной схемы, используя только элементы И-НЕ. Проиллюстрируем это на примере функции

$$f = AB + CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + E. \qquad (8)$$

Так как в нашем распоряжении имеются только двухвходовые элементы Шеффера, то функцию (8) необходимо представить в виде выражения, содержащего две переменные. Это можно сделать различными способами. Выберем из них, например, такой:

$$f = P + Q, \text{ где } P = AB, \quad Q = CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + E.$$

Преобразуем выражение $P + Q$:

$$f = P + Q = \overline{\overline{P + Q}} = \overline{\overline{P}\,\overline{Q}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{Q}}.$$

Преобразуем выражение Q:

$Q = CD + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + E = R+S$, где $R = CD$, $S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + E$,

тогда функция (8) примет вид

$$f = \overline{\overline{AB}\,\overline{R+S}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{R}\,\overline{S}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{S}}.$$

Функцию S представим в виде

$$S = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + E = T + E, \text{ где } T = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}.$$

Получаем

$$f = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{S}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{T}\,\overline{E}}.$$

Так как по условию в нашем распоряжении трехвходовых элементов И-НЕ нет, то конъюнкцию $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$ преобразуем:

$$T = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} = M\overline{D}, \text{ где } M = \overline{A}\,\overline{B}.$$

В результате получаем

$$f = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{M\overline{D}}\,\overline{E}} = \overline{\overline{AB}\,\overline{CD}\,\overline{\overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}}}\,\overline{D}}\,\overline{E}}.$$

Под внешним (общим) знаком инверсии находится конъюнкция четырех выражений:

$$f = \overline{XYZ\overline{E}}, \text{ где } X = \overline{AB}, \ Y = \overline{CD}, \ Z = \overline{\overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}}}\,\overline{D}}.$$

После преобразований получаем окончательно

$$f = \overline{\overline{\overline{XY}}\;\overline{\overline{Z\overline{E}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{AB}\,\overline{CD}}}\;\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}}}\,\overline{D}}\,\overline{E}}}}.$$

Это выражение полностью подготовлено для построения комбинационной схемы с применением двухвходовых элементов Шеффера (рис. 1). Всего в схеме 10 таких элементов. Если же схему построить на элементах И и ИЛИ, то потребуется две схемы И по два входа каждая, одна трехвходовая схема И и одна четырехвходовая схема ИЛИ (рис. 2), т. е. всего четыре элемента. Первая

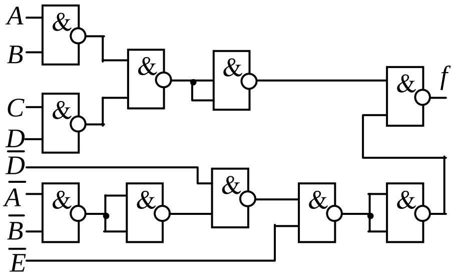


Рис. 1

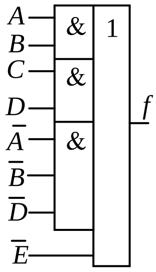


Рис. 2

схема содержит шесть последовательно соединенных элементов, вторая – два. Это значит, что быстродействие первой схемы значительно ниже по сравнению со второй (для одной и той же серии элементов). Каждый элемент Шеффера имеет три вывода, следовательно, при выполнении монтажных работ в случае первой схемы необходимо осуществить 30 электрических соединений (паек). Во второй схеме таких соединений только 15. Все это говорит о том, что схема на элементах Шеффера значительно уступает схеме, реализованной на элементах И, ИЛИ. Точно так же неэкономичными являются схемы на элементах Пирса. И вообще, ни одна из 17 минимальных функционально полных систем элементарных булевых функций не может составить основу для создания достаточно экономичной серии логических элементов. Поэтому на практике используются системы с очень большой избыточностью относительно функциональной полноты. Обычно в них включают многовходовые элементы И, ИЛИ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ и др. Многие из этих элементов сами по себе образуют функционально полные системы, и если их включают в серию логических элементов, то не в связи с функциональной полнотой, а по причинам практического характера.

В состав реальных серий логических элементов включают и более сложные схемы. Примером может служить программируемое постоянное запоминающее устройство (ПЗУ), имеющее n адресных входов и m выходов. Если на адресные входы ПЗУ подать n-значное двоичное число, то на выходах получим m-разрядное двоичное число, хранящееся по адресу, поданному на адресные входы.

Постоянное хранение двоичных чисел – это прямое назначение ПЗУ. Однако всякое ПЗУ можно использовать и для технической реализации булевых функций. Пусть $n = 5$. Поставим в соответствие двоичным разрядам пятизначного адреса логические аргументы A, B, C, D, E, где переменной A соответствует старший разряд. Тогда при $m = 1$ ПЗУ обеспечит реализацию любой булевой функции (но только одной!) до пяти аргументов. Чтобы записать функцию в ПЗУ, ее необходимо представить в СДНФ в виде набора номеров минтермов. Например:

$$f = (0, 2, 5, 7, 14, 19, 20, 24, 25, 30).$$

Номера минтермов, указанные в скобках, представляют собой адреса, по которым в ПЗУ необходимо записать единицы. После записи ПЗУ превращается в логический элемент, реализующий заданную функцию.

Кроме ПЗУ существуют программируемые логические матрицы, позволяющие записывать булевы функции, представленные в аналитической форме.

В состав реальных серий включают элементы (в виде микросхем), реализующие сложные функциональные узлы: одноразрядные и многоразрядные сумматоры, схемы сравнения, схемы проверки на четность индексов двоичных чисел, дешифраторы, мультиплексоры и др.

Таким образом, согласно теореме о функциональной полноте комбинационные структуры можно строить из очень малого набора логических схем. Однако разработчики серий логических элементов хотя и учитывают положения теории, все же ориентируются, главным образом, на потребности практики и создают системы, многократно превышающие по функциональной полноте все минимальные базисы. Реальные системы логических элементов насчитывают десятки различных микросхем, благодаря чему разработчики вычислительных средств получают возможность создавать цифровые устройства, отличающиеся высоким быстродействием, малыми габаритными размерами, хорошей технологичностью при сборке и низким энергопотреблением.

Упражнения

1. Запишите минимальную ДНФ функции:

(В66) $f = \overline{\overline{\overline{\overline{AB}}\,C}\,D}$; (ИЛЫ) $f = \overline{\overline{\overline{AB}}\,\overline{CD}}$; (279) $\overline{\overline{\overline{\overline{AB}\,C}\,\overline{B}}}$.

2. Определите число двухвходовых элементов Шеффера, которые необходимы для реализации следующих функций, если элементы, реализующие логические аргументы, имеют парафазные выходы:

(В95) $f = A\,B$; (239) $f = A + B$;
(ШБК) $f = A\,B\,C$; (Ц70) $f = A + B + C$;
(Ш97) $f = A\,B\,C\,D$; (И2Р) $f = A + B + C + D$;
(ООМ) $f = ABCDEFK$; (МОЗ) $f = A+B+C+D+E+F+K$.

3. Сколько двухвходовых элементов Шеффера необходимо для реализации нижеприведенных функций? Определите число инверсных аргументов.

(АРТ)! $f = AB + C + D$; (7РЕ)! $f = \overline{A}B + \overline{C} + \overline{D} + E$;
(ОЛУ)! $f = ABC + F + D + E$.

4. (С74). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что система, насчитывающая пять различных булевых функций, всегда является функционально полной?

2) может ли система булевых функций быть функционально полной, если все входящие в нее функции являются симметрическими?

3) всякая ли функция совместно со своей инверсией образует функционально полную систему?

4) образует ли функционально полную систему булева функция, описывающая логику работы схемы неравенства двух чисел?

5) существуют ли булевы функции, не сохраняющие единицу, но сохраняющие нуль?

6) если булева функция образует минимальный базис, то может ли она на нулевом наборе значений аргументов принимать нулевое значение?

7) если булева функция несамодвойственна, то может ли она быть равной нулю на нулевом наборе значений аргументов?

5. Сколько двухвходовых элементов Пирса необходимо для реализации нижеприведенных функций? Определите число инверсных букв.

(ОХ9)! $f = AB$; (АРК)! $f = A + \overline{B} + C$;
(ЦК8)! $f = A + B$; (ВЦ5)! $f = A + B + CD$;
(ЕУЛ)! $f = ABC$; (8ТИ)! $f = AB + CD + E + F$.

5. МНОГОТАКТНЫЕ АВТОМАТЫ

5.1. Однотактные и многотактные автоматы

В комбинационных схемах, рассмотренных в разделе 3, выходные сигналы меняются практически одновременно с входными, поскольку время, которое проходит с момента изменения входного сигнала до соответствующего изменения выходного сигнала, определяется только переходными процессами и в современных микросхемах составляет доли наносекунд (приставка «нано» обозначает 10^{-9}). Это значит, что всякая комбинационная схема на один и тот же сигнал реагирует одинаково независимо от того, какая информация поступала на вход схемы до подачи данного сигнала. Такие схемы нередко называют однотактными автоматами, подчеркивая тот факт, что в комбинационных схемах информация не запоминается и, следовательно, не участвует в преобразовании сигналов, поступающих на вход схемы в более поздние моменты времени.

В многотактных автоматах процесс преобразования входной информации осуществляется значительно сложнее. Эта сложность обусловлена тем, что всякий многотактный автомат содержит запоминающие элементы, которые в определенные моменты времени, называемые тактами, меняют свои состояния с приходом входных сигналов и совместно с ними участвуют в преобразовании входной информации. Все реальные многотактные автоматы имеют ограниченную память и соответственно ограниченное число внутренних состояний, поэтому многотактные автоматы называют также конечными автоматами.

В каком виде представить работу конечного автомата? В случае комбинационных схем достаточно составить таблицу соответствия и по ней найти все булевы функции, описывающие работу схемы. При разработке многотактных автоматов также можно использовать таблицы, в которых указывается последовательность смены состояний внутренних запоминающих элементов и определяются выходные сигналы для каждой комбинации внутренних состояний и состояний входов. Очевидно, что все такие автоматы являются детерминированными.

Этап, на котором работа автомата представляется в виде таблицы (или другим каким-либо способом), получил название этапа абстрактного синтеза автомата. После него идет этап структурного синтеза, на котором строится схема автомата с использованием тех или иных логических элементов.

В данном разделе приведено описание простейших потенциальных триггеров типа *RS* и более сложных триггеров – *T* и *JK*, широко использующихся в схемах дискретного действия в качестве запоминающих элементов. На примере несложных устройств рассмотрен табличный метод разработки многотактных автоматов. Даны начальные сведения об автоматах Мили и Мура. В связи с тем, что данное пособие является ознакомительным и рассчитано на студентов технических вузов, впервые знакомящихся с дискретной математикой, основное внимание в нем уделено прикладным аспектам. Тот, кто больше интересуется теоретическими вопросами конечных автоматов, может найти ответы на свои вопросы в обширной литературе, часть которой дана в библиографии.

5.2. Триггер типа *RS*

Логическая схема простейшего триггера *RS* на элементах Шеффера приведена на рис. 1,*а*. Триггер имеет два входа *R* и *S* и два выхода – прямой и инверсный. Прямой выход обозначается буквой без инверсии, инверсный – буквой со знаком отрицания. Вход *R* называется нулевым, *S* – единичным.

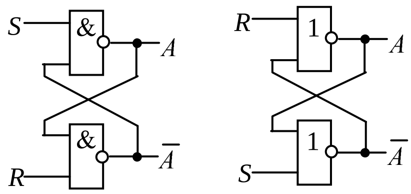
По входу *R* триггер устанавливается в нулевое состояние. Для этого достаточно принять R=0, S =1. Принято считать, что триггер находится в нулевом состоянии (состоянии нуля), если на его прямом (неинверсном) выходе имеется низкий уровень напряжения, а на инверсном – высокий, т. е. $A = 0$, $\overline{A} = 1$.

По входу *S* триггер устанавливается в единичное состояние. Для этого необходимо принять R= 1, S = 0. Считают, что триггер находится в единичном состоянии (состоянии единицы), если на его прямом выходе поддерживается высокий уровень напряжения, а на инверсном – низкий, т. е. $A = 1$, $\overline{A} = 0$ (см. подраздел 3.7).

Если на оба входа триггера *RS* подать высокий уровень, то триггер будет хранить то состояние, в какое он был переведен до подачи высоких уровней на оба входа.

Случай, когда $R = S = 0$, является запрещенным. Если на входы *R* и *S* подать низкие уровни, то сигналы на обоих выходах примут единичное значение.

Триггер *RS* меняет свои состояния под действием уровней входного напряжения. В связи с этим его входы *R* и *S* называют установочными входами.



а *б*

Рис. 1

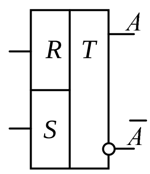


Рис. 2

На рис. 1,*б* изображен триггер *RS* на элементах Пирса. Он отличается от триггера на элементах Шеффера тем, что меняет свои состояния при подаче на его входы не низких уровней, а высоких. Запрещенным является состояние, когда $R = S = 1$.

Условное обозначение триггера *RS* приведено на рис. 2. Буква *T* на схеме говорит о том, что триггер однотактный, т.е. меняет свои состояния тотчас с подачей низкого уровня на один из его входов (в случае триггера, изображенного на рис. 1,*а*).

Упражнения

1. (НЕФ)! Допустим, что триггер *RS* (рис. 1,*а*) находится в нулевом состоянии. Укажите значения (0 или 1) переменных: $A = \ldots$; $\overline{A} = \ldots$; $S = \ldots$.

2. (ЭЭХ)! На вход *S* триггера (рис. 1,*а*) подан низкий уровень. Укажите значения: $A = \ldots$; $\overline{A} = \ldots$; $R = \ldots$; $S = \ldots$.

3. (Б83)! На вход *R* триггера (рис. 1,*а*) подан низкий уровень. Укажите значения: $A = \ldots$; $\overline{A} = \ldots$; $R = \ldots$; $S = \ldots$.

4. (ППИ)! Триггер (рис. 1,*а*) находится в единичном состоянии. Укажите значения: $A = \ldots$; $\overline{A} = \ldots$; $R = \ldots$.

5. (НАШ). Триггер (рис. 1,*а*) находится в состоянии, когда $A = 0$. Укажите значения: $A = \ldots$; $\overline{A} = \ldots$; $S = \ldots$.

6. (ЕЛ9). Пусть триггер (рис. 1,*б*) находится в нулевом состоянии. Укажите значения: $A = \ldots$; $\overline{A} = \ldots$; $S = \ldots$.

7. (ЯНК)! Входы триггера *RS* (рис. 1,*а*) соединили между собой. Укажите значения *R*, *S*, *A* и $\overline{A}$, если триггер находится в единичном состоянии.

8. (УВ7)! Входы триггера (рис. 1,*а*) соединили между собой. Укажите значения *R*, *S*, *A* и $\overline{A}$, если триггер находится в нулевом состоянии.

9. (ИЛ8)! Входы триггера (рис. 1,*а*) соединили между собой и на получившуюся общую точку подали низкий уровень. Укажите значения *R*, *S*, *A* и $\overline{A}$.

10. (УКО)! На вход *S* триггера (рис. 1,*б*) подали высокий уровень. Укажите значения двоичных переменных *A*, $\overline{A}$, *R*, *S*.

11. (ХАФ)! Триггер (рис. 1,*б*) находится в единичном состоянии. Укажите значения переменных *A*, $\overline{A}$, *R*.

5.3. Триггер типа *T*

Триггер типа *T* является одним из самых распространенных на практике. Он имеет один вход *T* (счетный) и два выхода – прямой и инверсный. Кроме того, триггер типа *T* имеет два установочных входа *R* и *S*.

Главная особенность *T*-триггера состоит в том, что он меняет свое состояние на противоположное под действием каждого импульса, поданного на вход *T*. В электронной технике используются самые разнообразные импульсы. Если их представить графически в системе декартовых координат *U* – *t*, где *U* – напряжение, *t* – время, то графики могут быть различной формы – треугольные, прямоугольные, колоколообразные и т. д. В теории дискретных автоматов используются в основном лишь прямоугольные импульсы. Пример таких импульсов приведен на рис. 3. Строго говоря, прямоугольных импульсов не существует, так как фронты, т. е. переходы напряжения с одного уровня на другой, также занимают какое-то время. Поэтому прямоугольные импульсы – это не более чем идеализация, согласно которой продолжительность фронтов во внимание не принимается.

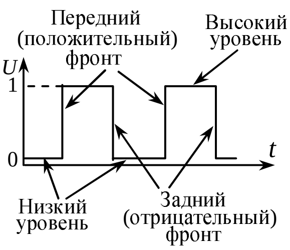


Рис. 3

Логическая схема *T*-триггера приведена на рис. 4. Рассмотрим его работу (на пунктирные линии пока не обращаем внимания). По схеме видно, что *T*-триггер состоит из двух *RS*-триггеров *A* и *B*, соединенных между собой комбинационными схемами. Пусть исходным является состояние, когда $A = B = 0$ (кроме того, $S = R = 1$). Если входной сигнал равен низкому уровню, то

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1; \quad \varphi_3 = 1; \quad \varphi_4 = 0.$$

Подадим на вход *T* высокий уровень. Прежде всего низким уровнем выходного напряжения элемента 1 окажутся запертыми схемы 5 и 9, вследствие чего имеем: $\varphi_3 = \varphi_4 = 1$. Затем (по времени) на схемы 3 и 7 поступит высокий уровень с выхода элемента 2. Так как $B = 0$, то $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$ и триггер *A* перейдет в единичное состояние, а триггер *B* по-прежнему останется в состоянии нуля.

Подадим на вход *T* низкий уровень напряжения. Сразу же откроются схемы 5 и 9. Поскольку $A = 1$, то выходное напряжение элемента 5 перейдет с высокого уровня на низкий. Одновременно с этим закроются схемы 3 и 7. Под действием сигнала $\varphi_3 = 0$ триггер *B* перейдет в единичное состояние. Следовательно, после первого импульса имеем: $A = B = 1$. В этом состоянии *T*-триггер будет находиться до следующего импульса.

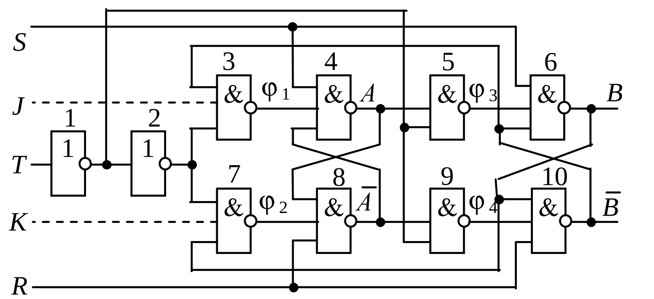


Рис. 4

Снова подадим на вход *T* высокий уровень. Выходной сигнал элемента 1 закроет схемы 5 и 9. Состояние триггера *B* при этом не изменится, так как $\varphi_3 = \varphi_4 = 1$. Но триггер *A* перейдет в нулевое состояние, поскольку $B = 1$ и $\varphi_2 = 0$.

С приходом на вход *T* низкого уровня закроются схемы 3 и 7, после чего триггер *B* перейдет в нулевое состояние вследствие того, что $\varphi_4 = 0$, $\varphi_3 = 1$.

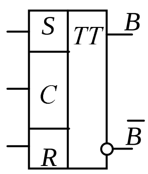


Рис. 5

Таким образом, под действием положительного фронта в состояние *Q* ($Q = 0, 1$) переходит триггер *A* (ведущий триггер), а под действием отрицательного фронта в это же состояние переходит и триггер *B* (ведомый триггер). Выходами *T*-триггера являются выходы ведомого *RS*-триггера. Следовательно, триггер *T* меняет свои состояния на противоположные с каждым входным импульсом по отрицательным перепадам напряжения, т. е. по отрицательным фронтам.

Условное изображение *T*-триггера приведено на рис. 5. Буквы *TT* обозначают: триггер двухтактный, т. е. содержит два *RS*-триггера, из которых один реагирует на положительный перепад входного напряжения, второй – на отрицательный [43, с. 143].

Упражнения

1. Пусть $A = B = 0$, $R = S = 1$, $T = 0$ (рис. 4). Укажите значения уровней (0 или 1) выходного напряжения элементов с номерами: (ЭМБ) 1,2,3,4,5; (ХРВ) 6,7,8,9,10.

2. (ДАГ). Пусть на рис. 4 $A = 1$, $B = 0$. Укажите значения (0 или 1) *S*, *T*, *R*, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

3. (МКЕ). Допустим, что на рис. 4 $R = 0$, $S = 1$, $T = 1$. Укажите значения (0 или 1) φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, *A*, *B*.

4. (ААХ). Пусть на рис. 4 $R = 1$, $S = 0$, $T = 1$. Укажите значения (0 или 1) φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, *A*, *B*, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

5. (НТЗ). Допустим, что на рис. 4 $R = S = T = 0$. Укажите значения (0 или 1) φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, *A*, *B*, $\overline{A}$, $\overline{B}$.

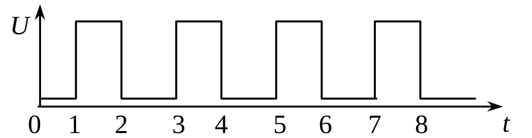


Рис. 6

6. На вход *T* триггера подано 4 импульса. Укажите номера точек на рис. 6, соответствующие моментам, когда:

(ММ5) триггер *A* (рис. 4) переходит в единичное состояние, если до подачи импульсов, т. е. в момент $t = 0$, триггеры *A* и *B* находились в состояниях $A = B = 0$;

(ЯКК) триггер B (рис. 4) переходит в единичное состояние, если до подачи импульсов триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 0$;

(ИЛЛ) триггер B (рис. 4) переходит в единичное состояние, если до подачи импульсов триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 1$;

(ВГМ) триггер B (рис. 4) переходит в нулевое состояние, если до подачи импульсов триггеры A и B находились в состояниях $A = B = 0$.

7. Триггер T (рис. 4) установлен в нулевое состояние, после чего на его вход подали 57 импульсов прямоугольной формы. Ответьте на вопросы:

(ЯКР). Сколько раз триггер A переходил в единичное состояние?

(НАС). Сколько раз триггер B переходил в нулевое состояние?

(ШРТ)! Сколько раз триггер A переходил в нулевое состояние? Сколько раз триггер B переходил в единичное состояние?

5.4. Асинхронные автоматы на *T*-триггерах

Если конечный автомат содержит несколько триггеров, то возможны следующие случаи:

1) триггеры меняют свои состояния только в определенные моменты времени, задаваемые генератором тактовых импульсов. Если в противоположное состояние переходят два и более триггеров, то происходит это одновременно. Такие автоматы называют синхронными (с греческого: syn – вместе, chronos – время; synchronismos – одновременность, совпадение во времени);

2) смена состояний триггеров не строго задается тактовым генератором, вследствие чего триггеры меняют состояния не одновременно даже в тех случаях, когда в соответствии с логикой работы схемы смена состояний триггеров должна осуществляться в одни и те же моменты времени. Это асинхронный принцип работы автомата (с греческого: a – отрицающая частица, synchronos – одновременный).

Простейшим примером асинхронного автомата является двоичный суммирующий счетчик на T-триггерах. На рис. 7 изображен счетчик, состоящий из шести триггеров, обозначенных буквами A, B, C, D, E, F, где триггер A соответствует старшему разряду, F – младшему.

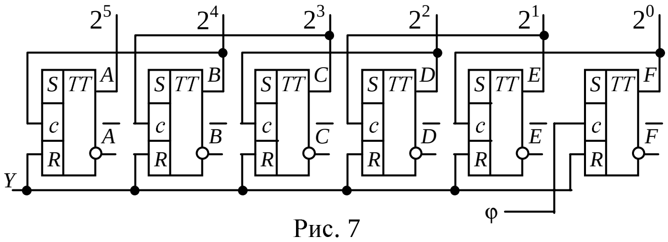


Рис. 7

Входы R всех триггеров соединены между собой и образуют шину сброса всего счетчика в нулевое состояние. Этот вход обозначен буквой Y.

Установим счетчик в нулевое состояние путем кратковременной подачи низкого уровня на вход Y. Тогда получим: $A = B = C = D = E = F = 0$, т. е. в счетчике окажется шестизначное двоичное число 000000. Подадим на вход φ счетчика прямоугольный импульс. Под действием отрицательного фронта триггер F перейдет в единичное состояние. На счетный вход c триггера E поступит положительный фронт, на который триггер не реагирует. Следовательно, в счетчике окажется число 000001.

Подадим на вход φ второй импульс. Триггер F перейдет в нулевое состояние, и с его прямого выхода на вход триггера E поступит отрицательный фронт, вследствие чего триггер E окажется в единичном состоянии. Напряжение на входе триггера D с низкого уровня перейдет на высокий, на что триггер D не реагирует. Следовательно, счетчик окажется в состоянии 000010. Если на вход φ подать третий импульс, то счетчик окажется в состоянии 000011, затем, после четвертого импульса, – в состоянии 000100 и так далее до состояния 111111, в котором счетчик окажется после 63-го импульса. Если на вход φ подать еще один импульс, то счетчик перейдет в состояние 000000 и начнется новый цикл счета.

Почему же рассмотренный счетчик является асинхронным? Пусть счетчик находится в состоянии 011111 (число 31). Подадим на его вход φ еще один импульс. Триггер F перейдет в нуль и отрицательным фронтом переведет в нуль триггер E, который в свою очередь переведет в нулевое состояние триггер D, а триггер D переведет в нуль триггер C, после него – B и, наконец, в единичном состоянии окажется триггер A. В счетчике будет число 100000. Заметим, что все шесть триггеров сменили свои состояния, но не одновременно, а один за другим. Это значит, что после 32-го импульса счетчик не сразу перешел в состояние 100000, а сначала некоторое время был в состоянии 011110, затем – 011100, далее – 011000, 010000, 000000 и, наконец, 100000. В этом и состоит асинхронность рассмотренного счетчика.

В более сложных устройствах асинхронность заключается в том, что импульс запуска получает один какой-либо блок. Закончив свою работу, он тотчас запускает один или несколько других блоков, а те в свою очередь – следующие и так далее до завершения работы всего устройства.

Завершим подраздел следующим замечанием. Если на рис. 7, на котором изображен суммирующий счетчик, вместо прямых выходов воспользоваться инверсными, т.е. вход триггера E подключить к выходу $\bar{F}$, вход триггера D – к выходу $\bar{E}$ и так далее, а информацию по-прежнему снимать с неинверсных выходов, то получится вычитающий счетчик. Как вычитающий может работать и суммирующий счетчик, если информацию снимать не с прямых выходов, а с инверсных.

Упражнения

1. (Ц71). Счетчик (рис. 7) перевели в нулевое состояние и затем на вход φ подали 19 импульсов. Назовите триггеры (в алфавитном порядке), которые находятся в единичном состоянии.

2. Шестиразрядный суммирующий двоичный счетчик перевели в нулевое состояние и затем на вход φ подали n импульсов. Назовите шестизначное двоичное число, которое находится в счетчике, если:

(В21) $n = 300$; (ИЛ2) $n = 512$; (РТЗ) $n = 127$.

3. (КРИ). При $Y = 0$ на вход φ подали 20 импульсов (рис. 7). Назовите шестизначное двоичное число, которое находится в счетчике.

4. Назовите шестизначное двоичное число, которое окажется в счетчике (рис. 8), если на вход φ подать (исходным считать состояние 000000):

(ЛОЙ) один импульс; (ХА9) пять импульсов;
(Л26) два импульса; (Х40) шесть импульсов;
(ЦПМ) четыре импульса; (ЗЗБ) семь импульсов.

5. Счетчик (рис. 8) находится в состоянии n. Назовите шестизначное двоичное число, которое окажется в счетчике после подачи на вход φ одного импульса, если:

(ОКТ) n = 011011; (НАЗ) n = 100110;
(ВЛЕ) n = 010110; (К84) n = 100010;
(К81) n = 010010; (Т55) n = 111100;
(2ПХ) n = 100100; (К26) n = 101001.

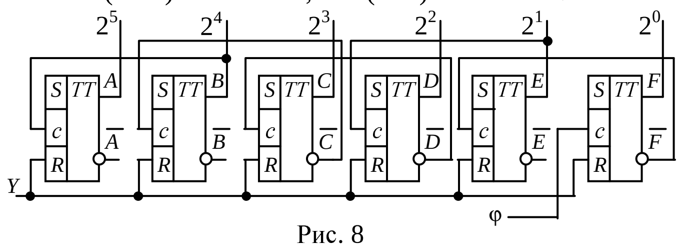


Рис. 8

6. Изобразите пятиразрядный вычитающий двоичный счетчик (входы триггеров соедините не с прямыми выходами, а с инверсными). Укажите двоичное число, которое будет находиться в счетчике, если после установки его в нуль на вход φ подать:

(АХ7) два импульса; (ХИН) 48 импульсов;
(АС8) 12 импульсов; (МИО) 257 импульсов.

7. На рис. 7 изображен суммирующий счетчик. Пусть информация считывается не с прямых выходов, а с инверсных. Укажите двоичное шестизначное число, которое будет находиться в счетчике, если после его установки в нуль (по входам R) на вход φ подать:

(ББФ) 0 импульсов; (ХИШ) 32 импульса;
(Р52) 1 импульс; (776) 64 импульса;
(Т53) 4 импульса; (УФ7) 140 импульсов;
(КБИ) 63 импульса; (ЛУМ) 1000 импульсов.

5.5. Синтез синхронных автоматов на триггерах типа *T*

В отличие от асинхронного автомата, в котором тактовые импульсы воздействуют в основном на один триггер или на один функциональный блок, в схеме синхронного автомата тактовый импульс непосредственно управляет каждым триггером или функциональным блоком. Как это реализуется, показано на рис. 9. Тактовые импульсы поступают на один из входов элементов И, выходы которых подключены к счетным входам триггеров A_1, A_2, … , A_n. Ко вторым входам схем И присоединены выходы комбинационной схемы, представляющей собой преобразователь входного n-разрядного двоичного кода в n-разрядный выходной код, разряды которого обозначены символами f_1, f_2, … , f_n. Буквой Y обозначена шина установки автомата в исходное (нулевое) состояние.

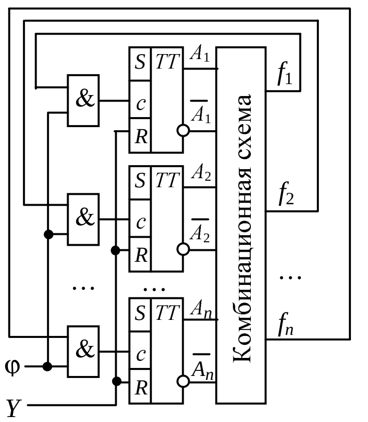


Рис. 9

Зафиксируем какой-либо момент между тактовыми импульсами, когда φ = 0. Триггеры находятся в некоторых состояниях, представляющих собой определенный набор значений аргументов A_1, A_2, … , A_n. На этом наборе выходы f_1, f_2, … , f_n комбинационной схемы образуют некоторый набор высоких и низких уровней. Низкими уровнями соответствующие схемы И будут заперты, высокими – открыты (по своим входам). Когда на вход φ поступит импульс, он пройдет только через те схемы И, которые открыты высокими уровнями комбинационной схемы. Поскольку триггеры реагируют на отрицательный фронт, то смена их состояний будет происходить после того, как на все схемы И по шине φ поступит низкий уровень. Благодаря этому смена состояний выходов f_1, f_2, … , f_n комбинационной схемы не вызовет никаких изменений на входах триггеров.

Задача синтеза автомата в основном сводится к построению комбинационной схемы, распределяющей тактовые импульсы по входам триггеров так, чтобы автомат менял свои состояния в соответствии с заданной последовательностью. Метод построения такого автомата весьма прост. Проиллюстрируем его на следующем примере. Пусть требуется построить схему, выполняющую счет входных импульсов в прямой последовательности по замкнутому циклу 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, …, если A = 0, и в обратной – 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 7, …, если A = 1. Изменение направления счета возможно с любого состояния триггеров.

Очевидно, что для построения схемы необходимо четыре триггера: один триггер, обозначенный в условии буквой A, используется для переключения направления счета, а для реализации самого счета требуется еще три триггера. Обозначим их буквами B, C, D и составим таблицу переходов, в которой отразим все случаи перехода автомата из одного состояния в другое (табл. 1).

Таблица 1

Дес.	A B C D	f_B f_C f_D
0	0 0 0 0	0 0 1
1	0 0 0 1	0 1 1
2	0 0 1 0	0 0 1
3	0 0 1 1	1 1 1
4	0 1 0 0	0 0 1
5	0 1 0 1	0 1 1
6	0 1 1 0	0 0 1
7	0 1 1 1	1 1 1
8	1 0 0 0	1 1 1
15	1 1 1 1	0 0 1
14	1 1 1 0	0 1 1
13	1 1 0 1	0 0 1
12	1 1 0 0	1 1 1
11	1 0 1 1	0 0 1
10	1 0 1 0	0 1 1
9	1 0 0 1	0 0 1

В левой части таблицы, где приведены колонки A, B, C, D, записаны состояния автомата: когда A = 0, автомат ведет счет в прямом направлении: 000, 001, 010, … , 111, когда же A = 1, то счет идет в обратной последовательности: 000,111, 110, …, 001. В левой колонке, обозначенной «Дес.», указаны десятичные эквиваленты четырехзначных двоичных чисел, записанных в строках таблицы.

Правая часть табл. 1 состоит из колонок: f_B, f_C, f_D. Это выходы комбинационной схемы, управляющей триггерами B, C, D. Заметим, что триггер A устанавливается в единичное или нулевое состояние извне, поэтому в правой части табл. 1 колонка f_A отсутствует.

Правая часть таблицы заполняется на основе левой следующим образом. В верхней строке записано число 0000, т. е. $A = B = C = D = 0$. Если на вход φ (рис. 9) подать импульс, то автомат должен перейти в состояние 0001. Это произойдет в том случае, если тактовый импульс поступит на вход триггера D и не пройдет на входы триггеров B и C. В связи с этим в строке с кодом 0000 в правой части таблицы записываем 001.

Предположим, что на вход φ импульс поступил и автомат перешел в состояние 0001. Второй тактовый импульс должен пройти на входы триггеров C и D одновременно. Тогда триггер C перейдет в единицу, а триггер D – в нуль. Во второй сверху строке в правой части записываем 011. Третий импульс должен перевести автомат в состояние 0011. Так как после второго импульса установилось состояние 0010, то для перевода автомата в состояние 0011 необходимо подать импульс на вход триггера *D*. В третьей строке записываем 001 и т. д. В результате получилась таблица соответствия для трех функций. Список минимальных форм булевых функций, описывающих комбинационную схему автомата, имеет вид:

$$f_B = A\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}CD; \quad f_C = A\overline{D} + \overline{A}D; \quad f_D = 1.$$

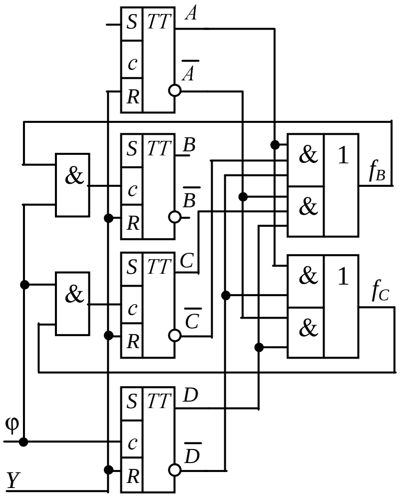


Рис. 10

Полная схема автомата, работающего в соответствии с заданными условиями, приведена на рис. 10. Заметим, что логическую схему И, управляющую входом триггера *D*, можно удалить, так как ее выход φ_D реализует функцию

$\varphi_D = \varphi\, f_D = \varphi \cdot 1 = \varphi$, откуда следует, что импульсы генератора можно подавать непосредственно на вход триггера *D*.

Еще одна особенность автомата: триггер *B* не участвует в работе комбинационной схемы, но это не значит, что его можно удалить. С выходов триггеров *B*, *C*, *D* считываются трехзначные числа, и если триггер *B* удалить, то выходные числа окажутся двухразрядными.

Упражнения

1. Пусть автомат (рис. 10) находится в состоянии 011 при $A = 0$.

(ТЕК). Укажите состояние, в которое автомат перейдет после одного тактового импульса.

(Р67). В каком состоянии был автомат перед тем, как перешел в состояние 011?

(У78). В какое состояние перейдет автомат после одного тактового импульса, если перед подачей этого импульса триггер *A* установить в единичное состояние?

2. На вход *Y* автомата (рис. 10) поступил установочный импульс. В каком состоянии окажется автомат, если при $A = 0$ на вход φ подать *n* импульсов:

(Е79) $n = 10$? (Р00) $n = 24$? (061) $n = 333$?

3. Автомат (рис. 10) находится в состоянии 111. В каком состоянии окажется автомат, если при $A = 1$ на вход φ подать *n* импульсов:

(ИФ2) $n = 4$? (666) $n = 48$? (ППИ) $n = 90$?

4. (В25)! Укажите триггеры, на входы которых пройдет тактовый импульс, если автомат (рис. 10) находится в состоянии 110 при $A = 0$; в состоянии 110 при $A = 1$.

5. (В65)! Пусть автомат находится в состоянии 101 (рис. 10). Какие триггеры изменят свои состояния под действием одного импульса, если $A = 1$? Если $A = 0$?

6. Составьте таблицу переходов и постройте автомат, работающий в соответствии с условиями: если $A = 0$, то автомат меняет свои состояния в последовательности 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, …; если же $A = 1$, то последовательность смены состояний имеет вид 0, 4, 6, 7, 5, 1, 3, 2, 0, … . Обозначение колонок как в табл. 1. Задание:

1) укажите триггеры (*B*, *C*, *D*), на входы которых пройдет тактовый импульс, если автомат при $A = 0$ находится в состоянии:

(227)! 000; 001; (Ж49)! 010; 011;

(Г38)! 100; 101; (840)! 110; 111;

2) укажите триггеры (*B*, *C*, *D*), на входы которых пройдет тактовый импульс, если при $A = 1$ автомат находится в состоянии:

(КУ3)! 000; 100; (782)! 110; 111;

(ЧУФ)! 101; 001; (Р25)! 011; 010;

3) (2СИ)! Сколько единиц в колонке f_B? f_C? f_D?

4) найдите число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов для минимальной ДНФ функции:

(Ш36) f_B; (КП7) f_C; (5ВМ) f_D;

5) в каком состоянии автомат (триггеры *B*, *C*, *D*) находился в предыдущем такте и в какое состояние он перейдет в следующем такте, если в данный момент он при $A = 1$ находится в состоянии (ответ представить в виде последовательности двух трехразрядных двоичных кодов): (ЦАН)! 111? (ПЭР)! 010? (ЛЫС)! 100?

5.6. Триггер типа *JK*

На рис. 4 изображен триггер *JK*, если пунктирные линии считать сплошными, а на вход *T* подавать синхроимпульсы. При $J = 1$, $K = 0$ синхроимпульс переводит триггер *JK* в единичное состояние независимо от того, в каком состоянии находился триггер до подачи импульса. *J* – это единичный вход триггера *JK*.

Если $J = 0$, $K = 1$, то синхроимпульс переводит триггер в нуль независимо от предыдущего состояния. Следовательно, *K* – это нулевой вход.

Из рис. 4 видно, что если $J = K = 0$, то триггер находится в том состоянии, в какое он был переведен до подачи низкого уровня на оба входа: *J* и *K*. Это режим хранения информации: триггер не меняет свое состояние даже при подаче импульсов на его синхровход.

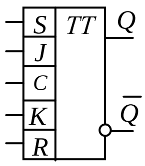


Рис. 11

При $J = K = 1$ триггер превращается в *T*-триггер, счетным входом которого является синхровход, т. е. при $J = K = 1$ с каждым импульсом триггер меняет свое состояние на противоположное.

Условное обозначение *JK*-триггера приведено на рис. 11. Триггер *JK*, как и *T*-триггер, является двухтактным.

Упражнения

1. (ВЫР). Триггер *JK* (рис. 11) находится в нулевом состоянии. На его входе *J* установили высокий уровень, а на входе *K* – низкий. Затем на синхровход подали четыре импульса (рис. 6). Укажите на рис. 6 номера точек, соответствующих моментам, когда *JK*-триггер сменит свое состояние.

2. (ЦВВ). Триггер *JK* (рис. 11) находится в нулевом состоянии. На его входах *J* и *K* установили высокие уровни, т. е. приняли $J = K = 1$. Затем на синхровход подали четыре импульса (рис. 6). Укажите номера точек на этом рисунке, соответствующих моментам, когда триггер сменит свое состояние.

3. (ЦХТ). Полагая, что $R = S = 1$, укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) если $T = 1$, то после подачи импульса на вход *J* триггер всегда переходит в единичное состояние?

2) если принять $T = 1$, то после подачи импульса одновременно на оба входа J и K триггер независимо от предыдущего состояния перейдет в единичное?

3) если входы J, K и T соединить между собой, то с подачей импульса на получившуюся общую точку триггер сменит свое состояние на противоположное?

4) если после $J = K = T = 1$ принять $J = K = 0$, а затем на вход T подать низкий уровень, то триггер сменит свое состояние на противоположное?

5) если $T = 0$, то при подаче импульсов на входы J и K состояние триггера не меняется?

6) если вход T соединить с входом J, то при $K = 1$ триггер будет менять свое состояние с каждым импульсом, поступившим на вход J?

7) если вход T соединить с входом K, то при $J = 1$ триггер будет менять свое состояние с каждым импульсом, поступившим на вход K?

5.7. Синтез многотактных автоматов на *JK*-триггерах

Метод построения многотактных автоматов с использованием *JK*-триггеров рассмотрим на примере. Пусть требуется разработать схему, состояния которой менялись бы в последовательности 3, 4, 2, 0, 5, 7, 6, 1, 3, … и так далее по замкнутому циклу. Так как всего имеется восемь различных состояний, то для построения схемы необходимо три триггера. Начальным является состояние 011, следовательно, к шине Y (установка исходного состояния) присоединяем вход R триггера A, вход S триггера B и вход S триггера C.

Строим таблицу переходов, начиная с состояния 011. Строится она по аналогии с табл. 1, но в данном случае правая часть таблицы содержит не три колонки, а шесть, так как *JK*-триггеры имеют по два входа: J_A, K_A – входы триггера A; J_B, K_B – входы триггера B; J_C, K_C – входы триггера C (табл.2).

Таблица 2

A	B	C	J_A	K_A	J_B	K_B	J_C	K_C
0	1	1	1	×	×	1	×	1
1	0	0	×	1	1	×	0	×
0	1	0	0	×	×	1	0	×
0	0	0	1	×	0	×	1	×
1	0	1	×	0	1	×	×	0
1	1	1	×	0	×	0	×	1
1	1	0	×	1	×	1	1	×
0	0	1	0	×	1	×	×	0

Под действием первого тактового импульса должно установиться состояние 100, как это указано во второй строке таблицы. Триггер A перейдет в состояние единицы, если на вход J_A поступит высокий уровень. Следовательно, в колонке J_A строки 011 записываем единицу. В колонке K_A при этом ставим крестик (неопределенное состояние), так как триггер A перейдет в единичное состояние независимо от того, высокий или низкий уровень будет на входе K_A.

Триггер B перейдет в состояние нуля, если на вход K_B подать высокий уровень, а на вход J_B – безразлично какой, высокий или низкий. Следовательно, в колонке K_B записываем единицу, а в колонке J_B – крестик. То же самое относится и к колонкам J_C и K_C.

Допустим, что первый тактовый импульс прошел на синхровход схемы и установил ее в состояние 100. Под действием второго импульса автомат должен перейти в состояние 010. Триггер A перейдет в нулевое состояние, если на вход K_A подать высокий уровень. На входе S_A при этом может поддерживаться безразлично какой уровень – высокий или низкий. Следовательно, в колонке K_A записываем единицу, а в колонке J_A ставим крестик.

Триггер B перейдет в состояние единицы, если при любом уровне на входе K_B на вход J_B поступит высокий уровень. В связи с этим в колонке J_B записываем единицу, а в колонке K_B – крестик.

Триггер C должен остаться в нулевом состоянии. Это возможно, если на входе J_C будет поддерживаться низкий уровень. На входе K_C при этом может быть как низкий уровень, так и высокий. Следовательно, в колонке J_C записываем нуль, а в колонке K_C – крестик.

Аналогичным образом заполняем всю правую часть таблицы переходов. После заполнения таблицы рассматриваем ее как таблицу соответствия для шести функций, зависящих от одних и тех же аргументов A, B, C.

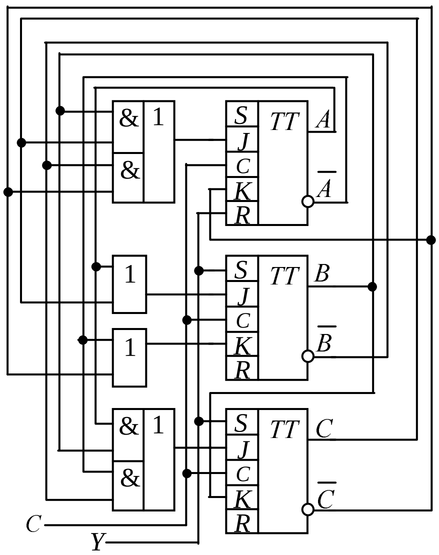


Рис. 12

Из табл. 2 видно, что каждая из шести функций не определена на четырех наборах. После минимизации получаем:

$J_A = BC + \overline{B}\,\overline{C}$;

$K_A = \overline{C}$;

$J_B = A + C$;

$K_B = \overline{A} + \overline{C}$;

$J_C = AB + \overline{A}\,\overline{B}$;

$K_C = B$.

Схема автомата приведена на рис. 12. По схеме видно, что если на вход Y подать низкий уровень, то триггер A перейдет в нулевое состояние, а триггеры B и C – в единичное, т. е. автомат будет переведен в состояние 011, что полностью соответствует заданным условиям.

Синхроимпульсы подаются на шину C, к которой подключены синхровходы всех триггеров.

Упражнения

1. Какое было предыдущее состояние (в двоичном коде) автомата (рис. 12) и какое будет следующее, если в данный момент автомат находится в состоянии:

(ФАР)! 010? (ЯНС)! 011? (21Т)! 001?

2. (НЕФ). Укажите исходное состояние (в двоичном коде) автомата, приведенного на рис. 12.

3. Автомат (рис. 12) находится в состоянии 100. В какое состояние (в двоичном коде) перейдет автомат, если на его вход C подать:

(ОК1) 3 импульса? (ЮКИ) 12 импульсов?
(ЧЕХ) 39 импульсов? (ХЕШ) 128 импульсов?

4. (ЭМЦ). Сколько выходов имеет комбинационная схема на рис. 12, управляющая входами J и K триггеров A, B, C?

5. Укажите состояния (0 или 1) выходов комбинационной схемы на рис. 12: J_A=…; K_A=…; J_B=…; K_B=…; J_C=…; K_C=…, если автомат находится в состоянии:

(676) 010; (267) 110; (ТТ8) 111.

6. На вход C автомата (рис. 12) подано k импульсов. В результате оказалось, что $A = B = C = 0$. В каком состоянии находился автомат до подачи импульсов, если:

(МУЭ) $k = 4$? (5РП) $k = 19$? (КОП) $k = 631$?

7. Постройте таблицу переходов и изобразите схему автомата на *JK*-триггерах, если под действием тактовых импульсов состояния автомата меняются в последовательности 110, 010, 011, 001, 000, 100, 101, 111, 110, … . Исходным является состояние 110. Используйте обозначения, как в таблице 2. Выполните задания:

1) по таблице переходов определите, какие сигналы (0, 1, ×) поступят на входы J_A , K_A , J_B , K_B , J_C , K_C , если автомат находится в состоянии (при самоконтроле для ввода неопределенных состояний используйте знак умножения):

(НИР) 000; (ОЦС) 001; (АЦТ) 010; (ФУФ) 011;
(ЯСЕ) 100; (132) 101; (НУЗ) 110; (Г64) 111;

2) найдите минимальные ДНФ функций:

(255) J_A =…; (СКК) J_B =…; (УУ.ВИ) J_C =…;
(ДЕ8) K_A =…; (599) K_B =…; (УФ.СИ) K_C =…;

3) (ВАК). Автомат находится в состоянии 101. В какое состояние (в двоичном коде) перейдет автомат, если на вход *Y* подать низкий уровень?

4) автомат находится в состоянии 100. В какое состояние (в двоичном коде) он перейдет, если на его синхровход подать:

(ТЕЗ) 3 импульса? (215) 24 импульса?
(ФПИ) 191 импульс? (ГЕК) 640 импульсов?

5) автомат находился в состоянии *x*. После *n* тактовых импульсов автомат перешел в состояние 111. Найдите *x*, если

(КП7) $n = 9$; (ЗУМ) $n = 90$; (МУН) $n = 900$.

5.8. Сдвиговый регистр

На рис. 13 приведена схема пятиразрядного сдвигового регистра. По входу *Y* все триггеры регистра переходят в нулевое состояние. По входам *S* в регистр можно извне записать любое пятизначное двоичное число. Триггер *A* соответствует старшему разряду, *E* – младшему.

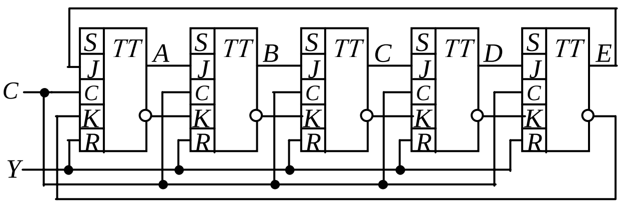


Рис. 13

Регистр на рис. 13 предназначен для сдвига числа вправо по замкнутому циклу, т. е. цифра младшего разряда после импульса сдвига, поданного на вход *C*, занимает место старшего разряда. Пусть в регистре находится число 10010. Подадим на вход *C* импульс. Тогда единица триггера *A* перепишется в триггер *B*. До подачи импульса триггер *B* был в состоянии нуля, следовательно, после импульса получим: $C = 0$. Триггер *D* перейдет в нулевое состояние, *E* – в единичное и *A* – в нулевое. В результате число после сдвига примет вид: 01001. Если на вход *C* подать еще один импульс, то получим 10100, и т. д. После пятого импульса регистр вернется в исходное состояние: в нем снова будет число 10010. Таким образом, полный цикл преобразования числа 10010 состоит из пяти чисел: 10010, 01001, 10100, 01010, 00101.

Если выход *E* отключить от входа J_A и выход $\overline{E}$ – от входа K_A, то получим разомкнутый регистр, т. е. схему деления числа на два (при делении нечетных чисел результат округляется в меньшую сторону). Запишем в регистр число 11001, а на вход J_A подадим низкий уровень, на вход K_A – высокий. После первого импульса сдвига получим 01100, после второго – 00110, после третьего – 00011, после четвертого – 00001, после пятого – 00000, и в дальнейшем число меняться не будет.

На рис. 13 выход *E* соединен с входом J_A, а выход $\overline{E}$ – с входом K_A. Поменяем местами провода, ведущие от триггера *E* к триггеру *A*, то есть выход *E* отключим от входа J_A и присоединим к входу K_A, а выход $\overline{E}$ отключим от входа K_A и присоединим к входу J_A (рис. 14).

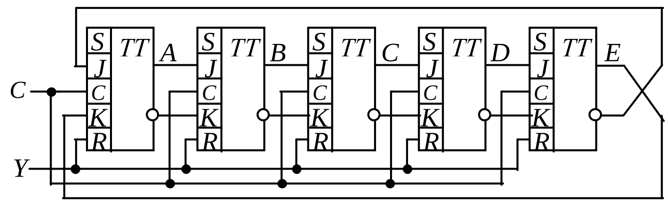


Рис. 14

Получилась очень интересная схема. Подадим на вход *Y* импульс сброса. Установится число 00000. После первого синхроимпульса триггер *A* перейдет в единичное состояние, так как на вход J_A с инверсного выхода триггера *E* поступает высокий уровень, а на вход K_A с прямого выхода *E* подается низкий уровень. Регистр перейдет в состояние 10000. После второго импульса в регистре окажется число 11000, затем – 11100, 11110, 11111, 01111, 00111, 00011, 00001, 00000. После десятого импульса регистр перейдет в нулевое состояние, следовательно, всего регистр имеет 10 различных состояний. По этой причине его нередко используют в качестве десятичного счетчика [43, с. 197]. Такую схему иногда называют кольцом Реженера, а в [59, с. 54] она названа счетчиком Джонсона.

Упражнения

1. (МЭФ). В регистр (рис. 13) записано число 01111. Какое двоичное число окажется в регистре после одного синхроимпульса?

2. (АХХ). Триггеры регистра (рис. 13) находятся в состояниях: $A = C = D = 1$; $B = E = 0$. Какое двоичное число находится в регистре? (НАЦ). Какое это десятичное число?

3. Регистр (рис. 13) находится в состоянии 10001. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре:

(ИШИ) после трех импульсов сдвига?
(СЯШ) после четырех импульсов сдвига?

4. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре (рис. 13) после 14 импульсов сдвига, если исходное число имеет вид:

(Т56) 00001 ? (ХЫН) 11001 ? (ПКБ) 11110 ?
(ФЫЛ) 11111 ? (Я50) 00000 ? (НИС) 01010 ?

5. Какое число (в десятичной системе) было в регистре (рис. 13) до подачи восьми импульсов сдвига, если после них в регистре установилось число:

(278) 01100 ? (ОУТ) 00010 ? (ОМД) 10001 ?

6. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре (рис. 14) после 6 импульсов сдвига, если исходное состояние имеет вид:

(ФУК) 00001 ? (289) 11001 ? (КУБ) 01110 ?

7. (ОЗХ). Триггеры регистра (рис. 14) находятся в состояниях: $A = C = D = 1$; $B = E = 0$. Какое двоичное число окажется в регистре после восьми импульсов сдвига? (У23). После 120 импульсов сдвига?

5.9. Синтез многофункциональных автоматов

Многофункциональные автоматы выполняют преобразование входной информации по нескольким различным алгоритмам, каждый из которых имеет свой управляющий код. Синтез таких автоматов может быть осуществлен при помощи того же табличного метода, что и в предыдущих случаях. В качестве примера рассмотрим схему, основу которой составляет сдвиговый регистр.

В предыдущем подразделе рассмотрены три варианта применения сдвигового регистра. Объединим эти три варианта в одну схему и построим автомат, при помощи которого можно было бы выполнять преобразование числа по любому из трех вариантов.

Пусть P и Q – входные управляющие сигналы. Условимся считать, что:

1) если $P = Q = 0$, то регистр является разомкнутым;
2) если $P = 0$, $Q = 1$, то регистр замкнут;
3) если $P = 1$, $Q = 0$, то регистр является кольцом Реженера;
4) состояние $P = Q = 1$ является неиспользуемым.

Представим заданные условия в виде таблицы по аналогии с тем, как это было сделано в подразделе 5.7. Вид преобразования числа зависит только от входных сигналов P и Q и от состояния триггера E, следовательно, необходимо рассмотреть восемь случаев (табл. 3).

Таблица 3

	$P\ Q\ E$	J_A	K_A
0	0 0 0	0	1
1	0 0 1	0	1
2	0 1 0	0	1
3	0 1 1	1	0
4	1 0 0	1	0
5	1 0 1	0	1
6	1 1 0	×	×
7	1 1 1	×	×

Если $P = Q = 0$, то регистр разомкнут. Это значит, что под действием импульса триггер A должен перейти в нулевое состояние. Следовательно, в строках 000 и 001 на пересечении с колонками J_A и K_A записываем 0 и 1.

Если $P = 0$, $Q = 1$, то регистр замкнут. Строке 010 соответствует случай, когда $E = 0$, и следовательно, триггер A должен перейти в нулевое состояние. В колонке K_A записываем единицу, а в колонке J_A – нуль. В строке 011 записываем: J_A =1, K_A= 0, так как $E = 1$, и следовательно, триггер A после импульса сдвига должен перейти в единичное состояние.

Если $P = 1$, $Q = 0$, то схема работает как кольцо Реженера. Это значит, что при $E = 0$ триггер A должен перейти в единичное состояние (записываем: $J_A = 1$, $K_A = 0$), а при $E = 1$ – в нулевое (записываем: $J_A = 0$, $K_A = 1$).

В двух последних строках ставим крестики, так как состояние входов $P = Q = 1$ является неиспользуемым и его можно рассматривать как неопределенное состояние.

Согласно табл. 3 после минимизации получаем:

$$J_A = QE + P\overline{E}; \qquad K_A = \overline{Q}E + \overline{P}\,\overline{E}.$$

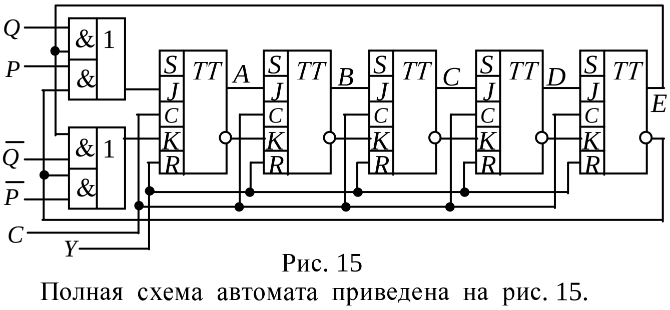


Рис. 15

Полная схема автомата приведена на рис. 15.

Подобным образом табличный метод можно использовать при разработке практически любого многофункционального автомата.

Упражнения

1. Пусть на рис. 15 $P = Q = 0$. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре после двух сдвиговых импульсов, если исходным является число:

(ЭТО) 10111 ? (221) 00111 ? (НАХ) 10000 ?

2. Пусть на рис. 15 $P = 1$, $Q = 0$. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре после одного импульса сдвига, если исходным является число:

(983) 01101 ? (ОДИ) 00110 ? (НАШ) 10110 ?

3. Пусть на рис. 15 $P = 1$, $Q = 0$. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре после трех импульсов сдвига, если исходным является число:

(ПВК) 00001 ? (ЭХ7) 10000 ? (ПИМ) 11010 ?

4. Схема на рис. 15 построена в предположении, что состояние $P = Q = 1$ является неиспользуемым. Пусть теперь оно будет используемым. Запишем в регистр число 00100. Какое число (в десятичной системе) будет в регистре, если на сдвиговый вход C подать:

(ХОН) 1 импульс? (ЦИФ) 3 импульса?
(ЦАО) 2 импульса? (ЕМ2) 4 импульса?

5. На рис. 15 три варианта работы регистра представлены двумя управляющими сигналами P и Q. Заменим их тремя сигналами X, Y, Z следующим образом:

1) если $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, то регистр разомкнут;
2) если $X = 0$, $Y = 1$, $Z = 0$, то регистр замкнут;
3) если $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$, то регистр является кольцом Реженера;
4) все остальные пять комбинаций входных сигналов, т. е. 000, 011, 101, 110, 111, являются неиспользуемыми.

Постройте таблицу для нахождения функций J_A и K_A, расположив переменные в последовательности X, Y, Z, E.

(ДУЗ). Сколько неопределенных состояний в левой части таблицы?

(НАЧ). Укажите состояния (в десятичной системе), на которых в таблице $J_A = 1$.

(ШИЙ). Укажите состояния (в десятичной системе), на которых в таблице $K_A = 1$.

Чтобы найти минимальные ДНФ функций J_A и K_A, их необходимо доопределить. Укажите наборы (в десятичной системе) значений переменных X, Y, Z, E, на которых:

(ЛБК) функция J_A доопределена единицами?
(ЖАЛ) функция J_A доопределена нулями?
(ОКМ) функция K_A доопределена единицами?
(Б59) функция K_A доопределена нулями?

Найдите минимальную ДНФ (порядок букв X,Y,Z,E):
(ЛВ.ВИ) функции J_A; (ЦТ.ВИ) функции K_A.

5.10. Основная модель конечного автомата

Мы рассмотрели несколько примеров конечных автоматов. Полученных при этом представлений вполне достаточно для того, чтобы перейти к некоторым теоретическим обобщениям. Существует очень много различных автоматов дискретного действия. Среди них простейшие счетчики, использующиеся, например, в любительской фотопечати для формирования выдержек времени. Среди них и такие сложные схемы, как программно-управляемые ЭВМ. Автоматы отличаются один от другого сложностью, выполняемыми функциями, назначением. Но всех их объединяет одно – они перерабатывают (преобразуют) информацию. Это значит, что всякий автомат имеет вход x, на который подается исходная информация, и выход y, куда поступает информация после обработки. Кроме того, автомат может иметь память, например, в виде некоторого набора триггеров. Под действием синхроимпульсов триггеры переходят из одного состояния в другое. Закон, по которому триггеры меняют свои состояния, называют **функцией переходов** [7; 39]:

$$q(t) = f\,[q\,(t-1),\ x(t)], \qquad (1)$$

где t – дискретное время (t = 0, 1, 2, …), представляющее собой моменты тактовых импульсов, совпадающие, например, с отрицательным фронтом;

$q(t)$ – состояние автомата (т. е. состояние его триггеров), зависящее от дискретного времени t;

$q(t–1)$ – состояние автомата в предыдущий такт;

$x(t)$ – состояние входного сигнала в момент времени t.

Закон, по которому изменяется состояние выхода, называют функцией выходов:

$$y\,(t) = \varphi\,[q\,(t-1), x\,(t)]. \qquad (2)$$

Заметим, что в формулах (1) и (2) выражения, записанные в квадратных скобках, совпадают, т. е. функции $q(t)$ и $y\,(t)$ зависят от одних и тех же переменных.

Обычно в автоматах дискретного действия информация представляется в двоичном коде. При этом входные сигналы могут поступать в виде n-разрядных двоичных чисел (n = 1, 2, 3, …) одновременно по n двоичным входам. Всего существует 2^n таких чисел. В связи с этим говорят, что множество X, насчитывающее $N \le 2^n$ двоичных чисел, образует **входной алфавит**:

$$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_N\}, \qquad (3)$$

где x_i – i-я буква входного алфавита (i = 1, 2, 3, …, N).

Точно так же можно говорить о **выходном алфавите** и **алфавите внутренних состояний**. Если выходным является m-значное двоичное число, то выходной алфавит образует множество Y, содержащее $M \le 2^m$ чисел:

$$Y = \{y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_M\}, \qquad (4)$$

где y_j – j-я буква выходного алфавита (j = 1, 2, 3, …, M).

Алфавит состояний представляет собой множество Q, содержащее $K \le 2^k$ элементов, где k – число триггеров:

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, \ldots, q_K\},$$

где q_ε – ε-я буква выходного алфавита (ε = 1, 2, 3, …, K).

Таким образом, дискретный автомат A – это множество вида

$$A = \{X, Y, Q, q(t), y(t)\}, \qquad (5)$$

где X – множество букв входного алфавита;

Y – множество букв выходного алфавита;

Q – множество внутренних состояний;

$q(t)$ – функция переходов;

$y\,(t)$ – функция выходов.

