FAYZIYEV R.A.

MIQDORIY TADQIQOT TEXNIKALARI

TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

R.A. FAYZIYEV

MIQDORIY TADQIQOT TEXNIKALARI

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan

TOSHKENT – 2021

UO'K: 330.4.001.57
KBK 65.9(2)
F 56

R.A.Fayziyev. Miqdoriy tadqiqot texnikalari. O'quv qo'llanma. – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2021 – 188 b.

ISBN 978-9943-7664-8-8

Miqdoriy tadqiqot texnikalari fanini o'zlashtirishda quyidagi masalalarni o'rganish ko'zda tutilgan: matematik analiz va chiziqli algebra elementlari, klassik optimallashtirish usullari, chiziqli dasturlash, qavariq dasturlash, o'yin nazariyasi elementlari, ehtimollar nazariyasi, matematik statistika, tasodifiy jarayonlar nazariyasining elementlari, investisiyani loyihalashtirishda noaniq to'plamlar nazariyasini qo'llashning asoslari.

Ushbu o'quv qo'llanma ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlarni rivojlantirish bo'yicha qarorlar qabul qilishda hamda boshqarishda o'rganilayotgan muammo yoki muammolarni miqdoriy tahlil qilish imkoniyatini beradi hamda iqtisodiyotidagi hodisa va jarayonlar hamda ularning analitik echimlarining turli variantlarini shakllantiradi.

***

При изучении дисциплины количественных методов исследования рассматриваются следующие вопросы: математический анализ и линейные элементы, классические методы оптимизации, линейное программирование, выпуклое программирование, элементы теории игр, Теория вероятностей, математическая статистика, элементы теории случайных процессов, основы применения теории неопределенных множеств в инвестиционном проектировании.

Данное учебное пособие предоставляет возможность количественного анализа проблем или проблем, изучаемых в процессе принятия решений и управления развитием социально-экономических процессов, а также формирования различных вариантов их аналитического решения.

***

In mastering the science of quantitative research methods, the following issues are considered to be studied: mathematical analysis and linear Al elementlari elements, classical optimization methods, linear programming, convex programming, elements of the game theory, Probability Theory, mathematical statistics, elements of the theory of random processes, the basics of the application of the theory of uncertain sets in investment design.

This science provides an opportunity for quantitative analysis of the problems or problems studied in decision-making and management in the development of socio-economic processes, as well as the formation of various variants of their analytical solutions.

UO'K: 330.4.001.57
KBK 65.9(2)

ISBN 978-9943-7664-8-8

KIRISH

Fanni o‘qitishdan maqsad – talabalarga miqdoriy tadqiqot usullari va muhim mavzularni qamrab oladigan miqdoriy tadqiqot nazariyasi bilan tanishtirishga qaratilgan. Talabalarga miqdoriy tadqiqot usullari bo‘yicha so‘nggi o‘zgarishlarni tushunish uchun zarur bilimlarni beradi hamda ko‘nikma va malaka shakllantiradi. Talabalarga amaliy miqdoriy tadqiqot tahlilni o‘tkazishda yordam beradi, chunki amalga oshiri-layotgan usullar to‘g‘risida asosli mulohazalar qilish uchun miqdoriy tadqiqot nazariyada keng qo‘llaniladigan matematik analiz va chiziqli algebra elementlari, klassik optimallashtirish usullari, chiziqli dasturlash, qavariq dasturlash, o‘yin nazariyasi elementlari, ehtimollar nazariyasi, matematik statistika, tasodifiy jarayonlar nazariyasining elementlari, investitsiyani loyihalashtirishda noaniq to‘plamlar nazariyasini qo‘llashning asoslarini tushunish muhimdir.

Fanning vazifasi – talabalarga ma’lumotlarni tahlil qilishning birlamchi usullari, statistik gipotezalarni sinash, shuningdek, asosiy miqdoriy tadqiqot usullsrini, qo‘llanish doirasi haqida tasavvurga ega bo‘lishiga: birlamchi ma’lumotlarni tahlil qilish va ekonometrik usullarni real statistik ma’lumotlarni tahlil qilishga imkon beruvchi statistik paketlarda ishlash ko‘nikmalarini hosil qilishdan; turli iqtisodiy matematik modellar yordamida tahlil qilish va prognozlashni amalga oshirish yo‘llarini, iste’molchilar va ishlab chiqaruvchilar bozorida vujudga kelishi mumkin bo‘lgan turli vaziyatlarni mantiqiy evristik va iqtisodiy matematik modellar orqali tahlil qilishni amalga oshirish, iqtisodiyotning turli holatlarni tahlil qilish va qarorlar qabul qilishni o‘rgatishdan iboratdir.

Mazkur o‘quv qo‘llanma iqtisod yo‘nalishida ta’lim oluvchi talabalarga «Miqdoriy tadqiqot usullari» fanini o‘rganish uchun mo‘ljallangan. Oquv qo‘llammada miqdoriy tadqiqot usullari o‘z aksini topgan. Har bir mavzu uch qismdan iborat bo‘lib, avvalo, qisqacha mavzuga tegishli nazariya bayon qilingan, so‘ng mavzuga tegishli nazariy va amaliy masalalami yechish jarayoni yoritilgan va nihoyat, mustaqil ishlash uchun masalalar keltirilgan.

Miqdoriy tadqiqot usullari hozirda iqtisodiyotning barcha tarmoqlarida keng qo‘llanilmoqda. Iqtisodiyot yo‘nalishi bo‘yicha olingan Nobel mukofotlarining sovrindorlari ham ushbu fanning ayrim yo‘nalishlarini iqtisodiy jarayonlarga qo‘llab, makroiqtisodiy ko‘rsatgichlarni matematik modellarini tahlil qilgandan so‘ng avvaldan bashorat qilish usullarini yaratganlari uchun jahon olimlari tomonidan tan olinmoqda.

Yuqorida aytilgan fıkrlardan ko‘rinib turibdiki, hozirgi zamon iqtisodchisi ushbu fan asoslarini chuqur o‘rganib iqtisodiyotga qo‘llash usullari haqida yaxshi tasavvuıga ega bo‘lsalargina iqtisodiyotning jahon iqtisodiyoti, xalqaro savdo, moliyaviy bozorlar, sug‘urta masalalari va boshqa sohalarda tasodifiy jarayonlar va hodisalami mikro va makroiqtisodiy ko‘rsatgichlarga ta’sirini chuqur tahlil qila olishlari mumkin.

Ikkinchi tarafdan esa iqtisodiy statistikani va ekonometrikaning asoslarini miqdoriy tadqiqot usullari tashkil qilishini eʾtiborga olsak, ushbu fanni o‘rganish qanchalik muhimıigini yanada yaqqol tasavvur qilamiz.

Ushbu o‘quv qo‘llanmadan mamlakatimizdagi barcha iqtisodiy yo‘nalishda tahsil olayotgan talabalar foydalanishlari mumkin.

1-BOB. MATEMATIK ANALIZ VA CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI

1.1. To‘plam nazariyasi asoslari. Ikki o‘zgaruvchining funksiyalari va ularning to‘plam (chiziq) darajalari.
1.2. Xususiy hosilalar, gradiyent va differentsial.
1.3. Bir jinsli funksiyalar. Noaniq funksiya teoremasi.

1.1. To‘plam nazariyasi asoslari. Ikki o‘zgaruvchining funksiyalari va ularning to‘plam (chiziq) darajalari.

“To‘plam” va “to‘plam elementlari” boshlang‘ich tushunchalar bo‘lib, u misollar orqali tushuntiriladi.

Massivdagi uylar to‘plami, do‘konga keltirilgan ma’lum bir mahsulotlar to‘plami, nuqtalar to‘plamidan iborat to‘g‘ri chiziqni misol keltirish mukin.

“To‘plam deganda, umuman olganda, bitta deb o‘ylash mumkin bo‘lgan hamma narsani, ya’ni ma’lum bir qonun yordamida bir butunga bog‘lanishi mumkin bo‘lgan har qanday ma’lum elementlarning majmuasini tushunaman» degan cheksiz to‘plamlar nazariyasi yaratuvchisi G. Kantor.

To‘plamning tashkil etuvchilari uning elementlari deyiladi. To‘plamni katta harflar bilan (M, A, v, ...), uning elementlarini esa kichik harflar bilan (t, a, Ь, ...) belgilash qabul qilingan. Birorta t ob’yekt M to‘plamning elementi ekanligi kabi yoziladi va “M ga m tegishli” deb o‘qiladi. Birorta z ob’yekt M to‘plamning elementi emasligi kabi yoziladi va “M ga z tegishli emas” deb o‘qiladi.

Agar *m, n , p, q*, ... obyektlar M to‘plamni tashkil qilsa, bu holat bunday yoziladi: $M = \{m,n, p,q,..\}$.

To‘plam uning elementlaridan, ya’ni uning elementlarini sanashdan iborat ro‘yxat ko‘rinishida bo‘lishi mumkin.

Ro‘yxat tugallangan (masalan, $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$), shuningdek, cheksiz bo‘lishi mumkin:

a) ma’lum bir guruh talabalari to‘plami (ularning familiyasi haqiqatdan ro‘yxatni tashkil qiladi);

b) teatrga tashrif buyurganlar tomonidan garderobga topshirilgan barcha paltolar to‘plami (shunday paltolar ro‘yxati tuzilishi mumkin);

d) o‘nlik sanoq sistemasi raqamlari to‘plami:

$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

e) 1 dan k gacha bo‘lgan barcha natural sonlar to‘plami:

$$N_k = \{1, 2, ..., \kappa\};$$

f) barcha natural sonlar to‘plami:

$$N = \{1, 2, 3, ...\ n, \dots\},$$

g) barcha butun sonlar to‘plami:

$$Z = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\};$$

h) barcha ratsional sonlar to‘plami:

$$Q = \left\{0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, \frac{3}{1}, -\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \dots\right\}$$

(agar Q to‘plam elementlarini yozishda avval uchragan kasr sonlar paydo bo‘lsa o‘chiriladi yoki yozilmaydi (masalan, $-\frac{2}{2}=1, \frac{3}{3}=1$);

i) qishloq suv havzasida suzayotgan g‘ozlar (o‘rdaklar) to‘plami.

$\frac{p}{q}$, ya’ni $r=\frac{p}{q}$ ko‘rinishidagi son ratsional son r deb ataladi, bunda $p \in Z, q \in N.$

Barcha ratsional sonlar to‘plami Q bilan belgilanadi.

$r_1=\frac{p_1}{q_1}, r_2=\frac{p_2}{q_2}$ kasrlar o‘zaro teng va bitta ratsional sonni ifodalatdi, agar $\frac{p_1}{q_1}$ – qisqarmaydigan kasr, $p_2=\alpha p_1$, $q_2=\alpha q_1$, α – nolga teng bo‘lmagan butun son bo‘lsa. Shuning uchun ratsional son $r=\frac{p}{q}$ deb bo‘linmaydigan kasr son tushuniladi.

Q to‘plami elementlari ro‘yxati (ya’ni barcha ratsional sonlar ro‘yxati) quyidagicha tuzilishi mumkin.

Dastlab, har bir natural sonning bittaga teng bo‘luvchisi bo‘lishi uchun barcha natural sonlar to‘plamini yozamiz:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, ..., \frac{n}{1}, ...,$$

So‘ngra har bir natural sonning ikkiga teng bo‘luvchisi bo‘lishi kerak:

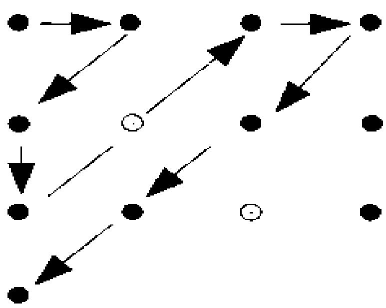
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, ..., \frac{n}{2}, ...,$$

va hokazo. Cheksiz sonli qator va ustunlar bilan quyidagi jadvalni (matritsani) olamiz.

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \dots & \frac{n}{1} & \dots \\
\frac{1}{2} & \cancel{\frac{2}{2}} & \frac{3}{2} & \cancel{\frac{4}{2}} & \frac{5}{2} & \dots & \frac{n}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cancel{\frac{3}{3}} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \dots & \frac{n}{3} & \dots . \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{1}{k} & \frac{2}{k} & \frac{3}{k} & \frac{4}{k} & \frac{5}{k} & \dots & \frac{n}{k} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Ushbu jadvalda biz faqat qisqarmaydigan kasrlarni qoldiramiz va barcha qisqaradigan kasrlarni olib tashlaymiz (masalan, ularni o‘chirib tashlaymiz).

Shubhasiz, yangi jadvalning har qanday elementi ijobiy ratsional sondir. Aksincha, har qanday ijobiy ratsional son yangi jadvalda qisqarmaydigan kasr sifatida mavjud bo‘lishi shart.



Yangi jadval elementlarining cheksiz ro‘yxatini ushbu sxema bo‘yicha tuzamiz:

Ushbu ro‘yxatdagi har bir ijobiy ratsional raqam oldida minus belgisi bilan bir xil sonni qo‘yib, nolni qo‘shsak, biz Q to‘plami elementlarining to‘liq ro‘yxatini olamiz:

$$\boldsymbol{Q} = \left\{0, -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{2}{1}, \cdots\right\},$$

Ya’ni barcha ratsional sonlarning to‘liq ro‘yxatini tuzamiz.

Chekli elementlarni o‘z ichiga olgan to‘plam chekli, aksincha, cheksiz deyiladi. Misollarda *а-г*, chekli to‘plamlar, *д-ж*, cheksiz to‘plamlar berilgan.

To‘plam tarkibida hech qanday element bo‘lmasa, bo‘sh to‘plam deyiladi. Bo‘sh to‘plam “Ø” belgisi bilan belgilanadi.

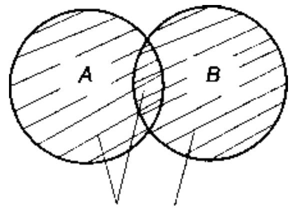
A va *M* ikkita to‘plam bo‘lsin va *A* to‘plamining barcha elementlari *M* to‘plamining elementlari bo‘lsin, keyin *A* to‘plam *M* to‘plamning quyi to‘plami (yoki qismi) deb nomlanadi, u quyidagicha yoziladi: $A \subseteq M$ va u “*A* kiritilgan *M* ga” deb o‘qiladi . Xususan, agar $m \in M$ bo‘lsa, $\{m\} \subseteq M$ bo‘ladi. *M* to‘plam o‘zining quyi to‘plami bo‘ladi: $M \subseteq M$. Bo‘sh to‘plam $\varnothing$ va *M* to‘plam *M* to‘plamning o‘zining to‘plamlari emas, *M* to‘plamning qolgan barcha quyi to‘plamlari o‘zining to‘plamlari deyiladi.

M to‘plamining barcha to‘plam osti to‘plamlari 2^M belgisi bilan belgilanadi.

A va *B* to‘plamlar o‘zaro teng deyiladi, agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa. To‘plamlarning tengligi quyidagicha ifodalanadi: *A*=*B*.

Agar $B \subseteq M$ va $B \neq M$ bo‘lsa, quyidagi yozuv qo‘llaniladi: $B \subset M$.

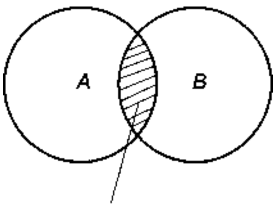
To‘plamlar ustida amallar. *A* va *B* to‘plamlarning birlashmasi (yig‘indisi) deb *A* va *B* to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan barcha elementlardan tashkil topgan *C* to‘plamga aytiladi va $A \bigcup B$ bilan belgilanadi (1-rasm, shtrixlangan soha).



$C = A \cup B$
1-rasm

$$C = A \bigcup B = \{x \mid x \in \vee x \in B\}$$

“$\vee$” belgisi bog‘lovchi-ajratuvchi ma’noda tushuniladigan “yoki” bog‘lovchisini anglatadi.



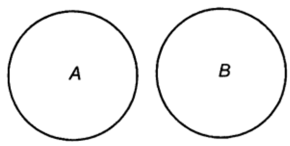
$C = A \cap B$
2-rasm

Ikkita *A* va *B* to‘plamlarning kesishishi *A* va *B* to‘plamlarning har biriga tegishli bo‘lgan barcha elementlardan tashkil topgan *C* to‘plamdir ($A \cap B$ belgisi bilan belgilanadi), boshqacha qilib aytganda *A* va *B* to‘plamlarning kesishishi ushbu to‘plamlarning umumiy qismidir (2-rasm, shtrixlangan soha).

$$C = A \cap B = \{x \mid x \in \wedge x \in B\}$$

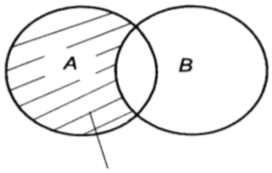
“$\wedge$” belgisi “va” bog‘lovchisini bildiradi.

Masalan, barcha kvadratlarning to‘plami barcha romblar to‘plami va barcha to‘rtburchaklar to‘plamining kesishmasi. Agar A va B to‘plamlarda umumiy elementlar bo‘lmasa, u holda ular kesishmasligi aytishadi (bo‘sh kesishmaga ega bo‘ladi)(3-rasm).



3-rasm

Umumiy holda, $A_i (i \in I)$ to‘plamlar kesishishi $A_i (i \in I)$ to‘plamlarning har biriga tegishli bo‘lgan barcha elementlardan tashkil topgan *C* ($\bigcap_{i \in I} A_i$ belgisi bilan belgilanuvchi) to‘plamdir.

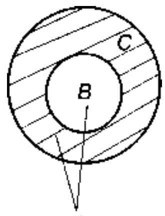


$C = A \setminus B$

4-rasm

Ikki A va B to'plamlarning farqi "$A \setminus B$" belgisi bilan belgilanadigan va A to'plamning B to'plamiga kirmaydigan barcha elementlaridan iborat bo'lgan C to'plamdan iborat boladi (4-rasm, shtrixlangan soha).

A to'plami va uning kichik to'plam osti B orasidagi farq A to'plamidagi B to'plam ostining to'ldiruvchisi deb ataladi (5-rasm, shtrixlangan soha).



5-rasm

Bevosita tekshiriladi:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik xossasi);

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assosiativlik xossasi);

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivlik xossasi);

4) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (sustlik xossasi);

5) $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = A$; agar $A \subseteq E$, hamda $A \cup E = E$, $A \cap E = A$ bo'lsa;

6) agar $A \subseteq E$ bo'lsa, unda $E \setminus (E \setminus A) = A$;

7) agar $A \subseteq E$ bo'lsa, unda $A \cup (E \setminus A) = E$, $A \cap (E \setminus A) = \varnothing$;

8) agar $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ bo'lsa, unda $(A \cup (E \setminus A)) \cap B = B$, $(A \cup (E \setminus A)) \cup B = B$;

9) $(A \cup B) \cap B = B$, $(A \cup B) \cap B = B$;

10) agar $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ bo'lsa, unda $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$, $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$;

2, 3, 4, 10 xossalar to'plamlarning ixtiyoriy (cheklangan yoki cheksiz) to'plami uchun tabiiy ravishda umumlashtiriladi.

1-teorema. Agar $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ bo'lsa, unda $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

Isboti. Aytaylik, $M_1 = E \setminus (A \cup B)$ va $M_2 = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. Avval $M_1 \subseteq M_2$ so'ngra $M_2 \subseteq M_1$ ekanini isbotlaymiz. Bu ikkalasidan $M_1 = M_2$ kelib chiqadi.

$x \in M_1 = E \setminus (A \cup B)$ bo'lsa $x \notin (A \cup B)$, bundan $x \notin A$ va $x \notin B$ kelib chiqadi. $x \notin A$ bog'liklikdan $x \in E \setminus A$, $x \notin B$ bog'liklikdan esa $x \in E \setminus B$ ekanligi. $x \in E \setminus A$ va $x \in E \setminus B$ dan $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B) = M_2$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar $x \in M_1$ bo‘lsa, unda $x \in M_2$, ya’ni $M_1 \subseteq M_2$ ekanligi isbotlandi.

$x \in M_2 = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ bo‘lsin. Unda $x \in E \setminus B$ va $x \in E \setminus B$, ya’ni $x \notin A$ va $x \notin B$, bundan $x \notin A \cup B$ kelib chiqadi. Oxirgi bog‘liklikdan $x \in E \setminus (A \cup B) = M_1$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar $x \in M_2$ bo‘lsa, unda $x \in M_1$, ya’ni $M_2 \subseteq M_1$ ekanligi isbotlandi.

$M_1 \subseteq M_2$ va $M_2 \subseteq M_1$ dan $M_1 = M_2$ ekanligi kelib chidadi.

To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi va uning qo‘llanishi.

1-ta’rif. A_1 va A_2 ikkita to‘plam bo‘lsin. To‘plamning barcha (a_1, a_2) juftligi A_1 va A_2 to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi (to‘g‘ri ko‘paytmasi) deyiladi, bunda $a_1 \in A_1$ va $a_2 \in A_2$.

A_1 va A_2 to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi “$A_1 \times A_2$” belgi bilan ifodalanadi.

Shunday qilib, $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$.

a_1 va a_2 elementlar (a_1, a_2) tartiblangan juftlikning koordinatalari (komponentlari) deyiladi.

A_1 va A_2 to‘plamlar teng yoki turlicha bo‘lishi mumkin.

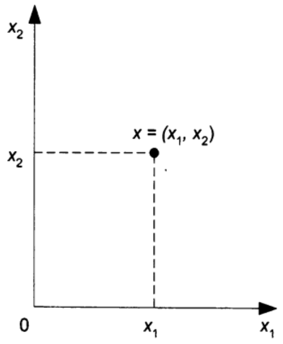
2-ta’rif. Xuddi shuningdek, to‘plamning barcha (a_1, a_2, …) juftligi A_1, A_2, … to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi (to‘g‘ri ko‘paytmasi) $A_1 \times A_2 \times ...$ topiladi, bunda $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … . Shunday qilib, $A_1 \times A_2 \times ... = \{(a_1, a_2, ...) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ...\}$.

A_1 , A_2,… to‘plamlar teng yoki turlicha bo‘lishi mumkin.

To‘plamning (a_1, a_2, …) tartiblangan elementlari chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

Agar A_1= A_2= A bo‘lsa, “$A_1 \times A_2$” belgilash bilan birga “A^2” belgilash ham ishlatiladi, ya’ni A= A= A^2. Xuddi shuningdek, agar A_1= …=A_2= A bo‘lsa, $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k} = A^k$.

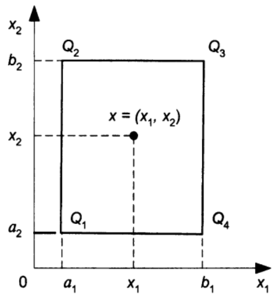
2-ta’rif. Agar k = 1 bo‘lsa, to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi ta’rifiga ko‘ra A_1 bilan A_1 mos keladi. A^k dekart ko‘paytmada $A = \varnothing$ bo‘lsa, u bitta elementdan tashkil topadi. $\varnothing \times A$ ($\varnothing \times A \times ...$) bo‘sh to‘plam hisoblanadi.



6-rasm

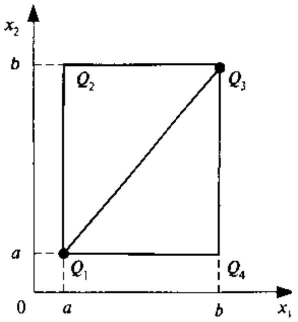
1-misol. $0x_1x_2$ tekislik $0x_1$ va $0x_2$ kordinata o‘qlarining dekart ko‘paytmasiga misol bo‘ladi (6-rasm).

2-misol. Agar $0x_1$ koordinatada (A_1 to‘plamda) $[a_1, b_1]$ kesma ajratsak, $0x_2$ koordinatada esa (A_2 to‘plamda) $[a_2, b_2]$ kesma ajratsak, A_1 va A_2 to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A_1 \times A_2$ $Q_1Q_2Q_3Q_4$ to‘rtburchakni tashkil qiladi (7-rasm). Ularning qirralari quyidagi koordinatalardan iborat bo‘ladi: $Q_1 = (a_1, a_2)$, $Q_2 = (a_1, b_2)$, $Q_3 = (b_1, b_2)$, $Q_4 = (b_1, a_2)$.



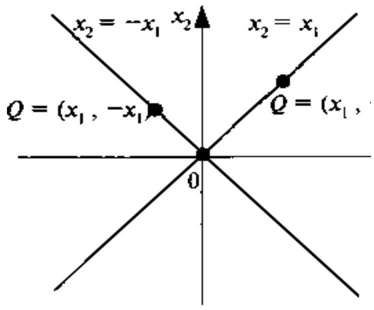
7-rasm

3-misol. Agar A to‘plam $[a,b] \in E_n$ kesmadan iborat bo‘lsa, $A_1 \times A_2$ dekart ko‘paytma $0x_1x_2$ ($Q_1 = (a, a)$, $Q_2 = (a, b)$, $Q_3 = (b, b)$, $Q_4 = (b, a)$) tekislikdagi $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kvadratdan iborat (8-rasm).



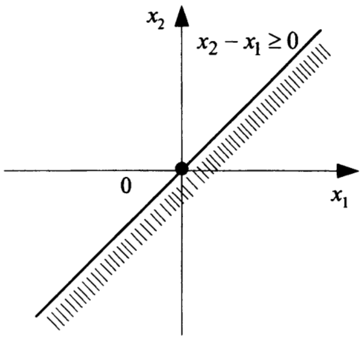
8-rasm

4-misol. Agar A to‘plam $0x_1$ sonli to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, $A_1 \times A_2$ dekart ko‘paytma $0x_1x_2$ tekislik bo‘ladi (9-rasm).



9-rasm

5-misol. Yaqiqiy sonlarning $A = E_1$ to‘plamidagi odatdagi tartib munosabati (ya’ni, “$\le$” belgini “teng yoki kichik” deb izohlash bilan tartib munosabati) chiziqli tartibga misol bo‘lib, haqiqiy sonlar to‘plami chiziqli tartibli to‘plamdir: 1) $x_1 \ge x_2$ (refleksiflik xusussiyati); 2) $x_1 \ge x_2$ va $x_2 \ge x_1$ dan $x_1 = x_2$ ekani kelib chiqadi (antisimmetriya xususiyati); 3) $x_1 \ge x_2$ va $x_2 \ge x_3$ dan $x_1 \ge x_2$ ekani kelib chiqadi (tranzitivlik xususiyati).



10-rasm

$A = E_1$ to‘plamning $A \times A$ o‘zini o‘ziga dekart ko‘paytmasi $0x_1x_2$ tekislikdir. Bu misolda R munosabatning tartibi $0x_1x_2$

tekisligidagi $x_1 - x_2 \geq 0$ yarim tekislikdir (10-rasm).

Aks ettirish va funksiya

A to‘plamni *B* to‘plamda aks ettirish - bu *A* va *B* to‘plamlarga mos keluvchi *G* to‘plam bo‘lib, agar quyidagi shartlar bajarilsa: *A* to‘plamning istalgan elementi uchun shunday ygona (*x*, *y*) juftlik mavjud bo‘lib, $(x, y) \in A \times B$ bo‘lsa.

Matematikaga oid adabiyotlarda “aks ettirish” va “funksiya” tushunchalari sinonimlardir.

Iqtisodiy nazariya va uning ilovalarida quyidagi funksiyalardan foydalaniladi:

bir o‘zgaruvchili (skalyar) funksiyalar:

$y = a_1 x + a_2$, $y = a_0 x^{\alpha} (\alpha \in E_1)$, $y = a_0 e^{a_1 x}$, $y = a_0 \ln(a_1 x + a_2)$,

$y = a_0 (a_1 x^{-\alpha} + a_2)^{-\frac{h}{\alpha}} (\alpha \in E_1, 0 < h \in E_1)$

ikki o‘zgaruvchili (skalyar) funksiyalar:

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3$, $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} (0 \leq \alpha_1 \in E_1, 0 \leq \alpha_2 \in E_2)$, $y = a_0 e^{a_1 x_1 + a_2 x_2}$,

$y = a_0 \ln(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3)$, $y = a_0 (a_1 x_1^{-\alpha} + a_2 x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}}$

ko‘p o‘zgaruvchili (skalyar) funksiyalar:

$y = a_1 x_1 + ... + a_n x_n + a_0$, $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{n} (0 \leq \alpha_i \in E_1, i = 1, ..., n)$,

$y = a_0 e^{a_1 x_1 + ... + a_n x_n}$, $y = a_0 \ln(a_1 x_1 + ... + a_n x_n)$.

Shuningdek, bir va ko‘p o‘lchamli vektor funksiyalar, hamda ko‘p nuqtali aks ettirishdan ham foydalaniladi.

Ikki o‘zgaruvchili funlsiyalar va ularning to‘plam darajalari

$y = f(x)$ bitta *x* o‘zgaruvchili funksiya.

$y = f(x_1, x_2)$ ikkita x_1 va x_2 o‘zgaruvchili funksiya.

x_1 va x_2 o‘zgaruvchilar bir biriga bo‘liq bo‘lmagan holda o‘zgaradi.

x_1 , … , x_n o‘zgaruvchilar uchun n o‘zgaruvchili funksiyaga ega bo‘lamiz $y = f(x_1, ..., x_n)$.

Matematikaning iqtisodiy ilovalarida ikki va *n* o‘zgaruvchili chiziqli va chiziqsiz funksiyalar keng ishlstilsdi.

$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0$ $y = a_1 x_1 + ... + a_n x_n + a_0$ ikki va *n* o‘lchovli chiziqli funksiyalardir.

Quyidagi $y = x_1^2 + x_2^2$, $y = x_1^2 + ... + x_n^2$, $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$, $y = \min(x_1 / b_1, x_2 / b_2)$, $y = \min(x_1 / b_1, x_2 / b_2, ... x_n / b_n)$ funksiyalar chiziqsiz hisoblanadi.

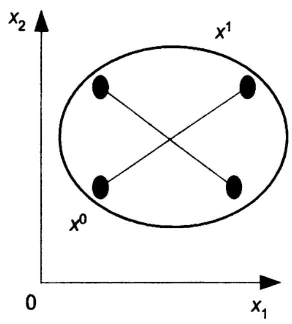
Ikki va undan ortiq funksiyalar uchun nuqtada va to‘plamda uzluksizligi juda muhimdir.

M to‘plamda aniqlangan $f(x_1; x_2)$ funksiya shu to‘plamning $(x_1^0; x_2^0)$ nuqtasida uzluksiz bo‘ladi, agar M to‘plamning istalgan $(x_1; x_2)$ nuqtasi va $(x_1^0; x_2^0)$ nuqtaga yaqin uchun $f(x_1; x_2)$ xususiy qiymat $f(x_1^0; x_2^0)$ xususiy qiymatga yaqin bo‘lsa.

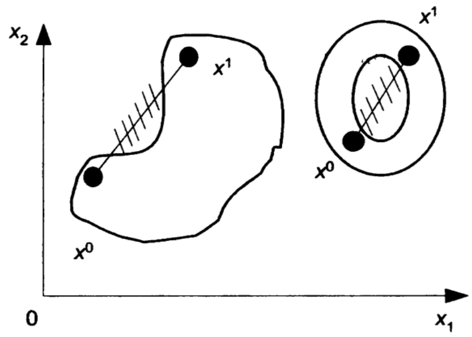
M to‘plamning barcha nuqtalarida uzluksiz bo‘lgan $f(x_1; x_2)$ funksiya M to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Iqtisodiy ilovalarda ikki va ko‘p o‘zgaruvchili qavariq to‘plam va qavariq funksiya tushunchasi keng qo‘llaniladi.

To‘plam qavariq deyiladi, agar to‘plamning har qanday ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesma hosil bo‘lsa (11-rasm).



11-rasm



12-rasm

To‘plam qavariq emas deyiladi, agar to‘plamning har qanday ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesma hosil bo‘lmasa (12-rasm).

1.2. Xususiy hosilalar, gradiyent va differentsial

$y = f(x_1, x_2)$ ikki o‘zgaruvchili funksiya berilgan bo‘lsin. $f(x_1, x_2)$ funksiyada x_2 ni o‘zgarmas deb olib, x_1 bo‘yicha birinchi tartibli hosilasi $f(x_1, x_2)$ funksiyaning x_1 bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}.$$

Xuddi shuningdek, $f(x_1, x_2)$ funksiyaning x_1 bo‘yicha xususiy hosilasi aniqlanadi:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2},$$

bunda ∂ – xususiy hosila belgisi.

x_n o‘zgaruvchili $y = f(x_1,..., x_i,..., x_n)$ funksiyaning birinchi tatribli hosilasi $\frac{\partial f(x_1,..., x_i,..., x_n)}{\partial x_i}$ da x_i dan tashqari barcha $x_1,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n$ o‘zgaruvchilari doimiy hisoblanadi.

Agar (x_1^0, x_2^0) nuqtada $y = f(x_1, x_2)$ funksiyaning birinchi tatribli hosilasi x_1 (x_2) o‘zgaruvchilar bo‘yicha musbat bo‘lsa, ya’ni $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0$ $\left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} > 0\right)$ bo‘lsa, x_1 (x_2) o‘zgaruvchilarning x_1^0 (x_2^0) ga nisbatan kichik o‘sishi, x_2^0 (x_1^0) o‘zgarmas bo‘lgan holda, $f(x_1, x_2)$ funksiyada y ning qiymati o‘sadi, ya’ni birinchi tatribli hosila x_1 (x_2) o‘zgaruvchilarga nisbatan musbatligidan, $f(x_1, x_2)$ funksiyaning x_1 (x_2) o‘zgaruvchilar bo‘yicha mon1otonlik xossasi kelib chiqadi.

$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} < 0$ 1 xbo‘lgan holat yuqoridagidek tushuntiriladi.

Misol. 1. Agar $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ bo‘lsa, $\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1$, $\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2$. $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ xususiy hosilani topishda a_2x_2 qo‘shiluvchini xuddi a_0 singari doimiy o‘zgarmas deb olinsa ularning hosilasi nolga teng bo‘ladi.

2. $y = b_0x^{a_1}$ darajali funksiyaning x bo‘yicha hosilasi $\frac{\partial y}{\partial x} = b_0a_1x^{a_1-1}$ bo‘ladi. $y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}$ funksiyadan $y = a_0x_2^{a_2}$ ni o‘zgarmas deb hisoblab, x_1 bo‘yicha hosila olsak $\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_0a_1x_1^{a_1-1}x_2^{a_2}$ bo‘ladi. Xuddi shuningdek, $\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_0a_2x_1^{a_1}x_2^{a_2-1}$ bo‘ladi. Xuddi shuningdek, n o‘zgaruvchili, $y = a_0x_1^{a_1}...x_i^{a_i}...x_n^{a_n}$ funksiyaning hosilasi $\frac{\partial y}{\partial x_i} = a_0a_1x_1^{a_1}...x_i^{a_i-1}...x_n^{a_n}$ bo‘ladi.

Ikki x_1 (x_2) o‘zgaruvchili $y = f(x_1, x_2)$ funksiyaning tartiblangan $\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right)$ yoki $\left(\frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right)$ juft hosilasi $grad f(x_1, x_2)$ (yoki

$f'(x_1, x_2)$ va $grady(x_1, x_2))$ belgu bilan belgilanadi va ikki o‘zgaruvchili $y = f(x_1, x_2)$ funksiyaning gradiyenti deb ataladi.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning gradiyenti ikki o‘lchamli vektor, *n* o‘zgaruvchili funksiyaning gradiyenti *n* o‘lchamli vektordir

$$gradf(x_1,..., x_n) = \left(\frac{\partial f(x_1,..., x_n}{\partial x_1},..., \frac{\partial f(x_1,..., x_n}{\partial x_n} \right).$$

$f(x_1,\ x_2)$ funksiyaning $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ nuqtadagi funksiya gradiyenti $gradf(x_1^0, x_2^0)$ funksiyaning shu nuqtadagi o‘sishini bildiradi.

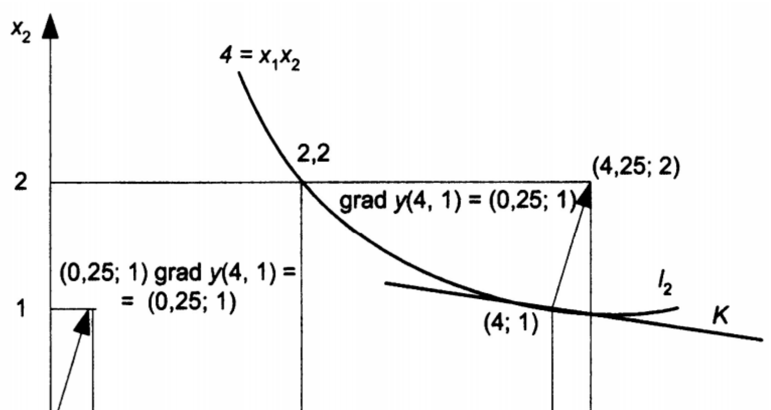
Misol. Ikki x_1 (x_2) o‘zgaruvchili $y = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ uchun:

a) $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (4,1)$ nuqtadan o‘tuvchi l_{q0} chiziqni chizamiz;

b) (4,1) nuqtada $\left(\frac{\partial y(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial y(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right)$ gradiyentni topamiz;

c) gradiyentni chizamiz.

Yechish: a) Dastlab q^0 darajani topamiz. U (4,1) nuqtadagi $y = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ funksiyaning qiymatiga teng: $q^0 = (x_1^0)^{1/2} (x_2^0)^{1/2} = 4^{1/2} \cdot 1^{1/2} = 2$. $0x_1x_2$ tekislikda $l_{q0}=l_2$ chiziqni chizamiz, u quyidagiga teng: $q_0 = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ yoki $2 = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$. Bundan $4 = x_1 x_2$, yoki $x_2 = \frac{4}{x_1}$ (13-rasm).



13-rasm

b) Quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2},\quad \frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-1/2};$$

$$\frac{\partial y(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}=\frac{\partial y(1{,}4)}{\partial x_1}=\frac{1}{2}4^{-1/2}\cdot 1^{1/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{\partial y(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}=\frac{\partial y(1{,}4)}{\partial x_2}=\frac{1}{2}4^{1/2}\cdot 1^{-1/2}=\frac{2}{2}=1.$$

Bundan

$$grady(x_1^0,x_2^0)=\left(\frac{\partial y(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1},\frac{\partial y(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}\right)=\left(\frac{1}{4},1\right)$$

c) $0x_1x_2$ tekislikda das11tlab (0,0) nuqtadan, so‘ngra (4,1) nuqtadan chiquvchi $grady(x_1^0,x_2^0)=\left(\frac{1}{4},1\right)$ gradiyentni chizamiz. 13-rasmda shunga e’tiborni qaratish kerakki, ($4=x_1x_2$) $l_2=l_{q0}$ (4,1) nuqtada $grady(4{,}1)$ gradiyent K urinmaga perpendikulyardir.

Bir x o‘zgaruvcjili $y=f(x)$ funksiyaning $df(x)=f'(x)dx$ (yoki $dy(x)=y'(x)dx$, $dy=y'dx$) singari, $d_1f(x_1,x_2)=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1$ (yoki $d_1y(x_1,x_2)=\frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1$, $d_1y=\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1$) x_1 o‘zgaruvchili $y=f(x_1,x_2)$ funksiyaning xususiy differensiyasi deyiladi.

x_2 o‘zgaruvchili $y=f(x_1,x_2)$ funksiyaning xususiy differensiyasi quyidagicha bo‘ladi: $d_2f(x_1,x_2)=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2$ (yoki $d_2y(x_1,x_2)=\frac{\partial y(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2$, $d_2y=\frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2$)

Ikki (x_1,x_2) o‘zgaruvchili $y=f(x_1,x_2)$ funksiyaning xususiy differensiallari yig‘indisi to‘liq differensial deyiladi $df(x_1,x_2)$, $dy(x_1,x_2)$, dy kabi belgilanadi:

$$df(x_1,x_2)=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2$$

Xuddi shuningdek, n o‘zgaruvchili $y=f(x_1,...,x_i,...,x_n)$ funksiyaning to‘liq differensiali quyidagicha bo‘ladi:

$$df(x_1,...,x_n)=\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}dx_n$$

Misol. $y=x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ funksiya uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$df(x_1,x_2)=\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2, \text{ yoki}$$

$$df(x_1,x_2)=1/2(x_1^{-1/2},x_2^{1/2})dx_1+1/2(x_1^{1/2},x_2^{-1/2})dx_2,$$

$\left(x_1^0,x_2^0\right)=(4{,}1)$ nuqtada to‘liq differensiyal quyidagiga teng:

$$dy(x_1^0,x_2^0)=\frac{\partial y(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial y(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}dx_2,\ dy(4{,}1)=(1/4)dx_1+dx_2$$

1.3. Bir jinsli funksiyalar. Noaniq funksiya teoremasi

Bir jinsli funksiyalar. $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ aniqlangan $y=f(x_1,x_2)$ funksiya *p* darajali bir xil funksiya deyiladi, agar istalgan $t>0$ va $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$f(tx_1,tx_2)=t^p f(x_1,x_2).$$

Xuddi shuningdek, *n* o‘zgaruvchili $y=f(x_1,...,x_n)$ funksiya uchun:

$$f(tx_1,...,tx_2)=t^p f(x_1,...,x_2).$$

p darajali bir xil funksiya quyidagi formula o‘rinli:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2=pf(x_1,x_2).$$

Xuddi shuningdek, *n* o‘zgaruvchili *p* darajali bir xil funksiya quyidagi formula o‘rinli:

$$\frac{\partial f(x_1,...,x_2)}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f(x_1,...,x_2)}{\partial x_2}dx_2=pf(x_1,...,x_2).$$

Oxirgi ikki tenglama Eyler tenglamalari, ularning haqiqiyligini tasdiqlash *Eyler teoremasi* deyiladi.

Misollar. 1) $y=a_1x_1+a_2x_2$ ko‘rinishidagi bir xil birinchi darajali chiziqli funksiyadir, chunki $a_1(tx_1)+a_2(tx_2)=t(a_1x_1+a_2x_2)$.

2) Kvadrat shakldagi, ya’ni $y=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ ko‘rinishidagi ikkinchi tartibli bir xil funksiya, chunki

$$y=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=a_{11}(tx_1)^2+2a_{12}(tx_1)(tx_2)+a_{22}(tx_2)^2=t^2(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2).$$

Noaniq funksiya haqida teorema. Noaniq funksiya teoremasi matematik analizdagi eng muhim teoremalardan biridir. U *f(x,y)* = 0 tenglamaning *y* ga nisbatan echuvchanligi masalasini ko‘rib chiqadi; uning turli xil versiyalarida *x, f, y* skalyar yoki vektor bo‘lishi mumkin. Bundan kelib chiqadigan oqibatlar, xususan, shartli ekstremum nazariyasida va iqtisodiy ilovalarda keng qo‘llaniladi. Bundan tashqari, ushbu teorema ba’zi ilovalar bilan birgalikda turli xil versiyalarda taqdim etiladi.

Nazorat savollari va topshiriqlar va vazifalar

1. To‘plamlarning birlashishi, kesishishi va farqi ta’riflarini shakllantirish. Ushbu ta’riflar misollar bilan tasvirlang.

2. Ikkita (har qanday to‘plam) to‘plamlarning dekartlik ko‘paytmasi nima deyiladi? Misollar keltiring.

3. Ikki o‘zgaruvchidan iborat funksiya grafigi nima deyiladi?

4. Ikki o‘zgaruvchidan iborat funksiya darajalari to‘plami deb nimaga aytiladi? To‘plam chiziq bo‘lmasligi mumkinmi? Misollar keltiring.

5. Chegara nuqtasi ichki, ichki chegara bo‘la olmasligini isbotlang.

6. Qavariq to‘plamning ta’rifini tuzing (E_1, E_2, E_n). Qavariq bo‘lmagan to‘plamlarga iqtisodiy misollar keltiring.

7. Qavariq to‘plamda qavariq yuqoriga (pastga) funksiyaning ta’rifini bering (E_1, E_2, E_n holatlarida).

8. Bir (bir nechta) o‘zgaruvchiga ega bo‘lgan funksiyaning qisman hosilasi va birinchi total differentsialining ta’rifini tuzing.

9. Ikki (bir nechta) o‘zgaruvchidan iborat funksiya gradienti ta’rifini tuzing. Ikkita (ko‘proq) o‘zgaruvchidan iborat funksiya gradyenti va daraja chizig‘i o‘rtasidagi munosabatni tavsiflang.

10. Bir hil funksiya ta’rifini tuzing va Eyler formulasini keltiring.

11. Yashirin funksiya ta’rifini tuzing.

12. Yashirin funksiya teoremasini tuzing. Uning geometrik talqinini bering.

13. bir bazisdan boshqasiga o‘tish matritsasini yozing.

14. Vektorning koordinatalarini yangi asosda ushbu vektorning eski asosdagi koordinatalari bo‘yicha ifodalang.

15. “Bir chiziqli fazodan boshqasiga xaritalash” tushunchasini shakllantirish.

16. “Chiziqli fazoning chiziqli o‘zgarishi” tushunchasini shakllantirish.

17. Belgilangan asosda chiziqli transformatsiya matritsasini yozing.

18. Chiziqli transformatsiyaning koordinatalarini qat’iy asosda chiziqli o‘zgarishning teskari koordinatalari bo‘yicha ifodalang.

19. Lineer transformatsiya matritsasini yangi asosda ushbu transformatsiya matritsasi bo‘yicha eski asosda aks ettirish teoremasini tuzing.

20. 9, 10 xususiyatlarini isbotlang (1.1-bo‘limga qarang).

21. $y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$ funksiya grafigining eskizini tuzing.

22. $E_2^+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ to‘plamining chegarasini tavsiflang.

23. $a_1x_l + a_2x_2 + a_3$ chizig‘i qavariq to‘plam ekanligini isbotlang.

24. $a_1x_l + a_2x_2 + a_3 \leq 0$ yarim tekislik qavariq to‘plam ekanligini isbotlang.

25. (-0, -2) nuqtaning g-mahallasini

26. $y = x_1^2 + x_2^2$ funksiya butun E2 tekisligida pastga qavariq ekanini isbotlang.

27. $y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$ funksiya uchun $x^0 = (1; 1)$, $x^1 = (4; 1)$, $x^2 = (4; 16)$ nuqtalardan o‘tuvchi darajadagi chiziqlar tenglamalarini yozing.

Ushbu chiziqlarni $0x_1x_2$ tekislikda tuzing.

28. 1.4-misolni o‘zingiz mustaqil ishlang (1.3-xatboshiga qarang).

29. Quyidagi tenglama bilan berilgan $x_2 = f(x_1)$ yopiq funksiyasining dx_2/dx_1 hosilasini yozing: a) $\tau = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, b) $\tau = a_0\left(a_1 x_1^{-\alpha} + x_2^{-\alpha}\right)^{\frac{h}{\alpha}}$.

30. 1 va 2 misollaridagi teskari V^{-1} matritsasini ekshiring.

31. $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ standart bazislardan, $g^{(1)} = e^{(2)}$, $g^{(2)} = e^{(1)}$ bazisga o‘tish matritsasi V ga teskari V^{-1} matritsani va ikkinchi bazisdagi $x = (-1, 2)$ vektor koordinatalarini toping. Geometrik talqin bering.

32. Standart bazisdan $g^{(1)} = (-1, 2)$, $g^{(2)} = (4, -1)$ bazisga o‘tishning V matritsasini, teskari matritsa V^{-1} va ikkinchi bazisda $x = (-2, 2)$ vektorning koordinatalarini toping. Geometrik talqin bering.

33. Cheklangan va cheksiz to‘plamlarga misollar keltiring.

34. Ikki o‘lchovli vektor $z = (z_1, z_2)$ berilgan. Ikki o‘lchovli vektorlarning M_x to‘plami bilan $0x_1x_2$ tekislikda $x = (x_1, x_2)$ ikki o‘lchovli vektorlar berilgan bo‘lib, unda $(x_1, x_2) \geq (z_1, z_2)$. $0x_1x_2$ tekislikda $(z_1, z_2) \geq (y_1, y_2)$ ikki o‘lchovli $y = (y_1, y_2)$ vektorlarning M_y to‘plamini tuzing.

35. Ikki o‘lchovli vektor $z = (z_1, z_2)$ berilgan. $v = (v_1, v_2)$ vektor bilan taqqoslanmaydigan ikki o‘lchovli vektorlarning M_y to‘plamini $0x_1x_2$ tekislikda tuzing, ya’ni agar, masalan, $z_1>v_1$ bo‘lsa, albatta $z_2>v_2$ bo‘lishi shart.

36. Leksikografik buyurtma buyurtma munosabati ekanligini isbotlang.

37. Leksikografik tartiblash chiziqli tartibli munosabat ekanligini isbotlang.

38. Agar belgilangan vektor uchun $z = (z_1, z_2)$, $(z_1 \geq 0, z_2 \geq 0)$ yaxshi $B(z)$ va yomon $W(z)$ to‘plamlarni tuzing, agar leksikografik tartib $0x_1x_2$ tekislikda berilgan bo‘lsa.

39. Sonli to‘plamlar bir xil miqdordagi elementlardan iborat bo‘lgan taqdirdagina ekvivalent ekanligini isbotlang.

2-BOB. KLASSIK OPTIMALLASHTIRISH USULLARI

2.1. Mutlaq ekstremum nazariyasi. Shartli ekstremum nazariyasi (ikki o‘zgaruvchili holat).

2.2. Shartli ekstremum masalani echish uchun Lagranj usuli.

2.3. Shartli ekstremum nazariyaning iqtisodiy nazariyaga qo‘llanilishi.

2.4. Matematik dasturlash tushunchasi. Lokal ekstremumning nazariyasi (*n* o‘zgaruvchili holat).

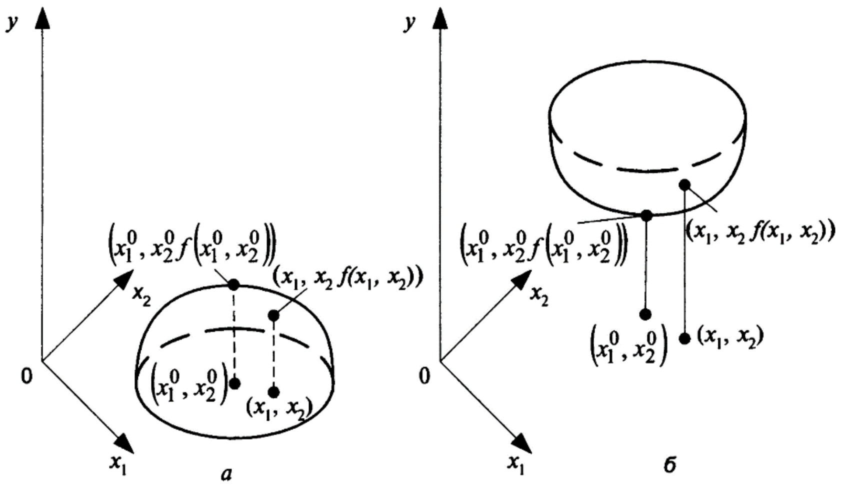
2.1. Mutlaq ekstremum nazariyasi. Shartli ekstremum nazariyasi (ikki o‘zgaruvchili holat)

Ta’rif. (x_1^0, x_2^0) nuqta ikkita x_1 va x_2 o‘zgaruvchili $f(x_1, x_2)$ funksiyaning lokal maksimumi (lokal minimum) deyiladi, agar barcha (x_1, x_2) nuqtalar uchun (x_1^0, x_2^0) nuqtaga yaqin va f funksiyaning aniqlanish sohasida $f(x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1, x_2)$ $\left(f(x_1^0, x_2^0) \leq f(x_1, x_2) \right)$ tengsozliklar o‘rinli bo‘lsa.

$f(x_1, x_2)$ xususiy miqdor $y = f(x_1, x_2)$ funksiyasining lokal maksimumi (lokal minimimi) deb nomlanadi.

Agar $y = f(x_1, x_2)$ funksiyasining (x_1^0, x_2^0) lokal maksimum (minimum) nuqtasi bo‘lsa, u holda $\left((x_1^0, x_2^0), f(x_1^0, x_2^0) \right)$ nuqtalar atrofidagi uch o‘lchovli fazoda, $y = f(x_1, x_2)$ funksiyasining grafigi G “do‘ppi” (teskari “do‘ppi”) ko‘rinishiga ega bo‘ladi (2.1, a, b-rasm).

Odatda, ikkita atama (maksimal va minimal) o‘rniga bitta - ekstremum atamasi ishlatiladi.



2.1-rasm

Ta'rif. (x_1^0, x_2^0) nuqta ikkita x_1 va x_2 o'zgaruvchili $f(x_1, x_2)$ funksiyaning global maksimumi (global minimum) deyiladi, agar barcha (x_1, x_2) nuqtalar uchun f funksiyaning aniqlanish sohasida $f(x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1, x_2)$ ($f(x_1^0, x_2^0) \leq f(x_1, x_2)$) tengsozliklar o'rinli bo'lsa.

$f(x_1^0, x_2^0)$ xususiy miqdor $y = f(x_1, x_2)$ funksiyasining slobal maksimumi (global minimimi) deb nomlanadi.

Iqtisodiy masalalarda ko'pincha lokal emas, balki global ekstremum izlanadi.

Agar $f(x_1, x_2)$ funksiya pastga qarab qavariq bo'lsa va lokal minimumga ega bo'lsa, u holda bu global minimal hisoblanadi. Agar $f(x_1, x_2)$ funksiya yuqoriga qavariq va lokal maksimumga ega bo'lsa, u holda bu global maksimum hisoblanadi.

Iqtisodiy nazariyada $f(x_1, x_2)$ funksiyasi odatda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ uchun aniqlanadi va u yuqoriga qavariq yoki pastga qavariq bo'ladi, shuning uchun uning lokal maksimumi (lokal minimumi) ham global hisoblanadi.

Lokal ekstremum uchun zarur shart quyidagicha tuziladi.

(x_1^0, x_2^0) nuqtada $f(x_1, x_2)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo'lsin ((x_1^0, x_2^0) nuqta $f(x_1, x_2)$ funksiyani aniqlash sohasi uchun ichki bo'ladi, unda

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0$$

(x_1^0, x_2^0) nuqtada (birinchi) xususiy hosilalarning mavjudligi taxmin qilinadi.)

Kerakli shart birinchi xususiy hosilalarni o'z ichiga olganligi sababli, bu shart birinchi tartibli shart deb ataladi.

Iqtisodiy muammolarda paydo bo'ladigan $f(x_1, x_2)$ funksiyalar ko'pincha ularning barcha o'zgaruvchilariga nisbatan (birinchi) xususiy hosilalarga ega.

Ta'rif. (x_1^0, x_2^0) nuqta $f(x_1, x_2)$ funksiya uchun kritik deyiladi, agar bu nuqtada x_1^0 va x_2^0 koordinatalar $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$ tenglamalar sistemasini qanoatlantirsa.

Shuning uchun $f(x_1, x_2)$ funksiyasining lokal ekstremumining uning aniqlanish sohasi ichida joylashgan nuqtalarini faqat shu funksiyaning kritik nuqtalari orasidan qidirish kerak.

2.2. Shartli ekstremum masalani yechish uchun Lagranj usuli

Lagranj usulining mohiyati

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \qquad (2.1)$$

funksiyasini uchta o‘zgaruvchidan x_1, x_2, λ (Lagranj funksiyasi deb ataladi) va, taxminan masalani ikkita mustaqil o‘zgaruvchiga ega bo‘lgan shartli ekstremum masalasini uchta mustaqil o‘zgaruvchining $L(x_1, x_2, \lambda)$ funksiyasi absolyut ekstremumiga keltirishda masalasidan icorat. Quyida ushbu g‘oya aniqlashtirilgan.

Lagrange funksiyasi $L(x_1, x_2, \lambda)$ - bu obyektiv funksiya (2.1) va cheklash funksiyasi (2.2) ning yangi mustaqil o‘zgaruvchisiga ko‘paytirilgan (Lagrange multiplikatori deb ataladi), ya’ni albatta birinchi darajali.

Analitik shaklda (2.2) cheklov mavjud bo‘lganda (2.1) funksiyaning mahalliy shartli ekstremumi uchun zarur shartni ko‘rib chiqamiz.

$f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ funksiyalar uzluksiz va x_1 va x_2 o‘zgaruvchilarga nisbatan uzluksiz birinchi darajali xususiy hosilalarga ega bo‘lsin, (x_1^0, x_2^0) shartli nuqta (2.1) funksiyaning lokal ekstremumi (2.2) va grad $g(x_1, x_2) \neq 0$ bo‘lsin.

U holda yagona son λ^0 mavjudki, (uch o‘lchovli) nuqta $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ quyidagi uchta x_1, x_2, λ noma’lumli uchta tenglama tizimini qoniqtiradi:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \qquad (2.2)$$

(hammisha $\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2)$).

Tenglamalar (2.2) birinchi darajali shartlardir, chunki ular tarkibida faqat birinchi darajali xususiy hosilalar mavjud.

bo‘Boshqacha qilib aytadigan bo‘lsak, ((ikki o‘lchovli) nuqta (x_1^0, x_2^0) funksiyaning lokal shartli ekstremumining nuqtasi bo‘lsa, u holda (uch o‘lchovli) nuqta $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ - Lagranj funksiyasining kritik nuqtasi bo‘ladi. Demak, funksiyaning mahalliy ekstremumining nuqtalarini cheklov mavjudligida topish uchun, avvalo, Lagranj funksiyasining kritik nuqtalarini topish kerak, bu, tenglamalar tizimining barcha echimlarini toping (2.2). Bundan tashqari, Lagrange funksiyasining kritik nuqtalari ulardan eng so‘nggi koordinatalarni olib tashlash orqali “qisqartirilishi” kerak.

Keyinchalik, har bir “qisqartirilgan” tanqidiy nuqta tahlil qilinishi kerak, bu aslida cheklov mavjud bo‘lganda funksiyasining (shartli) mahalliy ekstremumining nuqtasi yoki yo‘qligini aniqlaydi.

Funksiyaning mahalliy shartli ekstremumi uchun cheklov mavjud bo‘lganda etarli shart quyida keltirilgan. “Qisqartirilgan” tanqidiy nuqtani tahlil qilishda odatda vizual geometrik yoki mazmunli (iqtisodiy) mulohazalar qo‘llaniladi.

Ta’kidlaymizki, shartli ekstremumdagi ko‘plab iqtisodiy muammolarda, odatda, Lagranj funksiyasining “kesilgan” kritik nuqtasi funksiyasining shartli mahalliy (aslida global) ekstremumi nuqtasi cheklov mavjud bo‘lganda.

2.3. Shartli ekstremum nazariyaning iqtisodiy nazariyaga qo‘llanilishi

$f(x_1, x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasi E_2 fazoning manfiy bo‘lmagan orantasida ikki marta uzluksiz differentsiallansin va uning izoquantlari (0; 0) nuqtaga qat’iy qavariq bo‘lsin.

Resurslar bo‘yicha cheklov C bo‘lgan firma mahsulotini maksimal darajada oshirish masalasini hal qilish

$u(x_1, x_2) \rightarrow \max,$

$p_1x_1 + p_2x_2 = C$

Lagranj funksiyasi

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(C - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Va birinchi tartibli shart

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0; \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0; \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \qquad (2.3)$$

Izokantalar (0; 0) nuqtaga qattiq qavariq bo‘lgan ishlab chiqarish funksiyasi uchun tizim (2.1), (2.2), (2.3) noyob echimga ega $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda}$:

$$\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, C);$$

$$\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, C);$$

$$\hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, p_2, C).$$

2.4. Matematik dasturlash tushunchasi. Lokal ekstremumning nazariyasi (*n* o‘zgaruvchili holat)

Agar masalada tenglik ko‘rinishidagi cheklov shartli ekstremal uchun tengsizlik ko‘rinishidagi $g(x_1, x_2) \le 0$ cheklov bilan almashtirilsa, keyin biz matematik dasturlash masalasining xususiy holatini olamiz:

$$f(x_1, x_2) \to \max \; (f(x_1, x_2) \to \min) \qquad (2.1)$$

$$g(x_1, x_2) \le 0 \qquad (2.2)$$

bo‘lganda.

Ikki o‘zgaruvchidan iborat bo‘lgan holda, matematik dasturlash masalasi (aniqlik uchun maksimal muammo) quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(x_1, x_2) \to \max \qquad (2.1')$$

$$g_1(x_1, x_2) \le 0; \qquad (2.2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g_m(x_1, x_2) \le 0;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$f(x_1, x_2)$ funksiyani maqsad funksiya, tengsizliklar (2.2), (2.3) - matematik dasturlash masalasining maxsus cheklovlari, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ tengsizliklari - matematik dasturlash masalasining umumiy cheklovlari deb ataladi.

Maxsus va umumiy cheklovlarni qondiradigan nuqta (x_1, x_2) matematik dasturlash masalasining qabul qilinadigan yechimi deyiladi.

Matematik dasturlash masalasining (MDM) barcha qabul qilinadigan yechimlari to‘plami ushbu masalaning qabul qilinadigan to‘plami deb ataladi.

Agar MDM kamida bitta mumkin bo‘lgan echimga ega bo‘lsa (ya’ni uning mumkin bo‘lgan to‘plami bo‘sh bo‘lmasa), u qabul qilinadi deb nomlanadi; agar MDMda bitta mumkin bo‘lgan yechim bo‘lmasa (ya’ni, uning qabul qilinadigan to‘plami bo‘sh bo‘lsa), u qabul qilinishi mumkin emas deb nomlanadi.

(x_1^0, x_2^0) nuqta MDMning optimal yechimi deb ataladi, agar bu, birinchi navbatda, ushbu MDMning mumkin bo‘lgan yechimi bo‘lsa va ikkinchidan, bu vaqtda maqsad funksiyasi global maksimal darajaga etgan bo‘lsa (cheklovlarni qondiradigan barcha punktlar orasida maksimallashtirish muammosi) yoki global minimallashtirish (minimallashtirish masalasida). (2.2), (2.3) qoniqtiradigan tengsizliklarning barchasi (x_1, x_2) uchun

$f(x_1^0, x_2^0) \geq f(x_1, x_2)$ (maksimallashtirish masalasida);

$f(x_1^0, x_2^0) \leq f(x_1, x_2)$ (minimallashtirish masalasida).

Bir qarashda MDM mutlaq (agar barcha maxsus va umumiy cheklovlarni olib tashlasangiz) va shartli (agar siz barcha umumiy cheklovlarni olib tashlasangiz va maxsus cheklovlardan birini qoldirsangiz) muammolari bilan taqqoslaganda ancha umumiy muammo sifatida qaralishi mumkin. tenglik shakli) ekstremma. Biroq, aslida, to‘liq umumlashma sodir bo‘lmaydi, chunki MDM holatida biz faqat global ekstremum haqida gapiramiz, mutlaq va shartli ekstremum uchun muammo bo‘lsa, unda ikkala global va mahalliy ekstremum haqida gapiramiz.

Iqtisodiy nazariyada MDM ko‘pincha shartli ekstremum masalasiga aylanadi.

Nazorat savollari va topshiriqlar

1. Ochiq to‘plamda aniqlangan ikkita o‘zgaruvchidan iborat funksiyaning lokal va global mutloq maksimal (minimal) tushunchalarini shakllantirish.

2. Global mutloq maksimal mahalliy bo‘lmasligi mumkinmi?

3. Ikki o‘zgaruvchidan iborat funksiyaning lokal absolyut maksimumi bir xil funksiyaning lokal absolyut minimumidan kam bo‘la oladimi? Misollar keltiring.

4. Ochiq to‘plamda aniqlangan ikkita o‘zgaruvchidan iborat funksiyaning lokal mutloq ekstremumining birinchi tartib shartlarini keltiring.

5. Ochiq to‘plamda aniqlangan ikkita o‘zgaruvchidan iborat funksiyaning lokal mutloq ekstremumining ikkinchi tartib shartlarini keltiring.

6. Ikki o‘zgaruvchining maksimal funksiyasi firma foydasi bo‘lganda birinchi tartibli shartni bering. Birinchi tartib shartining geometrik talqinini bering. Firma tomonidan resurslarga talab va firma ta’minoti funksiyalari ta’riflarini keltiring.

7. Shartli ekstremum uchun masala formulasini keltiring. Ushbu muammoning iqtisodiy versiyasini taqdim eting.

8. Ikki o‘zgaruvchiga teng funksiyani (analitik va geometrik shakllarda) absolyut va shartli ekstremumiga oid masalalarni solishtiring.

9. Lagranj funksiyasini ikkita o‘zgaruvchi va bitta cheklov holatida yozing.

10. Ikki o‘zgaruvchili (analitik shaklda) funksiyaning lokal shartli ekstremumi uchun birinchi tartibli shartni bering.

11. Ikki o‘zgaruvchili (geometrik shaklda) funksiyaning mahalliy shartli ekstremumi uchun birinchi tartibli shartni bering.

12. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning lokal shartli ekstremumi uchun ikkinchi tartibli shartni bering.

13. Firma tomonidan resurslarga bo‘lgan shartli talab (Marshal bo‘yicha) funksiyalari va firmaning shartli ta’minoti funksiyalarining ta’riflarini keltiring.

14. Cheklov bo‘yicha firmaning marginal kontingent taklifi qanday?

15. Resurs narxida firmaning marginal shartli taklifi qanday?

16. Firma resurslari va firmaning shartli xarajatlari funksiyalari uchun shartli talab funksiyalari (Xiks bo‘yicha) ta’riflarini keltiring.

17. Firma tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotning belgilangan hajmi uchun shartli marjinal xarajatlar qanday?