Если три множества X, Y, Q являются конечными, то автомат, определяемый этими множествами, также является конечным. Все реально существующие устройства дискретного действия относятся к конечным автоматам.

Упражнения

1. Суммирующий пятиразрядный двоичный счетчик находится в состоянии 18 (двоичное 10010).

(636). В каком состоянии (в двоичном коде) счетчик находился в предыдущем такте?

(982). Найдите $|Q|$, если Q – множество возможных состояний счетчика.

(ПОМ). Найдите $|Y|$, если Y – выходной алфавит.

(331). Найдите $|Q|$ для 9-разрядного счетчика.

2. (004). Выходной алфавит содержит 800 букв. Определите число двоичных разрядов, необходимых для представления всех букв этого алфавита.

3. (ШТЗ). Автомат содержит шесть триггеров. В данный момент автомат находится в состоянии 45 (двоичное 101101). Под действием тактового импульса автомат меняет свое состояние. Сколько существует вариантов перехода автомата в другое состояние (не равное 45)?

4. (725). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) возможно ли равенство $M = N$ в формулах (3), (4)?

2) в формулах (1) и (2) выражения в квадратных скобках совпадают. Значит ли это, что $q(t) = y(t)$?

3) может ли быть пустым множество Y?

4) может ли множество Q содержать только один элемент?

5) возможно ли равенство $X=Y$ в формулах (3), (4)?

6) возможен ли автомат, у которого входной и выходной алфавиты совпадают?

7) возможен ли случай, когда автомат в такте $t + 1$ переходит в состояние q_1 и q_2 одновременно?

5. (С87). На вход автомата поступило число 18 (в пятизначном двоичном коде). Под действием тактового импульса это число автомат преобразует в семизначное выходное двоичное число. Сколько возможно различных результатов преобразования?

5.11. Автомат Мили

В предыдущем подразделе показано, что общей математической моделью дискретного автомата является множество (5), в котором функции переходов и выходов имеют вид (1) и (2). Рассмотрим формулу (2). Из нее видно, что выходной сигнал автомата зависит одновременно от внутреннего состояния автомата и от состояния входов. Такой автомат принято называть автоматом Мили [6; 7; 18; 43; 56]. Общая схема автомата Мили приведена на рис. 16, где обозначено:

x_t – вход автомата. На него в момент времени t поступает n-значное двоичное число параллельно по n двоичным физическим входам в соответствии с формулой (3);

Q – множество триггеров, образующих k-разрядный триггерный регистр;

q – k-разрядное двоичное число, снимаемое с выходов триггерного регистра Q;

y_t – выход автомата. В момент времени t на выход поступает m-разрядное двоичное число согласно (4).

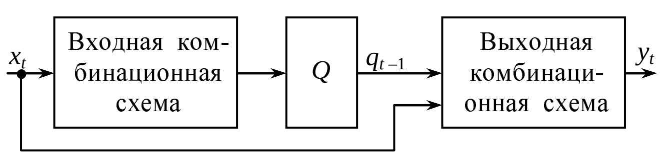


Рис. 16

Входная комбинационная схема обеспечивает преобразование числа x и перепись результата преобразования в регистр Q. Выходная комбинационная схема преобразует число, находящееся в регистре Q, и формирует выходные сигналы по m физическим выходам y_t. Булевы функции, описывающие состояния выходов y_t, зависят от логических аргументов, представленных триггерами регистра Q, и от переменных x_t, значения которых определяются цифрами входного n-разрядного числа.

Примером простейшего автомата Мили может служить схема последовательного сумматора для арифметического сложения двух двоичных чисел a и b с инвертированием результата (рис.17). В этой схеме имеется лишь один триггер Q, следовательно, множество внутренних состояний автомата содержит два элемента: 0 и 1.

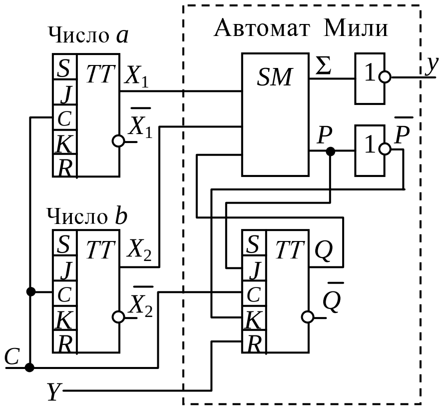


Рис. 17

Выход представлен одноразрядным двоичным числом. На вход поступают двухразрядные двоичные числа с выходов триггеров X_1 и X_2, являющихся элементами внешней схемы (по отношению к автомату Мили). При помощи триггеров на вход автомата Мили поразрядно подаются двоичные цифры чисел a и b. Числа поступают младшими разрядами вперед.

После установки автомата в исходное состояние (по входу Y) имеем: $Q = 0$, т. е. сигнала переноса нет. Пусть $a = 011011$, $b = 000111$. До подачи первого тактового импульса $X_1 = X_2 = 1$, следовательно, $\Sigma = 0$, $y = 1$. При этом $P = 1$ (P – перенос), но триггер Q пока находится в нулевом состоянии. После подачи первого тактового импульса $X_1 = X_2 = 1$, $Q = 1$, $\Sigma = 1$, $y = 0$, $P = 1$. После второго – $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $Q = 1$, $\Sigma = 0$, $y = 1$, $P = 1$ и т. д.

По схеме (рис. 17) видно, что если записать булево выражение для выхода y, то в этом выражении окажутся и входные переменные X_1 и X_2, и переменная Q:

$$y = \overline{X_1X_2Q + X_1\overline{X}_2\overline{Q} + \overline{X}_1\overline{X}_2Q + \overline{X}_1X_2\overline{Q}} =$$
$$= X_1X_2\overline{Q} + X_1\overline{X}_2Q + \overline{X}_1X_2Q + \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{Q},$$

т. е. функция y зависит и от входных сигналов, и от внутренних состояний, что и доказывает принадлежность схемы к типу автоматов Мили.

Упражнения

1. (ШОВ)! Пусть до подачи тактового импульса автомат (рис. 17) находился в состоянии: $Q = 0$, $X_1 = X_2 = 1$. Укажите значения (0 или 1) переменных Σ, P, Q до тактового импульса и значения тех же переменных после тактового импульса, если после тактового импульса $X_1 = X_2 = 1$.

2. (081). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (рис. 17):

1) могут ли быть различными по длине числа a и b, поразрядно подаваемые на вход автомата?

2) является ли многотактным автомат на рис. 17?

3) является ли информационным вход C на рис. 17?

4) если на рис. 17 удалить выходной инвертор, то $y = \Sigma$. Является ли получившаяся схема автоматом Мили?

5) пусть $R = 0$ (триггер X_1). Верно ли, что при этом схема по-прежнему является автоматом Мили?

6) поменяем местами провода, ведущие к входам J и K триггера Q. Останется ли схема автоматом Мили?

5.12. Автомат Мура

Общей математической моделью автомата Мура, как и автомата Мили, является множество (5). Отличаются же автоматы друг от друга только элементом $y(t)$. Если для автомата Мили выражение $y(t)$ имеет вид:

$$y(t) = \varphi[q(t-1), x(t)],$$

то в случае автомата Мура $y(t) = \varphi[q(t-1)]$, т. е. функция выходов $y(t)$ автомата Мура определяется только его внутренними состояниями.

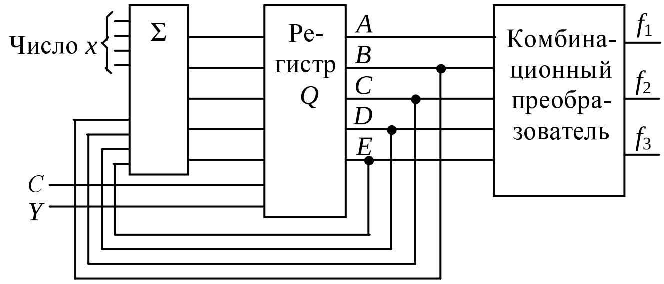


Рис. 18

Примером автомата Мура может служить схема на рис. 18. Знаком Σ на ней обозначен комбинационный сумматор, выполняющий операцию арифметического сложения двух четырехразрядных чисел. Пять выходов сумматора присоединены к входам JK-триггеров пятиразрядного регистра Q (пятый выход сумматора – это перенос в старший разряд). На первый вход сумматора подаются числа x. Второй вход подключен к выходам триггеров B, C, D, E, которым соответствуют четыре младших разряда числа, находящегося в регистре Q.

Пусть регистр Q по входу Y установлен в нулевое состояние. Подадим на вход автомата число x_1. После тактового импульса, поданного на вход C, число x_1 перепишется в регистр Q. Подадим на вход автомата число x_2. На выходе сумматора получим сумму $x_1 + x_2$. Под действием второго импульса эта сумма перепишется в регистр Q. Если на вход автомата подать число x_3, то после третьего импульса в регистре Q окажется число $|x_1 + x_2 + x_3|$ (по модулю 32), после четвертого – $|x_1 + x_2 + x_3| + x_4$ и т. д.

К выходам регистра подключен комбинационный преобразователь с тремя двоичными выходами:

$$f_1 = 1, \text{ если } q \le 18;$$
$$f_2 = 1, \text{ если } 8 \le q \le 23;$$
$$f_3 = 1, \text{ если } 12 \le q \le 27,$$

где q – число, находящееся в регистре Q.

В минимальных формах этих функций нет переменных, обозначающих входные сигналы. Состояния выходов определяются только внутренними состояниями автомата, следовательно, данная схема есть автомат Мура.

Упражнения

1. (ЛКУ). Автомат (рис. 18) находится в состоянии 10001. На вход автомата подано число 0011. В каком состоянии (в двоичном коде) окажется регистр Q после одного импульса, поданного на вход C автомата?

2. (РЕО). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (рис. 18):

1) является ли синхронным автомат Мура (рис. 18)?

2) удалим из схемы комбинационный преобразователь, а выходы подключим к каким-либо выходам регистра Q. Останется ли схема автоматом Мура?

3) останется ли схема автоматом Мура, если ее выходы f_1, f_2, f_3 переключить на выходы сумматора?

4) останется ли схема автоматом Мура, если из нее удалить регистр Q?

5) останется ли схема автоматом Мура, если из регистра Q удалить триггер A, а соответствующий выход сумматора присоединить непосредственно к освободившемуся входу комбинационного преобразователя?

6) является ли детерминированным автомат Мура?

КОМБИНАТОРИКА

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика – это раздел дискретной математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных элементов (объектов) с учетом тех или иных условий. Как самостоятельная ветвь математики комбинаторика возникла в XVII веке в связи с развитием теории вероятностей, хотя отдельные комбинаторные задачи были сформулированы еще в древности. Название этому математическому направлению дал немецкий языковед, философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), опубликовавший в 1666 г. свою работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появился термин «комбинаторный» [42, с. 140].

Исходным в комбинаторике является интуитивно ясное понятие **выборки** (синонимы – «расстановки» [9], «комбинации» [35], «соединения» [34]), как набора m элементов из некоторого исходного множества, причем наборы могут быть как упорядоченными, так и неупорядоченными, с повторениями элементов и без повторений.

В настоящее время комбинаторика представляет собой один из важнейших разделов современной дискретной математики, имеющий многочисленные применения на практике. Следовательно, каждый грамотный человек должен иметь достаточно четкое представление об основных (исходных) понятиях комбинаторики, таких, как размещения, перестановки, сочетания, разбиения и некоторых других, и уметь ими пользоваться хотя бы в несложных практических ситуациях. С этой целью и включен раздел комбинаторики в данный курс дискретной математики. Он рассчитан на тех, кто впервые знакомится с комбинаторными задачами, поэтому теоретические сведения изложены в простой и доступной форме. Для обеспечения необходимой глубины изучения материала в каждый подраздел включен ряд упражнений (всего их около 370). Они должны быть выполнены все, причем полностью самостоятельно – лишь в этом случае комбинаторное мышление учащегося достигнет определенного уровня развития. Чтобы обеспечить максимально возможную степень самостоятельности, ни к одному из упражнений ответы не указаны. Вместо них, как и в предыдущих темах пособия, приведены коды, при помощи которых, используя устройство «Символ» либо его компьютерный аналог, каждый учащийся может определить правильность своих ответов.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Понятие факториала

Факториал – это функция, определенная на множестве целых положительных чисел и представляющая собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, где каждое число встречается точно один раз. Название функции произошло от английского слова *factor*, что в переводе обозначает «сомножитель». Обозначается факториал

$$n! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}(n-1)\,n.$$

Переменная n может принимать любые значения из натурального ряда, но не всякое целое число может быть значением функции $n!$. Обозначим:

$$f = n!$$

Если $n = 1$, то $f = 1! = 1$.
Если $n = 2$, то $f = 2! = 1{\cdot}2 = 2$.
Если $n = 3$, то $f = 3! = 1{\cdot}2{\cdot}3 = 6$.
Если $n = 4$, то $f = 4! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$.
Если $n = 5$, то $f = 5! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 = 120$.
Если $n = 6$, то $f = 6! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 = 720$.
Если $n = 7$, то $f = 7! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}7 = 5040$.
Если $n = 8$, то $f = 8! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}7{\cdot}8 = 40320$.
Если $n = 9$, то $f = 9! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9 = 362880$.
Если $n = 10$, то $f = 10! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}9{\cdot}10 = 3628800$ и т. д.

Отсюда следует, что, например, число 100 не может быть значением функции $n!$, поскольку его невозможно представить в виде произведения чисел натурального ряда, начинающегося с единицы и не содержащего повторяющихся чисел.

Функцию $n!$ можно записать в виде $f = n! = (n-1)!\,n$.

При $n = 1$ имеем: $f = 1! = (1-1)!{\cdot}1 = 0!{\cdot}1 = 1!$, откуда следует, что $0! = 1$.

Получилось очень интересное равенство. Число нуль натуральным не является, и если бы даже оно считалось натуральным, то естественнее было бы принять $0! = 0$. Но в этом случае мы имели бы функцию, тождественно равную нулю при всех значениях n. Поэтому величину $0!$ приходится принимать равной единице, поскольку принять ее равной нулю нельзя.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Записать со знаком факториала:

$$1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6.$$

Это произведение чисел натурального ряда, но число 4 в нем встречается два раза, следовательно:

$$1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 = 4{\cdot}6!$$

Пример 2. Записать с использованием знака факториала: $1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10$.

В этом ряду отсутствует цифра 6. Умножим и разделим на 6 все выражение, тогда получим:

$$1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}8{\cdot}9{\cdot}10 = \frac{10!}{6}.$$

Пример 3. Записать со знаком факториала: $1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8$.

Здесь пропущены два числа: 2 и 4. Умножим и разделим на 2 и 4 все выражение, тогда получим:

$$1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7{\cdot}8 = 7!$$

Пример 4. Упростить:

$$N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-2)}.$$

Представим выражение в виде

$$N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k-1)k + 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-2)}.$$

В числителе вынесем за скобки $1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}\ldots{\cdot}(k-2)$:

$$N = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-2)\left[(k-1)k + (k-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-2)}.$$

После сокращения получаем:

$$N = (k-1)k + k - 1 = k^2 - 1.$$

Пример 5. Упростить:

$$K = \frac{n!^2 + (n-1)!\,(n-2)!}{(n-2)!^2}.$$

Запишем выражение в развернутом виде и в числителе вынесем за скобки $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)$.

Сократим его со знаменателем, тогда получим:
$$K = n^4 - 2n^3 + n^2 + n - 1.$$

Упражнения

1. Запишите следующие произведения с использованием знака факториала:

(796) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$; (717) $1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$;
(Т72) $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k$; (2П2) $1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$;
(8РЕ) $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-4)(n-3)$; (378) $1\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot23\cdot24$;
(2Я.РЕ) $1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$; (АХО)$1\cdot2\cdot3\cdot6\ldots18\cdot20$;
(485) $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)$; (ДЕН) $1\cdot2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot15$;
(АМИ) $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)(n+1)n$; (Р31) $3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8$.

2. Упростите и результат запишите с использованием знака факториала:

(ОЯС) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$;

(2Р4) $\dfrac{(n-2)!\,-\,2(n-1)!}{3-2n}$;

(ТЛ2) $\dfrac{1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(k-1)\,k^2}{6k}$;

(257) $\dfrac{(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k)^2}{[1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)]\cdot k^2}$;

(878) $\dfrac{[1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)]^2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)\,(k-1)^2}$;

(УТФ) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)(k+1)}{k+1}$.

3. Упростите:

(ЕУ5) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)(k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k(k+1)}$;

(57С) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n+1)}$;

(ЕЯ6) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$;

(АДО) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)}$;

(833) $\dfrac{(n-2)!+(n-1)!+n!}{(n-1)!}$.

4. Вычислите при $n = 31$:

(2ДО) $\dfrac{3(n-1)!+4n!}{2(3+4n)(n-2)!}$; (982) $\dfrac{n!\,(n-1)!\,(n+1)!\,n}{n!^3}$.

5. Найдите значение функции при $n = 2$:

(350) $f = (n-2)!(n-1)n$; (Т5К) $f = (n-3)!(n-2)(n-1)n$.

6. (ТОТ). Какими цифрами не может оканчиваться число $n!$?

7. (ЯШТ). Какими цифрами может оканчиваться число $n!$ при $n > 3$?

1.2. Правило произведения в комбинаторике

Если один элемент множества A может быть выбран n способами, а после него второй элемент – m способами, то выбор того и другого элемента в **заданном порядке** может быть осуществлен N способами [12, с. 250], где
$$N = nm.$$

В общем случае если один элемент множества A_1 можно выбрать $|A_1|$ способами, элемент множества A_2 – $|A_2|$ способами и так далее до множества A_n, один элемент которого можно выбрать $|A_n|$ способами, то выбрать n элементов в заданном порядке можно N способами, где
$$N = |A_1|\cdot|A_2|\cdot\ldots\cdot|A_n|.$$

Пример 1. Пусть $A = \{1,2,3,4,5\}$. Один элемент из этого множества можно выбрать $n = 5$ способами. Останется четыре элемента. Один элемент из них можно выбрать $m = 4$ способами. Следовательно, выбор двух элементов возможен $5\cdot4 = 20$ способами, список которых имеет вид: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Заметим, что в каждой выборке цифры разные.

Пример 2. В урне пять шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимают один шар и записывают его номер. Шар возвращают в урну и наугад снова выбирают один шар и номер его записывают справа от первой цифры. Получится двухразрядное число. Сколько возможно таких чисел?

На первом месте может стоять одна из пяти цифр, т. е. $n = 5$. На втором месте – также одна из пяти цифр. Следовательно, $m = 5$. Тогда искомое число $nm = 5\cdot5 = 25$. Среди всех этих 25 выборок (в отличие от предыдущего примера) существуют пары с одинаковыми цифрами.

Пример 3. Вернемся к примеру 2. Пусть шары извлекают три раза. Сколько получится трехзначных чисел?

На первом месте может стоять одна из пяти цифр, на втором – также одна из пяти, и на третьем – одна из пяти. Следовательно, число выборок равно $5\cdot5\cdot5 = 125$.

Пример 4. Сколько существует трехразрядных шестеричных чисел?

В шестеричной системе счисления используются цифры 0,1,2,3,4,5. Первую цифру можно выбрать пятью способами, поскольку нуль не используем, так как число, начинающееся с нуля, не является трехразрядным. Вторая цифра может быть любой, в том числе и нулем, следовательно, ее можно выбрать шестью способами. То же самое относится и к цифре младшего разряда. Искомое число равно $5\cdot6\cdot6 = 180$.

Пример 5. Сколько существует пятизначных симметричных восьмеричных чисел, то есть таких чисел, которые одинаково читаются как слева направо, так и справа налево, например: 23032, 55655, 10001 и т.д.?

Первую цифру (старшего разряда) можно выбрать 7 способами, так как с нуля пятизначные числа начинаться не могут. Вторую цифру можно выбрать 8 способами, поскольку теперь можно использовать и нуль. Для выбора третьей цифры также существует 8 вариантов. Цифры двух младших разрядов не имеют вариантов для выбора. Они должны повторять первые две цифры. Например, если выбраны цифры 372, то следующей может быть только цифра 7, а после нее – только цифра 3. Таким образом, всего существует $7\cdot8\cdot8 = 448$ искомых чисел.

Упражнения

1. (ДЕЗ). Имеется 10 карточек. На каждой записана гласная буква. Выбирают наугад карточку и к ней справа приставляют вторую, наугад выбранную после первой. Сколько возможно таких двухбуквенных слов?

2. (ТР2). Сколько трехразрядных чисел можно образовать из цифр 3, 4, 5, 6?

3. (АКИ). Сколько семизначных чисел можно образовать из цифр 3, 7, 9?

4. (АРМ). Из пятизначных десятичных чисел удалили все числа, в которые входит хотя бы одна из цифр 0, 3, 7, 8, 9. Сколько чисел осталось?

5. (КЭФ)! Город A связан с городом B шестью дорогами. Сколькими способами житель города A может посетить город B, если возврат возможен по той же дороге, что и поездка в город B? Сколькими способами житель города B может посетить город A, если поездка туда и обратно осуществляется по разным дорогам?

6. (УФ5). Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна из цифр не повторяется в числе более одного раза?

7. (927). Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если цифра младшего разряда каждого числа является четной, а старшего – нечетной?

8. (296). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, которые делятся на 5?

9. (ХТБ). Сколько существует пятиразрядных симметричных десятичных чисел (которые одинаково читаются как справа налево, так и слева направо, например, 39793; 68286)?

10. (УМС). Старший разряд двузначного числа некоторой системы счисления может содержать одну цифру из 7, младший разряд – одну цифру из x. Всего таких чисел существует 84. Найдите x (десятичное число).

11. (ААТ). Сколько существует трехразрядных семеричных чисел, оканчивающихся нечетной цифрой?

12. (ОРМ)! Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, у которых:

– в старшем разряде нет ни одной из цифр 1,2,3,4,5;
– в среднем разряде нет цифр 2,5,7;
– в младшем разряде нет четных цифр и нет цифры 1?

1.3. Правило суммы в комбинаторике

Пусть даны множества P_1 и P_2. Выясним, сколько элементов содержится во множестве $P_1 \bigcup P_2$. Эта задача не так примитивна, как может показаться на первый взгляд. Она проста только при $P_1 \bigcap P_2 = \varnothing$. В этом случае

$$|P_1 \bigcup P_2| = |P_1| + |P_2|,$$

т. е. если элемент множества P_1 может быть выбран $|P_1|$ способами, а элемент множества P_2 – $|P_2|$ способами, то выбор «либо элемент множества P_1, либо элемент множества P_2» может быть осуществлен $|P_1| + |P_2|$ способами. Это и есть **правило суммы** [12, с. 250].

Пример 1. В тарелке лежат 6 яблок и 4 груши. Сколькими способами можно выбрать один плод [9, с. 21]?

Если P_1 – множество яблок, P_2 – множество груш, то:

$$|P_1 \bigcup P_2| = |P_1| + |P_2| = 6 + 4 = 10.$$

Рассмотрим случай, когда $P_1 \bigcap P_2 \neq \varnothing$. Правило суммы при этом имеет вид:

$$|P_1 \bigcup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \bigcap P_2|.$$

В [35, с. 140] эту формулу называют формулой включений и исключений, а в [56, с. 32] используется термин «принцип включения-исключения». В [42, с. 140] ее называют частным случаем формулы перекрытий.

Пример 2. Пусть даны множества:

$$P_1 = \{1, 2, 4, 7, 9\};$$
$$P_2 = \{1, 4, 5, 6, 8\}.$$

Сколько элементов во множестве $P_1 \bigcup P_2$?

По правилу суммы $|P_1 \bigcup P_2| = 5 + 5 - 2 = 8$.

В случае трех множеств правило суммы имеет вид

$$|P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3| = |P_1 \bigcup P_2| + |P_3| - |(P_1 \bigcup P_2) \bigcap P_3| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \bigcap P_2| + |P_3| - |P_1 \bigcap P_3 \bigcup P_2 \bigcap P_3| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \bigcap P_2| + |P_3| - (|P_1 \bigcap P_3| + |P_2 \bigcap P_3| - |P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_3|) = |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \bigcap P_2| - |P_1 \bigcap P_3| - |P_2 \bigcap P_3| + |P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_3|.$$

Для четырех множеств получаем аналогично:

$$|P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3 \bigcup P_4| = |P_1| + |P_2| + |P_3| + |P_4| - |P_1 \bigcap P_2| - |P_1 \bigcap P_3| - |P_1 \bigcap P_4| - |P_2 \bigcap P_3| - |P_2 \bigcap P_4| - |P_3 \bigcap P_4| + |P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_3| + |P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_4| + |P_1 \bigcap P_3 \bigcap P_4| + |P_2 \bigcap P_3 \bigcap P_4| - |P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_3 \bigcap P_4|.$$

В случае n множеств сумма имеет вид

$$|P_1 \bigcup P_2 \bigcup \ldots \bigcup P_n| = |P_1| + |P_2| + \ldots + |P_n| - (|P_1 \bigcap P_2| + |P_1 \bigcap P_3| + \ldots + |P_{n-1} \bigcap P_n|) + (|P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_3| + |P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_4| + \ldots + |P_{n-2} \bigcap P_{n-1} \bigcap P_n|) - \ldots + (-1)^{n-1}|P_1 \bigcap P_2 \bigcap \ldots \bigcap P_n|.$$

Пример 3. Из 100 студентов английский язык знают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 человека. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка [22, с. 15]?

Обозначим: $|P_1|$ – число студентов, знающих английский язык; $|P_2|$ – знающих немецкий язык; $|P_3|$ – знающих французский язык. $|P_1| = 28$; $|P_2| = 30$; $|P_3| = 42$.

Согласно условию:

$|P_1 \bigcap P_2| = 8$ – число студентов, знающих два языка – английский и немецкий;

$|P_1 \bigcap P_3| = 10$ – число студентов, знающих два языка – английский и французский;

$|P_2 \bigcap P_3| = 5$ – число студентов, знающих два языка – немецкий и французский;

$|P_1 \bigcap P_2 \bigcap P_3| = 3$ – число студентов, знающих три языка.

По правилу суммы:

$$|P_1 \bigcup P_2 \bigcup P_3| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80.$$

Таким образом, знают хотя бы один иностранный язык 80 студентов, следовательно, ни одного иностранного языка не знают 20 человек.

Упражнения

1. (ОМН). 30 учащихся сдавали экзамен по физике и химии. По две отличные оценки получили 9 человек. На «отлично» физику сдали 12 человек, химию – 16. Сколько учащихся не получили ни одной отличной оценки?

2. (МОК). 12 туристов взяли с собой по коробке спичек, 19 туристов – по зажигалке. Ни спичек, ни зажигалок не взяли 6 человек. Всего в отряде 27 человек. Сколько человек взяли с собой и спички и зажигалки?

3. (ОМТ). Из 33 учащихся физический кружок посещают 11 человек. Из них 4 человека посещают еще и химический кружок. Ни физический, ни химический кружок не посещают 8 человек. Сколько человек посещают только химический кружок?

4. (67С). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) $|A \bigcup B| = |A| + |B|$. Верно ли, что $A \bigcap B \neq \varnothing$?
2) $|A \bigcup B| < |A| + |B|$. Верно ли, что $A \bigcap B = \varnothing$?
3) $|A \bigcup B| = |A \bigcap B|$. Верно ли, что $|A \bigcup B| = |A| + |B|$?
4) $A = B$. Верно ли, что $|A \bigcap B| = B$?
5) $A \subset B$. Верно ли, что $A \bigcap B = \varnothing$?
6) $A \supset B$. Верно ли, что $|A \bigcup B| = |A| + |B|$?
7) $A \subset B$. Верно ли, что $|A \bigcup B| = |B|$?

1.4. Правило суммы и диаграммы Венна

С помощью диаграммы Венна очень удобно иллюстрировать правило сложения. На рис. 1 приведена диаграмма для множеств:

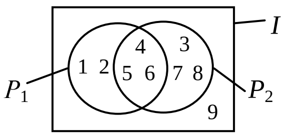


Рис. 1

$P_1 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$;
$P_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
$I = \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Непосредственно по диаграмме видно, что число элементов множества $P_1 \cup P_2$ равно:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1 \cap \overline{P_2}| + |P_1 \cap P_2| + |\overline{P_1} \cap P_2| .$$

Прибавим и вычтем число $|P_1 \cap P_2|$. Выражение от этого не изменится:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1 \cap \overline{P_2}| + |P_1 \cap P_2| + |\overline{P_1} \cap P_2| + |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_2|. \quad (1)$$

Из диаграммы (рис. 1) видно, что

$$|P_1 \cap \overline{P_2}| + |P_1 \cap P_2| = |P_1|; \quad |\overline{P_1} \cap P_2| + |P_1 \cap P_2| = |P_2|. \quad (2)$$

Подставим выражения (2) в (1), тогда получим:

$$|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|.$$

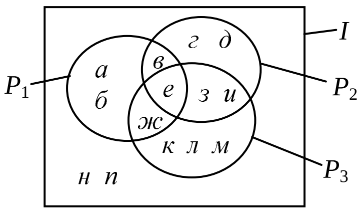


Рис. 2

Аналогичным образом, используя диаграмму Венна, можно вывести правило сложения для трех множеств. При большем числе множеств следует использовать карту Вейча.

Упражнения

1. Укажите элементы:

(ТПО) множества $\overline{P_2}$ (рис. 1);

(ЯНК) множества $P_1 \cup P_1 \cap \overline{P_2}$ (рис. 1);

(ЭМТ) множества $\overline{P_1 \cap P_2}$ (рис. 1).

2. По рис. 2 определите число элементов множества:

(ЛБК) $P_1 \cap P_2 \cup P_3$; (ОХН) $(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cap I$;

(ММО) $\overline{P_1 \cap P_2 \cap P_3}$; (ЛЕЛ) $P_1 \cap \overline{P_2} \cup \overline{P_1} \cap P_3$.

3. (ЦАП). Укажите все элементы (рис. 2) множества $P_1 \cup P_2$, если элементы *в* и *е* из множества P_2 удалены (при вводе ответа буквы упорядочить по алфавиту).

4. (ЛУР). Укажите элементы (рис. 2) множества $\overline{P_2} \cap P_3$, если из множества P_2 удален элемент *е*, а из множества P_3 удален элемент *и*.

1.5. Перестановки без повторений

Постановка задачи. Пусть дано множество вида

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Затем переставим местами некоторые элементы. Получим новую последовательность. Снова переставим некоторые элементы и т. д. Сколько существует таких последовательностей (различных!)?

Указанные последовательности называются **перестановками без повторений**. Число всех перестановок обозначается P_n, где n – число, показывающее, сколько различных элементов участвует в перестановках.

Формулу для числа перестановок без повторений можно вывести на основе правила произведения. Первый из n элементов можно выбрать n способами. Останется n–1 элементов. Следовательно, второй элемент можно выбрать n–1 способами, третий – n–2 способами и так далее до последнего элемента, который выбирается единственным способом. Таким образом

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!. \quad (3)$$

Пример 1. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих повторяющихся цифр, если используются только цифры 3, 5, 9?

В данном случае $n = 3$, следовательно, искомое число равно $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Все эти перестановки имеют вид:

359, 395, 539, 593, 953, 935.

Пример 2. Сколько различных слов можно составить из букв слова «километр», если под словом понимать всякую последовательность из восьми букв?

В заданном слове все буквы разные, следовательно, искомое число равно:

$$8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320.$$

Упражнения

1. (2РЕ). Сколько различных чисел можно образовать, переставляя цифры 3, 4, 5, 7, 9?

2. (НВИ). Известно, что операция арифметического сложения коммутативна. Например, выражение $a+b+c+d$ можно записать иначе: $b+c+a+d$ либо $c+a+d+b$ и т. д. Сколько существует способов записи этого выражения?

3. (ДИХ). Составляют буквенно-цифровой код: записывают в некотором порядке четыре буквы *a*, *b*, *c*, *d*, затем справа приписывают три цифры 1, 2, 3, также в некотором порядке, например, *bcda*132, *abcd*123, и т.д. Сколько существует таких кодов?

4. (РАЗ). Буквенно-цифровой код составляют следующим образом. Сначала записывают две буквы *a* и *b* в каком-либо порядке, затем – три цифры 1, 2, 3, также в определенном порядке, затем – четыре буквы *a*,*b*,*c*,*d* в некоторой последовательности. Например: *ab*132*dbac*, *ba*321*adbc* и т. д. Сколько всего существует таких кодов?

5. (МЯЙ). Сколько существует 6-значных чисел шестеричной системы счисления, если каждая шестеричная цифра входит в число точно один раз (числа, начинающиеся с нуля, не являются шестизначными)?

6. (ТУК). Сколько 10-значных чисел можно составить из десятичных цифр, если каждая цифра входит в число один раз и каждое число начинается с последовательности 731 и оканчивается последовательностью 05?

7. (ДОО). Известно, что n человек могут разместиться в очереди 3628800 способами. Найдите n.

8. (ТВК). Получена шифровка вида

02, 30, 16, 04, 07, 18, 30, 17, 30, 09, 09, …,

о которой известно только, что двухразрядные десятичные числа представляют собой номера 01, 02, …, 33 букв русского алфавита. Некто решил расшифровать сообщение следующим образом. Нумерует буквы алфавита в некотором порядке, затем вместо чисел подставляет буквы согласно принятому соответствию. Читает запись. Если получилась бессмыслица, буквы алфавита нумерует в другом порядке и снова читает запись. Сколько операций перекодирования букв алфавита потребуется выполнить в самом неблагоприятном случае? (Ответ дать с использованием знака факториала, например, 16!).

1.6. Перестановки с повторениями

Постановка задачи. Даны n_1 элементов вида a (неразличимых между собой), n_2 элементов вида b, …, n_k элементов вида x. Из всех этих элементов образуют

n-элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы, т. е.

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Одна из последовательностей имеет вид

$$\underbrace{a\,a\,a\ldots a}_{n_1}\,\underbrace{b\,b\,b\ldots b}_{n_2}\,\underbrace{c\,c\,c\ldots c}_{n_3}\ldots\underbrace{x\,x\,x\ldots x}_{n_k}.$$

Ее элементы можно переставлять любым способом. Сколько существует таких перестановок?

Число перестановок из n элементов равно $n!$, если все n элементов различны. Однако в данном случае $n_1!$ перестановок неразличимы. Неразличимы и $n_2!$ перестановок и т. д. Следовательно

$$\dot{P}_n = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}, \qquad (4)$$

где точка над знаком P_n говорит о том, что в перестановках есть повторяющиеся элементы.

Пример 1. Сколько существует четырехбуквенных слов, в которых три буквы «а» и одна буква «в»?

Здесь $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n = 4$. Искомое число равно

$$\dot{P}_4 = \frac{4!}{3!\; 1!} = 4.$$

Это «слова» *ааав*, *аава*, *авaa*, *вааа*.

Пример 2. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «ротор»?

В слове «ротор» 5 букв. Из них две буквы «р», две буквы «о», одна буква «т». Следовательно

$$n = 5,\quad n_1 = 2,\quad n_2 = 2,\quad n_3 = 1.$$

Искомое число различных слов равно

$$\dot{P}_5 = \frac{5!}{2!\; 2!\; 1!} = 30,$$

среди которых такие «слова», как *ррoот*, *тоорр*, *ортро*, *оортр* и т. д.

В формуле (4) k – это число различных элементов. Если повторяющихся элементов нет, то $n = k$, так как $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, и тогда формула (4) превращается в формулу (3), т. е. выражение (3) – это частный случай более общей формулы (4).

Упражнения

1. (ЦАФ). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, в каждом из которых три цифры 4 и три цифры 5?

2. (ПИФ). Сколько чисел можно образовать, переставляя цифры 1, 2, 3, 5, если в каждом числе три единицы, одна двойка, две тройки и две пятерки?

3. (КМЕ). Сколько различных слов можно образовать путем перестановки букв в слове «территория»?

4. (УНЖ). В числе 3 двойки, 4 тройки, 2 четверки, 3 пятерки. Сколько чисел можно образовать, переставляя эти цифры, если каждое число начинается с последовательности 335 и оканчивается тремя двойками?

5. (Б52). На полке пять книг синего цвета, две – желтого и одна – зеленого. Сколькими способами их можно расставить на полке, если слева всегда стоят две книги синего цвета?

6. (ГАЗ). Сколько слов можно образовать, переставляя буквы слова «облако», если каждое слово начинается с согласной буквы?

7. (Я25). Сколько слов можно образовать, переставляя гласные буквы в слове «авиация» и оставляя на своих местах все согласные буквы?

8. (ПИК). Сколько возможно различных чисел при перестановке цифр числа 4152486813, если на место, занимаемое четной цифрой, нельзя ставить нечетную?

1.7. Размещения без повторений

Постановка задачи. Дано множество A, содержащее n элементов. Из них образуют упорядоченные последовательности длины m, в которых каждый элемент множества A встречается не более одного раза. Эти последовательности называют **размещениями без повторений.** Сколько существует таких последовательностей?

Заметим, что размещения могут отличаться одно от другого не только элементами, но и порядком записи элементов. Пусть

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \qquad (5)$$

Размещения длины 3, такие как 135 и 136, являются различными, поскольку отличаются одно от другого наборами цифр из множества A.

Размещения той же длины 356 и 365, хотя и состоят из одних и тех же элементов множества A, но отличаются одно от другого порядком записи цифр, поэтому также различны.

Сколько существует размещений длины 3 в случае множества (5)? Так как размещения – это упорядоченные последовательности, то для нахождения их количества можно воспользоваться правилом произведения. Первый элемент выбираем шестью способами. Останется пять элементов. Следовательно, для выбора второго элемента существует 5 способов, для третьего – 4. Таким образом, искомое число размещений равно: $6\cdot5\cdot4 = 120$.

В общем случае если множество содержит n элементов, а длина размещения равна m, то первый элемент можно выбрать n способами, второй – $n–1$ способами (поскольку один элемент множества A удален при первой выборке). Третий элемент можно выбрать $n - 2$ способами и так далее до элемента m, который можно выбрать $n - m + 1$ способами. По правилу произведения число всех размещений без повторений равно

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

где A_n^m – символ, обозначающий число размещений из n элементов по m без повторений.

Умножим и разделим полученное число на $(n–m)!$:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\;\ldots\;(n-m+1)\cdot(n-m)!}{(n-m)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\;\ldots\;(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\;\ldots\;3\cdot2\cdot1}{(n-m)!}.$$

Числитель этой дроби есть произведение натуральных чисел от 1 до n, следовательно,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (6)$$

Это окончательная формула для определения числа размещений из n элементов по m без повторений.

Пример 1. Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, если в каждом из них все цифры разные?

Первая цифра может выбираться из девяти цифр (а не из десяти, так как число, начинающееся с нуля, не является четырехразрядным), вторая – из девяти, третья – из восьми, четвертая – из семи. Следовательно, по правилу произведения искомое число N равно:

$$N = 9\cdot9\cdot8\cdot7 = 4536.$$

Найдем решение этой задачи с применением формулы (6). Пусть n – число всех элементов некоторого множества A, m – длина выборки (т. е. число ее элементов). Найдем число N размещений при условии, что существует один элемент, с которого не должно начинаться ни одно размещение. Очевидно, что число N можно записать в виде

$$N = A_n^m - A_{n-1}^{m-1}, \qquad (7)$$

где A_n^m – число всех m-элементных размещений вместе с теми, которые начинаются с отмеченного элемента;

A_{n-1}^{m-1} – число всех m-элементных размещений, начинающихся только с отмеченного элемента.

Запишем формулу (7) в виде

$$N = \frac{n!}{(n-m)!} - \frac{(n-1)!}{[n-1-(m-1)]!} = \frac{n(n-1)!}{(n-m)!} - \frac{(n-1)!}{(n-m)!}.$$

Вынесем за скобки дробь $\frac{(n-1)!}{(n-m)!}$, тогда получим:

$$N = \frac{(n-1)\cdot(n-1)!}{(n-m)!}. \qquad (8)$$

По условию примера имеем $n = 10$, $m = 3$, следовательно, искомое число согласно формуле (8) равно

$$N = \frac{(10-1)\cdot(10-1)!}{(10-4)!} = \frac{9\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 4536.$$

Пример 2. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих четных цифр и не содержащих одинаковых цифр?

Нечетные цифры – это 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно, $n = 5$, $m = 3$. По формуле (6) получаем:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 60.$$

Пример 3. Имеется 12 ролей. Четыре артиста могут играть любую роль, и всем им предлагается выбор. Сколькими способами можно распределить роли между ними?

Пронумеруем роли: 1, 2, 3, …, 9, A, B, C. Тогда задачу можно переформулировать: сколько существует четырехразрядных чисел, которые могут быть образованы из 12 цифр (без повторов)? Каждое четырехразрядное число будет соответствовать некоторому выбору ролей, если принять, что первому артисту ставится в соответствие первый разряд, второму – второй, третьему – третий и четвертому – четвертый. Согласно условию имеем $n = 12$, $m = 4$, тогда

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9\cdot10\cdot11\cdot12 = 11880.$$

Упражнения

1. (ИЗЯ). Сколько существует пятиразрядных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0,1,2,3 и в каждом нет повторяющихся цифр?

2. (510). Сколько четырехбуквенных последовательностей можно образовать из всех гласных букв русского алфавита, если в каждой последовательности повторяющихся букв нет? (В русском алфавите 10 гласных букв: а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я.)

3. (ПОК). Сколько существует двухразрядных чисел семеричной системы счисления, в каждом из которых нет повторяющихся цифр?

4. (427). В тире 10 мишеней. Сколькими способами могут выбрать себе по одной мишени три стрелка, если каждую мишень выбирает не более чем один стрелок?

5. (БЕЛ)! Известно, что число размещений без повторений из n элементов по m равно 210. Найдите n и m.

6. (159)! Известно, что число размещений из n элементов по m равно 7920. Определите числа n и m.

7. (200). Из 10 цифр образуют семизначные десятичные числа, в каждом из которых нет повторяющихся цифр. Сколько существует таких чисел, если каждое число начинается с последовательности цифр 897?

8. (530). Из 10 цифр образуют семизначные десятичные числа, в каждом из которых нет повторяющихся цифр. Сколько существует таких чисел, если каждое число оканчивается последовательностью цифр 789?

9. (ТВП). Три ученика выбирают по одной книге из 11 предложенных. Все книги разные. Сколькими способами может быть осуществлен выбор?

10. (МЗУ)! Ученикам предложено несколько книг. Из них каждый ученик выбирает себе одну книгу. Всего существует 24024 способов выбора. Сколько было учеников и сколько книг?

11. (МКИ)! Известно, что существует 900 k-разрядных чисел, не содержащих одинаковых цифр. Определите число k. Определите основание системы счисления, в которой заданы k-разрядные числа.

12. (ИРК)! Существует 3024 k-буквенных слов, в каждом из которых нет повторяющихся букв. Определите число k. Сколько было букв, из которых составились k-буквенные слова?

1.8. Размещения с повторениями

Постановка задачи. Дано множество, содержащее n элементов. Из них образуют **размещения с повторениями,** т. е. упорядоченные последовательности длины m, причем одни и те же элементы в любую последовательность могут входить многократно. Сколько всего существует таких последовательностей?

Как и в предыдущем случае, размещения с повторениями отличаются одно от другого и элементами и порядком записи элементов, следовательно, для нахождения числа размещений с повторениями можно воспользоваться правилом произведения. Если множество содержит n элементов, то первый элемент можно выбрать n способами, второй – n способами и т. д. В результате получаем

$$\dot{A}_n^m = n\cdot n\cdot \ldots \cdot n = n^m, \qquad (9)$$

где символ $\dot{A}_n^m$ используется для обозначения числа размещений из n элементов по m с повторениями.

Пример 1. Сколько можно образовать четырехразрядных чисел, используя только цифры 3, 7, 8, 9, если повторения возможны?

По правилу произведения на первом месте может находиться любая из четырех цифр, следовательно, имеем 4 случая. Так как повторы разрешены, то на втором месте может находиться любая из четырех заданных цифр – имеем снова 4 случая. Для двух остальных разрядов имеем еще по 4 случая. Таким образом,

$$\dot{A}_4^4 = 4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^4 = 256.$$

Пример 2. Сколько всего существует трехразрядных десятичных чисел, которые могут быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8?

На месте старшего разряда может находиться одна из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8 – всего их шесть. По шесть цифр могут находиться и в двух младших разрядах. Следовательно

$$\dot{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Пример 3. Дано множество букв: $A = \{а, б, в, г, д, е\}$. Сколько двух- и трехбуквенных слов можно составить из этих букв?

Искомое число R равно:

$$R = \dot{A}_6^2 + \dot{A}_6^3 = 6^2 + 6^3 = 252.$$

Пример 4. Сколько существует пятиразрядных чисел шестеричной системы счисления?

Решим эту задачу сначала в общем виде. Пусть n – основание системы счисления, m – длина выборки. Первую цифру можно выбрать $n-1$ способами, так как с нуля не могут начинаться m-разрядные числа. Во всех остальных разрядах цифры выбираются n способами каждая. Следовательно, искомое число $К$ m-разрядных чисел равно:

$$К = (n-1)\, n^{m-1}. \qquad (10)$$

Согласно условию примера $m = 5$, $n = 6$, тогда

$$К = (6-1)\, 6^{5-1} = 6480.$$

Формула числа размещений с повторениями может быть получена и на основе понятия степени множества (см. п. 2.2 раздела «Теория множеств» первой части данного пособия). Известно, что если A – некоторое конечное множество, а A^m – его степень, то число всех кортежей длины m равно $|A|^m$. Каждый кортеж представляет собой последовательность элементов множества A, причем одни и те же элементы могут входить в последовательность многократно. Все такие последовательности называются размещениями. Если учесть, что $|A| = n$, то

$$\dot{A}_n^m = |A|^m = n^m.$$

Упражнения

1. (215). Сколько двухбуквенных слов можно образовать из 10 гласных букв русского алфавита?

2. (328). Сколько существует трехразрядных десятичных чисел?

3. (МЯЛ). Сколько существует пятиразрядных чисел четверичной системы счисления?

4. (ВИК). Сколько слов длины 3 можно составить из букв множества $\{a, b, c, d, e, f\}$?

5. (УРФ). Сколько слов длины 10 можно составить из двух букв a и b?

6. (221). Сколько слов длины 12 можно составить из одной буквы d?

7. (НУЧ)! Известно, что существует 100 m-значных чисел p-ичной системы счисления. Найдите числа m и p.

8. (ИС5). Дано множество $A = \{а, б, в, г, д\}$. Число размещений с повторениями из $|A|$ по m равно N_1. Число размещений с повторениями из $|A|$ по m+1 равно N_2. Известно, что $N_2 - N_1 = 500$. Найдите N_1 и N_2.

9. (ЯХ7). Дано множество $A = \{а,б,в,г,д,е\}$. Сколько существует размещений с повторениями из $|A|$ по 3, если каждое размещение (выборка) начинается с буквы $в$?

10. (ВЕК). Дано множество $A = \{а,б,в,г,д,е\}$. Сколько существует размещений с повторениями из $|A|$ по 3, если ни одно из размещений не начинается с буквы $д$?

11. Дано множество $A = \{а,б,в,г,д,е,ж,з\}$. Сколько существует размещений с повторениями из $|A|$ по 4, если:

(ШТИ) каждая выборка (размещение) начинается и оканчивается буквой $б$?

(7Б6) каждая выборка начинается с $а\,б\,в$?

(МБЦ) каждая выборка оканчивается либо буквой $г$, либо буквой $ж$?

(258) каждая выборка начинается с гласной буквы?

(В95) ни одна выборка не начинается и не оканчивается буквой $а$?

12. (СЕЛ). Сколько существует четных трехразрядных десятичных чисел, не содержащих нечетных цифр в двух старших разрядах?

13. (АЛЗ). Сколько существует нечетных трехразрядных десятичных чисел, не содержащих четных цифр в двух старших разрядах?

14. (Т52). Сколько существует восьмиразрядных двоичных чисел, начинающихся не с нуля?

1.9. Сочетания без повторений

Постановка задачи. Пусть множество A содержит n элементов. Выделим из множества A некоторое подмножество, содержащее m элементов ($m \le n$). Сколько существует таких подмножеств?

Каждое подмножество множества A, содержащее m элементов, называется **сочетанием** m элементов из n, где $n = |A|$. Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m. Нижний индекс n в этом обозначении есть число всех тех элементов, из которых осуществляются выборки. Верхний индекс m показывает, сколько элементов входит в выборку. В некоторых источниках, например в [12, с. 250], принято считать, что верхний индекс – это число элементов, из которых осуществляются выборки, а нижний индекс – число элементов, образующих выборку. В обозначении числа сочетаний также нет единообразия. Например, в [56, с. 22] используется символ ${}_nC_r$; в [12] применяются знаки $C(n,r)$, $\binom{n}{r}$, где r – число элементов, образующих выборку. Мы будем пользоваться знаком C_n^m, принятым во многих источниках, например в [2,11,23,24,28,35,42].

Запишем формулу числа размещений без повторений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Размещения, описываемые этой формулой, отличаются друг от друга элементами или порядком элементов. Сочетания же отличаются одно от другого только элементами. Если число A_n^m разделить на $m!$, то получим формулу для числа сочетаний из n элементов по m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (11)$$

Пример 1. Сколько существует шестиразрядных двоичных чисел, содержащих три единицы?

В данном случае $n = 6$, $m = 3$, следовательно, искомое число равно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20.$$

Пример 2. На окружности (рис. 3) расположены n точек. Каждая пара точек соединена прямой линией так, что в любой точке пересекаются не более двух прямых. Сколько точек пересечения имеется внутри круга? Точки пересечения линий с окружностью не учитывать.

Одну точку пересечения можно получить, если взять четыре точки на окружности. Следовательно, каждой четверке точек окружности соответствует одна точка пересечения в круге. Число таких точек равно

$$C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

При $n = 5$ имеется 5 точек, при $n = 6$ имеется 15 точек, при $n = 7$ (как на рис. 3) имеется 35 точек и т. д.

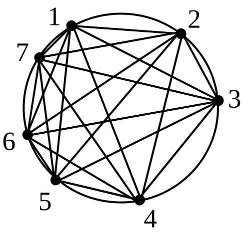


Рис. 3

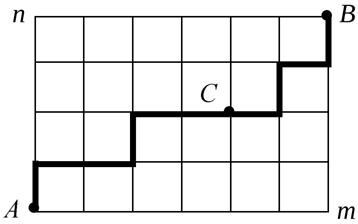


Рис. 4

Пример 3. Дан шахматный город размером $m \times n$ квадратов, где n – число квадратов (клеток) по вертикали, m – число квадратов по горизонтали (рис. 4). Сколько существует кратчайших путей:

а) от точки A до точки B, если двигаться можно только по линиям (вертикальным и горизонтальным)?

б) от точки A до точки B, проходящих через точку C?

в) от точки A до точки B, не проходящих через C?

Кратчайший путь, соединяющий точки A и B, состоит из $n + m$ отрезков, причем всякий путь содержит точно n вертикальных отрезков и точно m – горизонтальных. Пусть нуль обозначает движение вверх, единица – движение вправо. Тогда всякий путь можно закодировать и представить в виде $(m + n)$-разрядного двоичного числа. Например, путь, отмеченный на рис. 4, представится двоичным кодом 0110111010. Чтобы решить поставленную задачу, достаточно выяснить, сколько всего существует $(m + n)$-разрядных кодов, в каждом из которых n нулей и m единиц. По формуле (11) имеем:

$$C_{n+m}^n = \frac{(n+m)!}{n!m!}.$$

Например, при $n = 4$, $m = 6$ (как на рис. 4) число кратчайших путей от A до B равно 210.

Чтобы определить число тех же путей, проходящих черз точку C, необходимо сначала выяснить, сколько существует кратчайших путей, соединяющих точки A и C, и сколько путей, соединяющих точки C и B. Рассуждая как и в предыдущем случае, находим, что число кратчайших путей, ведущих от точки A до точки C, равно числу сочетаний из 6 по 2, то есть 15. Точки C и B соединяют 6 кратчайших путей. Общее число искомых путей согласно правилу произведения равно $15 \cdot 6 = 90$.

Число кратчайших путей, ведущих от A к B и проходящих через точку C, равно $210 - 90 = 120$.

Пример 4. Требуется закодировать 30 букв некоторого алфавита двоичными кодами, содержащими по две единицы. Определить длину кода.

Пусть n – длина кода (то есть число знаков в коде). Тогда должно выполняться неравенство

$$C_n^2 \geq 30.$$

Представим это неравенство в виде

$$n(n-1) \geq 60.$$

Ближайшее число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 9, так как $9 \cdot 8 = 72 > 60$. Если же взять $n = 8$, то имеем $7 \cdot 8 = 56 < 60$. Таким образом, чтобы закодировать 30 букв, необходимы 9-значные двоичные коды, каждый из которых содержит две единицы и семь нулей.

Пример 5. Сколько существует семизначных двоичных чисел, в каждом из которых нет рядом стоящих единиц (числа могут начинаться с нуля)?

Обозначим искомое число буквой n. Оно состоит из нескольких слагаемых. Рассмотрим каждое из них:

а) если в семизначном числе нет единиц, то находиться рядом они не могут. Такое число существует только одно (это число, состоящее из семи нулей), следовательно, $n_1 = 1$;

б) если в числе точно одна единица, то она может занять любое место из семи. Поэтому $n_2 = 7$;

в) число может содержать точно две единицы и пять нулей. Запишем нули в один ряд. Между ними поставим по одной точке, а также поставим их слева и справа от нулей. Получится шесть точек. Если какие-либо две точки заменить единицами, а все остальные удалить, то получим семизначное число, содержащее пять нулей и две единицы, причем между этими единицами всегда будет находиться хотя бы один нуль. Две точки из шести заменить единицами можно $C_6^2 = 15$ способами. Следовательно, $n_3 = 15$;

г) семизначное число может содержать три единицы и четыре нуля. Рассуждая как и в предыдущем случае, находим: $C_5^3 = 10$. Таким образом, $n_4 = 10$;

д) в числе четыре единицы и три нуля. Такое число существует только одно: 1010101, следовательно, $n_5 = 1$.

Суммируя все найденные числа, получим искомое число: $n = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34$.

Пример 6. Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры идут:

1) в порядке возрастания слева направо?

2) в порядке убывания слева направо?

Рассмотрим решение первой задачи. Запишем в порядке возрастания слева направо все десятичные цифры. Удалим из них нуль, так как с нуля пятизначные числа начинаться не могут (иначе они не будут пятизначными). Любые пять цифр из оставшихся девяти можно выбрать $C_9^5 = 126$ способами (не меняя их порядка). Столько же существует и искомых чисел.

Вторую задачу можно решить точно таким же образом, если все десятичные цифры (вместе с нулем) записать в порядке убывания слева направо. Так как теперь нуль не может оказаться в старшем разряде, то всего существует искомых чисел $C_{10}^5 = 252$.

Упражнения

1. (АЯМ). Сколько существует 8-разрядных двоичных кодов, содержащих три единицы каждый?

2. (ОЙТ). Сколько существует 9-значных двоичных кодов, каждый из которых содержит 6 нулей?

3. (ФЕМ). Сколько существует 10-значных двоичных кодов, начинающихся с нуля, если в каждом коде четыре единицы?

4. (2НН). Сколько существует 8-разрядных двоичных кодов, в каждом из которых четное число единиц?

5. (ДОК). 66 символов некоторого алфавита закодированы двоичными кодами, содержащими по две единицы каждый. Определите наименьшую длину кода.

6. (ХПО). 80 знаков некоторого алфавита решено закодировать двоичными кодами, содержащими три единицы каждый. Найдите наименьшее значение n и число нулей в коде, если n – длина кода.

7. (КЭС). В шахматном городе размером $m \times n$ число кратчайших диагональных путей, состоящих из 11 отрезков, равно 462. Найдите m и n, если $m < n$, $m \neq 1$.

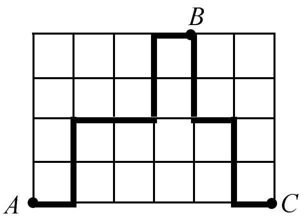


Рис. 5

8. (ЛОТ). Сколько существует кратчайших путей от A до C (рис. 5), если каждый путь проходит через B и если n – число отрезков по вертикали, m – число отрезков по горизонтали от A до B, k – число отрезков по горизонтали от B до C? Принять $n = m = 4$, $k = 2$.

9. (УНУ). На прямой a (рис. 6) расположено n точек, на прямой b – m точек. Все точки прямой a соединены отрезками со всеми точками прямой b. (Рис. 6 приведен для случая, когда $n = 4$, $m = 3$.) Сколько существует точек пересечения отрезков, если ни в одной точке больше двух отрезков не пересекаются и если $n = 7$, $m = 5$?

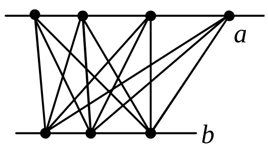


Рис. 6

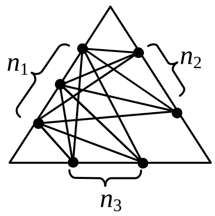


Рис. 7

10. (СИФ). На одной стороне равностороннего треугольника расположено n_1 точек, на второй – n_2 точек и на третьей – n_3 точек (рис. 7). Ни одна из этих точек не совпадает ни с одной вершиной треугольника. Каждая из n_1 точек соединена прямыми линиями со всеми точками двух других сторон. Проведенные линии внутри треугольника образуют точки пересечения, в каждой из которых пересекается только две линии. Определите число точек пересечения, если $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 3$. (НОК). То же самое, если $n_1 = 5$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$.

11. Найдите x в уравнениях:

(ЖУХ) $C_x^2 = 91$; (ЗИУ) $C_x^2 = 190$;

(ДДЦ) $C_x^3 = 120$; (ДДЕ) $C_x^{14} = 120$.

12. (НОР). В восьмизначном числе вида

$$k = 3\,2\,5\,1\,4\,7\,6\,8$$

три цифры заменили нулями. Получилось новое число. Если в числе k нулями заменить другие какие-либо три цифры, получится еще одно число. Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, если каждый раз нулями заменять какие-либо три цифры?

13. (ДИБ). Замок сейфа управляется 12 кнопками путем одновременного нажатия трех кнопок с номерами i, j, k, где $i, j, k = 1,2,3, \ldots, 12$; $i \neq j$; $i \neq k$; $j \neq k$. Тройка этих номеров образует кодовый ключ. Некто решил открыть сейф путем проб и ошибок. Сколько троек ему придется проверить в самом неблагоприятном случае?

14. (ДЯГ). На плоскости расставлено 14 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

15. (ЕРД). Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

16. (ЕНЕ). Сколько существует четырехразрядных десятичных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

17. На плоскости проведено n прямых так, что среди них нет ни одной пары параллельных и никакие три линии не пересекаются в одной точке. Каждая прямая продолжена в обе стороны без ограничений. В результате пересечения линий получаются различные фигуры – треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д. (Б52). Сколько получится треугольников при $n = 12$? (АЯЛ). Сколько получится точек пересечения прямых при $n = 15$?

18. (ШИН). Двоичное число содержит 9 нулей и 5 единиц, причем, рядом стоящих единиц в числе нет. Сколько существует таких чисел?

19. (МИЮ). На полке стоит 14 различных книг. С нее сняли 5 книг, причем никакие две из них на полке не стояли рядом. Сколько существует способов такого выбора книг?

1.10. Свойства сочетаний без повторений

Числа вида C_n^m обладают многими очень интересными свойствами. Рассмотрим некоторые из них.

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$. (12)

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, запишем левую и правую части в развернутом виде:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}.$$

Результаты совпали, следовательно, равенство (12) верно. Пример: определить число двоичных кодов длины 7, в каждом из которых имеется точно три единицы. В этом случае

$$n = 7, \quad m = 3, \quad 7 - 3 = 4 \quad \text{и} \quad C_7^3 = C_7^4 = 35.$$

2) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$. (13)

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, его правую часть преобразуем:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!m}{(m-1)! \cdot m \cdot (n-m)!} + \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m-1)!(n-m)} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{m!(n-m)!}(m+n-m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m.$$

Результат совпал с левой частью равенства (13), следовательно, формула (13) верна.

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_m^m = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$. (14)

Для доказательства воспользуемся производящей функцией $(1 + x)^n$ для чисел C_n^i, где $i = 0,1,2,\ldots,n$ (о производящих функциях см. [9; 22; 56]). Известно, что

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i. \quad (15)$$

Это равенство обычно называют формулой бинома Ньютона, хотя и не совсем справедливо, так как формулу $(a + b)^n$ знали среднеазиатские математики Омар Хайям (1048 – 1131) и Гийас ад-Дин Джемшид ал-Каши (XV век н. э.) задолго до Ньютона (1642–1720). Ньютон же установил, что разложение формулы $(a + b)^n$ обобщается и на случаи дробных и отрицательных показателей n.

Если в формуле (15) принять $x = 1$, то получим

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i,$$

что и доказывает справедливость соотношения (14).

Доказать формулу (14) можно без привлечения понятия производящей функции. Пусть дано множество всех n-разрядных двоичных кодов. В каждом из них содержится i единиц и $n - i$ нулей ($i = 0,1,2,\ldots,n$). Если $i = 0$, то существует лишь один n-значный код: последовательность n нулей. Это можно записать в виде C_n^0, так как

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Если $i = 1$, то существует $C_n^1 = n$ кодов, содержащих по одной единице. При $i = 2$ возможно C_n^2 кодов, содержащих по две единицы, и так далее до n-значного кода, состоящего из n единиц. Таким образом, получаем:

$$K = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Число K показывает, сколько всего возможно n-значных двоичных кодов.

С другой стороны, если воспользоваться формулой для числа размещений с повторениями, то число K можно представить в виде другой формулы:

$$K = \dot{A}_2^n = 2^n,$$

что и доказывает утверждение (14).

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$ (16)

Доказать справедливость равенства (16) проще всего при помощи формулы (15), если принять $x = -1$.

5) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1}$ при четном n;

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots C_n^n$ при нечетном n.

Доказать справедливость этих свойств можно при помощи формулы (16).

6) $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.

Чтобы получить эту формулу, достаточно в выражении (13) вместо n записать $n + 1$.

7) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

Доказательство можно найти в [22, с. 40].

Упражнения

1. (МЭС). В формуле (14) укажите наибольшее число сочетаний при $n = 10$.

2. (ЫЛТ). При каких значениях i число сочетаний из n по i (C_n^i) в формуле (14) принимает наибольшее значение, если $n = 17$.

3. (НЯФ). Известно, что $C_n^m = 165$ и что $n - m = 8$. Найдите m и n.

4. (692). Известно, что $C_n^m = 1001$; $C_{n-1}^{m-1} = 286$. Найдите C_{n-1}^m.

5. (ХАФ). Найдите сумму вида

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + C_n^9 + C_n^{11},$$

если известно, что

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + C_n^8 + C_n^{10} + C_n^{12} = 2048.$$

6. (КВЕ). Найдите C_n^3, если $2^n = 65536$.

1.11. Сочетания с повторениями

Постановка задачи. Дано множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Сколько существует выборок по m элементов, если в них могут входить повторяющиеся элементы и если порядок элементов в выборках безразличен? Такие выборки называют **сочетаниями с повторениями**.

Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, то существует 10 выборок длины $m = 2$:

aa	*bb*	*cc*	*dd*
ab	*bc*	*cd*	
ac	*bd*		
ad			

Нахождение числа сочетаний с повторениями поясним на примере. В магазине имеется 4 вида конфет: «Пилот», «Ромашка», «Весна», «Снежинка». Требуется купить 10 конфет в любом сочетании из перечисленных. Сколькими способами это можно сделать?

При покупке возможны варианты:

– купили 10 конфет «Весна»;

– купили 5 конфет «Пилот», 3 конфеты «Ромашка», и 2 конфеты «Весна» (всего 10 конфет);

– купили 6 конфет «Весна» и 4 конфеты «Ромашка» и т. д.

Закодируем покупку следующим образом. Пусть решено купить три конфеты «Пилот», две конфеты «Ромашка», одну конфету «Весна» и четыре конфеты «Снежинка». Запишем три единицы (это конфеты «Пилот»), после которых поставим нуль. Затем запишем две единицы (это конфеты «Ромашка») и нуль. Далее поставим одну единицу и нуль. В конце запишем четыре единицы (конфеты «Снежинка»), но нуль после них не ставим. Получилась последовательность:

1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1
«Пилот» «Ромашка» «Весна» «Снежинка»

Нули в этой последовательности выполняют только одну роль – они отделяют один вид конфет от других.

Очевидно, что всякое распределение трех нулей в 13-разрядном двоичном коде дает некоторый вариант покупки. Например:

1111001011111 – куплено четыре конфеты «Пилот», ни одной конфеты «Ромашка», одна конфета «Весна» и пять конфет «Снежинка»;

0001111111111 – куплено 10 конфет «Снежинка», все остальные конфеты в покупку не вошли;

0101111111110 – конфет «Пилот» и Снежинка» в покупке нет. Куплено одна конфета «Ромашка» и девять конфет «Весна».

Таким образом, число вариантов покупок равно числу всех возможных 13-разрядных двоичных кодов, в каждом из которых десять единиц (либо три нуля):

$$\dot{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286,$$

где символом $\dot{C}_4^{10}$ обозначено число сочетаний с повторениями из четырех элементов по 10.

В общем случае если множество A содержит n элементов, из которых составляются выборки по m элементов с повторениями, то число всех таких выборок равно:

$$\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}. \quad (17)$$

В числе $n + m - 1$ единица вычитается по той причине, что число нулей, которыми отделяются группы одинаковых элементов, на единицу меньше числа $|A|$.

Рассмотрим еще один пример. В три ящика необходимо разложить 30 гаек так, чтобы в каждом ящике оказалось хотя бы по пять гаек. Сколькими способами это можно сделать?

Положим в каждый ящик по пять гаек. Тогда их останется 15, следовательно m = 15, n = 3. По формуле (17) находим: M = 136, где M – число способов распределения по трем ящикам 15 гаек. Такой же ответ получим в результате следующих рассуждений. Расположим в один ряд все 15 гаек и добавим в этот ряд, например, две шайбы. Тогда гайки, расположенные слева от шайб, попадут в первый ящик, гайки, находящиеся справа, – в третий, а те, которые разместились между шайбами, – во второй. Тогда искомое число M равно:

$$M = C_{17}^{2} = 136.$$

Упражнения

1. (УЯД). В магазине продают четыре вида конфет. Сколькими способами можно купить 15 конфет?

2. Продаются тетради пяти цветов: с синей обложкой, фиолетовой, красной, зеленой и оранжевой.

(ЮСЕ). Требуется купить 10 тетрадей любого цвета. Скольким способами это можно сделать?

(ВШВ). Требуется купить 15 тетрадей. Пять из них должны быть с фиолетовой обложкой, а обложки всех остальных тетрадей могут быть любого цвета кроме фиолетового. Сколькими способами возможна такая покупка?

(ДДБ). Требуется купить 16 тетрадей, среди которых 4 тетради должны быть с зеленой обложкой и 5 тетрадей – с оранжевой. Цвет обложки остальных тетрадей значения не имеет. Сколькими способами возможна покупка?

(ШЕТ) Требуется купить 14 тетрадей, среди которых каждого цвета из пяти должно быть не менее чем по две тетради. Сколько существует вариантов покупки?

3. (КМГ). 20 студентов могут сдавать экзамен в любой день из четырех. На первый день подано n_1 заявок, на второй – n_2, на третий – n_3, на четвертый – n_4. Сколько существует различных наборов чисел n_1, n_2, n_3, n_4?

4. (ВАЮ). Из Томска в Кемерово можно уехать тремя видами пассажирского транспорта: поездом, автобусом и речным катером. Группа туристов, насчитывающая 18 человек, отправилась из Томска в Кемерово, причем n_1 человек воспользовались поездом, n_2 – автобусом и n_3 – речным катером. Сколько существует различных наборов чисел n_1, n_2, n_3 (при $n_1 + n_2 + n_3 = 18$)?

5. (МЭЛ). В железнодорожном составе 10 пассажирских вагонов. В них необходимо разместить 6 пассажиров. Сколькими способами это можно сделать, если в каждом вагоне имеется не менее 6 свободных мест и если пассажирам безразлично, в каком вагоне ехать?

6. (МКМ). 30 конфет необходимо распределить по трем ящикам. Сколькими способами это можно сделать при условии, что все конфеты одинаковые?

7. (ТЮК). Между тремя учениками необходимо разделить 45 яблок. Сколькими способами это можно сделать при условии, что все яблоки одинаковые и что каждый ученик получит не менее 7 яблок?

8. (КВН). Шесть домов отдыха предлагают путевки в неограниченном количестве. Руководством некоторого завода решено приобрести 10 путевок. Сделать это можно многими вариантами. Например, взять все 10 путевок в один дом отдыха либо две путевки взять в первый дом, три – во второй, остальные – в пятый и т. д. Сколько всего существует вариантов выбора домов отдыха?

9. (400). В 4 ящика необходимо разложить 30 предметов так, чтобы в каждом ящике оказалось хотя бы 4 предмета. Сколько существует способов загрузки ящиков?

10. (ЕМП). В четыре ящика необходимо загрузить n предметов так, чтобы в каждом ящике оказалось не менее чем по 5 предметов. Известно, что существует 1540 способов загрузки ящиков. Определите n.

1.12. Упражнения на применение основных формул комбинаторики

Выше были рассмотрены основные формулы для нахождения числа перестановок, размещений и сочетаний с повторениями и без повторений. Их полный список имеет вид:

1) перестановки без повторений: $P_n = n!$;

2) перестановки с повторениями: $\dot{P}_n = \dfrac{n!}{n_1!n_2! \,...\, n_k!}$,

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$;

3) размещения из n элементов по m без повторений:
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

4) размещения из n элементов по m с повторениями:
$$\dot{A}_n^m = n^m;$$

5) сочетания из n элементов по m без повторений:
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

6) сочетания из n элементов по m с повторениями:
$$\dot{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

При начальном освоении элементов комбинаторики эти шесть формул необходимо изучить в первую очередь. Чтобы достичь минимально необходимого уровня их усвоения, следует выполнить ряд тренировочных упражнений. С этой целью в данный подраздел включен несложный практикум, который необходимо рассматривать как обязательный минимум, а поэтому выполнить упражнения следует все без исключения.

Упражнения

1. В вышеприведенном списке основных формул комбинаторики укажите номера формул, в которых:

(УЦФ) учитывается порядок элементов в выборках;

(ВЭХ) порядок элементов не имеет значения;

(383) различные выборки могут содержать различные элементы;

(ИПЧ) выборки отличаются одна от другой только элементами.

2. (РАЙ). Укажите номера правильных формул:

1) $A_n^m = \dfrac{P_n}{(n-m)!}$; 4) $C_n^m = \dfrac{P_n}{P_m(n-m)!}$;

2) $P_m = \dfrac{A_n^m}{C_n^m}$; 5) $C_n^m = \dfrac{P_m}{P_n(n-m)!}$;

3) $A_n^m = \dfrac{P_m}{(n-m)!}$; 6) $C_{r+k}^r = \dfrac{(r+k)!}{r!k!}$.

3. (ТЫС). Укажите номера верных формул:

1) $A_n^m = C_n^m \cdot P_n$; 4) $A_{n+m-1}^m = \dot{C}_n^m \cdot P_n$;

2) $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$; 5) $P_n = (n-m)! P_n \cdot C_n^m$;

3) $P_n = (n-m)! A_n^m$; 6) $P_n = n(n-1)!$

4. (030). Укажите номера правильных формул:

1) $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$; 4) $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n}$;

2) $\dot{C}_n^m = \dfrac{A_{n+m-1}^m}{P_m}$; 5) $\dot{C}_n^m = \dfrac{A_{n+m-1}^m}{P_n}$;

3) $C_{r+k}^k = \dfrac{(r+k)!}{r!k!}$; 6) $P_n = (n-m)!P_m \cdot C_n^m$.

5. (ЛВО). Укажите верные соотношения:

1) $\sum\limits_{i=0}^{t} C_n^i = \sum\limits_{i=n-t}^{n} C_n^i$ при $t \le n$;

2) $\sum\limits_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} C_n^i = 2^{n-1}$ при нечетном n;

3) $\sum\limits_{i=\frac{n}{2}}^{n} C_n^i = 2^{n-1}$ при четном n;

4) $\sum\limits_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^i = 2^{n-1}$ при нечетном n;

5) $\sum\limits_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i = 2^{n-1}$ при четном n;

6) $\sum\limits_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^i = \sum\limits_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} C_n^i$ при нечетном n.

6. (ОТФ). Укажите номера правильных выражений:

1) $\sum\limits_{i=0}^{\frac{n}{2}} C_n^i = \sum\limits_{i=\frac{n}{2}}^{n} C_n^i$ при четном n; 4) $A_n^{n+m} = n^n + n^m$;

2) $\dot{A}_n^{n+m} = n^n n^m$; 5) $A_n^{2n} = n^2 \cdot n^n$;

3) $A_{n+m-1}^m = P_m \dot{C}_n^m$; 6) $\dot{A}_{n+m}^m = n^n + m^m$.

7. (182)! Найдите число размещений из n элементов по m с повторениями, если

$n = 7, m = 0$; $n = 7, m = 1$; $n = m = 2$.

8. (763)! Найдите число сочетаний из n элементов по m без повторений при:

$n = 5$, $m = 0$;
$n = 8$, $m = 1$;
$m = n = 12$.

9. (ЛПИ)! Определите число размещений из n элементов по m без повторений, если

$n = 1, m = 0$; $n = m = 3$; $m = n = 0$.

10. (275)! Сколько существует размещений из n элементов по m с повторениями, если:

$n = 1, m = 100$? $n = 100, m = 0$? $n = m = 3$?

11. (696)! Сколько существует перестановок из n элементов без повторений, если

$n = 4$? $n = 1$? $n = 0$?

12. (997)! Сколько существует перестановок из n элементов с повторениями, если $n = n_1 + n_2$, при условии, что

$n_1 = 3, n_2 = 0$? $n_1 = 0, n_2 = 1$? $n_1 = 2$, $n_2 = 3$?

13. (ОТМ)! Сколько существует сочетаний из n элементов по m с повторениями, если

$n = m = 1$? $n = 5$, $m = 0$? $n = m = 2$?

14. (ТЫН)! Сколько существует сочетаний из n элементов по m без повторений, если

$n = 12, m = 11$? $n = m = 0$? $n = 10$, $m = 8$?

15. (ЛАО). Укажите номера верных утверждений:

1) в формуле числа сочетаний из n элементов по m без повторений всегда $n \ge m$;

2) в формуле числа размещений из n элементов по m без повторений возможно соотношение $n < m$;

3) в формуле числа размещений из n элементов по m с повторениями возможно соотношение $n > m$;

4) в формуле числа сочетаний из n элементов по m с повторениями возможны случаи, когда $m > n$;

5) в формуле числа перестановок из n элементов без повторений величина n может принимать нулевое значение;

6) в формуле числа перестановок из n элементов с повторениями возможны случаи, когда $n < n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, где n_i $(i = 1,2, \ldots, k)$ – число неразличимых элементов i-й группы.

2. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Разбиение множества на два подмножества

Постановка задачи. Дано множество, содержащее n элементов:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Все элементы этого множества требуется разделить на два подмножества A_1 и A_2 так, чтобы выполнялись условия:

$$A_1 \bigcup A_2 = A; \qquad A_1 \bigcap A_2 = \varnothing.$$

Сколько существует таких разбиений?

Наиболее простым является случай, когда число элементов, образующих множества A_1 и A_2, задано заранее. Если N – число разбиений, то

$$N = C_n^{|A_1|} = C_n^{|A_2|}.$$

Например, число разбиений множества десятичных цифр на два подмножества при $|A_1| = 3$, $|A_2| = 7$ равно:

$$N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120.$$

Этот же результат можно получить с применением формулы числа перестановок с повторениями. Для этого запишем в ряд элементы множества A и каждому элементу поставим в соответствие двоичный разряд, т.е. все разбиения закодируем двоичными кодами. Пусть нули обозначают элементы множества A_1, единицы – элементы множества A_2:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0 0 1 1 1 1 1 1 1

В данном случае двоичному коду 0001111111 соответствует разбиение

$A_1 = \{0, 1, 2\}$;
$A_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Очевидно, что всякая перестановка нулей и единиц в двоичном числе определяет некоторое разбиение множества A. Например, числу 1011100111 соответствует разбиение вида

$A_1 = \{1, 5, 6\}$;
$A_2 = \{0, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.

По формуле числа перестановок из 10 элементов с повторениями получаем общее число разбиений:

$$N = \dot{P}_{10} = \frac{10!}{3!\ 7!} = 120.$$

В общем случае имеем:

$$N = \dot{P}_n = \frac{n!}{|A_1|!\;|A_2|!}. \qquad (18)$$

Необходимо отметить, что формула (18) справедлива лишь при $|A_1| \neq |A_2|$. Если же $|A_1| = |A_2|$, то все разбиения, число которых определяется по формуле (18), делятся на пары неразличимых разбиений. Например, два двоичных числа

0111001100 и 1000110011

дают разбиения следующего вида:

$$A_1 = \{0, 4, 5, 8, 9\}; \qquad A_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\};$$
$$A_1^1 = \{1, 2, 3, 6, 7\}; \qquad A_2^1 = \{0, 4, 5, 8, 9\}.$$

Эти разбиения являются неразличимыми, так как

$$A_1 = A_2^1 \text{ и } A_2 = A_1^1.$$

Очевидно, что неразличимым разбиениям соответствуют взаимно инверсные коды (т. е. коды, переходящие один в другой заменой нулей на единицы, а единиц на нули). Так как всякому коду, в котором число нулей равно числу единиц, соответствует инверсный код, также содержащий поровну нулей и единиц, то формула для нахождения числа N' всех разбиений принимает вид

$$N' = \frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}}. \qquad (19)$$

Заметим, что эта формула справедлива лишь при четном n.

Мы рассмотрели случай, когда величины $|A_1|$ и $|A_2|$ заданы. Теперь определим число разбиений при всех возможных значениях $|A_1|$ и $|A_2|$. Проще всего решить эту задачу с помощью двоичных кодов. Поставим в соответствие каждому элементу множества A определенный двоичный разряд. Тогда всякому двоичному коду будет соответствовать некоторое разбиение, если считать, что единица обозначает вхождение данного элемента в множество A_1, а нуль — вхождение данного элемента в множество A_2. Проиллюстрируем это на следующем примере. Пусть дано множество, состоящее из четырех элементов: $A = \{a, b, c, d\}$. В табл. 1 перечислены все возможные подмножества в виде двоичных кодов и отмечены взаимно инверсные коды. Строке с нулевым номером соответствует разбиение вида

$$A_1 = \varnothing; \quad A_2 = A.$$

Таблица 1

№	a b c d
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

Строке с номером 15 соответствует такое же разбиение:

$$A_1 = A; \quad A_2 = \varnothing.$$

Очевидно, что эти разбиения неразличимы. Строке с номером 1 соответствует разбиение:

$$A_1 = \{d\}; \quad A_2 = \{a, b, c\}.$$

Для инверсного кода 1110 имеем:

$$A_1 = \{a, b, c\}; \quad A_2 = \{d\}.$$

Эти разбиения также неразличимы и т. д. Из табл. 1 видно, что различимыми являются только 8 разбиений.

В общем случае, когда множество состоит из n элементов, таблица содержит 2^n строк. Следовательно, число N всех разбиений равно:

$$N = 2^{n-1}.$$

Если же разбиения, соответствующие взаимно инверсным кодам, считать различными, то всего существует 2^n разбиений.

Рассмотрим случай, когда в разбиении участвуют множества, содержащие одинаковые элементы (напомним, что такие множества называют семействами). Пусть имеется 10 тетрадей с зеленой обложкой, 12 – с желтой и 11 – с красной. Требуется разделить их между двумя учащимися так, чтобы каждому из них досталось не менее чем по три тетради каждого цвета.

Сначала рассмотрим случай, когда нет ограничений на то, сколько тетрадей должен получить каждый учащийся. Тогда первому из них может достаться одна зеленая тетрадь (другому, следовательно, – 9), две, три и так далее до 10, а также ни одной. Всего 11 случаев. Точно так же рассуждая, приходим к выводу, что существует 13 и 12 вариантов распределения желтых и красных тетрадей. Следовательно (по правилу умножения), всего имеем 11·13·12 = 1716 способов распределения всех тетрадей между двумя учащимися.

Теперь рассмотрим случай, когда каждый учащийся должен получить не менее трех тетрадей каждого цвета. Для этого достаточно заранее выдать обоим учащимся по три тетради всех цветов. Тогда останется одна зеленая тетрадь, три желтых и две красных. Первый учащийся может получить зеленую тетрадь, а может и не получить. Имеем два варианта. Желтая тетрадь может быть ему выдана четырьмя способами, красная – тремя. Следовательно, всего имеем 2·4·3 = 24 варианта.

Сформулируем задачу в общем виде. Пусть имеется k различных предметов. Из них n_1 экземпляров первого предмета, n_2 экземпляров – второго, …, n_k – k-го. Требуется разделить их на две части так, чтобы в каждой части оказалось не менее t_1 экземпляров первого предмета, не менее t_2 экземпляров второго предмета, …, не менее t_k экземпляров k-го предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Так как в обе части войдет по t_1 экземпляров первого предмета, то останется $n_1 - 2\,t_1$ экземпляров. То же самое относится и ко всем остальным предметам. Следовательно, существует M способов разделить на две части все $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ предметов, где

$$M = (n_1 - 2\,t_1 + 1)\,(n_2 - 2\,t_2 + 1)\ldots(n_k - 2\,t_k + 1). \qquad (20)$$

Если принять в этой формуле

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0 \quad \text{и} \quad n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1,$$

то получим

$$M = 2^k,$$

что соответствует вышеприведенной частной задаче о разбиении множества на два подмножества.

Упражнения

1. (101). Множество состоит из семи элементов. Сколькими способами его можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = 3$; $|A_2| = 4$?

2. (ВКФ). Множество состоит из 12 элементов. Сколькими способами его можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = |A_2|$?

3. (282). Сколькими способами множество A можно разбить на два подмножества A_1 и A_2, если $|A| = 9$?

4. Дано разбиение: $A_1 = \{1, 2, 3\}$; $A_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Найдите число разбиений множества $A_1 \cup A_2$, если

(ВЕЗ) $|A_1| = 3$; $|A_2| = 5$; (НУЧ) $|A_1| = |A_2| = 4$.

(ЯК5) $|A_1| = 2$, $|A_2| = 6$;

5. Известно, что булеан подмножества A_1 содержит 126 собственных подмножеств. Кроме того, известно, что $|A_1|+|A_2| = 14$, где A_1 и A_2 – разбиение множества A.

(576). Определите $|A_2|$.

Определите число разбиений множества A при

(ФП7) $|A_1| = |A_2|$; (У28) $|A_1| = 1$; $|A_2| = 13$.

6. Известно, что существует 2048 способов разбиения множества A на два подмножества.

(ОЖН). Определите $|A|$.

Сколько существует разбиений множества A:

(ИРК) на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = 4$?

(300) на два подмножества A_1 и A_2, если $|A_1| = 6$?

(ХВМ) на два подмножества A_1 и A_2, если во всех разбиениях $A_1 \neq \varnothing$ и $A_2 \neq \varnothing$?

2.2. Разбиение множества на несколько подмножеств

Постановка задачи. Пусть дано множество, содержащее n элементов: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Все элементы этого множества требуется разбить на k подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_k$ так, чтобы выполнялись условия:

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$; $A_i \cap A_j = \varnothing$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

Сколько существует таких разбиений?

Если $|A_i| \neq |A_j|$, то подмножество A_1 можно выбрать $C_n^{|A_1|}$ способами. Из оставшихся элементов подмножество A_2 можно выбрать $C_{n-|A_1|}^{|A_2|}$ способами и т. д. По правилу произведения находим число Q всех разбиений:

$$Q = C_n^{|A_1|} \cdot C_{n-|A_1|}^{|A_2|} \cdot C_{n-|A_1|-|A_2|}^{|A_3|} \ldots C_{n-|A_1|-|A_2|-\ldots-|A_{k-2}|}^{|A_{k-1}|} =$$

$$= \frac{n!}{|A_1|!(n-|A_1|)!} \frac{(n-|A_1|)!}{|A_2|!(n-|A_1|-|A_2|)!} \ldots \times$$

$$\times \frac{(n-|A_1|-\ldots-A_{k-2})!}{|A_{k-1}|!(n-|A_1|-\ldots-|A_{k-1}|)!} = \frac{n!}{|A_1|! \ldots |A_k|!},$$

так как $n - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_{k-1}| = |A_k|$.

Таким образом, если $|A_i| \neq |A_j|$, то

$$Q = \frac{n!}{|A_1|!|A_2|! \ldots |A_k|!}. \qquad (21)$$

Например, пусть дано множество $A = \{1,2,3,\ldots,9\}$. Определим число разбиений, если $|A_1| = 2$; $|A_2| = 3$; $|A_3| = 4$.

По формуле (21) имеем: $Q = \dfrac{9!}{2!\ 3!\ 4!} = 1260.$

Формулу (21) можно получить и иным путем, с применением систем счисления. Поясним это примером. Пусть A – множество десятичных цифр и пусть $|A_1| = 3$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 5$. Запишем элементы множества A в строку и отметим какое-либо разбиение, обозначив элементы множества A_1 нулями, множества A_2 – единицами и множества A_3 – двойками троичной системы:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0 0 1 1 2 2 2 2 2

Эта запись обозначает следующее разбиение:

$A_1 = \{0, 1, 2\}$; $A_2 = \{3, 4\}$; $A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Чтобы получить другое разбиение, достаточно переставить цифры в троичном коде, оставив без изменения последовательность элементов множества A. Например:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
2 0 1 2 2 0 0 2 2 1

Коду 2012200221 соответствует разбиение вида:

$A_1 = \{1, 5, 6\}$; $A_2 = \{2, 9\}$; $A_3 = \{0, 3, 4, 7, 8\}$.

Так как всякой перестановке цифр этого кода соответствует определенное разбиение, то задача отыскания числа Q всех разбиений сводится к нахождению числа перестановок из 10 элементов с повторениями:

$$Q = \frac{10!}{3!\ 2!\ 5!} = 2520.$$

В общем случае если заданы величины $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_k|$, то элементам множества $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ необходимо поставить в соответствие цифры k-ичной системы счисления: нулями обозначим элементы множества A_1, единицами — элементы множества A_2 и так далее до множества A_k, элементы которого обозначим цифрами k–1. Запишем какое-либо разбиение в виде последовательности k-ичных цифр, в которой $|A_1|$ нулей, $|A_2|$ единиц и так далее до цифр k–1, число которых равно $|A_k|$, и рассмотрим все перестановки k-ичных цифр. Число этих перестановок равно:

$$Q = \dot{P}_n = \frac{n!}{|A_1|!|A_2|! \ldots |A_k|!}.$$

Мы рассмотрели частный случай, когда $|A_i| \neq |A_j|$ ($i,j = 1, 2, \ldots, k$). Теперь допустим, что в разбиение входят эквивалентные подмножества. Здесь возможно два случая. Первый рассмотрим на примере задачи о домино [10], в которой требуется выяснить, сколькими способами могут быть распределены 28 костей домино поровну между четырьмя игроками. Согласно условию имеем:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 7,$$

где $|A_i|$ – число костей домино, доставшихся i-му игроку ($i = 1, 2, 3, 4$). Число Q всех способов распределения костей определяется по формуле (21):

$$Q = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Все ли эти разбиения различны? Рассмотрим два варианта. Пусть первое разбиение имеет вид:

$A_1 = \{1,2,\ldots,7\}$; $A_2 = \{8,9,\ldots,14\}$;
$A_3 = \{15,16,\ldots,21\}$; $A_4 = \{22,23,\ldots,28\}$,

а второе:

$A_1 = \{8,9,\ldots,14\}$; $A_2 = \{1,2,\ldots,7\}$;
$A_3 = \{15,16,\ldots,21\}$; $A_4 = \{22,23,\ldots,28\}$,

где числа 1, 2, …, 28 обозначают номера костей домино.

Для игроков это неодинаковые распределения, поскольку первый игрок в первом случае получил один набор костей, а во втором случае тому же игроку достались совсем другие кости. Следовательно, все разбиения, число которых представлено выражением (21), являются различными.

Теперь предположим, что дополнительных условий нет. Тогда рассмотренные два разбиения являются неразличимыми. Так как всего имеется четыре равномощных подмножества, то существует 4! = 24 варианта их перестановок, не дающих новых разбиений. Следовательно,

$$Q = \frac{28!}{(7!)^4 \cdot 4!}.$$

Если множество A разбивается на k эквивалентных подмножеств, то

$$Q = \frac{\dot{P}_n}{k!} = \frac{n!}{(|A_s|!)^k k!},$$

где $|A_s| = |A_1| = |A_2| = \ldots = |A_k|$.

В общем случае эквивалентными могут быть не все k подмножеств. Пусть $|A|$=37. Требуется разбить это множество на 10 подмножеств при условии, что

$$|A_1| = |A_2| = A_3| = 3; \qquad |A_4| = |A_5| = |A_6| = |A_7| = 4; \qquad |A_8| = 5; \qquad |A_9| = 6; \qquad |A_{10}| = 1.$$

Здесь две группы подмножеств, и в каждую входят эквивалентные подмножества. Так как перестановка эквивалентных подмножеств новых разбиений не дает, то число разбиений, полученное на основе формулы (21), необходимо разделить на 3! и на 4! В результате получаем следующее число всех разбиений:

$$Q = \frac{37!}{(3!)^3 \cdot (4!)^4 \cdot 5! \cdot 6! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4!}.$$

Упражнения

1. (ДОН). Дано множество $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$. Сколькими способами можно разбить его на три подмножества A_1, A_2 и A_3, если $|A_1| = 4$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 1$?

2. (ОНП). Дано: $|A_1| = 2$; $|A_2| = 3$; $|A_3| = 4$; $|A_4| = 1$; $|A| = 10$. Сколько существует способов разбиения множества A на четыре подмножества A_1, A_2, A_3, A_4 при отсутствии каких-либо ограничений?

3. (А20). Множество A разбито на подмножества так, что $|A_1| = 1$; $|A_2| = 1$; $|A_3| = 4$; $|A_4| = 4$. Сколько существует таких разбиений (ограничений нет)?

4. (СХР). Сколькими способами можно разбить на пять подмножеств множество A, если $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 1$ и если нет никаких дополнительных ограничений?

5. (ИЛ1). Требуется разложить по 4 ящикам 10 различных предметов так, чтобы в первом и втором ящиках было по 2 предмета, а в третьем и четвертом – по 3 предмета. Сколькими способами это можно сделать?

6. (ОЗЛ). Требуется закодировать три сообщения. Первое решено закодировать двумя десятичными цифрами a_1 и a_2, второе – цифрами a_3, a_4, a_5, третье – a_6, a_7, a_8. Все восемь цифр являются различными. Сколько существует способов выбора цифр для кодирования сообщений, если используются десятичные цифры 1, 2, …, 8?

2.3. Задача о переключателях

На рис. 8 приведена схема, содержащая трансформатор с четырьмя выходными обмотками, имеющими по пять выводов, и четыре пятипозиционных переключателя. Каждая секция обмотки v_4 дает напряжение 1 В, каждая секция обмотки v_3 дает 5 В, обмотки v_2 – 25 В и обмотки v_1 – 125 В. Какие значения напряжения можно устанавливать на выходе схемы, переводя переключатели в те или иные состояния (обмотки соединены согласно)?

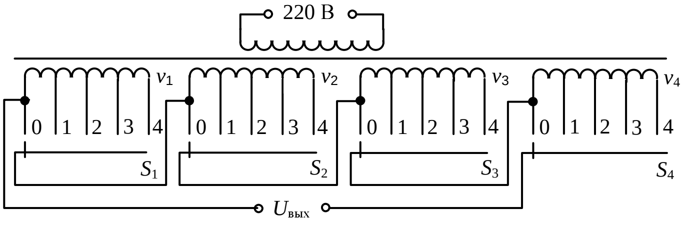


Рис. 8

Пусть на вход трансформатора подано переменное напряжение, равное 220 В. В том положении переключателей, в котором они изображены на рис. 8, выходное напряжение $U_{вых}$ равно нулю. Переведем переключатель S_4 в положение 1. Выходное напряжение будет равно 1 В. Переведем переключатель S_4 в положение 2 – выходное напряжение будет равно 2 В и так далее до случая, когда все переключатели окажутся в позиции 4, тогда выходное напряжение будет равно 624 В. Таким образом, схема позволяет установить выходное напряжение от 0 до 624 В с дискретностью в 1 В. Чтобы получить N вольт, число N достаточно перевести в пятеричную систему счисления и полученное число набрать на переключателях. Например, если N = 380 В, то набираем пятеричное число 3010, т. е. переключатель S_1 переводим в положение 3, переключатели S_2 и S_4 оставляем в нулевых позициях, а переключатель S_3 устанавливаем в состояние 1.

Очевидно, что общее число K всех возможных состояний четырех пятипозиционных переключателей равно числу всех четырехразрядных пятеричных чисел, которые могут начинаться и с нуля, т. е. $K = 5^4 = 625$. Если n – число переключателей по m позиций каждый, то $K = m^n$.

Сформулируем задачу в общем виде: даны n переключателей, из которых первый имеет m_1 позиций, второй – m_2 позиций, третий – m_3 и так далее до n-го переключателя, имеющего m_n позиций. Сколько различных состояний могут иметь все эти n переключателей?

Ответ прост. По правилу произведения число K различных состояний n переключателей равно:

$$K = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Пример 1. Выбрать переключатели так, чтобы получилось 100 различных их состояний. Число позиций переключателей должно быть минимальным. Изобразить схему, позволяющую устанавливать на выходе напряжение от 0 до 99 В с дискретностью, равной 1 В.

Разложим число 100 на простые множители:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$

откуда получаем: $m_1 = m_2 = 2$; $m_3 = m_4 = 5$. Схема переключателя напряжения приведена на рис. 9. Напряжение каждой секции обмотки v_4 равно 1 В. Напряжение каждой секции обмотки v_3 равно 5 В. Напряжение обмотки v_2 равно 25 В, обмотки v_1 – 50 В. Таким образом, схема обеспечивает возможность устанавливать на выходе напряжение от 0 до 99 В с дискретностью в 1 В.

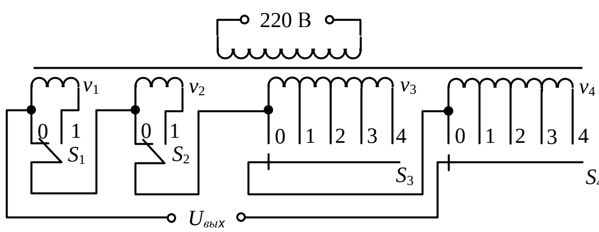


Рис. 9

Пример 2. Известно, что схема имеет K различных значений выходного напряжения, обеспечиваемых четырьмя переключателями. Число позиций m_i у всех переключателей различное и не превышает 10. Найти числа m_1, m_2, m_3, m_4, K, где m_i – число позиций i-го переключателя (i = 1, 2, 3, 4). Определить число решений при условии, что последовательность расположения переключателей не имеет значения.

По правилу произведения $K = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4$.

Очевидно, что $m_i \geq 2$. Всякая четверка чисел из множества {2,3,…,10} является решением. Всего возможно M таких четверок:

$$M = C_9^4 = 126,$$

столько же существует и решений. Наименьшее значение K равно 120 при m_1= 2, m_2 = 3, m_3 = 4, m_4 = 5.

Наибольшее значение K получается при $m_1 = 7$, $m_2 = 8$, $m_3 = 9$, $m_4 = 10$ и равно 5040. В первом случае выходное напряжение можно устанавливать в пределах от 0 до 119 В, во втором – от 0 до 5039 В с дискретностью, равной 1 В.

Упражнения

1. (ЕХР). Какое наибольшее напряжение можно установить на выходе схемы (рис. 8), если каждая обмотка имеет не по 4 секции, а по 5?

2. На рис. 8 схема содержит четыре выходные обмотки по четыре секции каждая. Добавим к ним еще одну 4-секционную обмотку и соответствующий 5-позиционный переключатель. Число значений выходного напряжения возрастет до N (дискретность равна 1 В).

(65Т). Найдите число N.

(ЩАТ). Определите напряжение одной секции добавленной обмотки.

(ФРЕ). Укажите позиции, в которые необходимо установить переключатели, чтобы на выходе было 1009 В: $S_{доб}$=…; S_1 =…; S_2 =…; S_3 =…; S_4 =…, где $S_{доб}$ – переключатель, подключенный к добавленной обмотке.

3. (СОФ). Даны пять переключателей, число позиций которых 2, 3, 2, 5, 3. Какое наибольшее напряжение (в вольтах) можно получить при помощи схемы, аналогичной рис. 9, если дискретность равна 1 В?

4. (УМЖ). Обмотку v_1 на рис. 8 заменили 6-секционной обмоткой. На сколько вольт возросло максимальное выходное напряжение по сравнению с исходной схемой?

5. (ИЯЗ). На рис. 9 концы обмотки v_1 поменяли местами. Сколько значений напряжения можно установить на выходе, меняя положения переключателей?

6. (314). Сколько различных значений выходного напряжения можно получить (рис. 9), если напряжение каждой секции обмотки v_2 увеличить до 80 В, а напряжение каждой секции обмотки v_1 – до 160 В?

(ТЕИ). Какова величина максимального напряжения, которое может быть установлено на выходе схемы?

7. Пусть на рис. 8 все обмотки одинаковы и напряжение каждой секции равно 1 В. Ответьте на вопросы:

(825) какова максимальная величина выходного напряжения, которое может быть установлено при помощи переключателей?

(806) сколько существует четырехразрядных пятеричных чисел, каждому из которых соответствует выходное напряжение, равное 2 В?

2.4. Задача о расписании занятий

Эта задача относится к особому классу комбинаторных задач, для решения которых не существует простых формул. Решаются они логическими способами с применением тождественных преобразований алгебры логики. Основу этих способов составляет метод Петрика, рассмотренный в первой части данного пособия и использованный для нахождения всех тупиковых форм булевых функций. Тот же метод был применен и для нахождения всех минимальных функционально полных систем в теме «Теория конечных автоматов». Теперь рассмотрим применение метода Петрика для решения задачи о расписании занятий. Согласно [49], подобные задачи относятся к классу комбинаторных экстремальных задач и называются задачами о покрытии. Их можно решать методами теории трансверсалей [51].

Постановка задачи (сильно упрощенная): даны n уроков, которые ведут m преподавателей в одном и том же классе. Каждый преподаватель сообщает дни и часы, в которые ему удобнее всего проводить занятия. Сколько существует вариантов расписания занятий при условии, что все заявки каждого преподавателя учтены?

Общее решение:

а) все уроки нумеруются подряд за определенный цикл времени (например за две недели);

б) всем преподавателям ставятся в соответствие некоторые буквы например A, B, C, …;

в) вводятся логические аргументы вида A_i, B_i, C_i, …, где i = 1, 2, 3, …, n. При этом $A_i = 1$, если преподаватель A ведет i-й по счету урок; $A_i = 0$, если преподаватель A i-й урок не ведет. Точно так же интерпретируются все остальные аргументы;

г) составляется булево уравнение вида

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \ldots \cdot \varphi_m = 1,$$

где φ_j ($j = 1,2,\ldots,m$) – булева функция, учитывающая условия, высказанные j-м преподавателем относительно дней и часов, в которые ему удобнее всего вести уроки;

д) каждое решение данного уравнения представляет собой определенный вариант расписания. Число всех таких решений является ответом к поставленной задаче.

Пример 1. Составляется расписание пяти уроков. Преподаватели подали заявки: историк изъявил желание вести 1-й урок, либо 4-й, либо 5-й; литератор – 1-й либо 2-й; физик – 2-й либо 3-й; математик – 2-й либо 5-й, химик – какой угодно, но не первый и не последний.

Введем обозначения: И – историк, Л – литератор, Ф – физик, М – математик, Х – химик. Согласно поданным заявкам имеем:

$\varphi_1 = И_1 + И_4 + И_5$; $\varphi_2 = Л_1 + Л_2$; $\varphi_3 = Ф_2 + Ф_3$; $\varphi_4 = М_2 + М_5$; $\varphi_5 = Х_2 + Х_3 + Х_4$.

Составляем булево уравнение:

$$\varphi_1\, \varphi_2\, \varphi_3\, \varphi_4\, \varphi_5 = (И_1 + И_4 + И_5)(Л_1 + Л_2)(Ф_2 + Ф_3)\ \&$$
$$\&\ (М_2 + М_5)(Х_2 + Х_3 + Х_4) = 1.$$

Раскрыв скобки, выполнив все операции поглощения и исключив случаи, когда два преподавателя одновременно ведут один и тот же урок, получим:

$$Л_1Х_2Ф_3И_4М_5+Л_1Ф_2Х_3И_4М_5+Л_1М_2Ф_3Х_4И_5+И_1Л_2Ф_3Х_4М_5=1.$$

Таким образом, при заданных заявках преподавателей существует четыре варианта расписания, согласно четырем конъюнкциям, дизъюнкция которых образует данное уравнение. Расшифруем первую конъюнкцию. Если

$$Л_1Х_2Ф_3И_4М_5 = 1,$$

то это значит, что первый урок ведет литератор; второй – химик; третий – физик; четвертый – историк; пятый – математик. Аналогично расшифровываются и оставшиеся три конъюнкции.

Пример 2. В условие предыдущего примера внесем изменение: историк и химик не подали заявки, так как они могут вести занятия в любое время. Определим число вариантов расписания.

В этом случае:

$$(И_1+И_2+\ldots+И_5)(Л_1+Л_2)(Ф_2+Ф_3)(М_2+М_5)(Х_1+Х_2+\ldots+Х_5) =1.$$

Раскрыв скобки, получим восемь вариантов расписания:

$$Л_1Ф_2И_3Х_4М_5 + Л_1Ф_2Х_3И_4М_5 + Л_1М_2Ф_3Х_4И_5 +$$
$$+ Л_1М_2Ф_3И_4Х_5 + Л_1И_2Ф_3Х_4М_5 + Л_1Х_2Ф_3И_4М_5 +$$
$$+ И_1Л_2Ф_3Х_4М_5 + Х_1Л_2Ф_3И_4М_5 = 1.$$

Пример 3. В условие примера 1 внесем следующее изменение: всем преподавателям безразлично время проведения занятий. Найдем все варианты расписания.

Согласно методу Петрика имеем:

$$(И_1+И_2+…+И_5)(Л_1+Л_2+…+Л_5)(Ф_1+Ф_2+…+Ф_5)\&$$
$$\&(М_1+М_2+…+М_5)(Х_1+Х_2+…+Х_5) = 1.$$

Если раскрыть скобки, то получим 120 конъюнкций по пять переменных каждая. Это число можно найти и другим способом. Запишем в ряд буквы И, Л, Ф, М, Х и припишем к ним индексы 1, 2, 3, 4, 5. Любая последовательность индексов дает вариант расписания. Общее число таких последовательностей равно 5! = 120, столько же существует и вариантов расписания занятий.

Пример 4. Составляется расписание на шесть уроков. Математик заявил, что ему удобно вести первый урок либо шестой. Физику надо подряд два часа – либо 1-й и 2-й уроки, либо 4-й и 5-й. Литератор сказал, что ему не надо ставить в расписание первые два урока и последний. Химику безразлично, когда вести занятия. Историк подал заявку на один из первых трех уроков. Сколько существует вариантов расписания?

По аналогии с предыдущими примерами составляем уравнение:

$$(М_1+М_6)(Ф_1Ф_2+Ф_4Ф_5)(Л_3+Л_4+Л_5)(И_1+И_2+И_3)\&$$
$$\&(Х_1+Х_2+Х_3+Х_4+Х_5+Х_6)= 1.$$

Раскроем скобки:

$$И_1Х_2Л_3Ф_4Ф_5М_6 + М_1И_2Л_3Ф_4Ф_5Х_6 + Х_1И_2Л_3Ф_4Ф_5М_6 +$$
$$+ Ф_1Ф_2И_3Л_4Х_5М_6 + Ф_1Ф_2И_3Х_4Л_5М_6 = 1,$$

откуда находим, что всего существует пять вариантов расписания занятий.

Упражнения

1. (Р76)! Составляют расписание занятий на 6 уроков для одного и того же класса. Пожелания преподавателей: математик сделал заявку на первый урок. Физик – на два урока подряд – 4-й и 5-й. Химику, литератору и историку безразлично, когда вести занятия. Сколько существует вариантов расписания? Сколько существует вариантов, в которых химик ведет второй урок?

2. (П67). При составлении расписания химик сказал, что ему необходим первый урок и шестой. Литератору, историку и математику безразлично, какой по счету вести урок. Физик сообщил, что он возьмет тот урок, какой ему достанется, после того как будут удовлетворены заявки всех других преподавателей. Сколько существует вариантов расписания?

2.5. Задача о подборе экипажа космического корабля

Обычно космические путешествия продолжаются весьма длительное время. Для успешного выполнения программы полета крайне желательно, чтобы в команде корабля не было ни одной пары психологически несовместимых космонавтов. В связи с этим экипаж формируют с учетом психологической совместимости будущих участников полета, выбирая на каждую должность по одному человеку из нескольких. Математический аспект этой задачи заключается в следующем: на основе сведений о психологической совместимости претендентов на участие в полете требуется найти число возможных вариантов экипажа и определить их состав.

В качестве примера рассмотрим задачу из [10, с. 20].

Для космического полета составляют экипаж из трех человек: командира, инженера и врача. Командира можно выбрать из четырех человек: a_1, a_2, a_3, a_4; инженера – из трех: b_1, b_2, b_3; врача – также из трех: c_1, c_2, c_3. Если не учитывать психологическую совместимость, то возможно 36 вариантов экипажа. Однако оказалось, что инженер b_1 несовместим с врачом c_3, инженер b_2 несовместим с врачом c_1, инженер b_3 несовместим с врачом c_2. Кроме того, известно, что командир a_1 совместим с инженерами b_1 и b_3 и врачами c_2 и c_3; командир a_2 совместим с инженерами b_1 и b_2 и всеми врачами; командир a_3 совместим с инженерами b_1 и b_2 и врачами c_1 и c_3; командир a_4 совместим со всеми инженерами и врачом c_3. Сколько возможно вариантов экипажа?

Эту задачу можно решить по аналогии с задачей о расписании. Введем логические переменные: $A_1 = 1$, если командир a_1 включен в состав экипажа; если не включен, то $A_1 = 0$. Точно так же вводятся переменные A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3. На основе сведений о совместимости составляем булево уравнение:

$$A_1(B_1+B_3)(C_2+C_3) + A_2(B_1+B_2)(C_1+C_2+C_3) +$$
$$+A_3(B_1+B_2)(C_1+C_3) + A_4(B_1+B_2 +B_3)C_3 = 1.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$A_1B_1C_2+A_1B_1C_3+A_1B_3C_2+A_1B_3C_3+A_2B_1C_1+A_2B_1C_2+$$
$$+A_2B_1C_3+A_2B_2C_1+A_2B_2C_2+A_2B_2C_3+A_3B_1C_1+A_3B_1C_3+A_3B_2C_1+$$
$$+A_3B_2C_3 +A_4B_1C_3+A_4B_2C_3+A_4B_3C_3 = 1.$$

В этом уравнении представлено 17 вариантов экипажа, но условиям задачи они удовлетворяют не все. Например, конъюнкция $A_1B_1C_3$ говорит о том, что в экипаж включен командир a_1, инженер b_1 и врач c_3. Но инженер b_1 несовместим с врачом c_3. Поэтому из уравнения необходимо удалить конъюнкции $A_1B_1C_3$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_1C_3$ и $A_4B_1C_3$. Удаляем и конъюнкции $A_2B_2C_1$ и $A_1B_2C_1$ (инженер b_2 несовместим с врачом c_1), а также конъюнкцию $A_1B_3C_2$ (инженер b_3 несовместим с врачом c_2).

Таким образом, согласно заданным условиям существует 10 вариантов экипажа для космического корабля. Все они представлены в булевом уравнении вида

$$A_1B_1C_2+A_1B_3C_3+A_2B_1C_1+A_2B_1C_2+A_2B_2C_2+A_2B_2C_3+$$
$$+A_3B_1C_1+A_3B_2C_3+A_4B_2C_3+A_4B_3C_3 = 1.$$

2.6. Задача о беспорядках

Постановка задачи. Дано множество $Z=\{a_1, a_2,…, a_n\}$. Расположим элементы этого множества в определенной последовательности, например, в порядке возрастания их индексов слева направо. Требуется определить, сколько существует перестановок этих n элементов, в которых ни один элемент не занимает своего первоначального места. Каждая из таких перестановок называется беспорядком.

Если $Z = \{a_1\}$, то перестановки невозможны, то есть у синглетона беспорядков нет.

Если $Z = \{a_1, a_2\}$, то существует, кроме исходной, только одна перестановка a_2a_1. Эта перестановка является беспорядком.

Если $Z = \{a_1, a_2, a_3\}$, то всего существует 3! = 6 последовательностей $a_1a_2a_3$; $a_1a_3a_2$; $a_2a_1a_3$; $a_3a_1a_2$; $a_2a_3a_1$; $a_3a_2a_1$, среди которых два беспорядка $a_3a_1a_2$ и $a_2a_3a_1$. В [12, с. 259; 35, с. 142; 56, с. 34] дан вывод формулы, позволяющей найти число N всех беспорядков для n элементов. Эта формула имеет вид

$$N = n!\left[(-1)^0\frac{1}{0!}+(-1)^1\frac{1}{1!}+(-1)^2\frac{1}{2!}+(-1)^3\frac{1}{3!}+...+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\frac{1}{n!}\right] = n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}. \qquad (22)$$

Например, если $n = 4$, то по формуле (22) находим:

$$N = 4!\left[(-1)^0\frac{1}{0!}+(-1)^1\frac{1}{1!}+(-1)^2\frac{1}{2!}+(-1)^3\frac{1}{3!}+(-1)^4\frac{1}{4!}\right]=$$

$$=24\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)=12-4+1=9.$$

Число N можно выразить и через формулу числа сочетаний [10, с. 69]:

$$N=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)!\,.$$

Формула (22) позволяет найти число беспорядков, но сами перестановки, являющиеся беспорядками, по ней найти невозможно. Для их отыскания можно воспользоваться уже хорошо знакомым нам методом Петрика.

Поставим в соответствие элементу $a_1\in Z$ n логических переменных вида A_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$, со следующей интерпретацией: если элемент $a_1\in Z$ занимает i-е место в последовательности, то $A_i = 1$, все остальные аргументы A_i равны нулю. Точно так же вводятся логические аргументы и для других элементов множества Z.

Составляем булево уравнение вида

$$\varphi_1\cdot\varphi_2\cdot\varphi_3\cdot\ldots\cdot\varphi_n=1, \tag{23}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_2 + A_3 + \ldots + A_n;\\
\varphi_2 &= B_1 + B_3 + B_4 + \ldots + B_n;\\
\varphi_3 &= C_1 + C_2 + C_4 + \ldots + C_n;\\
&\ldots \quad\ldots\quad \ldots\\
\varphi_n &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Заметим, что функция φ_i представляет собой дизъюнкцию $n-1$ переменных, среди которых отсутствует переменная с индексом i $(i=1,2,3,\ldots,n)$.

Согласно введенной интерпретации логических переменных функция φ_1 принимает единичное значение, если элемент $a_1\in Z$ занимает второе место в последовательности либо третье и так далее до места с номером n. Если же элемент $a_1\in Z$ занимает первое место, то $\varphi_1= 0$, так как при этом $A_2 = A_3 =\ldots= A_n= 0$. Аналогично функция $\varphi_2 = 1$, если элемент $a_2\in Z$ занимает первое место в последовательности, либо третье, либо четвертое и так далее до места с номером n. При $B_2 = 1$ (когда элемент a_2 занимает второе место) функция φ_2 равна нулю. Точно так же интерпретируются и все остальные функции $\varphi_3, \varphi_4,\ldots, \varphi_n$.

Рассмотрим пример. Найдем все беспорядки, если

$$Z = \{a, b, c, d\}.$$

Согласно (24) $\varphi_1 = A_2 + A_3 + A_4$. Функция φ_1 равна единице, если элемент a занимает не первое место. Аналогично получаем:

$$\varphi_2 = B_1 + B_3 + B_4;$$
$$\varphi_3 = C_1 + C_2 + C_4;$$
$$\varphi_4 = D_1 + D_2 + D_3.$$

Составляем уравнение:

$$(A_2+A_3+A_4)(B_1+B_3+B_4)(C_1+C_2+C_4)(D_1+D_2+D_3) =1.$$

Раскроем скобки, тогда получим искомый результат:

$$C_1D_2A_3B_4+C_1D_2B_3A_4+C_1D_3A_2B_4+C_2D_1A_3B_4 + C_2D_1A_4B_3 +$$
$$+C_2D_3A_4B_1+C_4D_1A_2B_3 +C_4D_2A_3B_1 +C_4D_3A_2B_1 = 1.$$

Воспользовавшись введенной интерпретацией логических переменных, расшифруем полученную запись. Если $C_1D_2A_3B_4 = 1$, то $C_1 = D_2 = A_3 = B_4 = 1$. Отсюда следует, что элемент c занимает первое место, d – второе, a – третье, b – четвертое. Если $C_1D_2B_3A_4 = 1$, то элемент c занимает первое место, d – второе, b – третье, a – четвертое. Точно так же расшифровываются все остальные конъюнкции. В результате искомый список беспорядков имеет вид:

cdab, *cdba*, *cadb*, *dcab*, *dcba*, *bcda*, *dabc*, *bdac*, *badc*.

Упражнения

1. (ТХМ). Найти число всех беспорядков, если упорядоченное множество содержит шесть элементов.

2. (АЙФ). Сколько существует пятизначных чисел, в которых по одному разу встречаются цифры 1,2,3,4,5, если цифра 1 находится не на первом месте, цифра 2 – не на втором, цифра 3 – не на третьем, цифра 4 – не на четвертом и цифра 5 – не на пятом?

3. (412)! Найти число беспорядков для элементов множеств $A = \{\varnothing\}$; $A = \{\varnothing,3\}$; $A= \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

4. (964). Секретарь подготовил восемь конвертов для восьми различных писем и отправил их по восьми различным адресам. Вскоре выяснилось, что в половине конвертов оказались не те письма. Сколькими способами могла осуществиться такая ситуация?

5. (ВН5). Для десяти различных приборов приготовили десять табличек с названием каждого прибора. Когда таблички прикрепили, оказалось, что названия соответствуют только первым семи приборам, а остальные таблички оказались перепутанными. Сколькими способами могла осуществиться такая ситуация?

6. (Р25). Чтобы передать сообщение, 33 буквы русского алфавита пронумеровали в последовательности 1,2,3,…,33 и вместо букв стали передавать их номера. Однако в кодирующем устройстве возникла неисправность, и у одной из букв код оказался другим, но не превышающим 33. Сколькими способами это могло произойти?

2.7. Двоично-кодированные системы

Современные ЭВМ работают в двоичной системе счисления. Человек же привык к десятичной системе. Следовательно, все введенные в компьютер десятичные числа (а также другие символы) должны быть представлены в виде двоичных кодов. Эта задача имеет много решений. Ограничимся только двоично-десятичными системами, когда каждая десятичная цифра заменяется определенной комбинацией нулей и единиц.

Различают весовые (взвешенные [52, с. 237]), невесовые (невзвешенные) и смешанные системы двоичного кодирования десятичных цифр. Основой весовых систем является полином вида

$$N = x_na_n + x_{n-1}a_{n-1} +\ldots + x_1a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i,$$

где n – число двоичных знаков, используемых для представления десятичной цифры N; x_i $(i = 1,2, \ldots,n)$ – двоичные цифры 0 или 1; a_i – целые коэффициенты, которые в общем случае могут быть не только положительными, но и отрицательными.

Наиболее распространенным является код 8421, в названии которого указаны веса: $a_4 = 8$, $a_3 = 4$, $a_2 = 2$, $a_1 = 1$. Это обычная двоичная система счисления, где коэффициенты представляют собой степени числа 2. Десятичная цифра 0 в коде 8421 имеет вид 0000, 1 – 0001, 2 – 0010, 3 – 0011, …, 9 – 1001. Очевидно, что четыре двоичных знака – это наименьшая длина кода для представления десятичных цифр: если код уменьшить на один разряд, то получится только восемь двоичных кодов и две десятичные цифры окажутся незакодированными.

Кроме кода 8421 существует много других весовых двоично-кодированных систем. Некоторые из них приведены в табл. 2. В ее левой колонке, обозначенной «Дес.», записаны кодируемые десятичные цифры.

Таблица 2

Дес.	8421	2421	5211	6311	3321	51111	4311
0	0000	0000	0000	0000	0000	00000	0000
1	0001	0001	0001	0001	0001	00001	0001
2	0010	0010	0011	0011	0010	00011	0011
3	0011	0011	0101	0100	0011	00111	0100
4	0100	0100	0111	0101	0101	01111	0101
5	0101	1011	1000	0111	1010	10000	1010
6	0110	1100	1010	1000	1100	11000	1011
7	0111	1101	1100	1001	1101	11100	1100
8	1000	1110	1110	1011	1110	11110	1110
9	1001	1111	1111	1100	1111	11111	1111

Двоичные коды с различными системами весов разрабатывались с целью упрощения вычислений при машинном выполнении арифметических операций. Но в данном случае этот аспект мы оставим в стороне и все внимание сосредоточим на комбинаторных свойствах кодов.

Во всех весовых кодах единицы показывают, какие веса необходимо сложить, чтобы по двоичному коду определить соответствующую десятичную цифру. Пусть двоичный код в системе 2421 имеет вид 1101. Тогда

$$1101|_{2421} = 2 + 4 + 0 + 1 = 7|_{10},$$

т. е. код 1101 в системе 2421 – это цифра 7 в десятичной системе. Нетрудно заметить, что цифру 7 можно закодировать и другим способом в той же системе 2421:

$$0111|_{2421} = 0 + 4 + 2 + 1 = 7|_{10},$$

Если в табл. 2 в колонке 2421 код 1101 заменить на 0111, то получится новый вариант кодирования десятичных цифр, отличающийся от исходного кодом цифры 7, но совпадающий с ним по существу. Точно так же двумя способами можно закодировать цифры: 2 – 0010 и 1000; 3 – 0011 и 1001, 4 – 0100 и 1010, 5 – 1011 и 0101, 6 – 1100 и 0110. Таким образом, имеется шесть десятичных цифр, каждую из которых можно закодировать двумя способами. Следовательно, в системе 2421 существует 64 варианта кодирования десятичных цифр.

Рассмотрим код 3321 и выясним, сколькими способами можно закодировать десятичные цифры. Один вариант указан в табл. 2. Чтобы найти другие варианты, выясним, какие цифры кодируются неоднозначно. Цифра 3 имеет три способа кодирования: 1000, 0100, 0011; цифра 6 – также три способа: 1011, 0111, 1100; цифра 4 – два варианта: 1001, 0101; цифра 5 – также два варианта: 1010 и 0110. Используя те или иные коды для цифр 3, 4, 5, 6, мы всякий раз будем получать новые варианты кодирования десятичных цифр. Число всех таких способов равно: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

В невесовых системах кодирование осуществляется при помощи таблиц, в котроых для каждой десятичной цифры указан двоичный код, в общем случае – по «договоренности». Например, условимся считать, что десятичные цифры кодируются четырехзначными двоичными кодами. Найдем число возможных вариантов такого кодирования. Всего существует 16 различных четырехразрядных двоичных кодов. Любые десять из них можно выбрать для кодирования десятичных цифр. Число R выборок равно:

$$R = C_{16}^{10} = \frac{16!}{10! \cdot 6!} = 8008.$$

В каждой выборке цифру 0 можно закодировать десятью способами. Если для цифры 0 один код использован, то остается девять кодов для цифры 1, восемь кодов для цифры 2 и т. д. Всего таких способов существует 10! = 3628800. Тогда искомое число S всех вариантов кодирования десятичных цифр двоичными четырехзначными кодами (в невесовой системе) равно:

$$S = C_{16}^{10} \cdot 10! = \frac{16!}{6!} = 29059430400 \approx 2{,}9 \cdot 10^{10}$$

Упражнения

1. (200)! Какие цифры закодированы в системе 5211, если двоичные коды имеют вид 0011, 0111, 1100?

2. (ИВФ)! Какие цифры закодированы в системе 3321, если двоичные коды имеют вид 1010, 1100, 0111?

3. (ББФ)! Сколько двоичных кодов являются неиспользованными в системе 5211? 4311?

4. Какие десятичные цифры могут быть закодированы точно двумя способами в системе:

(ЛИЗ) 2421? (441) 5211? (УХО) 6311?
(С73) 3321? (УУХ) 4311? (КАЙ) 1215?

5. Сколько существует способов кодирования десятичных цифр в системе:

(ПОК) 3321? (ФУ1) 4311? (22Ф) 2481?
(777) 5211? (ПРО) 6311? (ТЭЛ) 7421?

6. (ЯС9). Сколько пятизначных двоичных кодов являются неиспользованными в системе 51111?

7. (260). Укажите цифры, которые в системе 51111 кодируются единственным способом.

8. Для системы 51111 определите число способов, которыми могут быть закодированы цифры:

(ДДО)! 0,1,2? (МАК)! 3,4,5,6? (РУН)! 7, 8,9?

9. (ЭТЯ). Сколько существует способов кодирования десятичных цифр в коде 51111?

10. (ВТК). Сколькими способами можно закодировать десятичные цифры в невесовом коде «2 из 5» (в каждом таком коде две единицы и три нуля)?

11. (ОЛЛ). Сколько существует невесовых кодов вида «3 из 9» (в каждом коде три единицы и шесть нулей)?

12. (В73). Сколько существует невесовых кодов вида «3 из 12» (в каждом коде три единицы и девять нулей), начинающихся с единицы и оканчивающихся нулем?

13. (В90). Известно, что существует 21 невесовой код вида «m из n». Найдите величины m и n, если в каждом коде нулей меньше, чем единиц.

14. (291). Пусть M – количество невесовых двоичных кодов «m из n», N – количество невесовых двоичных кодов «k из n». Найдите числа k, m, n, если $M–N = 5$; $n+m+k = 11$.

2.8. Код Морзе

Морзе Самюэл Финли Бриз (1791–1872) – американский художник и изобретатель. В 1837 г. он изобрел электромеханический печатающий аппарат для приема сообщений при помощи специального кода, получившего в дальнейшем название кода Морзе.

В коде Морзе используется два знака, условно названные «точка» и «тире», хотя на самом деле оба знака – это черточки, только «точка» в три раза короче, чем «тире». При передаче кодов точки от тире (а также точки от точки и тире от тире) отделяются промежутком, равным «длине» точки. Примеры кодов Морзе:

· Е   – Т   ·· И   – – М   · – А   – · Н
– ·· Д   · – · Р   – – ·· З   – – – – Ш   ·· – ·· Э   и т. д.

Длина кодов Морзе различна. Самый длинный код насчитывает 12 знаков. Это код ·–·–·–·–·–·–, обозначающий «начало действия» [40, с. 299]. Так как кодовые последовательности неодинаковы по длине, то букву от буквы принято отделять промежутком, равным по длине трем «точкам», а слово от слова – пятикратным интервалом. В сущности, эти промежутки представляют собой третий и четвертый знаки кода Морзе, и следовало бы говорить, что в коде Морзе используется не два знака, а четыре. Но мы вполне обойдемся без этих третьего и четвертого знаков, так как будем рассматривать только те коды, для которых достаточно двух знаков.

Самые короткие коды Морзе содержат по одному знаку. Ими кодируются буквы **Е** и **Т**, статистически наиболее употребительные буквы английского языка (во время жизни Морзе). Существует четыре кода по два знака каждый (буквы **А**, **И**, **М**, **Н**). Тремя знаками кодируются восемь букв, четырьмя – 16 и т. д. Если n – наибольшая длина кода Морзе, то всего существует N кодов:

$$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i.$$

Запишем число N в виде

$$N = \left(\sum_{i=1}^{n} 2^i + 2^0 \right) - 2^0 = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n) - 1 = \sum_{i=0}^{n} 2^i - 1.$$

Число в скобках – это $(n+1)$-разрядное двоичное число, не содержащее нулей. Если к нему прибавить единицу, то получим двоичное число 100…0, в котором $n+1$ нулей. Такое число равно 2^{n+1}, следовательно,

$$N = (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n + 1 - 1) - 1 = 2^{n+1} - 2.$$

При $n = 4$ имеем $N = 30$. Для кодирования 26 букв латинского алфавита этого вполне хватает, но совершенно недостаточно для кодирования 33 букв русского алфавита. Поэтому при разработке русского варианта кода Морзе алфавит пришлось немного «упростить»: удалили букву **ё**, заменив ее буквой **е**, и сделали неразличимыми твердый и мягкий знаки. Осталось избавиться еще от одного знака. Однако ни удалить его, ни объединить с какой-либо буквой так же безболезненно, как в первых двух случаях, не удалось. Пришлось одну букву закодировать пятизначным кодом. Это буква **Э**, являющаяся одной из наименее употребительных букв русского алфавита. Она получила код ··–·· .

Код Морзе отличается очень большой избыточностью. Если взять за основу таблицу, приведенную в [40, с. 299], число кодов в которой равно 61, то нетрудно сделать вывод, что, в принципе, вполне можно обойтись кодами, длина которых не превышает пяти знаков, поскольку при $n = 5$ существует 62 кода Морзе. На самом же деле, как было сказано выше, используются коды длиной до 12 знаков. При $n = 12$ существует 8190 кодов, применяется же из них менее одного процента.