18. Resurs narxining shartli marginal qiymati qancha?

19. Mutlaq ekstremum holatida konvert teoremasining formulasini keltiring.

20. Shartli ekstremum holatidagi konvert teoremasining formulasini keltiring.

21. Matematik dasturlash masalasini shakllantirishni keltiring.

22. Lineer dasturlash masalasini shakllantirishni keltiring.

23. Firmaning ishlab chiqarish funksiyasi $y = f(x_1, x_2)$, $y = f(a_0 x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2})$ ko‘rinishga ega, mahsulot narxi p_0, resurslarning narxi mos ravishda p_1 va p_2. Topish kerak:

1) kompaniyaning PR foydasi uchun ifoda yozing;

2) firmaning foydasi PR uchun birinchi va ikkinchi buyurtmalar shartlaridan foydalanib, firmaning mahalliy bozor muvozanatini (x_1^0, x_2^0) toping;

3) firmaning daromadlari $R(x_1^0, x_2^0)$ xarajatlar $C(x_1^0, x_2^0)$ va maksimal foyda PR(x_1^0, x_2^0) ni aniqlang;

4) (x_1^0, x_2^0) nuqtani o‘z ichiga olgan izokvantlar (doimiy chiqarilish chiziqlari) va izokostlar (doimiy xarajatlar chiziqlari) tenglamalarini yozing;

5) O x1x2 tekislikda firmaning mahalliy muvozanatini (x_1^0, x_2^0), izokostni, izokantani (har biri uchta (kamida) nuqtada, shu jumladan (x_1^0, x_2^0) nuqtada)), shuningdek, $y = f(x_1,x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasi va xarajatlar funksiyasi (x_1^0, x_2^0) nuqtada $C = p_1x_1 + p_2x_2$ ning gradyanlari. (Barcha taxminiy hisob-kitoblar verguldan keyin to‘rtta belgi bilan bajarilishi kerak.)

23.1-23.4 ish parametrlari:

23.1. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_0 = 1, p_0 = 128, p_1 = 4, p_2 = 16$

23.2. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_0 = 4, p_0 = 8, p_1 = 4, p_2 = 1$

23.3. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_0 = 1, p_0 = 64, p_1 = 4, p_2 = 16$

23.4. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_0 = 4, p_0 = 16, p_1 = 8, p_2 = 2$

24. Firmaning ishlab chiqarish funksiyasi $y = f(x_1, x_2)$ $y = x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}$ ko‘rinishga ega, resurs chegarasi V, manba narxlari mos ravishda p_1 va p_2:

1) cheklangan resurslarda firmaning maksimal ishlab chiqarish masalasini yozish;

2) Lagranj funksiyasi uchun birinchi va ikkinchi darajalar shartlaridan foydalangan holda firma mahsulotini maksimal darajada oshirish masalasini hal qilish;

3) firmaning maksimal ishlab chiqarishi $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ni aniqlang;

4) $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ nuqtani o‘z ichiga olgan izoquant tenglamasini yozing;

5) $0x_1x_2$ tekisligida firma ishlab chiqarish hajmini, izokost va izokvantni maksimal darajada oshiradigan resurslar konfigurat-siyasini $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ qurish. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ nuqtani o‘z ichiga olgan kvant (har bir

satr uchta (hech bo‘lmaganda) nuqta, shu jumladan, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ nuqta yordamida tuzilishi kerak), shuningdek, ishlab chiqarish funksiyasi $y = f(x_1, x_2)$ va xarajat funksiyasi $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ nuqtada $C = p_1x_1 + p_2x_2$. (Barcha taxminiy hisob-kitoblar verguldan keyin to‘rtta belgi bilan bajarilishi kerak.)

24.1-24.6 ish parametrlari:

24.1. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, p_1 = 3, p_2 = 4, V = 18$

24.2. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, p_1 = 3, p_2 = 5, V = 90$

24.3. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, p_1 = 2, p_2 = 5, V = 60$

24.4. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, p_1 = 4, p_2 = 5, V = 120$

24.5. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, p_1 = 5, p_2 = 4, V = 120$

25. Firmaning $y = f(x_1, x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasi $y = x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}$ ko‘rinishga ega, firma tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotning belgilangan hajmi y ga, resurslarning narxi mos ravishda teng p_1 va p_2:

1) firma tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotlarning belgilangan hajmida firma xarajatlarini minimallashtirish muammosini yozing;

2) Lagranj funksiyasi uchun birinchi va ikkinchi buyurtmalar shartlaridan foydalangan holda firma xarajatlarini minimallashtirish masalasini hal qilish;

3) firmaning minimal xarajatlarini aniqlang $\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2$;

4) $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ nuqtasini o‘z ichiga olgan izokosta tenglamasini yozing;

5) $0x_1x_2$ tekisligida $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ nuqtani o‘z ichiga olgan firma, izokost va izoquant xarajatlarini minimallashtiradigan $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ resurslar konfiguratsiyasini yaratish (har bir satr uchta (kamida) punktlardan foydalangan holda, shu jumladan $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$), shuningdek, $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ nuqtada $y = f(x_1, x_2)$ ishlab chiqarish funksiyasi va xarajatlar funksiyasi $C = p_1x_1 + p_2x_2$ ning gradyanlari. ((Barcha taxminiy hisob-kitoblar verguldan keyin to‘rtta belgi bilan bajarilishi kerak.)

25.1-25.4 ish parametrlari:

25.1. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \breve{y} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}, p_1 = 3, p_2 = 2$

25.2. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \breve{y} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 2, p_1 = 2, p_2 = 3$

25.3. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \breve{y} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}, p_1 = 3, p_2 = 4$

25.4. $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \breve{y} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}, p_1 = 4, p_2 = 3$

3-BOB. CHIZIQLI DASTURLASH

3.1. Chiziqli dasturlashning asosiy tushunchalari. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini.
3.2. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qo‘yilishi va uning turli formada ifodalanishi.
3.3. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Grafik usul. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechish.

3.1. Chiziqli dasturlashning asosiy tushunchalari. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini

Chiziqli dasturlash matematik dasturlashning bir yo‘nalishi bo‘lib, u chegaralangan resurslar (xom ashyo, texnika vositalari, kapital qo‘yilmalar, yer, suv, mineral o‘g‘itlar va boshqalar)ni rasional taqsimlab eng ko‘p foyda olish yo‘llarini o‘rgatadi.

Chiziqli dasturlashning fan sifatida shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta’sir ko‘rsatdi. 1975 yilda chiziqli dasturlash nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot buyicha mutaxassis, “chiziqli dasturlash” atamasining birinchi muallifi, amerikalik olim T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli dasturlashning iqtisodiy nazariyaga qo‘shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli dasturlash chiziqli funksiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma’lumlarga chegaralovchi shartlar qo‘yilgandagi, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o‘rgatuvchi fandir.

Noma’lumlarga chiziqli chetlamalar qo‘yilgan chiziqli funksiyaning ekstremumini topish masalasi chiziqli dasturlash masalasi hisoblanadi. Shunday qilib, chiziqli dasturlash chiziqli funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Chiziqli dasturlash usullarini qo‘llab iqtisodiy jarayonlarning o‘ziga xos qonuniyatlarini o‘rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarni tuzish kerak. O‘rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:

1) masalaning iqtisodiy ma’nosi bilan tanishib, undagi asosiy sh artlar va maqsadni aniqlash;

2) masaladagi ma’lum parametrlarni belgilash;

3) masaladagi noma’lumlarni (boshqaruvchi o‘zgaruvchilarni) belgilash;

4) masaladagi cheklamalarni, ya’ni boshqaruvchi o‘zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo‘lgan chegaraviy sh artlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;

5) masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash. Bunday funksiya maqsad funksiya deb ataladi.

Boshqaruvchi o‘zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta(maksimum) yoki eng kichik(minimum) qiymat bersin. Bundan ko‘rinadiki, maqsad funksiyasi boshqaruvchi noma’lumotlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyasini foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko‘p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o‘rganamiz.

Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin: ulardan ixtiyoriy birini $i (i=l,..., m)$ bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun p xil ishlab chiqarish omillari zarur bo‘lsin. Ulardan ixtiyoriy birini j $(j=l,..., p)$ bilan belgilaymiz.

Har bir ishlab chiqarish omilining zahirasi va ularning bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan me’yori quyidagi jadvalda berilgan:

Ishlab chiqarish resurslari Ishlab chiqarilgan mahsulot turlari	1	2	3	…	n	Mahsulot birligidan olinadigan daromad
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	C_2
	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	C_m
Ishlab chiqarish resursining zahirasi	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Jadvaldagi har bir b_j ishlab chiqarish resursining zahirasini; a_{ij} i mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan j - resursning me'yori; c_i - korxonaning i - mahsulot birligini sotishdan oladigan daromadini bildiradi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: korxonaning ishlab chiqarish rejasini shunday tuzish kerakki: a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir ishlab chiqarish faktorining miqdori ularning zahirasidan oshmasin; b) mahsulotlarni sotishdan korxonananing oladigan daromadi maksimal bo'lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan i - mahsulotining miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{m1}x_m \le b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{m2}x_m \le b_2 \\ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 ... + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases} \tag{3.1}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra hamma noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni:

$$x_i \ge 0, (i = 1,2,..., m) \tag{3.2}$$

Masaladagi b) shartuning maqsadini aniqlaydi. Demak masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat va uni

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_{m1} \to \max \tag{3.3}$$

ko'rinishdi ifodalash mumkin.

Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalash tirish masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{m1}x_m \le b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{m2}x_m \le b_2 \\ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 ... + a_{mn}x_m \le b_n \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,..., x_{m1} \ge 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_{m1} \to \max .$$

Iste'mol savati masalasi

Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil A_1, $A_2, ...,$ A_n ozuqa moddalari kerak bo'lsin, jumladan A_1 ozzgqa moddasidan b_1

miqdorda, A_2 ozuqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 ozuqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n dan b_n miqdorda zarur bo‘lsin va ularni m ta B_l, B_2,..., B_m mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo‘lsin, har bir B_i mahsulot tarkibidagi ozuqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Ozuqa moddalari Mahsulotlar	A_1	A_2	…	A_n	Mahsulot bahosi
B_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	C_2
…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	C_m
Ozuqa moddaning minimal normasi	b_1	b_2	…	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: iste’mol savatiga qanday mahsulotlardan qanchadan kiritish kerakki, natijada: a) odam organizmi qabul qiladigan ozuqa moddasi belgilangan minimal normadan kam bo‘lmasin; b) iste’mol savatining umumiy bahosi minimal bo‘lsin.

Iste’mol savatiga kiritiladigan i mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 ... + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases} \tag{3.4}$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra hamma noma’lumlar manfiy bo‘la olmaydi, ya’ni:

$$x_i \geq 0, (i = 1,2,..., m) \tag{3.5}$$

Masaladagi b) shart uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste’mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo‘lib, uni quyidagi chiziqli funksiya ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_{m1} \to \min . \tag{3.6}$$

Shunday qilib “iste’mol savati” masalasining matematik modelini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 ... + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 ... + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1,2,..., m)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \rightarrow \min$$

ko‘rinishida yozish mumkin.

Optimal bichish masalasi

Faraz qilaylik korxonada m xil mahsulotlar tayyorlash (bichish) kerak bo‘lsin, hamda har bir i-mahsulotdan a_i miqdorda tayyorlash rejalashtirilgan bo‘lsin. Bu mahsulotlarni tayyorlash uchun n xil xomaki materiallar mavjud bo‘lib, har bir j-xomaki materialning uzunligi b_j birlikni tashkil qilsin. Xomaki materiallardan tayyor mahsulot ishlab chiqarish uchun l xil bichish usullarini qo‘llash mumkin bo‘lsin hamda har bir j-xomaki materialni k-usul bilan bichganda hosil bo‘ladigan i-mahsulot miqdori a_{ijk}, chiqindi esa C_{jk} birliklarni tashkil qilsin deb faraz qilamiz.

Masalaning berilgan parametrlarini quyidagi jadvalga joylashtiramiz:

Tayyorla-nadigan mahsulot turlari	Xomaki mahsulotlar va ularni kesish usullsri													Tayyor mahsu-lotlarni ishlab chiqa-rish rejasi
	B_1				B_2					B_n				
	1	2	...	l	1	2	...	l		1	2	...	l	
A_1	a_{111}	a_{112}	...	a_{111}	a_{121}	a_{122}	...	a_{121}	...	a_{1n1}	a_{1n2}	...	A_{1n1}	a_1
A_2	a_{211}	a_{212}		a_{211}	a_{221}	a_{222}	...	a_{221}	...	a_{2n1}	a_{2n2}	...	a_{2n1}	a_1
...	...	...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m11}	a_{m12}		a_{m11}	a_{m21}	a_{m22}	...	a_{m21}	...	a_{mn1}	a_{mn2}	...	a_{mn1}	a_m
Chiqin-dilar	C_{11}	C_{12}		C_{11}	C_{21}	C_{22}	...	C_{21}	...	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{n1}	

Xomaki materiallarni qaysi usul bilan bichganda hosil bo‘lgan tayyor mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo‘ladi, sarf qilingan xom ashyo materiallar miqdori ularning zahiraasidan oshmaydi hamda hosil bo‘lgan chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo‘ladi?

k-usul bilan bichiladigan *j*-xomaki materiallar miqdorini x_{jk} bilan belgilaymiz.

Ushbu belgilashlarda optimal bichish masalasining matematik modeli quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{112} ... + x_{1l} = b_1 \\ x_{21} + x_{22} ... + x_{2l} = b_2 \\ .... \\ x_{n1} + x_{n2} ... + x_{nl} = b_n \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} a_{111}x_{11} + a_{112}x_{12} ... + a_{1nl}x_{nl} = a_1 \\ a_{211}x_{11} + a_{212}x_{12} ... + a_{2nl}x_{nl} = a_2 \\ .... \\ a_{m11}x_{11} + a_{m12}x_{12} ... + a_{mnl}x_{nl} = a_m \end{cases} \tag{3.8}$$

$$x_{jk} \geq 0, (j = 1,2,..., n; k = 1,..., l) \qquad 3.9)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} c_{jk} x_{2jk} \to \min . \tag{3.10}$$

Bu erda (3.7) shart mavjud xomaki materiallarning hammasi kesilishi kerakligini, (3.8) shart tayyor mahsulotlar ishlab chiqarish bo‘yicha rejani to‘la bajarish zarurligini ko‘rsatadi.

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra undagi noma’lumlarning manfiy bo‘laolmasligi (3.9) shart orqali ifodalanadi. (3.10) shart masalaning maqsadidan iborat bo‘lib, u homaki materiallarni kesishdan hosil bo‘ladigan chiqindilarni eng kam (minimal) bo‘lishini ta’minlaydi.

Endi optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz.

Deylik, uzunligi *L* bo‘lgan xomaki materiallardan uzunliklari $\Delta_i, (i = \overline{1, m})$ bo‘lgan *m* xil detallarning har biridan a_i miqdorda tayyorlash kerak bo‘lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni $n_i, (j = \overline{1, n})$ usul bilan kesish hamda har bir *j*-usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda *i*-detal tayyorlash va c_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo‘lsin.

Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo‘ladi va hosil bo‘lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo‘ladi.

Masalaning ma'lum parametrlarini quyidagi ko'rinishdagi jadvalga joylashtiramiz.

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish uzullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	*2*	…	*n*	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	a_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	a_m
Ciqindilar miqdori	c_1	c_2	…	c_n	

j-usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinish-da yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_m = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_m \geq a_m, \end{cases} \qquad (3.11)$$

$$x_i \geq 0, (i = 1,2,..., n), \qquad (3.12)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min \qquad (3.13)$$

Bu yerda (3.11) shart har bir tayyor mahsulot bo'yicha reja to'liq bajarilishi kerakligini, (3.12) shart noma'lumlarning nomanfiyligini va (3.13) shart chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'lishini ko'rsatadi.

1-misol. Uzunligi 110 sm bo'lgan po'lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo'lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po'lat xipchinlarni kesish yo'llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar uzunligi	Kesish uzullari						Xomaki mahsulotlar ishlishlab chiqarish rejasi
	1	2	3	4	5	6	
35 sm	2	1	1	-	-	-	*40*
50 sm	-	1	-	3	1	-	*30*
45 sm	-	-	1	-	1	2	20
Ciqindilar miqdori	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo‘yicha qancha po‘lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo‘ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo‘ladi.

Yechish. *j*-usul bilan kesiladigan po‘lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45 sm bo‘lgan xomaki mahsulotlardan ja’mi

$$2x_1 + x_2 + x_3$$

Miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko‘ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 40.$$

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35 sm va 50 sm bo‘lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to‘la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda

$$x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$$

va

$$x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$$

tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra belgilangan noma’lumlar manfiy bo‘la olmaydi, demak

$$x_i \geq 0, (i = \overline{1,6})$$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo‘lgan chiqindilarning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funksiya ko‘rinishida ifodalaymiz.

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6.$$

Masalaning shartiga ko‘ra bu funksiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya’ni

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min$$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0,$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \to \min .$$

Hosil bo‘lgan ifoda optimal bichish masalasining matematik modelidan iborat bo‘ladi. ‘

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, B, C karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom ashyolar miqdori (me’yori), xomashyolarning zahirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomashyo turlari	1 tonna mahsulotga xomashyo sarfi (t. hisobida)			Xomashyo zahirasi (tonna)
	A	B	C	
Shaker	0,8	0,5	0,6	800
Qiyom	0,4	0,4	0,3	600
Quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotish-dan olinadigan daromad (shartli birlik)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun

$$0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$$

miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zahirasidan, ya’ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak,

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kerak. Xuddi shunday yo‘l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin:

$$0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600,$$

$$0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120.$$

Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, B karameldan - $112x_2$, C karameldan - $126x_3$ birlik va jami

$$108x_1 + 112x_2 + 126x_3$$

birlik daromad oladi. Bu yig‘indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. Natijada quyidagi funksiyaga ega bo‘lamiz:

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max \ .$$

Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}4x_2 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 = 20, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max \ .$$

3-masala. Odam organizmi uchun bir sutkada A ozuqa moddasidan 12 birlik, B ozuqa moddasidan esa 16 birlik kerak bo‘lsin. Bu ozuqa moddalarni P_1, P_2 mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo‘lsin.

Bir birlik P_1, P_2 mahsulotlar tarkibidagi A va B ozuqa moddalarining middori, mahsulotlar bahosi duyidagi jadvalda keltirilgan:

Mahsulotlar / Ozuqa moddalari	Bir birlik mahsulot tarkibidagi turli ozuqa moddalarning miqdori		Ozuqa moddalarning minimal me’yori
	P_1	P_2	
A	0,2	0,2	12
B	0,4	0,2	16
Mahsulotlar bahosi	2	4	

Bir kunlik ovqatlanish rejasini qanday tuzganda odam organizmi kerakli ozuqa moddalarni minimal me'yordan kam qabul qilmaydi hamda sarf qilingan xarajatlar eng kam (minimal) bo‘ladi?

Yechish: 1 sutkada ovqatlanish uchun sarf qilinadigan P_1 mahsulot miqdorini x_1 bilan, P_2 mahsulot miqdorini esa x_2 bilan belgilaymiz.

U holda odam organizmi A ozuqa moddasidan hammasi bo‘lib

$$0,2x_1 + 0,2x_2$$

miqdorda qabul qiladi. Shartga ko‘ra bu miqdor minimal me'yor 12 dan kam bo‘lmasligi kerak, ya'ni

$$0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 12 \text{ .}$$

Xuddi shunday yo‘l bilan B ozuqa moddasi uchun

$$0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 16$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko‘ra masaladagi noma'lumlar manfiy bo‘lmasligi kerak, ya'ni

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ .}$$

Masalaning maqsadi ovqatlanish uchun sarf qilingan xarajatlarni minimallashtirishdan iborat.

Bir sutkada sarf qilingan P_1 mahsulot uchun $2x_1$ birlik, P_2 mahsulot uchun $4x_2$ birlik va jami

$$Y = 2x_1 + 4x_2$$

miqdorda xarajat sarf qilinadi. x_1 va x_2 noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular Y funksiyaga eng kichik (minimum) qiymat bersin, ya'ni

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \to \min$$

shart bajarilsin.

Shunday qilib, berilgan masalaning m atematik modelini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 12, \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 16, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ,$$

$$Y = 2x_1 + 4x_2 \to \min$$

3.2. Chiziqli dasturlash masalasining umumiy qo‘yilishi va uning turli formada ifodalanishi

Chiziqli dasturlash masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n \geq (\leq) b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m, \end{cases} \qquad (3.14)$$

$$x_i \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \qquad (3.15)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min(\max). \qquad (3.16)$$

(3.14) va (3.15) shartlarni qanoatlantiruvchi noma’lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3.16) chiziqli funksiyaga minimal (maksimal) qiymat bersin. Masalaning (3.14) va (3.15) cheklamalari uning chegaraviy shartlari deb, (3.16) chiziqli funksiya esa masalaning maqsadi yoki maqsad funksiyasi deb ataladi.

Masaladagi barcha cheklama shartlar va maqsad f unktsiya chiziqli ekanligi ko‘rinib turibdi. Shuning uchun ham (3.14)-(3.16) masala chiziqli dasturlash masalasi deb ataladi.

Konkret masalalarda (3.14) shart tenglamalar sistemasidan, “≥” yoki “≤” korinishdagi tengsizliklar sistsmasidan yoki, aralash sistemadan iborat bo‘lishi mumkin. Lekin ko‘rsatish mumkinki, (3.14)-(3.16) ko‘rinishidagi masalani osonlik bilan quyidagi ko‘rinish ga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (3.17)$$

$$x_i \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \qquad (3.18)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min. \qquad (3.19)$$

(1.17)-(1.19) ko‘rinish chiziqli dasturlash masalasining kanonik ko‘rinishi deb ataladi. Bu masala vektorlar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0, \qquad (3.20)$$

$$X \geq 0, \qquad (3.21)$$

$$Y = C'X \to \min. \qquad (3.22)$$

bu yerda

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$C = c_1, c_2, ..., c_n$ - vektor – qator.

$X = x_1, x_2, ..., x_n$ - vektor – ustun.

(3.17)-(3.19) m asalaning m atrisa ko‘rinish dagi if odasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0, \tag{3.23}$$

$$X \geq 0, \tag{3.24}$$

$$Y = PC'X \to \min. \tag{3.25}$$

bu erda $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - qator vektor, $A = (a_{ij})$ - (3.17) sistema koeffitsientlaridan tashkil topgan matrisa; $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ va $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ - ustun vektorlar.

(3.17)-(3.19) masalani yigindilar yordamida ham ifodalash mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} = b_i, (i = 1, 2, ..., m), \tag{3.26}$$

$$x_j \geq 0, (j = 1, 2, ..., n), \tag{3.27}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \tag{3.28}$$

1-ta’rif. Berilgan (3.17)-(3.19) masalaning joiz yechimi yoki rejasi deb, uning (3.17) va (3.19) shartlarini qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorga aytiladi.

2–ta’rif. Agar joiz rejalar to‘plamiga tegishli bo‘lgan X^0 vektorning *n-m* ta koordinatasi (*n* – noma’lumlar soni, *m* - tenglamalar soni) nolga teng bo‘lib, qolgan *m* ta koordinatalariga mos kelgan shart vektorlar (masalan, $P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{n+m}$ vektorlar) chiziqli erkli bo‘lsa, u holda X^0 joiz reja bazis(asosiy) reja deyiladi.

3-ta’rif. Agar $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni *m* ga teng bo‘lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda aynigan bazis reja deyiladi.

4-ta’rif. Chiziqli funksiya (3.19) ga eng kichik qiymat beruvchi $X=(x_1, x_2,..., x_n)$ bazis reja masalaning optimal rejasi yoki optimal yechimi deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalasi ustida quyidagi teng kuchli almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. *maxY* ni *minY* ga aylantirish. Har qanday chiziqli dasturlash masalasini kanonik ko‘rinishga keltirish uchun (3.14) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga va *maxY* ni *minY* ga aylantirish kerak. *maxY* ni *minY* ga keltirish uchun, *maxY* ni teskari ishora bilan olish, ya’ni *-maxY=minY* yoki *maxY=-minY* ko‘rinish da olish yetarlidir.

Haqiqatdan ham, har qanday $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaning minimumi teskari ishora bilan olingan shu funksiya maksimumining qiymatiga teng, ya’ni

$$\min f(x_1, x_2,..., x_n) \text{ va } -\max[f(x_1, x_2,..., x_n)],$$

$$\max f(x_1, x_2,..., x_n) \text{ va } -\min[f(x_1, x_2,..., x_n)]$$

ifodalar noma’lumlarning bir xil qiymatlaridagina o‘zaro teng bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

2. Tengsizliklarni tenglamaga aylantirish. *n* noma’lumli

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$$

chiziqli tengsizlikni qaraymiz. Bu tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun uning chap tomoniga nomanfiy o‘zgaruvchini, ya’ni $x_{n+1} \ge 0$ ni qo‘shamiz.

Natijada *n + 1* noma’lumli chiziqli tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b \qquad (3.30)$$

tengsizlikni tenglamaga aylantirish uchun qo‘shilgan x_{n+1} o‘zgaruvchi qo‘shimcha o‘zgaruvchi deb ataladi.

(3.29) tengsizlik va (3.30) tenglamaning yechimlari bir xil ekanligi quyidagi teoremada ko‘rsatilgan.

1-teorema. Berilgan (3.29) tengsizlikning har bir $X=(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$ yechimiga (3.30) tenglamaning faqat bitta

$$Y=(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

yechimi mos keladi va aksincha, (3.30) tenglamaning har bir Y_0 yechimiga (3.29) tengsizlikning faqat bitta X_0 yechimi mos keladi.

Teorema isboti. Faraz qilaylik, X_0 (3.29) tengsizlikning нechimi bo‘lsin. U holda $\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2,..., \alpha_na_n \le b$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Tengsizlikning chap tomonini o‘ng tomonga o‘tkazib hosil bo‘lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz

$$0 \le b - (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n) = \alpha_{n+1} .$$

Endi $Y = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektorni (3.30) tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatamiz.

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + (b - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - ... - a_n\alpha_n) = b .$$

Endi agar Y_0 (3.30) tenglamani qanoatlantirsa, u holda u (3.29) tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko‘rsatamiz.

Shartga ko‘ra:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b ,$$

$$\alpha_{n+1} \ge 0 .$$

Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \ge 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \le b$$

Tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ (3.29) tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo‘l bilan chiziqli dasturlash masalasining cheklamalaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e’tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir - birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o‘zgaruvchilarni qo‘shish kerak. Masalan, agar chiziqli dasturlash masalasi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{3.31}$$

$$x_i \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0, \tag{3.32}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max . \tag{3.33}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, bu masaladagi tengsizliklarning chap tomoniga $x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0, ..., x_{n+m} \ge 0,$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar qo‘shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o‘zgaruvchilar $Y=C'X$ ga 0 koeffitsient bilan kiritiladi. Natijada berilgan (3.31)-(3.33) masala quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_m + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{3.34}$$

$$x_i \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0, x_{n+1} \ge 0, ..., x_{n+m} \ge 0 \tag{3.35}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + (c_{n+1}x_{n+1} + ... + c_{n+m}x_{n+m}) \to \max . \tag{3.36}$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \tag{3.37}$$

$$x_i \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0, \tag{3.38}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min . \tag{3.39}$$

ko‘rinishda berilgan chiziqli dasturlash masalasini kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin. Buning uchun qo‘shimcha $x_{n+1} \ge 0, ..., x_{n+m} \ge 0$ o‘zgaruvchilar tengsizliklardan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 ... + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 ... + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 ... + a_{mn}x_m - x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{3.40}$$

$$x_i \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0, x_{n+1} \ge 0, ..., x_{n+m} \ge 0 \tag{3.41}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + (c_{n+1}x_{n+1} + ... + c_{n+m}x_{n+m}) \to \min . \tag{3.42}$$

Endi chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining xossalari bilan tanishamiz. Buning uchun eng avval qavariq kombinasiya va qavariq to‘plam tushunchasini eslatib o‘tamiz.

5-ta’rif. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vektorlarning qavariq kombinasiyasi deb

$$\alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, i = \overline{1, n}$$

shartni qanoatlantiruvchi

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$$

vektorga aitiladi. n-o‘lchovli fazodagi har bir $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ vektorga koordinatalari $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bulgan nuqta mos keladi.

Shuning uchun bundan keyin $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ vektorni n – o‘lchovli fazodagi nuqta deb qaraymiz.

6-ta’rif. Agar *n* o‘lchovli vektor fazodagi C to‘plam o‘zining ixtiyoriy A_1 va A_2 nuqtalari bilan bir qatorda bu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo‘lgan $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 (\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ nuqtani ham o‘z ichiga olsa, ya’ni $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo‘lsa, bu to‘plam qavariq to‘plam deb ataladi.

2-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining mumkin bo‘lgan rejalaridan tashkil topgan to‘plam qavariq to‘plam bo‘ladi.

Isboti. Chiziqli dasturlash masalasining ixtiyoriy ikkita mumkin bo‘lgan rejasining qavariq kombinasiyasi ham reja ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 berilgan chiziqli dasturlash masalasining mumkin bo‘lgan rejalari bo‘lsin.

U holda

$$AX_1 = P_0, X_1 \geq 0, \tag{3.43}$$

$$AX_2 = P_0, X_2 \geq 0, \tag{3.43}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Endi x_1 va x_2 rejalarning qavariq kombinasiyasini tuzamiz,

$$X = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, 0 \leq \alpha \leq 1,$$

Hamda uni reja ekanligini ko‘rsatamiz:

$$AX = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha)Ax_2\,.$$

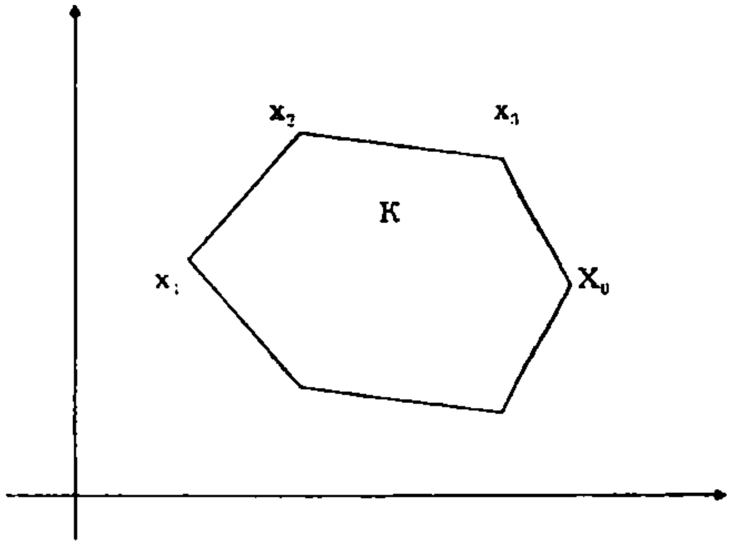
Endi (3.43) va (3.44) tenglamalarni inobatga olib topamiz:

$$AX = \alpha P_0 + (1-\alpha)P_0 = P_0\,.$$

Bu munosabat X vektor ham reja ekanligini ko‘rsatadi.

3-teorema. Chiziqli dasturlash masalasining maqsad funksiyasi o‘zining optimal qiymatiga shu masalaning rejalaridan tashkil topgan qavariq to‘plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar chiziqli funksiya *K* qavariq to‘plamning birdan ortiq burchak nuqtasida optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo‘lgan ixtiyoriy nuqtada ham o‘zining optimal qiymatiga erishadi.

Isboti. Deylik, X_0 nuqta chiziqli funksiyaga ekstremum qiymat beruvchi nuqta bo‘lsin. Agar X_0 nuqta burchak nuqta bo‘lsa, u holda teorema o‘z-o‘zidan isbot qilingan bo‘ladi. Faraz qilaylik, X_0 nuqta *K* qavariq to‘plamning ichki nuqtasi, $x_1, x_2, ..., x_n$ nuqtalar esa uning burchak nuqtalari bo‘lsin (3.1-rasm):



3.1-rasm.

X_0 nuqta chiziqli funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqta bo‘lganligi sababli

$$Y(X_0) \le Y(X)$$

tengsizlik ixtiyoriy $X \in K$ uchun o‘rinli bo‘ladi. X_0 nuqta ichki nuqta bo‘lganligi uchun uni burchak nuqtalarning qavariq kombinasiyasi orqali ifodalash mumkin:

$$X_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0, (i = \overline{1, p}) \qquad (3.45)$$

$Y(X)$ chiziqli funksional bo‘lganligi sababli

$$Y(X_0) = Y(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_p X_p) = \alpha_1 Y(X_1) + \alpha_2 Y(X_2) + ... + \alpha_p Y(X_p) = m, \qquad (3.46)$$

bu yerda m har qanday $X \in K$ uchun funksiyaning minimal qiymati.