Упражнения

1. Сколько существует кодов Морзе, каждый из которых содержит:

(ДУФ) 4 знака? (РШФ) 6 знаков? (ОТС)10 знаков?

2. (ЦУФ). Сколько символов можно закодировать кодами Морзе, если длина каждого кода не превышает 4 знака?

3. (322). Сколько знаков можно закодировать кодами Морзе, если в каждом из этих кодов три точки и четыре тире?

4. (ЦАИ). Сколько существует кодов Морзе, начинающихся и оканчивающихся точкой, если в каждом коде четыре точки и пять тире?

5. (985). Сколькими способами можно выбрать 60 кодов Морзе для кодирования 60 букв некоторого алфавита, если длина кода не превышает 5 знаков?

6. (ШТК). 30 букв некоторого алфавита закодированы кодами Морзе, в каждом из которых три тире и четыре точки. Сколько кодов не использовано?

7. (ЯВ7). Буквы алфавита закодированы кодами Морзе, длина которых не превышает 6 знаков. При этом 100 кодов оказались неиспользованными. Сколько букв в алфавите?

2.9. Простые числа

Каждое неотрицательное целое число в зависимости от количества делителей относится к одному из следующих четырех непересекающихся классов [11, с. 299]:

1) классу, состоящему из единственного числа 0 (нуль), имеющего бесконечно много делителей;

2) классу, состоящему также из одного числа. Этот класс образует число 1, имеющее только один делитель;

3) классу простых чисел, имеющих **два различных** делителя – самого себя и единицу. Например: 7, 11, 13, 17, 19 и т. д.;

4) классу составных чисел, не равных нулю и имеющих более двух делителей. Например, число 30 делится на 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Из этой классификации следует, что единица не относится к простым числам, хотя она делится только на саму себя и единицу. Однако в литературе можно встретить и иные утверждения. Например, в [28, с. 485] говорится, что единица – простое число. Впрочем, это следует воспринимать, скорее, как недоразумение, как досадную оплошность автора книги [28] и недосмотр редакторов, так как трудно поверить, что человек такой математической эрудиции, каким является Николай Иванович Кондаков, может относить единицу к классу простых чисел.

Всякое составное натуральное число единственным способом записывается в виде произведения множителей, каждый из которых является простым числом. Это утверждение представляет собой основную теорему арифметики натуральных чисел (элементарной теории чисел по [56, с. 13]). Очевидно, что теорема справедлива только в том случае, если единицу не считать простым числом. Иначе верным окажется другое утверждение: всякое натуральное число может быть представлено в виде произведения простых чисел бесконечным числом способов, например:

$$3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = \ldots$$

Множество простых чисел бесконечно. Это теорема Евклида. Ее доказательство можно найти в [11, с. 302].

Как определить, простым является данное число N или составным? Ответ на этот вопрос дает теорема: наименьший простой делитель составного числа a не превосходит $\sqrt{a}$. Докажем эту теорему.

Пусть p – наименьший простой делитель составного числа a. Тогда $a = pt$, где t – натуральное число, которое может быть и простым и составным. Очевидно, что $p \le t$. Если допустить, что $p > t$, тогда p не будет наименьшим простым делителем. Им окажется число t, если оно простое, либо другой простой делитель, меньший t.

Умножим обе части неравенства $p \le t$ на p. Тогда получим $p^2 \le pt = a$, т. е. $p^2 \le a$, откуда следует, что $p \le \sqrt{a}$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что если число a не делится ни на одно простое число, не превосходящее $\sqrt{a}$, то число a не имеет простых делителей, меньших a, и является простым числом.

Пример 1. Выясним, сколько потребуется сделать проверок, чтобы определить, является ли простым число 139. Для этого запишем:

$$11 < \sqrt{139} < 12.$$

Отсюда следует, что число 139 необходимо разделить на 2, затем на простые числа 3, 5, 7, 11 – всего пять проверок. Ни на одно из этих чисел заданное число 139 не делится, следовательно, оно является простым.

Пример 2. Пусть a = 361. Так как $\sqrt{361}$ = 19, то без всяких проверок ясно, что число 361 является составным, поскольку 361 = 19·19.

Как определить, сколько существует простых чисел в диапазоне от 1 до n? Формулы, позволяющей найти количество простых чисел при заданном n, нет. Но есть алгоритм, обеспечивающий возможность нахождения всех простых чисел из заданного диапазона. В математической литературе этот алгоритм известен под названием решета Эратосфена. (Эратосфен Киренский (276 – 194 гг. до новой эры) – древнегреческий ученый. Занимался не только математикой, но и географией, астрономией, философией, музыкой. Впервые измерил дугу меридиана [47]).

Используя алгоритм Эратосфена, найдем все простые числа для n = 70. Запишем подряд все 70 чисел:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~

Число 1 не является простым, поэтому его вычеркиваем. Переходим к числу 2. Это первое простое число в заданном диапазоне. Вычеркнем все числа, кратные двум: 4, 6, 8, 10, …, 70. Первое невычеркнутое число (после двойки) – это число 3. Оно является простым. Вычеркнем все числа, кратные трем: 6, 9, 12, 15, …., 69. После числа 3 первое невычеркнутое число 5 является простым. Вычеркнем все числа, кратные 5: 10, 15, 20, 25, …, 70. Точно так же поступаем с числами, кратными 7: 14, 21, 28, 35, …, 70. Процесс продолжаем до тех пор, пока не дойдем до простого числа, большего $\sqrt{n}$. Так как в данном случае n = 70, то вычеркивание прекращаем на простом числе 11 (11> $\sqrt{70}$), поскольку вычеркивать нечего: все числа, кратные 11, 13, 17, 19, …, уже вычеркнуты. Таким образом, невычеркнутыми остались 19 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67.

Почему рассмотренный алгоритм назван решетом? В те времена, когда жил Эратосфен, писали на дощечках, покрытых воском, и числа не вычеркивали, а прокалывали. После отыскания всех простых чисел дощечка становилась похожей на решето, откуда и происходит название алгоритма.

Упражнения

1. (УД1). Назовите все простые числа, не превосходящие 10.

2. Укажите простые делители числа a:
(А31) a = 35; (ЛП3) a = 231; (АНК) a = 170.

3. Укажите все простые множители (с учетом их повторов) числа a, если
(ЦПМ) a = 28; (ЖДЛ) a = 250; (562) a = 539.

4. (865)! Укажите наименьшее простое число, являющееся делителем числа: 900; 10011; 911121.

5. (АУФ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) верно ли, что существуют целые числа, имеющие бесконечно много делителей?

2) существуют ли четные простые числа?

3) может ли простое число оканчиваться цифрой 5?

4) может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?

5) может ли произведение двух простых чисел быть простым числом?

6) является ли простым число $2^{10} – 1$?

7) существуют ли простые числа, разность которых равна единице?

6. (ЦАФ). Сколько простых множителей имеет число 2^{20}?

7. (303). Укажите наименьшие два простых числа, разность которых равна двум.

8. (927). Сколько простых множителей имеет число 6^{15}?

9. (106). Известно, что $a – b$ = 1. Найдите числа a и b при условии, что они являются простыми числами.

10. (ОРМ). Сколько двоек в разложении числа 10! на простые множители?

11. (965). Сколько простых множителей в разложили числа 15! на простые множители? (ФАЙ)! Сколько раз встречается множитель 2? Множитель 3?

12. Число 16! оканчивается n нулями. (370)! Найдите число n.

2.10. Задача о числе делителей

Пусть дано натуральное число N >1. Требуется определить, сколько существует натуральных чисел, делящих без остатка число N.

Сплошным перебором легко установить, что, например, число 10 имеет четыре делителя: 1, 2, 5, 10; число 12 – шесть делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12; числа, являющиеся квадратом простого числа, имеют по три делителя.

Как найти число делителей натурального числа N, поясним на примере. Пусть N =1400. Разложим его на простые множители:

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Каждый делитель числа 1400 представляет собой либо отдельное число из семейства {2, 2, 2, 5, 5, 7}, либо произведение некоторых из них (возможно, что и всех). Разложение числа 1400 имеет три простых множителя, из которых множитель 2 встречается три раза, множитель 5 — два раза и множитель 7 — один раз. Разделим все 6 простых множителей на две части подобно тому, как это сделано в задаче о тетрадях (подраздел 2.1). Рассмотрим первую часть. Для выбора числа 2 существует четыре способа (одна двойка, две, три и ни одной), для выбора числа 5 — три способа, для числа 7 — два способа.

Очевидно, что первая часть может быть получена 4·3·2 способами, следовательно, искомое число

$$\tau(1400) = 4\cdot 3\cdot 2 = 24,$$

где $\tau(1400)$ согласно [10, с. 94] обозначает число делителей натурального числа 1400.

Решив эту задачу сплошным перебором, также получим 24 делителя: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 40, 50, 56, 70, 100, 140, 175, 200, 280, 350, 700, 1400.

Таким образом, задача о числе делителей решается точно так же, как и задача о тетрадях, рассмотренная в подразделе 2.1. При этом можно пользоваться формулой (20), если принять $t_1 = t_2 = \ldots = t_k = 0$.

Упражнения

1. Сколько существует делителей числа:

(200) 2625; (НАА) 360; (ХОМ) 512;
(ЯУЗ) 375; (225) 392; (ЖНН) 23?

2. Перечислите (в порядке возрастания) все делители числа:

(594) 14; (МТМ) 25; (ТС1) 8;
(К76) 99; (ГДН) 12; (Ю63) 50.

3. Перечислите (в порядке возрастания) все делители, превосходящие 20, числа:

(ЕС2) 100; (ОИС) 300; (ЛОГ) 99;
(92С) 256; (ЯКИ) 40; (ДЮ7) 70.

2.11. Задача о вписанных треугольниках

В правильный n-угольник вписан треугольник так, что вершины его совпадают с вершинами n-угольника. При этом возможны случаи:

1) две стороны треугольника совпадают с двумя сторонами n-угольника. Обозначим буквой K_1 число таких треугольников;

2) одна сторона треугольника совпадает с одной из сторон n-угольника. Обозначим K_2 – число таких треугольников;

3) ни одна из сторон треугольника не совпадает ни с одной стороной n-угольника. Число таких треугольников обозначим буквой K_3.

Требуется определить числа K_1, K_2 и K_3.

Пронумеруем вершины n-угольника в последовательности 1, 2, 3, …, n. Любые три из этих номеров дают один треугольник. Следовательно, всего существует K треугольников, где

$$K = C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Очевидно, что

$$K = K_1 + K_2 + K_3. \qquad (25)$$

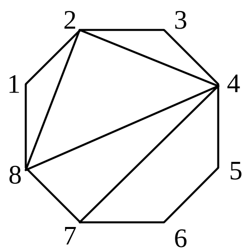


Рис. 10

К первой задаче ответ найти легко. Каждый треугольник, у которого совпадают две стороны со сторонами n-угольника, имеет тупой угол. Примером могут служить треугольники 8-1-2 и 2-3-4 (рис. 10). Вершина при тупом угле треугольника может соответствовать любой вершине n-угольника, следовательно,

$$K_1 = n.$$

Переходим ко второй задаче. Согласно ее условию требуется найти число треугольников, у которых одна сторона совпадает со стороной n-угольника. Примером является треугольник 8-4-7 на рис. 10.

Пусть общей является сторона 3-4. Тогда существует $n - 4$ вариантов построения таких треугольников, поскольку третьей вершиной треугольника не могут быть вершины 2, 3, 4, 5 n-угольника. Если взять другую совпадающую сторону, то получим еще $n - 4$ треугольников. Так как всего у n-угольника n сторон, то

$$K_2 = n(n-4).$$

Число K_3 можно найти из выражения (25):

$$K_3 = K - K_1 - K_2.$$

Однако в данном случае выражением (25) мы воспользуемся для проверки решений, а число K_3 найдем другим путем.

Запишем в ряд номера вершин n-угольника и каждой вершине поставим в соответствие двоичный разряд. Пусть единица в двоичном числе обозначает: соответствующая вершина n-угольника является вершиной треугольника, а нуль: данная вершина n-угольника вершиной треугольника не является. Тогда всякому n-значному двоичному числу, содержащему точно три единицы, будет соответствовать определенный вписанный треугольник. Все числа с тремя единицами, из которых никакие две не стоят рядом и не занимают одновременно места младшего и старшего разрядов, будут соответствовать треугольникам, не имеющим общих с n-угольникм сторон. Найдем количество этих чисел.

Сначала предположим, что число начинается с нуля и нулем оканчивается. Тогда три единицы могут занимать места среди $n - 2$ разрядов. Всего существует C_{n-4}^3 таких чисел (см. пример 5 подраздела 1.9).

Пусть теперь слева находится единица, справа – нуль. Очевидно, что после левой единицы должен стоять только нуль. Тогда две не стоящие рядом единицы могут занимать места $n - 3$ разрядов. Количество таких чисел выражается числом C_{n-4}^2. Столько же существует чисел, у которых слева находится нуль, а справа – единица. Таким образом, число K_3 вписанных треугольников, у которых ни одна сторона не совпадает со сторонами n-угольника, равно

$$K_3 = C_{n-4}^3 + 2C_{n-4}^2 = \frac{(n-6)(n-5)(n-4)}{6} + (n-5)(n-4) =$$

$$= \frac{(n-5)(n-4)n}{6}.$$

Проверим, нет ли ошибок в решениях. Для этого в соответствии с формулой (25) сложим все три числа K_1, K_2 и K_3:

$$K_1 + K_2 + K_3 = n + n(n-4) + \frac{(n-5)(n-4)n}{6} =$$

$$= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = C_n^3 = K.$$

Таким образом, проверка подтвердила правильность найденных чисел K_1, K_2 и K_3.

Упражнения

1. Для случая, когда треугольник вписан в правильный 10-угольник, найдите числа:

(28У) K_1; (75А) K_2; (А13) K_3.

2. (ЮЮГ). Известно, что существует 165 треугольников, вписанных в правильный n-угольник, у которого точно одна сторона совпадает со стороной треугольника. Найдите число n.

3. (ФЕМ). Известно, что существует 800 треугольников, вписанных в правильный n-угольник, у которого ни одна сторона не совпадает со сторонами треугольника. Сколько существует вписанных треугольников, каждый из которых имеет точно одну общую с n-угольником сторону?

4. (Ц96). Известно, что существует 210 треугольников, вписанных в правильный n-угольник, у которого ни одна сторона не совпадает со сторонами треугольника. Сколько существует всех треугольников (любых, с совпадающими и несовпадающими сторонами), которые могут быть вписаны в данный n-угольник?

2.12. Задача о разбиении числа на слагаемые

Существует два варианта этой задачи. В первом предполагается, что слагаемые упорядочены, то есть учитывается последовательность записи слагаемых. Например, выражения 2+3+1 и 2+1+3 считаются различными. Согласно второму варианту эти записи являются неразличимыми (одинаковыми).

Решение первой задачи поясним на примере числа 4. Запишем число 4 в виде суммы единиц: 4 = 1 + 1 + 1 + 1. Каждому знаку «плюс» поставим в соответствие двоичный разряд. Получим трехразрядные двоичные коды. Условимся считать, что нули обозначают суммирование единиц, а единицы отделяют одно слагаемое от другого. Тогда получим все варианты разбиения числа 4 на слагаемые:

4 = 1 + 1 + 1 + 1

0	0	0	4
0	0	1	3 + 1
0	1	0	2 + 2
0	1	1	2 + 1 + 1
1	0	0	1 + 3
1	0	1	1 + 2 + 1
1	1	0	1 + 1 + 2
1	1	1	1 + 1 + 1 + 1

Рассмотрим, например, код 010. Согласно этому коду первые две единицы в числе 4 необходимо сложить. Получим первое искомое слагаемое – число 2. Последние две единицы в числе 4 также суммируем. Получим второе слагаемое – число 2. Единица в двоичном коде отделяет оно слагаемое от другого. Таким образом, коду 010 соответствует разбиение числа 4 на два слагаемых вида 4 = 2 + 2.

Рассмотрим код 100. Единица в его записи удаляет первый знак «плюс» в выражении 1 + 1 + 1 + 1. Следовательно, первое слагаемое – это число 1, второе – число 1 + 1 + 1 = 3.

В коде 101 две единицы. Они делят число 4 на три слагаемых: 4 = 1 + 2 + 1 и т. д.

Всего существует $2^3 = 8$ трехзначных двоичных чисел. Столько же существует и способов разбиения числа 4 на слагаемые с учетом порядка их записи, если считать, что само число 4 также является разбиением (ему соответствует код 000).

Если таким же образом разбить на слагаемые число 5, то каждый вариант разбиения представится 4-значным двоичным кодом. Следовательно, число 5 может быть разбито на слагаемые $2^4 = 16$ способами.

Очевидно, что в общем случае число способов разбиения натурального числа n на слагаемые равно 2^{n-1}.

Второй вариант задачи сформулируем следующим образом. Найти все разбиения числа n на слагаемые, сумма которых равна n, при условии, что порядок записи слагаемых не учитывается.

Решение задачи проиллюстрируем на нескольких примерах. При этом, как и в предыдущем случае, условимся считать, что число n также представляет собой вариант разбиения.

Число 1 имеет единственный вариант разбиения в виде самого этого числа.

Число 2 имеет два способа разбиения: 2 и 1 + 1.

Число 3 разбивается на слагаемые следующими тремя способами: 3; 1 + 2; 1 + 1 + 1.

Число 4 – пятью способами:

4; 1 + 3; 2 + 2; 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 1.

Далее действия необходимо упорядочить во избежание пропусков и повторов. Сначала будем находить разбиения в виде двух слагаемых, затем – трех и так далее, располагая их в виде колонок. Кроме того, условимся записывать слагаемые так, чтобы они шли в неубывающей последовательности (слева направо). Для простоты записей знаки «плюс» можно не указывать. Тогда получающиеся последовательности можно рассматривать как числа, записанные в некоторой системе счисления. В колонках эти числа должны идти в порядке возрастания.

Начнем с числа 5:

5	14	113	1112	11111
	23	122		

В первой колонке одно число 5. Во второй – два варианта разбиения числа 5, представленные как 14 и 23, что обозначает 1 + 4 и 2 + 3 соответственно. В разбиении 14 число 4 можно записать как 13 и 22. Подставим их в 14 и получим третью колонку. Четвертая колонка получена на основе третьей, пятая – на основе четвертой. Таким образом, число 5 может быть разбито на слагаемые следующими семью способами: 5; 1 + 4; 2 + 3; 1 + 1 + 3; 1 + 2 + 2; 1 + 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Число 7 имеет 15 вариантов разбиения на слагаемые:

7	16	115	1114	11113	111112	1111111
	25	124	1123	11122		
	34	133	1222			
		223				

Здесь, как и в случае числа 5, каждая следующая колонка получена на основе предыдущей путем представления в виде двух слагаемых правой цифры каждого разбиения.

Число 8 разбивается на слагаемые 22 способами:

8	17	116	1115	11114	111113	1111112	11111111
	26	125	1124	11123	111122		
	27	134	1133	11222			
	44	224	1223				
		233	2222				

Аналогичным путем можно найти все разбиения любого натурального числа.

Упражнения

1. Сколько существует способов разбиения на слагаемые числа 5 при условии, что порядок слагаемых учитывается и что каждая сумма начинается:

(ЛЕЛ) с единицы (например, 1 + 2 + 2)?

(4РИ) с цифры 2 (например, 2 + 3)?

(Ж81) с цифры 3?

(22Е) с цифры 4?

(ТЖТ) с цифры 5?

2. Сколько существует вариантов разбиения на слагаемые числа 8 при условии, что учитывается порядок слагаемых и что каждое разбиение содержит:

(ЯИН) три слагаемых? (ЯД6) четыре слагаемых?
(ЭДИ) пять слагаемых? (ФКТ) шесть слагаемых?

3. Сколько существует вариантов разбиения на слагаемые числа 5, если учитывается порядок слагаемых и в каждом разбиении содержится хотя бы одна цифра:

(ОМЬ) 1? (ОТЬ) 2? (ЫТЬ) 3? (ТН7) 4?

4. Найдите все способы разбиения числа 6 на слагаемые при условии, что порядок записи слагаемых не имеет значения. Определите:

(СПШ) число разбиений, имеющих по три слагаемых;
(Э7Ю) число разбиений, имеющих более двух слагаемых;
(УДК) число всех разбиений.

5. То же самое, что и в упражнении 4, выполните для числа 9. Найдите число:

(ЫЛЬ) разбиений, содержащих по три слагаемых;
(ЭШО) разбиений, содержащих по четыре слагаемых;
(ЙТК) разбиений, содержащих по пять слагаемых;
(ЭЖЛ) всех слагаемых.

2.13. Задача о «счастливых» троллейбусных билетах

Троллейбусные билеты нумеруются шестизначными десятичными числами в пределах от 000000 до 999999, при этом номера могут начинаться с нуля. Условимся считать билет «счастливым», если сумма трех первых цифр (левая сумма) в его номере равна сумме трех последних (правая сумма). Например, номер 430016 является «счастливым», так как $4 + 3 + 0 = 0 + 1 + 6$, в то время как номер 487220 «счастливым» не является, поскольку $4 + 8 + 7 \neq 2 + 2 + 0$. Требуется определить число K всех «счастливых» номеров.

Сумма трех десятичных цифр может находиться в пределах от 0 до 27. Обозначим буквой M_i количество трехзначных десятичных чисел, сумма цифр которых равна i, где $i = 0, 1, 2, \dots, 27$.

Существует единственное трехзначное число (000) с суммой цифр, равной нулю. Следовательно, $M_0 = 1$. Величина M_{27} также равна единице, так как существует лишь одно число с суммой цифр, равной 27. Это 999.

Сумму цифр, равную единице, дают три числа: 001, 010 и 100. Следовательно, $M_1 = 3$. Кроме того, $M_{26} = 3$, поскольку существует три числа с суммой цифр, равной 26: 998, 989, 899.

Имеется 6 трехзначных чисел, дающих при суммировании их цифр число 2: 002, 020, 200, 011, 101, 110. Следовательно, $M_2 = 6$. Кроме того, $M_{25} = 6$, поскольку существует 6 трехзначных чисел, сумма которых рана 2: 997, 979, 799, 889, 898, 988.

Заметим, что $M_j = M_{27-j}$, где $j = 0, 1, 2, \dots, 13$. Это позволяет ограничиться вычислением лишь 14 величин M_0, M_1, M_2, …, M_{13}. Из них M_0, M_1, M_2 уже получены. Для нахождения всех остальных 11 чисел все действия упорядочим подобно тому, как это сделано в предыдущем подразделе. Начинать всегда будем с наименьшего трехзначного числа, располагая цифры в порядке неубывания. После этого для каждого числа найдем число перестановок его цифр и результаты сложим.

Найдем величину M_3. Наименьшим является число 003. Цифру 3 в нем уменьшим на единицу, а средний нуль увеличим на единицу. Получим 012. Число 2 уменьшим на единицу, а вместо нуля запишем единицу. Получим 111. В результате перестановок цифр в числе 003 получим также три числа: 003, 030, 300. Перестановки цифр в числе 012 дают 6 чисел: 012, 021,102, 201,120, 210. Запишем все это следующим образом:

003 – 3; 012 – 6; 111 – 1,

где слева от черточки расположено число, записанное в порядке неубывания цифр, а справа – число, показывающее, сколько всего существует перестановок цифр этого числа. Все правые числа просуммируем, тогда получим:

$$M_3 = 3 + 6 + 1 = 10, \quad M_{24} = 10.$$

Переходим к числу 4. $M_4 = 15$ ($M_{23} = 15$), так как

004 – 3; 013 – 6; 022 – 3; 112 – 3.

Аналогично $M_5 = M_{22} = 21$, так как:

005 – 3; 014 – 6; 023 – 6; 113 – 3; 122 – 3.

$M_6 = M_{21} = 28$, так как 006 – 3; 015 – 6; 024 – 6; 033 – 3; 114 – 3; 123 – 6; 222 – 1.

$M_7 = M_{20} = 36$, так как 007 – 3; 016 – 6; 025 – 6; 034 – 6; 115 – 3; 124 – 6; 133 – 3; 223 – 3.

Вычисляя таким же образом, получаем:

$M_8 = M_{19} = 45$; $M_9 = M_{18} = 55$, $M_{10} = M_{17} = 63$,
$M_{11} = M_{16} = 69$, $M_{12} = M_{15} = 73$, $M_{13} = M_{14} = 75$.

Таким образом, для всех значений i мы нашли, сколько существует трехзначных десятичных чисел, сумма цифр которых равна i. Теперь найти число всех «счастливых» билетов нетрудно.

Пусть левая сумма равна нулю. Случаю, когда и правая сумма равна нулю, соответствует единственное шестизначное число 000000.

Если левая сумма равна единице, то число «счастливых» билетов равно 9, так как каждой из трех левых сумм можно поставить в соответствие такие же три правые суммы (в соответствии с правилом произведения):

001001; 010001; 100001;
001010; 010010; 100010;
001100; 010100; 100100.

Если левая сумма равна 2, то число «счастливых» номеров равно 100, и т.д. Очевидно, что если левая сумма равна i, то существует i^2 «счастливых» билетов.

Чтобы найти число K, достаточно вычислить сумму

$$K = m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{27}^2 = 2(m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{13}^2),$$

подставив найденные значения m_0, m_1, m_2, …, m_{13}:

$$K = 2(1 + 9 + 36 + 100 + 225 + 441 + 784 + 1296 + 2025 + {} + 3025 + 3969 + 4761 + 5329 + 5625) = 2 \cdot 27626 = 55252.$$

Таким образом, всего существует 55252 «счастливых» билетов.

Упражнения

1. (ПАТ). Если сумма цифр, стоящих на четных местах в шестизначном номере троллейбусного билета, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, то такой билет будем считать «счастливым». Сколько существует таких билетов?

2. Сколько существует двухразрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля, сумма цифр которых равна: (ОЦЭ) 8? (ОТМ) 10? (57К) 12?

3. Сколько существует 4-значных десятичных чисел, начинающихся с единицы, сумма цифр которых равна:

(ФАК) 6? (ЕСО) 7? (ЕЮМ) 8? (АБЫ) 9?

4. Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, в каждом из которых имеется точно две одинаковые цифры и сумма цифр равна:

(ЮХ1) 6? (МЫХ) 7? (УЖУ) 8? (ОЖН) 9?

2.14. Упражнения по всему курсу комбинаторики

1. (УЮФ). Город A связан с городом B n дорогами. Известно, что путешественник может посетить город B из города A 210 способами при условии, что возвращается он по другой дороге. Найдите n.

2. (КБ2). Город A связан с городом B n дорогами. Путешественник решил посетить город B (из города A) два раза, не проезжая за оба путешествия более одного раза по одной и той же дороге как туда, так и обратно. Сколькими способами он может это сделать при $n = 9$?

3. Город A связан с городом B m дорогами, ведущими только из A в B. Кроме того, существует n дорог, которые ведут только из B в A, и k дорог, по которым можно ездить в обоих направлениях.

а) (513). Сколькими способами можно посетить город B (из города A) при $m = 3$, $n = 4$, $k = 5$, если возврат допускается по той же дороге, что и при поездке из A в B (очевидно, это относится только к дорогам, где разрешается двустороннее движение)?

б) (БТЕ). Сколькими способами можно посетить город B при $m = 3$, $n = 4$, $k = 5$, если возврат всегда осуществляется по другой дороге?

4. Из цифр 1,2,3,4,5 составили пятизначное число, в котором цифра младшего разряда является четной, а старшего – нечетной. (МТ6). Сколько существует таких чисел, если цифры могут повторяться? (382). Сколько существует чисел, в которых все цифры разные?

5. (827). Известно, что существует 59049 n-разрядных чисел, которые можно составить из цифр 3, 7, 8. Найдите n, если цифры могут повторяться.

6. (МГМ). Из цифр 2,3,5,7,8,9 можно образовать 256 n-разрядных чисел, в каждом из которых старший и младший разряды содержат четные цифры, а все остальные – нечетные. Найдите n.

7. (203). Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C ведут три дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведут из A в C?

8. (УУН). Из алфавита выделили k букв. Известно, что из этих k букв две можно выбрать 136 способами. Найдите k.

9. (КБИ). Сколько минтермов содержится в булевой функции, если она имеет 256 импликант?

10. (ЯГО). Булева функция не определена на n наборах значений аргументов. Всего существует 512 вариантов доопределения функции. Найдите n.

11. (ИТШ). Декартово произведение множеств P, Q, R содержит 418 элементов. Найдите число элементов множеств P, Q, R, если $|P|>|Q|>|R|>1$.

12. (ПФФ). Если в алгебраическом выражении

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)(c_1 + c_2 + \ldots + c_{10})$$

раскрыть скобки, то получим 1190 отдельных трехсимвольных произведений, соединенных знаками сложения. Найдите m и n, если $m < n$, $m > 1$.

13. (УЮЮ). Каждую десятичную цифру и 33 буквы русского алфавита закодировали n-разрядными двоичными кодами, содержащими по две единицы и по $n-2$ нуля. Найдите наименьшее значение n.

14. (ОДМ). Множество содержит n элементов. Из этих элементов можно образовать 2046 собственных подмножеств. Найдите n.

15. (ДОН). Найдите x в уравнении $C_x^3 = 364$.

16. (УДЭ). Найдите x в уравнении $(x – 9)! = 40320$.

17. (ЮЖЕ). На щитке прибора имеется n кнопок. Существует 286 вариантов одновременного нажатия трех каких-либо кнопок. Найдите n .

18. (025). Алфавит содержит 100 знаков. Каждый знак кодируют n-разрядным двоичным кодом, в котором m единиц. Известно, что $n = 2m$. Найдите наименьшее значение n.

19. (ЕСП). Сколько существует шестизначных троичных чисел, в которых нет нулей и в каждом имеется три единицы?

20. (5ПК). Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные и нет цифры «нуль»?

21. (ПТМ). Из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 составили множество всех возможных трехразрядных чисел. Затем из этого множества удалили все числа, в которых нет повторяющихся цифр. Сколько чисел осталось?

22. (УС.ШУ). На прямой A размещено n точек, на параллельной ей прямой B – m точек. Каждую точку прямой A соединили прямыми отрезками с каждой точкой прямой B. Затем между прямыми A и B параллельно им провели прямую C. Сколько имеется точек пересечения прямой C с отрезками, если через каждую точку пересечения проходит только один отрезок?

23. (985). Сколько существует 7-значных десятичных чисел, в каждом из которых цифра 5 встречается три раза, а цифра 8 встречается четыре раза?

24. (АШО). Русский алфавит содержит 10 гласных букв. Сколькими способами можно составить группы по четыре гласной буквы в каждой, если буквы во всех группах расположены в алфавитном порядке?

25. (ИНА). Сколько существует булевых функций трех аргументов, содержащих три минтерма?

26. (ЦВЫ). По окружности разместили 8 точек. Каждую пару точек соединили прямой линией. Сколько получилось отрезков, ограниченных этими точками?

27. (АИК). Десять различных книг необходимо разместить на двух полках. На одной есть место для четырех книг, на другой – для шести. Сколькими способами можно разместить эти книги?

28. Вычислите (ответ – обыкновенная несократимая дробь):

(ВЦР) $\dfrac{C_3^2}{C_7^3}$; (ПХИ) $\dfrac{C_{10}^4 \cdot C_{10}^6}{\left(C_{11}^5\right)^2}$; (ПЕН) $C_n^2 \cdot \dfrac{(n-2)\,!}{(n-1)\,! \cdot n}$;

(ДАА) $C_m^n \cdot C_{m-n}^3 \cdot \dfrac{n!(m-n-3)!}{m!}$.

29. (ЦАО). В классе n человек. На дежурство необходимо выделить двух человек. Это можно сделать 300 способами. Найдите n.

30. (256). Некто подбросил 15 раз монету. Исход эксперимента он представил в виде ряда нулей и единиц, где единица обозначает: монета упала гербом вниз, а нуль обозначает: монета упала гербом вверх. Сколько возможно различных исходов эксперимента?

31. (ЕИЛ). Исследователь решил выяснить, какие сочетания семи цветов радуги наиболее эстетичны. Для этого он проводил линию одного цвета, а рядом – параллельную другого цвета. Сколько у него получилось таких пар, если порядок безразличен?

32. (ЛШТ). Найдите сумму:

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6.$$

33. (55С). Дано множество $P = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Сколько существует различных подмножеств, в каждое из которых входят две буквы и две цифры?

34. (ДЕЮ). В октаве семь основных звуков. Аккорд – это одновременное звучание трех и более звуков. Сколько возможно аккордов в пределах одной октавы?

35. (62Н). Сколько существует трехэлементных подмножеств множества всех шестнадцатеричных цифр?

36. (ЦНТ). Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выбрать по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

37. Сколькими способами можно поставить на шашечную доску черную и белую шашки так, чтобы:

а) (005) шашки могли бить друг друга, если белая шашка находится на главной диагонали?

б) (МЛА) белая шашка могла бить черную?

в) (КЕБ) шашки могли бить друг друга?

г) (984) белая шашка могла бить черную при условии, что белая шашка находится на краю доски?

д) (ФАМ) белая шашка могла бить черную, если белая шашка находится на главной диагонали?

38. (КВО). Сколько существует вариантов размещения на шашечной доске двух шашек, из которых одна белая, а другая черная?

39. (ТЭМ). Сколькими способами можно разместить на шашечной доске три черные шашки?

40. (449). Сколькими способами можно разместить на шашечной доске три шашки, если белую шашку ставить на крайнее поле, а черные – на любые места?

41. (НА2). Сколькими способами можно поставить на шашечную доску две белые шашки и три черные, если крайние поля не занимать?

42. (282). Найдите число положений белой и черной шашек на шашечной доске, при которых черная шашка располагается в верхней половине доски, а белая – в нижней?

43. (578)! На ферме 20 кроликов и 15 овец. Сколькими способами можно выбрать кролика и овцу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами его можно сделать еще раз?

44. (ХРУ). Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?

45. (ИКЕ). Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

46. Найдите n в следующих уравнениях:

(ЛТК) $n(n+1)(n+2) = 990$; (ЭИХ) $(n–1)! = 120$;

(950) $1{\cdot}2{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}\ldots\cdot n = 240$; (ШРК) $(n+1)! = 120$;

(ОМА) $(n–2)(n–1)n = 720$; (ОММ) $(n–8)! = 120$.

47. Упростите:

а) (УРЕ) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-2)(k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)}$;

б) (РКУ) $\dfrac{(k-2)!+(k-1)!+k!}{(k-2)!}$;

в) (ФДО) $\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k+1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(\kappa-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1)}$;

г) (85Ф) $\dfrac{(n-2)!\ -\ 2\cdot(n-1)!}{3-2n}$;

д) (ИКГ) $\dfrac{3\cdot(n-1)!+\ 4\cdot n!}{2(3+4n)\cdot(n-2)!}$;

е) (УТ2) $\dfrac{[1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)]^2}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-3)\cdot(n-2)^2}$;

ж) (ХНЮ) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}$;

з) (ЕЯН) $\dfrac{3k!+4(k+1)!}{2\cdot[3+4(k+1)]\cdot(k-1)!}$.

48. (ЗУИ). Сколько пятизначных чисел можно образовать из нечетных десятичных цифр при условии, что ни в одном из чисел повторяющихся цифр нет?

49. (ГАС). Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных десятичных цифр при условии, что в каждом из чисел все цифры разные?

50. (ТЭФ). Сколькими способами можно получить различные расположения семи цветов радуги, меняя местами цвета?

51. (ЛЕП). Шестизначное десятичное число может начинаться с цифры 2 либо с цифры 3 и может оканчиваться либо нулем, либо пятеркой, либо девяткой. Сколько существует таких чисел, если в них нет цифры 1 и все цифры разные?

52. (ОЦЛ). Сколько существует четных пятизначных десятичных чисел, если в каждом из них цифры все разные, а цифры четырех старших разрядов представляют собой простые числа?

53. (ФАХ). Из цифр 1,4,6,7,8,9 путем их перестановок образовали все возможные шестизначные числа. Сколько среди них нечетных чисел?

54. (ШШИ). Сколькими способами можно записать произведение вида $a \cdot b \cdot c \cdot\ldots\cdot t$, состоящее из k множителей, учитывая коммутативность операции умножения?

55. (ТОТ). Найдите x, если $(x!)! = 720$.

(ШОТ). Укажите все значения x, при которых справедливо равенство: $x! = (x!)!$

56. (ОХХ)! При каком наименьшем n число $n!$ оканчивается нулем? Назовите это число.

57. (ПТТ). Укажите все цифры, которыми может оканчиваться число $n!$ (цифры ответа упорядочить по возрастанию).

58. (ЛАК). Сколько существует двузначных двенадцатеричных чисел?

59. (ТАУ). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, делящихся без остатка на десятичное число 1000?

60. (00И). Найдите наименьшее значение n, при котором число $n!$ делится на десятичное число 100.

61. (38Я). Сколько существует путей от A до B в шахматном городе (см. рис. 4), если движение по внешним – левым и правым – линиям запрещено и если $n = 4$, $m = 5$?

62. (520). У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен без повторений?

63. (ЛЛГ). Сколько существует различных инициалов имени и отчества, если считать, что с букв **Ё**, **Ы**, **Ъ**, **Ь**, **Й** имена не начинаются?

64. (АНШ). На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

65. (КЛК). В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя, секретаря и кассира. Сколькими способами это можно сделать?

66. (ЗАЕ). Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих же языков?

67. (ФУХ). Пусть автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв, после которых идет четыре цифры. Найдите число таких номеров, если используются 32 буквы русского алфавита и 10 цифр.

68. (УХС). Найдите наименьшее n, если известно, что число $n!$ делится без остатка на 990.

69. (85Ф). Надо отправить шесть срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если доставку писем осуществляют три курьера и каждое письмо можно дать любому из них?

70. (ЛЯТ). Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 ладьи, ферзь и король) на первом горизонтальном ряду шахматной доски?

71. Сколько существует n-значных чисел десятичной системы счисления (начинаться с нуля числа не могут), которые одинаково читаются как слева направо, так и справа налево, если

(ХТР) $n = 5$? (334) $n = 6$? (ДУМ) $n = 7$?

72. (КВЕ). Сколькими способами можно расставить на полке восемь учебников, из которых три учебника физики, три учебника химии и два учебника истории?

73. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по трем мишеням. Каждый самостоятельно выбирает мишень и делает один выстрел без промаха. Ответьте на вопросы, в скольких случаях:

а) (ХОФ) все стрелки попадут в одну мишень?

б) (УУ2) в одну мишень попадут точно два стрелка?

в) (983) все три мишени будут поражены?

г) (ЮЖИ) точно в одну из мишеней не будет ни одного попадания?

74. Четыре стрелка независимо друг от друга стреляют по шести мишеням. Каждый стрелок самостоятельно выбирает мишень и делает по ней один выстрел без промаха. В результате окажется точно четыре попадания (пробивки). Сколько возможно вариантов выбора мишеней:

а) (ЦДИ) всеми стрелками?

б) (МПК) если два попадания придутся на одну мишень и два попадания – на другую?

в) (ИВТ) если без пробивок будут точно 3 мишени?

г) (А50) если без пробивок будут точно 4 мишени?

д) (Я18) если никто не выберет шестую мишень?

е) (ЗАХ) если пробитыми будут первые 4 мишени?

ж) (556) если 5 мишеней окажутся без пробивок?

з) (УФ7) если в каждой мишени будет не более одной пробивки?

и) (ЦЕМ) если в одной из мишеней окажется точно 3 пробивки?

75. (265). Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера. Помнит только, что среди них есть два нуля, а остальные цифры разные. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до абонента путем проб и ошибок? (Минимальное число проб – единица: если очень повезет, то можно дозвониться сразу.)

76. (866). Вычислите:

$$C_{12}^0 + C_{12}^2 + C_{12}^4 + C_{12}^6 + C_{12}^8 + C_{12}^{10} + C_{12}^{12}.$$

77. (ЦП8)! Для экспедиции выбирают специалистов, знающих иностранные языки. Быть выбранными претендуют пять человек. Назовем их условно A, B, C, D, E. Известно, что английский язык знают три человека – A, C, E, немецкий знают B и D, французским владеют B и E, итальянским – A, D и E, португальским – A, C и D, китайским – B, D и E. Требуется выбрать группу специалистов так, чтобы вместе они знали все шесть перечисленных языков, а при удалении из группы любого специалиста это условие нарушалось. Сколько всего существует таких групп? Сколько человек в минимальной по составу группе? Сколько минимальных групп?

78. (289). По окружности расположены n точек. Из них выделили три рядом стоящие точки и каждую из этих точек соединили прямыми отрезками со всеми остальными точками (выделенные три точки между собой не соединяются). Найдите число точек пересечения для $n = 12$, если через каждую точку пересечения проходит только два отрезка.

79. (460). Имеется неограниченное количество монет достоинством в 10, 15 и 20 коп. Сколькими способами можно выбрать 30 монет [10, с. 228]?

80. (УФ1). Сколькими способами можно разложить по пяти пакетам 12 апельсинов при условии, что ни один пакет не должен быть пустым?

81. (542). Сколькими способами можно расставить 20 одинаковых книг в книжном шкафу с пятью полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

82. (55Р). Сколько существует семизначных кодов Морзе, оканчивающихся точкой?

83. (ЛБ6). Булева функция имеет 256 способов доопределения. Сколько существует наборов значений аргументов, на которых функция не определена?

84. (ЛОС)! Дано равенство: $55|_6 = 50|_x$. Число 55 записано в шестеричной системе счисления. Найдите основание x системы, в которой записано число 50. То же самое для равенства $55|_6 = 11|_x$.

85. (ЮМТ). Дано равенство $19|_x = 23$. Число 23 записано в десятичной системе. Найдите основание x системы счисления, в которой записано число 19.

86. (СЕБ). Даны равенства: $1010|_x = 101|_y = 10|_z$, где x, y, z – основания систем счисления, в которых записаны соответствующие числа. Найдите наименьшие целые значения x, y, z.

87. (ОЛЕ). Сколько существует шестизначных троичных чисел, содержащих цифру 0 в младшем разряде и цифру 2 – в старшем, а в остальных четырех разрядах могут находиться любые троичные цифры, например 201220, 211101 и т.д.?

88. (229). Симметрическая булева функция f, зависящая от пяти аргументов, имеет a-число, равное двум. Найдите число конъюнкций, образующих минимальную ДНФ (дизъюнктивную нормальную форму) этой функции.

89. Мажоритарная функция f зависит от 9 аргументов $A_1, A_2, \ldots, A_9$.

а) (МЯФ) сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ функции f?

б) (ФИФ) сколько вхождений аргументов имеет минимальная ДНФ ее остаточной функции при $A_1 = 0$?

90. (ЯНО)! Требуется закодировать двоичными кодами 80 знаков некоторого алфавита. Каждый код содержит три единицы, а остальные знаки – нули. Все коды начинаются с единицы. Определите длину кода (то есть число входящих в него двоичных знаков) и число нулей в коде.

91. (МОО). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет четных цифр, а цифра 3 встречается точно два раза?

92. (451). Сколькими способами можно разбить 12 рабочих на четыре бригады по три человека в каждой бригаде [11, с. 228]?

93. (ДИХ). Сколькими способами можно разбить 10 рабочих на две бригады по пять человек в каждой бригаде?

94. (ШЕЗ). Сколькими способами можно составить упорядоченный по цвету ряд, содержащий четыре шара, если всего имеется шесть шаров, из которых составляется ряд: три оранжевых, один фиолетовый, один синий, один красный [11, с. 232]?

95. (ТПИ). Дан ряд цифр: 8, 4, 5, 8, 8, 6. Используя только эти цифры, составляют четырехзначные числа. Сколько всего таких чисел можно составить? (Заметим, что повторяться в числах может только цифра 8.)

96. (АФФ). Дан выпуклый восьмиугольник. В него вписан треугольник так, что вершины треугольника являются вершинами восьмиугольника. Сколько существует таких треугольников?

97. (АЙЦ). На плоскости поставили 12 точек. Через эти точки провели окружности так, что на каждой из них оказалось по три точки из заданных. Центры окружностей образуют множество P. Найдите $|P|$.

98. (Б79). Дан некоторый прямоугольник. Внутри него параллельно горизонтальным его сторонам провели восемь прямых. Затем точно так же провели восемь прямых параллельно вертикальным сторонам. Сколько прямоугольников в получившейся фигуре [11, с. 238]?

99. (ЦУП). На плоскости проведено семь попарно пересекающихся прямых так, что через каждую точку пересечения проходят только две прямые. Сколько можно провести окружностей, касающихся трех прямых, если никакие четыре прямые не касаются одной и той же окружности?

100. (ТОО). Назовите три последние цифры, которыми оканчивается сумма 10! + 15! + 20! (При самоконтроле цифры вводите в том порядке, в каком они записаны в сумме чисел 10!, 15! и 20!)

101. (ЕКТ). Дан правильный восьмиугольник с пронумерованными вершинами. В него вписан треугольник так, что его вершины совпадают с вершинами восьмиугольника. Сколько существует треугольников, «привязанных» к вершине 1 восьмиугольника (то есть одна из вершин всех треугольников совпадает с вершиной 1 восьмиугольника)?

102. (2ЕЕ). Сколько существует четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 с повторениями, если каждое число оканчивается двумя нечетными цифрами, а начинается с четной цифры?

103. (КРШ). Сколько существует пятизначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6 с повторениями, если в трех старших разрядах нет нечетных цифр?

104. (УММ). Сколько существует пятизначных чисел, которые можно составить из цифр 4, 5, 7, 9, если в каждом числе цифра 4 встречается хотя бы один раз, а все остальные цифры могут повторяться?

105. (ЛЛИ). Из цифр 7, 8, 9 составляют пятизначные числа, такие, что в каждом из них точно три одинаковые цифры, а две остальные разные. Сколько существует таких чисел?

106. (ХАН). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет цифр 0, 6, 7, 8, 9, если каждое число оканчивается тремя четными цифрами (цифры могут повторяться)?

107. (ФУМ). Сколько существует шестизначных чисел семеричной системы счисления, если в каждом числе нет ни одного нуля и в каждом числе цифра 6 встречается точно 4 раза, а все остальные – не более чем по одному разу?

108. (АОИ). Дано пять цифр: 1, 3, 4, 6, 7. Из них составляют семизначные числа, в каждом из которых цифра 4 встречается точно один раз и точно один раз встречается цифра 7. Сколько существует таких чисел?

109. (ЛВУ). Сколько чисел можно составить, если в каждое число включить точно три раза цифру 7, точно три раза цифру 8 и точно два раза цифру 9, при условии, что других цифр в числе нет?

110. (ЭКШ). Сколько существует четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр десятичной системы счисления без повторов, если в каждом числе нет ни одной из цифр 0, 6, 7, 8, 9 и каждое число без остатка делится на 5?

111. (МЕО). Сколько существует семизначных двоичных чисел, в каждом из которых имеется не менее двух единиц и не менее трех нулей, если числа могут начинаться не только с единицы, но и с нуля?

112. (УТИ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых четные и нечетные цифры чередуются? С нуля числа не начинаются. Повторы цифр возможны.

113. (ББХ). Сколько существует 12-значных двоичных чисел, в каждом из которых единиц в два раза бельше, чем нулей, и нули нигде не стоят рядом?

114. (92Я). Сколько существует 18-значных двоичных чисел, начинающихся с последовательности 1101, если каждое число одинаково читается как слева направо, так и справа налево?

115. (УШС). Из цифр шестеричной системы счисления составляют пятизначные числа. Сколько существует таких чисел, если нуля нет ни в одном числе и если в каждом числе точно две цифры являются четными, которые могут и совпадать, а нечетные встречаются только по одному разу?

116. (ПЕМ). Из всех возможных четырехзначных десятичных чисел, не начинающихся с нуля, удалили все числа, в которых имеется хотя бы одна четная цифра. Сколько чисел осталось?

117. (НУУ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых четных цифр столько же, сколько и нечетных, если числа могут начинаться и с нуля?

118. (ШТС). Сколько существует восьмизначных двоичных чисел, в каждом из которых имеется хотя бы две рядом стоящие единицы?

119. (ХТО). В двоичном числе 101110111101 три единицы необходимо заменить нулями. Сколькими способами это можно сделать?

120. (КЗЛ). В десятичном числе 321475 каждую нечетную цифру решено заменить четной. Сколько получится новых чисел? С нуля числа не начинаются.

121. (АЕН). Сколько существует пятизначных чисел 9-ричной системы счисления, если в каждом числе цифры 1, 3, 4 встречаются точно по одному разу, а на повторы всех остальных цифр ограничений нет?

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

ВВЕДЕНИЕ

Первые сведения о графах как о схемах в виде наборов точек, соединенных между собой какими-либо линиями, появились в XVIII веке. Сначала эти сведения были разрозненными и относились главным образом к головоломкам, играм и развлечениям. Но в конце XIX века в связи с развитием топологии значительно возрос интерес к теории графов. В то время она рассматривалась как одна из глав топологии. Однако вскоре обнаружилось, что методы теории графов успешно могут применяться и в других науках – социологии, экономике, биологии, медицине, химии, психологии, а также в различных областях дискретной математики, таких как программирование, теория логических схем и многотактных дискретных автоматов, теория бинарных отношений и т. д.

Как раздел дискретной математики, теория графов в последнее время стала самостоятельной наукой и получила такое развитие, что отразить все ее достижения, даже путем краткого их перечисления, в небольшой книге совершенно невозможно. В связи с этим в данном пособии приведены лишь основные понятия теории графов и рассмотрены наиболее распространенные задачи, решаемые ее методами: определение максимальной пропускной способности транспортной сети, нахождение всех трансверсалей, задача о коммивояжере, отыскание всех простых цепей, соединяющих две точки какой-либо схемы, и др.

В данном разделе приведено около 300 упражнений, закодированных в системе кодов информационно-дидактической системы «Символ». Самоконтроль при выполнении упражнений осуществляется точно так же, как и в предыдущих разделах. Выполнять упражнения рекомендуется все. Этим гарантируется минимально необходимая глубина изучения материала, запланированная автором при разработке пособия.

По теории графов и ее многочисленным приложениям существует обширная литература. Каждый, кто заинтересуется какими-либо вопросами этой теории, всегда может обратиться к соответствующим источникам и изучить необходимые разделы, а также ознакомиться с теми проблемами, которые еще ждут своих исследователей.

1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Граф.

В общем случае граф – это множество V точек, определенным образом соединенных между собой линиями, необязательно прямыми. Точки множества V называются **вершинами** графа, а соединяющие их линии – **ребрами**. Вершины графа обычно нумеруют десятичными числами, но можно использовать и любые другие знаки. Если вершины пронумерованы, то ребра обозначают неупорядоченными парами номеров вершин. Каждую пару образуют номера тех вершин, которые соединены ребром.

Граф называется **простым** (или **линейным**, согласно [56, с. 56]), если любые две его вершины соединены не более чем одним ребром и каждое ребро соединяет различные вершины. Пример простого графа приведен на рис. 1.

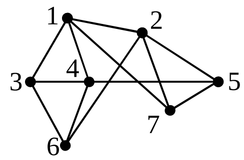


Рис. 1

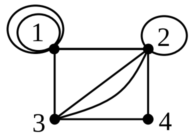


Рис. 2

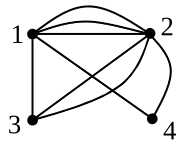


Рис. 3

Всякий простой граф может быть представлен не только в виде рисунка, но и аналитически. Пусть E – множество ребер графа, тогда можно записать (рис. 1):

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,7\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5,7\}\}$,

где E – множество двухэлементных подмножеств множества V, каждое из которых определяет ребро, соединяющее вершины $v \in V$ и $w \in V$.

1.2. Псевдограф. Мультиграф

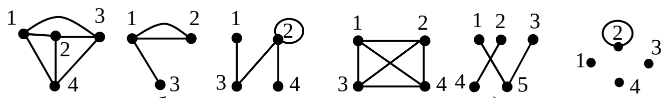
Существуют графы, в которых те или иные пары вершин соединены не одним ребром, а несколькими. Такие ребра называют **кратными** (параллельными). Кроме того, граф может содержать ребра, соединяющие какую-либо вершину саму с собой. Такие ребра называются **петлями** (ударение на первый слог во всех формах слова «петля»; лишь в именительном падеже единственного числа допускается ударение на второй слог [5; 37]). Вершина называется **изолированной**, если у нее нет петель и из нее не выходит ни одного ребра.

Граф, содержащий петли или кратные ребра, называется **псевдографом** [12, с. 101; 35, с. 161]. Пример псевдографа приведен на рис. 2, где вершина 1 имеет кратные петли, вершина 2 – одиночную петлю, а вершины 2 и 3 соединены кратными ребрами.

Псевдограф без петель называется **мультиграфом** [12; 35]. Пример мультиграфа приведен на рис. 3.

Упражнения

1. (ЦПО). Укажите псевдографы на рис. 4.



а *б* *в* *г* *д* *е*

Рис. 4

2. (УЗ9). Укажите мультиграфы на рис. 4.

3. (ЖРП). Укажите простые графы на рис. 4.

4. (ПКК). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли быть простым граф, содержащий 4 вершины и 8 ребер?

2) может ли граф с одним ребром быть псевдографом?

3) может ли граф быть псевдографом, если в нем нет кратных ребер?

4) может ли граф с одним ребром быть мультиграфом?

5) граф содержит одну вершину. Может ли он быть мультиграфом?

6) граф содержит одну вершину. Может ли он быть псевдографом?

7) граф содержит одну вершину. Может ли он быть простым графом?

1.3. Подграф. Надграф. Частичный граф

Если из графа G удалить одну или несколько вершин, то будут удалены и выходящие из них ребра. Оставшиеся вершины и ребра образуют **подграф** G' графа G [16]. Очевидно, что для всякого подграфа справедливы утверждения: $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$ [16; 56], где V и E – множества вершин и ребер графа G; V' и E' – множества вершин и ребер подграфа G'. Из определения следует, что всякий граф является подграфом самого себя.

Обратимся к рис. 1. Удалим из графа вершину 1. Вместе с ней удалятся и четыре ребра: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,7}. В результате получится подграф, изображенный на рис. 5. Удалим из графа (рис.1) вершины 4 и 7 (вершину 1 не удаляем). Получим подграф, приведенный на рис. 6.

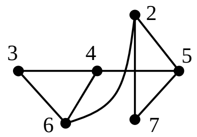


Рис. 5

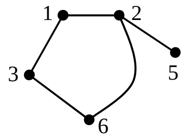


Рис. 6

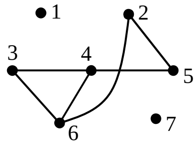


Рис. 7

Удалить из графа G можно и все вершины. Тогда от графа ничего не останется. Граф, не содержащий вершин, называется **пустым** графом. Очевидно, что пустой граф является подграфом любого графа.

Непустой подграф называется **собственным**, если он не совпадает с исходным графом G. Граф G и пустой граф называются **несобственными** подграфами (по аналогии с несобственными подмножествами).

Пусть дан граф G на n вершинах. Добавим к ним одну вершину и соединим ее каким-либо образом с вершинами графа G. Новый граф с $n + 1$ вершинами называется **надграфом** графа G. Например, изображенный на рис. 1 граф является надграфом графа, приведенного на рис. 5.

По заданному графу подграф находится однозначно, то есть, удалив из графа одну или несколько вершин, мы получим единственный подграф. Обратная операция неоднозначна. Пусть в простом графе имеется четыре вершины с номерами 1, 2, 3, 4. Найдем его надграфы, добавив к графу вершину с номером 5. Ее можно соединить с четырьмя вершинами графа различными способами. Чтобы найти их все, поставим в соответствие каждому ребру из множества K = {{1,5}, {2,5}, {3,5}, {4,5}} двоичный разряд. Пусть ребру {1,5} соответствует старший разряд, ребру {4,5} – младший. Условимся считать, что если в i-м разряде двоичного числа записана единица, то ребро {i,5} содержится в надграфе. Если же записан нуль, то ребра {i,5} в надграфе нет (i = 1, 2, 3, 4). Тогда все надграфы окажутся пронумерованными в двоичной системе 0000, 0001,…,1111, откуда следует, что всего существует 16 надграфов. Например, двоичному числу 0000 соответствует надграф, состоящий из заданного графа и изолированной вершины с номером 5. Числу 0101 соответствует надграф, состоящий из заданного графа, к которому добавлено два ребра {2,5} и {4,5} и т. д.

В общем случае числ надграфов равно $N_1 = 2^n$, если к исходному графу добавлена одна вершина. Каждый из этих N_1 надграфов дает 2^{n+1} надграфов, если добавить вторую вершину. Тогда число надграфов равно:

$$N_2 = 2^n \cdot 2^{n+1} = 2^{2n+1}.$$

При трех добавленных вершинах число надграфов равно:

$$N_3 = 2^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{n+2} = 2^{3n+3}$$

и т. д.

Если в графе G все вершины оставить на своих местах и удалить одно или несколько ребер, то получится **частичный** граф. Формально частичный граф определяется следующим образом. Пусть V и E – множества вершин и ребер исходного графа G. Граф G' называется частичным графом графа G, если $V' = V$ и $E' \subseteq E$ [16, с. 15, 89]. Согласно этому определению всякий граф является частичным по отношению к самому себе.

Из графа G можно удалить и все ребра. Тогда останется граф, состоящий только из изолированных вершин. Граф, в котором нет ни одного ребра, называется **нуль-графом** [38, с. 13; 32, с. 14]. Удалим из графа (рис. 1) ребра {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,7}, {2,7}, {5,7}. Тогда останется частичный граф (рис. 7). Его аналитическое представление имеет вид:

V' = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} = V;

E' = {{2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4.5}, {4,6}} $\subset E$.

Как и в случае подграфа, все частичные графы заданного графа можно пронумеровать в двоичной системе счисления, если каждому ребру поставить в соответствие двоичный разряд. Всего существует 2^k k-разрядных двоичных чисел, где k – число ребер заданного графа. Столько же существует и частичных графов.

Необходимо отметить, что в существующей литературе нет однозначности в определениях понятий подграфа и частичного графа. Например, в [12, с. 102] читаем: «Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G». Из этого определения следует, что нахождение подграфа в общем случае осуществляется неоднозначно. Пусть, например, дан граф:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}; \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}\}.$$

Удалим вершину с номером 1. Получим подграф вида

$$V' = \{2, 3, 4\}; \qquad E' = \{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}, \tag{1}$$

удовлетворяющий приведенному в [12] определению. Но ему удовлетворяют и другие графы, например:

$$V' = \{2, 3, 4\}; \quad E' = \{3, 4\};$$
$$V' = \{2, 3, 4\}; \quad E' = \{2, 4\};$$
$$V' = \{2, 3, 4\}; \quad E' = \varnothing.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в [12] дано понятие подграфа, совмещенное с вышеприведенным понятием частичного графа.

В [54, с. 115] частичный граф назван подграфом.

В [32, с. 15] частичный граф называется суграфом.

В определении понятий нуль-графа и пустого графа в литературе также нет однозначности. Например: «Если множество E ребер графа пусто, граф называется пустым. Если пусто не только множество E ребер, но и множество V вершин графа, граф называется нуль-графом» [29, с. 3]. В [12, с. 104] дано аналогичное определение: «Пустым (вполне несвязным) называется граф без ребер».

Таким образом, при чтении специальной литературы необходимо обращать внимание на то, какой системы определений придерживается тот или иной автор, иначе трудности, связанные с пониманием материала, могут стать непреодолимыми.

Упражнения

1. Определите число вершин и число ребер подграфа, построенного на основе графа G (рис.1) путем удаления из него: (Т51) вершины 4; (452) вершин 1, 5, 6.

2. (384). Сколько различных подграфов можно получить на основе графа, изображенного на рис. 1.

3. Сколько собственных подграфов имеет граф, изображенный: (ТТ5) на рис. 5? (РУК) на рис. 7?

4. (С87). Сколько надграфов имеет граф, содержащий 7 вершин, если в каждом надграфе 8 вершин?

5. (ДИМ). Граф содержит 5 вершин. К этому графу добавили 2 вершины. Получился надграф, содержащий 7 вершин. Сколько возможно таких надграфов?

6. Сколько частичных графов имеет граф: (853) на рис. 1? (В54) на рис. 5? (575) на рис. 7?

7. (006). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) является ли пустой граф частичным по отношению к графу, приведенному на рис. 6?

2) является ли нуль-граф, содержащий 7 вершин, частичным для графа на рис. 7?

3) является ли пустой граф подграфом нуль-графа?

4) является ли нуль-граф графа G на рис. 6 подграфом графа G?

5) верно ли, что если подграф G' некоторого графа G содержит n вершин, то всякий частичный граф подграфа G' также содержит n вершин?

6) верно ли, что если частичный граф G' некоторого графа G содержит n ребер, то всякий подграф частичного графа G' также содержит n ребер?

7) верно ли, что нуль-граф является частичным графом любого графа?

8. Сколько существует частичных графов, которые можно получить на основе графа, приведенного на рис. 1, путем удаления из него: (008) одного ребра? (БТН) двух ребер? (Р90) трех ребер?

9. (АД1). В простом графе 10 ребер. Сколько существует частичных графов, содержащих не менее 7 ребер?

1.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины

Две вершины $v\in V$ и $w\in V$, где V – множество вершин графа G, называются **смежными**, если они соединены ребром. Например на рис. 7 смежными являются вершины 3 и 4, 3 и 6, 4 и 6 и др.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину [12, с. 102]. На рис. 7 смежными являются ребра {3,4} и {3,6}, {4,5} и {2,5} и др.

Если вершина является концом ребра, то вершина и ребро называются **инцидентными**. На рис. 7 ребро {3,4} инцидентно вершине 3. Оно инцидентно и вершине 4.

Число $\rho(v)$ ребер, инцидентных вершине v, называется **степенью** этой вершины v. Например, степень вершины 3 (рис. 7) равна 2, степень вершины 4 равна 3.

Степень изолированной вершины равна нулю. Степень изолированной вершины, содержащей одну петлю, равна 2.

Вершина, степень которой равна 1, называется **висячей**. На рис. 6 висячей является вершина 5.

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число. Половина суммы степеней всех вершин равна числу всех ребер графа (любого, в том числе псевдографа и мультиграфа). Этим свойством можно пользоваться для определения числа ребер графа. Например, сумма степеней вершин графа, приведенного на рис. 7, равна:

$\rho(1) + \rho(2) + \ldots + \rho(7) = 0 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 12$,
откуда следует, что в графе шесть ребер.

Вершина называется **четной**, если ее степень есть четное число. Вершина называется **нечетной**, если ее степень есть нечетное число.

В любом графе число нечетных вершин четно [3; 38]. Например, нечетными являются следующие вершины графа, приведенного на рис. 1: 3, 5, 6, 7, то есть всего нечетных вершин 4 (четное число).

Число четных вершин в графе может быть любым – как четным, так и нечетным. Например, на рис. 2 граф имеет четыре четные вершины: 1, 2, 3, 4, а на рис. 7 – пять четных вершин: 1, 2, 3, 5, 7.

Упражнения

1. (ИМФ). Укажите номера всех пар вершин, являющихся смежными (рис. 1):

1) 1 и 2; 3) 3 и 4; 5)1 и 7; 7) 6 и 7;
2) 1 и 5; 4) 3 и 5; 6) 2 и 7; 8) 2 и 1.

2. (ОС2). Укажите номера всех пар ребер, являющихся смежными (рис. 1):

1) {1, 4} и {2, 5}; 4) {1, 7} и {2, 7};
2) {3, 4} и {4, 5}; 5) {2, 6} и {5, 7};
3) {4, 6} и {2, 6}; 6) {2, 6} и {2, 5}.

3. (ЦАЗ). Укажите номера вершин, инцидентных ребру {2, 6} (рис.7).

4. (ТМИ). Укажите графы, имеющие висячие вершины (рис. 4).

5. (СЕШ)! Сумма степеней всех вершин некоторго графа равна 20. К этому графу добавили три ребра (число вершин не меняли). Чему равна сумма степеней всех вершин нового графа? Сколько в нем ребер?

6. Сколько четных и сколько нечетных вершин в графе, изображенном:

(ПТ6) на рис. 4, *г*? (УХ8) на рис. 4, *д*?
(ИГ7) на рис. 4, *е*? (ЯС9) на рис. 3?

7. Для любого графа можно указать набор степеней его вершин. Например, для графа, приведенного на рис. 7, такой набор имеет вид 0223230, где 0 – это степень первой вершины, 2 – степень второй вершины, следующая цифра 2 – степень третьей вершины и т. д. Но если набор задан, то построить соответствующий граф не всегда возможно. Укажите из нижеперечисленных номера тех наборов, для которых невозможно построить граф:

(П30)	(Р61)	(ХАЖ)
1) 0 1 1 0 2 3 2	1) 1 1 3 4 5 7 6	1) 1 0 1 4 5 6 7
2) 1 1 1 0 1 3 3	2) 2 2 0 1 0 1 7	2) 1 2 3 4 1 2 3
3) 2 1 3 3 4 4 4	3) 6 9 9 4 1 3 2	3) 0 0 1 0 0 0 0
4) 0 0 1 1 0 1 5	4) 5 6 7 3 3 4 5	4) 2 2 2 1 2 2 2
5) 2 3 3 2 1 3 3	5) 2 6 7 3 3 3 0	5) 0 7 0 7 1 0 7
6) 4 2 1 0 7 3 0	6) 3 0 0 3 0 0 3	6) 2 3 5 6 7 4 2
7) 2 5 5 1 1 1 0	7) 0 0 1 1 0 1 7	7) 3 4 5 4 3 2 1

8. (332). Сколько висячих вершин в каждом из графов *а, б, в, г, д, е* (рис. 4)?

9. (813). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) существуют ли графы, в которых степень каждой вершины равна нулю?

2) можно ли построить граф, в котором число четных вершин нечетно?

3) существует ли граф, содержащий одну вершину и одно ребро?

4) существуют ли смежные вершины в нуль-графе?

5) верно ли что, если к каждому ребру графа на рис. 4, *в* добавить по одному кратному ребру, то степени всех вершин удвоятся?

6) можно ли построить граф, в котором одна нечетная вершина и три – четные?

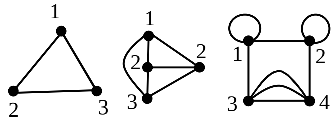
1.5. Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа

Граф называется **однородным**, если степени всех его вершин равны между собой:

$$\rho(1) = \rho(2) = \ldots = \rho(n),$$

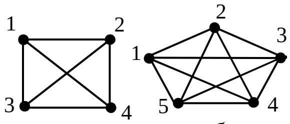
где n – число вершин графа; $\rho(i)$ – степень i-й вершины графа (i = 1, 2, … , n).

Примеры однородных графов приведены на рис. 8.



а *б* *в*

Рис. 8



а *б*

Рис. 9

Сумма степеней всех вершин однородного графа равна ρn, где ρ – степень вершины, n – число вершин. Следовательно, число ребер однородного графа равно:

$$K = \frac{\rho n}{2}.$$

Граф без петель называется **полным**, если каждая пара его вершин соединена одним ребром. Примеры полных графов приведены на рис. 9.

Степень любой вершины полного графа равна n–1, где n – число его вершин, так как каждая вершина соединена ребрами с $n-1$ остальными вершинами графа. Отсюда следует, что число K ребер полного графа равно:

$$K = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Эту же формулу можно получить иным путем. Так как каждой паре вершин соответствует одно ребро, то число ребер равно числу всех возможных пар, которые могут быть образованы из n вершин. Количество таких пар равно числу сочетаний из n по 2 без повторений:

$$K = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Очевидно, что всякий полный граф является однородным.

Пусть дан неполный граф. Построим на его вершинах полный граф, а затем из полного графа удалим все те ребра, которые входят в заданный граф. Получится граф, являющийся **дополнением** заданного графа до полного.

Формально дополнение графа можно определить следующим образом. Пусть G – полный граф, E – множество ребер полного графа; G' – частичный граф полного графа, и пусть E' – множество ребер частичного графа G', E'' – множество ребер полного графа, не входящих в множество E', т. е.

$$E' \cup E'' = E; \qquad E' \cap E'' = \varnothing.$$

Тогда граф $\{V, E''\}$ называется дополнением графа G' до полного, где V – множество вершин графа G.

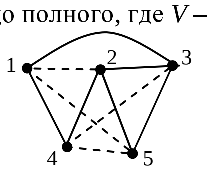


Рис. 10

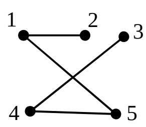


Рис. 11

На рис. 10 пунктирными линиями показано дополнение графа G. На рис. 11 дополнение представлено отдельным графом.

Очевидно, что дополнением полного графа на n вершинах является нуль-граф, то есть граф, состоящий из n изолированных вершин, а дополнением нуль-графа является полный граф.

Упражнения

1. (НАО). Сколько ребер в однородном графе, если $n = 7$ и $\rho = 6$?

2. (ЮМ.ИА). Найдите числа n и ρ однородного графа, если он содержит 19 ребер.

3. (ФА1). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Возможен ли однородный граф, в котором:

1) пять вершин и степень каждой вершины равна 3?
2) шесть вершин и степень каждой из них равна 4?
3) четыре вершины и шесть ребер?
4) пять вершин и шесть ребер?
5) семь вершин и степень каждой вершины равна 5?
6) шесть вершин и девять ребер?
7) восемь вершин и степень каждой из них равна 3?

4. (МУШ). В полном графе 18 вершин. Сколько в нем ребер, инцидентных одной вершине?

5. (КРК). Сколько ребер имеет полный граф, если число его вершин равно 10?

6. (ОД6). Полный граф имеет 105 ребер. Найдите число его вершин.

7. (УХ7). Частичный граф полного графа, насчитывающего 12 вершин, имеет 54 ребра. Сколько ребер имеет дополнение частичного графа?

8. (ППЗ)! Из полного графа на 20 вершинах несколько вершин удалили. В оставшемся подграфе стало 66 ребер. Сколько вершин удалено? Сколько ребер удалено?

9. (ХПН)! Степень вершины полного графа равна 7. Из графа удалили несколько ребер так, что степень каждой вершины получившегося частичного графа стала равной 5. Сколько ребер удалили? Сколько ребер осталось?

10. (802). Найдите степень вершины полного графа, имеющего 91 ребро.

11. (УЫФ). В однородном графе степень вершины равна 5. Число ребер равно 35. Найдите число вершин.

12. (ТЭО)! Каждую вершину полного графа G, имеющего 28 ребер, соединили ребром с каждой вершиной полного графа G'. Получился граф, насчитывающий 55 ребер. Сколько вершин в графе G'? Сколько ребер соединяют вершины графа G с вершинами графа G'?

1.6. Объединение и пересечение графов

Объединением графов $G_1=\{V_1,E_1\}$ и $G_2=\{V_2,E_2\}$ называют граф $G = G_1 \cup G_2 = \{V, E\}$, где $V = V_1 \cup V_2$; $E = E_1 \cup E_2$.

Пример, иллюстрирующий операцию объединения графов, приведен на рис. 12. Очевидно, что если $V_1 = V_2$ и $E_1 \subset E_2$, то $G = G_1 \cup G_2 = G_2$ (рис. 13). Если же $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$, то $G = G_1 \cup G_2 = G_1 = G_2$ [16, с. 93; 35, с. 172].

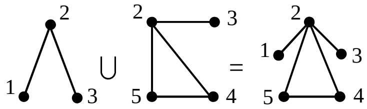


Рис. 12

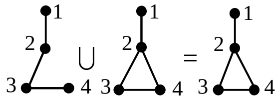


Рис. 13

Пересечением двух графов G_1 и G_2 называется граф $G = \{V,E\}$, где $V=V_1 \cap V_2$; $E=E_1 \cap E_2$ (рис. 14). Из определения следует, что $G = G_1 \cap G_2 = \varnothing$, если $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, то есть если два графа не имеют одинаково обозначенных вершин, то их пересечение есть пустой граф (рис. 15). Если же $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, а $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $G = G_1 \cap G_2$ есть нуль-граф, множество вершин которого равно $V_1 \cap V_2$ (рис. 16) [35, с. 172].

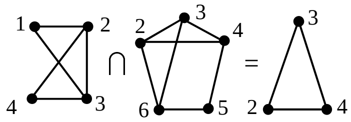


Рис. 14

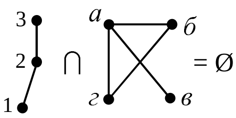


Рис. 15

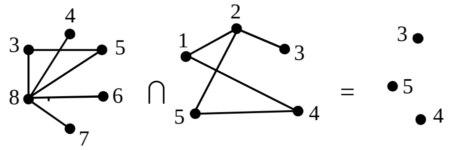


Рис. 16

Очевидно, если $V_1 = V_2$ и $E_1 \subset E_2$, то $G = G_1 \cap G_2 = G_1$. Если же $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$, то $G = G_1 \cap G_2 = G_1 = G_2$.

Упражнения

Графы G_1, G_2 и G_3 представлены в виде:

$G_1 = \{V_1, E_1\}$, где $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}\}$;

$G_2 = \{V_2, E_2\}$, где $V_2 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $E_2 = \{\{1,4\}, \{2,3\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}\}$;

$G_3 = \{V_3, E_3\}$, где $V_3 = \{3,4,5,6,7,8,9\}$; $E_3 = \{\{3,5\}, \{3, 6\}, \{3, 8\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}\}$.

1. Найдите число вершин и число ребер графа:

(ККК) $G = G_1 \cup G_2$; (264) $G = G_1 \cup G_2 \cap G_3$;
(АЕ2) $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$; (ШЛБ) $G = (G_1 \cup G_2) \cap G_3$;
(Р71) $G = G_1 \cap G_2$; (ТЛЗ) $G = G_1 \cap (G_2 \cup G_3)$.

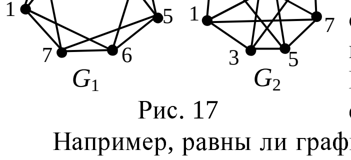
2. Укажите вершины графа:

(ЛИЙ) $G = G_1 \cup G_1 \cap G_2$;
(1ЯЛ) $G = G_2 \cup G_1 \cap G_2 \cup G_1 \cap G_2 \cap G_3$;
(ЕНК) $G = G_1 \cap G_2 \cup G_1 \cap G_2 \cup G_2 \cap G_3$.

1.7. Изоморфизм

Изоморфизм (на греческом языке *isos* – равный, одинаковый, подобный, *morphe* – вид, форма) в общем случае – соответствие (отношение) между объектами, выражающее тождество их структуры [34, 47]. Термин «изоморфизм» такой же смысл имеет и в теории графов.

Пусть даны два графа G_1 и G_2 с пронумерованными вершинами. Такие графы называются **помеченными** [57]. Если вершинам v_i и v_j, соединенным ребром в графе G_1, соответствуют те же вершины, соединенные ребром в графе G_2, и если вершинам v_i и v_j, не соединенным ребром в графе G_1, соответствуют те же вершины, не соединенные ребром в графе G_2 ($i, j = 1, 2, \ldots, n$, где n – число вершин), то такие графы называются изоморфными.



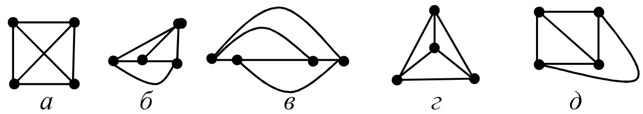
G_1 G_2

Рис. 17

На первый взгляд может показаться, что изоморфизм и равенство графов – это одно и то же. На интуитивном уровне так оно и есть. На самом деле все гораздо сложнее.

Например, равны ли графы на рис. 17? Они и внешне не похожи, и нумерацией вершин отличаются, то есть нет оснований утверждать, что эти графы равны. Но они изоморфны. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вершины обоих графов. Вершина 1 графа G_1 соединена с его вершинами 2, 3, 6, 7. Вершина 1 графа G_2 соединена с теми же вершинами 6, 2, 7, 3. Вершина 2 графа G_1 соединена с вершинами 1, 3, 4, 7. Те же соединения имеет и вершина 2 графа G_2 и т. д.

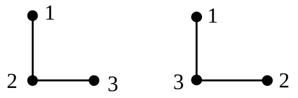
В связи с тем что понятия изоморфизма и равенства графов имеют много общего, некоторые авторы вообще не используют термин «изоморфизм», ограничиваясь интуитивно ясным понятием равенства графов [3]. В данном же пособии в основном используется понятие изоморфизма (за редким исключением), так как интуитивного представления о равенстве графов не всегда достаточно.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 18

Неясности с изоморфизмом и равенством графов в основном связаны с различной нумерацией их вершин. Например, на рис. 18 все пять графов представляют собой один и тот же граф: это полный граф с четырьмя вершинами. Все они удовлетворяют определению изоморфизма независимо от способа нумерации вершин. Иное дело графы, изображенные на рис. 19. Интуитивно ясно, что графы *а* и *b* – это один и тот же граф и, следовательно, они изоморфны. Однако в первом графе вершины 1 и 3 не соединены ребром, а во втором – соединены. Следовательно, графы не изоморфны. Пронумеруем вершины графа (рис. 19,*б)* так, как показано на рис. 20. Теперь видно, что графы изоморфны.



а *б*

Рис. 19

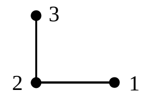
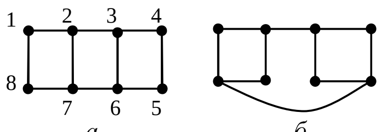


Рис. 20

Пусть графы G_1 и G_2 имеют одинаковое число вершин со степенью 0, одинаковое число вершин со степенью 1, одинаковое число вершин со степенью 2 и т. д. Очевидно, что лишь такие графы могут быть изоморфными. Но чтобы установить их изоморфизм, необходимо пронумеровать в них вершины и проверить, выполняются ли условия изоморфизма (по его определению). Если да, то графы изоморфны, если нет, то в одном из графов необходимо сменить нумерацию вершин и снова проверить условия изоморфизма. В общем случае возможно до $n!$ таких проверок, где n – число вершин графа. (Более подробные сведения о числе пометок графа можно найти в обстоятельной монографии [57].) Если в результате всех $n!$ проверок не обнаружится ни одного варианта, удовлетворяющего условиям изоморфизма, то эти графы



а *б*

Рис. 21

являются неизоморфными. Например, на рис. 21 изображены графы *а* и *б*, у которых одинаковое число вершин, одинаковое число ребер, одинаковое число вершин со степенью 2, одинаковое число вершин со степенью 3. Но если перебрать все 8! вариантов нумерации вершин графа *б*, то среди них не найдется ни одного варианта, удовлетворяющего требованиям изоморфизма. Следовательно, эти графы неизоморфны.

Упражнения

1. (РКФ). Укажите номера графов (рис. 22), являющихся изоморфными графу, приведенному на рис. 23.

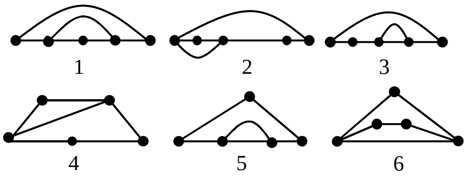


Рис. 22

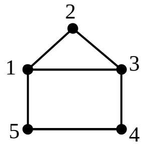


Рис. 23

2. (ООМ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) могут ли быть изоморфными графы, не содержащие ребер?

2) даны два полных графа с одинаковым числом вершин. При всякой ли нумерации вершин сохраняются условия изоморфизма этих графов?

3) даны два однородных графа с одинаковым числом вершин. Всякая ли нумерация вершин этих графов удовлетворяет условиям изоморфизма?

4) применимо ли понятие изоморфизма к псевдографам?

5) может ли непустой граф быть изоморфным своему подграфу?

6) может ли частичный граф быть изоморфным нуль-графу на том же числе вершин, что и частичный граф?

7) является ли изоморфизм отношением эквивалентности?

1.8. Матрицы смежности и ицидентности

Матрица смежности – это еще один способ задания графов. Матрица смежности представляет собой квадратную таблицу размерами $n \times n$, где n – число вершин графа. Строкам и колонкам матрицы ставятся в соответствие вершины, а на пересечениях строк и колонок записываются числа, показывающие, сколько ребер соединяют соответствующие вершины графа.

Построение матрицы смежности поясним на примере графа, приведенного на рис. 24. В графе шесть вершин, следовательно, матрица смежности имеет шесть строк и шесть колонок (рис. 25). В первой строке слева записан нуль. Это значит, что вершина 1 не имеет петли. Справа от нуля записано число 3. Оно говорит о том, что вершины 1 и 2 соединены тремя кратными ребрами и т. д.

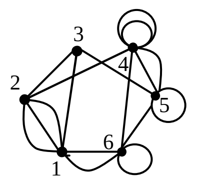


Рис. 24

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	0	0	2
2	3	0	1	1	0	0
3	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	2	2	1
5	0	0	1	2	1	1
6	2	0	0	1	1	1

Рис. 25

При помощи матрицы смежности легко определить степень любой вершины. Для этого достаточно сложить все числа в соответствующей строке (или колонке) и добавить к результату число, находящееся на пересечении данной строки с главной диагональю. Например, степень вершины 4 равна (1 + 2 + 2 + 1) + 2, где выражение в скобках представляет собой сумму всех чисел четвертой строки, а последнее слагаемое – это диагональное число строки 4.

Если найти сумму всех чисел матрицы (вместе с диагональными), прибавить к ней сумму всех диагональных чисел и результат разделить на два, то получим число всех ребер графа. Например, для графа, изображенного на рис. 25, имеем: (3+1+2+3+1+1+1+1+1+1+2+ +2+1+1+2+1+1+2+1+1+1)+(2+1+1) = 34, где в первом скобочном выражении представлена сумма всех чисел матрицы, во втором – сумма диагональных чисел. Разделив число 34 на два, находим, что граф, представленный матрицей (рис. 25), имеет 17 ребер.

Для построения матрицы смежности подграфа в исходной матрице достаточно удалить i-ю строку и i-й столбец ($i = 1, 2,\ldots, n$; i – номер удаляемой вершины; n – число вершин графа). Например, если требуется найти матрицу смежности подграфа путем удаления вершины 1 (рис. 25), то, вычеркнув строку 1 и колонку 1, получим матрицу (рис. 27), граф которой приведен на рис. 26.

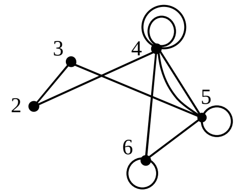


Рис. 26

	2	3	4	5	6
2	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	1	0	2	2	1
5	0	1	2	1	1
6	0	0	1	1	1

Рис. 27

Непосредственно по матрице смежности легко определить, какой это граф – простой, мультиграф или псевдограф. Если в матрице кроме нулей и единиц нет никаких других чисел и всю главную диагональ занимают нули, то граф является простым. Если во всей главной диагонали записаны нули, а в других позициях матрицы встречаются числа, превосходящие единицу, то граф является мультиграфом. Если в главной диагонали имеются числа, не равные нулю, то граф содержит петли и, следовательно, является псевдографом.

На рис. 28 показана матрица инцидентности для графа на рис. 23. В этой матрице для каждого ребра указаны инцидентные вершины. Строкам матрицы поставлены в соответствие номера вершин, колонкам – ребра графа. Вершина 1 инцидентна трем ребрам: {1,2}, {1,3}, {1,5}, поэтому на пересечении строки 1 с первыми тремя колонками записаны единицы. Подобным образом заполнены все остальные строки матрицы.

	{1,2}	{1,3}	{1,5}	{2,3}	{3,4}	(4,5)
1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	1	0	0	0	1	0

Рис. 28

В графе могут быть кратные ребра и петли. В таких случаях в матрице инциденций необходимо предусматривать отдельные колонки для каждого ребра и для каждой петли. Например, в графе на рис. 29 всего десять ребер (вместе с петлями). В соответствии с этим матрица инциденций содержит десять колонок (рис. 30).

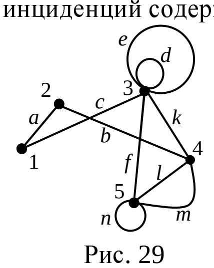


Рис. 29

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*k*	*l*	*m*	*n*
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	2	2	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1	2

Рис. 30

Петли в матрице удобно обозначать цифрой 2, так как при этом очень легко определяюся степени вершин:

достаточно найти сумму всех чисел какой-либо строки. Эта сумма и будет равна степени соответствующей вершины. Например, степень вершины 3 (рис. 30) равна 7:

$$\rho_3 = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7.$$

Так же легко найти матрицу инцидентности для дополнения заданного графа. Для этого достаточно построить матрицу, содержащую те же строки, а колонкам поставить в соответствие только те ребра, которые не входят в исходную матрицу, но входят в множество ребер полного графа (на тех же вершинах).

И вообще представление графов в виде матриц инцидентности значительно упрощает выполнение операций над графами (например, пересечения и объединения).

В завешение подраздела заметим, что матрица инцидентности является более информативной по сравнению с матрицей смежности, так как передает всю информацию о графе без каких-либо потерь. Например, в матрице смежности при наличии кратных ребер указывается только их количество, а сами ребра являются неразличимыми.

Более подробные сведения о матричном представлении графов можно найти в [16; 32; 35; 49].

Упражнения

1. (795). Укажите номера простых графов (рис. 31).

2. (РЦХ). Укажите степени вершин графа 2 (рис. 31) в порядке их нумерации (сами вершины не указывать).

3. (731). Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 4 (рис. 31).

4. (153). Укажите номера псевдографов (рис. 31).

5. (В54). Укажите номера мультиграфов (рис. 31).

	1	2	3	4
1	1	0	1	1
2	0	1	1	1
3	1	1	1	0
.4	1	1	0	1

1

	1	2	3	4
1	0	0	0	2
2	0	0	3	0
3	0	3	0	0
4	2	0	0	0

2

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	2	0	0
3	0	0	2	0
4	0	0	0	1

3

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

4

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	0	1	0
3	0	1	0	1
4	1	0	1	0

5

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	0	1
3	1	0	0	1
4	0	1	1	0

6

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1
3	1	0	0	0
4	0	1	0	0

7

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

8

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	0	1	0	1
3	1	0	1	0
4	0	1	0	1

9

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

10

Рис. 31

6. (АЙК). Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 8 (рис. 31).

7. (ГУЛ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да» (рис. 28). Верно ли, что:

1) граф 7 является дополнением графа 5?

2) граф 9 является дополнением графа 5?

3) граф 8 является полным графом?

4) граф 4 является полным графом?

5) матрица, во всех позициях содержащая нули, представляет нуль-граф?

6) матрица, во всех позициях содержащая нули, представляет пустой граф?

7) матрица, во всех позициях содержащая единицы, представляет полный граф с петлями?

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*k*	*l*	*m*	*n*
1	1				2				1	2
2		1								
3			1	2		1	1			
4		1	1				1	1	1	
5	1					1		1		

Рис. 32

8. (ДУМ). Укажите вершины, инцидентные ребру *a* (рис. 32).

9. (ОУН). Укажите номера вершин, содержащих петли (рис. 32).

10. (ЮАЮ). Укажите номера вершин, степень которых нечетна (рис. 32).

11. (ЗАЯ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли в какой-либо колонке матрицы инцидентности находиться только одна единица?

2) могут ли в матрице инцидентности содержаться колонки, в которых записано три единицы?

3) существуют ли матрицы инцидентности, все строки которых заполнены единицами (то есть нет ни одного нуля)?

4) могут ли в матрице инцидентности быть колонки, содержащие две цифры 2?

5) существуют ли матрицы инцидентности, в каждой строке которых содержится точно по одной единице?

6) существуют ли матрицы инцидентности, в каждой строке которых содержится точно по одной цифре 2?

7) существуют ли матрицы инцидентности, содержащие хотя бы одну колонку, в которой записана цифра 1 и цифра 2?

12. (ЦНП). Укажите номера висячих вершин (рис. 32).

13. (КТВ). Сколько колонок в матрице инцидентности полного графа на десяти вершинах?

14. (НАЖ). Сколько колонок содержит матрица инцидентности дополнения графа (рис. 28)?

2. СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

2.1. Маршруты, цепи, циклы

Пусть граф *G* содержит множество *V* вершин и множество *E* ребер. **Маршрутом** длины *n* называется непустая последовательность *n* ребер вида

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots, v_n, e_n, v_{n+1}, \qquad (1)$$

где ребро e_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) соединяет вершины v_j и v_{j+1} [35, с. 165]. Очевидно, что в последовательности (1) одни и те же вершины могут повторяться. (В [56, с. 57] вместо термина «маршрут» используется слово «путь».)

Примеры маршрутов (рис.1):

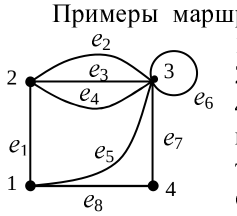


Рис.1

$$1\ e_1\ 2\ e_4\ 3\ e_6\ 3\ e_2\ 2\ e_1\ 1; \qquad (2)$$

$$2\ e_2\ 3\ e_3\ 2\ e_4\ 3\ e_7\ 4; \qquad (3)$$

$$4\ e_8\ 1\ e_5\ 3\ e_6\ 3\ e_7\ 4\ e_7\ 3$$

и т. д. В каждой из этих последовательностей вершины обозначены цифрами, ребра – буквой *e* с числовыми индексами.

Маршрут называется **цепью**, если в нем нет повторяющихся ребер. Примером может служить маршрут (3).

Цепь называется **простой**, если в ней нет повторяющихся вершин (лишь первая и последняя вершины могут совпадать). Примеры простой цепи (рис. 1):

$$1\ e_5\ 3\ e_4\ 2; \qquad 2\ e_2\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1.$$

Маршруты, цепи и простые цепи могут быть **замкнутыми** и **разомкнутыми**. В замкнутых маршрутах (а также цепях и простых цепях) начальная и конечная вершины совпадают, в разомкнутых — не совпадают. Примером замкнутого маршрута является (2).

Замкнутая цепь называется **циклом**. Пример (рис. 1):

$$2\ e_2\ 3\ e_7\ 4\ e_8\ 1\ e_5\ 3\ e_4\ 2.$$

Простая замкнутая цепь называется **простым циклом**. Примеры простых циклов (рис.1):

$$2\ e_2\ 3\ e_5\ 1\ e_1\ 2; \qquad 3\ e_2\ 2\ e_3\ 3; \qquad 3\ e_6\ 3.$$

В случае простых графов (не содержащих петель и кратных ребер) для обозначения маршрутов, цепей и циклов можно использовать только номера вершин.

Такое представление маршрутов называется **вершинным** [19]. Поясним это при помощи графа (рис. 2).

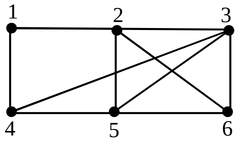


Рис. 2

Маршрут: 1, 2, 6, 3, 6, 5;
цепь: 2, 3, 6, 5, 2, 1, 4;
цикл: 6, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 6;
простая цепь: 1, 2, 3, 5, 6;
простой цикл: 2, 3, 5, 6, 2.

Число ребер, входящих в цепь, называется **длиной цепи** или **расстоянием** между соответствующими вершинами. Например, цепь 1, 2, 3, 5, 6 (рис. 2) содержит четыре ребра, следовательно, расстояние между вершинами 1 и 6, а также длина цепи равны 4.

Очевидно, что во всякой простой цепи, заданной последовательностью вершин (вершинное представление цепи), число вершин на единицу больше числа ребер.

Упражнения

1. В нижеприведенном списке укажите (рис. 1):

(600) маршруты; (794) циклы;
(961) замкнутые маршруты; (627) простые цепи;
(Г52) цепи; (788) простые циклы.

1) 2 e_3 3; 4) 3 e_7 4 e_8; 7) e_4 3 e_7 2 e_4;
2) 1 e_8 4 e_8 1; 5) 3 e_6 3; 8) 1 e_5 3 e_7 4;
3) 2 e_2 3 e_6 3; 6) 2 e_4 3 e_2 2; 9) 1 e_5 3 e_7 4 e_8 1.

2. В списке, приведенном в упр. 1, укажите:

(В72) последовательности, не являющиеся маршрутами;

(885) простые цепи длины 1;

(196) цепи длины 2;

(833)! простой цикл наибольшей длины. Укажите длину этого цикла.

3. В нижеприведенном списке укажите (рис. 2):

(РЕФ) маршруты; (УЗС) циклы;
(У92) замкнутые маршруты; (88Ш) простые цепи;
(УТК) простые циклы; (ОЖУ) цепи.

1) 3, 4, 5, 3, 6, 3; 4) 2, 6; 7) 2, 3, 6, 2, 3, 6, 2;
2) 1, 2, 3, 4, 1; 5) 3, 5, 4, 3; 8) 3, 3;
3) 5; 6) 2, 6, 2; 9) 3, 4, 5, 2, 3.

4. (347). На какие вопросы Вы ответите «да»?

1) может ли последовательность, обозначающая маршрут, начинаться номером ребра и оканчиваться номером вершины?

2) может ли цепь состоять из одного ребра (и двух вершин)?

3) может ли простой граф содержать цикл, состоящий из одного ребра?

4) существуют ли маршруты в нуль-графе, множество вершин которого не является синглетоном?

5) верно ли, что если граф содержит одну вершину и не является нуль-графом, то он содержит цикл?

6) верно ли, что если простой граф состоит из двух вершин и не является нуль-графом, то в нем нет циклов?

7) могут ли в цикле повторяться вершины?

8) верно ли, что если в графе нет циклов, то в нем число ребер равно числу вершин?

2.2. Связность графа

Понятие связности относится к одному из наиболее важных понятий теории графов.

Две вершины *v* и *w* графа называются **связными**, если существует соединяющая их цепь. Если же в графе нет ни одной цепи, соединяющей вершины *v* и *w*, то вершины *v* и *w* являются **несвязными**. Например, вершины 1 и 5 (рис. 3) связны, так как их соединяет цепь 1,7,6,5 (а также 1,7,2,5; 1,7,6,2,5 и 1,7,2,6,5), а вершины 2 и 3 связными не являются, так как ни одна цепь их не соединяет.

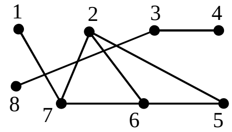


Рис. 3

Граф называется **связным**, если каждые две его вершины связны. Если же в графе имеется хотя бы одна пара вершин, не соединенных цепью, то граф называется несвязным. Согласно этим определениям граф, изображенный на рис. 2, является связным, а граф, приведенный на рис. 3, – несвязным.

Отношение связности вершин *v* и *w* является рефлексивным (всякая вершина, имеющая петлю, связна сама с собой), симметричным (если вершины *v* и *w* связны, то связны и вершины *w* и *v*), транзитивным (если вершины *v* и *w* связны и связны вершины *w* и *t*, то связны и вершины *v* и *t*), следовательно, множество связных вершин образует класс эквивалентности. Классы эквивалентности, из которых состоит несвязный граф, называются его **компонентами**. Необходимо заметить, что согласно нормам современного русского языка это слово относится к категории мужского рода: компонент [5; 37; 47]. Однако в литературе по теории графов и в некоторых других разделах математики оно считается словом женского рода: компонента [12; 16; 32; 35; 51; 56]. В данном пособии принято считать, что слово «компонента» относится к женскому роду. Но вне профессиональной среды его следует считать словом мужского рода.

Число компонент, из которых состоит граф, называется **степенью связности** [56, с. 60]. Граф, изображеннный на рис. 3, имеет степень связности, равную 2. Степень связности графа, приведенного на рис. 4, равна 5.

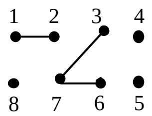


Рис. 4

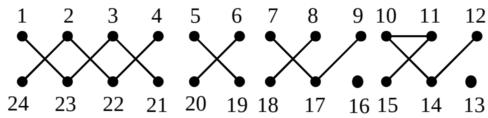


Рис. 5

Упражнения

1. (ОЖФ). Укажите степень связности графа (рис. 5).

2. (ВРХ)! Определите степень связности подграфа, построенного на основе рис. 3 путем удаления из графа вершин 3 и 7; путем удаления из него вершин 2, 3, 6, 7.

3. Ниже дан список графов, заданных множествами их ребер. Каждый граф содержит 6 вершин. Укажите номера графов: (ЭЕЕ) трехкомпонентных; (ФС9) четырехкомпонентных.

1) {{1,2}, {2,6}, {3,4}}; 5) {{1,2}, {2,5}, {3,6}};
2) {{1,5}, {3,5}}; 6) {{2,3}, {5,6}};
3) {{1,2}, {2,3}, {5,6}}; 7) {{1,2}, {2,5}, {3,4}};
4) {{1,6}, {2,3}, {3,4}}; 8) {{1,2}, {2,3}, {4,5}}.

4. (К66). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) может ли нуль-граф быть однокомпонентным?

2) может ли граф быть однокомпонентным, если в нем 10 вершин и 8 ребер?

3) верно ли, что граф на *n* вершинах, не содержащий ни одного ребра, имеет степень связности, равную *n*?

4) относится ли пустой граф к однокомпонентным?

5) относится ли пустой граф к многокомпонентным?

6) может ли граф, содержащий *n* вершин и *n* ребер, иметь степень связности, равную *n*?

7) В графе 20 ребер. Степень каждой вершины равна 2. Может ли граф иметь степень связности, равную 15?

5. (335)! В графе 20 вершин. Степень каждой вершины равна 1. Сколько в графе компонент? Сколько ребер?

2.3. Нахождение простых цепей

Постановка задачи. Пусть задан простой граф. Выберем в нем какие-либо две вершины v и w и выясним, как найти все простые цепи, соединяющие эти вершины. Очевидно, что задача разрешима, если граф является связным. В случае несвязных графов задача также разрешима, но при этом возможны два варианта:

а) вершины v и w относятся к одному и тому же классу эквивалентности. Очевидно, что все простые цепи будут проходить только через вершины этого класса;

б) вершины v и w входят в различные компоненты графа. В этом случае число простых цепей равно нулю.

Метод нахождения всех простых цепей рассмотрим на примере связного графа, приведенного на рис. 6.

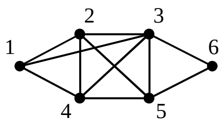


Рис. 6

Допустим, что начальной является вершина 1, конечной – вершина 6. На первом этапе выясним, сколько существует способов выйти из первой вершины. Так как ее степень равна 3, то имеем три варианта: 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4.

Из вершины 2 можно выйти в трех направлениях: к вершинам 3, 4, 5 (в вершину 1 не возвращаемся). Из вершины 3 движение возможно четырьмя способами, из вершины 4 – тремя. Таким образом, на втором этапе имеем:

1 – 2 – 3	1 – 3 – 2	1 – 4 – 2
1 – 2 – 5	1 – 3 – 4	1 – 4 – 3
1 – 2 – 4	1 – 3 – 5	1 – 4 – 5
	1 – 3 – 6	

Заметим, что одну простую цепь мы уже нашли (подчеркнута): 1–3–6. Остальные цепи имеют продолжение:

1 – 2 – 3 – 4	1 – 2 – 4 – 3	1 – 3 – 5 – 2	1 – 4 – 3 – 5
1 – 2 – 3 – 5	1 – 2 – 4 – 5	1 – 3 – 5 – 4	1 – 4 – 3 – 6
1 – 2 – 3 – 6	1 – 3 – 2 – 4	1 – 3 – 5 – 6	1 – 4 – 5 – 2
1 – 2 – 5 – 3	1 – 3 – 2 – 5	1 – 4 – 2 – 3	1 – 4 – 5 – 3
1 – 2 – 5 – 4	1 – 3 – 4 – 2	1 – 4 – 2 – 5	1 – 4 – 5 – 6
1 – 2 – 5 – 6	1 – 3 – 4 – 5	1 – 4 – 3 – 2	

Найдено еще пять простых цепей (все они подчеркнуты). Остальные 18 цепей имеют продолжения:

1 – 2 – 3 – 4 – 5	1 – 3 – 2 – 4 – 5	1 – 4 – 2 – 3 – 6
1 – 2 – 3 – 5 – 4	1 – 3 – 2 – 5 – 4	1 – 4 – 2 – 5 – 3
1 – 2 – 3 – 5 – 6	1 – 3 – 2 – 5 – 6	1 – 4 – 2 – 5 – 6
1 – 2 – 5 – 3 – 4	1 – 3 – 4 – 2 – 5	1 – 4 – 3 – 2 – 5
1 – 2 – 5 – 3 – 6	1 – 3 – 4 – 5 – 2	1 – 4 – 3 – 5 – 2
1 – 2 – 5 – 4 – 3	1 – 3 – 4 – 5 – 6	1 – 4 – 3 – 5 – 6
1 – 2 – 4 – 3 – 5	1 – 3 – 5 – 2 – 4	1 – 4 – 5 – 2 – 3
1 – 2 – 4 – 3 – 6	1 – 3 – 5 – 4 – 2	1 – 4 – 5 – 3 – 2
1 – 2 – 4 – 5 – 3	1 – 4 – 2 – 3 – 5	1 – 4 – 5 – 3 – 6
1 – 2 – 4 – 5 – 6		

На четвертом этапе получили десять простых цепей. На пятом (последнем) – аналогично получаем еще десять цепей. Это самые длинные цепи, они проходят через все вершины графа (рис. 6):

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6	1 – 3 – 4 – 2 – 5 – 6
1 – 2 – 5 – 4 – 3 – 6	1 – 4 – 2 – 3 – 5 – 6
1 – 2 – 4 – 3 – 5 – 6	1 – 4 – 2 – 5 – 3 – 6
1 – 2 – 4 – 5 – 3 – 6	1 – 4 – 3 – 2 – 5 – 6
1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 6	1 – 4 – 5 – 2 – 3 – 6

Таким образом, всего в графе (рис. 6) имеется 26 простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6. Из них одна цепь содержит два ребра, 5 цепей содержат по три ребра, 10 цепей – по четыре ребра и 10 цепей – по пять ребер.

По списку простых цепей легко найти множество Q **реберно непересекающихся** (не имеющих общих ребер) простых цепей и множество S **вершинно непересекающихся** (не имеющих общих вершин) простых цепей [51, с. 157]. В случае рассмотренного примера:

$Q_1 = \{1,2,5,6;\ \ 1,4,3,6\}$;

$Q_2 = \{1,2,4,3,5,6;\ \ 1,4,5,2,3,6\}$;

$S_1 = \{1,2,3,6;\ \ 1,4,5,6\}$; $S_2 = \{1,2,5,6;\ \ 1,4,3,6\}$;

$S_3 = \{1,3,6;\ \ 1,2,4,5,6\}$; $S_4 = \{1,3,6;\ \ 1,4,5,6\}$.

Упражнения

1. (ХОФ). Сколько простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6 и проходящих через вершину 2, содержит граф, приведенный на рис. 6?

2. Сколько простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 6, будет содержать граф (рис. 6), если:

(ЯХ7) вершины 1 и 2 дополнительно соединить еще одним ребром?

(926) вершины 1 и 3 соединить не одним, а тремя кратными ребрами (вершины 1 и 2 при этом соединены одним ребром)?

3. (ШИМ)! На основе графа (рис. 6) построили подграф, удалив вершину 2. Сколько ребер удалено? Сколько ребер в подграфе? Сколько простых цепей соединяют вершины 1 и 6 подграфа?

4. Сколько существует простых цепей, соединяющих вершины 1 и 6 в частичном графе, построенном на основе графа (рис. 6) путем:

(ДЖН) удаления ребра {1, 2}?

(МЖР) удаления ребра {2, 5}?

(ХМП) удаления ребра {3, 6}?

(УУК) удаления двух ребер {3, 4} и {2, 5}?

(52Т) удаления трех ребер {1, 2}, {1, 3} и {3, 6}?

5. На рис. 7 изображен граф на пяти вершинах.

(ЛАС). Сколько в этом графе всего простых цепей, соединяющих вершины 1 и 5?

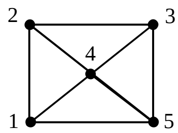


Рис. 7

(ЦВО)! Сколько среди них простых цепей длины 1? 2? 3? 4? 5?

(ПЗУ)! Сколько простых цепей проходит через 3 вершины? через 4 вершины? через все вершины?

6. (ХМХ). Сколько простых цепей соединяют две смежные вершины в полном графе на пяти вершинах?

7. В графе (рис. 7) удалили вершину 4. К получившемся подграфу добавили ребра 1 – 2, 2 – 3, 3 – 5, 1 – 5. Сколько существует в этом графе простых цепей, соединяющих вершины: (КЕШ) 1 и 3? (827) 1 и 5?

8. (ХАЖ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) во всяком ли простом графе самая длинная простая цепь проходит через все вершины графа?

2) дан связный граф. Всякий ли его надграф является связным?

3) верно ли, что в любом полном графе любые две его вершины соединяет одинаковое число простых цепей?

4) существует ли связный граф, в котором любые две вершины соединены двумя простыми цепями?

5) может ли петля в связном графе быть элементом какой-либо простой цепи, соединяющей две различные вершины графа?

6) всякий ли непустой подграф полного графа является полным?

7) всякий ли частичный граф полного графа является связным?

2.4. Применение метода нахождения всех простых цепей

Метод нахождения всех простых цепей, соединяющих две заданные вершины графа, имеет многочисленные применения. Его можно использовать в задаче коммивояжера (см. подраздел 2.7), при составлении маршрутов путешествий, в электротехнических схемах, при анализе контактных цепей и др. Применение метода поясним на примере контактных структур. На рис. 8 приведена схема, содержащая пять реле A, B, C, D, E и имеющая три выхода f_1, f_2, f_3. Требуется построить точно такую же (логически эквивалентную) схему, но не на контактах, а на логических элементах И, ИЛИ, НЕ.

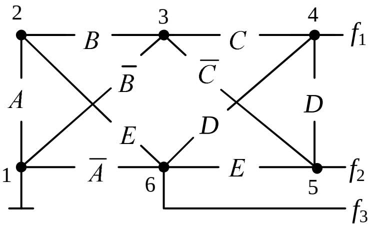


Рис. 8

Для решения этой задачи сначала найдем все простые цепи, соединяющие вершину 1 с вершинами 4, 5, 6. Они указаны в таблице 1 отдельно для каждой из вершин 4, 5, 6, если схему рассматривать как граф.

Так как ребрам соответствуют контакты, обозначенные буквами A, B, C, D, E, то для каждой простой цепи можно найти конъюнкцию, равную единице, если соответствующая цепь замкнута.

Для примера рассмотрим цепь 1,2,6,5,4, состоящую из ребер {1,2}, {2,6}, {6,5}, {5,4}. Согласно схеме (рис. 8) вершины 1 и 2 соединены контактом A, вершины 2 и 6 – контактом E, вершины 6 и 5 – также контактом E и вершины 5 и 4 – контактом D. Следовательно, простой цепи 1,2,6,5,4 соответствует конъюнкция $AEED=ADE$.

Таблица 1

Функция f_1		Функция f_2		Функция f_3	
Простые цепи	Конъюнкции	Простые цепи	Конъюнкции	Простые цепи	Конъюнкции
134	$\overline{B}C$	135	$\overline{B}\,\overline{C}$	16	$\overline{A}$
164	$\overline{A}D$	165	$\overline{A}E$	126	AE
1234	ABC	1235	$AB\overline{C}$	1326	0
1264	ADE	1265	AE	1346	$\overline{B}CD$
1354	$\overline{B}\,\overline{C}D$	1345	$\overline{B}CD$	1356	$\overline{B}\,\overline{C}E$
1654	$\overline{A}DE$	1645	$\overline{A}D$	12346	$ABCD$
12354	$AB\overline{C}D$	12345	$ABCD$	12356	$AB\overline{C}E$
12654	ADE	12645	ADE	13456	$\overline{B}CDE$
13264	0	13265	0	13546	$\overline{B}\,\overline{C}D$
13564	$\overline{B}\,\overline{C}DE$	13465	$\overline{B}CDE$	123456	$ABCDE$
16234	$\overline{A}BCE$	16235	$\overline{A}B\overline{C}E$	123546	$AB\overline{C}D$
16534	0	16435	0		
123564	$AB\overline{C}DE$	123465	$ABCDE$		
126534	0	126435	0		
132654	0	132645	0		
162354	$\overline{A}B\overline{C}DE$	162345	$\overline{A}BCDE$		

Аналогичным образом находятся и все остальные конъюнкции для каждой цепи. Все они перечислены в табл. 1. (Простые цепи в этой таблице указаны перечислением соответствующих вершин без использования запятых.) Заметим, что в таблице вместо некоторых конъюнкций записаны нули. Это значит, что проводимость соответствующих цепей отсутствует.

Рассмотрим, например, цепь 1,3,2,6,4. Если записать конъюнкцию, то получим: $\overline{B}\,B\,E\,D = 0$, так как переменная B входит в прямой и инверсной формах.

Дизъюнкция всех конъюнкций, построенных на основе простых цепей, дает искомую булеву функцию. После минимизации функции f_1, f_2, f_3, принимают вид:

$$f_1 = AC + \overline{B}\,C + CE + D;$$

$$f_2 = A\overline{C} + \overline{B}\overline{C} + D + E;$$

$$f_3 = \overline{A} + D + E.$$

Комбинационная схема, построенная на основе этих булевых функций, приведена на рис. 9.

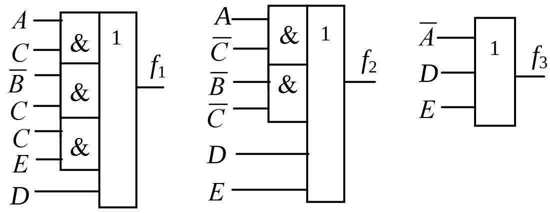


Рис. 9

Упражнения

1. На рис. 10 приведена контактная структура на пяти реле A, B, C, D, E, имеющая три выхода f_1, f_2, f_3. Найдите минимальные формы булевых функций (буквы записывать в алфавитном порядке):

(ТБФ) f_1; (ЦТ2) f_2; (ИЕЗ) f_3.

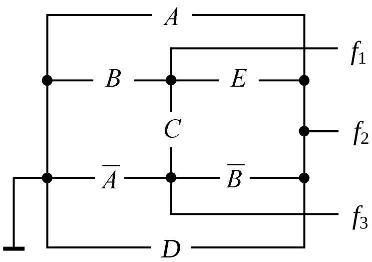


Рис. 10

2. На рис. 10 контакт A удалили (контакт $\overline{A}$ оставили на месте). Найдите число простых импликант, число вхождений букв и число неинверсных букв для минимальных ДНФ функций: (8Б4)! f_1; (5Г5)! f_2; (МТК)! f_3.

2.5. Эйлеровы цепи и циклы. Уникурсальная линия

Эйлер Леонард (1707–1783), швейцарский математик, механик, физик и астроном, является звездой первой величины на небосклоне науки. Он много лет работал в Петербургской академии наук. За свою долгую жизнь он издал более 800 научных работ. Творческая активность Л. Эйлера оставалась на высочайшем уровне и в преклонном возрасте, хотя в последние 17 лет его жизнь была омрачена потерей зрения. Очень непросто перечислить даже основные результаты научной деятельности Л. Эйлера. Он доказал великую теорему Ферма для показателей 3 и 4, положил начало топологии, построил точную траекторию движения Луны с учетом притяжения не только Земли, но и Солнца. У него много трудов по теории комплексных чисел, вариационному исчислению, гидравлике, кораблестроению, геометрической оптике, механике твердого тела, теории музыки, теории графов и др.

В первой работе Эйлера по теории графов, опубликованной в 1736 г., дано решение головоломки о Кенигсбергских мостах [38]. Город Кенигсберг (на современных географических картах – это город Калининград) расположен на берегах реки Преголи (ударение на букву «о») и двух ее островах. Острова и берега тогда были связаны семью мостами (рис. 11). Горожане любили гулять по этим мостам и пытались найти такой путь, чтобы, выйдя из одной точки, пройти точно по одному разу по всем мостам и вернуться в исходную точку. Однако, несмотря на многочисленные попытки, обойти по одному разу все семь мостов никому не удавалось, что очень удивляло горожан. Л. Эйлер, занявшись этой головоломкой, показал, что такого пути не существует. Невозможен и облегченный вариант обхода мостов, когда требуется пройти по каждому мосту один раз без возврата в исходную точку.

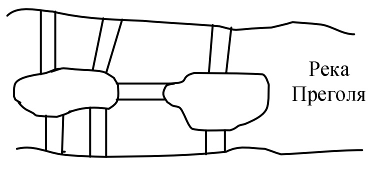


Рис. 11

В честь Л. Эйлера цикл, содержащий все ребра графа, стали называть **эйлеровой линией** [38], **эйлеровым циклом** [3], замкнутой эйлеровой цепью [56] или просто **эйлеровой цепью** [51]. Граф, содержащий эйлеров цикл, получил название **эйлерова графа**. Если граф содержит разомкнутую цепь, содержащую все ребра этого графа, то такой граф называется **полуэйлеровым** [51].

Приведем несколько наиболее важных теорем об эйлеровых графах.

Теорема 1. Если в связном графе все вершины четны, то этот граф содержит эйлеров цикл.

Доказательство можно найти в [3, с. 37; 56, с. 61].

Верно и обратное утверждение: если граф содержит эйлеров цикл, то все его вершины четны.

Построим граф по рис. 11. Получим рис. 12. Вершины 1 и 4 этого графа обозначают берега, вершины 2 и 3 – острова на реке, а ребра – мосты. Степени всех вершин графа нечетны, следовательно, в графе нет эйлерова цикла и нет эйлеровой цепи.

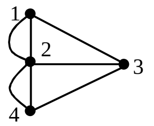


Рис. 12

На рис. 13 приведен граф, в котором степени всех вершин четны. Обход его ребер можно начать с любой вершины. Обозначим ребра буквами a, b, c, d, e, f, k, m, n. Тогда примером эйлерового цикла может служить следующая последовательность ребер и вершин:

$$4,\ c,\ 1,\ a,\ 1,\ b,\ 2,\ f,\ 3,\ n,\ 5,\ m,\ 4,\ k,\ 3,\ e,\ 2,\ d,\ 4. \qquad (4)$$

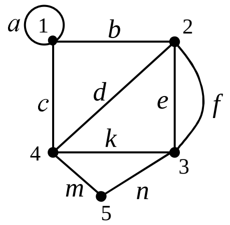


Рис.13

Теорема 2. Если в связном графе две вершины нечетны, а все остальные – четны, то этот граф содержит эйлерову разомкнутую цепь. Доказательство в [3; 56].

Если на рис. 13 удалить вершину 5, то получится подграф, в котором вершины 3 и 4 являются нечетными, а вершины 1 и 2 – четными. Примером эйлеровой цепи в подграфе может служить следующая последовательность вершин и ребер:

$$4,\ c,\ 1,\ a,\ 1,\ b,\ 2,\ d,\ 4,\ k,\ 3,\ e,\ 2,\ f,\ 3. \qquad (5)$$

Всякую линию, которую можно провести, проходя по заданным участкам точно по одному разу, называют **уникурсальной** [3, с. 37; 42, с. 292]. Применительно к эйлеровым графам провести уникурсальную линию – это значит пройти по всем ребрам графа по одному разу, не отрывая карандаш от бумаги. Например, последовательность (4) представляет собой замкнутую уникурсальную линию, а примером разомкнутой уникурсальной линии является последовательность (5). Заметим, что разомкнутая уникурсальная линия всегда начинается с нечетной вершины и заканчивается в другой нечетной вершине. Если же начать обход полуэйлерового графа с четной вершины, то уникурсальную линию, ни замкнутую, ни разомкнутую, построить не удастся.

Эйлеровы графы иногда называют уникурсальными.

Теорема 3. Если в связном графе G содержится $2k$ нечетных вершин, то в нем имеется k разомкнутых эйлеровых цепей, в совокупности содержащих все ребра графа G точно по одному разу. (Доказательство в [3].) Используя понятие уникурсальной линии, эту теорему можно сформулировать следующим образом: если в связном графе содержится $2k$ нечетных вершин, то в нем имеется k разомкнутых уникурсальных линий. Чтобы изобразить такой граф, карандаш придется оторвать от бумаги не менее $k - 1$ раз. Например, граф на рис. 12 содержит четыре нечетные вершины, следовательно, $k = 2$. При его изображении карандаш от бумаги придется оторвать один раз. Если начать с вершины 1, то получим две уникурсальные линии: 1,3,4,2,1,2,4 и 2,3.

Теорема 4. В любом связном графе можно построить замкнутый маршрут, проходящий через каждое ребро точно два раза.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно каждое ребро графа заменить двумя параллельными ребрами и считать, что маршрут проходит по каждому ребру точно один раз. Тогда все вершины станут четными. Согласно теореме 1 в таком графе всегда существует эйлеров цикл.

Из теоремы 4 следует, что любой граф можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги и проходя по каждому ребру не более двух раз. Например, граф, приведенный на рис. 12, можно изобразить в виде последовательности вершин так: 1,2,4,2,1,3,2,3,4, откуда следует, что два раза карандаш прошел только по ребру {2,3}.

Упражнения

1. (Т91). Укажите номера графов на рис. 14, содержащих эйлеров цикл (замкнутую уникурсальную линию).

2. (813). Укажите номера графов на рис. 14, содержащих разомкнутую уникурсальную линию.

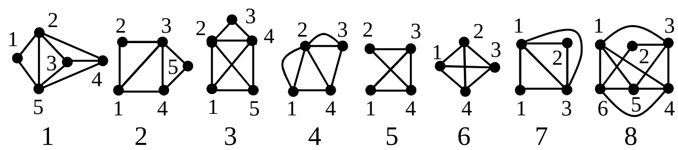


Рис. 14

3. (ПИЛ). Укажите номера вершин, с которых следует начать обход ребер графа (рис. 15), чтобы получить разомкнутую уникурсальную линию (при самоконтроле номера вершин упорядочить по возрастанию).

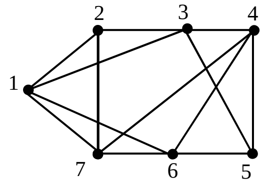


Рис. 15

4. (ТЕХ). Укажите номера вершин на графе 3 (рис.14), которые не могут быть началом (и концом) разомкнутой уникурсальной линии (номера вершин упорядочить по возрастанию).

5. (ЛИЙ). Укажите номера вершин, с которых можно начать обход графа 8 (рис. 14), чтобы получить замкнутую уникурсальную линию (номера вершин упорядочить по возрастанию).

6. (СЛИ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что в эйлеровой цепи каждая вершина встречается точно один раз?

2) верно ли, что всякая эйлерова цепь проходит через все вершины связного графа?

3) существует ли эйлерова цепь (замкнутая или разомкнутая) в связном графе, содержащем одну нечетную вершину?

4) верно ли, что во всяком эйлеровом графе существует единственная последовательность ребер и вершин, образующая эйлеров цикл?

5) верно ли, что в эйлеровом графе уникурсальная линия может начинаться с любой вершины?

6) верно ли, что всякая эйлерова цепь является простой цепью?

7) может ли связный граф быть полуэйлеровым, если он содержит точно одну четную вершину?

7. (378). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что разомкнутая эйлерова цепь в простом графе может начинаться с любой вершины?

2) верно ли, что в любом полном графе на n вершинах имеется эйлеров цикл, если n – нечетно?

3) верно ли, что в полном графе на n вершинах степень каждой вершины равна $n - 1$?

4) существует ли цикл в однородном графе, содержащем 33 нечетные вершины?

5) в простом графе n вершин, среди которых 5 вершин являются четными. Возможна ли эйлерова разомкнутая цепь при $n = 100$?

6) можно ли изобразить связный граф, отрывая карандаш от бумаги не более 35 раз, если в нем 35 вершин, среди которых 20 вершин являются четными?

7) существует ли замкнутая уникурсальная линия в полном графе на n вершинах при условии, что n – нечетное число?

8. (201). В полном графе на n вершинах эйлеров цикл содержит 171 ребро. Найдите n.

9. (ФАО). Сколько раз необходимо оторвать карандаш от бумаги, чтобы начертить полный граф, содержащий 60 вершин?

2.6. Гамильтоновы графы

Гамильтон Уильям Роуэн (1805–1865), ирландский математик, с 1837 г. иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук, в 1859 г. придумал игру-головоломку под названием «путешествие по додекаэдру». Додекаэдр – это объемная фигура, многогранник, в котором все грани являются правильными пятиугольниками. В додекаэдре 12 граней, 20 вершин и 30 ребер. Каждой вершине Гамильтон поставил в соответствие название одного из крупных по тем временам городов: Брюссель, Дели, Франкфурт и т. д. Задача состояла в том, чтобы, переходя по ребрам из города в город, обойти все города, побывав в каждом из них точно по одному разу, и вернуться в исходный город. Во все вершины додекаэдра были вбиты гвозди, благодаря чему каждый путь можно было обозначать ниткой, протягиваемой от вершины к вершине. Как игра головоломка оказалась довольно скучной, поэтому широкого распространения не получила даже после того, как Гамильтон громоздкий додекаэдр заменил соответствующим графом (рис.16). Но математики головоломкой заинтересовались и в память о ней всякий цикл, содержащий по одному разу каждую вершину графа, стали называть **гамильтоновой** линией (гамильтоновым циклом), а граф, содержащий гамильтонову линию, – **гамильтоновым графом** [3; 38]. Пример гамильтонова цикла, где показано, как надо нумеровать вершины графа, чтобы получилась замкнутая гамильтонова линия, приведен на рис. 16.

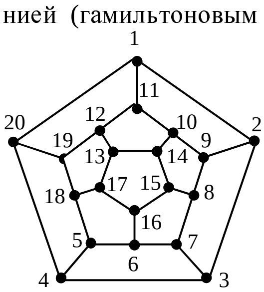


Рис. 16

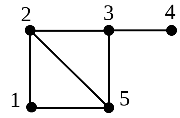


Рис. 17

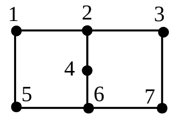


Рис. 18

Существуют ли признаки, указывающие на то, что данный граф имеет (или не имеет) гамильтонов цикл? Общий признак, при помощи которого для любого графа можно было бы определить, имеет он гамильтонов цикл или нет, не найден до сих пор. Однако для многих частных случаев такие признаки известны. Например, если в графе есть висячая вершина (со степенью, равной единице), то гамильтонов цикл в нем отсутствует (рис. 17). Если граф на n вершинах является полным, то в нем имеется гамильтонов цикл при $n \geq 3$. Если в простом графе степень ρ каждой вершины удовлетворяет условию $\rho \geq n/2$, где $n \geq 3$, n – число вершин, то этот граф является гамильтоновым (теорема Дирака) [51]. Если для любой пары вершин v_i, v_j выполняется неравенство $v_i + v_j \geq n$, где $i, j, = 1,2, \ldots, n$; $n \geq 3$; $i \neq j$; n – число вершин графа, то этот граф является гамильтоновым [3, с. 49].

Связный граф, содержащий простую разомкнутую цепь, в которую входят все вершины графа, называется **полугамильтоновым**. Примером полугамильтонова графа является граф, приведенный на рис. 18. Один вариант полугамильтоновой цепи имеет вид 4,2,1,5,6,7,3.

Так как всякая разомкнутая гамильтонова линия представляет собой простую незамкнутую цепь, то для отыскания гамильтоновых линий можно воспользоваться вышерассмотренным методом нахождения всех простых цепей, соединяющих две заданные вершины графа. Например, в полугамильтоновом графе, приведенном на рис. 6, имеется десять разомкнутых гамильтоновых цепей, каждая из которых начинается в вершине 1 и оканчивается в вершине 6.

Упражнения

1. (ЛИ1). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Является ли гамильтоновым граф:

1) на рис. 2?	4) на рис. 7?	7) на рис. 18?
2) на рис. 3?	5) на рис.12?	8) на рис. 17?
3) на рис. 6?	6) на рис. 16?	

2. (362). Укажите гамильтоновы графы (рис. 19).

3. (273). Укажите полуэйлеровы графы (рис. 19).

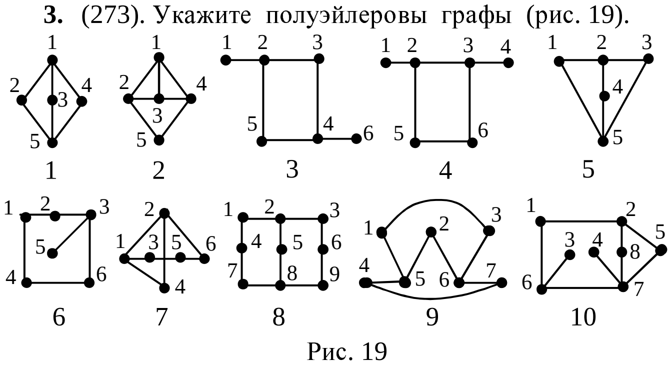


Рис. 19

4. (754). Укажите номера полугамильтоновых графов (рис. 19).

5. (ЕА5). Укажите номера графов, не являющихся ни гамильтоновыми, ни полугамильтоновыми (рис. 19).

6. (896)! Сколько существует разомкнутых гамильтоновых линий (рис. 6), связывающих вершины 1 и 6, если третьим является ребро {4,5}? вторым является ребро {2,4}? первым является ребро {1,3}?

7. (ИГ7). Сколько существует гамильтоновых циклов в графе (рис. 7) при условии, что циклы считаются различными, если они отличаются порядком записи вершин (например, 1,2,3,4,5,1 и 1,2,3,5,4,1 – различные циклы) либо начальной вершиной цикла (например, 1,2,3,4,5,1 и 2,3,4,5,1,2 – это различные циклы). Для решения задачи воспользуйтесь методом нахождения всех простых цепей.