(1.46) tenglikdagi har bir $Y(X_i)$ ni

$$\min Y(X_i) = Y(X_m)$$

bilan almashtirib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$Y(X_0) \ge \alpha_1 Y(X_m) + \alpha_2 Y(X_m) + ... + \alpha_p Y(X_m) = Y(X_m)(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p) = Y(X_m)$$

ya’ni

$$Y(X_0) \ge Y(X_m)$$

Bu tengsizlikni (3.46) tenglik bilan solish tirib quyidagiga ega bo‘lamiz

$$Y(X_0) = Y(X_m) = m.$$

Demak, X_m burchak nuqtada chiziqli funksiya o‘zining minimal qiymatiga erishar ekan.

Endi maqsad f unktsiya o‘zining minimal qiymatiga X_1, X_2, X_p nuqtalarda erishsin, ya’ni

$$Y(X_1)=Y(X_2)=...=Y(X_p)=m$$

shart o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz. Bu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo‘lgan X nuqtani qaraymiz.

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+...+\alpha_p X_p,$$

$$\alpha_i \geq 0, (i=\overline{1,p}),$$

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i=1$$

U holda

$$Y(X)=Y(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_p x_p)=\alpha_1 Y(X_1)+\alpha_2 Y(X_2)+...+\alpha_p Y(X_p)=$$
$$=m(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_p)=m$$

Demak, maqsad funksiya X nuqtada ham minimum qiymatga erishar ekan. Shu bilan teorema isbot qilindi.

4-teorema. Agar k ta o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $P_1, P_2, \ldots, P_k$ vektorlar berilgan bo‘lib, ular uchun

$$P_1 x_1+P_2 x_2+...+P_k x_k=P_0 \tag{3.47}$$

tenglik barcha $x_i \geq 0$ lar uchun o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$X=(x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, ..., 0)$$

vektor K qavari q to‘plamning burchak nuqtasi bo‘ladi.

Isboti. Ma’lumki, (3.47) tenglikni qanoatlantiruvchi nomanfiy koordinatali $X=(x_1, x_2, ..., x_k)$ vektor chiziqli dasturlash masalasining rejasi bo‘ladi. Deylik, X urchak nuqta bo‘lmasin. U holda X rejani X_1 va X_2 burchak nuqtalarning qavariq kombinasiyasi orqali ifodalash mumkin, ya’ni

$$X=\alpha_1 X_1+(1-\alpha_1)X_2,$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq 1.$$

X vektorning n-k ta komponentasi nolga teng bo‘lib, X_1 va X_2 vektorlarning koordinatalari musbat va $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lganligi sababli X_1 va X_2 vektorlarning ham n-k ta koordinatasi noldan iborat bo‘ladi, ya’ni

$$X_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_k^{(1)}, 0, 0, ..., 0),$$

$$X_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_k^{(2)}, 0, 0, ..., 0).$$

X_1 va X_2 vektorlar chiziqli dasturlash masalasining rejalari, shuning uchun

$$AX_1 = P_0,$$
$$AX_2 = P_0.$$

Tengsizlklar o‘rinli bo‘ladi. Bu shartlarni qyuidagi shaklda yozamiz:

$$P_1x_1^{(1)} + P_2x_2^{(1)} + ... + P_kx_k^{(1)} = P_0,$$
$$P_1x_1^{(2)} + P_2x_2^{(2)} + ... + P_kx_k^{(2)} = P_0$$

Ma’lumki, P_0 vektorning o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $P_1, P_2, ..., P_k$ vektorlar orqali faqat bitta yoyilmasini topish mumkin.

Shuning uchun

$$x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}$$

Demak, X vektorni K to‘plamning ixtiyoriy ikkita nuqtasining qavariq kombinasiyasi orqali ifodalash mumkin emas ekan. Bundan X nuqta K to‘plamning burchak nuqtasi bo‘ladi degan xulosa kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

5-teorema. Agar $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ burchak nuqta bo‘lsa, u holda musbat x_i larga mos keluvchi vektorlar o‘zaro chiziqli erkli vektorlar sistemasini tashkil qiladi

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. K to‘plamning har bir burchak nuqtasiga $P_1, P_2, ..., P_n$ vektorlar sistemasidan m ta o‘zaro chiziqli erkli vektorlar sistemasi mos keladi.

2-xulosa. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ K to‘plamning burchak nuqtasi bo‘lishi uchun musbat x_i koordinatalar

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0$$

yoyilmada o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan P_i vektorlarning koeffitsientlaridan iborat bo‘lishi zarur va etarli.

3-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasi bazis yechimlaridan tashkil topgan to‘plam K qavariq to‘plamning burchak nuqtalar to‘plamiga mos keladi va aksincha, har bir bazis yechim K to‘plamning biror burchak nuqtasiga mos keladi.

4-xulosa. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimini K to‘plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

3.3. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini. Grafik usul. Iqtisodiy masalani grafik usulida yechish.

Quyidagi ko‘rinish da yozilgan chiziqli dasturlash masalasini ko‘ramiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_i, (i=\overline{1,m}) \tag{3.48}$$

$$x_j \ge 0, (j=\overline{1,n}) \tag{3.49}$$

$$Y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)\,. \tag{3.50}$$

Ushbu chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini bilan tanishamiz.

Ma’lumki, n ta tartiblashgan x_1, x_2, ..., x_n sonlar n-ligi (birlashmasi) n o‘lchovli fazoning nuqtasi bo‘ladi. Shuning uchun (3.48)-(3.50) chiziqli dasturlash masalasining rejasini n o‘lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga ma’lumki, bunday nuqtalar to‘plami qavariq to‘plamdan iborat bo‘ladi. Qavariq to‘plam chegaralangan (qavariq ko‘pburchak), chegaralanmagan (qavariq ko‘p qirrali soha) bo‘lishi, bitta nuqtadan iborat bo‘lishi yoki bo‘sh to‘plam bo‘lishi ham mumkin.

Koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = a$$

tenglamani qanoatlantiruvchi (x_1, x_2, ..., x_n) nuqtalar to‘plami gipertekislik deb ataladi. Shu sababli

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = Y$$

ko‘rinishida yozilgan maqsad funksiyani Y ning turli qiymatlariga mos keluvchi o‘zaro parallel gipertekisliklar oilasi deb qarash mumkin.

Har bir gipertekislikning ixtiyoriy nuqtasida Y funksiya bir xil qiymatni qabul qiladi (demak, o‘zgarmas sathda saqlanadi). Shuning uchun ular “sath tekisliklari” deyiladi.

Geometrik nuqtai nazardan chiziqli dasturlash masalasini quyidagicha tavsiflash mumkin:

(3.48) va (3.49) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlar ko‘pburchagiga tegishli bo‘lgan shunday $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots , x_n^*)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funksiyaga maksimum(minimum) qiymat beruvchi (3.50) gipertekisliklar oilasiga tegishli bo‘lgan gipertekislik o‘tsin. Jumladan, $n=2$ da (3.48)-(3.50) masala quyidagicha talqin qilinadi: (3.48)-(3.49) shartlarni qanoatlantiruvchi echim lar ko‘pburchagiga tegiitli bo‘lgan sh unday $X^*=(x_1^*, x_2)$ nuqtani topish kerakki, bu nuqtada Y maqsad funksiyaga eng katta (eng kichik) qiymat beruvchi va (3.50) sath chiziqlar oilasiga tegishli bo‘lgan chiziq o‘tsin.

Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqiniga hamda yuqoridagi chiziqli dasturlash masalasi yechimining xossalariga tayanib masalani ba’zi hollarda grafik usulda yechish mumkin.

Ikki o‘lchovli fazoda berilgan quyidagi chiziqli dasturlash masalasini ko‘ramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{3.51}$$

$$x_i \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{3.52}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ . \tag{3.53}$$

Faraz qilaylik, (3.51) sistema (3.52) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega bo‘lsin. hamda yechimlardan tashkil topgan to‘plam chekli bo‘lsin. (3.51) va (3.52) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, (i = 1,2,..., m)$$

$x_1= 0, x_2= 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, (i = 1,2,..., m)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi yarim tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ to‘g‘ri chiziqning qaysi tomonida yotishini aniqlash uchun O(0;0) koordinata boshini mo‘ljal nuqta deb qarash mumkin. Agar $x_1=0, x_2= 0$ qiymatlarni (3.54) tengsizlikka qo‘yganda $b_i \ge 0$ tengsizlik hosil bo‘lsa, u holda qidirilayotgan Yari m tekislik $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ to‘g‘ri chiziqning ostida (koordinata boshi tomonida) yotadi, aks holda u bu to‘g‘ri chiziqning yuqorisida yotuvchi yarim tekislikdan iborat bo‘ladi.

Chiziqli funksiya (3.51) ham ma’lum bir o‘zgarmas $C_0=const$ qiymatda

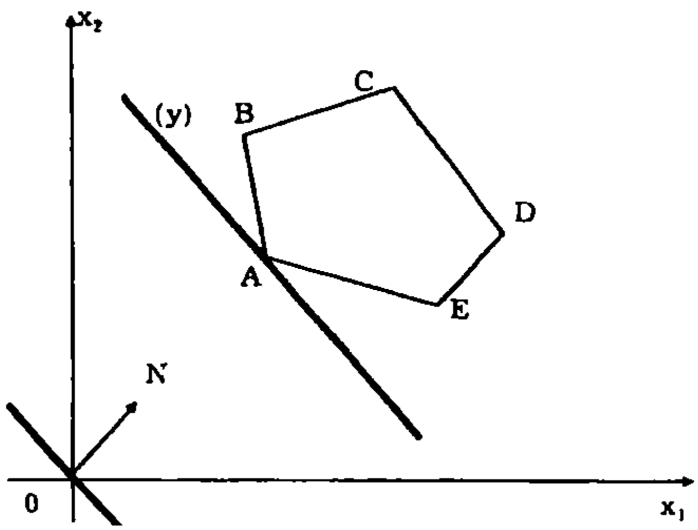
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

to‘g‘ri chiziqlar oilasiga tegishli bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Yechimlardan tashkil topgan qavariq to‘plamni hosil qilish uchun

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,..., a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m, x_1 = 0, x_2 = 0\ ,$$

to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan ko‘pburchakni yasaymiz.

Faraz qilaylik, bu ko‘pburchak ABCDE beshburchakdan iborat bo‘lsin (3.2-rasm).



3.2-rasm

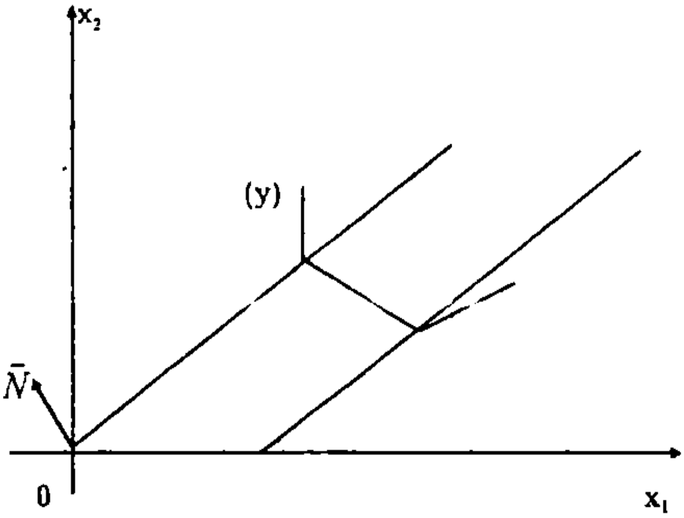
Chiziqli funksiyani ixtiyoriy o‘zgarmas C_0 songa teng deb olamiz. Natijada

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0 = const$$

to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqni $\overline{N}(c_1,c_2)$ vektor yo‘nalishida yoki unga teskari yo‘nalishida o‘ziga parallel surib borib qavariq ko‘pburchakning chiziqli funksiyaga eng katta yoki eng kichik qiymat beruvchi nuqtalarni aniqlaymiz. 3.2-rasmdan ko‘rinib turibdiki, chiziqli funksiya o‘zining minimal qiymatiga qavariq ko‘pburchakning *A* nuqtasida erishadi. *C* nuqtada esa, u o‘zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi. Birinchi holda $A(x_1,x_2)$ nuqtaning koordinatalari masalaning chiziqli funksiyasiga minimal qiymat beruvchi optimal yechimi bo‘ladi. Uning koordinatalari *AB* va *AE* to‘g‘ri chiziqlarni ifodalovchi tenglamalar orqali aniqlanadi.

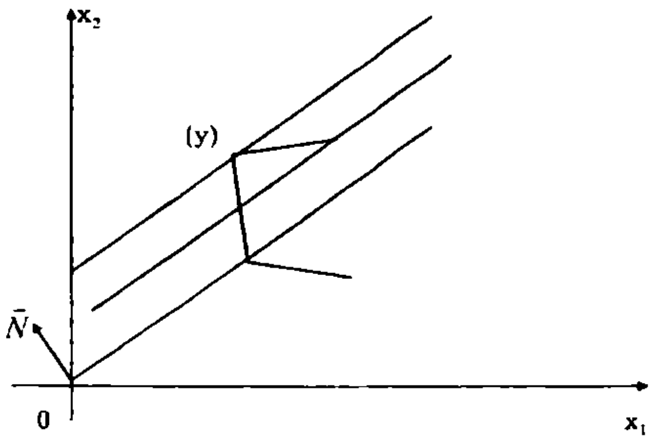
Agar yechimlardan tashkil topgan qavariq ko‘pburchak chegaralanmagan bo‘lsa, ikki hol bo‘lishi mumkin.

l-hol. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to‘g‘ri chiziq $\overline{N}$ vektor bo‘yicha yoki unga qarama-qarshi yo‘nalishda siljib borib har vaqt qavariq ko‘pburchakni kesib o‘tadi. Ammo na minimal, na maksimal qiymatga erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya quyidan va yuqoridan chegaralanmagan bo‘ladi (3.3-rasm)

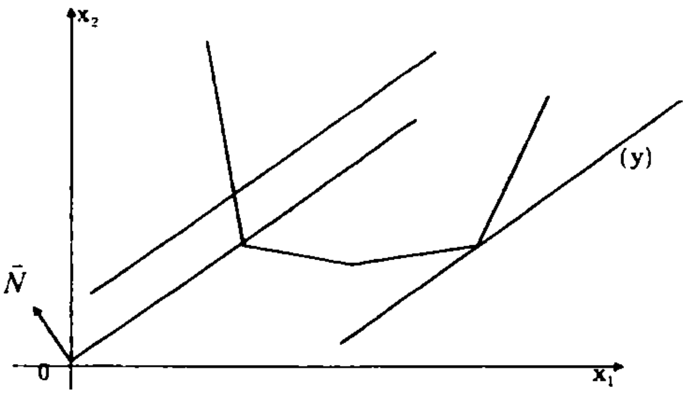


3.3-rasm

$c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$ to‘g‘ri chiziq $\overline{N}$ vektor buyicha siljib borib qavariq ko‘pburchakning birorta burchak nuqtasida o‘zining minimal yoki maksimum qiymatiga erishadi. Bunday holda chiziqli funksiya yuqoridan chegaralangan, quyidan esa chegaralanmagan (3.4-rasm) yoki quyidan chegaralangan, yuqoridan esa chegaralanmagan (3.5-rasm) bo‘lishi mumkin.



3.4-rasm



3.5-rasm

1-masala. Grafik usulda eching.

$4x_1 + 3x_2 \le 12$

$3x_1 + 4x_2 \le 12$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$Y = 2x_1 - 5x_2 \to \max$

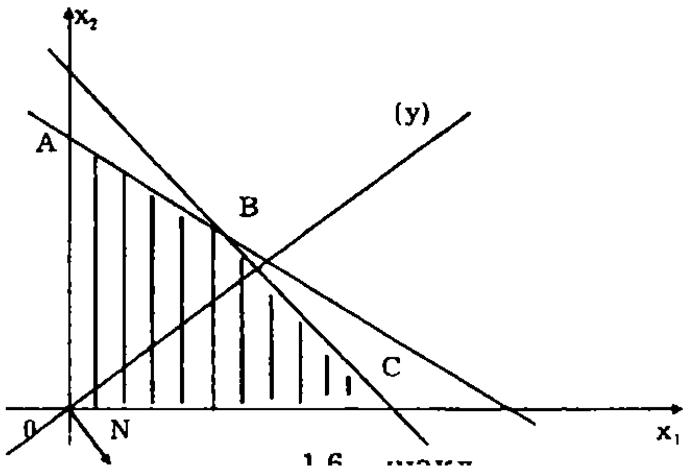
Yechish. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko‘pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$4x_1 + 3x_2 = 12, (L_1)$

$3x_1 + 4x_2 = 12, (L_2)$

$x_1 = 0, x_2 = 0$

Chiziqlar yasaymiz (3.6-rasm)



3.6-rasm

Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechim shtrixlangan *OABC* to‘rtburchakni tashkil qiladi. Endi koordinatalar boshidan

$\overline{N} = (2,5)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq

$$2x_1 - 5x_2 = const$$

tenglama orqali ifodalanadi. Uni $\overline{N}$ vektor yo‘nalishida o‘ziga parallel siljtib boramiz. Natijada chiziqli funksiyaga maksimal qiymat beruvchi *C(3;0)* nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari x_1=3, x_2=0 masalaning optimal yechimi bo‘ladi va $Y_{\max} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 6$ bo‘ladi.

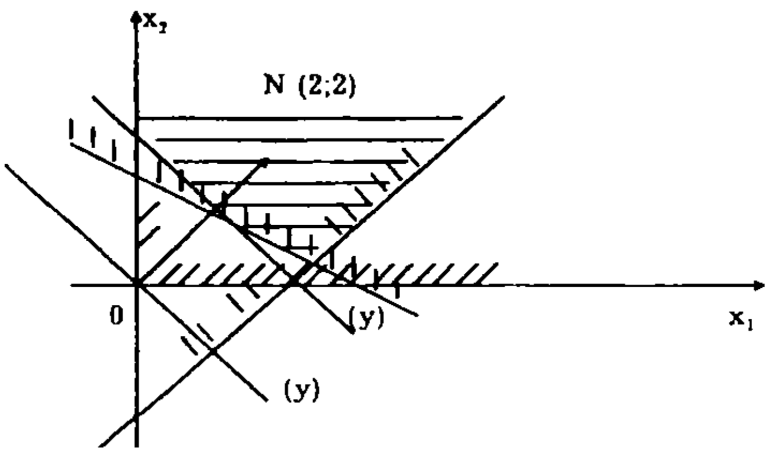
2-masala. Berilgan chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yeching.

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$Y = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$

Yechish. Yechim ko‘pburchagini hosil qilamiz. Uning uchun koordinatalar sistemasida

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_1 - x_2 = 2$$
$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

to‘g‘ri chiziqlar yasaymiz (3.7-rasm).



3.7-rasm

Rasmdan ko‘rinadiki, yechimlar ko‘pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\overline{N} = (2,2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu chiziq

$$2x_1 + 2x_2 = const$$

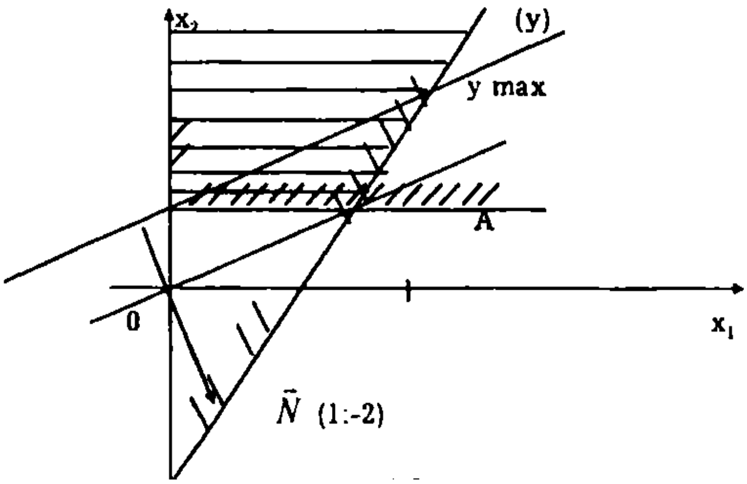
tenglama orqali ifodalanadi.

Rasmdan koʻrinadiki, masalada maqsad funksiyaning maksimum qiymati yuqoridan chegaralanmagan ekan.

3-masala. Grafik usulda yeching.

$$2x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 1,$$
$$Y = x_1 - 2x_2 \to \max$$

Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega boʻlamiz (3.8-rasm):



3.8-rasm

Rasmdan koʻrinadiki, yechimlar toʻplami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u *A* nuqta koordinatalaridan iborat.

Grafik usul yordami bilan iqtisodiy masalalarni yechish va yechimni tahlil qilish mumkin. Buni quyidagi iqtisodiy masala misolida koʻramiz.

Aytaylik, korxonada ikki xil boʻyoq ishlab chiqarilsin. Bu boʻyoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom ash yodan foydalanilsin. Xom ash yolarning zahirasi berilgan va ular 6 va 8 birlikni, ikkinchi boʻyoqqa boʻlgan talab 2 birlikni tashkil qiladi va u birinchi boʻyoqqa boʻlgan talabdan 1 birlikka katta.

Har bir boʻyoq birligini ishlab chiqarish uchun kerak boʻlgan xom ashyolar miqdori (me’yori) hamda korxonaning har bir boʻyoqdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom ashyolar Bo‘yoqlar	1	2	Bo‘yoqlar bahosi (shartli birlik)
I	1	2	3
II	2	1	2
Xom ashyo zahurasi (t)	6	8	

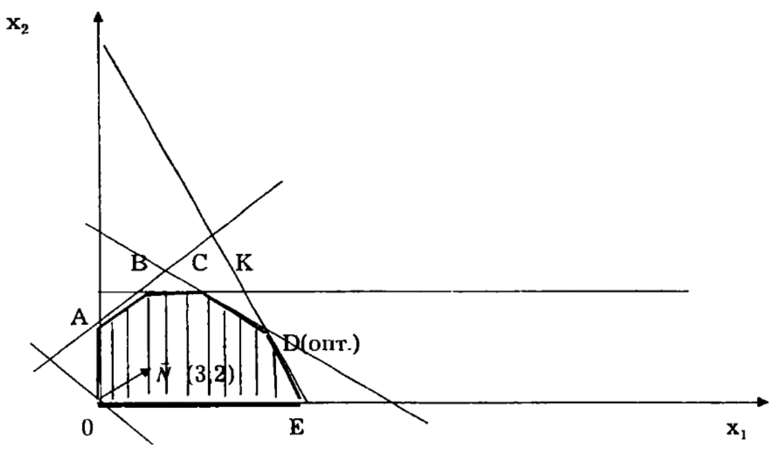
Masalaning iqtisodiy ma’nosi: Har bir bo‘yoqdan qancha ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xom ashyolar miqdori ularning zahiralaridan oshmaydi hamda talab bo‘yicha shartlar ham bajariladi?

Masaladagi noma’lumlarni belgilaymiz: x_1 - ishlab chiqarishga rejalashtirilgan I – bo‘yoq miqdori; x_2 - II – bo‘yoq miqdori;

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 \le 6,\\
&2x_1 + x_2 \le 8,\\
&-x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_1 \ge 0,\\
&x_2 \le 2,\\
&Y = 3x_1 + 2x_2 \to \max
\end{aligned}$$

Masalani grafik usulda yechamiz hamda $D\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz (3.9-rasm).



3.9-rasm

Demak, optimal yechim quyidagicha bo‘ladi:

$$x_1 = 3\frac{1}{3}, x_2 = 1\frac{1}{3}, Y_{\max} = 12\frac{2}{3}$$

Bundan ko‘rinadiki, korxona birinchi bo‘yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladgan daromadi oladgan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo‘ladi.

Endi grafik yordamida iqtisodiy masala yechimini tahlil qilish mumkin ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun optimal *D* nuqtaga qaraymiz.

Bu nuqta $2x_1 + x_2 = 8$ va $x_1 + 2x_2 = 6$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi ekanligidan berilgan iqtisodiy masalaning (1) va (2) chegaralovchi shartlari *D* nuqtada tenglamaga aylanishini ko‘rsatadi. Bu esa bo‘yoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xom ashyoning ham kamyob (defisit) ekanligini korsatadi. Optimal nuqta bilan bog‘liq bo‘lgan shartlar aktiv shartlar. Unga bog‘liq bo‘lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko‘rayotgan masalada mahsulotlarga bo‘lgan talabga qo‘yilgan $x_1 + x_2 \le 1$ va $x_2 \le 2$ shartlar optimal nuqtaga bog‘liq emasligini va shu sabali bu shartlar passiv shartlar ekanligini aniqlaymiz.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo‘lmaydi va ularning ma’lum darajada o‘zgarishi optimal yechimga ta’sir qilmaydi. Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o‘zgarishiga olib keladi.

Masalan, 1-xom ashyo zahirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta’sir ko‘rsatishini ko‘rish uchun uni 7 ga teng deb olamiz. U holda *CD* kesma o‘ziga parallel ravishda yuqoriga ko‘tariladi va *DCK* uchburchak hosil bo‘ladi. Endi *K* nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada x_2=2 va $2x_1 + x_2 = 1$ to‘g‘’ri chiziqlar kesishadi.

Shuning uchun endi masalaning (2) va (4) shartlari aktiv shartlarga, (1) va (3) shartlari esa passiv shartlarga aylanadi. *K* nuqtaning koordinatalari x_2=2, x_1=3. Demak, yangi optimal yechim

$$x_1 = 3, x_2 = 2, Y_{\max} = 13$$

bo‘ladi.

Optimal yechimda 1-xom ashyoga doir (1) chegaraviy shArt

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

ga teng bo‘ladi. Demak, 1-xom ashyoning eng ko‘p mumkin bo‘lgan zahirasi 7 ga teng bo‘lishi kerakligini ko‘rsatadi.

Xuddi shunday yo‘l bilan 2-xom ashyolar bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o‘zgartirishini ko‘rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo‘lmagan xom ashyolar miqdorini, optimal yechimga ta’sir qilmagan darajada, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko‘rsatish mumkin.

Yuqoridagi 3.9-rasmda *BC* kesma $x_2 = 2$ chiziqli, ya’ni masalaing 4 shartini ifodalaydi. Bu passiv shart. Maqsad funksiya qiymatini o‘zgartirmagan holda passiv shartni qanchalik o‘zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun *BC* kesmani o‘ziga parallel pastga to *D* nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = 1\frac{1}{3}$ bo‘ladi.

Demak, ikkinchi bo‘yoqqa bo‘lgan talabni optimal yechimga ta’sir qilmasdan $1\frac{1}{3}$ gacha kamaitirish mumkin ekan.

Shunday yo‘l bilan m asalaning optimal echimiga ta’si r etm asdan uning (3) passiv shartning o‘ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Nazorat savollari va topshiriqlari

1. Matematik dasturlashning predmeti nimadan iborat?
2. Iqtisodiy masalaning matematik modeli nima va u qanday tuziladi?
3. Chiziqli dasturlash masalasining chegaralovchi shartlari qanday ko‘rinishda boëlish i mumkin?
4. Ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasidagi nomaëlumlar, asosiy shartlar va maqsad funksiya qanday ma’noni bildiradi?
5. “Iste’mol savati” masalasidagi noma’lumlar, asosiy shartlar va maqsad funksiya qanday ma’noni bildiradi?
6. “Optimal bichish” masalasidagi noma’lumlar, asosiy shartlar va maqsad funksiya qanday maënoni bildiradi?
7. Umumiy ko‘rinishdagi chiziqli dasturlash masalasini qanday shakllarda ifodalash mumkin?
8. Chiziqli dasturlash masalasining joiz yechimi nima?
9. Chiziqli dasturlash masalasining bazis yechimini ta’riflang.

10. Aynigan va aynimagan bazis yechimlar nima?

11. Chiziqli dasturlash masalasining optimal yechimi nima?

12. Chiziqli dasturlash masalasida qanday teng kuchli almashtirishlarni bajarish mumkin?

13. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlaridan tashkil topgan to‘plam qanday to‘plam bo‘ladi?

14. Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko‘pburchakning burchak nuqtasi bilan bazis yechim orasida qanday bog‘lanish bor?

15. Maqsad funksiya o‘zining optimal qiymatiga qanday nuqtada erishadi?

16. Chiziqli dasturlash masalasining joiz rejasining mavjud emaslik shartlari qanday?

17. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik talqini qanday?

18. Chiziqli dasturlash masalasi yechimlarining qanday xossalariga asosan grafik usulni qo‘llash mumkin?

19. Chiziqli dasturlash masalasi rejalaridan tashkil topgan to‘plam qanday bo‘lishi mumkin?

20. Qanday holda chiziqli dasturlash masalasi birdan ortiq optimal yechimga ega bo‘lishi mumkin?

21. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechganda xom ashyolarning kamyob yoki kamyob emasligini qanday aniqlash mumkin?

22. Passiv va aktiv chegaralovchi shartlar nima?

23. Aktiv shartlarni (kamyob xom ashyolarni) bir birlikka oshirganda optimal yechim qanday o‘zgaradi?

24. Optimal yechimni o‘zgartirmagan holda passiv shartlarni qanchalik o‘zgartirish mumkin?

25. Mebel fabrikasida standart o‘lchamdagi fanerlardan mos ravishda 24, 31 va 18 dona 3 xil buyumlar uchun tayyor qismlar qirqilishi kerak. har bir faner tayyor qismlarga ikki xil usulda qirqilishi mumkin. Quyidagi jadvalda har bir qirqish usulida olinadigan tayyor qismlar soni va bunda hosil bo‘ladigan chiqindilar miqdori berilgan.

Tayyor qism turlari	Qirqish usulida hosil bo‘ladigan tayyor qismlar soni (dana)	
	1	2
I	2	6
II	2	4
III	2	3
Chiqondilar miqdori (sm^2)	12	16

Zarur miqdordan kam bo‘lmagan tayyor qismlar tayyorlash va eng kam chiqindiga ega bo‘lishi uchun fanerlardan nechtasini qaysi usulda qirqish kerak?

26. Ikki xil mahsulotni sotish da 4 xil resurslardan foydalaniladi. Mahsulotlar birligini sotish uchun sarf qilinadigan turli resurslar miqdori(me’yori) hamda har bir resursning zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	Har bir mahsulot birligiga sarf qilinadigan resurslar miqdori (me’yori)		Resurslar zahirasi
	I-mahsulot	II-mahsulot	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12
Mahsulot birligini sotishdan olinadigan daromad	2	3	16

Cheklangan resurslardan foydalanib savdo korxonasining daromadini maksimallashtiruvchi mahsulotlarni sotish rejasini toping.

27. Firma o‘z mahsulotini radio va televizion tarmoq orqali reklama qilish imkoniyatiga ega. Firma 1 oyda reklama uchun 1000 doll. miqdorida pul ajratgan. Radio orqali reklamaning har bir minutiga 5 doll., televizor orqali reklamaning har minutiga esa 100 doll., sarf

qilinadi. Firmaning radio reklamani telereklamaga nisbatan 2 marta ko‘iroq tashkil qilish xohishi bor.

Oldingi yillardagi tajriba shuni ko‘rsatadiki, bir minutli telereklama mahsulot sotilishini radio reklamaga nisbatan 25 marta ko‘proq ta’minlaydi.

Firmaning har oyda reklama uchun ajratiladigan mablag‘ini radio va telereklama o‘rtasida optimal taqsimlang.

28. Grafik usulda quyidagi tengsizliklar sistemasining yechimlar ko‘pburchagini toping.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 \le 4,\\
&4x_1 + 3x_2 \le 12,\\
&-x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_1 + x_2 \le 6,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 1.
\end{aligned}$$

29. Masalani grafik usulda yeching hamda undagi passiv va aktiv shartlarni aniqlang.

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 \le 1,\\
&3x_1 - x_2 \le 6,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 1,\\
&Y = 6x_1 - 2x_2 \to \max
\end{aligned}$$

30. Masalani grafik usulda yeching va maqsad funksiyaning optimal qiymatini o‘zgartirmagan holda masala cheklamalarini qanchalik o‘zgartirish mumkin ekanligini ko‘rsating.

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 7x_2 \le 21,\\
&7x_1 + 2x_2 \le 49,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 1,\\
&Y = 4x_1 + 4x_2 \to \max
\end{aligned}$$

4-BOB. QAVARIQ DASTURLASH

4.1. Qavariq dasturlashning asosiy tushunchalari.
4.2. Qavariq funksiyalarining xossasi.
4.3. Qavariq dasturlash. Kun-Takker shartlari.
4.4. Kun-Takker teoremasi.

4.1. Qavariq dasturlashning asosiy tushunchalari

$$X = \{X \in E_n \,/\, X = \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1, -\infty < \lambda < +\infty\} \qquad (4.1)$$

nuqtalar to‘plami $X_1, X_2 \in E_n$ nuqtalar orqali o‘tuvchi chiziqni aniqlaydi. $0 \le \lambda \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi λ uchun (4.1) $X_1, X_2 \in E_n$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani ifodalaydi. $0 \le \lambda \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi λ uchun $X = \lambda X_2 + (1-\lambda)X_1$ nuqta X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo‘ladi.