2.7. Задача о коммивояжере

Коммивояжер (по-французски: commisvoyageur) – разъездной представитель крупной торговой фирмы, предлагающий покупателям товары по образцам, каталогам, прейскурантам. Слово в значительной степени является устаревшим [47]. В слове «коммивояжер» два ударения – на первый слог и на последний [5].

Задача о коммивояжере (о странствующем торговце, согласно [38]) имеет две существенно разные формулировки. В первой вопрос ставится так: «Коммивояжер желает посетить n определенных городов; как он должен двигаться, чтобы заехать в каждый из них хотя бы один раз, проделав путь наименьшей общей длины?» [51, с.70]. Согласно этой формулировке коммивояжер может те или иные города посещать неоднократно. По второй же формулировке «он обязан побывать в каждом пункте в точности по одному разу и заинтересован затратить на поездку как можно меньше времени» [3, с. 47]. Мы в дальнейшем будем пользоваться второй формулировкой.

Очевидно, что с математической точки зрения безразлично, какой параметр желает оптимизировать коммивояжер – время, расходы на дорогу или общую длину пути. В любом случае задача сводится к отысканию гамильтонова цикла.

Рассмотрим граф, приведенный на рис. 20. Вершины в этом графе обозначают города, ребра – расстояние между городами. В каком порядке коммивояжер должен обойти все города, преодолев наименьшее расстояние? В каком порядке он должен посетить города, если исходным является город 1? (Задача взята из [38, с. 43].)

Чтобы решить эту задачу, методом отыскания всех простых цепей найдем все гамильтоновы циклы.

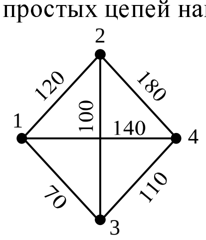


Рис. 20

Для графа, приведенного на рис. 20, существует шесть таких циклов:

1,2,4,3,1	1,2,3,4,1	1,3,2,4,1
1,3,4,2,1	1,4,3,2,1	1,4,2,3,1

Однако различными из них являются только следующие три: 1,2,4,3,1; 1,2,3,4,1; 1,3,2,4,1. А остальные – это те же циклы, но записанные наоборот, что соответствует движению коммивояжера по тем же дорогам, но в обратном порядке. Поэтому длины путей вычисляем лишь для трех гамильтоновых циклов:

Цикл 1,2,4,3,1: 120 + 180 + 110 + 70 = 480;

Цикл 1,2,3,4,1: 120 + 100 + 110 + 140 = 470;

Цикл 1,3,2,4,1: 70 + 100 + 180 + 140 = 490.

Таким образом, кратчайшим является путь 1,2,3,4,1.

Упражнения

1. (НЛО). Известно, что охотник за мертвыми душами Павел Иванович Чичиков побывал у помещиков в следующем порядке: Манилов, Коробочка, Ноздрев, Собакевич, Плюшкин, Тентетников, генерал Бетрищев, Петух, Костанжогло, полковник Кошкарев. Схема, в соответствии с которой Чичиков посещал помещиков, приведена на рис. 21 в виде графа, на котором вершины обозначают имения помещиков, а ребра – дороги; входной стрелке соответствует начало, выходной – конец пути. Укажите номера имений, принадлежащих помещикам: Манилову; Коробочке; Ноздреву; Собакевичу; Плюшкину; Тентетникову; генералу Бетрищеву; Петуху; Костанжогло; полковнику Кошкареву [3, с. 6]. (Указание: граф, приведенный на рис. 21, имеет единственную разомкнутую гамильтонову цепь. Чтобы ее найти, нет необходимости использовать метод отыскания всех простых цепей, достаточно внимательно посмотреть на граф, прослеживая различные варианты обхода вершин.)

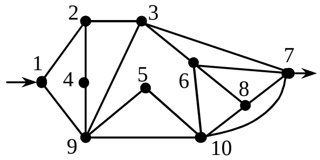


Рис. 21

2. (780). Коммивояжер выезжает из города 1, посещает по одному разу все города и останавливается в городе 5 (рис. 22). Укажите последовательность городов, в которых побывал коммивояжер, при условии, что города 1 и 5 в последовательность также входят.

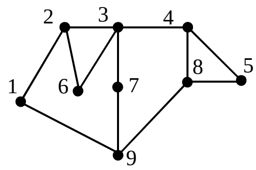


Рис.22

3. (ТЯК). Сколько километров проехал коммивояжер (см. упр. 2), если длины дорог, соединяющих города, все одинаковы и равны 100 км?

4. (АЯК). Укажите вершины (рис. 22), входящие в гамильтонову цепь, начало которой – вершина 6, конец – вершина 8.

2.8. Двудольные графы

Пусть множество V вершин графа G состоит из двух непустых множеств V_1 и V_2 так, что $V=V_1\bigcup V_2$ и $V_1\bigcap V_2 = \varnothing$. Если каждое ребро графа G соединяет некоторую вершину множества V_1 с какой-либо вершиной множества V_2, то такой граф называется **двудольным**.

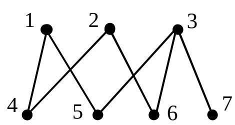


Рис. 23

Пример двудольного графа приведен на рис. 23. В этом графе

$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,

$V_1 = \{1,2,3\}$,

$V_2 = \{4,5,6,7\}$.

Двудольный граф называется **полным**, если каждая вершина множества V_1 соединена с каждой вершиной множества V_2. Полный двудольный граф имеет k ребер, где $k = |V_1|\cdot|V_2|$.

Степень любой вершины множества V_1 полного двудольного графа равна $|V_2|$. Степень каждой вершины множества V_2 равна $|V_1|$.

Дополнение полного двудольного графа есть несвязный граф, состоящий из двух компонент – полного графа G_1 и полного графа G_2.

Обозначим: $n_1 = |V_1|$; $n_2 = |V_2|$. Тогда величины K_1 и K_2, определяющие число ребер компонент G_1 и G_2, равны:

$$K_1 = C_{n_1}^2 = \frac{n_1(n_1-1)}{2}; \qquad K_2 = C_{n_2}^2 = \frac{n_2(n_2-1)}{2}.$$

Общее число K ребер дополнения полного двудольного графа равно:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 - (n_1 + n_2)}{2}.$$

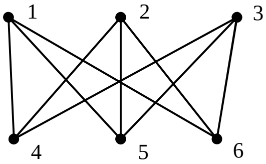


Рис. 24

В теории графов особо важное значение имеет полный двудольный граф, в котором $|V_1| = |V_2| = 3$ (рис. 24). Такой двудольный граф условимся обозначать символом $G_{3,3}$.

По аналогии с двудольными можно говорить о **трехдольных**, **четырехдольных** и, вообще, ***n*-дольных** графах. Например, в трехдольном графе множество вершин разбивается на три подмножества, в каждом из которых нет смежных вершин. Соединяться ребрами могут лишь те вершины, которые принадлежат различным подмножествам (долям).

Упражнения

1. (ЕА2). Сколько ребер имеет полный двудольный граф, если $|V_1| = 4$; $|V_2| = 7$?

2. (ЦП6). Известно, что в полном двудольном графе 143 ребра. Определите $|V_1|$ и $|V_2|$, если $|V_1| >1$ и $|V_2| >1$.

3. (675). В полном двудольном графе степень каждой вершины множества V_1 равна 6, степень каждой вершины множества V_2 равна 8. Сколько ребер в графе?

4. (КА1). В двудольном графе $|V_1| = 18$, $|V_2|= 10$, число ребер равно 18. Найдите число ребер дополнения до полного двудольного графа.

5. (594). В полном двудольном графе 49 вершин. Найдите $|V_1|$ и $|V_2|$, если $|V_1| \neq 1$ и $|V_2| \neq 1$.

6. (713). В полном двудольном графе содержится 119 ребер. Найдите величины $|V_1|$ и $|V_2|$, если известно, что $|V_2| > 15$, $|V_1| > 1$.

7. (027). В связном двудольном графе $|V_1|=7$, $|V_2|=10$. Сколько ребер содержит граф, если при удалении любого ребра граф становится несвязным?

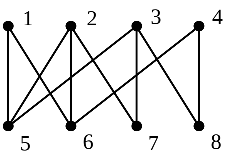


Рис. 25

8. (КВ8)! Сколько простых цепей длины n, соединяющих вершины 5 и 8, имеется в графе, изображенном на рис. 25, если $n = 2$? $n = 3$? $n = 4$? $n = 5$? $n = 6$?

9. (СНО). Дополнение полного двудольного графа содержит 31 ребро. Найдите $|V_1|$ и $|V_2|$.

10. (ЭМЕ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) может ли двудольный граф содержать петли?

2) верно ли, что нуль-граф, содержащий 7 вершин, является двудольным?

3) является ли двудольным граф, содержащий одну вершину?

4) входит ли пустой граф в множество двудольных графов?

5) может ли быть двудольным простой граф, содержащий 35 ребер?

6) во всяком ли полном двудольном графе существует гамильтонов цикл?

7) существует ли двудольный граф, содержащий замкнутую эйлерову цепь?

8) существуют ли двудольные графы, в которых все вершины множества V_1 являются четными, а все вершины множества V_2 – нечетными?

11. (ОЯВ). Укажите двудольные графы (рис. 26).

12. (АСТ). Укажите номера полных двудольных графов (рис. 26).

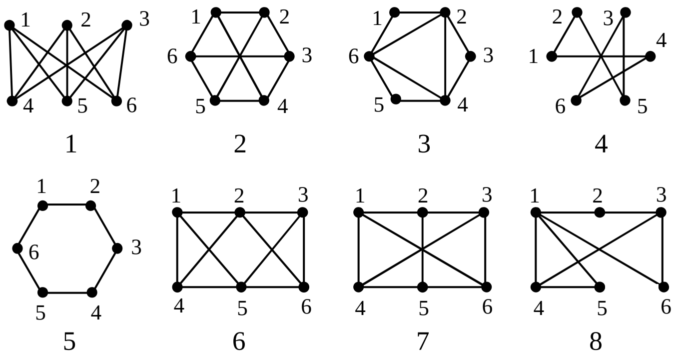


Рис. 26

13. (ЛКН). Укажите номера однородных двудольных графов (рис. 26).

14. (ЕЙС). Укажите номера графов, не являющихся двудольными (рис. 26).

15. (К5К). Сколько ребер содержит полный трехдольный граф, если $|V_1| = 3$; $|V_2| = 4$; $|V_3| = 5$, где V_1, V_2 и V_3 – множества вершин его трех долей.

16. (ЦХО). Полный трехдольный граф содержит 52 ребра. Найдите $|V_1|$, $|V_2|$, $|V_3|$, если $|V_1| < |V_3| < |V_2|$; $|V_1|\cdot|V_3| = 10$; $|V_1| + |V_3| = 7$.

2.9. Метрика графа

Завершим главу некоторыми сведениями о метрике (расстояниях) в графе. В подразделе 2.1 сказано, что расстоянием между двумя вершинами в графе G называется число ребер, входящих в простую цепь, соединяющую эти вершины. В общем случае две вершины могут быть соединены несколькими простыми цепями. Если длины цепей различны, то среди них имеется **минимальная цепь** (одна или несколько), состоящая из наименьшего числа ребер. Обозначим это число буквой $\lambda_{i\text{-}j}$, где i, j – вершины графа (i, j = 1, 2, 3, …, n; $i \neq j$), n – число вершин в графе. Очевидно, что в связном графе любые две вершины соединены хотя бы одной минимальной простой цепью. При этом в зависимости от значений i и j длины минимальных цепей могут быть различными. Среди них будут содержаться минимальные цепи с наибольшим числом ребер. Число ребер наибольшей из минимальных цепей называется **диаметром** $d(G)$ графа. Например, в графе 8 (рис. 26) различные вершины соединены минимальными цепями со следующими длинами:

$$\lambda_{1-2} = \lambda_{1-4} = \lambda_{1-5} = \lambda_{1-6} = \lambda_{2-3} = \lambda_{3-4} = \lambda_{3-6} = \lambda_{4-5} = 1;$$
$$\lambda_{1-3} = \lambda_{2-4} = \lambda_{2-5} = \lambda_{3-5} = \lambda_{4-6} = \lambda_{5-6} = \lambda_{2-6} = 2,$$

откуда следует, что диаметр графа $d(G) = 2$.

Найдем минимальные цепи, соединяющие различные вершины графа 4 (рис. 26):

$$\lambda_{1-2} = \lambda_{1-4} = \lambda_{2-5} = \lambda_{3-5} = \lambda_{3-6} = \lambda_{4-6} = 1;$$
$$\lambda_{1-5} = \lambda_{1-6} = \lambda_{2-3} = \lambda_{2-4} = \lambda_{3-4} = \lambda_{5-6} = 2;$$
$$\lambda_{1-3} = \lambda_{2-6} = \lambda_{4-5} = 3.$$

Так как наибольшая минимальная цепь содержит 3 ребра, то $d(G) = 3$.

Таким образом, диаметр графа равен максимальному расстоянию между его вершинами.

Наибольшее расстояние $r(v)$ между **заданной** вершиной v и другими вершинами графа называется **эксцентриситетом** – максимальным удалением от вершины v.

Например, эксцентриситет вершины 8 графа на рис. 25 равен $r(8) = 3$.

Наименьший из эксцентриситетов называется **радиусом** $r(G)$ графа G. Для примера найдем все эксцентриситеты графа 3 (рис. 19):

$r(1) = 4$, $r(2) = 3$, $r(3) = 2$, $r(4) = 3$, $r(5) = 2$, $r(6) = 4$.

Наименьший эксцентриситет равен 2, следовательно, радиус графа $r(G) = 2$.

Если $r(v) = r(G)$, то вершина v называется центром графа G. В графе 3 на рис. 19 два центра – вершины 3 и 5.

Упражнения

1. Укажите эксцентриситеты всех вершин графа:
(72Н) 8 на рис. 26; (МИС) на рис. 23.

2. (982). Укажите диаметр и радиус графа (рис. 22).

3. (635). Укажите эксцентриситеты вершин 2, 3, 6, 7, графа (рис. 22).

4. (БЗЛ). Укажите центры в графе (рис. 23).

3. ПЛАНАРНЫЕ И ПЛОСКИЕ ГРАФЫ

3.1. Вводные понятия

Плоским называется граф, изображенный на плоскости так, что его ребра пересекаются только в вершинах [16, 32, 51]. Граф на рис. 1, является плоским, а тот же граф на рис. 2 плоским не является, так как его ребра {1,3} и {2,4} пересекаются не только в вершинах.

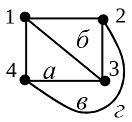


Рис. 1

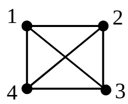


Рис. 2

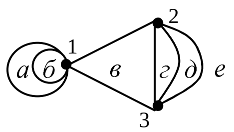


Рис. 3

Всякий изоморфный плоскому граф называется **планарным,** то есть граф называется планарным, если у него есть плоское изображение. Пример планарного графа приведен на рис. 2. Очевидно, что всякий плоский граф является планарным.

Часть плоскости, ограниченная со всех сторон ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется **гранью**. Граф, приведенный на рис. 1, имеет четыре грани: три внутренних – *а*, *б*, *в*, и одну **внешнюю** (бесконечную), обозначенную буквой *г*. Бесконечную грань имеет любой плоский граф.

Всякая петля в графе образует отдельную грань. Два кратных ребра также ограничивают отдельную грань. Например, граф на рис. 3 содержит шесть граней, из которых грани *а* и *б* образованы петлями, а *г* и *д* – кратными ребрами.

Упражнения

1. (ЕКФ). Укажите номера плоских графов (рис.4).

2. (БВХ). Укажите планарные графы (рис. 4).

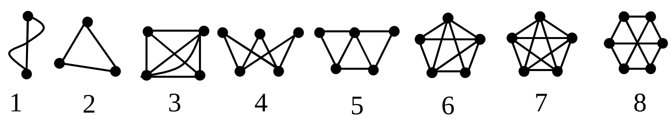


Рис. 4

3. (НОЗ)! Сколько граней имеет граф 1? граф 3? граф 4? (рис. 4).

4. (ЕХИ). Укажите эйлеровы графы (рис. 4).

5. (Я25). Укажите полуэйлеровы графы (рис. 4).

3.2. Теорема Эйлера о плоских графах

Пусть n – число вершин связного плоского графа G, r – число его ребер и q – число граней. Тогда

$$n + q = r + 2. \qquad (1)$$

Эту теорему Л. Эйлер доказал в 1752 г.

Доказать теорему можно методом индукции по числу ребер в графе. При $r = 0$ теорема справедлива, так как граф содержит одну вершину и одну грань. Допустим, что теорема доказана для графа, имеющего r ребер. Добавим к нему еще одно ребро z. Если это петля, то число граней увеличится на единицу, а число n останется неизменным и равенство (1) не нарушится. Если ребро z соединяет различные вершины, то число граней увеличится на единицу и равенство (1) по-прежнему не нарушится. Если ребро z соединяет какую-либо вершину с $(n+1)$-й (т. е. добавленной) вершиной, то число граней не изменится и равенство (1) также не нарушится. Других случаев нет, следовательно, теорема доказана.

На рис. 3 приведен граф, содержащий три вершины, шесть граней и семь ребер, т. е. $n = 3$, $q = 6$, $r = 7$. Следовательно, имеем равенство: $3 + 6 = 7 + 2$.

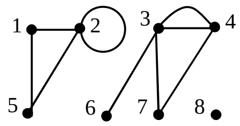


Рис. 5

Формула Эйлера распространяется и на многокомпонентные графы:

$$n + q = r + k + 1, \qquad (2)$$

где k – число компонент несвязного графа.

В качестве примера рассмотрим граф на рис. 5. Он содержит восемь вершин, пять граней, девять ребер и состоит из трех компонент, т. е. $n = 8$, $q = 5$, $r = 9$, $k = 3$. В соответствии с формулой (2): $8 + 5 = 9 + 3 + 1$.

Упражнения

1. (ИЙТ). В связном плоском графе 30 вершин и 20 граней. Сколько в нем ребер?

2. (ЖТМ). В связном плоском графе 20 вершин и 19 ребер. Сколько в нем граней?

3. (ЮЖН). В связном плоском графе 10 граней и 20 ребер. Сколько в нем вершин?

4. (ОУР). В связном плоском графе 18 ребер, число вершин равно числу граней. Сколько в нем вершин?

5. (ЮМС). В связном плоском графе число ребер на 14 больше числа вершин. Сколько в нем граней?

6. (ФАГ). В связном плоском графе число ребер на 20 больше числа граней. Сколько в нем вершин?

7. (УМУ). Найдите число компонент плоского графа, если в нем 17 вершин, а число ребер равно числу граней.

3.3. Гомеоморфизм

Гомеоморфизм (греч. homois – подобный, одинаковый и morphe – вид, форма) – важнейшее понятие одного из разделов современной математики – топологии, науки, изучающей такие свойства фигур, которые остаются неизменными при любых деформациях, осуществляемых без разрыва и без склеивания. В общем случае **гомеоморфизм** – это взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между двумя топологическими пространствами. Например, отрезок является гомеоморфным любой как угодно изогнутой линии конечной длины. Гомеоморфны и такие геометрические фигуры, как окружность, квадрат, треугольник, прямоугольник, эллипс, трапеция, многоугольник, так как путем деформации (без разрывов) каждая из них может быть преобразована в другую: скруглив углы квадрата, можем получить круг, эллипс или овал; изогнув под некоторым углом стороны треугольника, получим многоугольник и т. д. Гомеоморфными являются поверхности шара, куба, пирамиды, додекаэдра, эллипсоида и др. Примеры негомеоморфных фигур: отрезок и круг, знаки «плюс» и «минус».

Гомеоморфными могут быть и графы. Но прежде чем рассматривать гомеоморфные отношения в графах, введем понятие операции **подразбиения ребра**. Пусть V – множество вершин некоторого графа. Выделим в нем две вершины $v\in V$ и $w \in V$, соединенные ребром. Заменим это ребро простой цепью из двух ребер, инцидентных новой вершине t. В результате число вершин графа увеличится на единицу. На единицу увеличится и число ребер. Такую операцию называют операцией **подразбиения ребра**. Проще говоря, чтобы выполнить операцию подразбиения какого-либо ребра, достаточно на этом ребре разместить новую вершину. Очевидно, что в результате такой операции всегда будут получаться вершины со степенью, равной двум.

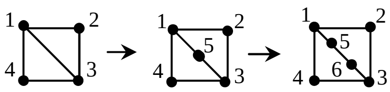


Рис. 6

Операцию подразбиения ребра иллюстрирует рис. 6, на котором слева расположен граф, содержащий четыре вершины. В середине изображен граф, полученный путем подразбиения ребра {1,3}. Справа приведен граф, получившийся в результате подразбиения ребра {3,5}.

Два графа называются **гомеоморфными**, если существуют их подразбиения, являющиеся изоморфными [35, с. 165]. Например, графы на рис. 7 и 8 гомеоморфны. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить операцию подразбиения к одному из кратных ребер {1, 5} и одному из кратных ребер {2, 4} на рис. 7, а также к ребру {1, 6} на рис. 8. В результате получим два графа, которые являются изоморфными.

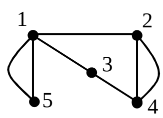


Рис.7

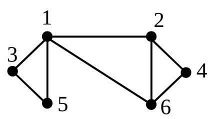


Рис. 8

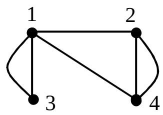


Рис. 9

Обратная подразбиению операция называется операцией **надразбиения** (**стягивания**, согласно [32, с. 36]). Она заключается в замене двух ребер, инцидентных какой-либо вершине со степенью 2, одним ребром. Иначе говоря, если вершина имеет степень, равную двум, то в результате операции надразбиения эта вершина удаляется, а инцидентные ей ребра соединяются и превращаются в одно ребро. Например, граф на рис. 7 содержит вершину 3, степень которой равна двум. Удалим эту вершину, заменив ребра {1,3} и {3,4} одним ребром {1,4}, тогда получим граф, изоморфный графу на рис. 9. Если таким же образом удалить вершины 3 и 4 (либо 5 и 4) графа на рис. 8, то также получим граф, изоморфный графу на рис. 9.

Очевидно, что признак гомеоморфности графов можно сформулировать и через понятие операции надразбиения ребер: два графа являются гомеоморфными, если в результате применения операции надразбиения ребер получаются изоморфные графы.

Упражнения

1. В перечне букв вида А Б В Г Д Е Ж И Л М Н О П Р С Т У Ц Ч Ш Э Ь укажите буквы:
(ДВБ) изображение которых гомеоморфно отрезку;
(ТЛВ) гомеоморфные графу на рис. 10;
(П8Т) гомеоморфные графу на рис. 11.

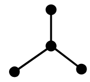


Рис. 10

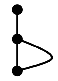


Рис. 11

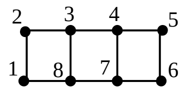


Рис. 12

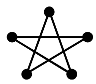


Рис. 13

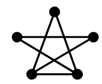


Рис. 14

2. (ГОД). Укажите номера всех вершин, которые будут удалены из графа (рис. 12), если к этому графу применить операцию надразбиения ребер.

3. (ХМЕ). Укажите номера графов (рис. 15), гомеоморфных графу, приведенному на рис. 12.

4. (ЮИХ). Укажите номера графов (рис. 15), гомеоморфных графу, приведенному на рис. 13.

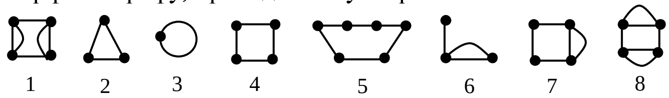


Рис. 15

5. (ЦАИ). Укажите графы (рис. 15), к которым необходимо применить операцию подразбиения ребер, чтобы получился граф, изоморфный графу на рис. 13.

6. (576). Укажите графы (рис. 15), гомеоморфные графу, изображенному на рис. 14.

7. (КПЛ). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что гомеоморфизм – это обобщение понятия изоморфизма?

2) применима ли операция надразбиения ребер к полному графу, если $n > 3$, где n – число вершин графа?

3) применима ли операция подразбиения ребер к полному графу, если $n > 2$, где n – число вершин?

4) могут ли два гомеоморфных графа быть изоморфными?

5) верно ли, что отношение гомеоморфизма есть отношение эквивалентности?

6) могут ли два изоморфных графа быть негомеоморфными?

7) могут ли два гомеоморфных графа быть неизоморфными?

3.4. Критерий Понтрягина-Куратовского

Понтрягин Лев Семенович (1908 – 1988) – советский математик, с 1958 г. академик Академии наук СССР. В 14-летнем возрасте в результате несчастного случая потерял зрение. За выдающиеся научные результаты награжден многими орденами и медалями [42, с. 295].

Куратовский Казимеж (1896 – 1980) – польский математик, с 1966 г. иностранный член Академии наук СССР.

Известно, что монтаж многих радиоэлектронных устройств проще всего осуществить печатным способом. Однако такой монтаж возможен лишь в том случае, если схема соединений элементов, размещенных на печатной плате, представляет собой плоский граф (иначе появятся соединения, не предусмотренные в принципиальной схеме). В связи с этим возникает вопрос: для всякого ли графа существует его плоское представление?

Любой граф с числом вершин n = 1,2,3,4 является планарным. Если же n = 5, то всякий граф является планарным за исключением полного, который не имеет плоского представления. Обозначим такой граф символом G_5.

Планарным является всякий двудольный граф с числом вершин n = 2,3,4,5,6 за исключением полного двудольного графа типа $G_{3,3}$ (см. рис. 24 раздела 2), т. е. граф $G_{3,3}$ не имеет плоского представления.

Таким образом, не всякий граф является планарным.

Рассмотренные два типа графов G_5 и $G_{3,3}$ используются в критерии Понтрягина-Куратовского: граф является планарным только в том случае, если он не содержит подграфов, гомеоморфных графам G_5 и $G_{3,3}$ [16, 32, 51, 56].

В общем случае, если пользоваться только методом сплошного перебора, то согласно критерию Понтрягина-Куратовского необходимо выполнить C_n^6 проверок на отыскание полного двудольного подграфа $G_{3,3}$ и C_n^5 проверок на отыскание полного подграфа G_5. Если этих подграфов в исходном графе не обнаружится, то данный граф является планарным и можно приступать к поиску его плоского представления. Например, удалим из графа, приведенного на рис. 16, вершины 1 и 2, останется планарный подграф; удалим вершины 1 и 3, снова получится планарный подграф и так далее до вершин 7 и 8, после удаления которых также остается планарный подграф (всего $C_8^6 = 28$ проверок). В данном случае нет необходимости выполнять проверки по отысканию графа G_5, так как в предыдущих проверках всякий раз обнаруживалось, что подграф является планарным. Таким образом, граф, приведенный на рис. 16, имеет плоское представление. Изоморфный ему плоский граф изображен на рис. 17.

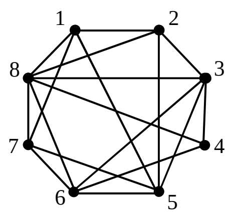


Рис. 16

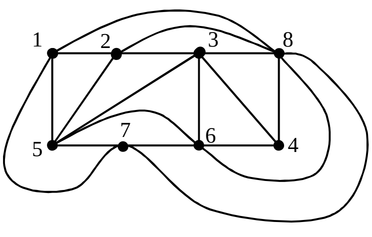


Рис. 17

Рассмотрим еще один граф (рис. 18). На этот раз начнем с поиска подграфа G_5. Удалим вершины 1 и 2, получится планарный подграф; удалим вершины 1 и 3, получится планарный подграф и так далее до вершин 4 и 6, после удаления которых получился граф, изображенный на рис. 19. Это граф G_5 – полный граф на пяти вершинах.

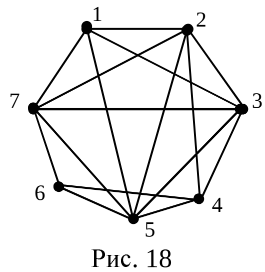


Рис. 18

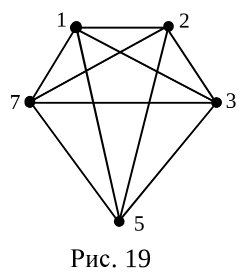


Рис. 19

На этом проверка заканчивается, так как установлено, что граф (рис. 18) является непланарным.

Более подробные сведения о применении плоских графов при разработке печатных плат можно найти в [32].

Упражнения

1. (121). В графе 12 вершин. Сколько в общем случае проверок необходимо сделать по критерию Понтрягина-Куратовского при поиске подграфа G_5?

2. (БИЛ). В графе G 10 вершин. Сколько в общем случае проверок необходимо сделать по критерию Понтрягина-Куратовского при поиске подграфа $G_{3,3}$?

3. (АРЗ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) всякий граф, содержащий восемь ребер, является планарным?

2) если в графе n вершин и n+2 ребер, то при любом n граф является планарным?

3) если в графе n ребер и n+2 вершин, то при любом n граф является планарным?

4) всякий граф, содержащий девять ребер, является планарным?

5) полный граф на четырех вершинах является планарным?

6) если из полного 6-вершинного графа удалить одну вершину, то получится планарный граф?

7) если из полного 5-вершинного графа удалить одно ребро, то получится планарный граф?

4. (ФУМ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) если в графе 50 ребер, то он всегда является непланарным?

2) если дополнение графа G – планарный граф, то граф G всегда является планарным?

3) если в графе нет циклов, то граф является планарным независимо от числа вершин?

4) если в главной диагонали матрицы смежности, построенной для графа на пяти вершинах, в главной диагонали записаны только нули, а все остальное поле матрицы занято единицами, то этот граф является планарным?

5) если степень каждой вершины графа равна 2, то такой граф является планарным независимо от числа вершин?

6) если в графе 6 вершин и степень каждой вершины равна 3, то такой граф всегда является планарным?

7) если в простом графе 5 вершин и степень каждой вершины равна 4, то такой граф является планарным?

3.5. Двойственные графы

Двойственным по отношению к связному плоскому графу G является граф G^*, построенный следующим образом:

1) в каждой грани ставится вершина графа G^*;

2) если какая-либо вершина графа G^* отделена ребром графа G от другой вершины графа G^*, то эти вершины соединяются ребром, относящимся к графу G^*.

Поясним это на примере. Пусть дан граф (рис. 20), содержащий четыре грани (из них одна – бесконечная). В каждой грани поставим вершины графа G^*. Обозначим их буквами a, b, c, d. Находим ребра графа G^*. Вершина 5 является висячей. Ребру {4,5} в графе G^* соответствует петля. Вершина a отделена от вершины d ребром {1,2}. Проводим ребро {a, d} (на рис. 20 оно обозначено пунктиром). Вершина b отделена от вершины d ребром {2,4}, соединяем вершины b и d ребром {b, d} и т. д.

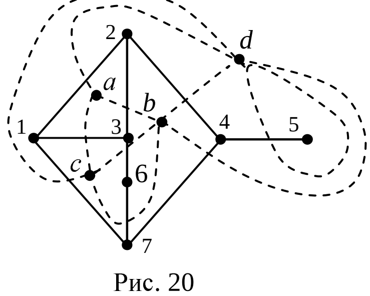


Рис. 20

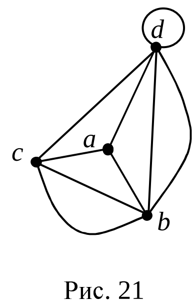


Рис. 21

На рис. 21 изображен искомый двойственный граф, изоморфный пунктирному графу на рис. 20.

Пусть n, r, q – число вершин, ребер и граней графа G; n^*, r^*, q^* – число вершин, ребер и граней графа G^*. Тогда очевидно, что [51, с. 92]:

$$n^* = q, \quad r^* = r, \quad q^* = n.$$

Упражнения

1. (Р64). Для графа, приведенного на рис. 17, укажите, сколько вершин, сколько ребер и сколько граней имеет его двойственный граф?

2. (ПЕК)! Сколько вершин, ребер и граней имеет граф, двойственный графу, приведенному на рис. 12?

3. (УТ7). Укажите графы, приведенные на рис. 15, которые имеют двойственные графы, содержащие кратные ребра?

4. Укажите номера графов, изображенных на рис. 15, двойственные графы которых имеют матрицы смежности, содержащие:

(ФИМ) хотя бы одно число 3; (РИФ) две колонки;
(ВЫН) хотя бы одно число 2; (962) три колонки;
(ПРО) хотя бы одно число 1; (У83) четыре колонки;
(454) хотя бы одну единицу в главной диагонали.

3.6. Инверсные структуры и двойственные графы

Применение двойственных графов проиллюстрируем на примере нахождения инверсных контактных двухполюсников. На рис. 22 приведен двухполюсник, реализующий некоторую булеву функцию f семи аргументов. Построим для него инверсную структуру.

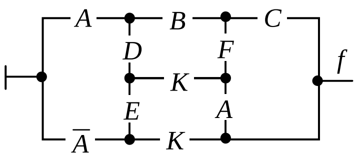


Рис. 22

Представим двухполюсник в виде плоского графа (рис. 23). Проведем мысленно осевую линию через вершины 1 и 8. Тогда бесконечная грань разделится на две части. В верхней части поставим вершину a, в нижней – вершину m. Внутренним граням графа поставим в соответствие вершины b, c, d, e. Соединим вершины a, b, c, d, e, m так, как это описано в предыдущем подразделе, проследив лишь за тем, чтобы ни одно ребро, выходящее из вершин a и m, не пересекало осевую линию. Получился граф (изображен пунктиром) инверсного двухполюсника. На его основе строим искомый двухполюсник. Ребру {1,2} (рис. 23) соответствует контакт A (рис. 22). Это ребро пересекает ребро {a,b} двойственного графа (рис. 23). Следовательно, точки a и b инверсной структуры соединяем контактом $\overline{A}$. Точно так же заменяем инверсными контактами все ребра двойственного графа. Получилась инверсная структура, изображенная на рис. 24. Ее полюсами являются выводы a и m.

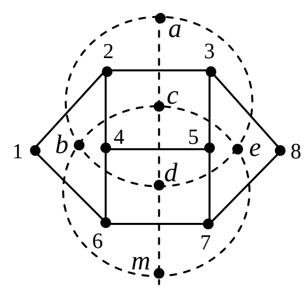


Рис. 23

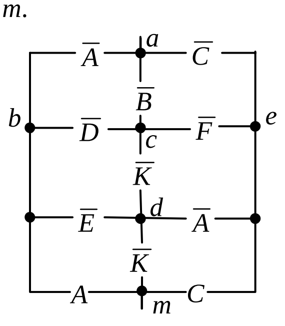


Рис. 24

Заметим, что рассмотренный метод не меняет числа контактов, но приводит к их инвертированию. Более подробные сведения об инверсных структурах можно найти в [26].

Упражнения

1. Найдите инверсную структуру контактной схемы, приведенной на рис. 25. Для инверсной структуры найдите минимальную ДНФ булевой функции и укажите:

(361)! число простых импликант, число вхождений аргументов и число инверсных букв;

(ЕКО) десятичные эквиваленты двоичных наборов значений аргументов, на которых инверсная структура находится в проводящем состоянии.

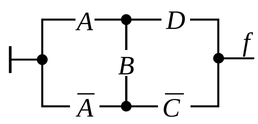


Рис. 25

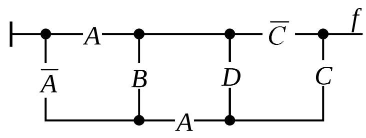


Рис. 26

2. По схеме, приведенной на рис. 26, постройте инверсную структуру. Для инверсной структуры найдите минимальную КНФ и укажите:

(МЭГ) число знаков дизъюнкции, число вхождений аргументов и число инверсных аргументов;

(ТЗК) десятичные эквиваленты двоичных наборов значений аргументов, на которых инверсная структура находится в проводящем состоянии.

3.7. Деревья и лес

Термин «дерево» для особой разновидности графов ввел в 1857 г. английский математик Артур Кэли (1821–1895), с 1870 г. иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук [47, с. 677].

Несвязный граф, не содержащий циклов, называется **лесом**. Связный граф, не содержащий циклов, называется **деревом** [51, с. 57]. На рис. 27 приведен трехкомпонентный лес. Первую компоненту образует дерево с вершинами 1,2,3,4, вторую – 5,6,7,8,9, третью – 10,11.

Приведем без доказательств несколько теорем о деревьях.

Теорема 1. Всякое дерево содержит $n - 1$ ребер, где n – число вершин.

Теорема 2. Всякий лес содержит $n - k$ ребер, где k – число компонент связности.

Теорема 3. Любые две вершины дерева соединены точно одной простой цепью.

Теорема 4. Если в дереве любые две вершины соединить ребром, то в графе появится один цикл.

Доказательства теорем можно найти в [35; 41; 51].

Если связный граф содержит цикл, то после удаления любого ребра, входящего в цикл, этот цикл разрушается, но связность графа сохраняется. Применим операцию разрушения циклов к каждому циклу графа. Тогда в графе не останется циклов и получится связный частичный граф, являющийся деревом. Полученное дерево называется **остовом** (ударение на первый слог), т. е. остовом называется связный частичный граф данного связного графа G, содержащий все вершины графа G, но не содержащий циклов. Рассмотрим, например, граф, изображенный на рис. 28. Удалим из него ребра {1,4} и {3,4}. Получим остов, приведенный на рис. 29. Если удалить ребра {1,2} и {3,4}, то получим другой остов (рис. 30), и т. д.

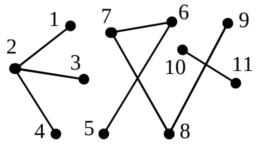


Рис. 27

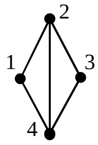


Рис. 28

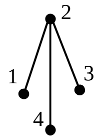


Рис. 29

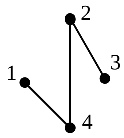


Рис. 30

Наименьшее число z, показывающее, сколько ребер необходимо удалить из графа, чтобы получить его остов, называется **цикломатическим** числом. Если n – число вершин, m – число ребер, k – число компонент, то

$$z = m - n + k,$$

то есть, чтобы найти цикломатическое число графа, необходимо из числа ребер вычесть число вершин и к результату прибавить число компонент.

В случае связного графа $k = 1$, следовательно,

$$z = m - n + 1.$$

Например, для графа, приведенного на рис. 28, имеем:

$$m = 5; \quad n = 4; \quad z = 5 - 4 + 1 = 2.$$

3.8. Фундаментальная система циклов

Пусть дан некоторый граф, содержащий циклы. Удалим из каждого цикла по одному ребру так, чтобы получился остов. Множество ребер, которые были удалены, обозначим буквой M. Вернем в остов какое-либо ребро из множества M, получим один цикл. Удалим это ребро и вернем из множества M другое ребро, получим другой цикл и т. д. Каждому ребру множества M соответствует определенный цикл. Множество Q всех таких циклов называется **фундаментальной системой циклов** графа G, ассоциированной с его остовом. Очевидно, что

$$|Q| = z,$$

т. е. число циклов фундаментальной системы равно цикломатическому числу данного графа.

Отметим еще раз: фундаментальная система циклов связана с данным остовом. Если взять другой остов, то, вообще говоря, ему будет соответствовать другой набор циклов, образующих фундаментальую систему.

В качестве примера рассмотрим граф, приведенный на рис. 31. Преобразуем его следующим образом:

а) из цикла 1,2,3,1 удалим ребро {1,3};

б) из цикла 1,2,5,1 удалим ребро {2,5};

в) из цикла 2,3,4,2 удалим ребро {2,3};

г) из цикла 1,2,4,5,1 удалим ребро {1,2}.

В результате получился остов (рис. 32). Вернем в него ребро {1,3}, получим цикл, изображенный на рис. 33.

Аналогично получаем еще три цикла путем возвращения ребер {2,3}, {2,5} и {1,2} (рис. 34, 35, 36).

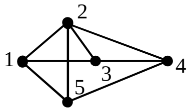


Рис. 31

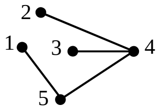


Рис. 32

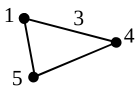


Рис. 33

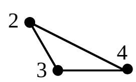


Рис. 34

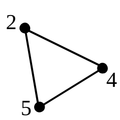


Рис. 35

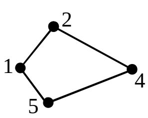


Рис. 36

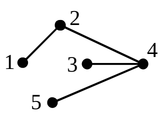


Рис. 37

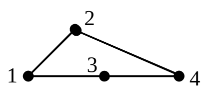


Рис. 38

На рис. 37 изображен другой остов того же графа (рис. 31). Соответствующая ему система фундаментальных циклов приведена на рис. 34, 35, 36 и 38. От предыдущей системы она отличается одним циклом.

Упражнения

1. (ОО1). Найдите цикломатическое число графа, изображенного на рис. 16.

2. (ХОХ). В связном графе 18 вершин. Сколько ребер содержит его остов?

3. (МЮЗ). Сколько ребер содержит остов графа, двойственного по отношению к графу на рис. 17?

4. (ПСИ). В дереве 25 вершин. К нему добавили 4 ребра. Сколько ребер стало в графе?

5. (ЗИЙ). В связном графе 20 вершин и 40 ребер. Сколько ребер необходимо удалить, чтобы получить остов?

6. (ТБ7). В дереве 20 вершин. Сколькими способами в дерево можно ввести цикл при помощи одного дополнительного ребра?

7. (ЕММ). В нуль-графе 38 вершин. Сколько ребер необходимо в него ввести, чтобы получить связный граф?

8. (УЮН). Сколько ребер необходимо удалить из дерева, содержащего 20 ребер, чтобы получился лес из 15 деревьев?

9. (Я70). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) цикломатическое число дерева равно нулю?

2) всякое дерево является планарным графом?

3) фундаментальная система циклов дерева состоит из одного цикла?

4) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для непланарных графов?

5) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для псевдографов?

6) одновершинный граф с одной петлей является деревом?

7) изолированная вершина может быть компонентой леса?

8) граф, в котором число ребер равно числу вершин, может быть деревом?

3.9. Кодирование деревьев

Пусть даны n вершин графа, пронумерованных в некоторой последовательности. Сколько существует различных деревьев, которые могут быть изображены на этих n вершинах? Ответ на данный вопрос дал английский математик Артур Кэли (1821 – 1895). Он нашел формулу вида

$$m = n^{n-2},$$

где m – число всех возможных помеченных деревьев (напомним, что в помеченных графах все вершины пронумерованы и последовательность номеров является неизменной при любых вариантах соединения вершин ребрами). Если n = 2, то согласно формуле А. Кэли существует одно дерево в виде пары вершин, соединенных одним ребром. При n = 3 существует три помеченных дерева (рис. 39). При n = 4 число помеченных деревьев равно 16 (рис. 40) и т. д.

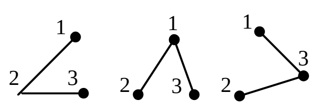


Рис. 39

Немецкий математик Пруфер [57, с. 34] разработал метод, позволяющий для любого дерева на n вершинах однозначно найти его код в виде упорядоченной последовательности чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ – числа, принадлежащие множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$.

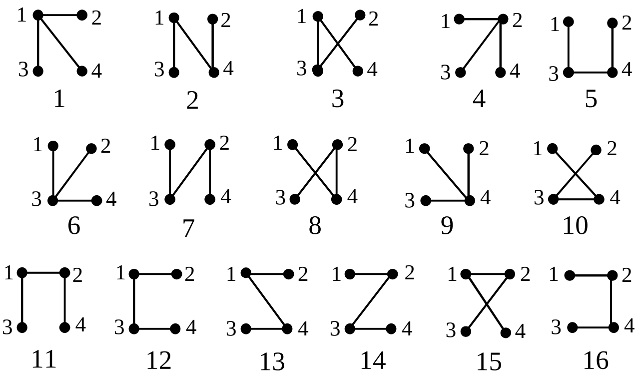


Рис. 40

Процесс нахождения кода дерева поясним на примере графа, изображенного на рис. 41. В этом графе три висячих вершины: 2, 4, 7. Удалим из графа висячую вершину (вместе с ребром), имеющую наименьший номер. Это вершина 2. Номер вершины, инцидентной удаленному ребру, есть первое число искомого кода: число 1.

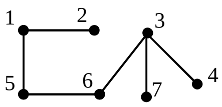


Рис. 41

В оставшемся графе висячими являются вершины 1, 4, 7. Удалим вершину 1 (имеющую наименьший номер). Число 5 записываем в искомый код после числа 1. Теперь висячими оказались вершины 4, 5,7. Удаляем вершину 4. Число 3 – это третий знак в коде. Получилось дерево с висячими вершинами 5 и 7. Удаляем вершину 5 и число 6 записываем в искомый код четвертым знаком. Пятым знаком записываем число 3. Осталось дерево, состоящее из двух вершин. На этом кодирование заканчивается. Найденный код имеет вид: 1 5 3 6 3.

3.10. Построение дерева по его коду

Если задан код дерева, то по нему также однозначно может быть восстановлено (декодировано) графическое представление этого дерева. Пусть код имеет вид

$$K = 1\ 4\ 5\ 5\ 7\ 5\ 4\ 7.$$

В коде восемь чисел, следовательно, искомое дерево содержит 10 вершин: 1,2,3,…,10.

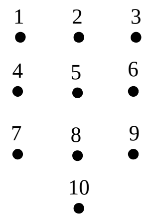


Рис. 42

Система вершин дерева приведена на рис. 42. В коде нет номеров висячих вершин. Чтобы их найти, достаточно записать все те номера вершин, которые отсутствуют в коде. Порядок записи висячих вершин значения не имеет, но из практических соображений их следует упорядочить по возрастанию:

$$W = \{2, 3, 6, 8, 9, 10\}.$$

Образуем из цифр кода K семейство, обозначив его той же буквой K, что и код дерева:

$$K = (1, 4, 5, 5, 7, 5, 4, 7).$$

Напомним, что семейство – это множество, элементы которого могут повторяться.

Приступаем к построению дерева. Действуем в соответствии с методом Пруфера (но в обратном порядке), выбираем всякий раз первый элемент из семейства K и наименьшее число из множества W:

1) вершина $1\in K$ должна быть соединена с висячей вершиной, имеющей наименьший номер, т. е. с вершиной $2\in W$. Следовательно, одно ребро найдено. Это {1,2}. Удалим число 1 из семейства K, а из множества W удалим число 2. Так как вершина 1 в семействе K больше не повторяется, то она стала висячей, поэтому ее вводим в множество W. После первого этапа имеем:

$$K_1 = (4, 5, 5, 7, 5, 4, 7); \qquad W_1 = \{1, 3, 6, 8, 9, 10\};$$

2) вершину $4\in K_1$ соединяем с вершиной $1\in W_1$ – получили второе ребро: {1,4}. Число 4 из семейства K_1 удаляем, а из множества W_1 удаляем число 1. Число 4 в множество W_1 не записываем, так как оно в семействе K_1 встречается еще один раз (то есть вершина 4 не является висячей). После второго этапа имеем:

$$K_2 = (5, 5, 7, 5, 4, 7); \qquad W_2 = \{3, 6, 8, 9, 10\};$$

3) соединяем вершины $5\in K_2$ и $3\in W_2$. Получаем ребро {3, 5}. После третьего этапа получаем:

$$K_3 = (5, 7, 5, 4, 7,); \qquad W_3 = \{6, 8, 9, 10\};$$

4) соединяем вершины $5\in K_3$ и $6\in W_3$. Получаем:

$$K_4 = (7, 5, 4, 7); \qquad W_4 = \{8, 9, 10\};$$

5) соединяем вершины $7\in K_4$ и $8\in W_4$. Тогда

$$K_5 = (5, 4, 7); \qquad W_5 = \{9,10\};$$

6) соединяем вершины $5\in K_5$ и $9\in W_5$. Получаем ребро {5,9}. Число 5 в семействе K_5 больше не встречается, поэтому записываем его в множество W_5. В результате имеем:

$$K_6 = (4, 7); \qquad W_6 = \{5, 10\};$$

7) соединяем вершины $4\in K_6$ и $5\in W_6$. Получили ребро {4,5}. Число 4 записываем в множество W_6.

$$K_7 = (7); \qquad W_7 = \{4,10\};$$

8) после соединения вершин $7\in K_7$ и $4\in W_7$ получаем ребро {4,7}.

9) число 7 в семействе K_7 больше не встречается, поэтому записываем его в множество W_7, в котором после удаления вершины 4 осталось одно число 10. Получаем ребро {7,10}.

На этом декодирование дерева заканчивается. Искомый граф приведен на рис. 43.

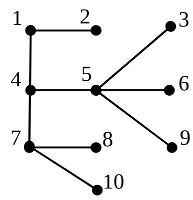


Рис. 43

Если n – число вершин, то рассмотренным способом можно построить дерево по любой последовательности номеров вершин, насчитывающей n – 2 чисел. Общее количество таких последовательностей есть число размещений из n элементов по n – 2 с повторениями и равно n^{n-2}, что находится в полном соответствии с формулой А. Кэли.

Если к графу (рис. 43) применить метод Пруфера, то получится тот же код, на основе которого было построено дерево.

В заключение отметим, что по всякой аналитически представленной булевой функции может быть построена «граф-схема» в виде некоторого дерева (см. подраздел 5.2 темы «Булева алгебра» первой части данного пособия). Благодаря этому обстоятельству мы получаем еще один способ числового представления булевых функций, заданных не только в ДНФ или КНФ, но и в любой из форм более высоких порядков.

Упражнения

1. (ИВЕ). На рис. 40 укажите номера графов, гомеоморфных графу, приведенному на рис. 41.

2. Укажите коды деревьев (рис. 40): (464)! 1,2,3,4; (445)! 5,6,7,8; (ВЕХ)! 9,10,11,12; (613)! 13,14,15,16.

3. (ПАО). Найдите код дерева (рис. 44).

4. (161). Найдите код дерева (рис. 45).

5. Определите число вершин дерева и число его ребер, если код дерева задан семейством:

(ТТ2) (1,2,3,4); (ЛЯ6) (1,1,1,2,2); (ТЕЗ) (1,1,1,1,2).

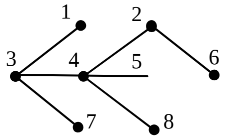


Рис. 44

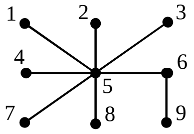


Рис. 45

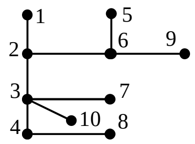


Рис. 46

6. По коду дерева найдите номера висячих вершин:

(904) (1,4,3,3,3,5); (ЗАМ) (1,5,5,5,6,6);

(ППШ) (2,2,2,2,3,4,5); (ТИН) (6,6,6,1,1,4).

(ФА1). Найдите код дерева (рис. 46).

7. Укажите степени вершин дерева (номера вершин упорядочить по возрастанию), если его код имеет вид:

(ТПИ) (2,6,3,4,3,6,2,3); (С53) (1,4,11,1,1,4,2,2,11);

(314) (4,4,2,5,5,3,6); (ЗУШ) (1,4,1,4,6,6,6,6).

8. Укажите номера вершин дерева, степени которых равны двум, если дерево задано кодом:

(ВИК) (2,1,5,1,4,7,8); (Р88) (5,6,5,4,3,4,8);

(327) (3,5,6,4,7,7); (ТАН) (2,6,5,2,3,4,4).

9. Укажите номера вершин дерева, степени которых равны трем, если дерево задано кодом:

(41Р) (5,8,6,6,3,5,3,3); (ШИТ) (2,3,1,4,4,1,2,6,6);

(МХС) (2,2,2,1,3,1,9,9); (ТКУ) (2,2,1,1,6,6,1,7,7).

10. (411). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) можно ли по коду дерева найти номера его вершин?

2) изоморфны ли деревья, коды которых имеют вид (1,1,1,1) и (4,4,4,4)?

3) всякое ли дерево, содержащее хотя бы одно ребро, является двудольным графом?

4) верно ли, что если к дереву добавить ребро, то получится граф, содержащий цикл?

5) верно ли, что если из дерева удалить одно ребро, то получится двухкомпонентный граф?

6) верно ли, что всякий двудольный граф является деревом?

7) всякое ли дерево является планарным графом?

8) существуют ли деревья, у которых все вершины являются висячими?

3.11. Разрезы

Разделяющим множеством графа G называется такое множество его ребер, после удаления которых получается несвязный граф. Например, если из графа (рис. 31) удалить ребра {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,5}, {2,5}, то получится двухкомпонентный граф (рис. 47). Следовательно, множество

$$\{\{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{2,5\}\} \quad (3)$$

является разделяющим. **Разрезом** называется такое разделяющее множество, у которого нет ни одного разделяющего собственного подмножества. Например, множество (3) разрезом не является, так как оно имеет разделяющее подмножество

$$\{\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{2,5\}\}. \quad (4)$$

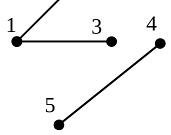


Рис. 47

Если из множества (4) вернуть на прежнее место какое-либо ребро, то граф окажется связным. Следовательно, это множество есть разрез. Как найти разрезы? В случае плоских графов разрез – это линия, выходящая из какой-либо грани, пересекающая ребро, входящая во вторую грань, пересекающая еще какое-либо ребро, входящая в следующую грань и так далее и входящая снова в исходную грань. Очевидно, что эта линия есть не что иное, как простой цикл двойственного графа.

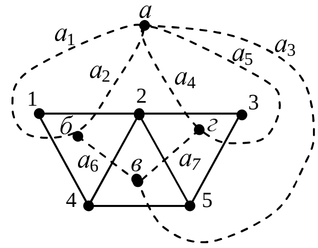


Рис. 48

Если отыскать все эти простые циклы, то тем самым будут найдены и все разрезы. В качестве примера рассмотрим рис. 48, где приведен граф на пяти вершинах и двойственный ему граф, изображенный пунктирными линиями. В данном случае каждый цикл двойственного графа содержит вершину a. В связи с этим воспользуемся методом, описанным в подразделе 2.3, и найдем все простые циклы, содержащие вершину a: a_1a_2; a_4a_5; $a_1a_6a_3$; $a_2a_6a_3$; $a_3a_7a_4$; $a_3a_7a_5$; $a_1a_6a_7a_4$; $a_1a_6a_7a_5$; $a_2a_6a_7a_4$; $a_2a_6a_7a_5$, где символами $a_1, a_2, \ldots, a_7$ обозначены ребра двойственного графа. Между ребрами двойственного и основного графов имеется соответствие (рис. 48):

a_1 – {1,4}; a_2 – {1,2}; a_3 – {4,5}; a_4 – {2,3}; a_5 – {3,5}; a_6 – {2,4}; a_7 – {2,5}.

На основе этого соответствия, находим разрезы:

1) {{1,2}, {1,4}} (рис. 49);
2) {{2,3}, {3,5}} (рис. 50);
3) {{1,4}, {4,5}, {2,4}} (рис. 51);
4) {{1,2}, {4,5}, {2,4}} (рис. 52);
5) {{2,3}, {4,5}, {2,5}} (рис. 53);
6) {{3,5}, {4,5}, {2,5}} (рис. 54);
7) {{1,4}, {2,3}, {2,5}, {2,4}} (рис. 55);
8) {{1,4}, {2,4}, {2,5}, {3,5}} (рис. 56);
9) {{1,2}, {2,4}, {2,5}, {2,3}} (рис. 57);
10) {{1,2}, {2,4}, {2,5}, {3,5}} (рис. 58).

Подробности о разрезах можно найти в [51, 12, 16].

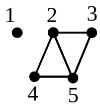


Рис. 49

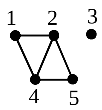


Рис. 50

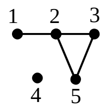


Рис. 51

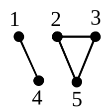


Рис. 52

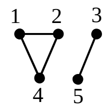


Рис. 53

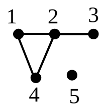


Рис. 54

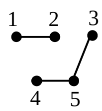


Рис. 55

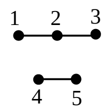


Рис. 56

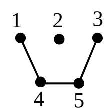


Рис. 57

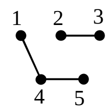


Рис. 58

Упражнения

1. (НИР)! Сколько разрезов, состоящих из двух ребер, содержит граф, приведенный на рис. 28? Сколько в нем разрезов, содержащих по 3 ребра?

2. (ИЯВ)! Сколько в графе, приведенном на рис. 59, разрезов, содержащих по два ребра? по три ребра? по четыре ребра?

3. (ЛИГ). Сколько разрезов в n-вершинном дереве?

4. (ДИД)! Сколько в графе (рис. 60) разрезов, содержащих по два ребра? по три ребра? по четыре ребра?

5. (УКЕ). В связном графе 15 вершин. Степень каждой вершины равна двум. Сколько разрезов имеет граф?

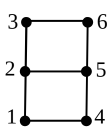


Рис. 59

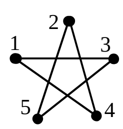


Рис. 60

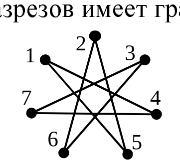


Рис. 61

6. (КТТ). Укажите номера вопросов на которые Вы ответите «да»:

1) может ли разрез состоять из одного ребра?

2) могут ли в разрез входить петли?

3) могут ли в разрез входить кратные ребра?

4) может ли связный граф оказаться трехкомпонентным, если из него удалить все ребра, входящие в некоторый разрез?

5) применимо ли понятие разреза к несвязному графу?

6) существует ли граф, в разрез которого входят все его ребра?

7) может ли число разрезов в графе превышать число его вершин?

7. (ЦКР). Определите число разрезов в графе на рис. 61.

3.12. Хроматическое число графа. Гипотеза четырех красок

На географических картах территории различных стран обычно раскрашивают так, что любые две соседние страны имеют различные цвета. Поставим в соответствие каждой стране некоторую вершину, и если страны имеют общую границу, то соответствующие им вершины соединим ребром. Получим плоский граф. Спрашивается, сколько красок различных цветов необходимо для раскрашивания вершин графа, если каждое ребро должно соединять вершины разного цвета? Наименьшее число красок, удовлетворяющих этому условию, называется **хроматическим числом графа** [32; 51; 56]. **Гипотезой четырех красок** является утверждение о том, что хроматическое число всякого **планарного** графа без петель не больше четырех. Впервые сведения об этой гипотезе появились в 1879 г., когда Артур Кэли в первом томе Трудов Королевского географического общества опубликовал статью о проблеме четырех красок. Почти 100 лет эта проблема оставалась одной из самых знаменитых проблем теории графов, и лишь в последние годы стали появляться сообщения о вариантах ее решения. Например, в [38, с. 155] говорится: «… доказано, что любая карта, число граней которой меньше 39, может быть раскрашена четырьмя красками». Р. Уилсон пишет: «… всякий планарный граф, имеющий менее 52 вершин, 4-раскрашиваем» [51, с. 105]. В [42, с. 88] читаем: «… верно ли, что хроматическое число любого графа, расположенного на плоскости, не больше четырех? Положительный ответ на этот вопрос был лишь недавно получен с помощью ЭВМ». А в [16, с. 159] приведено доказательство теоремы: «Хроматическое число планарного графа не превышает четырех». Причем доказательство дано на умозрительном уровне, без применения ЭВМ.

Таким образом, можно считать, что проблема четырех красок **для планарных** графов решена. В случае **непланарных** графов все гораздо сложнее, хотя уже получены кое-какие частные результаты. Например, хроматическое число всякого двудольного графа равно двум. Чтобы убедиться в этом, достаточно все вершины множества V_1 окрасить одним цветом, а множества V_2 – другим. При такой окраске каждое ребро соединяет вершины разных цветов.

Хроматическое число полного графа на n вершинах равно n. Для доказательства этого утверждения достаточно предположить, что вершины окрашены $n-1$ цветами. Так как в полном графе каждая пара вершин соединена ребром, то среди C_n^2 ребер окажется ребро, соединяющее одноцветные вершины. Отсюда следует, что число $n-1$ не является хроматичским числом полного графа.

Теорема. Если ρ – наибольшая из степеней вершин графа G, то его можно раскрасить $\rho+1$ красками [51].

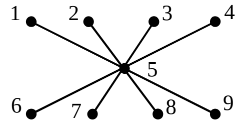


Рис. 62

В этой теореме, справедливой для произвольного графа, не предполагается, что ρ является хроматическим числом. Например, наибольшая степень вершины графа на рис. 62 равна 8. Согласно теореме этот граф можно раскрасить девятью красками. Однако хроматическое число его равно двум, т. е. для раскраски графа достаточно двух красок.

На этом знакомство с проблемой раскраски графов закончим. Подробности можно найти в [12; 32; 38; 51; 57].

Упражнения

1. (ЗИТ). Найдите хроматическое число для каждого из графов, приведенных на рис. 4.

2. (ФАС). Найдите хроматическое число для каждого из графов (рис. 15), исключая граф 3 (с петлей).

3. (350). Чему равно хроматическое число дерева на 40 вершинах?

4. (ТИС). Определите хроматическое число связного графа, в котором 22 вершины и 22 ребра.

5. (ТКВ). Чему равно хроматическое число связного графа, в котором 35 вершин и 35 ребер?

6. (899). В связном графе 6 вершин и 15 ребер (петель и кратных ребер нет). Найдите хроматическое число.

7. (ЮРМ). Хроматическое число простого связного графа, содержащего 28 ребер, равно 8. Сколько в нем вершин?

4. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

4.1. Понятие орграфа. Матрица смежности. Изоморфизм

Пусть V – множество вершин графа. Его квадратом является множество Z упорядоченных пар (v,w), где $v,w \in V$. Каждой паре (v,w) соответствует **ориентированное ребро** в виде линии, оканчивающейся стрелкой. Ориентированные ребра принято называть **дугами**. Началом дуги является вершина $v \in V$, концом – вершина $w \in V$. Граф, содержащий только дуги, называется **ориентированным графом** или **орграфом**.

Аналитически орграф можно представить множествами V и F (если нет кратных дуг), где V – множество вершин и $F \subseteq V^2$.

Например, для графа на рис. 1 имеем:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$F = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (4,2), (4,4), (4,5)\}$.

На рис. 1 вершины обозначены незачерненными кружками. Такое обозначение вершин принято во всем разделе «Ориентированные графы» данного пособия.

Заменим в орграфе все дуги ребрами, получим граф, который называется **основанием** данного орграфа [51].

Два орграфа изоморфны, если изоморфны их основания и совпадают направления всех соответствующих дуг. Например, графы, приведенные на рис. 1 и 2, не являются изоморфными, поскольку дуги, соединяющие вершины 2 и 3, направлены в противоположные стороны.

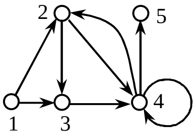


Рис. 1

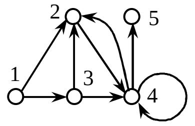


Рис. 2

Всякий орграф может быть представлен матрицей смежности. Условимся считать, что первым элементам пар, обозначающих дуги, соответствуют строки матрицы, вторым элементам – колонки. На рис. 3 приведена матрица смежности, построенная для графа, изображенного на рис. 1.

Орграф может содержать и кратные дуги. Пример такого графа приведен на рис. 4. Его матрица смежности изображена на рис. 5.

Всякий неориентированный граф может быть представлен в виде орграфа. Для этого достаточно все его ребра заменить парами встречных дуг.

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	1	1
5	0	0	0	0	0

Рис. 3

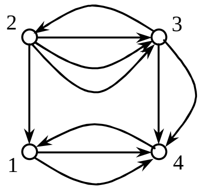


Рис. 4

	1	2	3	4
1	0	0	0	2
2	1	0	3	0
3	0	1	0	2
4	1	0	0	0

Рис. 5

Если в орграфе две вершины соединены парой встречных дуг, то пару можно заменить одним неориентированным ребром. Граф, содержащий дуги и неориентированные ребра, называется **смешанным** графом [38, с. 73].

1

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	0	2

2

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0
4	0	1	1	0

3

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	2
4	0	0	0	0

4

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	2
3	0	0	2	0
4	0	0	0	0

5

	1	2	3	4
1	0	0	2	0
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	1	0

6

	1	2	3	4
1	0	0	0	1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0

7

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	2	1
4	0	0	0	0

8

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	1	0	0	0

Рис. 6

Упражнения

1. (УСЕ). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) являются ли кратными две дуги, соединяющие две вершины, но направленные встречно?

2) является ли нуль-граф на пяти вершинах частичным по отношению к орграфу, приведенному на рис. 1?

3) могут ли ориентированный и неориентированный графы иметь одну и ту же матрицу смежности?

4) может ли основание орграфа содержать кратные ребра, если в орграфе нет кратных дуг?

5) несвязный орграф D содержит изолированную вершину. Удалим эту вершину, получим ориентированный подграф D_1. Изоморфны ли орграфы D и D_1?

6) орграф D состоит из двух вершин, соединенных дугой. Эту дугу заменили встречной дугой. Получился новый орграф D_1. Верно ли, что орграфы D и D_1 изоморфны?

7) верно ли, что если две матрицы не совпадают, то соответствующие орграфы всегда неизоморфны?

2. (ХХН). Сколько ребер имеет основание орграфа, приведенного на рис. 4?

3. На рис. 6 изображены восемь матриц смежности, каждая из которых задает некоторый орграф на четырех вершинах. Укажите:

(УМБ) несвязные орграфы;

(УТВ) орграфы, содержащие петли;

(ЛЯТ) орграфы, содержащие кратные дуги;

(ЦАД) орграфы, основания которых – полные графы.

4.2. Степень вершины орграфа

Степени вершин орграфа определяются несколько сложнее по сравнению с неориентированными графами, поскольку в орграфах необходимо учитывать, сколько дуг входит в каждую вершину и сколько – выходит. **Степень входа** вершины равна числу входящих в нее дуг. **Степень выхода** вершины равна числу выходящих из нее дуг.

В [56, с. 77] вместо терминов «степень входа вершины» и «степень выхода вершины» используются словосочетания: «отрицательная степень вершины» и «положительная степень вершины». В [12, с. 118] применен термин: «полустепень захода» и «полустепень исхода» и используются обозначения соответственно: $id(v)$ и $od(v)$.

Для графа, приведенного на рис. 4, имеем:

$\rho(1)_{вх} = 2$; $\rho(1)_{вых} = 2$; $\rho(2)_{вх} = 1$; $\rho(2)_{вых} = 4$;
$\rho(3)_{вх} = 3$; $\rho(3)_{вых} = 3$; $\rho(4)_{вх} = 4$; $\rho(4)_{вых} = 1$.

Если в орграфе n вершин, то число K его дуг равно:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{вх} + \sum_{i=1}^{n}\rho(i)_{вых}}{2}. \qquad (1)$$

Например, в ориентированом графе (рис. 4) число дуг равно:

$$K = \frac{2+1+3+4+2+4+3+1}{2} = 10.$$

Степени входа и выхода орграфа обладают следующим свойством: сумма степеней входа всех вершин равна сумме степеней выхода всех вершин, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\ (i)_{вх} = \sum_{i=1}^{n} \rho\ (i)_{вых}.$$

Следовательно, формулу (1) можно упростить:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \rho\ (i)_{вх} \quad \text{либо} \quad K = \sum_{i=1}^{n} \rho\ (i)_{вых}.$$

Если ориентированный граф на n вершинах представлен матрицей смежности, то степень выхода i-й вершины равна сумме всех чисел i-й строки матрицы. Степень входа i-й вершины равна сумме чисел i-й колонки матрицы ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Упражнения

1. (АИЮ). Определите степень входа каждой из вершин графа на рис. 1.

2. (ЭЛЫ). Определите степень выхода каждой из вершин графа на рис. 2.

3. Орграфы на рис. 6 заданы матрицами смежности. Укажите номера графов (т. е. матриц):

(ЭЭТ) содержащих хотя бы одну вершину со степенью входа, равной трем;

(ШЛК) содержащих хотя бы одну вершину со степенью выхода, равной трем;

(ЦТС) в которых каждая из вершин 1 и 2 имеет степень входа, равную единице;

(ЕМУ) в которых каждая из вершин 1 и 2 имеет степень выхода, равную единице.

4.3. Маршруты, цепи, циклы в орграфах

Маршруты, цепи и циклы в орграфах определяются так же, как и в случае неориентированных графов, но с учетом того, что движение возможно лишь в направлении стрелок. Например, последовательность вершин 1,3,2,4 (рис. 1) маршрутом не является, поскольку движение от вершины 3 к вершине 2 осуществлено навстречу стрелке. Примеры «правильных» маршрутов (рис. 1): 1,2,3,4,2; 1,3,4,2,4,5; 1,3,4,2,3,4 и др. В связи с этим в орграфах существует понятие **достижимости**. Вершина v_2 называется достижимой из вершины v_1, если существует маршрут, ведущий из вершины v_1 к вершине v_2.

Если в маршруте нет повторяющихся дуг, то маршрут называется **ориентированной цепью**. Если в ориентированной цепи нет повторяющихся вершин, то такая цепь называется **простой ориентированной цепью** (см. подраздел 2.1 данного раздела). Простая ориентированная цепь может быть замкнутой и разомкнутой. Замкнутая простая ориентированная цепь называется простым **ориентированным циклом.**

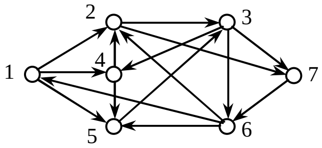


Рис. 7

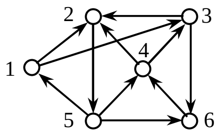


Рис. 8

Чтобы найти все простые ориентированные цепи, соединяющие две заданные вершины, можно воспользоваться методом, рассмотренным в подразделе 2.3 данного раздела, но с соблюдением условия: не двигаться навстречу стрелкам. Для примера найдем все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 7 в орграфе на рис. 7. Из вершины 1 выходят три дуги: (1,2), (1,4) и (1,5). Дугу, входящую в вершину 1, не учитываем. На втором этапе продолжаем движение из вершин 2, 4, 5. В результате получим двухзвенные (по две дуги) простые цепи: 1,2,3; 1,2,7; 1,4,2; 1,4,5; 1,5,3. Одна из них – цепь 1,2,7 – является искомой. Остальные имеют продолжение. После завершения всех этапов получаем девять простых цепей: 1,2,7; 1,2,3,7; 1,4,2,7; 1,5,3,7; 1,4,2,3,7; 1,4,5,3,7; 1,5,3,4,2,7; 1,5,3,6,2,7; 1,4,5,3,6,2,7.

Аналогичным образом можно найти циклы, начинающиеся, например, в вершине 1 и в ней же заканчивающиеся. После первого этапа имеем: 1,2; 1,4; 1,5. После второго: 1,2,3; 1,2,7; 1,4,2; 1,4,5; 1,5,3. После третьего: 1,2,3,4; 1,2,3,6; 1,2,3,7; 1,2,7,6; 1,4,2,3; 1,4,2,7; 1,4,5,3; 1,5,3,4; 1,5,3,6; 1,5,3,7 и т. д.

После четвертого этапа получаем три искомых цикла: 1,2,3,6,1; 1,2,7,6,1; 1,5,3,6,1. После пятого: 1,2,3,7,6,1; 1,4,2,3,6,1; 1,4,2,7,6,1; 1,4,5,3,6,1; 1,5,3,7,6,1. После шестого: 1,4,2,3,7,6,1; 1,4,5,3,7,6,1. После седьмого находим самый длинный цикл: 1,5,3,4,2,7,6,1. Всего получили 11 циклов.

Упражнения

1. На рис. 8 изображен связный орграф, содержащий шесть вершин. Пусть начальной является вершина 1, конечной – вершина 6.

(МД1). Сколько существует простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 6?

(392)! Сколько среди них цепей, содержащих по три вершины? по четыре вершины? по пять вершин? по шесть вершин?

2. (303). Сколько простых ориентированных циклов содержит орграф на рис. 8, если каждый цикл начинается и заканчивается в вершине 1?

3. (424). Укажите последовательность вершин, образующих самый длинный цикл (рис. 8). Начинается цикл с вершины 1 и заканчивается также вершиной 1.

4. (ИЯШ). Сколько простых ориентированных циклов содержит орграф (рис. 8), если каждый цикл начинается с вершины 2 и заканчивается в этой же вершине 2?

(Р76). Сколько среди них циклов, содержащих по две дуги? по три дуги? по четыре дуги? по пять дуг?

(237). Укажите номера вершин самого длинного цикла, в котором началом и концом является вершина 2.

4.4. Связность орграфа. Эйлеровы цепи и циклы в орграфе

Орграф на n вершинах называется **сильно связным**, если существует простая ориентированная цепь, соединяющая любые две вершины v_i и v_j ($i, j = 1, 2,\ldots,n$). Примером является орграф, приведенный на рис. 9. В этом орграфе имеется всего 49 упорядоченных пар вершин: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) и т. д. Для каждой из этих пар существует по крайней мере одна простая цепь. Например, для пары (1,1) имеем 1,2,4,1 (а также 1,2,3,6,7,4,1). Вершины 2 и 1 соединены короткой цепью 2,4,1 и более длинной – 2,3,6,7,4,1. Вершина 3 соединена с вершиной 2 четырьмя простыми цепями: 3,6,2, 3,6,7,5,2, 3,6,7,4,5,2, 3,6,7,4,1,2 и т. д.

Орграф называется **слабо связным**, если его основанием является связный граф [35, с. 173; 56, с. 79]. Орграф называется **несвязным**, если число компонент его основания превышает единицу.

Ориентированная замкнутая цепь называется эйлеровой, если она содержит все дуги графа (эйлеров цикл). Если ориентированная разомкнутая цепь содержит все дуги графа, то такая цепь называется полуэйлеровой.

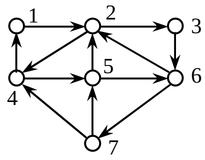


Рис. 9

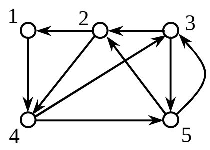


Рис. 10

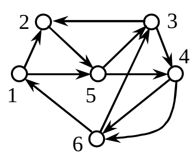


Рис. 11

Теорема. Орграф содержит замкнутую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда он является слабо связным и когда каждая вершина имеет степень входа, равную степени выхода. (Доказательство можно найти в [56, с. 79].) Пример, иллюстрирующий теорему, приведен на рис. 10. Замкнутая цепь, содержащая все дуги графа, имеет вид 1,4,5,3,5,2,4,3,2,1 либо 1,4,3,2,4,5,3,5,2,1 и др.

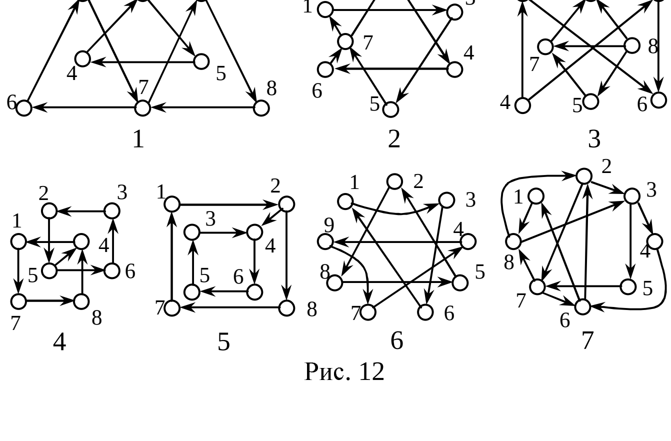


Рис. 12

Следствие из теоремы: ориентированный граф содержит разомкнутую эйлерову цепь, если одновременно выполняются следующие условия:

а) орграф является слабо связным;

б) в орграфе существует одна вершина, степень выхода которой на единицу больше степени входа;

в) в орграфе существует одна вершина, степень входа которой на единицу больше степени выхода;

г) степень входа каждой из остальных вершин равна степени выхода.

На рис. 11 приведен орграф, для которого:

$\rho(1)_{\text{вых}} - \rho(1)_{\text{вх}} = 1;\quad \rho(2)_{\text{вх}} - \rho(2)_{\text{вых}} = 1;$

$\rho(3)_{\text{вх}} = \rho(3)_{\text{вых}} = 2;\quad \rho(4)_{\text{вх}} = \rho(4)_{\text{вых}} = 2;$

$\rho(5)_{\text{вх}} = \rho(5)_{\text{вых}} = 2;\quad \rho(6)_{\text{вх}} = \rho(6)_{\text{вых}} = 2,$

следовательно, орграф является полуэйлеровым. Пример полуэйлеровой цепи: 1,5,3,2,5,4,6,3,4,6,1,2.

Упражнения

1. (ООЕ). Укажите слабо связные орграфы (рис. 12).

2. (362). Укажите сильно связные орграфы (рис. 12).

3. (А13). Укажите несвязные орграфы (рис. 12).

4. (ХТИ). Укажите число компонент связности каждого из графов на рис. 12.

5. (455). Укажите полуэйлеровы орграфы (рис. 12).

6. (ПИ6). Укажите эйлеровы орграфы (рис. 12).

7. (137). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) существуют ли сильно связные орграфы на двух вершинах?

2) существуют ли сильно связные орграфы, не являющиеся слабо связными?

3) верно ли, что всякая полуэйлерова цепь является простой цепью в орграфе?

4) существуют ли слабо связные орграфы, являющиеся и сильно связными?

5) верно ли, что всякий эйлеров цикл является простым циклом в орграфе?

6) существуют ли орграфы, в которых сумма степеней входа всех вершин на 2 больше суммы степеней выхода всех вершин?

7) является ли сильно связным орграф, состоящий из одной вершины и одной петли?

8. (338)! Сумма степеней входа всех вершин орграфа равна 19. Определите число дуг в орграфе. Определите сумму степеней выхода всех вершин в орграфе.

4.5. Полный орграф

Орграф называется **полным**, если его основание есть полный граф. Полный орграф называют также **турниром** [12; 51; 57]. (В [12, с. 120] вместо термина «ориентированный полный граф» используется словосочетание «направленный полный граф».)

Полный орграф можно определить с использованием понятия дуги: орграф без петель называется полным, если каждая пара его вершин соединена точно одной дугой.

В [57, с. 162] полный орграф определяется иначе: «полный орграф имеет для каждой пары вершин либо ориентированное ребро, либо симметричную пару ребер».

В случае неориентированных графов для всякого n существует единственный полный граф (n – число вершин). Для турниров верным является другое утверждение: если n – число вершин, то существует S полных орграфов:

$$S = 2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad \text{где} \quad n > 1. \qquad (2)$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (2), возьмем в качестве исходного какой-либо полный орграф с n вершинами и каждой его дуге поставим во взаимно однозначное соответствие двоичный разряд. Каждую дугу исходного графа обозначим нулем. Получим двоичное число, состоящее из C_n^2 нулей. Заменим в этом числе какой-либо нуль единицей и ориентацию соответствующей дуги поменяем на обратную, получим новый полный орграф, отличающийся от исходного направлением дуги, которой соответствует единица. Аналогичным образом можно получать любые двоичные числа, при этом различным числам будут соответствовать различные орграфы. Таким образом, общее число полных орграфов на n вершинах равно числу всех двоичных C_n^2-разрядных кодов, что и доказывает справедливость формулы (2).

Пример полного орграфа на пяти вершинах приведен на рис. 13. На рис. 14 изображен другой полный орграф с тем же числом вершин, но отличающийся от графа на рис. 13 ориентацией дуг (2,3) и (3,4).

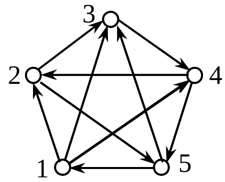


Рис. 13

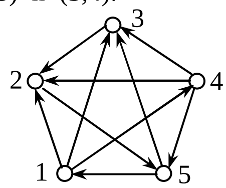


Рис. 14

Из формулы (2) следует, что число полных орграфов быстро растет с увеличением числа n. Например, если $n = 2$, то $S = 2$; если $n = 3$, то $S = 8$; если $n = 4$, то $S = 64$; если $n = 5$, то $S = 1024$, и т. д.

Приведем несколько теорем о полных орграфах.

Теорема 1. Если полный орграф на n вершинах содержит хотя бы две вершины, степени выхода которых одинаковы, то в этом орграфе имеется хотя бы один простой цикл, содержащий три вершины [3, с. 66].

На рис. 13 изображен ориентированный граф, в котором вершины 2, 4, 5 имеют одинаковую степень выхода. Следовательно, в нем найдутся такие три вершины, что соединяющие их дуги образуют простой цикл: 1,2,5,1; 1,4,5,1; 3,4,5,3 и др.

Теорема 2. Во всяком полном орграфе имеется простая цепь, проходящая через все вершины орграфа [3].

Для орграфов на рис. 13 и 14 примерами являются цепи соответственно 2,3,4,5,1,2; 2,5,1,4,3,2.

Теорема 3. Всякий полный сильно связный орграф – гамильтонов [51, с. 134].

Теорема 4. Всякий полный орграф – полугамильтонов.

Очевидно, что теорема 4 является следствием из теоремы 2.

Упражнения

1. (У51). Сколько существует турниров на шести вершинах, если во всех турнирах дуги (1,2), (1,3), (2,3) имеют одну и ту же ориентацию?

2. (С32). Сколько турниров можно построить на основе орграфа, содержащего 10 вершин и 36 дуг, путем дополнения его до полного, если ориентация всех 36 дуг исходного орграфа в каждом турнире является неизменной?

3. (РА3). Укажите номера вершин в графе на рис. 14, последовательность которых образует гамильтонов цикл, если начальной является вершина 1.

4. (ВБО). Определите сумму степеней выхода всех вершин турнира на десяти вершинах.

5. (5С5). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что существуют эйлеровы турниры на шести вершинах?

2) верно ли, что существуют турниры на девяти вершинах, содержащие эйлеров цикл?

3) является ли гамильтоновым граф на рис. 14?

4) существуют ли полные орграфы, не являющиеся сильно связными?

5) всякий ли турнир является слабо связным орграфом?

6) существуют ли полные орграфы, у которых каждая вершина имеет степень входа, равную степени выхода?

7) существуют ли турниры, содержащие 66 дуг?

4.6. О теории трансверсалей

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_m$ – непустые подмножества некоторого множества E. Составим из них семейство L, содержащее m подмножеств:

$$L = (M_1, M_2, \ldots, M_m).$$

Из каждого подмножества, входящего в семейство L, выберем по одному элементу так, чтобы получилось упорядоченное множество W, содержащее m различных элементов. Множество W называется **трансверсалью** семейства L. (В [51, с. 148] трансверсаль называется также **системой различных представителей.**)

Рассмотрим двудольный орграф (рис. 15) для случая, когда

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \qquad L = (M_1, M_2, M_3),$$

где $M_1 = \{1, 2\}$; $M_2 = \{1, 2, 3\}$; $M_3 = \{2, 4, 5\}$.

На рис. 15 дуги показывают, из каких элементов множества E состоят подмножества M_1, M_2 и M_3.

Выберем из подмножеств M_1, M_2, M_3 элементы: $1 \in M_1$, $2 \in M_2$, $4 \in M_3$. Получим трансверсаль вида $W_1 = \{1, 2, 4\}$. По рис. 15 видно, что существуют и другие трансверсали: $W_2 = \{1, 2, 5\}$; $W_3 = \{1, 3, 4\}$; $W_4 = \{2, 3, 4\}$.

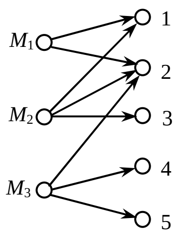


Рис. 15

Очевидно, что не всякое упорядоченное подмножество множества E является трансверсалью. Например, если выбрать $1 \in M_1$, $1 \in M_2$, $2 \in M_3$, то трансверсаль не получим, так как все элементы, входящие в трансверсаль, должны быть различными. Не является трансверсалью и множество $\{3, 4, 5\}$, поскольку в нем отсутствует элемент, принадлежащий подмножеству M_1.

4.7. Метод нахождения всех трансверсалей

Если дано множество M и семейство L, то возможны следующие вопросы. Первый: существует ли для L трансверсаль? Второй: как найти все трансверсали?

Признак, по которому можно определить, имеется ли в L трансверсаль, дает теорема Ф. Холла, доказанная им в 1935 г. С формулировкой и доказательством теоремы можно ознакомиться по [51]. Здесь мы ее рассматривать не будем, а сразу перейдем ко второй задаче, т. е. выясним, как найти все трансверсали. Процесс их нахождения поясним на примере орграфа, приведенного на рис. 15. Но сначала заменим (для удобства) символы M_1, M_2, M_3 буквами A, B, C соответственно, т. е. примем:

$$A = \{1, 2\}; \quad B = \{1, 2, 3\}; \quad C = \{2, 4, 5\}.$$

Введем логические переменные: $A_1 = 1$, если в искомую трансверсаль входит элемент $1 \in A$, и $A_1 = 0$, если не входит; $A_2 = 1$, если элемент $2 \in A$ входит в искомую трансверсаль, и $A_2 = 0$, если не входит; $B_1 = 1$, если элемент $1 \in B$ входит в трансверсаль, и $B_1 = 0$, если не входит, и так далее до переменной C_5, которая принимает единичное значение, если элемент $5 \in C$ входит в искомую трансверсаль, и $C_5 = 0$, если не входит.

Согласно рис. 15 имеем: $A_1 + A_2 = 1$, если в искомую трансверсаль входит либо элемент $1 \in A$, либо элемент $2 \in A$. Аналогично интерпретируются и следующие две дизъюнкции: $B_1 + B_2 + B_3$; $C_2 + C_4 + C_5$. Во всех трех случаях знак «плюс» обозначает операцию дизъюнкции.

Составляем булево уравнение вида

$$(A_1 + A_2)(B_1 + B_2 + B_3)(C_2 + C_4 + C_5) = 1.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$A_1B_2C_4 + A_1B_2C_5 + A_1B_3C_2 + A_1B_3C_4 + A_1B_3C_5 + A_2B_1C_4 + A_2B_1C_5 + A_2B_3C_4 + A_2B_3C_5 = 1.$$

Это уравнение имеет девять решений, каждое из которых показывает, какие элементы из множеств A, B, C необходимо взять, чтобы получилась трансверсаль. Следовательно, семейство $L = (A, B, C)$ имеет 9 трансверсалей: $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,2\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,1,4\}$, $\{2,1,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$. Заметим, что все полученные множества являются упорядоченными, т. е. множества, например $\{1,2,4\}$ и $\{2,1,4\}$, не совпадают, хотя и состоят из одних и тех же элементов: в трансверсаль $\{1,2,4\}$ входит элемент 1 из множества A, элемент 2 из множества B и элемент 4 из множества C. Трансверсаль $\{2, 1, 4\}$ образована иначе: в нее входит элемент 2 из множества A, элемент 1 из множества B и элемент 4 из множества C.

Основу рассмотренного метода нахождения всех трансверсалей составляет метод Петрика, который неоднократно использовался в предыдущих разделах.

Методами теории трансверсалей решаются такие задачи, как задача о свадьбах, о составлении расписаний, о назначении на должность и др. В задаче о свадьбах главным является понятие **совершенного паросочетания**, определяемого следующим образом: «Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1,V_2)$ называется взаимно однозначное соответствие между вершинами из V_1 и подмножеством вершин из V_2, обладающее тем свойством, что соответствующие вершины соединены ребром» [51, с. 145]. Из этого определения видно, что совершенное паросочетание – это не что иное, как трансверсаль в «матримониальной» интерпретации (матримониальный – относящийся к браку, супружеству). Пусть V_1 – множество юношей, V_2 – множество девушек, с каждой из которых знаком хотя бы один юноша из множества V_1. Суть задачи о свадьбах состоит в том, что требуется выяснить, может ли каждый юноша жениться только на знакомой ему девушке. Рассмотренный метод не только дает ответ на этот вопрос, но и позволяет найти все варианты «матримониальных» трансверсалей.

Упражнения

1. (ЭИР). Укажите номера семейств подмножеств множества $E = \{1,2,3,4,5\}$, имеющих трансверсали [51]:

1) $(\{1\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4,5\})$;
2) $(\{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{4,5\})$;
3) $(\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{3\})$;
4) $(\{1,3,4\}, \{1,4,5\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\})$;
5) $(\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,3\}, \{1,3,4\}$.

2. (ЛЯС). Для каждого из подмножеств предыдущего упражнения укажите число трансверсалей. (Если трансверсалей нет, то их число равно нулю.)

3. (УЦГ)! Строительной фирме требуются каменщик, плотник, водопроводчик и слесарь. На эти должности имеется шесть претендентов: один может работать каменщиком, второй – плотником, третий – каменщиком и водопроводчиком, четвертый – водопроводчиком, пятый – слесарем и шестой – слесарем и плотником. Сколько существует способов выбора четверых претендентов, чтобы охватить весь фронт работ? Сколько останется вариантов, если первый претендент снимет свою кандидатуру?

4. (ЦБД). Имеются пять ролей и пять артистов, каждый из которых может играть любую роль из пяти. Сколькими способами можно распределить роли между артистами?

5. Условие предыдущего упражнения представьте в виде двудольного орграфа и ответьте на вопросы:

(ЕКЕ) сколько дуг содержит этот орграф?

(ТБЖ) сколько в нем трансверсалей?

6. (ББЗ). Имеются пять ролей и семь артистов, каждый из которых может играть любую роль из пяти. Сколько существует способов распределения ролей между артистами?

7. Условие упражнения 6 представьте в виде двудольного орграфа и ответьте на вопросы:

(НУИ) сколько дуг содержит орграф?

(ТЛК) сколько в нем трансверсалей?

4.8. Нахождение максимальной пропускной способности транспортной сети

Транспортной сетью называется орграф, в котором имеются точно одна вершина со степенью входа, равной нулю, точно одна вершина со степенью выхода, равной нулю, и в котором каждой дуге поставлено в соответствие некоторое число, называемое **пропускной способностью дуги** [35, с. 249; 54]. Вершина со степенью входа, равной нулю, называется **источником**. В эту вершину не входит ни одной дуги. Вершина со степенью выхода, равной нулю, называется **стоком**. Из нее не выходит ни одной дуги. Примером транспортной сети является орграф, приведенный на рис. 16. Вершина 1 в этом графе является источником, вершина 8 – стоком. Все остальные вершины называются **промежуточными**. Каждой дуге поставлена в соответствие ее пропускная способность.

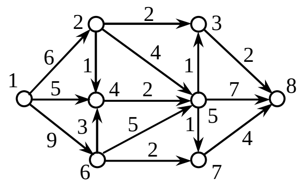


Рис. 16

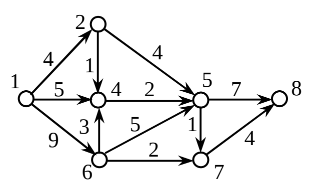


Рис. 17

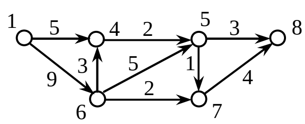


Рис. 18

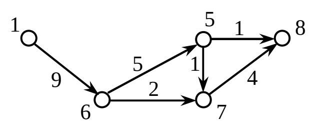


Рис. 19

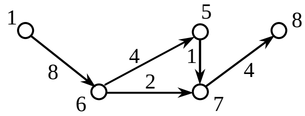


Рис. 20

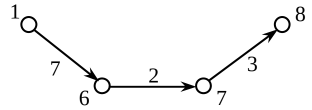


Рис. 21

Для каждой из промежуточных вершин справедливо утверждение: суммарный входной поток равен суммарному выходному потоку, т. е. ни в одной вершине проходящая через сеть субстанция не накапливается.

Если ориентированная цепь состоит из нескольких последовательных дуг, то ее максимальная пропускная способность определяется той дугой, пропускная способность которой имеет наименьшее значение по сравнению с другими дугами данной цепи. На этом очевидном положении основан метод нахождения максимальной пропускной способности сети, который мы рассмотрим на примере орграфа, приведенного на рис. 16.

Этап 1. Рассмотрим цепь 1,2,3,8. Ее пропускная способность равна двум. Уменьшим на эту величину пропускные способности всех дуг цепи 1,2,3,8. Тогда пропускная способность дуг (2,3) и (3,8) будет равна нулю. Дуги с нулевой пропускной способностью удаляем из орграфа. Получим орграф, приведенный на рис. 17. Таким образом, результатом первого этапа является число $n_1 = 2$, представляющее собой ту часть искомой пропускной способности сети, которую дает цепь 1,2,3,8.

Этап 2. Рассмотрим цепь 1,2,5,8 (рис. 17). Ее максимальная пропускная способность равна 4 ($n_2 = 4$). Уменьшим на 4 пропускные способности дуг (1,2), (2,5), (5,8). После удаления дуг с нулевой пропускной способностью получим орграф, изображенный на рис. 18.

Этап 3. Пропускная способность цепи 1,4,5,8 (рис. 18) равна двум, т. е. $n_3 = 2$. Удалив дугу (4,5), получаем орграф, приведенный на рис. 19.

Этап 4. Пропускная способность цепи 1,6,5,8 (рис. 19) равна единице, т. е. $n_4 = 1$. После удаления дуги (5,8) получим орграф, представленный на рис. 20.

Этап 5. Рассмотрим цепь 1,6,5,7,8. Ее пропускная способность равна единице, т. е. $n_5 = 1$.

Этап 6. Осталась единственная цепь (рис. 21). Ее пропускная способность равна двум, т. е. $n_6 = 2$.

Таким образом, пропускная способность N сети, приведенной на рис. 16, равна сумме шести составляющих:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6, \qquad (3)$$

где каждое слагаемое обозначает пропускную способность соответствующей цепи, соединяющей источник со стоком. Подставим в (3) значения n_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$):

$$N = 2 + 4 + 2 + 1 + 1 + 2 = 12.$$

Таким образом, максимальная пропускная способность сети равна 12.

Максимальную пропускную способность сети можно определить и другим путем. Если найти все разрезы сети и вычислить их пропускные способности, то разрезу с наименьшей пропускной способностью будет соответствовать максимальная пропускная способность сети. Например, если в орграфе (рис. 16) провести разрез через дуги (3,8), (5,7), (5,8) и (6,7), то получим разрез с пропускной способностью, равной 2+7+1+2=12. Других разрезов с пропускной способностью, меньшей 12, в орграфе нет. Следовательно, число 12 и есть максимальная пропускная способность сети. Подробности о максимальной пропускной способности сети можно найти в [19; 35; 51; 54; 62].

Упражнения

1. (ОЛ1)! Определите максимальную пропускную способность цепи: 1,2,3,7; 1,4,6,7; 1,3,6,7 (рис. 22).

2. (ЧЕХ)! Определите максимальную пропускную способность участка сети (рис. 22), если:

а) вершина 1 – источник, вершина 3 – сток;

б) вершина 1 – источник, вершина 6 – сток.

3. (983). Определите максимальную пропускную способность сети (рис. 22), если вершина 1 – источник, вершина 7 – сток.

4. (2ПИ)! Определите максимальную пропускную способность участка сети (рис. 23), если:

а) источник – вершина 1, сток – вершина 4;

б) источник – вершина 1, сток – вершина 6;

5. (285). Определите максимальную пропускную способность сети (рис. 23), если вершина 1 – источник, вершина 7 – сток.

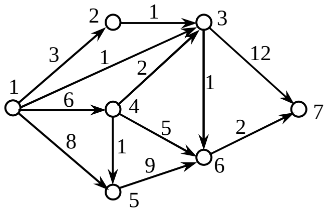


Рис. 22

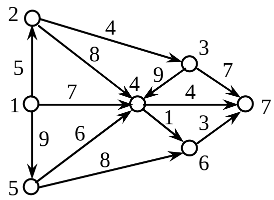


Рис. 23

6. (ЕГ6). На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что поиск максимальной пропускной способности сети можно начинать с любой ее цепи, соединяющей источник со стоком?

2) верно ли, что рассмотренный метод отыскания максимальной пропускной способности сети применим и к непланарным графам?

3) может ли транспортная сеть содержать пары вершин, соединенные встречными дугами?

4) верно ли, что поток источника всегда равен потоку стока?

5) может ли пропускная способность разреза, имеющая наименьшее значение по сравнению с другими разрезами, быть меньше максимальной пропускной способности сети?

6) изменится ли пропускная способность сети, если пропускную способность каждой дуги увеличить в два раза (рис. 16)?

7. (У87). Найдите максимальную пропускную способность сети (рис. 24), где 1 – источник, 8 – сток.

4.9. Орграфы и бинарные отношения. Диаграммы Хассе

В разделе «Бинарные отношения» теории множеств данного курса дискретной математики рассмотрены два основных способа задания бинарных отношений – аналитический, путем посимвольного перечисления элементов отношения, и табличный, основу которого составляет координатная сетка. Теперь рассмотрим еще один способ – с помощью орграфов.

Пусть дано множество aRb, где $a,b \in A = \{1,2,3,4,5,6\}$, R обозначает «a делится на b». Поставим во взаимно однозначное соответствие каждому элементу множества A некоторую вершину орграфа и соединим дугами те его вершины, которым соответствует высказывание «a делится на b». Всякое число делится на самого себя, – это отмечаем в орграфе петлями. Число 2 делится на единицу, проводим дугу от вершины 2 к вершине 1. Число 3 делится на единицу, соединяем вершины 3 и 1 и т. д. Получим орграф, приведенный на рис. 25.

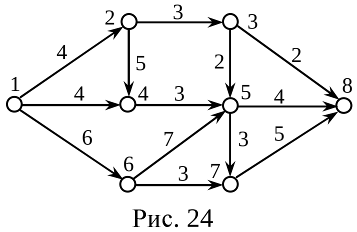


Рис. 24

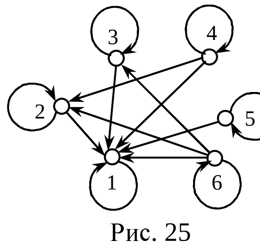


Рис. 25

При построении орграфа некоторого отношения необходимо иметь в виду, что ориентация дуг определяется записью aRb, где a – начало дуги, b – ее окончание, т. е. стрелка всегда показывает направление от a к b. Проиллюстрируем это еще одним примером. Пусть отношение вида «быть братом» задано на множестве детей {Таня, Зина, Толя, Костя} одних и тех же родителей. Поставим в соответствие каждому из детей определенную вершину орграфа: 1 – Таня, 2 – Зина, 3 – Толя, 4 – Костя. Толя по отношению к самому себе братом не является, и Костя сам себе не брат. Поэтому в орграфе (рис. 26) петель нет. Толя – брат Тани, Зины и Кости. Следовательно, вершину 3 соединяем дугами со всеми остальными вершинами. То же самое относится и к Косте. Вершины 3 и 4 соединены встречными дугами. Это значит, что если Толя брат Кости, то и Костя брат Толи.

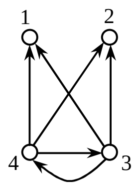


Рис. 26

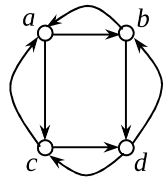


Рис. 27

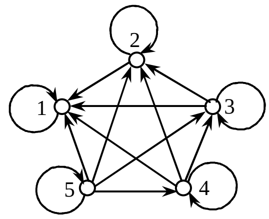


Рис. 28

Рассмотрим примеры некоторых отношений.

Симметричные отношения. Пусть даны четыре прямые a, b, c, d. При этом a и b перпендикулярны, c и d также перпендикулярны. Кроме того, a и d параллельны, параллельны и b и c [3, с. 76]. На множестве этих прямых рассмотрим отношение перпендикулярности. В данном случае – это множество упорядоченных пар вида

$R = \{(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$.

Соответствующий орграф приведен на рис. 27.

Отношение перпендикулярности является антирефлексивным, так как ни одна прямая не является перпендикулярной самой себе. Поэтому в орграфе нет петель. Отношение перпендикулярности симметрично, следовательно, в орграфе каждая пара вершин соединена двумя встречными дугами. Очевидно, что такое отношение может быть представлено неориентированным графом.

Рефлексивные отношения. Примером может служить полный орграф, в котором каждые две вершины соединены встречными дугами и каждая вершина содержит петлю (отношения параллельности, равенства и др.).

Транзитивные отношения. Особенность транзитивного отношения состоит в том, что для всякой пары дуг, у которых конец одной дуги совпадает с началом другой, существует третья дуга, соединяющая начало первой дуги с концом второй. Эта третья дуга называется **транзитивно замыкающей дугой** [16, с. 15], или **транзитивным замыканием** [62, с. 437]. Орграф, иллюстрирующий транзитивное отношение, приведен на рис. 28 (петли не учитываем). Всякая тройка вершин в этом графе отличается тем, что две вершины соединены двумя цепями. Одна из них содержит две дуги, а третья является транзитивным замыканием. Например, цепь 4,3,2 транзитивно замыкает дуга (4,2).

Антисимметричные отношения. В качестве примера рассмотрим отношение aRb, где $a,b \in \{1,2,3,4,5\}$, R – «больше или равно». Орграф приведен на рис. 28. Если отношение «больше или равно» заменить отношением «больше», то в орграфе исчезнут петли, а остальные дуги сохранятся. Отношение «больше или равно» является частично упорядоченным. Его граф содержит транзитивно замыкающие дуги и петли. Удалим все петли и транзитивно замыкающие дуги. Получится граф, который называют диаграммой Хассе. Диаграммы Хассе более 100 лет применяли в генеалогии для задания отношения родства. Это отношение не является транзитивным. Например, если «*a* отец *b*» и «*b* отец *c*», то *a* не является отцом *c*, в связи с чем соответствующие графы не содержат транзитивно замыкающих дуг [16, с. 16 – 18].

Рассмотренных примеров вполне достаточно, чтобы получить представление о том, как задаются бинарные отношения при помощи графов. Более подробные сведения об этом можно найти в специальной литературе. Например, в [6, с. 16 – 26] даны определения и графы многих отношений, а также указаны их свойства.

Упражнения

1. Дано отношение «быть братом» на множестве детей {Толя, Миша, Костя, Ваня, Дима} одних и тех же родителей. Представьте это отношение в виде орграфа и определите:

(ЗАЕ) число дуг в орграфе;

(А76) число дуг, если бы братьев было семеро.

2. На множестве {1,2,4,7,9,10,11,15,18} дано отношение «больше». Представьте его в виде орграфа.

(382). Сколько дуг в орграфе?

(967). Сколько в нем транзитивно замыкающих дуг?

(004)! Укажите вершину с наименьшей степенью выхода. Укажите степень выхода этой вершины.

(395)! Укажите вершину с наибольшей степенью выхода. Укажите степень выхода этой вершины.

3. (283). Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) отношение «быть братом» в упражнении 1 может быть представлено полным орграфом?

2) основанием орграфа, представляющего отношение «больше», является полный граф?

3) если в орграфе есть вершины с петлями и без петель, то орграф представляет рефлексивное отношение?

4) отношение «быть сестрой» на множестве пяти девочек, являющихся детьми одних и тех же родителей, может быть представлено полным неориентированным графом?

5) отношение является симметричным, если оно представлено неориентированным графом без петель?

6) если орграф не содержит ни петель, ни встречных дуг, то отношение является асимметричным?

7) в орграфе, представляющем транзитивное отношение, каждая дуга является замыкающей?

4. (ЮР8). Сколько ребер содержит основание ориентированного графа, представленного матрицей смежности на рис. 3?

5. (КЛЫ)! Обратимся к рис. 8. Сколько простых цепей ведут от вершины 4 к вершине 6? Сколько простых цепей ведут от вершины 3 к вершине 6?

6. (ШРШ)! Сколько граней имеет остов орграфа, приведенного на рис. 10? на рис. 11?

7. (МУО)! Для научной экспедиции требуются специалисты, владеющие японским, китайским, английским и французским языками. В конкурсную комиссию на участие в экспедиции подали заявки шесть человек. Первый владеет японским языком, второй – китайским, третий – японским и английским, четвертый – английским, пятый – французским, шестой – китайским и французским. Сколько существует минимальных вариантов выбора специалистов для экспедиции? Сколько будет вариантов, если первый специалист не пройдет медицинскую комиссию по состоянию здоровья?

4.10. Сколько существует графов?

Этому очень непростому вопросу уделим некоторое внимание в завершение темы «Теория графов». Прежде всего отметим, что однозначного ответа на данный вопрос нет, поскольку существует две задачи перечисления графов. В первой определяется число помеченных графов, во второй – непомеченных. Первая задача является проще второй. В [57 с. 14] для помеченных графов приведена формула вида:

$$G_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

где G_n – число помеченных графов на *n* вершинах. С ее помощью можно определить число всех возможных связных и несвязных графов на *n* вершинах. Например, если *n* = 3, то существует 8 помеченных графов (рис. 29). Непомеченных же только 4 графа: *а*, *б*, *д*, *з*. Каждый из них является представителем группы изоморфных графов. Первую группу образует единственный граф *а*, вторую – графы *б*, *в*, *г*, связанные отношением изоморфизма, третью – графы *д*, *е*, *ж* и четвертую – граф *з*.

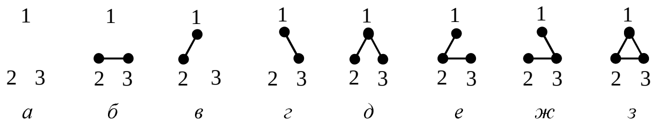


Рис. 29

Выявление изоморфных графов составляет основную трудность при подсчете непомеченных графов. Для нахождения их числа такой же простой формулы, как для числа помеченных графов, не найдено до сих пор.

Еще более сложным является вопрос о числе псевдографов и ориентированных графов.

Следует, однако, отметить, что главные усилия исследователей направлены не на поиски формулы для нахождения всех возможных графов вообще, а на отыскание способов, позволяющих определить число графов заданного вида. Например, в [57] рассматриваются такие частные случаи, как эйлеровы графы, турниры, деревья, полные орграфы и др. При этом частные случаи в свою очередь распадаются на еще более узкие подклассы графов. Можно предположить, что чем уже класс графов, тем проще их перечисление. На самом деле это не так. Например, для определения числа эйлеровых графов в [57, с. 145] используется формула вида

$$u(x) = x + x^3 + x^4 + 4x^5 + 8x^6 + 37x^7 + 184x^8 + \dots,$$

где $u(x)$ – производящая функция, коэффициенты которой показывают, сколько существует непомеченных графов с числом вершин, равным показателю степени при соответствующем коэффициенте. Формула эта проста, но нахождение коэффициентов – задача сложная.

Теория перечисления графов в настоящее время представляет собой быстро развивающийся раздел дискретной математики. По всем ее направлениям существует обширная литература (в основном зарубежная). Каждый, кто заинтересуется этой теорией, в литературе может найти сведения как о достигнутых результатах в перечислении графов, так и о проблемах, ждущих своих исследователей.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВВЕДЕНИЕ

Все нижеприведенные задания разбиты на группы по 20 дидактически одинаковых задач в каждой группе. Задачи имеют сквозную нумерацию. Это обеспечивает простоту формирования контрольных заданий любого объема: следует лишь указать соответствующие номера задач.

Большинство контрольных работ просты. На их выполнение при хорошо усвоенной теории вполне достаточно 10 – 15 минут, а некоторые работы могут быть выполнены за 6 – 8 минут.

Все задачи закодированы. Следовательно, их можно использовать не только для внешнего контроля, но и для самоподготовки. При этом во время самоконтроля необходимо придерживаться правил ввода ответов в устройство «Символ» (и его компьютерный аналог): числа перед вводом упорядочить по возрастанию, буквы – по алфавиту; не использовать запятые, знаки пробела. Основные правила ввода ответов изложены во введении к теме «Теория множеств» первой части пособия.

Контрольные работы охватывают около 70 % материала обеих частей пособия. Это число обеспечивает минимальный уровень внешнего контроля. Количество контрольных работ можно увеличить за счет упражнений, приведенных в конце соответствующих подразделов. При необходимости каждый преподаватель может подготовить свои дидактические материалы – контрольные задачи, вопросы и упражнения. Закодировать разработанные задания можно с применением устройства «Символ» либо при помощи IBM-совместимого компьютера, для которого имеются программы, обеспечивающие автоматическую выдачу кодов на любой введенный ответ.

1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1.1. Операции над множествами

Найдите элементы множества P, если $A = \{0,2,3,7,8\}$; $B = \{1,3,6,7,9\}$; $C = \{0,1,4,7,8,9\}$; $I = \{0,1,2,\ldots,9\}$.

1. (ЗЕР). $P = A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap C.$
2. (ЗАГ). $P = \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap B.$
3. (830). $P = B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}.$
4. (977). $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup A \cap B.$
5. (039). $P = B \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap B.$
6. (ЕЛО). $P = \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup A \cap B.$
7. (332). $P = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}.$
8. (ВОВ). $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
9. (ЭГО). $P = B \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap B.$
10. (ТОЧ). $P = \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B.$
11. (256). $P = B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B.$
12. (154). $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup A \cap B.$
13. (537). $P = B \cap C \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap B.$
14. (296). $P = \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}.$
15. (РИФ). $P = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{C}.$
16. (ВАН). $P = \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup A \cap \overline{B}.$
17. (372). $P = A \cap B \cup \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B}.$
18. (Д87). $P = B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C.$
19. (ЛУР). $P = A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{C}.$
20. (ЗАЙ). $P = B \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B}.$

1.2. Теоретико-множественные преобразования

Упражнения 21– 40 (в отличие от предыдущих) необходимо выполнять в два этапа. Сначала заданное выражение следует упростить и проинвертировать, а затем найти элементы множества P, выраженного через множества:
$A = \{0, 3, 4, 9\}$; $C = \{0, 1, 2, 4, 7, 8, 9\}$;
$B = \{1, 3, 4, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

21. (280). $\overline{P} = A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap C \cup \overline{B} \cap C.$
22. (Я81). $\overline{P} = \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C.$
23. (РЗХ). $\overline{P} = A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
24. (ФОЗ). $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup A \cap B \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap B.$
25. (ЭХИ). $\overline{P} = A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap C.$
26. (ТБ5). $\overline{P} = A \cap \overline{B} \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap C.$
27. (236). $\overline{P} = A \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{C} \cup A \cap C.$
28. (ТЯЛ). $\overline{P} = A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C.$
29. (8Р8). $\overline{P} = A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
30. (А39). $\overline{P} = A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap C.$
31. (БББ). $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
32. (7СС). $\overline{P} = \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
33. (АУТ). $\overline{P} = \overline{B} \cap \overline{C} \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C.$
34. (ТУФ). $\overline{P} = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B \cup B \cap C \cup \overline{A} \cap C.$
35. (ЗУХ). $\overline{P} = \overline{A} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup A \cap \overline{B}.$
36. (БВК). $\overline{P} = A \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
37. (ЭЛЛ). $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap C.$
38. (569). $\overline{P} = A \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{B} \cap C.$
39. (ЕТМ). $\overline{P} = A \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap \overline{B}.$
40. (ХВП). $\overline{P} = B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C \cup A \cap \overline{C}.$

1.3. Упрощение формул с учетом отношения включения

Упростите следующие выражения с учетом того, что $A \subset B \subset C \subset D \subset I$; $A \neq \varnothing$. При самоконтроле буквы в формулах располагать в алфавитном порядке.

41. (561). $\overline{A} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cup A \cap B$.
42. (ОЗФ). $\overline{B} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cap D \cup \overline{A} \cap B$.
43. (ОИХ). $A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{C} \cup A \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C}$.
44. (ПВХ). $A \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{D} \cup \overline{A} \cap C \cap \overline{D}$.
45. (773). $A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap D \cup B \cap C \cap D$.
46. (УВЗ). $A \cap C \cap D \cup B \cap \overline{C} \cap D \cup B \cap C \cap D$.
47. (ДАЧ). $\overline{A} \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap D$.
48. (ЗАИ). $B \cap D \cup A \cap \overline{C} \cup \overline{C} \cap \overline{D}$.
49. (685). $A \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{B} \cap C \cap D \cup \overline{C} \cap \overline{D}$.
50. (ЕМК). $\overline{A} \cap B \cap C \cup B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{C}$.
51. (557). $A \cap C \cap D \cup \overline{B} \cap C \cap D \cup B \cap \overline{C}$.
52. (ЭММ). $A \cap D \cup B \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cup \overline{B} \cap C \cap D$.
53. (МАЛ). $A \cap C \cup \overline{C} \cap \overline{D} \cup B \cap \overline{C} \cap D$.

54. (268). $A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap D \cup \overline{A} \cap \overline{B}$.

55. (МПО). $\overline{A} \cap B \cup \overline{B} \cap C \cap D \cup \overline{C} \cap D$.

56. (599). $B \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cup \overline{B} \cap C \cup \overline{A} \cap B$.

57. (120). $B \cap \overline{D} \cup \overline{A} \cap B \cap D \cup \overline{B} \cap \overline{D}$.

58. (ОПК). $B \cap C \cup B \cap \overline{D} \cup \overline{C} \cap D$.

59. (ПИХ). $A \cap B \cup B \cap C \cup \overline{B} \cap \overline{C}$.

60. (ААЙ). $\overline{B} \cap \overline{D} \cup B \cap C \cup C \cap D$.

2. БУЛЕВА АЛГЕБРА

2.1. Теорема поглощения

Используя теорему поглощения, упростите следующие булевы выражения.

61. (АСС). $A\,\overline{B} + A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,C\,D$.

62. (АНО). $A\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{C}\,D$.

63. (591). $A\,\overline{B}\,C + \overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,C\,D$.

64. (В92). $A\,B + C\,D + A\,B\,\overline{C}$.

65. (ЛАЗ). $\overline{A}\,B + B\,C + \overline{A}\,B\,\overline{D}$.

66. (КИЧ). $P\,\overline{Q} + R + P\,\overline{Q}\,R\,S$.

67. (А45). $\overline{P}\,Q\,R\,S + Q\,R + P\,Q\,R$.

68. (НТ6). $\overline{X}\,Y\,Z + Z + \overline{X}\,Y$.

69. (ШГ7). $\overline{X}\,Y + \overline{X}\,Y\,Z + Z$.

70. (ТЫМ). $A\,B\,\overline{C} + B\,\overline{C} + D\,E$.

71. (119). $B\,\overline{C} + B\,\overline{C}\,D + A\,B\,\overline{C}\,D$.

72. (БСБ). $A\,C\,D + C\,D + A\,B\,C\,D = \ldots$

73. (ВШВ). $\overline{P}\,Q\,R + Q\,R + S\,T$.

74. (ЛОГ). $P\,\overline{Q}\,R + P\,\overline{Q}\,T + P$.

75. (ШВД). $P\,\overline{Q}\,R + P\,R + R\,T$.

76. (ХВЕ). $\overline{P} + \overline{P}\,Q + \overline{P}\,Q\,\overline{R} + \overline{P}\,T$.

77. (ЕЕЖ). $S\,T\,U + Q\,S\,T\,U + S\,T\,U\,V$.

78. (ЯУЗ). $\overline{A}\,E + \overline{A}\,B\,E + \overline{A}\,C\,E\,F + F$.

79. (ЛУЧ). $\overline{C}\,D\,E + \overline{C}\,D\,\overline{F} + \overline{C}\,D + E\,F$.

80. (АУК). $\overline{A}\,C\,\overline{E} + B\,C\,\overline{E} + C\,\overline{E}\,F + C\,\overline{E}$.

2.2. Инвертирование дизъюнктивных нормальных форм

Не меняя последовательности вхождений аргументов, найдите инверсные выражения с использованием теоремы де Моргана.

81. (ЯЙН). $A\,\overline{B} + B\,\overline{C} + A\,C$.

82. (ЛОС). $A\,B\,C + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

83. (ЛЁН). $A\,C + B\,\overline{C} + \overline{D}$.

84. (35Т). $A\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{D}$.

85. (ТЛЕ). $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{D} + \overline{A}\,D$.

86. (662). $A\,\overline{C}\,\overline{D} + B\,\overline{C} + \overline{B}\,D$.

87. (513). $B\,C + \overline{A}\,\overline{C}\,D + \overline{E}$.

88. (904). $B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{E}$.

89. (Б35). $A\,\overline{C}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{D}\,\overline{E} + B$.

90. (А26). $B\,C + \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{D}$.

91. (457). $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

92. (ЯИМ). $A\,\overline{C}\,\overline{E} + \overline{A}\,C\,D + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

93. (589). $B\,D + \overline{B}\,\overline{C}\,E + \overline{A}$.

94. (ОЗО). $A\,D + B\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{E}$.

95. (961). $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E} + \overline{B}\,\overline{C}\,D + C\,\overline{D}$.

96. (562). $A\,B\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + B\,\overline{C}\,\overline{E}$.

97. (ВИЗ). $B\,C\,D + B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,E$.

98. (ЕВИ). $A\,D + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{E}$.

99. (ОИЙ). $B\,C + \overline{B}\,E + \overline{E}\,F$.

100. (ЯМК). $P\,Q + R\,S + \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{S}$.

2.3. Инвертирование конъюнктивных нормальных форм

Не меняя последовательности вхождений аргументов, найдите инверсные выражения с использованием теоремы де Моргана.

101. (ДД1). $(A + B)(C + \overline{D})(B + \overline{C})$.

102. (МБК). $(A + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{D})\,\overline{E}$.

103. (ФА7). $(B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{D} + E)$.

104. (УЛ5). $(A + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(\overline{A} + B + C + D)$.

105. (ЕТ2). $(\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + C)(\overline{C} + D + E)$.

106. (УЯР). $(P + Q + R)(\overline{P} + \overline{Q} + S)(Q + \overline{S})$.

107. (ММ6). $(\overline{P} + \overline{Q} + S)(Q + \overline{R} + \overline{S})(\overline{P} + \overline{R})$.

108. (ЗИЦ). $(A + \overline{B} + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C} + D)\,E$.

109. (НОН). $(A + \overline{B} + \overline{E})(\overline{C} + \overline{D} + E)(B + \overline{C})$.

110. (ЯШ8). $(\overline{P} + Q + \overline{R})(\overline{Q} + S)(\overline{P} + \overline{Q})$.

111. (ЦВИ). $(P + Q + R + S)(\overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} + \overline{S})(P + \overline{Q})$.

112. (ЭРЭ). $(X + Y + Z)(\overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y)$.

113. (РАП). $(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})(C + \overline{D} + E)$.

114. (ИВВ). $(A + \overline{C})(\overline{C} + \overline{D} + E)(B + \overline{C} + \overline{E})$.

115. (УНЕ). $(A + B + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + D)\,\overline{E}\,\overline{F}$.

116. (ДАК). $(\overline{A} + C + \overline{D})(B + \overline{D} + E)(A + \overline{C} + \overline{E})$.

117. (МОМ). $(A + B)(B + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})\,\overline{E}\,\overline{F}$.

118. (ДЕТ). $(B + \overline{C} + D)(A + \overline{B} + \overline{D})(\overline{E} + \overline{F})$.

119. (ПОД). $(P + \overline{Q} + \overline{R} + \overline{S})(\overline{Q} + R + S + \overline{T})(\overline{P} + Q)$.

120. (ЕНН). $(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})\,E\,F$.

2.4. Нахождение совершенных дизъюнктивных нормальных форм

Найдите десятичные номера минтермов, входящих в булевы функции, зависящие от четырех аргументов. При самоконтроле номера минтермов упорядочить по возрастанию.

121. (ЛВЗ). $f = ABC + \overline{A}CD$.

122. (ТБХ). $f = BD + \overline{A}\,\overline{B}C$.

123. (ДОК). $f = CD + \overline{C}\,\overline{D}$.

124. (КА1). $f = \overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}D$.

125. (ШИО). $f = B\,C + \overline{A}BD$.

126. (ФО5). $f = BD + \overline{A}C$.

127. (ЭКИ). $f = C + \overline{A}BD$.

128. (ЭР7). $f = \overline{A}\,B + \overline{A}D$.

129. (СЕМ). $f = AB + BD$.

130. (А40). $f = AD + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

131. (А2Б). $f = \overline{A}\,\overline{B} + ABD$.

132. (ТТТ). $f = CD + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$.

133. (85С). $f = CD + B\,\overline{C}\,\overline{D}$.

134. (93Т). $f = \overline{A}\,\overline{D} + AD$.

135. (ФПК). $f = A\overline{C} + \overline{A}C$.

136. (ЛЕН). $f = AB + \overline{A}\,\overline{B}$.

137. (ЯСК). $f = BCD + A\overline{B}$.

138. (7Б8). $f = A\,BD + \overline{A}\,\overline{B}D$.

139. (ФАО). $f = A\,C + \overline{B}C$.

140. (УРП). $f = A\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C}$.

2.5. Теорема склеивания

Укажите номера минтермов, к которым можно применить теорему склеивания, и приведите конъюнкцию, получившуюся в результате применения этой теоремы.

141. (АБИ). (1,3,6,10,12,15).
142. (1Б1). (1,5,6,10,12, 15).
143. (ДАХ). (1,6,9,10,12,15).
144. (8БЗ). (0,3,6,9,10,13).
145. (5УЧ). (0,6,7,9,10,12).
146. (ЦТ5). (2,9,10,12,15).
147. (АУК). (0,5,6,9,11,12).
148. (767). (0,3,5,6,11,12).
149. (537). (0,3,5,9,10,14).
150. (ЯВЫ). (0,3,5,9,14,15).
151. (5БН). (0,7,8,11,13,14).
152. (ТБО). (0,1,7,11,13,14).
153. (Б7Б). (0,2,7,11,13,14).
154. (НОМ). (3,4,7,8,13,14).
155. (ЯКТ). (3,4,8,11,13,14).
156. (НАФ). (2,3,4,8,13,14).
157. (114). (1,2,4,7,8,15).
158. (356). (2,4,8,9,15).
159. (ТХЛ). (1,2,6,8,11,13).
160. (УФН). (1,6,8,11,13,14).

2.6. Нахождение сокращенных дизъюнктивных нормальных форм

Найдите сокращенные ДНФ функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число простых импликант и общее число букв.

161. (655). f = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 12, 13, 15).
162. (ЙОГ). f = (4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15).
163. (УТЕ). f = (0, 1, 3, 7, 8, 12, 14, 15).
164. (ЮГ8). f = (0, 1, 4, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 15).
165. (ЦОЦ). f = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15).
166. (454). f = (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).
167. (733). f = (0, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15).
168. (ВЕХ). f = (0, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 14).
169. (965). f = (2, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15).
170. (ЛВЛ). f = (0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12, 14).
171. (ЦАЙ). f = (1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 15).
172. (432). f = (2, 3, 7, 8, 12, 13, 15).
173. (У39). f = (0, 1, 2, 5, 7, 10, 11, 15).
174. (359). f = (2, 4, 7, 9, 11, 13, 15).
175. (ИТВ). f = (1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13).
176. (НАШ). f = (3, 4, 7, 8, 14, 15).
177. (АРЗ). f = (1, 3, 4, 5, 8, 11, 13, 15).
178. (924). f = (0, 1, 3, 7, 8, 11, 12, 14, 15).
179. (ТЕЦ). f = (3, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15).
180. (ПНЕ). f = (0, 1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15).

2.7. Нахождение минимальных дизъюнктивных нормальных форм

Найдите минимальные дизъюнктивные нормальные формы булевых функций, представленных в СДНФ в виде наборов номеров минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число простых импликант, число вхождений аргументов и число простых импликант, содержащих по две буквы.

181. (Н20). f = (0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).
182. (ШТА). f = (0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15).
183. (НОО). f = (1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15).
184. (ЕЕТ). f = (0, 1, 3, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 15).
185. (Э63). f = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15).
186. (ЕУР). f = (1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15).
187. (ЛЭИ). f = (2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15).
188. (ОКО). f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15).
189. (ОЧУ). f = (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12).
190. (93Ш). f = (0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14).
191. (396). f = (0, 1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 15).
192. (75У). f = (3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15).
193. (ЦОН). f = (0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15).
194. (Р93). f = (0, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13).
195. (РЕГ). f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12).
196. (С56). f = (1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14).
197. (Т36). f = (1, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15).
198. (ЦНБ). f = (1, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15).
199. (5ЯН). f = (0, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15).
200. (ОДД). f = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15).

2.8. Нахождение минимальных ДНФ инверсий булевых функций

Найдите минимальные ДНФ инверсий булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число простых импликант и число вхождений аргументов.

201. (ЦОХ). f = (1, 3, 7, 11, 13, 15).
202. (ФОМ). f = (4, 5, 8, 9, 12).
203. (Э26). f = (1, 2, 3, 5, 6, 10, 13, 14).
204. (НИР). f = (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10).
205. (КРА). f = (6, 7, 10, 15).
206. (КОВ). f = (0, 6, 7, 8, 10, 15).
207. (864). f = (0, 1, 6, 10, 13, 14).
208. (9МИ). f = (0, 4, 7, 8, 11, 12, 15).
209. (ЦОБ). f = (0, 1, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 15).
210. (ИВК). f = (0, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 15).
211. (ЧТ5). f = (3, 15).
212. (120). f = (2, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15).
213. (Я79). f = (1, 3, 4, 7, 8, 12).
214. (470). f = (5, 6, 8, 10, 11, 13).
215. (ТАЛ). f = (0,2,4,8,9,11,12,14).
216. (МЯУ). f = (2, 5, 6, 8, 9, 14).
217. (БЕЗ). f = (0, 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15).
218. (ЭВА). f = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14).
219. (Ц20). f = (0, 1, 4).
220. (ПД7). f = (0, 1, 8, 10, 14, 15).

2.9. Нахождение минимальных конъюнктивных нормальных форм

Найдите минимальные конъюнктивные нормальные формы булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов и число знаков дизъюнкции.