Agar $G \subset E_n$ to‘plam o‘zining ixtiyoriy X_1 va X_2 nuqtalari bilan birga bu nuqtalarning qavariq kombinasiyasini ham o‘z ichiga olsa, bunday to‘plam qavariq to‘plam deyiladi. $G \subset E_n$ qavariq to‘plamga tegishli X nuqtani ixtiyoriy $X_1, X_2 \in G$ nuqtalarning qavariq kombinasiyasi orqali ifoda etib bo‘lmasa, bu nuqta G to‘plamning burchak nuqtasi deyiladi. Burchak nuqta chegaraviy nuqta bo‘lishi kerak, lekin har qanday chegaraviy nuqta burchak nuqta bo‘lmaydi. Ba’zi chegaraviy nuqtalar burchak nuqtalarini tutashtuvchi kesmada yotishi mumkin. Agar G to‘plam qavariq to‘plam bo‘lsa, u ixtiyoriy sondagi $X_1, X_2, ..., X_n \in G$ nuqtalarning qavariq kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan X nuqtani ham o‘z ichiga oladi, ya’ni agar $X_1 \in G, X_2 \in G, ..., X_n \in G$, bo‘lsa,

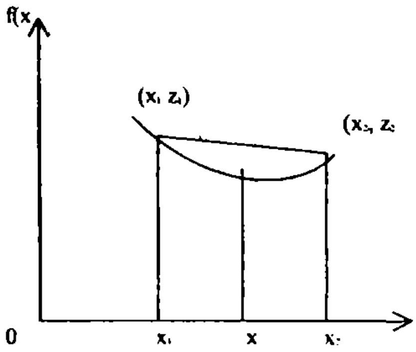
$$X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i X_j,\ X \in G, \lambda_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

bo‘ladi.

1-ta’rif. Agar *f(X)* funksiya $G \subset E_n$ qavariq to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy $X_1 \in G$, $X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ son uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1) \qquad (4.2)$$

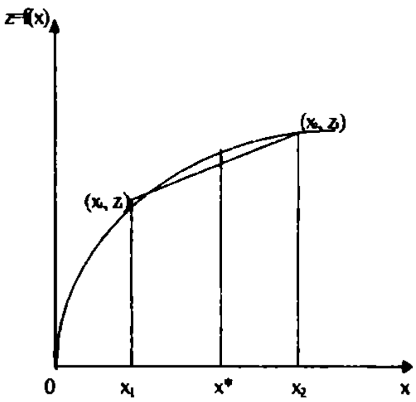
tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, *f(X)* funksiya pastga qavariq funksiya deyiladi. Boshqacha aytganda, *Z=f(X)* gipertekslik pastga qavariq bo‘lishi uchun uning ixtiyoriy ikkita *(X_1Z_1)* va *(X_2Z_2)* nuqtalarni tutashtiruvchi kesma gipertekislikning sirtida yoki undan yuqorida yotishi kerak (4.1-shakl). Agar *f(X)* funksiya $G \subset E_n$ qavariq to‘nlamda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy $X_1 \in G, X_2 \in G$, nuqtalar va λ son ($0 \le \lambda \le 1$) uchun



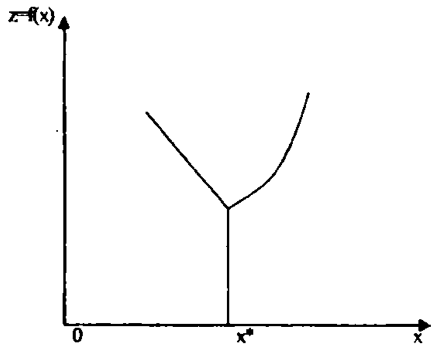
4.1-rasm

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \qquad (4.3)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, *f(X)* funksiyani yuqoriga qavariq funksiya deb ataladi. *Z=f(X)* gipertekislik yuqoriga qavariq bo‘lsa, uning ixtiyoriy ikkita (X_1, Z_1) va (X_2, Z_2) nuqtalarni tutashtiruvchi kesma shu gipertekislikning sirtida yotadi yoki uning pastidan o‘tadi.



4.2-rasm



4.3-rasm

Agar ixtiyoriy ikkita $X_1 \in G, X_2 \in G$, nuqtalar va λ son ($0 \le \lambda \le 1$) uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) < \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \qquad (4.4)$$

yoki

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) > \lambda f(X_2) + (1-\lambda)f(X_1) \qquad (4.5)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, $G \in E_n$ qavariq to‘plamda aniqlangan *f(X)* funksiya qat’iy pastga qavariq yoki qat’iy yuqoriga qavariq bo‘ladi.

Geometrik nuqtai nazardan qat’iy pastga (yuqoriga) qavariq funksiyaning ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma unga nisbatan yuqoridan (pastdan) o‘tadi.

Agar *f(X)* funksiya $G \in E_n$ da qat’iy yuqoriga qavariq bo‘lsa, *f(X)* funksiya shu to‘plamda qat’iy pastga qavariq bo‘ladi va aksincha. 4.3-rasmda *f(X)* funksiya $X>X^*$ da qat’iy pastga qavariq bo‘lib, $X<X^*$ qat’iy pastga qavariq emas.

1-misol. $Z=CX$ chiziqli funksiya E_n fazoning har qanday nuqtasida pastga (yuqoriga) qavariq bo‘ladi. Haqiqatan, ixtiyoriy ikkita $X_1 \in G, X_2 \in G$, nuqtalar va λ son ($0 \le \lambda \le 1$) uchun

$$C(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) = \lambda CX_2 + (1-\lambda)CX_1 \qquad (4.6)$$

o‘rinli, lekin (4.6) dan ko‘rinadiki, chiziqli funksiya qat’iy yuqoriga ham, pastga ham qavariq bo‘la olmaydi.

Agar *f(X)* funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan pastga qavariq funksiya bo‘lsa, ixtiyoriy sondagi $X_1 \in G, X_2 \in G, ..., X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j) \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \qquad \lambda_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \qquad (4.7)$$

Xuddi shuningdek, agar *f(X)* funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan yuqoriga qavariq funksiya bo‘lsa, ixtiyoriy sondagi $X_1 \in G, X_2 \in G, ..., X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j) \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \qquad \lambda_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \qquad (4.8)$$

4.2. Qavariq funksiyalarining xossasi

Qavariq funksiyalarning ayrim xossalari bilan tanishamiz.

1-xossa. G qavariq to‘plamda berilgan f(X) funksiya pastga qavariq bo‘lsa, ixtiyoriy haqiqiy b son uchun f(X)< b tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $X_1 \in G, X_2 \in G,..., X_n \in G$ nuqtalar berilgan bo‘lib, ular $f(X_1) \le b$ va $f(X_2) \le b$ tengsizligini qanoatlantirsin. U holda

$$X = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2, \quad X \in G,$$

nuqta uchun $f(X) = f((1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \le b)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Haqiqatan ham, *f(X)* pastga qavariq funksiya bo‘lganligi sababli:

$$f(X) = f((1-\lambda)X_1 + \lambda X_2 \le (1-\lambda)f(X_1) + \lambda f(X_2) \le b)$$

2-xossa. G qavariq to‘plamda berilgan *f(X)* funksiya yuqoriga qavariq bo‘lsa, b ixtiyoriy son bo‘lganda $f(X) \ge b)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami yuqoriga qavariq bo‘ladi.

3-xossa. Ikkita G_1 va G_2 qavariq to‘plamning kesishmasi ham qavariq to‘plam bo‘lganligi sababli yuqoridagi 1-2 xossalardan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: G qavariq to‘plamda aniqlangan g, (X) ($i = \overline{1,m}$) funksiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lib, b, ($i = \overline{1,m}$) ixtiyoriy sonlar bo‘lganda $g,(X) \le b_i (g_i(X) \ge b_i), i = \overline{1,m}$ tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami pastga (yuqoriga) qavariq bo‘ladi.

4-xossa. G qavariq to‘plamda aniqlangan g, (X) ($i = \overline{1,m}$) funksiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinasiyasidan iborat bo‘lgan

$$g(x) = \sum_{I=1}^{M} \lambda_I g_I(X), \lambda_i \ge 0, i = \overline{1,m}, \tag{4.9}$$

funksiya ham pastga (yuqoriga) qavariq bo‘ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, *$g_i(X)$* funksiyalar pastga qavariq funksiyalar bo‘lsin, ya’ni

$$g_i(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda g_i(X_1) + (1-\lambda)g_i(X_2) \tag{4.10}$$

tengsizlik ixtiyoriy haqiqiy son $0 \le \lambda \le 1$ uchun o‘rinli bo‘lsin.

U holda

$$g_i(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \sum_{i=1}^{m} \lambda g_i(X_1 + (1-\lambda)X_2)$$

Bundan (4.10) ga asosan

$$g_i(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\lambda g_i(X_1 + (1-\lambda)g_i X_2)), \qquad 0 \le \lambda_i \le 1, i = \overline{1,m}$$

yoki

$$g_i(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X_1) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X_2) = \lambda g(X_1) + (1-\lambda)g(X_2). \tag{4.11}$$

(8.11) dan *g(X)* funksiyaning pastga qavariq ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, yuqoriga qavariq funksiyalarning chiziqli kombinasiyasi ham yuqoriga qavariq bo‘lishini isbot qilish mumkin.

5-xossa. G qavariq to‘plamda aniqlangan *f(X)* funksiya pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lishi uchun u o‘z ichiga olgan noma’lumlarning ixtiyoriy biri bo‘yicha, qolganlarning tayin qiymatlarida, pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lishi zarur va yetarlidir.

6-xossa. Agar $f_1(X)$, $f_2(X), \ldots,$ $f_n(X)$ funksiyalar qavariq G to‘plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo‘lsa,

$$f(X) = \max_{1 \le i \le m} f_i(X)$$

funksiya ham qavariq bo‘ladi.

Qavariq funksiyaning ekstremumi

f(X) qavariq funksiyaning $G \subset E_n$ to‘plamdagi global maksimumi (minimumi) deb, ixtiyoriy $X \in G$ nuqtada ham $f(X^0) \ge \varepsilon(X^0)(f(X^0) \le f(X))$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^0 \in G$ nuqtaga aytamiz. Agar bu tengsizlik $X^0 \in \varepsilon(X^0)$ $\left(\varepsilon(X^0) = \{X \mid |X - X^0| < \varepsilon\}\right)$ nuqtada o‘rinli bo‘lsa, X^0 nuqta *f(X)* funksiyaga mahalliy maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta bo‘ladi.

Qavariq funksiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremalarni keltiramiz:

1-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan pastga qavariq funksiya bo‘lsa, uning ixtiyoriy mahalliy minimumi global minimum bo‘ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, *f(X)* funksiya va $X^0 \in G$ da mahalliy $X^\bullet \in G$ nuqtada global minimumga erishsin. U holda $f(X^0) > f(X^\bullet)$. *f (X)* funksiya pastga qavariq bo‘lganligi sababli, ixtiyoriy 0<λ<1 uchun

$$f(\lambda X^\bullet + (1-\lambda)X^0) > \lambda f(X^\bullet) + (1-\lambda) f(X^0) \qquad (4.12)$$

G to‘plamning qavariqligidan esa

$$X = \lambda X^\bullet + (1-\lambda)X^0 \in G, \lambda \in [0,1].$$

(8.12) dagi $f(X^\bullet)$ ni $f(X^0)$ ga almashtirsak,

$$f(\lambda X^\bullet + (1-\lambda)X^0) \le \lambda f(X^\bullet) + (1-\lambda) f(X^0) = f(X^0) \qquad (4.13)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. λ sonni shunday tanlab olamizki, natijada $X = \lambda X^{\bullet} + (1-\lambda)X^0$ nuqta X^0 nuqtaga iloji boricha yaqin, ya'ni $|X - X^0| < \varepsilon$ bo'lsin. Lekin, bu holda (4.13) dan ko'rinadiki, X^0 nuqtada *f(X)* funksiya mahalliy minimumga erishmaydi. Bu teorema shartiga qarama-qarshidir. Demak, $X^{\bullet} = X^0$ bo'lishi kerak

2-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to'plamda pastga (yuqoriga) qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalarda global ekstreumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

Isboti. Faraz qilaylik, berilgan *f(X)* funksiya ikkita X_1 va X_2 nuqtalarda global minimumga erishsin. U holda ixtiyoriy $X \in G$ nuqta uchun $m = f(X_1) = f(X_2) < f(X)$ o'rinli bo'ladi. Bu erda *m* *f(X)* funksiyasining global minimum qiymati. Endi X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan $\hat{X}$ nuqtani olamiz:

$$\hat{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$$

hamda bu nuqtadagi *f(X)* funksiyaning qiymatini aniqlaymiz:

$$f(\hat{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2).$$

f(X) funksiya pastga qavariq funksiya bo'lgani uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$f(\hat{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2).$$

Bundan $f(X_1) = f(X_2) = m$ ekanini hisobga olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$f(\hat{X}) = f(X_1) = m.$$

Demak, $\hat{X}$ nuqtada ham *f(X)* funksiya global minimumga erishadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

Xuddi shunday yo'l bilan yuqoriga qavariq *f(X)* funksiya G qavariq to'plamda qavariq bo'lib, unga tegishli ikkita X_1 va X_2 nuqtalarda global maksimumga erishsa, u shu nuqtalarning ixtiyoriy qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan X nuqtada ham global maksimumga erishishini ko'rsatish mumkin.

3-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy pastga qavariq funksiya bo'lsa, u o'zining global minimumga shu to'plamning faqat bitta nuqtasida erishadi.

Isboti. Faraz qilaylik, *f(X)* funksiya ikkita $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalarda global minimumga erishsin, ya'ni

$$\hat{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \tag{8.14}$$

bu yerda *m f(X)* funksiyaning global minimum qiymati. Endi X_1 va X_2 nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan

$$\hat{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$$

nuqtani qaraymiz. Yuqorida isbot qilingan teoremaga asosan

$$f(\hat{X}) = m \tag{4.15}$$

Ikkinchi tomondan *f(X)* funksiya qat'iy pastga qavariq bo'lganligi sababli

$$f(\hat{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) < \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2).$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan (4.14) ga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(\hat{X}) = f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) < m.$$

Shunday qilib, (4.15) ga zid bo'lgan xulosaga keldik. Shuning uchun farazimiz noto'g'ri bo'lib, teorema shartini qanoatlantiruvchi *f(X)* funksiya G to'plamning faqat bitta nuqtasida global minimumga erishadi degan xulosaga kelamiz.

4-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy yuqoriga qavariq funksiya bo'lsa, u o'zining global maksimumiga shu to'plamning faqat bitta nuqtasida erishadi.

Bu 3-teorema kabi isbot qilinadi.

5-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan pastga qavariq va differentsiallanuvchi funksiya bo'lsa, ixtiyoriy ichki $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalar uchun

$$[\nabla f(X^0)](X - X^0) \le f(X) - f(X^0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu erda $\nabla f(X^0)$ funksiyasining X^0 nuqtadagi gradienti:

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)$$

Isboti. *f(X)* funksiya pastga qavariq bo'lganligi sababli ixtiyoriy 0<X<1 son uchun

$$f(\lambda X + (1-\lambda) X^0) \le \lambda f(X) + (1-\lambda) f(X^0)$$

yoki

$$f(X^0 + \lambda(X - X^0) \le f(X^0) + \lambda(f(X) - f(X^0))$$

Bundan

$$f(X^0+\lambda(X-X^0))-f(X^0)\le\lambda(f(X)-f(X^0))$$

yoki

$$\frac{f(X^0+\lambda(X-X^0))-f(X^0)}{\lambda}\le f(X)-f(X^0) \qquad (4.16)$$

U holda Teylor formulasiga asosan

$$f(X^0+\lambda(X-X^0))-f(X^0)=\nabla f(X^0+\theta\lambda(X-X^0)\lambda(X-X^0) \quad 0\le\theta\le 1$$

munosabat o‘rinli bo‘lganligi sababli ixtiyoriy $\lambda\ne 0$ uchun (4.16) quyidagiga teng kuchli bo‘ladi:

$$[\nabla f(X^0+\theta\lambda(X-X^0))]^{'}(X-X^0)\le f(X)-f(X^0) \quad 0\le\theta\le 1$$

bunda $\lambda\to 0$ da isbotlash talab qilingan

$$[\nabla f(X^0)]^{'}(X-X^0)\le f(X)-f(X^0),\forall X\in G$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Shunday yo‘l bilan, *f(X)* yuqoriga qavariq funksiya bulgan hol uchun

$$[\nabla f(X^0)]^{'}(X-X^0)\ge f(X)-f(X^0)$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

6-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan pastga qavariq va differentsiallanuvchi funksiya bo‘lib, ixtiyoriy $x^0\in G$ nuqtada $\nabla fX^0)=0$ bo‘lsa, *f(X)* funksiya X^0 nuqtada global minimumga erishadi.

Isboti. *f(X)* funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan pastga qavariq va differentsiallanuvchi bo‘lgani uchun yuqoridan isbot qilingan 5-teoremaga asosan

$$[\nabla f(X^0)]^{'}(X-X^0)\le f(X)-f(X^0),\forall X\in G \qquad (4.17)$$

bundan tashqari teorema shartiga ko‘ra

$$\nabla f(X^0)=0\,.$$

U holda (4.17) dan

$$f(X)-f(X^0)\ge 0\,,$$

ya’ni

$$f(X^0)\le f(X),\forall X\in G\,.$$

Demak, X^0 nuqtada *f(X)* funksiya eng kichik qiymatga (global minimumga) erishadi. Shu bilan teorema isbot qilindi.

7-teorema. Agar *f(X)* funksiya G qavariq to‘plamda aniqlangan yuqoriga qavariq va differentsiallanuvchi funksiya bo‘lib, ixtiyoriy

$x^0 \in G$ nuqtada $\nabla f(X^0)=0$ bo‘lsa, *f(X)* funksiya X^0 nuqtada global maksimumga erishadi.

Bu teorema 6-teorema kabi isbot qilinadi.

4.3. Qavariq dasturlash. Kun-Takker shartlari.

Qavariq dasturlash optimallashtirish masalasining bir bo‘limi bo‘lib, u pastga (yuqoriga) qavariq to‘plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o‘rgatadi. Boshqacha qilib aytganda, qavariq dasturlash masalasi deganda

$$g(X)=g_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i,\ i=\overline{1,m} \tag{4.18}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}\ , \tag{4.19}$$

$$Z=f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \max(\min) \tag{4.20}$$

ko‘rinishdagi masala nazarda tutiladi, bunda *g_j(X), f(X)* funksiyalar $G\in E_n$ qavariq to‘plamda aniqlangan pastga qavariq funksiyalar. Agar *f(X), g_j(X)* funksiyalar G da aniqlangan yuqoriga qavariq funksiyalar bo‘lsa, qavariq dasturlash masalasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$g_i(X)=g_i(x_1,x_2,...,x_n)\ge b_i,\ i=\overline{1,m} \tag{4.21}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,n}\ , \tag{4.22}$$

$$Z=f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \max \tag{4.23}$$

(8.23) (8.18)—(8.20) va (8.21)-(8.23) masalalarning echimini aniqlashda klassik Lagranj usulini chegaraviy shartlari orasida tengsizliklar qatnashgan masalalar uchun umumlashtirishga ko‘makla-shuvchi kun-Tekker teoremasi Markaziy o‘rin egallaydi. Kun-Tekker teoremasi (4.18)-(4.20) yoki (4.21)-(4.23) masalaning optimal echimi bilan bu masala uchun tuzilgan Lagranj funksiyasining egar nuqtasi orasidagi munosabatni o‘rgatadi. (4.18)-(4.20), (4.21)-(4.23) masalalarga mos keluvchi Lagranj funksiyasini yuqorida ko‘rilgan usul’ yordamida tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)=\lambda_0 f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n))$$

yoki vektor ko‘rinishida

$$F(X,\Lambda)=\lambda_0 f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X) \tag{4.24}$$

bu yerda $\lambda_i(i=\overline{0,m})$ Lagranjning noma’lum ko‘paytuvchilari bo‘lib,

$$\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m),X=(x_1,x_2,...,x_m)'$$

1-ta’rif. Agar $X^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ nuqtada $F(X^0,\Lambda)$ funksiya minimumga erishib, $\Lambda^0=(\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_m^0)$ nuqtada $F(X,\Lambda^0)$ funksiya maksimumga erishsa, (X^0,Λ^0) nuqta Lagranj funksiyasi $F(X,\Lambda)$ ning egar nuqtasi bo‘ladi. Agar (X^0,Λ^0) nuqta Lagranj funksiyasi $F(X,\Lambda)$ ning egar nuqtasi bo‘lsa, u holda X^0 ning kichik musbat ε atrofidagi ($\varepsilon(X^0)=\{X\,|\,|X-X^0|<\varepsilon\}$) ixtiyoriy $X\geq 0$ uchun va Λ^0 ning ε atrofidagi ($\varepsilon(\Lambda^0)=\{\Lambda\,|\,|\Lambda-\Lambda^0|<\varepsilon\}$) ixtiyoriy $\Lambda\geq 0$ uchun

$$F(X^0,\Lambda)\leq F(X^0,\Lambda^0)\leq F(X,\Lambda^0) \tag{4.25}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Agar $F(X,\Lambda)$ Lagranj funksiyasi (4.21-4.23) masala uchun tuzilgan bo‘lsa, bu munosabat quydagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$F(X,\Lambda^0)\leq F(X^0,\Lambda^0)\leq F(X^0,\Lambda) \tag{4.26}$$

(4.25), (4.26) munosabatlar Lagranj funksiyasi (4.24) ning egar nuqtasining mavjudligi haqidagi, *f(X)* va *g_i(X)* ($i=\overline{1,m}$) funksiyalar differentsiallanuvchi bo‘lmagan hol uchun, zaruriy va etarlilik shartlaridan iborat.

f(X) va *g_i(X)* ($i=\overline{1,m}$) funksiyalar differentsiallanuvchi bo‘lgan holda Lagranj funksiyasi (4.24) ning egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari (4.18)-(4.20) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j\geq 0 \tag{4.27}$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j=0, x_j^0\geq 0 \tag{4.28}$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j\leq 0 \tag{4.29}$$

$$\lambda_i^0\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial\lambda_j=0, \lambda_j^0\geq 0 \tag{4.30}$$

Maqsad funksiyasining maksimumi qidirilgan (4.21)-(4.23) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko‘rinishgs ega bo‘ladi

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j\leq 0 \tag{4.31}$$

$$x_j^0\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j=0, x_j^0\geq 0 \tag{4.32}$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j\leq 0 \tag{4.33}$$

$$\lambda_i^0\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial\lambda_j=0, \lambda_j^0\geq 0 \tag{4.34}$$

Agar (4.27)-(4.30) va (4.31)-(4.34) munosabatlar bajarilsa, (4.25)-(4.26) munosabat o‘z o‘zidan bajariladi. Shuning uchun, bundan keyin Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligi haqida kun-Takker shartlari sifatida (4.27)-(4.30) va (4.31)-(4.34) shartlarni tushunamiz. Bunda quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

Teorema. $F(X,\Lambda)$ funksiya egar nuqtaga ega bo‘lishi uchun maqsad funksiyaning minimumi qidiriladigan (4.18)-(4.20) masala uchun (4.27)-(4.30) shartlarning, maqsad funksiyaning maksimumi qidirilayotgan (4.21)-(4.23) masala uchun (4.31) - (4.34) shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir.

Qavariq dasturlash masalasi (4.18)-(4.20) uchun ekstremum mavjudligining zaruriy va etarlik shartlari qanday hosil bo‘lishi bilan tanishamiz. Buning uchun masalaga m+n ta $s_i,(i=\overline{1,m})$ va $t_j,(j=\overline{1,n})$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritib, uni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n)+s_i=b_i,\, i=\overline{1,m} \tag{4.35}$$

$$x_j-t_j\ge 0,\, j=\overline{1,n}\ , \tag{4.36}$$

$$s_j\ge 0, t_j\ge 0,\, j=\overline{1,n}\ , \tag{4.37}$$

$$Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to \min \tag{4.38}$$

(4.37) tengsizliklar berilgan masalaning chegaraviy shartlaridan iborat bo‘lib, noma’lumlarga nomanfiylik sharti qo‘yilganligidan dalolat beradi. (4.35-4.38) masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\Lambda)=\lambda_0 f(x_1,x_2,...,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[b_i-s_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)]+\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_j}(t_j-x_j) \tag{4.39}$$

Mahalliy ekstremum mavjudligining zaruriy shartidan:

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial x_j=0,\, j=\overline{1,n}\ . \tag{4.40}$$

$$\partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial \lambda_i=0, \partial F(X^0,\Lambda^0)/\partial\overline{\lambda_j}=0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\ . \tag{4.41}$$

(4.40) tenglikni tahll qilamiz. Uni quyidagicha yoyib yozish mumkin:

$$\lambda_0^0\partial f(X^0)/\partial x_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\partial g_i(X^0)/\partial x_j-\overline{\lambda_i^0}=0 \tag{4.42}$$

Bundan tashqari

$$b_i-s_i-g_i(x_1,x_2,...,x_n)=0, t_j-x_j^0=0 \tag{4.43}$$

tengliklar o‘rinli t_j^0 noma’lumlar bilan bog‘liq bo‘lgan $\overline{\lambda_j^0}$ Lagranj ko‘paytuvchisi uchun $\overline{\lambda_j^0}t_j^0=0$ shart bajarilishi kerak. Agar $t_j^0\ge 0$ (demak $x_j^0=0$) bo‘lsa, $\overline{\lambda_j^0}=0$ bo‘ladi va (4.42) ga asosan

$$\lambda_0^0 \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i(X^0)/\partial x_j = 0 \tag{4.44}$$

Agar $t_j^0 \geq 0$ (demak, $x_j^0 = 0$) bo‘lsa, u holda $\overline{\lambda_j^0}$ noldan farqli bo‘lishi ham mumkin. Uning ishorasi quyidagi mulohaza orqali aniqlanadi: agar x_j-$t_j=0$ tenglikning o‘ng tomonini manfiy songa o‘zgartirsak, (4.18)-(4.20) masalaning aniqlanish sohasi kengayadi, chunki ixtiyoriy $x \geq 0$ x>0 miqdor $x_j \geq b_j (b_j < 0)$ tengsizlikni qanoatlantiradi va $Z^0=f(X^0)$ miqdor o‘zgarmaydi (ortmaydi), demak, $\partial f(X^0)/\partial b_j \geq 0$ yoki $\overline{\lambda_j^0}$. Shunday qilib, $x_j=0$ da zaruriy shart quyidagidan iborat bo‘ladi:

$$\partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j = \lambda_0^0 \partial f(X^0)/\partial x_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \partial g_i(X^0)/\partial x_j \geq 0 \tag{4.45}$$

$$, \tag{4.46}$$

Endi $\partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j = 0, j = \overline{1,m}$ tenglikni xuddi yuqoridagidek tahlil qilib, quyidagi shartlarni hosil qilamiz:

$$\partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j \leq 0, \tag{4.47}$$

$$\lambda_j^0 \partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_j = 0, \lambda_j^0 \geq 0, \tag{4.48}$$

(4.45)-(4.48) shartlar (4.21)-(4.25) masala uchun quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j \leq 0, \tag{4.49}$$

$$x_j^0 \partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial x_j = 0, x_j^0 \geq 0, \tag{4.50}$$

$$\partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_j \geq 0, \tag{4.51}$$

$$\lambda_j^0 \partial f(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_j = 0, \lambda_j^0 \geq 0, \tag{4.52}$$

Yuqoridagi (4.45)-(4.48), (4.49)-(4.52) shartlar berilgan qavariq programmalash masalasining ekstremumi mavjudlgining zaruriy va etarlilik shartidan iboratdir.

4.4. Kun-Takker teoremasi

Yuqoridagi (4.21)-(4.23) qavariq dasturlash masalasini ko‘ramiz.

Agar kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g(X) > b_i, i = \overline{1,m}$ tengsizlik bajarilsa (bunga Sleyter sharti deyiladi), Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o‘rinli bo‘ladi.

Teorema. $X^0 \geq 0$ nuqta (4.21)-(4.23) masalining optimal yechimi bo‘’lishi uchun bu nuqtada (4.49)-(4.52) shartlarining bajarilishi zarur va etarlidir.

Isboti. Zaruriylikning isboti (4.45)-(4.48) va (4.49)- (4.52) shartlarini keltirib chiqarish jarayonida kursatilgan.

Yetarliligi: Faraz qilaylik X^0 nuqtada (4.49)-(4.52) shartlar bajarilsin. U holda shunday $\Lambda^0 \geq 0$ mavjud bo‘lib, (X^0, Λ^0) nuqta $F(X, \Lambda)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo‘ladi, ya’ni bu nuqtada (4.26) munosabat o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $F(X, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda^0) \leq F(X^0, \Lambda)$. Bu yerda

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X) - b_i) \tag{4.53}$$

(4.53) dan foydalanib (4.26) ni quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X) - b_i) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X^0) - b_i) \tag{4.54}$$

(4.54) dagi

$$f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X^0) - b_i) \leq f(X^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X^0) - b_i)$$

Munosabat ixtiyoriy $\Lambda \geq 0$ uchun o‘rinli. Bundan (4.51) va (4.52) ga asosan

$$g_i(X^0) - b_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(X^0) - b_i) = 0\,. \tag{4,55}$$

Endi (4.54) ning chap tomonidagi tengsizlikdan (4.55) ga asosan,

$$f(X^0) \geq f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i), \forall X \geq 0\,,$$

Bu yerda $g_{i_i}(X) > b_i$ (Sleyter sharti) va $\lambda_i^0 \geq 0$. Demak,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 (g_i(X) - b_i) \geq 0\,,$$

Shuning uchun $f(X^0) \geq f(X), \forall X \geq 0$. Bundan X^0 berilgan masalaning optimal echimi ekanligi ko‘rinadi. Shu bilan teorema isbotlandi.

1-masala. Berilganlarni grafik usulda yeching va topilgan yechim uchun Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiring.

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + x_2 \geq 8$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

Masalani grafik usulda yechib, uning optimal echimi x_0=(0,8; 0,4) va *f*(0,8; 0,4)=0,8 ekanini ko‘rishimiz mumkin.

Endi shunday $\lambda^0 \geq 0$ mavjud bo‘lib, $(X^0.\Lambda^0)$ da Kun-Takker shartlarining bajarilishini koramiz.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$f(X,\Lambda) = x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 + x_2) + \lambda_3(6 - 2x_1 + x_2)$$

nuqtada masalaning 2-chegaraviy sharti qat’iy tengsizlikka aylanadi. Demak, bu masala uchun Steyler sharti bajariladi. Bu holda masala normal bo‘lib, $\lambda_0 \neq 0$ bo‘ladi. Shuning uchun $\lambda_0 = 0$ deb qabul qilinadi.

Lagranj funksiyasidan x_1, x_2, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lar bo‘yicha xususiy hosilalar olamiz va X_0=(0,8; 0,4) nuqtada Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz:

$$\partial F / \partial x_1 = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_3 - 2\lambda_2, \qquad \partial F / \partial x_2 = -2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_2,$$

$$\partial F / \partial \lambda_1 = -2x_1 + x_2 - 2, \qquad \partial F / \partial \lambda_2 = 8 - 2x_1 - x_2, \qquad \partial F / \partial \lambda_3 = 6 - x_1 - x_2$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) = 8 - 2 \cdot 0{,}8 - 0{,}4 = 6 > 0$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) = 6 - 0{,}8 - 0{,}4 = 4{,}8 > 0$$

$$\lambda_i^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i = 0$$

Shartga ko‘ra, λ_2 va λ_3 larning qiymatlari nolga teng.

$$\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial \lambda_i = 2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 - 2 = 0$$

bo‘lgani uchun λ_1 nolga teng bo‘lmagan qiymat qabul qilishi ham mumkin.

$$x_j^0 \partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_i = 0, x_j > 0$$

Demak, $\partial F(X^0, \Lambda^0) / \partial x_i = 0, j = 1{,}2$ bo‘lishi kerak, ya’ni $-2 \cdot 0{,}8 + 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \quad -2 \cdot 0{,}4 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0$.

$\lambda_3, \lambda_3 = 0$ bo‘lgani uchun $\lambda_1 = 0{,}8$=0,8 va $\Lambda^0 = (0{,}8;0{,}0)$. Demak $(X^0, \Lambda^0) = (0{,}8;0{,}4;0{,}8;0{,}0)$ nuqtada xaqiqatdan ham, kun-Takker shartlari bajarilyapti, ya’ni u egar nuqta bo‘layapti.