221. (550). f = (0, 1, 2, 8, 9, 10, 12, 14).
222. (УФФ). f = (0, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14).
223. (736). f = (0, 1, 4, 8, 9, 11, 12, 14).
224. (ББЛ). f = (5, 7, 8, 10, 12, 14).
225. (232). f = (3, 6, 7, 8, 12).
226. (534). f = (1, 2, 3, 9, 10, 13, 14).
227. (В53). f = (0, 1, 2, 6, 8, 10, 11, 12).
228. (ОРК). f = (0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13).
229. (ФУМ). f = (1, 5, 6, 7, 9, 10).
230. (855). f = (0, 1, 2, 5, 6, 9, 11, 13, 15).
231. (АХС). f = (1, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 15).
232. (АРТ). f = (0, 3, 4, 8, 11, 12, 14).
233. (УНН). f = (1, 2, 6, 10, 11, 14).
234. (РЕД). f = (2, 6, 9, 10, 11, 13, 14).
235. (ДАФ). f = (0, 7, 8, 10, 11, 14, 15).
236. (ТОН). f = (0, 4, 6, 10, 12, 13, 15).
237. (УА1). f = (1, 4, 8, 10, 11, 12, 14).
238. (232). f = (1, 2, 6, 7, 9, 10).
239. (ААЗ). f = (0, 4, 7, 8, 11, 12).
240. (СПИ). f = (1, 5, 8, 11, 13, 14, 15).

2.10. Минимизация ДНФ с учетом неопределенных состояний

Найдите минимальные ДНФ булевых функций, заданных наборами минтермов четырех аргументов. В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Для самоконтроля укажите десятичные номера наборов, на которых Вы доопределите функцию единицами, и укажите число вхождений аргументов минимальной ДНФ.

241. (9МТ). f = (7, 9, 11, 14, 15), [0, 3, 4, 5].
242. (БЦК). f = (7, 10, 14, 15), [2, 3, 5, 6, 13].
243. (ШЕИ). f = (5, 10, 11, 13, 15), [3, 6, 7].
244. (ХАО). f = (3, 6, 7, 13, 15), [2, 5, 11].
245. (РЕ1). f = (3, 4, 9, 11), [5, 7, 10, 15].
246. (К95). f = (1, 4, 7, 10, 15), [5, 13].
247. (67Р). f = (3, 7, 12, 15), [0, 4, 5, 6, 9].
248. (ТАЮ). f = (11, 13, 14, 15), [3, 5, 7, 10].
249. (ПХВ). f = (0, 4, 15), [1, 2, 3, 7, 8, 12].
250. (ТАВ). f = (4, 6, 10, 11), [0, 2, 7, 13, 15].
251. (ШИФ). f = (3, 5, 7, 11), [2, 4, 6, 10, 14].
252. (Т15). f = (3, 4, 5, 10, 11, 12), [0, 2, 9, 13].
253. (62Т). f = (1, 6, 7, 9, 11), [0, 5, 10, 13, 15].
254. (Х14). f = (0, 7, 11, 15), [1, 2, 4, 8, 12].
255. (351). f = (1, 3, 12, 14), [5, 9, 10, 11, 15].
256. (Х64). f = (5, 6, 7, 15), [3, 10, 11, 13, 14].
257. (ЯРК). f = (1, 9, 14, 15), [3, 5, 6, 7].
258. (479). f = (2, 13, 15), [5, 6, 7, 8, 9, 12].
259. (АЗУ). f = (4, 7, 11, 14), [1, 3, 9, 10, 15].
260. (СТМ). f = (1, 2, 6, 7, 14), [3, 5, 10, 11, 13, 15].

2.11. Нахождение минимальных КНФ с учетом неопределенных состояний

Найдите минимальные конъюнктивные нормальные формы булевых функций, заданных наборами минтермов. В квадратных скобках указаны неопределенные состояния. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов минимальной КНФ и число знаков дизъюнкции.

261. (К78). f = (0,8,9,10,11,12,13,14), [1,2,7,15].
262. (ГТО). f = (0,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13), [14,15].
263. (ОТС). f = (1,2,6,9,10,13,14,15), [7,11,12].
264. (УРМ). f = (2,5,8,13,14), [6,7,12,15].
265. (РТТ). f = (2,4,8,12), [3,5,6,14].
266. (2ТО). f = (0,4,9,10,12,14), [3,7,8,15].
267. (213). f = (1,2,8,10,12,15), [0,4,6,9,11].
268. (ИЛО). f = (3,7,8,9,11,13), [0,1,5,12,15].
269. (ТЕХ). f = (6,8,10,12,13), [0,1,2,5,7].
270. (ФСУ). f = (1,2,4,7,8,9,10,12), [3,5,11,14,15].
271. (ТБШ). f = (2,4,10,12,13), [0,3,11,14,15].
272. (ФУМ). f = (2,3,4,9,10,12), [1,7,13,15].
273. (АТ7). f = (6,9,10,11,13,14), [2,3,5,7,15].
274. (Р38). f = (1,2,6,9,10,13,14), [0,3,12,15].
275. (ЗЫШ). f = (3,7,9,13), [1,2,11,15].
276. (273). f = (2,7,9,13,14), [1,4,5,6,8,10].
277. (УДЭ). f = (0,2,4,8,14), [3,5,7,13,15].
278. (У51). f = (3,6,9,13), [5,7,15].
279. (8ЯР). f = (0,4,10,12,15), [5,7,14].
280. (АЕТ). f = (0,2,12,14), [1,5,7,9,10,13].

2.12. Симметрические функции

В нижеприведенных упражнениях 281–300 все функции не являются симметрическими. Но каждая из них содержит импликанту, представляющую собой симметрическую функцию. Укажите десятичные номера тех минтермов, после удаления которых останется симметрическая функция с одиночным a-числом. Все функции зависят от пяти аргументов.

281. (АНЕ). f = (2,3,5,6,9,10,12,14,17,18,20,24,26).
282. (ВОЛ). f = (1,3,5,6,9,10,12,17,18,20,24,29).
283. (ННК). f = (1,7,8,11,13,14,15,19,21,22,25,26,28).
284. (СЯХ). f =(4,7,9,11,13,14,19,20,21,22,25,26,28,30).
285. (534). f = (6,7,11,13,14,15,19,21,22,25,26,27,28,29).
286. (АРО). f = (1,3,5,6,9,10,12,16,17,18,20,24).
287. (09У). f = (3,7,11,12,13,14,19,21,22,24,25,26,28,29).
288. (ЦПН). f = (1,3,5,6,7,9,10,12,13,17,18,20,24).
289. (ЯНД). f = (1,3,4,5,6,9,10,12,17,18,20,24,26,27).
290. (ЧУЛ). f = (3,4,7,11,12,13,14,19,21,22,25,26,27,28).
291. (047). f = (3,7,10,11,13,14,15,19,21,22,25,26,28,29).
292. (ЛЯ2). f = (3,4,5,6,9,10,12,17,18,20,24,30).
293. (ФЭМ). f = (2,7,11,13,14,16,19,20,21,22,25,26,28).
294. (436). f = (2,3,5,6,8,9,10,12,16,17,18,20,24).
295. (НТС). f = (2,3,5,6,9,10,12,13,17,18,20,22,24,27).
296. (К70). f = (7,8,9,11,13,14,19,21,22,24,25,26,28,30).
297. (ФЕН). f = (3,5,6,9,10,11,12,17,18,19,20,24).
298. (5А7). f = (5,7,11,13,14,17,19,21,22,24,25,26,27,28).
299. (ВЕС). f = (7,10,11,13,14,18,19,21,22,23,25,26,28).
300. (МАУ). f = (3,4,5,6,9,10,12,17,18,20,24).

2.13. Числовое представление систем булевых функций

В упражнениях 301–320 системы трех функций f_1, f_2, f_3 представлены числовым способом, т. е. в виде ω-наборов. Найдите минимальные ДНФ этих трех функций. При самоконтроле для каждой из них укажите число вхождений аргументов. Все функции зависят от трех переменных.

301. (П81).	1 2 7 3 2 5 5 2.	**311.** (ГЛА).	5 6 6 5 1 4 0 0.
302. (КВД).	0 5 7 0 0 5 7 6.	**312.** (ТИК).	6 7 6 7 5 4 1 3.
303. (ЭНК).	1 2 1 1 5 4 3 1.	**313.** (ШУК).	1 2 4 5 5 2 1 0.
304. (ЭЭР).	0 1 3 5 7 4 1 3.	**314.** (СКД).	1 1 6 6 7 7 1 1.
305. (ПИН).	2 5 6 2 5 6 7 1.	**315.** (БЛБ).	5 4 3 3 4 5 3 4.
306. (БТР).	6 7 6 5 1 0 2 1.	**316.** (Э64).	6 7 6 7 3 1 6 7.
307. (ВИО).	1 2 3 4 5 0 1 6.	**317.** (ИРР).	0 0 1 2 0 0 3 4.
308. (ШИК).	2 5 6 7 3 4 2 1.	**318.** (ВИД).	2 5 7 7 2 5 5 4.
309. (ВАТ).	1 1 1 0 0 1 7 3.	**319.** (788).	6 2 2 5 4 1 3 2.
310. (ЖУР).	1 0 0 2 2 2 3 3.	**320.** (РИФ).	0 2 3 1 4 7 6 5.

2.14. Булевы уравнения

Найдите минимальные ДНФ неизвестных функций $X(A, B, C)$ в заданных булевых уравнениях. Для самоконтроля наберите найденную минимальную ДНФ, располагая буквы в алфавитном порядке.

321. (РИС). $X + B\overline{C} + AC = B + C$.
322. (У39). $X + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} = B + \overline{A}\,\overline{C}$.
323. (266). $X + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = \overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}$.
324. (570). $X + \overline{A}C = AB + C$.
325. (ХАС). $X + ABC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C = \overline{A} + BC$.
326. (ВКТ). $X + \overline{A}BC = AB + BC$.
327. (МИК). $X + B\overline{C} = \overline{B}C + B\overline{C}$.
328. (НЭП). $X + ABC + A\overline{B}\,\overline{C} = BC + \overline{A}C + A\overline{B}\,\overline{C}$.
329. (ДЕМ). $X + AC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = AC + \overline{A}\,\overline{C} + AB$.
330. (589). $X + AC + \overline{A}B\overline{C} = A + \overline{B}C + B\overline{C}$.

331. (*ОАО*). $X+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,B\overline{C}=\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}$.

332. (*ДАР*). $X+A\overline{B}+\overline{A}\,B=\overline{C}+\overline{A}\,BC+A\overline{B}C$.

333. (БИТ). $X+\overline{A}C+\overline{A}\,\overline{B}=A\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C$

334. (ДИК). $X+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}=ABC+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}$.

335. (АЗО). $X+\overline{A}\,B+\overline{B}\,C=A\overline{B}+\overline{A}C+\overline{A}\,B$.

336. (УТ5). $X+BC+\overline{A}C=C+\overline{A}\,B$.

337. (МАФ). $X+BC+\overline{A}\,\overline{C}=B+\overline{B}\,\overline{C}$.

338. (УКИ). $X+A\overline{C}+A\overline{B}=\overline{C}+A\overline{B}C$.

339. (ОКЗ). $X+\overline{A}C+\overline{B}\,C=\overline{B}+\overline{A}\,BC$.

340. (МТХ). $X+BC+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}C+ABC$.

2.15. Пороговые функции

Пороговую функцию, заданную весами и порогом, представьте в минимальной дизъюнктивной нормальной форме. Для самоконтроля укажите число вхождений аргументов и число конъюнкций, содержащих по две буквы.

341. (РП6). [1, 2, 4, 3; 5].
342. (АП7). [2, 2, 4, 4; 4].
343. (АПК). [4, 7, 5, 2; 6].
344. (5П2). [3, 4, 2, 3; 3].
345. (Ю25). [1, 2, 1, 6; 5].
346. (УРФ). [3, 4, 4, 5; 5].
347. (УП5). [2, 4, 3, 4;5].
348. (КБ8). [5, 6, 4, 6; 5].
349. (ФОМ). [3, 3, 5, 4; 6].
350. (ЖТО). [4, 3, 4, 6; 7].
351. (РЭК). [5, 6, 4, 4; 5].
352. (АЙ7). [4, 7, 6, 5; 5].
353. (АНС). [2, 2, 6, 3; 4].
354. (ААТ). [3, 4, 5, 6; 6].
355. (ОТК). [4, 5, 5, 6; 9].
356. (739). [3, 4, 4, 5; 8].
357. (ВЛБ). [4, 6, 6, 4; 5].
358. (ОРС). [5, 6, 7, 8; 12].
359. (ИРТ). [4, 5, 4, 5; 14].
360. (ТШУ). [5, 5, 4, 4; 13].

2.16. Нахождение производных от булевых функций

В упражнениях 361–380 все функции представлены наборами номеров минтермов, зависящих от четырех переменных *A*, *B*, *C*, *D*. Найдите производные от этих функций, дифференцируя их по переменной *D*. Найденные производные минимизируйте в классе дизъюнктивных нормальных форм. При самоконтроле укажите общее число вхождений аргументов и число знаков дизъюнкции для минимальной ДНФ.

361. (ЦАФ). f = (4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15).
362. (НКЦ). f = (1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15).
363. (ЗЫЙ). f = (5, 6, 7, 9, 11, 13, 15).
364. (778). f = (1, 3, 7, 11, 12, 13, 14, 15).
365. (КЛЕ). f = (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11).
366. (592). f = (3, 7, 11, 13, 14, 15).
367. (ДОО). f = (2, 3, 6, 7, 9, 11, 13, 15).
368. (ФОК). f = (1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15).
369. (ИРО). f = (1, 3, 7, 12, 13, 14, 15).
370. (КБ8). f = (2, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14).
371. (ВЕЧ). f = (2, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15).
372. (ЕКТ). f = (1, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15).
373. (ЭКЗ). f = (0, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15).
374. (759). f = (2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13).
375. (АРК). f = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15).
376. (ПУР). f = (2, 3, 6, 7, 13, 14, 15).
377. (КТУ). f = (3, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15).
378. (368). f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 15).
379. (ИЙП). f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15).
380. (927). f = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15).

3. ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

3.1. Синтез контактных структур

Постройте контактную структуру, управляющую индикатором (электрической лампочкой) при помощи четырех реле *A*, *B*, *C*, *D*. Состояния 7, 8, 9, 10, 11, 12 не используются. Структуру представьте в классе параллельно-последовательных схем для ДНФ и КНФ. Для самоконтроля укажите минимально необходимое число контактов для ДНФ и КНФ. Индикатор горит только при следующих условиях.

381. (960). Включено реле *A*, а *B* выключено, либо включено реле *C*, а *D* выключено.

382. (924). Включено реле *B*, а реле *A* и *D* выключены, либо включено реле *C*.

383. (658). Включено реле *B*, а реле *A* выключено, либо включены реле *A* и *C*, а *D* выключено.

384. (КТВ). Включено реле *A*, а *D* выключено, либо включено реле *B*, а *C* выключено.

385. (СТО). Включено реле *B*, а *C* выключено, либо включено реле *D*, а *A* выключено.

386. (ООФ). Включено реле *A*, а реле *B*, *C* и *D* выключены, либо включено реле *D*.

387. (НЕФ). Включено четное число реле.

388. (ЗЕШ). Включены любые два реле из четырех заданных либо ни одного.

389. (М97). Включены любые два реле из четырех заданных либо любые три.

390. (СЯО). Включены либо все реле, либо ни одного, либо реле *A* и *C* включены, а реле *D* выключено.

391. (ХНО). Включены любые два реле, либо реле *A* включено, а реле *B* и *C* выключены.

392. (ИРА). Включены любые три реле, либо включено реле *C*, а реле *D* выключено.

393. (128). Включено реле *A*, а *C* выключено, либо включено реле *D*, либо все реле выключены.

394. (616). Включены реле *B* и *C*, а реле *A* выключено, либо включены реле *C* и *D*.

395. (435). Включены либо все реле, либо ни одного, либо реле *A* включено, а реле *C* выключено.

396. (РЯД). Включено одно из трех реле *A*, *B*, *C*, либо все четыре реле включены.

397. (ЭОШ). Включены реле *B* и *C*, либо выключены реле *A* и *D*.

398. (364). Выключены два реле *A* и *C*, либо включено реле *D*.

399. (43Ш). Включены реле *B* и *C*, а реле *D* выключено, либо включены все реле, либо ни одного.

400. (ЭЕЕ). Включено четное число реле.

3.2. Построение комбинационной схемы на основе ДНФ булевой функции

Постройте комбинационную схему на элементах И и ИЛИ для минимальной ДНФ функции, заданной набором минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число двухвходовых, число трехвходовых и число четырехвходовых элементов И.

401. (673). f = (0, 3, 7, 11, 13, 14, 15).
402. (ОРЕ). f = (0, 1, 2, 3, 5, 10, 12, 15).
403. (АПИ). f = (1, 2, 4, 7, 9, 10, 12, 15).
404. (АН2). f = (0, 1, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15).
405. (ХЕШ). f = (0, 3, 5, 12, 15).

406. (УРМ). $f = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 15)$.
407. (СТО). $f = (1, 2, 7, 11, 12, 13)$.
408. (ЛОТ). $f = (0, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$.
409. (1П6). $f = (3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 15)$.
410. (ЛЮН). $f = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 13, 14)$.
411. (КАУ). $f = (0, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 15)$.
412. (ОАХ). $f = (0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)$.
413. (УИШ). $f = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15)$.
414. (ТА1). $f = (0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15)$.
415. (ИСК). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 15)$.
416. (ТХН). $f = (0, 1, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15)$.
417. (ДОО). $f = (1, 3, 6, 7, 10, 11, 13, 15)$.
418. (ИЮЛ). $f = (1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15)$.
419. (338). $f = (1, 2, 7, 8, 11, 12, 14)$.
420. (720). $f = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15)$.

3.3. Построение комбинационной схемы на основе КНФ булевой функции

Постройте комбинационную схему на элементах И и ИЛИ для минимальной КНФ функции, заданной набором минтермов четырех переменных. Для самоконтроля укажите число двухвходовых элементов ИЛИ, число трехвходовых элементов ИЛИ и число входов элемента И.

421. (ФИИ). $f = (0, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11)$.
422. (2РЕ). $f = (0, 1, 2, 3, 7, 8, 12)$.
423. (5ЯЗ). $f = (2, 5, 6, 10, 13, 14, 15)$.
424. (ОСИ). $f = (0, 2, 5, 6, 7)$.
425. (ЛВХ). $f = (0, 2, 6)$.
426. (345). $f = (2, 3, 6, 9, 12)$.
427. (ВАК). $f = (0, 1, 4, 13)$.
428. (СУЛ). $f = (2, 3, 4, 9, 11, 13)$.
429. (ЦБН). $f = (7, 10, 11, 14)$.
430. (ТББ). $f = (8, 11, 13, 14)$.
431. (ТАВ). $f = (1, 5, 6, 9, 10, 13)$.
432. (ВХТ). $f = (3, 5, 6, 7, 9, 10)$.
433. (РАФ). $f = (1, 2, 3, 4, 7, 8, 11)$.
434. (АНХ). $f = (1, 2, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 14)$.
435. (ФАИ). $f = (0, 1, 2, 4, 7, 13, 14)$.
436. (835). $f = (6, 8, 9, 10, 11, 12, 14)$.
437. (КВК). $f = (8, 9, 10, 13, 15)$.
438. (РИЛ). $f = (0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12)$.
439. (СУМ). $f = (0, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 13)$.
440. (Р29). $f = (4, 7, 8, 11, 13, 14)$.

3.4. Синтез комбинационной схемы

Комбинационная схема имеет четыре входа и один выход. На вход схемы произвольно поступают двоичные числа. В упражнениях 441–460 указаны десятичные эквиваленты входных двоичных чисел, которым на выходе соответствует высокий (единичный) уровень. При всех остальных входных двоичных числах на выходе имеется низкий уровень. Постройте схему на элементах И и ИЛИ для минимальной ДНФ булевой функции, описывающей работу схемы. Для самоконтроля укажите число двухвходовых элементов И и число трехвходовых элементов И.

441. (ВЛБ). (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15).
442. (ФИС). (3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15).
443. (ЕСТ). (0, 1, 3, 5, 6, 7, 12, 13, 15).
444. (Я61). (0, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12).
445. (НОХ). (0, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15).
446. (903). (0, 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15).
447. (ЖУЧ). (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13).
448. (УМК). (0, 1, 3, 4, 7, 12, 13, 14, 15).
449. (ЯЛЛ). (0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14).
450. (ПАМ). (0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15).
451. (659). (1, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15).
452. (НИО). (0, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15).
453. (20Я). (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15).
454. (ЯС1). (1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15).
455. (922). (0, 1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15).
456. (153). (0, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 15).
457. (ЭВИ). (0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15).
458. (ВТ5). (0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15).
459. (ЯТ6). (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15).
460. (ПГ7). (0, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13).

3.5. Синтез преобразователя кодов

Постройте преобразователь четырехзначного двоичного кода n в пятизначный двоичный код $n + N$ при условии, что $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, а числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 подаваться на вход не будут. Булевы функции, описывающие состояния выходов, представьте в минимальных ДНФ. Для самоконтроля укажите числа a и b, где a – число элементов И, b – число элементов ИЛИ во всей схеме преобразователя. Выход каждого элемента И подключайте только к одному элементу ИЛИ.

461. (ЛТ1). $N = 1$.
462. (982). $N = 2$.
463. (533). $N = 3$.
464. (ЦБИ). $N = 4$.
465. (ТБ5). $N = 5$.
466. (ЕКК). $N = 6$.
467. (АЕ7). $N = 7$.
468. (378). $N = 8$.
469. (УП9). $N = 9$.
470. (ИНО). $N = 10$.
471. (МЭР). $N = 11$.
472. (УХВ). $N = 12$.
473. (ОЙТ). $N = 13$.
474. (ПУФ). $N = 14$.
475. (572). $N = 15$.
476. (ЭТЛ). $N = 16$.
477. (ЛБН). $N = 17$.
478. (92П). $N = 18$.
479. (РЭК). $N = 19$.
480. (ЕТС). $N = 20$.

3.6. Синхронный автомат на *JK*-триггерах

Изобразите схему синхронного автомата на шести *JK*-триггерах. Комбинационная схема, управляющая входами триггеров, реализует систему функций вида:

$J_A = B$; $K_A = B$;
$J_B = A + C$; $K_B = \overline{A} + \overline{C}$;
$J_C = \overline{A} + \overline{B}$; $K_C = A + B$;
$J_D = F$; $K_D = E$;
$J_E = \overline{D} + F$; ; $K_E = \overline{D} + \overline{F}$;
$J_F = \overline{D} + \overline{E}$; $K_F = \overline{D} + E$.

Пусть автомат находится в некотором состоянии, принимаемом за исходное. Если на его синхровход подать один импульс, то автомат перейдет в состояние a. Если подать еще один импульс, то автомат перейдет в состояние b. Найдите десятичные эквиваленты чисел a и b, если исходным является следующее состояние (десятичное).

481. (730). 12.
482. (181). 29.
483. (АТ2). 16.
484. (063). 57.
485. (АБИ). 18.
486. (ОИЛ). 27.
487. (ШОШ). 36.
488. (535). 10.
489. (АЛК). 21.
490. (ВВ8). 45.
491. (ЗЗД). 2.
492. (КПБ). 9.
493. (ЭХС). 30.
494. (56С). 56.
495. (ВШТ). 20.
496. (КВД). 41.
497. (ЕС2). 55.
498. (ВВЛ). 2.
499. (ГОЯ). 35.
500. (МИН). 24.

3.7. Синтез автомата на *JK*-триггерах

Постройте синхронный автомат на *JK*-триггерах для заданной последовательности смены его состояний. Найдите минимальные ДНФ булевых функций, описывающих работу комбинационной схемы, которая управляет входами всех триггеров автомата. Для самоконтроля найдите числа a, b, c, d, где a – число однобуквенных выражений среди шести найденных булевых функций; b – число двухбуквенных выражений; c – число четырехбуквенных выражений; d – число элементов ИЛИ в схеме автомата. При подаче на вход схемы тактовых импульсов последовательность смены состояний имеет следующий вид (нулевое состояние является начальным для всех нижеприведенных последовательностей).

501. (ЛАФ).	0,3,7,4,2,5,6,1.	**511.** (РАН).	0,4,5,6,7,1,2,3.
502. (НП2).	0,4,5,1,6,7,3,2.	**512.** (5ДО).	0,1,2,3,7,6,5,4.
503. (5ТЗ).	0,3,5,6,7,1,2,4.	**513.** (736).	0,1,3,2,6,7,5,4.
504. (994).	0,5,6,7,1,2,4,3.	**514.** (ТОС).	0,5,6,3,4,2,1,7.
505. (615).	0,1,7,6,5,3,2,4.	**515.** (ФЕХ).	0,6,5,7,4,3,1,2.
506. (Б36).	0,5,7,1,6,4,2,3.	**516.** (30Г).	0,5,7,1,2,3,6,4.
507. (557).	0,1,4,6,5,2,7,3.	**517.** (ЭЗУ).	0,5,3,1,6,2,4,7.
508. (РУМ).	0,4,5,1,7,3,2,6.	**518.** (ФЕВ).	0,2,5,6,3,1,4,7.
509. (ПКН).	0,6,2,5,4,7,3,1.	**519.** (ПЗФ).	0,6,1,2,3,4,5,7.
510. (1ДО).	0,4,5,7,1,2,3,6.	**520.** (11Ш).	0,2,3,4,7,6,5,1.

4. КОМБИНАТОРИКА

4.1. Число сочетаний без повторений и число размещений с повторениями

Сколько существует n-разрядных десятичных чисел, в каждом из которых цифра a встречается k раз (числа могут начинаться с нуля), при следующих значениях чисел n, a, k соответственно?

521. (75Г).	5, 3, 2.	**531.** (ИЕР).	6, 7, 3.
522. (ЕЕФ).	6, 5, 4.	**532.** (АЙН).	5, 4, 4.
523. (ББ7).	7, 9, 6.	**533.** (ИЯК).	4, 4, 2.
524. (168).	8, 5, 6.	**534.** (ДИА).	7, 4, 5.
525. (А60).	8, 1, 5.	**535.** (ТЕР).	8, 3, 7.
526. (917).	4, 6, 0.	**536.** (873).	9, 5, 8.
527. (ТОГ).	5, 8, 3.	**537.** (НАР).	10, 4, 8.
528. (ИФА).	6, 3, 5.	**538.** (ИРА).	11, 9, 9.
529. (С99).	9, 2, 7.	**539.** (КОЗ).	6, 6, 2.
530. (КРЕ).	9, 4, 6.	**540.** (АОН).	7, 6, 4.

4.2. Задачи на применение основных формул комбинаторики

541. (2БФ). Сколько слов длины 3 можно составить из букв слова «диффузия», если в каждом из слов все буквы разные?

542. (НАТ). Из алфавита выделили k знаков. Известно, что из них три знака можно выбрать 1140 способами. Найдите k.

543. (ИЦК). Множество содержит семь цифр. Из булеана этого множества удалили все те его элементы, которые содержат три цифры, и удалили все элементы, содержащие по четыре цифры. Сколько элементов осталось?

544. (ЦАИ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры расположены в порядке возрастания или в порядке убывания (с нуля числа начинаться не могут)?

545. (521). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, нет цифр 0 и 9 и чередуются четные и нечетные цифры?

546. (АММ). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых все цифры разные, нет цифр 0, 8, 9 и чередуются четные и нечетные цифры?

547. (ТУК). Сколько существует семизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры расположены в порядке убывания?

548. (ААТ). Сколько существует подмножеств, содержащих по пять элементов множества P, если известно, что существует 84 подмножества, каждое из которых состоит из трех элементов множества P?

549. (ОНА). Сколько существует различных булевых функций четырех аргументов, СДНФ которых содержит не более трех минтермов?

550. (ВРТ). Сколькими способами можно расположить на шашечной доске черную и белую шашки, если ни одно из четырех крайних полей не занимать?

551. (ТРЖ). Множество A состоит из десяти цифр, множество B – из семи букв. Из множества A взяли три цифры, из множества B – две буквы и образовали из них множество C. Сколько существует таких множеств?

552. (304). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых нет четных цифр и нет цифр, являющихся простыми числами?

553. (ВЯЛ). Сколько существует четырехзначных десятичных чисел, начинающихся с какой-либо из цифр 5, 6, 7, 8 и оканчивающихся нулем либо цифрой 9?

554. (РАЦ). Сколько существует пятизначных десятичных чисел, в каждом из которых цифры двух старших разрядов являются четными, а все остальные – нечетными?

555. (65У). Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно переводить с любого из семи языков на любой другой из этих же семи языков?

556. (С23). Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера нужной ему фирмы. Помнит только, что в номере нет нулей и девяток и есть одна цифра 5. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до фирмы путем проб и ошибок?

557. (ЭХА). Сколько существует шестизначных десятичных чисел, если в каждом числе цифры расположены в порядке возрастания и если каждое число начинается с единицы и оканчивается девяткой?

558. (А8В). По окружности расположено 12 точек. Выбрали пять рядом стоящих точек и каждую из них соединили прямыми линиями с каждой из остальных семи точек. Найдите число точек пересечения, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые.

559. (ТР5). Сколько различных восьмизначных кодов можно получить, используя нечетные десятичные цифры и шесть букв некоторого алфавита, если каждый код представляет собой сочетание четырех цифр и четырех букв, где цифры не повторяются и упорядочены по возрастанию, а буквы также не повторяются и упорядочены по алфавиту?

560. (ЮВЗ). Сколько существует восьмизначных десятичных чисел, если в каждом из них три раза встречается цифра 3, три раза – цифра 5 и два раза – цифра 9?

5. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

5.1. Двойственные графы

Постройте граф, двойственный по отношению к заданному, представленному множеством (набором) ребер. В фигурных скобках указаны пары чисел. Это номера вершин, соединенных ребрами. Для двойственного графа определите число ребер, число вершин и число граней.

561. (ВАФ). {{1,2}, {1,6}, {1,7}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {5,6}, {6,7}}.

562. (ШАХ). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,7}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}, {6,7}, {7,8}}.

563. (ИМЗ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,3}, {2,6}, {2,7}, {3,7}, {4,5}, {5,6}, {6,7}}.

564. (ТУЧ). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,8}, {3,4}, {3,7}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {6,7}, {7,8]}.

565. (ЧУК). {{1,2}, {1,5}, {2,3}, {2,5}, {2,6}, {2,7}, {3,4}, {3,7}, {4,7}, {4,8}, {5,6}, {6,7}, {7,8}}.

566. (ЦКК). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {2,7}, {2,8}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {6,7}, {7,8}}.

567. (КИЛ). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,7}, {3,4}, {3,6}, {3,7}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {6,7}, {7,8}}.

568. (АИМ).{{1,2}, {1,7}, {2,3}, {2,7}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {3,7}, {4,5}, {5,6}, {6,7}}.

569. (БВН). {{1,2}, {1,6}, {2,3}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,5}, {5,6}}.

570. (ИИО). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,7}, {4,7}, {4,7}, {5,6}, {6,7}}.

571. (БЫР). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {3,7}, {4,5}, {5,6}, {6,7}, {6,8}, {7,8}}.

572. (НАФ). {{1,2}, {1,3}, {1,7}, {1,8}, {2,3}, {2,7}, {3,4}, {3,6}, {3,7}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {6,7}, {7,8}}.

573. (702). {{1,2}, {1,3}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {2,7}, {3,4}, {4,5}, {5,6}, {6,7}, {7,8}}.

574. (ВСЕ). {{1,2}, {1,3}, {1,3}, {1,8}, {2,3}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}, {5,7}, {6,7}, {7,8}}.

575. (РАД). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {4,5}, {5,6}, {6,7}, {6,8}, {7,8}}.

576. (АОД). {{1,2}, {1,3}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {3,5}, {4,5}, {4,5}, {5,6}, {6,7}, {6,8}, {7,8}}.

577. (НИН). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {2,8}, {3,4}, {3,5}, {4,5}, {4,5}, {5,6}, {5,6}, {6,7}, {6,8}, {7,8}}.

578. (ФАЗ). {{1,2}, {1,3}, {1,8}, {2,3}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {5,7}, {6,7}, {6,8}, {7,8}}.

579. (ЧАС). {{1,2}, {1,3}, {1,8}, {2,3}, {3,4}, {4,5}, {4,5}, {5,6}, {5,8}, {6,7}, {6,8}, {7,8}}.

580. (58Т). {{1,2}, {1,8}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {4,5}, {4,6}, {5,6}, {5,7}, {6,7}, {7,8}}.

5.2. Нахождение простых цепей

Найдите все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 6 графа. В фигурных скобках указаны пары чисел. Это номера вершин, соединенных ребрами. Для самоконтроля укажите число простых цепей, содержащих два ребра; три ребра; четыре ребра; пять ребер.

581. (СУХ). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

582. (ОВН). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,6}, {5,6}}.

583. (АСК). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

584. (ЕЩЁ). {{1,2}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

585. (ИФО). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

586. (КАН). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

587. (КАС). {{1,2}, {1,3}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {5,6}}.

588. (ИЕЛ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

589. (ГЛУ). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

590. (КУБ). {{1,2}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}}.

591. (ПВО). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,6}, {5,6}}.

592. (ОСЭ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {4,6}, {5,6}}.

593. (АСС). {{1,2}, {1,3}, {2,3}, {2,4}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

594. (ИЭХ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

595. (ДАК). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,5}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

596. (ВАП). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

597. (НАЛ). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

598. (ИЯС). {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,6}, {3,4}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

599. (ХВТ). {{1,2}, {1,3}, {1,5}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,6}, {5,6}}.

600. (ЖУЗ). {{1,2}, {1,4}, {2,3}, {2,5}, {2,6}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6}}.

5.3. Декодирование деревьев

По заданному коду дерева постройте его графическое изображение методом Пруфера. Для самоконтроля укажите номера вершин простой цепи, соединяющей вершины 3 и 4. Вершину 3 считать началом простой цепи, вершину 4 – ее концом. В устройство вводите всю простую цепь, начиная с номера 3 и кончая номером 4. Кроме того, укажите число ребер, соединяющих вершины 1 и 9.

601. (ЗИФ). (10, 10, 9, 9, 9, 7, 7, 8).

602. (БК2). (10, 6, 10, 2, 1, 8, 1, 2).

603. (ВРЗ). (2, 3, 10, 5, 5, 10, 7, 7).

604. (344). (4, 4, 5, 5, 7, 4, 5, 9).

605. (ППШ). (2, 5, 10, 2, 10, 5, 10, 8).

606. (ЛЫК). (2, 7, 6, 5, 1, 2, 2, 9).

607. (ББЛ). (2, 9, 9, 10, 5, 10, 8, 7).

608. (ПНИ). (6, 3, 6, 5, 8, 7, 8, 9).

609. (БАО). (9, 9, 9, 10, 10, 8, 8, 8).

610. (ХХН). (9, 9, 10, 10, 5, 6, 7, 8).

611. (БКР). (3, 3, 6, 8, 7, 7, 7, 7).

612. (МЯТ). (10, 10, 10, 5, 6, 9, 9, 9).

613. (371). (1, 1, 7, 10, 10, 8, 8, 9).

614. (ЭШУ). (2, 2, 9, 7, 7, 7, 9, 9).

615. (292). (2, 2, 5, 5, 7, 7, 9, 9).

616. (АЕЦ). (2, 2, 4, 9, 2, 2, 9, 9).

617. (ОДИ). (2, 8, 9, 5, 8, 7, 6, 5).

618. (ОДК). (2, 3, 7, 8, 7, 7, 7, 7).

619. (727). (5, 5, 6, 7, 5, 6, 6, 7).

620. (ЛЫН). (6, 2, 6, 6, 6, 7, 6, 7).

КРАТКО О СИСТЕМЕ «СИМВОЛ»

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ «СИМВОЛ»

1.1. Компьютерное обучение

Известно, что обучение, осуществляемое «вручную», давно исчерпало свои возможности (педагоги-новаторы не в счет, поскольку передать их опыт другим практически не удается). Поэтому существенные достижения в области обучения (в массовых масштабах!) возможны лишь с применением вычислительной техники.

Наибольшее распространение во всем мире получили автоматизированные обучающие системы (АОС), реализуемые на базе универсальных ЭВМ общего назначения. В традиционных АОС на экран монитора выводится учебная информация, например определения, теоремы, правила. После того как учащийся сообщит компьютеру, что изучение закончено, учебная информация на экране сменяется вопросами. Ответы на них учащийся вводит в компьютер при помощи клавиатуры. В случае ошибок на экране появляется «меню» с вариантами дальнейшего продолжения работы: снова прочесть учебный материал, выдать подсказку, разъяснить решение, сообщить правильный ответ и т. д. При отсутствии ошибок на экран выводится новая учебная информация, и цикл ее освоения начинается сначала. Такова общая схема работы всякой АОС.

Конечная цель усилий разработчиков АОС заключается в создании «электронного Аристотеля», то есть электронного учебника, изучение которого происходит в диалоговой среде, моделирующей беседу учителя и ученика. Однако существует большая дидактическая область, где такой диалог не нужен. В основном это относится к тем случаям, когда в обучении доминирует тренаж, т. е. работа над упражнениями, для выполнения которых не требуется никакой новой информации. Примерами могут служить: в начальной школе – заучивание таблиц сложения и умножения (до полного автоматизма воспроизведения), решение типовых задач, освоение операций над многозначными числами, изучение правил грамматики и др.; в старших классах – тождественные математические преобразования, решение различных уравнений, запоминание названий веществ и их химических формул и т. д.; в высшей школе – освоение новых понятий, применение методов расчета, изучение новых математических операций и др.

Во всех этих случаях учащийся работает в режиме самоконтроля (самопроверки). Он должен своими силами выполнять упражнения, в идеале – без малейших подсказок со стороны, и тогда весь диалог с компьютером сведется к однотипным операциям: учащийся при помощи клавиатуры набирает ответ, а компьютер оценивает его в системе «правильно-неправильно».

То же самое имеет место и в случае внешнего контроля, когда знания учащегося оценивает преподаватель (при помощи компьютера). Внешний контроль может быть совмещен с самоконтролем. В этом случае оценкой «правильно» или «неправильно» сопровождается каждый введенный учащимся ответ либо оценка сообщается после ввода ответов на несколько вопросов.

Таким образом, реализацию самоконтроля и внешнего контроля можно рассматривать как предельно упрощенный диалог, в котором на всякое сообщение (ответ) компьютер выдает только один бит информации типа «да-нет», то есть «правильно-неправильно».

1.2. Недостатки систем автоматизированного контроля

Среди существующих компьютерных разработок немало найдется систем автоматизированного контроля, реализующих упрощенный до «правильно-неправильно» диалог, однако применение его сдерживается следующими причинами. Во-первых, анализ правильности ответов осуществляется, как правило, лишь с применением альтернативно-выборочного принципа (когда учащемуся вместе с вопросом сообщается и ряд ответов, среди которых один правильный, а все остальные образуют маскирующий фон, т. е. являются неправильными), а если предусматривается возможность ввода натуральных ответов (то есть без перечисления их вариантов), то самых простых, таких, как число, слово, некоторые их сочетания. Во-вторых, в компьютерной памяти вместе с вопросами хранятся и эталонные ответы. Эти ответы должны быть тщательно засекречены, особенно в системах внешнего контроля, чтобы исключить возможность несанкционированного доступа к эталонам. Однако такие системы являются принципиально «вскрываемыми», и в случае «взлома» защиты внешний контроль лишается всякого смысла. В-третьих, представление компьютерного учебника в полиграфическом исполнении обычно не предполагается, поэтому возможность изучения его без компьютера практически исключена.

Почти всякая АОС разрабатывается с ориентацией на универсальность. Это значит, что программист создает пустую «оболочку», которую затем можно заполнять информацией по любой учебной дисциплине. Преподаватель, заполнивший «оболочку», получает в результате автоматизированный учебный курс (АУК), готовый для непосредственного использования в учебном процессе.

За 40 лет применения компьютеров в образовательных системах созданы тысячи различных «оболочек» (и число их продолжает расти). Но все они, несмотря на универсальность, являются уникальными, не сопрягающимися между собой ни по каким параметрам. Это говорит о том, что в разработке АОС до сих пор нет ни теоретической, ни идеологической базы, нет никакого объединяющего начала. Создать в таких условиях единую универсальную «оболочку», пригодную на все случаи автоматизированного обучения и в то же время простую в освоении, дидактически эффективную и применимую в массовых масштабах во всех учебных заведениях, пока не представляется возможным. В связи с этим разработчики ИДС «Символ» отказались от идеи создания «электронного Аристотеля» и решили всю **проблему автоматизации обучения разделить на уровни и вводить автоматизацию только по степени необходимости**.

1.3. Четыре уровня ИДС «Символ»

ИДС «Символ» **по степени автоматизации** дидактических процессов представлена четырьмя уровнями. На первом из них автоматизирована только одна, но самая массовая операция – контроль правильности выполнения упражнений. Реализуется он в двух вариантах. Первый из них – самоконтроль, второй – внешний контроль. При самоконтроле только учащийся узнает, правильно ли он выполнил упражнение. Внешний контроль всегда осуществляется другим лицом, обычно преподавателем, который может проверить знания учащегося либо непосредственно, либо при помощи компьютера.

На втором уровне реализуется автоматизированная подготовка дидактических материалов. В основном это кодирование упражнений: на каждый введенный ответ компьютер предъявляет на выбор определенное множество кодов, количество которых может быть любым. Кодировщик из этого множества выбирает один или несколько кодов, отбрасывая грубые и труднопроизносимые слова.

На третьем уровне автоматизируются такие операции, как формирование индивидуальных закодированных заданий, ведение электронного журнала, подготовка сводных ведомостей и др.

Четвертый уровень представляет собой АОС, где автоматизация достигает наибольшей степени.

Все уровни сопряжены между собой и могут функционировать самостоятельно. Важнейшим является первый уровень, так как в подавляющем большинстве случаев необходимы только операции самоконтроля и внешнего контроля. Первый уровень чрезвычайно прост во внедрении. Даже учащимся начальных классов общеобразовательных школ для его освоения достаточно 5–7 минут.

1.4. Анализ ответов в ИДС «Символ»

Обычно АОС строятся на принципах антропоморфизма, т. е. в компьютерную память заранее записывают эталонные ответы. Когда учащийся вводит свой ответ для проверки его истинности, компьютер сравнивает введенную информацию с эталоном и выводит на экран сообщение «правильно» или «неправильно».

ИДС «Символ» построена на другом принципе. В ней используются алгоритмы распознавания правильности ответов, семантически совершенно не связанные с условиями задач и формулировками вопросов, благодаря чему одни и те же распознающие алгоритмы можно применять к любым предметным областям независимо от их семантического содержания. Это могут быть математика, русский и иностранный языки, физика, химия, география и т. д. Каждый из алгоритмов реализует критерий, при помощи которого введенный в компьютер ответ признается правильным или неправильным. При этом ответами могут быть отдельные символы, числа и их сочетания, математические и химические формулы, слова и фразы на каком-либо языке и вообще любые последовательности знаков без ограничений по длине и с учетом строгого или частичного порядка, а при необходимости – и без учета порядка. Описанный принцип анализа ответов, чтобы отличать его от антропоморфного, условимся называть алгоритмическим. Очевидно, что алгоритмический принцип обеспечивает возможность реализации и любых выборочных систем.

1.5. Внешний контроль в ИДС «Символ»

Как уже отмечалось, существующие системы компьютерного контроля благодаря антропоморфизму принципиально «вскрываемы», т. е. всегда имеется возможность несанкционированного доступа к засекреченным ответам, хранящимся в компьютерной памяти, и в случае «взлома» результаты внешнего контроля полностью теряют свою информативность. В ИДС «Символ» «взлом» исключен, так как в компьютерной памяти нет эталонных ответов и вскрывать нечего. Благодаря этому обеспечивается высокая информативность внешнего контроля. Кроме того, в ИДС «Символ» предусмотрена система паролей, представляющих собой буквенно-цифровые коды из двух-трех знаков. Пароль формируется компьютером во время ввода ответов. Применяется пароль в основном для реализации внешнего контроля (хотя во многих случаях его можно использовать и для самопроверки). Для этого достаточно перед выдачей задания записать соответствующий пароль в журнал (обычный или электронный). Если учащийся все сделает правильно, то сформированный компьютером пароль совпадет с контрольным. Сообщив этот пароль преподавателю, учащийся тем самым проинформирует его о том, что задание выполнено.

1.6. Специализированное устройство «Символ»

Традиционные АОС строятся только на базе компьютеров. В ИДС «Символ» благодаря полной автономности алгоритмов, применяющихся для анализа ответов и формирования пароля, имеется возможность их реализации не только при помощи компьютера, но и в виде специализированного устройства, подобно обычному микрокалькулятору. Такое устройство создано (Ю.П. Шевелев и Б.Н. Махутов получили патент РФ № 2084962). В течение ряда лет было разработано и изготовлено несколько модификаций этого устройства: «Символ-Р», «Символ-К» (с алфавитом казахского языка), «Символ-С» (с якутским алфавитом), «Символ-вуз», «Символ-ИДС» и др. Из них наиболее совершенными являются устройства «Символ-вуз» и «Символ-ИДС».

Таким образом, в ИДС «Символ» применяются и компьютеры, и специализированные устройства. В этом состоит одно из самых существенных достоинств системы «Символ», поскольку в подавляющем большинстве случаев компьютеры вполне могут быть заменены специализированными устройствами и обычными учебниками, содержащими необходимое число закодированных упражнений. С практической точки зрения это гораздо более экономичный вариант по сравнению с любыми АОС, так как цена специализированных устройств в десятки раз ниже, чем компьютеров, и приобрести устройства могут даже самые малоимущие семьи. Кроме того, специализированные устройства экологически совершенно безопасны, что позволяет применять их не только в вузах и старших классах общеобразовательных школ, но и в начальных классах, а также в подготовительных группах детских садов. Устройства малогабаритны, отличаются малым энергопотреблением (у них батарейное питание), имеют малую массу, а потому мобильны, их можно использовать дома, в классе, в аудитории, в читальном зале. Они могут быть стационарно укреплены на стене в классе, коридоре, аудитории, благодаря чему каждый студент (учащийся) в любое время может воспользоваться ими для проверки правильности выполнения, например, домашних заданий.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ИДС «СИМВОЛ»

2.1. Область применения

Возможность автоматизированного самоконтроля, осуществляемого при помощи компьютеров или специализированных устройств «Символ», обеспечивает простоту организации самостоятельной работы учащихся всех категорий: от дошкольников и школьников начальных классов до студентов высших учебных заведений.

Благодаря самоконтролю учащийся своими силами выявляет и исправляет допущенные ошибки и сдает преподавателю выполненное задание не на проверку, а чтобы отчитаться о проделанной работе. Особенно это важно при выполнении домашних заданий в общеобразовательной школе и во всех формах дистанционного образования, где самостоятельная работа является доминирующей. Кроме того, все учебные пособия системы «Символ» могут быть использованы для самообразования. Упражнения в этом случае выступают в роли критерия, регламентирующего глубину изучения материала.

Первый уровень ИДС «Символ» может быть использован во всех учебных заведениях, а также в отделах охраны труда и техники безопасности предприятий.

2.2. ИДС «Символ» в начальной школе

Благодаря ИДС «Символ» система начального образования приобретает новые качества:

– становится реальностью дифференцированный подход, так как учитель может проводить занятия с учетом психологических особенностей детей, обеспечивая каждому комфортные условия и наиболее приемлемый темп работы;

– если в традиционной системе обучения правильность действий ученика оценивает учитель (или соклассник), в результате чего ошибочные ответы нередко становятся известными всему классу, то с применением устройств «Символ» обеспечивается индивидуальный самоконтроль учащегося. Этим достигается щадящий режим обучения, что особенно важно для легкоранимых детей, испытывающих боязнь дать во всеуслышание неправильный ответ;

– во время работы с устройством у детей развивается устойчивость внимания и улучшается координация движений;

– с применением устройства «Символ» обеспечивается занимательность, благодаря которой даже неинтересные и утомительные упражнения не кажутся такими скучными. Особенно этому способствует возможность узнать, правильно ли выполнено задание, тотчас, а не через день, как это обычно бывает в традиционной системе.

В дидактический фонд системы «Символ» входит учебное пособие для дошкольников и девять пособий для начальной школы: русский язык в четырех частях и математика в пяти частях. Все пособия прошли многолетнюю апробацию в дошкольных учреждениях и в начальных классах средней школы и показали высокую эффективность. Наилучшие результаты в этом направлении достигнуты учителем начальных классов Томского лицея № 7 Мариной Юрьевной Мисс и учителем-логопедом (по подготовке детей к школе) детского сада № 33 города Северска Ольгой Николаевной Василькевич.

2.3. Таблицы сложения и умножения

В первом классе начальной школы значительное внимание уделяется таблице сложения, а во втором – таблице умножения. Чтобы запомнить их на всю жизнь, необходимо выполнить большое число упражнений. Однако механическое заучивание этих таблиц представляет собой настолько скучную и неинтересную работу, что многие дети плохо знают их и в старших классах. В связи с этим в устройстве «Символ» предусмотрен специальный режим работы, применение которого позволяет значительно повысить эффективность использования учебного времени при освоении таблиц умножения и сложения. Работает учащийся следующим образом. Учитель дает ему индивидуальное задание в виде специального кода, например ВМ×ВЧ. Учащийся вводит этот код в устройство, в результате чего на индикаторном табло загорается две цифры. Соответствующее произведение учащийся также вводит в устройство и получает новую пару цифр, если введенный ответ был правильным. В случае неправильного ответа цифры не меняются. Объем работы указан в коде. Обычно это 30–40 элементарных упражнений, но не более 63. Когда заданный объем работы будет выполнен, устройство выведет на индикаторное табло пароль. Получив этот пароль от учащегося, учитель снимет задание с контроля и выдаст новое.

На выполнение задания объемом в 40 элементарных упражнений при плохо усвоенной таблице учащийся может потратить довольно много времени – 10 и более минут. Однако по мере запоминания таблицы это время будет сокращаться. Результат является отличным, если задание в 40 упражнений учащийся выполняет за три минуты. Такая работа, осуществляемая в течение года, обеспечит прочное запоминание таблицы на длительное время.

Таким образом, благодаря устройству «Символ» упорядочивается работа и учащегося и учителя. Учащийся получает вполне определенное задание, которое он даже при незнании таблицы может выполнить, воспользовавшись, например, таблицей, приведенной на тетрадной обложке. Учитель же может ограничиваться лишь эпизодическими устными проверками того, насколько успешно идет освоение таблицы.

2.4. ИДС «Символ» в средней школе. Дидактический фонд

В общеобразовательной средней школе много учебных предметов, и почти все их можно изучать в режиме автоматизированного самоконтроля с применением устройств «Символ». В связи с этим в рамках системы «Символ» подготовлено и издано несколько десятков экспериментальных учебных пособий. Кратко охарактеризуем некоторые из них.

Болтовский В.М. Сборник упражнений по географии. 6 класс. – Томск: Изд-во Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1993. – 66 с.

В сборнике более 600 закодированных вопросов по всем разделам географии 6-го класса и около 300 упражнений на правописание географических терминов. При первоначальном освоении географии каждый учащийся в первую очередь должен приобрести умения и навыки работы с картой, научиться свободно ориентироваться в расположении географических объектов, запомнить названия государств, городов, рек, морей и т. д. Поэтому основная часть вопросов ориентирована на работу с картой.

Лузина Н.И.. Сборник упражнений по математике. 5 класс. Части 1 и 2. – Томск: Изд-во Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1994. – 236 с.

Это совершенно уникальное пособие. В нем около пяти тысяч закодированных упражнений, что в 3–4 раза превышает необходимый минимум годового курса математики для пятого класса. Благодаря этому учитель, может составлять индивидуальные задания различной сложности как по числу упражнений, так и по их трудности.

В дидактическом фонде ИДС «Символ» имеются пособия по математике для поступающих в технические вузы.

Магазинников Л.И. Логарифмические и показательные функции. – Томск: Изд-во Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1997. – 45 с.

Магазинников Л.И. Сборник задач по тригонометрии. – Томск: Изд-во Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1996. – 68 с.

Гриншпон И.Э. Сборник тестовых заданий по математике / И.Э. Гриншпон, Л.И. Магазинников. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2002. – 70 с.

2.5. Дидактический фонд ИДС «Символ» для вузов

Все вузовские пособия, вошедшие в дидактический фонд ИДС «Символ», ориентированы на самостоятельную работу как в очном обучении, так и дистанционном. В каждом из пособий приведено определенное число закодированных упражнений. Подобные пособия разрабатываются в Томске и других городах (Иркутск, Нижневартовск, Ангарск, Магнитогорск, Воронеж и др.). Примерами являются следующие пособия.

Магазинников Л.И. Высшая математика 1. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники: 1998. – 191 с.

Магазинников Л. И. Высшая математика 3. Функции комплексного переменного. Ряды. Интегральные преобразования. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники: 1998. – 205 с.

Магазинников Л.И. Высшая математика 4. Теория вероятностей. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники: 1998. – 118 с.

Шевелев Ю.П.. Высшая математика 5. Дискретная математика. Теория множеств. Булева алгебра. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2000. – 114 с.

Трубицын А.М.. Электрорадиоматериалы. Диэлектрики. – Томск: Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1995. – 76 с.

Каминская С.С. Допуски и посадки в примерах и задачах. – Томск: Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1995. – 83 с. Вместе с этой книгой выпущено четыре рабочих тетради с контрольными заданиями в четырех вариантах.

Махутов Б.Н.. Теоретические основы информатики. – Нижневартовск: Изд-во Нижневартовского пед. ин-та, 1999. – 123 с.

Э.Н. Подскребко, Н.Ф. Пестова. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 1996. – 160 с.

2.6. Перспективы развития ИДС «Символ»

Работа над системой «Символ» ведется в течение многих лет. За это время подготовлено и опубликовано более пяти десятков пособий для вузов, общеобразовательных школ и дошкольных учреждений, разработаны и усовершенствованы алгоритмы распознавания правильности натуральных ответов, не требующие базы эталонов; создано несколько десятков различных вариантов экспериментальных устройств «Символ» (специализированных и компьютерных), причем некоторые из них были доведены до серийного выпуска; получено пять авторских свидетельств и один патент на изобретение.

Дальнейшие исследования ведутся в следующих основных направлениях:

1) разработка новых алгоритмов распознавания правильности натуральных и выборочных ответов с учетом их многовариантности, т. е. неоднозначности представления, и без использования принципа антропоморфизма. Совершенствование системы паролей для реализации внешнего контроля в системах очного, заочного и дистанционного образования;

2) техническая реализация новых алгоритмов в виде специализированных устройств и в программно-аппаратном представлении. Область применения системы «Символ» в принципе не ограничена, но только в том случае, если все алгоритмы – и в специализированных устройствах, и в компьютерных аналогах – работают абсолютно одинаково. В связи с этим программная реализация распознающих алгоритмов (без аппаратной части) не планируется по двум главным причинам. Во-первых, чтобы исключить влияние компьютерных вирусов. Во-вторых, чтобы исключить всякое несанкционированное вмешательство в работу распознающих алгоритмов, например с целью их совершенствования;

3) разработка дидактических материалов. При массовом распространении специализированных устройств и их компьютерных аналогов любой учебник приобретет положительное качество, если в него включить кодированные вопросы, задачи и упражнения. Это относится не только к школьным и вузовским учебникам, но и к детским популярным изданиям, предназначенным для дополнительных развивающих занятий с детьми. Примером могут служить прекрасные задачники Григория Остера, в которых нет «символовских» кодов, поэтому их можно с увлечением читать, но не решать, так как проверить правильность ответа невозможно, следовательно, и решать задачу смысла нет. Если же дать открытый ответ для самоконтроля – то же самое: зачем решать, если ответ уже известен? Как много выиграли бы эти книги, будь у них коды для каждой задачи!

4) разработка АОС на базе распознающих алгоритмов системы «Символ». Наиболее простым является вариант, когда закодированные учебные пособия без каких-либо изменений записываются в компьютерную память. Так как вместе с условиями упражнений в памяти находятся и коды, то работа учащегося упрощается: ему не надо набирать коды заданий. Эти коды на экран не выводятся, а сразу поступают на блок распознавания правильности ответов. Упрощается и автоматизация кодирования, так как не требуется проверять коды на благозвучность, произносимость и др. (все равно их никто не видит).

Подводя итог, отметим следующее. Во все времена в любой системе обучения явно или неявно существовала (и сейчас существует) проблема типа «да-нет», т. е. «правильно-неправильно». Во всех случаях, когда учащийся отвечает на какой-либо вопрос или решает задачу, на каждом относительно самостоятельном этапе ему необходим этот бит информации. В традиционной системе его сообщает преподаватель. Но при массовом обучении возможности преподавателя невелики. ИДС «Символ» любой обучающей системе придает завершенность – оперативно обеспечивает учащегося необходимыми ему битами и избавляет от этой рутины преподавателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А. Логика. Автоматы. Алгоритмы / М.А. Айзерман, Л.А. Гусев, Л.И. Розоноэр, И.М. Смирнова, А.А. Таль. – М.: Физматгиз, 1963. – 556 с.
2. Аршинов М.Н. Коды и математика. Рассказы о кодировании / М.Н. Аршинов, Л.Е. Садовский. – М.: Наука, 1983. – 143 с.
3. Березина Л.Ю. Графы и их применение. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.
4. Бородин Л.Ф. Введение в теорию помехоустойчивого кодирования. – М.: Сов. радио, 1968. – 408 с.
5. Борунова С.Н. Орфоэпический словарь русского языка: Произношение, ударение, грамматические формы. – М.: Рус. яз., 1989. – 688 с.
6. Бохманн Д. Двоичные динамические системы / Д. Бохманн, Х. Постхоф . – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.
7. Вавилов Е.Н. Синтез схем электронных цифровых машин / Е.Н. Вавилов, Г.П. Портной. – М.: Сов. радио, 1963. – 438 с.
8. Вавилов В.В. Задачи по математике. Алгебра / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.И. Олехник, П.И. Пасиченко. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
9. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976. – 48 с.
10. Виленкин Н.Я. Комбинаторика.– М.: Наука, 1969.–328 с.
11. Виленкин Н.Я. Математика / Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало, В.Б. Рождественская, Л.П. Стойлова. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.
12. Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
13. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972. – 288 с.
14. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962. – 476 с.
15. Голышев Л.К. Электронные вычислительные машины. – Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1963. – 426 с.
16. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986. – 311 с.
17. Горский Д.П. Краткий словарь по логике / Д.П. Горский, А.А. Ивин, А.Л. Никифоров – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.
18. Грейнер Г.Р. Проектирование бесконтактных управляющих логических устройств промышленной автоматики / Г.Р. Грейнер, В.П. Ильяшенко, В.П. Май Н.Н. Первушин, Л.И. Токмакова. – М.: Энергия, 1977. – 384 с.
19. Давыдов Э.П. Игры. Графы. Ресурсы. – М.: Радио и связь, 1981. – 113 с.
20. Дадаев Ю.Г. Арифметические коды, исправляющие ошибки. – М.: Сов. радио, 1969. – 168 с.
21. Дынкин Е.Б. Математические задачи / Е.Б. Дынкин, С.А. Молчанов, А.Л. Розенталь, А.К. Толпыго. – М.: Наука, 1971. – 79 с.
22. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – М.: Наука, 1977. – 80 с.
23. Игнатьев Е.И. Хрестоматия по математике. – Ростов-на-Дону: Книжное изд-во, 1995. – 616 с.
24. Калбертсон Дж. Математика и логика цифровых устройств. – М.: Просвещение, 1965. – 267 с.
25. Калужнин Л.А. Преобразования и перестановки / Л.А. Калужнин, В.И. Сущанский. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
26. Колдуэлл С. Логический синтез релейных устройств. – М.: ИЛ, 1962. – 737 с.
27. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. – М.: Наука, 1988. – 287 с.
28. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. – М.: Наука, 1975. – 720 с.
29. Корниенко А.В. Дискретная математика. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 1996. – 95 с.
30. Криницкий Н.А. Автоматизированные информационные системы / Н.А. Криницкий, Г.А. Миронов, Г.Д. Фролов. – М.: Наука, 1982. – 381 с.
31. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.
32. Марченков С.С. Замкнутые классы булевых функций. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 128 с.
33. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320 с.
34. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. – М.: Наука, 1985. – 128 с.
35. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова.– М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
36. Никольская И.Л. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1981. – 127 с.
37. Ожегов С.И. Толковый словарь русского языка / С.И. Ожегов, Н.Ю. Шведова. – М.: АЗЪ, 1995. – 928 с.
38. Оре О. Графы и их применение. – М.: Мир, 1965. – 174 с.
39. Папернов А.А. Логические основы цифровых машин и программирования. – М.: Наука, 1968. – 591 с.
40. Политехнический словарь / Гл. ред. И.И. Артоболевский. – М.: Сов. энциклопедия, 1977. – 608 с.
41. Реньи А. Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980.–376 с.
42. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989. – 352 с.
43. Самофалов К.Г. Электронные цифровые вычислительные машины / К.Г. Самофалов, В.И. Корнейчук, В.П. Тарасенко. – Киев: Вища школа, 1976. – 479 с.
44. Селперс Ф. Методы обнаружения ошибок в работе ЭЦВМ. – М.: Мир, 1972. – 310 с.
45. Сешу С. Линейные графы и электрические цепи / С. Сешу, М.Б. Рид. – М.: Высшая школа, 1971. – 448 с.
46. Смыслова З.А. Математическая логика и ее приложения. – Томск: Изд-во Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1994. – 111с.
47. Советский энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1985. – 1600 с.
48. Супрун Б.А. Первичные коды. – М.: Связь, 1970.– 161 с.
49. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и 0,1-матрицы. – М.: Наука, 1985. – 191 с.
50. Триханов А.В. Алгоритмизация и микропрограммирование операций ЭВМ. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 1995. – 107 с.
51. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 207 с.
52. Фистер М. Логическое проектирование цифровых вычислительных машин. – Киев: Техніка, 1964. – 382 с.
53. Флорин Ж. Синтез логических устройств и его автоматизация. – М.: Мир, 1966. – 375 с.
54. Форд Л. Потоки в сетях / Л.Форд, Д. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
55. Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас. – М.: Мир, 1977. – 261 с.
56. Фудзисава Т. Математика для радиоинженеров: Теория дискретных структур / Т. Фудзисава, Т. Касами. – М.: Радио и связь, 1984. – 240 с.
57. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М.: Мир, 1977. – 324 с.
58. Шарапов А.В. Примеры решения схемотехнических задач. – Томск: Изд-во Том. акад. систем упр. и радиоэлектроники, 1994. – 125 с.
59. Шалыто А.А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов. – СПб.: Наука, 2000. – 780 с.
60. Шевелев Ю.П. Сборник задач по логическому проектированию цифровых вычислительных устройств. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 1979.– 228 с.
61. Энциклопедия кибернетики. Том 1. – Киев: Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии, 1975. – 608 с.
62. Энциклопедия кибернетики. Том 2. – Киев: Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии, 1975. – 620 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