2-masala. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, X_0=(0,1) nuqta quyidagi chiziqsiz dasturlash masalasining yechimi ekanligini ko‘rsatilsin:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 \to \min$$

Yechish. X^0=(1,0) nuqtada chegaraviy shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi, demak, Sleyter sharti bajariladi. Bu xolda $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilishimiz mumkin. Shuning uchun Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_1^2 + \lambda_1(4x_1 + 5x_2 - 8) + \lambda_2(2x_1 + x_2 - 4).$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$$

Kun-Yakker shartlarining bajarilishini tekshiramiz:

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_1 = (2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_1)_{x_0} \geq 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_1)x_1^0 = 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_2 = (6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_1)_{x_0} \geq 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial x_2)x_2^0 = 0, x_1, x_2 \geq 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_1 = (4x_1 + 5x_2 - 8)_{x_0} = -4 < 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_1)\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1^0 = 0,$$

$$\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_2 = (2x_1 + x_2 - 4)_{x_0} = -4 = -2 < 0,$$

$$(\partial F(X^0, \Lambda^0)/\partial \lambda_2)\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2^0 = 0,$$

Shunday qilib, $(X_0, \Lambda_0) = (1;0;0;0)$ nuqta kun-Takkerning hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, u Langraj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun x^0 (1,0) nuqta berilgan chiziqsiz dasturlash masalasining yechimidan iborat.

Nazorat savollari va topshiriqlari

1. Qavariq to'plam deganda qanday to'plamni tushunasiz?

2. Qavariq to'plamning ichki va chegaraviy nuqtasi tushunchasi nimadan iborat?

3. Pastga (yuqoriga) qavariq funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?

4. Agar *f(X)* pastga (yuqoriga) qavariq funksiya bo'lib qavariq G to'plamda aniqlangan bo'lsa va *b* - ixtiyoriy xaqiqiy son bo'lsa *f(x)<-b, (f(x)>-b)* tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qanday to'plam bo'ladi?

5. Qavariq funksiyaning qavariq to'plamdagi global maksimumi (minimumi) nima?

6. Qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiyaning mahalliy va global ekstemumlari orasida qanday munosabat o'rinli bo'ladi?

7. Qavariq dasturlash masalasining umumiy ko'rinishi qanday?

8. Lagranj funksiyasining egar nuqtasi nima?

9. $f(x)$ va $g_j(x)$ funksiyalari differentsiallanuvchi bo‘lgan hol uchun Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va tetarlilik sharti qanday?

10.Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligini zaruriy va yetarlilik shartini $f(x)$ va $g_i(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi bo‘lgan hol uchun izohlang.

11.Kun - Takker teoremasini ta’riflang.

12.Sleyter sharti qanday va u qachon ishlatiladi?

13. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, X_0=(0,8; 0,4) nuqtaning quyidagi qavariq dasturlash masalasining yechimi ekanligini aniqlang:

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$
$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$$

14. Grafik usulini qo‘llab, quyidagi masalalarning eching va yechimni Kun-Takker shartlarini qanoatlantirishini tekshiring:

a) $2x_1 + 5x_2 \geq 20$,
$x_1 - 2x_2 = 5$,
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,
$Z = f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_2^2 \to \max$.

b) $x_1 + x_2 \leq 5$,
$0{,}3x_1 + x_2 \leq 3$,
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,
$Z = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 3x_1 - 4x_2^2 \to \max$.

c) $3x_1 + 2x_2 \leq 9$,
$0{,}5x_1 + x_2 \leq 4$,
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$,
$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \to \max$.

15.Koordinata boshidan

$$3x_1 + 2x_2 \leq 9,$$
$$0{,}5x_1 + x_2 \leq 4$$

tengsizliklar orqali aniqlangan qavariq to‘plamgacha bo‘lgan minimal masofani aniqlang. Yechimni grafik usulda aniqlab, uning uchun Kun-Takker shartlari o‘rinli ekanligini tekshiring.

5-BOB. O‘YIN NAZARIYASI ELEMENTLARI

5.1. O‘yin nazariyasining ayrim tushunchalari.

Chiziqli, chiziqsiz va dinamik dasturlash masalalaridagi yechimlar qabul qilinish ma’lumotlarning to‘laligini nazarda tutgan holda amalga oshiriladi. Boshqacha aytganda, masaladagi noma’-lum parametrlarni topish uchun zarur bo‘lgan dastlabki ma’lu-motlar aniq bo‘ladi. Bu masalalarda yechimlar qabul qilish aniqlik sharoitida amalga oshiriladi.

Iqtisodiy amaliyotdagi ko‘p masalalarda noaniqlikda yechim qabul qilinish zaruriyati tug‘iladi. Noaniqlikda yechim qabul qilish ikki xil holatda amalga oshirilishi mumkin:

1. Yechim qabul qiluvchi shaxs (YeQQSh) ob-havoga, inflyatsiya darajasiga, bozordagi narx-navoga, davlatdagi siyosiy holatga vs boshqa “tabiat” holatlarga qarab yechim qabul qilaqi.Bu yerda “tabiat” deganda yechim qabul qilish uchun zarur bo‘lgan tashqi holatlar majmuasini tushunamiz. YeQQShning “tabiat”ning turli holatiga qarab yechim qabul qilish jarayonini o‘yin deb qarash mumkin. Bunday o‘yin, ya’ni raqobat mavjud bo‘lmagandagi yechimlar qabul qilish nazariyasi “tabiatga qarshi o‘yin” deb ataladi. By o‘yinda “tabiat” yechim qabul qilinuvchi shaxs uchun raqib rolini bajarsa ham, u ongli raqib bo‘la olmaydi, u o‘z yutug‘iga befarq bo‘ladi va o‘z raqibi xatolaridan foydalanish niyati ham bo‘lmaydi.

2. Yechimlar qabul qilish raatobat mavjud bo‘lgan vaziyatda amalga oshiriladi. Bu holda ikki yoki undan ko‘proq qatnashuvchilar o‘zaro raqobatda bo‘lib, ularning har biri raqibidan iloji boricha ko‘proproq yutuq olishga harakat qiladi. Ulardan har birining erishgan natijalari qolgan tomonlarning o‘zlarining maqsadlariga erishilgan ishdagi harakatiga bog‘liq bo‘ladi. Bunday itisodiy jarayonlar “ragobatli” deb ataladi.

Shaxmat, shashka, domino va boshqa o‘yinlar raqobatli jarayonlarni ifodalovchi o‘yinlar hisoblanadi. Bunday o‘yindagi har bir yurishda bir o‘ynovchining yutug‘i ikkinchisining yurishiga bog‘liq bo‘ladi. O‘yinning maqsadi yangilarning bittasini yutishidan iborat.

Iqtisodiotdagi raqobatli holatlarga taminotchi va istemol-chilar, sotuvchilar va xaridorlar, banklar va mijozlar oralaridagi munosabatlar misol bo‘la oladi. Bu munosabatlardagi raqobatli holatlar tomonlarning intilishlari zidligidan kelib chiqadi. Raqobatli holatlarda yechim qabul qiluvchi shaxs fagat o‘z maqsadini ko‘zlashdan tashqari raqibining maqsadini nazarga olish va hamda uning qabul qilishi mumkin bo‘lgan yechimini oldindan ko‘ra bilishi kerak. Shundai qilib, raqobatli holatlardagi masalarni yechish uchun ilmiy asoslangan usullar talab qilinadi.

Ragobatli holatlarning matematik nazariasi “O‘yinlar nazariyasi” deb ataladi.

Matematikaning raqobatli holatlarini, ya’ni qantashuv-chilarning manfaatlari qarama-qarshi yoki bir-biriga mos kelmay-digan holatlarni o‘rganuvchi bo‘limi – “o‘yinlar nazariyasi” deb ataladi. O‘yinlar nazariyasi – raqobatli holatda qatnashayotgan har bir o‘yinchiga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga) erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlash uchun yo‘llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko‘pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o‘yinlar nazariyasi nuqtai-nazaridan qarash mumkin. Masalan, o‘yin ishtirokchilari - bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta’m inotchilar va iste’molchilar bo‘lib, o‘yining yutug‘i - ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag‘lari, mahsu-lotning bahosi yoki tannarxi bo‘lishi mumkin.

O‘yinlar nazariyasi nisbatan yosh fanlar qatoriga kiradi.

Uning paydo bo‘lishi Neyman va Morgenshternlarning 1944 yil nashr etilgan “Iqtisodiy jarayonlar va o‘yinlar nazariyasi” monografiyasi bilan bog‘liq. Keyinchalik o‘yinlar nazariyasi amaliy tatbiqlarga ega bo‘lgan mustaqil yo‘nalish sifatida rivojlandi.

Shuni ta'kidlash lozimki, o'yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko'p marta takrorlanadigan raqobatli holatlarga nisbatan ishlatiladi.

Amalda, raqobatli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhm bo'lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi.

O'yin – raqobatli holatlarni ifodalovchi modeldan iborat bo'lib, uning haqiqiy raqobatdan farqi shundan iboratki, u ma'lum bir qoida asosida amalga oshiriladi.

Har bir o'ynovchining ma'lum maqsadga erishish niyatida bajarishi mumkin bo'lgan harakatlari o'yinning qoidalari deb ataladi.

O'yinning natijalarini miqdoriy baholash to'lov deb ataladi. O'yinning mohiyati shundan iboratki, unda har bir o'ynovchi o'ziga eng yaxshi natija beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi.

O'yinda ikkita yoki undan ko'p ishtirokchilarning manfaatlari to'qnashishi mumkin. Shunga muofiq, u ikki o'ynovchili va ko'p o'ynovchili bo'lishi mumkin.

Agar o'yinda faqat ikkita o'ynovchi qatnashsa, bunday o'yin "juftli o'yin" deb ataladi.

Agar juftli o'yinda bir o'ynovchining yutug'i ikkinchi o'ynovchining yutqazuviga teng bo'lsa, bunday o'yin "0 - summali o'yin" deb ataladi. 0 - summali o'yinda o'yinchilarning umumiy kapitali o'zgarm aydi, faqat o'yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig'indisi nolga teng bo''ladi, ya'ni $V_1+ V_2+\ldots+V_n=0$, bu yerda V_j –j-o'ynovchining yutug'i.

Nol summali bo'lmagan o'yinda o'ynovchilar yutuqlari yig'indisi noldan farqli bo'ladi. Masalan, lotoreya o'yinida, o'ynovchilar qo'ygan badalning bir qismi lotoreya tashkilot-chilariga beriladi. Shuning uchun $V_1+ V_2+\ldots+V_n<0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Biz bu yerda amaliy ahamiyati katta bo'lgan o'yinlar - juft o'yinlarni qarash bilan cheklanamiz. O'yin ishtirokchilarini *A* va *B* orqali belgilaymiz.

O'yin jarayonida ro'y berishi mumkin har qanday holatga muvofiq ravish da o'ynovchining qo'llash i mumkin bo'lgan qoidalar birlashmasi “strategiya” deb ataladi. Strategiyaning soniga qarab, o‘yinlar chekli yoki cheksiz o‘yinlarga bo‘linadi. Optimal strategiya deb, tayin bir o‘ynovchiga, o‘yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo‘lgan o‘rtacha yutuqni ta’minlovchi strategiyaga aytiladi.

Har qanday 0 - summali juftli o‘yinni yutuqlar matrisasi deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa orqali aniqlash mumkin. Bu matrisaning har bir a_{ij} elementi A oynovchi matrisaning i qatoriga mos keluvchi A_i yurishni B o‘ynovchi j - ustunga mos keluvchi B_j yurishni tanlagandagi A o‘ynovchining yutug‘ini bildiradi.

Komponentalari

$$x_i>0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2,...,x_m)$ vektor-qator A o‘ynovchining “aralash strategiyasi” deyiladi.

Xuddi shuningdek, komponentalari

$$y_i>0,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $Y = (y_1, y_2,...,y_m)$ vektor-qator B o‘ynovchining “aralash strategiyasi” deyiladi. Bunda x_i va y_j lar mos ravishda A o‘ynovchi o‘zining A_j yurishini va B o‘ynovchi B_j yurishini tanlash ehtimollarini bildiradi.

Agar $X = (x_1, x_2,...,x_m)$ aralash strategiyada i - komponenta 1 ga teng bo‘lib, qolganlari 0 ga teng bo‘lsa, u holda bunday aralash strategiya A o‘ynovchining “i-sof strategiyasi” deb ataladi.

Masalan, (1,0,0), (0,1.0), (0,0,1) strategiyalar sof strategiya-lardir.

Xuddi shuningdek, j-komponentasi 1 ga teng bo‘lib, qolgan komponentalari 0 ga teng bo‘lgan Y aralash strategiya B o‘ynovchining “j-sof strategiyasi” deb ataladi.

Demak, A o‘ynovchining yutuqlar matrisasining i-qatoriga mos keluvchi A_j yurishi uning i-sof strategiyasidan iborat bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, B o‘ynovchining yutuqlar matrisasining j-ustuniga mos keluvchi B_j yurishi uning j-sof strategiyasidan iborat bo‘ladi.

5.2. Matritsali o‘yinning yechimi

Yutuqlar matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lgan matrisali o‘yinni ko‘raylik. Agar A o‘ynovchi i-sof strategiyani tanlasa, u kamida

$$\min_j a_{ij}$$

yutuqqa ega bo‘ladi. A o‘ynovchi o‘zining yututini maksimal qilishga harakat qiladi. Demak, u shunday i-sof strategiyani tanlashi kerakki, natijada uning yutug‘i maksimal bo‘lsin, ya’ni A o‘ynovchi

$$\max \min_j (a_{ij})$$

natijani beruvchi sof strategiyani tanlaydi. Ushbu kattalikni α bilan belgilaymiz.

$$\alpha = \max \min_j (a_{ij})$$

bu yerda α A o‘ynovchining ishonchli yutug‘idan iborat bo‘lib, u “o‘yinning quyi bahosi” deb ataladi. B o‘ynovchi, o‘z navbatida, o‘zining eng katta mumkin bo‘lgan yutqazuvini minimallashtirishga harakat qiladi. Shuning uchun

$$\beta = \min_j \max_i (a_{ij})$$

yutqazuvni beruvchi j-sof strategiyani tanlaydi. Bu yerda β- B o‘ynovchining ishonchli minimal yutqazuvidan iborat bo‘lib, u “o‘yinning yuqori bahosi” deb ataladi. β yutqazuvga erishishga imkon beruvchi B_{j0} yurish ($j0$-sof strategiya) “minimaks” deb ataladi.

1 - teorema. Har qanday matrisali o‘yinda o‘yinning α quyi bahosi uning β yuqori bahosidan oshmaydi, ya’ni $\alpha \le \beta$.

Isboti. Ta’rifga asosan

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij}$$

Hamda

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij}$$

Bu munosabatlarni birlashtirsak

$$\alpha_i = \min a_{ij} \le a_{ij} \le \max_j a_{ij} = \beta_j$$

munosabatga ega bo‘lamiz. Bundan

$$\alpha_i \le \beta_j$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tenglik *i* va *j* indekslarning ixtiyoriy kombinasiyalari uchun, shu jumladan

$$\max \alpha_i = \alpha$$

va

$$\min_j \beta_j = \beta$$

shartlarni qanoatlantiruvchi *i* va *j* lar uchun ham o‘rinlidir.

Demak,

$$\alpha \le \beta$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Shu bilan teorema isbot qilindi Agar matrisali o‘yinning quyi va yuqori baholari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $\alpha = \beta$ shart bajarilsa, u holda ushbu o‘yin egar nuqtaga hamda

$$V = \alpha = \max \min_j a_{ij} = \min_j \max a_{ij} = \beta$$

shartni qanoatlantiruvchi bahoga ega deyiladi.

Bu holda *A* matrisaning

$$V = \alpha = \beta$$

shartni qanoatlantiruvchi (A_{i0}, B_{j0}) juftlikka mos keluvchi a_{i0j0}, elementi egar nuqta deb ataladi. Bu element j_0 ustunda maksimal va i_0 qatorda minimal bo‘ladi, ya’ni:

$$a_{ij0} \le a_{i0\,j0} \le a_{i0\,j}.$$

Agar *B* o‘ynovchi o‘zining minimaks strategiyasidan voz kechsa, uning yutqazuvi oshadi. Xuddi shuningdek, agar *A* o‘ynovchi o‘zining maksimin strategiyasidan voz kechsa, uning yutug‘i kamayadi. Demak, egar nuqtalarga o‘yinning A_{i0}, B_{j0} optimal strategiyalari mos keladi.

Hamda {A_{i0}, B_{j0}, V} to‘plam o‘yinning yechimi deyiladi.

1-misol. Quyidagi to‘lov matrisalari bilan berilgan o‘yinlar uchun o‘yinning quyi va yuqori baholarini toping:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. A_1 matrisa qatorlari uchun a_{ij} elementlarning eng kichiklari mos ravishda 2; 3; 1 ga teng. Ularning ichidagi maksimali esa 3 ga teng. Demak, A_1 matrisaning quyi bahosi $\alpha_1 = 3$.

O‘yinning yuqori bahosini topish uchun A_1-matrisa ustunlari bo‘yicha maksimal elementlarni topamiz. Bular mos ravishda: 4; 5; 6; 5. Endi bular ichidan minimalini, ya’ni $\alpha = 4$ni topamiz.

Demak, A_1-matrisa uchun $\alpha = 3; \beta = 4$.

A_2-matrisa uchun esa, $\alpha_2 = \max\{0;2;-1\} = 2;\ \beta_2 = \min\{3;2;4;5\} = 2;$.

Shunday qilib, bu holda $V = \alpha_2 = \beta_2 = 2$ -o‘yinning bahosidir.

Demak, bu o‘ynovda A o‘ynovchining yututi 2 dan kam emas va B o‘ynovchining yutqazishi 2 dan oshmaydi.

Agar matrisali o‘yin egar nuqtaga ega bo‘lsa, u holda bu o‘yinning echimini topish uchun egar nuqtaga mos keluvchi A_{i0}, B_{j0} optimal strategiyalarni hamda $V = \alpha = \beta$ shartni qanoatlantiruvchi bahoni topish kerak.

Demak, agar matrisali o‘yin egar nuqtaga ega bo‘lsa, u holda A va B o‘ynovchilarning maksimin va minimaks strategiyalari optimal strategiya bo‘ladi hamda yutuqlar matrisasining egar nuqtasi o‘yinning bahosini beradi.

Agar matrisali o‘yin egar nuqtaga ega bo‘lmasa, u holda uning yechimi aralash strategiyalarda topiladi.

Agar A o‘ynovchi $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ aralash strategiyani qo‘llab, B o‘ynovchi $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ aralash strategiyani qo‘llasa, u holda A o‘y-novchi o‘zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimol bilan, B o‘ynovchi esa, o‘zining B_j sof strategiyasini ehtimol bilan tanlaydi. Bu holda (A_i, B_j) juftlikni tanlash ehtimoli x_i, y_j ga teng bo‘ladi.

Aralash strategiyalar qo‘llanganda o‘yin tasodifiy xarakterga ega bo‘ladi. Shuning uchun o‘yinning yutug‘i ham tasodifiy miqdor bo‘ladi. Demak, bu holda yu tug‘larning o‘rtacha miqsori, ya’ni uning matematik kutilish i haqida gapirish mumkin.

$A=(a_{ij})_{(mxn)}$ matrisali o‘yinning yututlar funksiyasi yoki A o‘ynovchi yutug‘ining matematik kutilishi deb

$$f(X,Y)=M(X,Y)=XAY=\sum_{i-1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j \tag{5.1}$$

formula orqali aniqlanuvchi funksiyaga aytiladi, bu erda $X=(x_1,x_2,...,x_m)$ A o‘ynovchining va $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ B o‘ynovchining ixtiyoriy aralash strategiyalari.

2-misol.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisali o‘yinda $X=(x_1,x_2,...,x_m)$ va $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ mos ravishda A va B o‘ynovchilarning aralash strategiyalari. Bu o‘yin uchun yutuqlar funksiyasini topamiz.

$$f(X,Y)=M(X,Y)=(x_1,x_2,x_3,)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(x_2-x_3)y_1+(x_3-x_1)y_2+(x_1-x_2)y_3$$

Agar $X=(0{,}1;0{,}4;0{,}5)$ va $Y=(0{,}3;0{,}3;0{,}4)$ bo‘lsa, M(X ,Y)= -0,0 3 bo‘ladi.

Deylik, $X^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ A o‘ynovchining aralash strategiyasi, $Y^0=(y_1^0,y_2^0,...,y_m^0)$ B o‘ynovchining aralash strategiyasi bo‘lsin. U holda quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

2 - teorema. $X^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ va $Y^0=(y_1^0,y_2^0,...,y_m^0)$ aralash strategiyalar jufti va V haqiqiy son matrisali o‘yinning yechimi bo‘lishi uchun j= l,2 ,...,*n* sof strategiyalarda

$$M(X^0,j)\geq V \tag{5.2}$$

bo‘lib, *i=1, 2, ..., m* sof strategiyalarda

$$M(i,Y^0)\leq V \tag{5.3}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi zarur va etarlidir. Teorema shartlarini qanoatlantiruvchi X^0, Y^0 aralash strategiyalar optimal strategiya, V haqiqiy son esa, o‘yinning bahosi deb ataladi.

Demak, $\{A_{i0}, B_{j0}, V\}$ to‘plamni matrisali o‘yinning yechimi ekanligini tekshirish uchun (5.2) va (5.3) tengsizliklarning bajarilishini tekshirish lozim.

3-misol.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisali o‘yinning yechimini aralash strategiyalarda toping.

Yechish. A o‘ynovchining aralash strategiyasi $X=(x_1, x_2)$ vektor qatordan va B o‘ynovchining aralash strategiyasi $Y=(y_1, y_2)$ vektor ustundan iborat bo‘lsin. (5.2) tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz:

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}(j) \geq V$$

Bundan

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq V \\ -x_1 + x_2 \geq V \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}\right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan X = (1/2; 1/2), V = 0 ekanligini aniqlaymiz.

Endi (5.3) tengsizlikning bajarilishini tekshiramiz:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}(j) \geq V$$

hamda

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - y_2 \leq V \\ -y_1 + y_2 \leq -V \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}\right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bundan quyidagini topamiz:

Y = (l / 2; 1/2)   V = 0.

Demak, bu o‘yinda X = (l/2; 1/2) va Y = (l/2; l/2) vektorlar optimal strategiyalar bo‘lib, o‘yinning bahosi V = 0 bo‘ladi.

Eng sodda matrisali o‘yinda yutuqlar matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bo‘lib, matrisa egar nuqtaga ega bo‘lmasa, $X = (x_1, x_2)$ va $Y = (y_1, y_2)$ aralash strategiyalarni va V – o‘yinning bahosini topish uchun

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

5.3. Matrisali o‘yinni chiziqli dasturlash masalasiga keltirish

mxn – o‘lchovli matrisa bilan berilgan quyidagi o‘yinni qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} ... a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisa egar nuqtaga ega emas, deb hisoblab va shuning uchun o‘yinning yechimini $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ va $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ - aralash strategiyalar shaklida izlaymiz. *A* – o‘ynovchining optimal strategiyasida yuqoridagi (5.2) munosabat va V o‘ynovchining optimal strategiyasida (5.3) munosabat bajariladi. Shuning uchun, (*A*-o‘ynovchining) quyidagi chegaraviy shartlarni kanoatlantiruvchi optimal strategiyasini topish masalasini qo‘yish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq V, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq V, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq V, \\ x_1 + x_2 + ... + x_m = 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

O‘yinning bahosi bo‘lgan V -kattalik noma’lum, lekin doim $V > 0$ deb hisoblash mumkin. Bunga, agar A matrisa elementlariga bir xil musbat son qo‘shish sharti bilan erishish mumkin. (5.4) sistemani hamma cheklamalarini V ga bo‘lib, quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1, \\ t_1 + t_2 + ... + t_m = 1/V. \end{cases} \tag{5.5}$$

$$t_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

Bunda $t_1=x_1/V$, $t_2=x_2/V, \ldots, t_m=x_m/V$.

$x_1+ x_{2+\ldots+} x_m=1$ shartdan $t_1+ t_{2+\ldots+} t_m=1/V$ tenglik krlib chiqadi.

A o‘ynovchi uchun o‘yinning yechimi V ning qiymatini maksimallashtirish kerak. Demak, $Z = t_1+ t_{2+\ldots+} t_m$ funksiya minimal qiymatga erishishi kerak. Shunday qilib, quyidagi chiziqli dasturlash masalasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases} \quad 5.6)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, ..., t_m \geq 0, \tag{5.7}$$

$$Z = t_1 + t_2 +, ..., t_m \to \min. \tag{5.8}$$

Bu masalani yechib, t_i qiimatlar va $1/V$ kattalik topiladi, hamda undan foidalanib $x_i = Vt_i$ qiymatlar topiladi.

B o‘ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \geq V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \geq V, \\ .... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \geq V, \\ y_1 + y_2 + ... + y_n = 1. \end{cases} \tag{5.9}$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

yoki tengsizliklarni V ga bo‘lib,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1, \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1/V. \end{cases} \qquad (5.10)$$

$$u_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

sistemani hosil qilamiz. Bunda $u_j=y_j/V$, u_1, u_2, …, u_n – noma’lumni shunday qiymatlarini toppish kerakki, ular uchun (5.10) shart bajarilib

$$W = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1/V$$

funksiya maksimum qiymatga erishsin. Shunday qilib, B o‘ynovchi uchun matrisali o‘yin quyidagi chiziqli dasturlash masalasiga aylanadi:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \le 1, \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n})$$

$$W = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to \max.$$

Shunday qilib, matrisali o‘yinning yechimini topish simmetrik qo‘shma chiziqli dasturlash masalalariga keltiriladi. Bu qo‘shma masalalardan birini yechib, ikkinchisining yechimini undan foydalanib hosil qilish mumkin.

1-misol. Matrisa bilan berilgan quyidagi o‘yinning echimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish. A o‘ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi chiziqli dasturlash masalasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + .2t_3 \ge 1, \\ 3t_1 + 4t_2 \_ 5t_3 \ge 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \ge 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1. \end{cases}$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, \ldots, t_m \ge 0, \qquad (5.7)$$

$$Z = t_1 + t_2 +,..., t_m \to \min. \qquad (5.8)$$

B o‘ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \le 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \le 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \le 1, \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,4})$$

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max.$$

Bu ikkilangan masalarning yechimi *U* = (3/14; 0; 0; 1/14), W_{max}= l/*V* = 2/7 bo‘ladi. Demak, *V* = 7/2, hamda y_j = Vu_{ij} tenglikdan V o‘ynovchining optimal strategiyasi *Y* = (3/4 ;0; 0; l/4)’ topiladi. *A* o‘ynovchi uchun masalaning yechimi *T*=(1/7; 1/7; 0) , *V* = 7/2 bo‘ladi. Bu holda *A* o‘ynovchining optimal strategiyasi *X*=(l/2; l/2; 0) bo‘lib. uning yutug‘i *V* = 7/2 bo‘ladi.

5.4. Tabiatga qarshi o‘yin. Optimallik mezonlari.

Endi hech qabday ehtimoliy tavsiflari ma’lum bo‘lmagan sharoitda yechimlar qabul qilish uslubi bilan tanishamiz. Bunday sharoitda yechimlar qabul qilish (EQQ) uchun minimax-maximin, Wald, Laplas, Sevij va Gvits mezonlari ishlatiladi.

Ko‘p hollarda o‘yinda yechim qabul qilinuvchi shaxs (EQQSh) deb ataluvchi bir ynovchi (yoki bir maqsad yo‘lida birlashuvchi o‘ynovchilar guruhi) va “tabiat” qatnashadi. Bunday EQQShni *A* o‘ynovchilar deb, “tabiat”ni esa T o‘ynovchi deb belgilaimiz. Bunda “tabiat” *A* o‘ynovchining yashash, yangi yechimlar qabul qilish uchun kerak bo‘lgan tashqi sharoitlar majmuasini aniqlaydi. “Tabiat” *A* o‘ynovchiga ongli ravishda qarshilik qilmaydi. Ular orasida o‘zaro raqobatli vaziyat ham mavjud emas. Lekin “tabiat” o‘zining T_1, T_2,…, T_n ho‘latlaridan biri bo‘lib, amalga oshirishi mumkin. *A* o‘ynovchiga “tabiat”ning qaysi holati amalga oshishini bilmagan holda, ya’ni noaniqlikda yechim qabul qilishga to‘g‘ri keladi. “Tabiat” o‘zining yutig‘iga befarq, uning xususiyatlarida *A* o‘ynovchiga munosabati bilan yovuz niyatlari ham yo‘q.

A o‘ynovchining har bir A_i (i= l,...,m) yo‘li va “tabiat” (T)ning mumkin bo‘lgan holati T_j (j= l,...,n) uchun a (A_j, T_j) natija mos keladi.

Bu natija yutuq yoki yutqazuv bo‘lishi mumkin. Umumiy holda a(A_i, T_j) A_i va B_j parametrlarning uzluksiz funksiyasidan iborat bo‘ladi. Agar A o‘yinchi “tabiat”ning ixtiyoriy T_j yurishida uning sof strategiyasi qoidalarini baholay bilsa, u holda // a(A_i, T_j) / / matritsa $//a_{ij}//_{mxn}$ matrisaga aylanadi. Bu matritsani soddalashtirishda faqat A o‘ynovchining A_i strategiyalar sonini kamaytirish mumkin, lekin “tabiat”ning birorta T_j holatini tashlab yuborish mumkin emasligini nazarda tutish kerak. Chunki A o‘ynovchiga bogliq bo‘lmagan holda “tabiat”ning ixtiyoriy holatini amalga oshirishi mumkin. Yuzaki qaraganda, ongli ra’ibning yo‘ligi A o‘ynovchining yechimlar qabul qilishini yengillashtirganday bo‘ladi. Aslida esa A o‘ynovchi uchun o‘z strategiyasini asoslash bilan bog‘liq bo‘lgan qiyinchilikni hal qilishga to‘g‘ri keladi. Ongli raqib bilan bo‘lgan o‘yinda raqib uchun ham “fikr yuritish” mumkin. “Tabiyat” ning holatlarini esa oldindan ko‘rish mumkin emas. Shuning uchun A o‘ynovchiga o‘zining har bir yurishini har tomonlama asoslashga to‘g‘ri keladi.

A o‘yinning strategiyasini tanlab, uni asoslashda to‘pincha to‘lovlar matritsasi o‘rniga “tavakkalchilik” matritsasi deb ataluvchi matritsaga o‘tishga to‘g‘ri keladi. Chunki to‘lovlar matritsasidan foydalanib u yoki bu strategiyaning foydaliligini aniqlashda ayrim tushunmovchiliklarga yo‘l qo‘yish mumkin.

Masalan, agar “tabiat” T_j holatda bo‘lib, A o‘ynovchi A_i strategiyani tanlasin va o‘yinning yutug‘i a_{ij}(A_i, T_j) ga teng bo‘lsin hamda bu yutuq $a_{kl}(A_k, T_l)$ dan katta bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni

$$a_{ij}(A_i, T_j) \geq a_{kl}(A_k, T_l) \qquad (5.11)$$

bu yerda $a_{kl}(A_k, T_l)$ - A o‘ynovchi A_k strategiyani, “tabiat”ning T_l holatiga qarshi tanlangandagi o‘yinining yutug‘i.

Lekin bu tengsizlik (A_i, T_j) juftga mos kelgan yutuq (A_k, T_l) juftga mos kelgan yutuqdan katta ekanligini ko‘rsatsa ham, bundan A, strategiya A_k strategiyadan yaxshiroq degan xulosa kelib chiqmaydi, chunki A_i, strategiya A_k dan yaxshiroq bo‘lmasa ham A o‘ynovchi uchun “tabiat”ning T_j holati uning T_l holatiga nisbatan “foydaliroq” bo‘lganda ham yuqoridagi tengsizlik o‘rinli bo‘lishi mumkin.

“Tavakkalchilik” matrisasining elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$r_{ij}=\begin{cases}\max\limits_{i} a_{ij}-a_{ij}=\beta_j-a_{ij}, -daromad,\\ a_{ij}-\min a_{ij}=a_{ij}-\alpha_j, -zarar(yutqazuv),\end{cases} \qquad (5.12)$$

bu yerda $\beta_j(\alpha_j)$- “tabiat”ning T_j holatidagi EQQSH ning maksimal yutug‘i (maksimal yutqazuvi), r_{ij} EQQSH ning “tabiat”ning T_j holatiga to‘la chora ko‘rmagani oqibatida tavakkalchilikdan ko‘rgan zararini yoki uning “afsuslanishini” baholovchi sonni bildiradi.

Bu o‘yinda tabiat va yechim qabul qiluvchi shaxs (EQQSH) qatnashadi. Tabiatning $T_1, T_2, \dots, T_n$ holatlari mavjud bo‘lib, ularga qarshi EQQSH da m ta $A_l, A_2, \dots, A_m$ tadbirlar navjud.

Tabiatga qarshi o‘yinni quyidagi matrisa ko‘rinishida ifodalash mumkin:

T_j A_i	T_j	T_j		T_j
A_i	a_{11}	a_{12}		a_{1n}
A_i	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
A_i	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

Bu yerda a_{ij} tabiatning T_j holatida EQQSh A_i tadbirni amalga oshirgandagi uning ko‘radigan foydasi yoki zararini ko‘rsatadi. Agar a_{ij} - foyda (yutuq) bo‘lsa, bu matritsa “yutuqlar matritsasi” deyiladi. a_{ij} - yutqazuv (zarar) bo‘lgandagi matritsa “to‘lovlar matritsasi” deyiladi.

Bu matritsa asosida EQQSH o‘zining foydasini (zararini) maksimallashtuvchi (minimallashtuvchi) yo‘lini (sof strategiyani) tanlaydi.

Bunday strategiyalarini tanlash uchun minimax, Vald, Laplas, Savidj va Gurvits mezonlaridanan foydalanish mumkin. Ana shu mezonlar bilan tanishamiz.

Laplas mezoni. Bu mezonda tabiatning barchasi $T_1, T_2, \dots, T_n$ holatlari teng ehtimol bilan ro‘y beradi degan fikr asos qilib olingan. Tabiatning $T_1, T_2, \dots, T_n$ holatlari $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ ehtimol bilan ro‘y bersin. U ho;da agar EQQSH A_1 yo‘lni tanlasa, uning yutug‘i,

$$Q_1=\frac{1}{n}a_{11}+\frac{1}{n}a_{12}+\dots+\frac{1}{n}a_{1n},$$

yoki

$$Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$$

bo‘ladi. Agar EQQSH A_2 yo‘lni tanlasa, uning yutug‘i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$$

bo‘ladi va hokazo. Agar EQQSH A_m yo‘lni tanlasa, uning yutug‘i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$$

bo‘ladi. EQQSH maksimum yutuq beruvchi yo‘lni, ya’ni

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_j a_{1j}, \sum_j a_{2j}, ..., \sum_j a_{mj}\right] = \max \sum_i a_{ij}$$

Yo‘lni tanlaydi.

1-misol. Quyidagi matritsa ko‘rinishida berilgan tabiatga qarshi o‘yinni yeching.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}\, p_{1+}\, a_{i2}\, p_{2+...+}\, a_{in}\, p_n$
A_1	*7*	*11*	14	*22*	$\frac{1}{4}(7+11+14+22)=13.5$
A_2	*20*	*16*	14	*22*	$\frac{1}{4}(20+16+14+22)=18$
A_3	9	8	10	23	$\frac{1}{4}(9+8+10+23)=12.5$
A_4	*18*	*26*	18	*14*	$\frac{1}{4}(18+26+18+14)=19$
p_i	*1/4*	*1/4*	*1/4*	*1/4*	$\max\frac{1}{4}(18+26+18+14)=19$

Yechish. EQQSH ning har bir strategiyasiga mos keluvchi $a_{i1}\, p_{i1+}\, a_{i2}\, p_{i2+...+}\, a_{in}\, p_{in}$ summaning qiymati jadvalning oxirgi ustunida keltirilgan Laplas mezoniga ko‘ra EQQSH A_4 sof strategiyani tanlasa, uning yutug‘i eng ko‘p (19 ga teng) bo‘ladi.

Bayes mezoni. Agar vaziyatning to‘la noaniqligidan va unda hech qanday ehtimoliy tasviflar mavjud emaslik shartidan biroz chetga chiqib “tabiat”ning holatlarini p_1, p_2, ... , p_n ehtimoliy sonlar orqali ifodalash mumkin deb faraz qilsak, u holda yechim tanlashda Bayes mezonidan foydalanish mumkin. Laplas mezoni Bayes mezonining xususiy holi hisoblanadi. Bayes mezonini quyidagicha yozish mumkin:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \quad \text{agar } a_{ij} \text{ – EQQSH ning yutug‘i bo‘lsa,} \qquad (5.13)$$

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \quad \text{agar } a_{ij} \text{ – EQQSH ning yutqazuvi bo‘lsa} \qquad (5.14)$$

Agar $p_1 = p_2 = p_n = 1/n$ bo‘lsa, Bayes mezoni Laplas mezoniga aylanasi.

1-misol. Faraz qilaylik, mahsulot ochiq havoda saqlansin. Tabiatning 4 ta holati Tj (j=1,2,3,4) bo‘lishi mumkin (yomg‘ir yog‘adi - ehtimoli p_1 =0,1, havo ochiq bo‘ladi - ehtimoli p_3=0,5 va ehtimollari $p_2 = p_4$ bo‘lgan ikkita o‘rtacha holat). A o‘ynovchi uchta A_1, A_2, A_3 strategiyalarni tanlashi (masalan, mahsulotlarni turlicha baholashi va natijada turlicha daromad olishi mumkin).

2-misol. Quyida daromadlar matrisasi berilgan: Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta’minlovchi optimal strategiyani toping.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}\, p_{1}+ a_{i2}\, p_{2}+_{\dots}+ a_{in}\, p_n$
A_1	2	3	4	7	4.2
A_2	3	6	5	4	4.8
A_3	5	8	7	3	6.2
p_i	0.1	0.2	0.5	0.2	max_i $(a_{i1}\, p_{1}+ a_{i2}\, p_{2}+_{\dots}+ a_{in}\, p_n)$ = 6.2

Yechish. EQQSH 1-strategiyani tanlasa, uning yutug‘i, $2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}5 + 7\cdot 0{,}2 = 4{,}2$ ga teng bo‘ladi. 2-strategiyadagi yutuq $3\cdot 0{,}1 + 6\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}2 = 4{,}8$. Xuddi shuningdek, 3-strategiyadagi yutuq $5\cdot 0{,}1 + 8\cdot 0{,}2 + 7\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}2 = 6{,}2$ bo‘ladi.

Bu misolda optimal dtrategiya A3. Bu to‘lni tanlaganda EQQSH 6.2 yutuqqa ega bo‘ladi.

Vald mezoni. Faraz qilaylik, a_{ij} tabiatning T_j holatiga qarshi EQQSH ning A_i - chora tadbirlarni ko‘rishi oqibatida oladigan foydasi bo‘lsin: bu holda Vald mezoni bo‘yicha optimal sof strategiya deb shunday strategiyani tushunish kerakki, unda A ning σ yutug‘i tabiat bilan bo‘lgan o‘yinning quyi bahosidan kam bo‘lmaydi, ya’ni

$$\sigma \geq \max_i \left\{ \min_j a_{ij} \right\} \qquad (5.15)$$

Bu strategiya barcha $\left(\min_j a_{ij} \right)$ minimal yutuqlar ichidan maksimalini tanlaydi. Agar a_{ij} yutqazuvni ko‘rsatsa, Vald mezoni bo‘yicha topilgan optimal strategiya shunday sof strategiya bo‘ladiki, undagi yutqazuv “tabiat” bilan o‘yinning yuqori bahosi $\min_i \left(\max a_{ij} \right)$ dan kam bo‘lmaydi, ya’ni bu holda EQQSH tanlangan strategiya maksimal yutqazuvlar ichida minimumini tanlashga yordam beradi. Vald mezoni EQQSH ni eng yomon sharoitda yaxshi yechim qabul qilishga o‘rgatadi. Bu mezon asosida “tabiat” bilan o‘ynaganda “tabiat”ni eng aktiv va yomon raqib bilan almashtirganday bo‘lamiz. Bu mezon pessimistik mezon bo‘lib, u asosan “har vaqt yomonni ko‘zda tuti sh kerak” printsipiga assoslangan.

3-misol. Korxona mijozlarning talabini qondirishi kerak, lekin talablarning aniq qiymati ma’lum emas, ular to‘rtta qiymatdan birortasini qabul qilishi mumkin. Bu talablarni qondirish uchun korxona rahbariyati 4 xil taklif darajasini namoyon qilishi mumkin. Bu taklif darajalaridan chetlanish korxonaga ma’lum miqdorda zarar keltiradi. Bu zararlar talabdagidan ko‘ra ko‘proq mahsulot ishlab chiqargani yoki talab to‘la qondirilmagani uchun paydo bo‘lishi mumkin.

Quyidagi jadval yutqazuvlar (zararlar) matrisasi bo‘lib undagi har bir a_{ij} taklif darajasi va B_j talab darajasiga mos keluvchi zarar (yutqazuv)ni mln. So‘m birligidagi qiymatini bildiradi.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	*7*	*11*	14	*24*
A_2	*20*	*16*	14	*22*
A_3	9	8	10	23
P_4	*18*	*21*	*18*	*14*

Ushbu tabiatga qarshi o‘yinni Vald mezoni asosida yeching.

Masalani yechish jarayonini quyidagi jadvalda tasvirlaymiz:

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$max(a_{ij})$
A_1	*7*	*11*	14	*24*	*24*
A_2	*20*	*16*	14	*22*	*22*
A_3	9	8	10	23	23
P_4	*18*	*21*	*18*	*14*	*26*
					$\min\left\{\max_j(a_{ij})\right\} = 22$

Jadvaldan ko'rinadiki, A_1 strategiya uchun max(7, 11, 14, 24) = 24, A_2 strategiya uchun max(20, 16, 14, 22) = 22 va A_3 strategiya uchun max(9, 8, 10, 23)=23, hamda

$$\min\left\{\max_j(a_{ij})\right\} = \min(24{,}22{,}23{,}26) = 22$$

bo'ladi. Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutqazuv 22 bo'ladi.

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimaks printsipiga asoslangan. Faqat bunda (a_{ij}) – to'lovlar yoki yutuqlar matrisasi o'rniga tavakkalchilik matrisasi deb ataluvchi (r_{ij}) matrisa ishlatiladi. Bu matrisa elementlari (5.9) formulalar yordamida topiladi.

4-misol. Quyidagi tabiatga qarshi o'yinni Sevidj mezoni bilan yeching.

T_j A_i	T_1	T_2	$\max_i(a_{ij})$
A_1	*110000*	*900*	*110000*
A_2	*100000*	*100000*	*100000*
			$\min_i\left\{\max_j(a_{ij})\right\} = 100000$

Bu o'yinda EQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu natija tabiatning T_1 holatida ham, T_2 holatida ham ro'y bo'lishi mumkin. Tabiatning aniq bir holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matrisasini tuzamiz:

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_i (a_{ij})$
A_1	10000	0	10000
A_2	0	99100	99100
			$\min\limits_i \left\{\max\limits_j (a_{ij})\right\} = 10000$

($r_{ij} = a_{ij} - \min\limits_i a_{ij}$). Jadvaldan ko‘rinadiki, $\max\limits_j r_{1j} = 10000$, $\max\limits_j r_{2j} = 99100$ hamda $\min\limits_i \left\{\max\limits_j (a_{ij})\right\} = 10000$. Demak optimal strategiya A_1 bo‘lib, bu strategiya bo‘yicha tavakkalchilikdan ko‘riladigan zarar 10000 pul birlikka teng bo‘ladi.

Sevidj mezoni bo‘yicha optimal strategiya deb yomon sharoitda tavakkalchilikdan ko‘riladigan zararni minimallashtiruvchi A_i strategiyaga aytiladi. Boshqacha aytganda, Sevidj mezoni yechim qabul qilish da tavakkalchilikdan ko‘riladigan zararni oldini olishga qaratilgan.

Gurvits mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo‘lib, unga asosan a_{ij} miqdor daromadni bildirganda EQQSH

$$\gamma_i \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1] \tag{5.14}$$

natijani beruvchi strategiyani tanlaydi. Agar a_{ij} - yutqazuvni bildirsa EQQSH

$$\gamma_i \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1] \tag{5.15}$$

natijani ta’minlovchi A_i strategiyani tanlaydi. Bu erda α – yechim qabul qilish vaziyatini subёektiv baholash orqali aniqlanadigan parametr hisoblanadi. Masalan, α = 1 bo‘lsa, vaziyat og‘ir va uni to‘g‘rilash uchun choralar ko‘rish talab qilinadi. α = 0 da esa vaziyat yaxshi (optimal) hech qanday chora ko‘rmasa ham bo‘ladi deb hisoblanadi. α ni (0,1) oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab tanlanadi. α ni tanlash EQQSH ning temperamentiga va vaziyatni qanday baholashiga bog‘liq. Vaziyat og‘ir bo‘lgan sari EQQSH qarshi choralar ko‘radi va α ning qiymati 1 ga yaqinlashadi.

5-misol. Tabiat bilan bo‘lgan o‘yin quyidagi to‘lovlar matrisasi bilan berilgan bo‘lsin.

T_j A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	*71*	*24*	23
A_2	*24*	*75*	23
A_3	70	16	20
A_4	*16*	*27*	*13*

Bu o‘yinga Gurvis mezonini qo‘llab optimal strategiyani α = 0,4 uchun topamiz. Buning uchun quyidagi ko‘rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo‘yicha tekshiramiz:

$$\gamma_i \max_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

T_j A_i	T_1	T_2	T_3	$\min_j(a_{ij})$	$\max_j(a_{ij})$	γ
A_1	*71*	*24*	23	23	71	51.8
A_2	*24*	*75*	23	23	75	54.2
A_3	70	16	20	16	70	48.4
A_4	16	27	13	13	27	21.4
						$\min \gamma_i = 21.4$

Jadvaldan ko‘rinadiki,

$$\gamma_1 = 0.4 \cdot 23 + 0.6 \cdot 71 = 51.8,$$

$$\gamma_2 = 0.4 \cdot 23 + 0.6 \cdot 75 = 54.2,$$

$$\gamma_3 = 0.4 \cdot 16 + 0.6 \cdot 70 = 48.4,$$

$$\gamma_4 = 0.4 \cdot 13 + 0.6 \cdot 27 = 21.4,$$

$$\min \gamma_i = 21.4.$$

Demak, a_{ij} – yutqazuv bo‘lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan.

6-misol. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo‘lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo‘lsin. Endi savdo korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda uning ko‘radigan zarari minimal bo‘ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo‘l), 30% (A_2 yo‘l), 40% (A_3 yo‘l), 50% (A_4 yo‘l) tushirishga mo‘ljallaydi. Bu yo‘llarni EQQSH ning strategiyalari deb qaraymiz. “Tabiat”ning ikkita yo‘li bor: 1) talabning kam egiluvchan bo‘lishligi (T_1 yo‘l) va 2) talabning ko‘p egiluvchanligi (T_2 yo‘l). Ana shularni nazarga olib quyidagi jadvallarni tuzamiz:

EQQSH strategiyasi	Narxining tushishi %	Eski bahosi	Yangi bahosi	Sotiladigan Tovar miqdori	Ko‘riladigan zarar
A_1	*20*	*20*	16	100	4400
A_2	*30*	*20*	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	$4400=500\cdot12-100\cdot16$ $3900=500\cdot12-14\cdot150$ $3360=500\cdot12-12\cdot220$ $3700=500\cdot12-10\cdot230$				

Bu yerda bir birlik mahsulotni savdo korxonasiga keltirish uchun sarf qilinadigan xarajat 12 birlik deb qabul qilingan.

Xuddi shunday, jadval talab egiluvchanligi kuchli bo‘lgan hol uchun tuziladi.

EQQSH strategiyasi	Narxining tushishi %	Eski bahosi	Yangi bahosi	Sotiladigan Tovar miqdori	Ko‘riladigan zarar
A_1	*20*	*20*	16	150	3600
A_2	*30*	*20*	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

1- va 2- jadvaldan foydalanib to‘lovlar matritsasini tuzamiz va Vald mezonini qo‘llab yechamiz:

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_j(a_{ij})$
A_1	*4400*	*3600*	4400
A_2	*3900*	*1100*	3900
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
			$\min\limits_i\left\{\max\limits_j(a_{ij})\right\}=3360$

Demak, savdo korxonasi mahsulot narxini 40% ga tushirganda zarar minimal bo‘ladi, ya’ni 3360 ga teng bo‘ladi.

Masalani Laplas mezoniga asosan yechamiz:

T_j / A_i	T_1	T_2	$a_{i1}\, p_{1}+ a_{i2}\, p_{2}+\ldots+ a_{in}\, p_n$
A_1	*4400*	*3600*	4400
A_2	*3900*	*1100*	3900
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
p	½	1/2	max_i $(a_{i1}\, p_{1}+ a_{i2}\, p_{2}+\ldots+ a_{in}\, p_n)$ = 2280

Bu mezon buyicha ham narx 40% tushirilsa zarar 2280 bo‘ladi.

Sevidj mezonini qo‘llash uchun (r_{ij}) matritsa tuzamiz va optimal strategiyani topamiz.

T_j / A_i	T_1	T_2	$\max\limits_j(a_{ij})$
A_1	*1100*	*2500*	2500
A_2	*600*	*0*	600
A_3	0	100	100
A_4	400	400	400
			$\min\limits_i \max\limits_j (r_{ij}) = 100$

Bu mezon bo‘yicha ham narx 40% ga tushirilishi ma’qul.

Nazorat savollari va topshiriqlari

1. O‘yinlar nazariyasining predmeti nimadan iborat?
2. O‘yining qanday turlari mavjud?
3. Juftli o‘yin nima?
4. Matrisali o‘yin nima?
5. 0 - summali o‘yin qanday bo‘ladi?
6. Yutuqlar matrisasi qanday ma’noga ega?
7. O‘yinning quyi va yuqori bahosi nima?
8. Minimaks va maksimin strategiyalarni ta’riflang.
9. Aralash strategiya nima?
10. Sof strategiyani ta’riflang.

11. Aralash strategiyalardagi echimda o‘yinning yutug‘i nimaga teng bo‘ladi?

12. Matrisali o‘yin bilan chiziqli dasturlash orasida qanday bog‘lanish bor?

13. Tabiat bilan o‘yin deganda qanday o‘yinni tushunasiz?

14. Tabiat bilan o‘yin raqobatli o‘yindan qanday farq qiladi?

15. Laplas va Bayes mezonlarini ta’riflang.

16. Vald mezoni bo‘yicha optimal strategiya qanday topiladi?

17. Sevidj mezoni bo‘yicha optimal strategiya qanday topiladi?

18.Gurvisning hosilaviy mezoni qanday?

19. Mezonlar orasidagi farq nimadan iborat?

6-BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI

6.1. Tasodifiy hodisalar.
6.2. Tasodifiy miqdorlar.
6.3. Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar
6.4. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

6.1. Tasodifiy hodisalar

Ehtimollar nazariyasi – “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlatni o‘rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi tasodifiy hodisa ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p matra takrorlash mumkin bo‘ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o‘tishida natijalari turlicha bo‘lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro‘y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro‘y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o‘yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifiyatsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarihini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo‘lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog‘liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug‘illanadi. Tasodifiyat insoniyatni doimo qiziqtirib kelgandir. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o‘laroq nisbatan qisqa, ammo o‘ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma’lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o‘rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to‘g‘ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o‘lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o‘lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug‘urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo‘lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarning o‘rganishdan emas, balki eng sodda qimor o‘yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo‘lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623- 1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o‘yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog‘liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog‘liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi - katta sonlar qonuni‖ tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog‘liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma’lum bo‘ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol’ o‘ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremalar ―markaziy limit teoremalar‖ deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi bo‘lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat’iy va sistematik ravishda ta’rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbiqlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog‘liqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma’lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli - kichik kvadratlar usuli‖ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o‘q uzish masalalariga qo‘lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta ro‘l o‘ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir.

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri – tasodifiy hodisa‖ tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy deb ataladi.

- Tasodifiy hodisa(yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro‘y berishi oldindan aniq bo‘lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari A,B,C, …lar bilan belgilanadi.

- Tajribaning har qanday natijasi elementar hodisa deyiladi va ω orqali belgilanadi.
- Tajribaning natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha elementar hodisalar to‘plami elementar hodisalar fazosi deyiladi va Ω orqali belgilanadi.

1-masala. Tajriba nomerlangan kub(o‘yin soqqasi)ni tashlashdan iborat bo‘lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisadan hodisalar 1 2 3 4 5 6 ω ,ω ,ω ,ω ,ω ,ω lardan iborat bo‘ladi. ω i hodisa tajriba natijasida i (i =1,2,3,4,5,6) ochko tushishini bildiradi. Bunda elementar hodisalar fazosi: Ω = {1,2,3,4,5,6}.

- Tajriba natijasida albatta ro‘y beradigan hodisaga muqarrar hodisa deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo‘la oladi.

Aksincha, umuman ro‘y bermaydigan hodisaga mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi va u ∅ orqali belgilanadi.

1-masalada keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

A={5 raqam tushishi};

B={juft raqam tushishi};

C={7 raqam tushishi};

D={butun raqam tushishi};

Bu yerda *A* va *B* hodisalar tasodifiy, *C* hodisa mumkin bo‘lmagan va *D* hodisa muqarrar hodisalar bo‘ladi.

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalarini keltiramiz.

Natijasi tasodifiy bo‘lgan biror tajriba o‘tkazilayotgan bo‘lsin. Ω - tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha elementar hodisalar to‘plami elementar hodisalar fazosi deyiladi; tajribaning natijasi ω esa elementar hodisa deyiladi.

• Agar Ω chekli yoki sanoqli to‘plam bo‘lsa (ya’ni elementlarini natural sonlar yordamida nomerlash mumkin bo‘lsa), u holda uning ixtiyoriy qism to‘plami A tasodifiy hodisa (yoki hodisa) deyiladi: $A \subseteq \Omega$.

Ω to‘plamdagi A qism to‘plamga tegishli elementar hodisalar A hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar deyiladi.

• Ω to‘plam muqarrar hodisa deyiladi. $\varnothing$ -bo‘sh to‘plam mumkin bo‘lmagan hodisa deyiladi. C-Ω ning qism to‘plamlaridan tashkil topgan sistema bo‘lsin.

• Agar

1. $\varnothing \in S$, $\Omega \in C$;
2. $A \in C$ munosabatdan $A \in C$ kelib chiqsa;
3. $A \in C$ va $B \in C$ munosabatdan $A+B \in C$, $A \cdot B \in C$ kelib chiqsa C sistema algebra tashkil etadi deyiladi.

Ta’kidlash joizki, $A + B = A \cdot B$, $A \cdot B = A + B$ ekanligidan 3 shartdagi A+ $B \in C$ va $A \cdot B \in C$ munosabatlardan ixtiyoriy bittasini talab qilish yetarlidir.

A hodisa n ta bog‘liqsiz tajribalarda n_A marta ro‘y bersin. n_A son A hodisaning chastotasi, n_A/n munosabat esa A hodisaning nisbiy chastotasi deyiladi.

Nisbiy chastotaning statistik turg‘unlik xossasi deb ataluvchi xossasi mavjud, ya’ni tajribalar soni oshishi bilan nisbiy chastotasi ma’lum qonuniyatga ega bo‘ladi va biror son atrofida tebranib turadi.

Misol sifatida tanga tashlash tajribasini olaylik. Tanga A={Gerb} tomoni bilan tushishi hodisasini qaraylik. Byuffon va K.Pirsonlar tomonidan o‘tkazilgan tajribalar natijasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Tajriba o‘tkazuvchi	Tajribalar soni, n	Tushgan gerblar soni, n_A	Nisbiy chastota, n_A/n
Byuffon	4040	2048	0.5080
K.Pirson	12000	6019	0.5016
K.Pirson	24000	12012	0.5005

Jadvaldan ko‘rinadiki, n ortgani sari nisbiy chastota $n_A/n = ½ = 0.5$ ga yaqinlashar ekan.

Agar tajribalar soni etarlicha ko‘p bo‘lsa va shu tajribalarda biror A hodisaning nisbiy chastotasi biror o‘zgarmas son atrofida tebransa, bu songa A hodisaning *statistik ehtimolligi* deyiladi.

Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsin.

A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n}$$

Klassik ta’rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba’zi elementlari keltiramiz. Kombinatirikada qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ va $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ chekli to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

- Qo‘shish qoidasi: agar A to‘plam elementlari soni n va B to‘plam elementlari soni m bo‘lib, $A\cdot B=\varnothing$ (A va B to‘plamlar kesishmaydigan) bo‘lsa, u holda $A+B$ to‘plam elementlari soni $n+m$ bo‘ladi.
- Ko‘paytirish qoidasi: A va B to‘plamlardan tuzilgan barcha (a_i,b_j) juftliklar to‘plami $C=\{(a_i ,b_j) : i=1,n,\ j=1,m\}$ ning elementlari soni $n\cdot m$ bo‘ladi.

n ta elementdan m ($0<m\le n$)tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o‘rniga qaytariladi.

Ehtimolning klassik ta’rifiga ko‘ra, Ω– elementar hodisalar fazosi chekli bo‘lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo‘lsa, geometrik ehtimollikdan foydalanamiz. O‘lchovli biror G soha berilgan bo‘lib, u D sohani o‘z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolligini hisoblash masalasini ko‘ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo‘ladi. $A = \{X \in D\}$ - X nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo‘lsin.

• A hodisaning geometrik ehtimolligi deb, D soha o‘lchovini G soha o‘lchoviga nisbatiga aytiladi, ya’ni

$$P(A) = \frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda *mes* orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

6.2. Tasodifiy miqdorlar

Ehtimollar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri tasodifiy miqdor tushunchasidir.

• Tajriba natijasida u yoki bu qiymatni qabul qilishi oldindan ma’lum bo‘lmagan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

Tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining bosh harflari X,Y,Z,…(yoki grek alifbosining kichik harflari ξ(ksi), η(eta), δ(dzeta),…) bilan qabul qiladigan qiymatlari esa kichik harflar $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlarga misollar keltiramiz:

1) X - tavakkaliga olingan mahsulotlar ichida sifatsizlari soni;

2) Y - n ta o‘q uzilganda nishonga tekkanlari soni;

3) Z - asbobning beto‘htov ishlash vaqti;

4) U - [0,1] kesmadan tavakkaliga tanlangan nuqtaning koordinatalari;

5) V-bir kunda tug‘iladigan chaqaloqlar soni va h.k.

• Agar tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli qiymatlar qabul qilsa, bunday t.m. *diskret tipdagi tasodifiy miqdor* deyiladi.

• Agar t.m. qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqdan iborat bo‘lsa *uzluksiz tipdagi tasodifiy miqdor* deyiladi.

Demak, diskret *tasodifiy miqdor* bir-biridan farqli alohida qiymatlarni, uzluksiz t.m. esa biror oraliqdagi ihtiyoriy qiymatlarni qabul qilar ekan. Yuqoridagi X va Y tasodifiy miqdorlar diskret, Z esa uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Endi tasodifiy miqdorni qat’iy ta’rifini keltiramiz.

- Ω elementar hodisalar fazosida aniqlangan X sonli funksiya t.m. deyiladi, agar har bir ω elementar hodisaga $X(\omega)$ conni mos qo‘ysa, yani $X=X(\omega),\ \omega\in\Omega$.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo‘lsa, u holda Ω da aniqlangan ixtiyoriy funksiya t.m. bo‘ladi. Umuman, $X(\omega)$ funksiya shunday bo‘lishi kerakki: $\forall x\in R$ da $A=\{\omega: X(\omega)<x\}$ hodisa C σ-algebrasiga tegishli bo‘lishi kerak.

Diskret va uzluksiz t.m.lar taqsimotlarini berishning universal usuli ularning taqsimot funksiyalarini berishdir. Taqsimot funksiya F(x) orqali belgilanadi.

- $F(x)$ funksiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $\forall x\in R$ son uchun quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x)=P\{X<x\}=P\{\omega: X(\omega)<x\}.$$

Taqsimot funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $F(x)$ chegaralangan:
$$0\le F(x)\le 1.$$
2. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya: agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda $F(x_1)\le F(x_2)$.
3. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1.$
4. $F(x)$ funksiya chapdan uzluksiz:
$$\lim_{x\to x_0-0}F(x)=F(x_0).$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorni asosiy xarakteristikasi zichlik funksiya hisoblanadi.

- Uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi deb, shu tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi.

Uzluksiz t.m. zichlik funksiyasi $f(x)$ orqali belgilanadi. Demak, $f(x)=F'(x)$.

▪ *X* tasodifiy miqdor dispersiyasi deb, $M(X\text{-}MX)^2$ – ifodaga aytiladi. Dispersiya *DX* orqali belgilanadi. Demak, $DX=M(X\text{-}MX)^2$

▪ Agar X t.m. 1, 2, …, m, … qiymatlarni $P_m=P\{X=m\}=q^{m-1}p$ ehtimolliklar bilan qabul qilsa, u geometrik qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu yerda $p=1-q\in(0,1)$.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misol sifatida quyidagilarni olish mumkin: sifatsiz mahsulot chiqqunga qadar tekshirilgan mahsulotlar soni; gerb tomoni tushgunga qadar tashlangan tangalar soni; nishonga tekkunga qadar otilgan o‘qlar soni va hokazo.

Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlangan *X* diskret t.m. taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

$X=m$	1	2	…	m	…
$p_m=P\{X=m\}$	p	qp	…	$q^m p$	…

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

chunki p_m ehtimolliklar geometrik progressiyani tashkil etadi: p, qp, q^2p $,q^3p, \ldots$. Shuning uchun ham taqsimot geometrik taqsimot deyiladi va *Ge(p)* orqali belgilanadi. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ agar\ m<1 \\ \sum\limits_{m<x} q^{m-1}p,\ agar\ 1\le m\le x \end{cases}$$

Normal taqsimot ehtimollar nazariyasida o‘ziga xos o‘rin tutadi. Normal taqsimotning xususiyati shundan iboratki, u limit taqsimot hisoblanadi. Ya’ni boshqa taqsimotlar ma’lum shartlar ostida bu taqsimotga intiladi. Normal taqsimot amaliyotda eng ko‘p qo‘llaniladigan taqsimotdir.

X uzluksiz t.m. normal qonun bo‘yicha taqsimlangan deyiladi, agar uning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘lsa

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$$

a va $\sigma>0$ parametrlar bo‘yicha normal taqsimot $N(a,\sigma)$ orqali belgilanadi. $X\text{-}N(a,\sigma)$ normal t.m.ning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt.$$

Agar normal taqsimot parametrlari a=0 va σ =1 bo‘lsa, u standart normal taqsimot deyiladi. Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

6.3. Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar

Bir o‘lchovli tasodifiy miqdorlardan tashqari, mumkin bo‘lgan qiymarlari 2 ta, 3 ta, ..., n ta son bilan aniqlanadigan miqdorlarni ham o‘rganish zarurati tug‘iladi. Bunday miqdorlar mos ravishda 2 o‘lchovli, 3 o‘lchovli, …, n o‘lchovli deb ataladi.

Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdor har bir elementar hodisa ω ga n ta $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlarning qabul qiladigan qiymatlarini mos qo‘yadi.

$F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo‘lsin. Ko‘p o‘lchovli $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ taqsimot funksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $\forall x_i$: $0 \le F(x_1, x_2, ..., x_n) \le 1$, ya’ni taqsimot funksiya chegaralangan.

2. $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas va chapdan uzluksiz.

3. Agar biror $x_i \to +\infty$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x_i \to +\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, ..., x_n) =$$

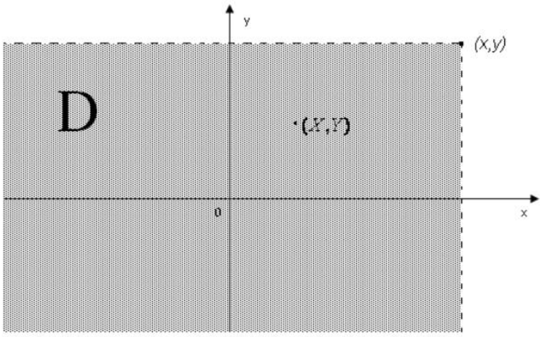
$$= F_{X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

4. Agar biror $x_i \to -\infty$ bo‘lsa, u $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. holda

Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasini $F(x,y)$ orqali belgilaymiz.

Ikki o‘lcholi (X,Y) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi, x va y sonlarning har bir jufti uchun $\{X \le x\}$ va $\{Y \le y\}$ hodisalarning birgalikdagi ehtimolligini aniqlaydigan $F(x,y)$ funksiyasidir: ya’ni

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = P\big((X.Y) \in (-\infty, x) \times (-\infty, y) = D\big).$$



(X, Y) ikki o‘lchovlik diskret t.m. taqsimot funksiyasi quyidagi yig‘indi orqali aniqlanadi:

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y}p_{ij}\,.$$

Ikki o‘lchovlik tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining xossalari:

1. $F(x,y)$ taqsimot funksiya chegaralangan: $0 \le F(x,y) \le 1$

2. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha kamayuvchi emas:

agar $x_2>x_1$ bo‘lsa, $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$
agar $y_2>y_1$ bo‘lsa, $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$

3. $F(x,y)$ funksiyaning biror argumenti $-\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda $F(x,y)$ funksiya nolga teng, $F(x,-\infty)= F(-\infty,y)= F(-\infty,-\infty)=0$

4. Agar $F(x,y)$ funksiyaning bitta argumenti $+\infty$ bo‘lsa (limit ma’nosida), u holda

$$F(x,+\infty)=F_1(x)=F_X(x)\,;\;\; F(+\infty,y)=F_2(y)=F_Y(y)\,.$$

4 Agar $F(x,y)$ funksiyaning ikkala argumenti $+\infty$ bo‘lsa(limit ma’nosida), u holda $F(+\infty,+\infty)=1$.

5. $F(x,y)$ funksiya har qaysi argumenti bo‘yicha chapdan uzluksiz, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0-0}F(x,y)= F(x_0,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0-0} F(x,y)= F(x,y_0)$

Agar ikki o‘lchovlik $F(x,y)$ funksiyaning uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi $F(x,y)$:

1. uzluksiz bo‘lsa;
2. har bir argumenti bo‘yicha differensiyallanuvchi;
3. $F''_{xy}(x,y)$ ikkinchi tartibli aralash hosila mavjud bo‘lsa.

Ikki o‘lchovlik (X, Y) tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F''_{xy}(x,y)$$

tenglik orqali aniqlanadi.

X va *Y* tasodifiy miqdorlar *bog'liqsiz* deyiladi, agar $\forall x,y \in R$ uchun $\{X<x\}$ va $\{Y<y\}$ hodisalar bog'liqsiz bo'lsa.

Endi tasodifiy miqdorlar bog'liqsizligining zarur va yetarli shartini keltiramiz.

Teorema. X va Y t.m.lar bog'liqsiz bo'lishi uchun

$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir.

(X,Y) ikki o'lchovlik t.m.ni tashkil etuvchi *X* va *Y* t.m.lar bog'liq bo'lsa, ularning bog'liqligini xarakterlovchi shartli taqsimot qonunlari tushunchalari keltiriladi.

(X,Y) ikki o'lchovli diskret t.m. birgalikdagi taqsimot qonuni $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$, $i=1.n$, $j=1.m$ bo'lsin. U holda

$$P\{Y=y_j / X=x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}, \ i=1,2,...n, \ j=1,2,...m$$

ehtimolliklar to'plami, ya'ni $p(y_1/x_i)$, $p(y_2/x_i)$,... $p(y_m/x_i)$ lar *Y* t.m.ning $X=x_i$ dagi *shartli taqsimot qonuni* deyiladi. Bu yerda

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j / x_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{x_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \frac{p_{x_i}}{p_{x_i}} = 1 .$$

Xuddi shunday,

$$P\{X=x_i / Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_i\}}, \ i=1,2,...n, \ j=1,2,...m$$

ehtimolliklar to'plami, ya'ni $p(x_1/y_j)$, $p(x_2/y_j)$,... $p(x_m/y_j)$ lar *X* t.m.ning $Y=y_j$ dagi shartli taqsimot qonuni deyiladi.

(*X*, *Y*) tasodifiy vektorning sonli xarakteristikalari sifatida turli tartibdagi momentlar ko'riladi. Amaliyotda eng ko'p I va II – tartibli momentlar bilan ifodalanuvchi matematik kutilma, dispersiya va korrelatsion momentlardan foydalaniladi.

Ikki o'lchovli diskret (*X*, *Y*) tasodifiy miqdorning *matematik kutilmasi* (*MX*, *MY*) bo'lib, bu yerda

$$MX = m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad MY = m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij}$$

va $p_{ij} = P\{X=x_i, Y=y_j\}$.

Agar (*X*, *Y*) t.m. uzluksiz bo'lsa, u holda

$$MX = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x,y)dxdy, \quad MY = m_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f(x,y)dxdy.$$

X va Y tasodifiy miqdorlarning *kovariatsiyasi*

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\left((X-m_x)(Y-m_y)\right) = \mu_{1,1}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Agar (X, Y) tasodifiy miqdor diskret bo‘lsa, uning kovariatsiyasi

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij},$$

agar uzluksiz bo‘lsa,

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Kovariatsiyani quyidagicha hisoblash ham mumkin:

$$K_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = MXY - MX\cdot MY.$$

Bu tenglik formula va matematik kutilmaning xossalaridan kelib chiqadi:

$$K_{XY} = M\left((X-m_x)(Y-m_y)\right) = M(XY - Xm_y - Ym_x + m_xm_y) =$$

$$= MXY - m_yMX - m_xMY + m_xm_y = MXY - m_ym_x - m_xm_y + m_xm_y = MXY - MXMY.$$

Kovariatsiya orqali X va Y t.m.larning dispersiyalarini aniqlash mumkin:

$DX=cov(X, X)=M(X- MX)^2=MX^2 -(MX)^2$,

$DY=cov(Y, Y)=M(Y- MY)^2=MY^2 -(MY)^2$,

(X, Y) vektorning kovariatsiya matritsasi

$$C = M\{(X, Y)^T*(X, Y) -(m_x, m_y)^T(m_x, m_y)\} =$$

$$= \begin{Vmatrix} DX & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & DY \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{Vmatrix}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Kovariatsiyaning xossalari:

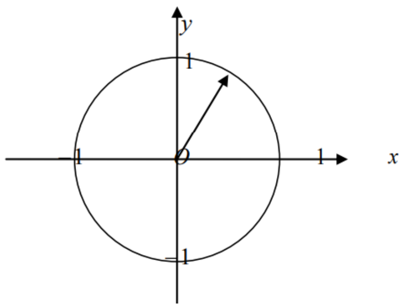
1. $K_{XY}=K_{YX}$;
2. Agar X Y $\perp$ bo‘lsa, u holda $K_{XY}=0$
3. Agar X va Y ixtiyoriy t.m.lar bo‘lsa, u holda $D(X \pm Y) = DX+DY \pm 2K_{XY}$;

4. $K_{CX,Y} = CK_{XY} = K_{X,CY}$ yoki $cov(CX,Y) = C\ cov(X,Y) = cov(X,CY)$;

5. $K_{X+C,Y}=K_{XY}=K_{X,Y+C}= K_{X+C,Y+C}$ yoki $cov(X+C,Y)=cov(X,Y)=cov(X,Y+C)=cov(X+C,Y+C)$;

6. $\left|K_{XY}\right| \leq \square_X * \square_Y$.

Doiradagi tekis taqsimot. Radiusi R =1 bo‘lgan doirada (X, Y) t.m. tekis taqsimotga ega bo‘lsin.



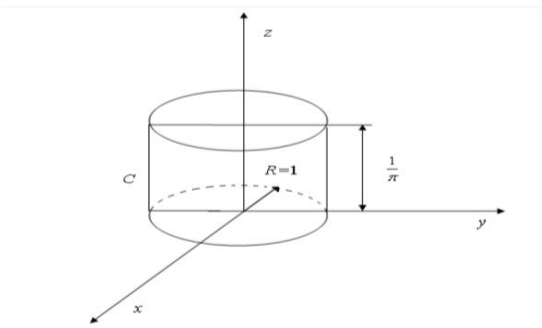
Demak, (X, Y) ning birgalikdagi zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\begin{cases} C, \text{ agar } x^2+y^2\leq 1, \\ 0, \text{ agar } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

O‘zgarmas C ni

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \text{, ya'ni } \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} C\ dxdy=1$$

shartdan aniqlaymiz. Bu karrali integralni geometrik ma’nosidan kelib chiqqan holda hisoblash osonroq.

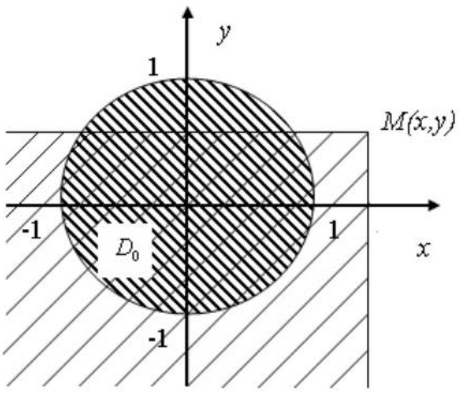


f (x, y) sirt va OXY tekislik bilan chegaralangan jismning hajmi 1 ga tengdir. Bizning holda bu asosi $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ va balandligi C bo‘lgan silindr hajmidir V = πC =1. Demak, C =1/π va izlanayotgan zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, \text{ agar } x^2+y^2\le 1,\\ 0, \text{ agar } x^2+y^2\le 1.\end{cases}$$

Unga mos taqsimot funksiyani hisoblaymiz:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv=\int_{-1}^{x}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{y}\frac{1}{\pi}dudv.$$



Tabiiyki, bu integral $x^2+y^2\le 1$ doira bilan uchi M nuqtada bo‘lgan $D=\{(a,b)\in R^2 : a\le x, b\le y\}$ - kvadrantning $1/\pi$ aniqligida kesishishidan hosil bo‘lgan soha D_0 yuzasiga tengdir. Tabiiyki, $x\le -1,\ -\infty<y<+\infty$ da $F(x,y)=0$, chunki bu holda $D_0=\varnothing$, endi $x>1$ va $y>1$ da $F(x,y)=1$, chunki bu holda D_0 – soha $x^2+y^2\le 1$ doira bilan ustma-ust tushadi.

Endi X va Y larning marginal taqsimot funksiyalari F_X va F_Y larni hisoblaymiz: $-1<x<1$ da

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dudv=\int_{-1}^{x}\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\pi}dudv=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{x}\left(v\Big|_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\right)du=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^{x}2\sqrt{1-u^2}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\left(x\sqrt{1-x^2}\right)+\arcsin u\Big|_{-1}^{x}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right).$$

Demak,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\le -1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right), & \text{agar } -1<x\le 1,\\ 1, & \text{agar } x>1.\end{cases}$$

Aynan shunga o‘xshash

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & \text{agar } y\le -1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\cdot\left(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right), & \text{agar } -1<y\le 1,\\ 1, & \text{agar } y>1.\end{cases}$$

Nihoyat, X va Y larning marginal zichliklarini hisoblaymiz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-x^2},\quad -1\le x\le 1,$$

va shu kabi

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{1-y^2},\quad -1\le y\le 1.$$

Ko‘rinib turibdiki, $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, demak, X va Y bog‘liq tasodifiy miqdorlar ekan.

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, tekis taqsimotga ega bo‘lgan har qanday (X,Y) juftlik doimo bog‘liq bo‘ladi deb aytish noto‘g‘ridir. Chunki X va Y larning bog‘liqlik xossalari ular qanday sohada tekis taqsimotga ega ekanligiga bog‘liqdir. Shu boisdan keyingi taqsimotni ko‘rib o‘tamiz.

Kvadratdagi tekis taqsimot. $(X,\ Y)$ juftlik $[0,1]\times[0,1]$ kvadratda tekis taqsimotga ega bo‘lsin. U holda ular birgalikdagi taqsomot funksiyasi ko‘rinishi quyidagidek bo‘ladi:

$$F(x,y)=\begin{cases}0,\ x,y\le 0,\\ x\cdot y,\ 0<x,y<1,\\ 1,\ x,y\ge 1.\end{cases}$$

Bundan

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=F(x,1)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ x,\ 0<x<1,\\ 1,\ x\ge 1.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=F(1,y)=\begin{cases}0,\ y\le 0,\\ y,\ 0<y<1,\\ 1,\ y\ge 1.\end{cases}$$

Demak, barcha $x,y \in R^1$ lar uchun $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$, ya'ni X va Y bog'liq emas ekan.

Ikki o'lchovlik normal(Gauss) taqsimoti. (X,Y) tasodifiy vektor ikki o'lchovli normal taqsimotga ega bo'lsin. U holda (X,Y) ning birgalikdagi zichlik funksiyasi

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \cdot \frac{(x-a_1)}{\sigma_1} \cdot \frac{(y-a_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

Geometrik nuqtayi nazardan $f(x, y)$ grafigi cho'qqisi (a_1, a_2) nuqtada joylashgan «tog'» shaklini bildiradi. Agarda biz bu tog'ni OXY tekisligiga parallel tekislik bilan kesadigan bo'lsak, u holda kesilish chiziqlari quyidagi ellipslardan iborat bo'ladi:

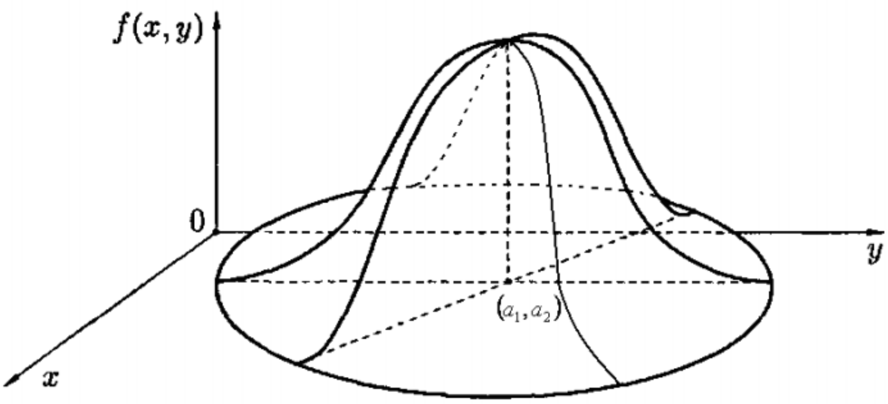
$$\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \cdot \frac{(x-a_1)}{\sigma_1} \cdot \frac{(y-a_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} = C \text{-konstanta},$$

bu yerda $a_1 = MX$, $a_2 = MY$, $\sigma_1^2 = DX$, $\sigma_2^2 = DY$, va $r = r_{X,Y}$ -korrelyatsiya koeffitsientidir. Agar $r = 0$ bo'lsa, bu chiziqlar aylanalardan iborat bo'lib qoladi. Biz r ning aynan korrelatsiya koeffisienti bo'lishiga ishonch hosil qilish maqsadida

$$Z_1 = \frac{X-a_1}{\sigma_1^2} \text{ va } Z_2 = \frac{Y-a_2}{\sigma_2^2}$$

yangi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz. Tabiiyki, $MZ_k = 0$, $DZ_k = 1$, $k = 1,2$. U holda (Z_1, Z_2) ning zichlik funksiyasi

$$g(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{z_1^2 - 2r \cdot z_1 z_2 + z_2^2}{2(1-r^2)}\right\}.$$



Endi korrelyatsiya koeffitsientini hisoblaymiz:

$$r_{X,Y}=Cov(Z_1,Z_2)=MZ_1Z_2=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}z_1z_2g(z_1,z_2)dz_1dz_2=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty}z_2e^{-\frac{z_2^2}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}(z_1-rz_2+rz_2)\cdot\exp\left\{-\frac{(z_1-rz_2)^2}{2(1-r^2)}\right\}dz_1\right)dz_2=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z_2\cdot e^{-\frac{z_2^2}{2}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(z_1-rz_2)\cdot\exp\left\{-\frac{(z_1-rz_2)^2}{2(1-r^2)}\right\}\cdot d(z_1-rz_2)\right]dz_2+$$

$$+\frac{r}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}z_2^{\ 2}\cdot e^{-\frac{z_2^2}{2}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(z_1-rz_2)^2}{2(1-r^2)}\right\}d(z_1-rz_2)\right]dz_2=r\,.$$

Oxirgi tenglikni hosil qilishda quyidagi integrallardan foydalandik:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u\cdot e^{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}}du=0,\quad u=z_1-rz_2\,,$$

- markazlashtirilgan normal tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2(1-r^2)}}du=1,\quad u=z_1-rz_2\,,$$

- zichlik funksiya integrali;

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}z_2^{\ 2}\cdot e^{-\frac{z_2^2}{2}}dz_2=1\,,$$

- standart normal t.m. dispersiyasi.

Demak, *r (X,Y)* = *r* ekan. Agar ikki normal taqsimotga ega bo‘lgan *X* va *Y* t.m.lar bog‘liq bo‘lmasa, *r =0* bo‘lishi *r* ning xossasidan kelib chiqadi. Endi shu t.m.lar uchun *r =0* bo‘lsin. U holda

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^{\ 2}}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}\right]\right\}=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

bu yerda

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^{\ 2}}\right\},\ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\cdot\exp\left\{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^{\ 2}}\right\}$$

funksiyalar $N(a_1, \sigma_1^2), N(a_2, \sigma_2^2)$ normal t.m.lar zichlik funksiyalaridir. Demak, tasodifiy miqdorlar korrelyatsiyalanmaganligidan ularning bog‘liqsizligi ham kelib chiqar ekan. Bu hol ikki o‘lchovlik normal taqsimotni boshqa taqsimotlardan ajratib turadi.

Taqsimot funksiya bilan bir qatorda u haqidagi hamma ma’lumotni o‘z ichiga oluvchi xarakteristik funksiyalardan ham foydalaniladi. Xarakteristik funksiya yordamida bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlarning yig‘indisining taqsimotini topish, sonli xarakteristikalarni hisoblash bir muncha osonlashadi.

X tasodifiy miqdorning *xarakteristik funksiyasi* e^{itX} e tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi bo‘lib, uni $\varphi_X(t)$ yoki $\varphi(t)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra:

$$\varphi(t) = Me^{itX}.$$

Agar X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ qiymatlarni $p_k = P\{X=x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ ehtimolliklar bilan qabul qiluvchi diskret tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda uning xarakteristik funksiyasi

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$$

formula orqali, agar zichlik funksiyasi $f(x)$ bo‘lgan uzluksiz tasodifiy miqdor bo‘lsa, u holda uning xarakteristik funksiyasi

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx$$

formula orqali aniqlanadi.

Xarakteristik funksiyaning xossalari:

1. Barcha $t \in R$ uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:

$$|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1.$$

1. Agar $Y = aX + b$ bo‘lsa, bu yerda a va b o‘zgarmas sonlar, u holda

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at).$$

2. Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda $X+Y$ yig‘indining xarakteristik funksiyasi X va Y tasodifiy miqdorlarning xarakteristik funksiyalari ko‘paytmasiga teng:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

3. Agar X tasodifiy miqdorning k-tartibli boshlang‘ich momenti $\alpha_k = MX^k$ mavjud bo‘lsa, u holda unga mos xarakteristik funksiyaning k-tartibli hosilasi mavjud bo‘lib, uning $t=0$ dagi qiymati

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k M(X^k) = i^k \cdot \alpha_k .$$

6.4. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari

Agar X tasodifiy miqdorning har bir qiymatiga biror qoida bo‘yicha mos ravishda Y t.m.ning bitta qiymati mos qo‘yilsa, u holda Y ni X tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va $Y=\varphi(X)$ kabi yoziladi.

$Y=\varphi(X)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi quyidagi tengliklar orqali aniqlanadi:

$$MY = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \quad DY = \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - MY)^2 p_i .$$

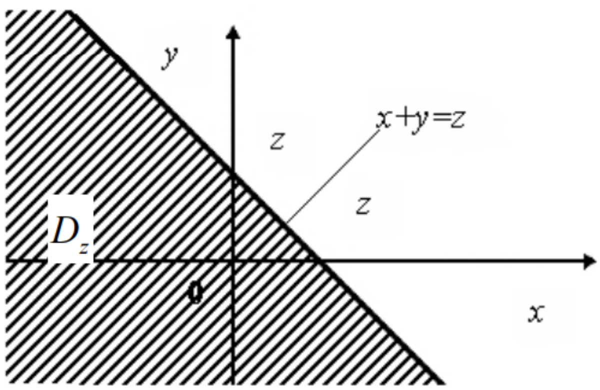
Agar X va Y t.m.lar qabul qiladigan qiymatlarining har bir juftligiga biror qoidaga ko‘ra Z t.m. mos qo‘yilsa, u holda Z t.m. X va Y ikki tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va $Z=\varphi(X,Y)$ kabi belgilanadi.

$Z=\varphi(X,Y)$ funksiyaning amaliyotda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan xususiy holi $Z=X+Y$ t.m.ning taqsimotini topamiz.

(X, Y) ikki o‘lchovli uzluksiz t.m. $f(X, Y)$ birgalikdagi zichlik funksiyaga ega bo‘lsin. Formuladan foydalanib, $Z=X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \iint_{D_z} f(x, y)dxdy ,$$

bu yerda $D_z=\{(x,y):x+y<z\}$.



U holda

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right)dx .$$

Hosil bo‘lgan tenglikni z o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallab, $Z=X+Y$ tasodifiy miqdor uchun zichlik funksiyaga ega bo‘lamiz:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx .$$

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lsa, $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi va formula

$$f_Z(z)=f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bog‘liqsiz t.m.lar yig‘indisining taqsimoti shu tasodifiy miqdorlar taqsimotlarining *kompozitsiyasi* deyiladi. Z tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_{X+Y}=f_X*f_Y$ ko‘rinishda yoziladi, bu yerda * - kompozitsiya belgisi.

Xuddi shunday, agar $Z=X+Y$ ko‘rinishda yozib olsak, $f_Z(z)$ uchun boshqa formulaga ega bo‘lamiz:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy ,$$

agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy .$$

$Z=X-Y$, $Z=X\cdot Y$ tasodifiy miqdorlarning taqsimotlarini topish ham xuddi shunga o‘xshash amalga oshiriladi.

Nazorat savollari va topshiriqlari

1. Kutubxonada muammoli kitoblarning 15 ta yangi va 10 ta eski nashrlari mavjud. 5 kishilik guruhdagi barcha talabalar o‘sha yili nashr etilgan muammoli kitoblarni olish ehtimoli qanday? (Javob: p = 0,06)

2. O‘qituvchi uchta o‘quvchining har biridan 1 dan 10 gacha bo‘lgan sonni o‘ylab topishni so‘raydi. Har bir o‘quvchining istalgan sonini tanlashi teng darajada mumkin deb taxmin qilib, kimningdir rejalashtirilgan raqamlari mos tushish ehtimolini toping. (Javob: p = 0,28)

3. Ma’lumki, 5 xonali telefon raqamidagi barcha raqamlar har xil. Ularning orasida 1 va 2 raqamlari bo‘lishi ehtimolini toping. (Javob: p = 0,22)

4. Korporatsiyaning markaziy buxgalteriya bo‘limi tekshirish va qayta ishlash uchun hisob-faktura paketlarini oldi: paketlarning 90% qoniqarli deb topildi, ular yo‘q noto‘g‘ri rasmiylashtirilgan hisob-fakturalarning 5% dan ortig‘i. Qolgan yuk paketlarining 10% qoniqarsiz deb topildi, chunki ularda 5 foizdan ko‘prog‘i noto‘g‘ri rasmiylash-tirilgan yuk qog‘ozlari bo‘lgan. Qabul qilingan schyot-fakturalarning keyingi partiyasini qoniqarsiz deb hisoblash ehtimoli qanday? Paketdan tasodifan olingan etkazib berish yozuvining noto‘g‘ri bajarilishi ehtimoli qanday? (Javob: ‘p_1 = 0,1; p_2 = 0,014)

5. Quyidagi sxema bo‘yicha o‘tkazilgan o‘yinda uchta *A*, *B* va C o‘yinchi qatnashadi: birinchi davrada *A* va *B* o‘ynaydi, *C* o‘yinchi esa bepul. Ikkinchi bosqichda birinchi bosqich g‘olibi va *C* o‘yinchisi o‘ynaydi. Musobaqa o‘yinchilarning biri ketma-ket ikkita o‘yinda g‘alaba qozonguniga qadar davom etadi. Oddiylik uchun biz duranglarni chiqarib tashlaymiz. Futbolchilar bir xil darajada qattiq. *A*, *B* yoki *C* o‘yinchi g‘olib bo‘lish ehtimolini toping. (Javob: $P(A) = P(B)$ = 5/14; $P(C$ = 2/7)

6. Kimdir adresatlarga maktublar yozgan, har bir konvertga bittadan harf qo‘ygan va keyin tasodifiy ravishda har bir konvertga n ta manzildan bittasini yozgan. Hech bo‘lmaganda bitta elektron pochta manziliga etib borish ehtimoli qanday? (Javob: $p = 1/n$)

7. Do‘konda ikkinchi o‘sishdan 1 ta kostyum, uchinchi o‘sishdan 2 ta kostyum, to‘rtinchi o‘sishdan 3 ta kostyum osilgan. Ikkinchi balandlikdagi kostyum 0,2 ehtimollik bilan, uchinchi balandlikdagi kostyum 0,3 ehtimollik bilan va to‘rtinchi o‘sish kostyum 0,5 ehtimollik bilan so‘raladi. 3 xaridor do‘konga kirishdi. Ulardan kamida bittasi sotib olmagan holda ketish ehtimolini toping. (Javob: p = 0.131)

8. Sug‘urta kompaniyasi bir xil yoshdagi va bir ijtimoiy guruhdagi 10 000 kishini sug‘’urta qildi. Har bir inson uchun bir yil ichida o‘lish ehtimoli 0,006 ni tashkil qiladi. Har bir sug‘urtalangan shaxs 1 yanvar kuni 12 rubl to‘laydi. Sug‘urta, vafot etgan taqdirda uning qarindoshlari jamiyatdan 1000 rubl oling. a) jamiyat zarar ko‘rishi ehtimoli qanday; b) 40000 rubl foyda keltiradimi? (Javob: p_1 = 0.000003, p_2 = 0.001) .

9. Hisoblagich $p = 0.9$ ehtimollik bilan unga tushgan zarrachalarni ro‘yxatdan o‘tkazadi. U 10 ta bo‘lishi sharti bilan uning 9 ta zarrachani ro‘yxatdan o‘tkazish ehtimolini toping (Javob: $p = 0.3678$)

10. Banax masalasi. Ma’lum bir matematik o‘zi bilan ikkita gugurt qutisini olib yuradi. Har safar gugurt olishni xohlasa, u qutilaridan birini tasodifiy tanlaydi. Matematik bo‘sh qutini chiqarganda, boshqa qutida r ta match bo‘lishi ehtimoli toping. (Javob: $C_{2N-r}^{N_2-3V+r}$, N - har bir qutidagi gugurtning boshlang‘ich soni)

11. Beshta tugmachadan bittasi eshikka to‘g‘rinkeladi. Eshik ochilguncha kalitlarni birma-bir sinab ko‘rishadi. Sinov tugmachalari sonining ehtimollik taqsimotini toping.

12. Ko‘rsatkichli qonunga muvofiq taqsimlangan tasodifiy o‘zgaruvchining matematik kutilishini va dispersiyasini $\lambda = 2$ parametri bilan toping.

13. ξ va η tasodifiy o‘zgaruvchilar $\{(x, y)$ to‘plamda qo‘shma bir xil taqsimotga ega: $|x| + |y| \leq 1,\ y \geq 0\}$. ξ - η va cov $(\xi + \eta, \xi^2 + \eta^2)$ zichligini toping. ξ va η mustaqilmi?

14. Tasodifiy miqdor ξ [1,4] oralig‘ida bir tekis taqsimlangan.

ξ tasodifiy miqdirining tarqalish zichligini toping $\eta = e^{-3(\xi-1)}$.

15. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \geq 0; \\ Ce^{3x}, x < 0 \end{cases}$$

C ni toping, taqsimot funksiyasi $F(x)$, $P(-1<\xi<1)$ $E\zeta$.

16. Tasodifiy o‘zgaruvchining taqsimlash funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1; \\ A + B\arcsin x, -1 \leq x \leq 1 \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

A va B koeffitsientlarini aniqlang, Ex va Dx ni toping.

17. ξ va η ning birgalikdagi taqsimlanish qonuni jadval bilan berilgan:

$\xi \setminus \eta$	-1	1	2
1	1/4	1/12	1/6
0	1/6	1/12	1/4

ξ va η tasodifiy miqdorlar bog‘liqmi? (Javobni asoslang.) $\xi\eta$ taqsimotini toping, cov $(\xi + \eta, \xi\eta)$ ni hisoblang.

18. Chipta sotuvchisi ularni firmadan har birini 3 dollardan sotib oladi va xaridorga 4 dollarga sotadi. Talab statistikasini qayta ishlagandan so‘ng u X (o‘nlab) talab quyidagi taqsimotga ega ekanligini aniqladi:

X_i	3	4	5	6	7	8	9
P_i	0,01	0,1	0,3	0,4	0,1	0,06	0,03

Daromadning matematik kutish darajasi maksimal bo‘lishi uchun qancha chipta sotib olish kerak?

19. Nolinchi lotereya yutug‘I 0,9 ehtimoli va 0,1 ehtimoli bo‘lgan 5 pesoning yutug‘i bo‘lsin. Chipta narxi 1 peso. Janob X, 3 pesoga ega bo‘lib, lotereya o‘ynashga qaror qildi. U allaqachon biladiki, eng keng tarqalgan usullardan biri (butun naqd pul uchun o‘ynash, keyin olingan barcha summa uchun va hokazo) to‘liq zararga olib keladi. Shuning uchun, u ikki yo‘lning birida to‘xtashga qaror qildi: 1) birinchi g‘alabaga qadar o‘ynash; 2) 3 bilet sotib olish. Qaysi usulga imtiyoz berish kerak?

20. ξ tasodifiy miqdor 2/3 parametri bilan eksponent taqsimotga ega. η tasodifiy miqdor $\eta = 1 - e^{-(2/3)\xi}$ formula bilan aniqlanadi. 2/3 nuqtada $F(x)$ taqsimlash funksiyasi va $f(x)$ taqsimot zichligining qiymatini toping.

21. Gauss vektori (ξ, η) ikkita subvektordan tashkil topsin $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ va $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, ξ va η o‘zaro bog‘liq emas, ya’ni $\mathrm{cov}(\xi_k, \eta_j) = 0$ hamma uchun $k = 1, \ldots, n$; $j \approx 1, \ldots, m$. ξ va η bog‘liq emasligini isbotlang.

22. ξ parametrlari a va R ($\xi \sim N(a, R)$) ga ega bo‘lgan Gauss vektori bo‘lsin va vektor ξ dan $\eta = \beta\xi$ chiziqli o‘zgarish orqali olinadi, bu erda $\eta = Q\xi$ to‘rtburchaklar matritsa. η Qa va QRQ^T parametrlari bilan Gauss vektori ekanligini isbotlang.

7-BOB. MATEMATIK STATISTIKA

7.1. Bosh va tanlanma to‘plam

Oldingi bo‘limlardan ma’lumki, ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalar bilan bog‘liq jarayonlarning matemetik modellarini o‘rganish bilan shug‘ullanadi. Ixtiyoriy tasodifiy jarayonlarga mos matematik modellar yordamida bizni qiziqtirayotgan u yoki bu hodisalarning ro‘y berish ehtimolligini topishimiz mumkin.

Matematik statistika tasodifiy hodisalar yoki jarayonlar haqida shu hodisalarni kuzatish yoki tajribalar natijasida olingan ma’lumotlar asosida umumiy xulosalar chiqaradigan matematik fandir. Bu xulosalar umumiylik xususiyatlariga ega bo‘lib, kuzatilayotgan tasodifiy holatlarning barchasiga taaluqlidir. Matematik statistika ehtimollar nazariyasiga tayangan holda, uning usullari va nazariy hulosalari asosida o‘rganilayotgan obyekt haqida xulosalar chiqaradi. Agarda ehtimollar nazariyasida biz o‘rganayotgan matematik model to‘la-to‘kis berilgan deb hisoblab, bu model bizni qiziqtirayotgan holatlarni o‘rgansak, matematik statistikada biz qandaydir tasodifiy hodisalar natijalaridan kelib chiqqan holda (bular ko‘pchilik hollarda sonlardan iborat bo‘ladi), tasodifiy jarayonlarning matematik modelini tuzishga harakat qilamiz. Matematik statistika o‘zining xulosa chiqarish usullari yordamida o‘ganilayotgan obyektning nazariy ehtimoliy modelini tuzishga qaratilgan. Masalan, Bernulli sxemasida biz kuzatayotgan A hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p bo‘lsin. Bizni n ta bog‘liqsiz tajribalar natijasida A hodisasining $k(k \leq n)$ marta ro‘y berish ehtimolligi qiziqtirsin. Bu masala ehtimollar nazariyasining usullari bilan to‘liq hal etiladi. Endi shunday masala qo‘yilsin: n ta bog‘liqsiz tajribalarda bizni qiziqtiradigan A hodisa k marta ro‘y bersin. U holda shu hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimolligi p deb qanday miqdorni olish kerak? Bu hol matematik statistikaning namunaviy masalasidir. Ko‘rinib turibdiki, matematik statistika masalalari ehtimollar nazariyasi masalalariga teskari masalalar ekan.

Matematik statistika o‘z xulosalarida biz qiziqayotgan tasodifiy hodisalarni tavsiflaydigan, odatda sonlardan iborat bo‘lgan statistic ma’lumotlar asosida o‘rganilayotgan tasodifiy jarayonning nazariy-ehtimoliy qonuniyatlarini tuzish uchun turli usullarni ishlab chiqishga qaratilgandir.

Endi Bernulli sxemasi misolida matematik statistika shug‘ullanadigan va hal qilinadigan asosiy masalalarni ko‘rib chiqaylik.

I. Noma’lum parametrni statistik baholash. n ta tajriba natijasida biz kuzatayotgan A hodisa m marta ro‘y bersin. U holda, shu ma’lumotlar asosida biz shunday w miqdorni aniqlaylikki, uni $p = P(A)$ sifatida qabul qilish mumkin bo‘lsin. Bizning holimizda A hodisaning chastotasini $w = \frac{m}{n}$ deb qabul qilishimiz tabiiy. Albatta, biz statistik baho deb taklif etayotgan w miqdor ma’lum ma’noda noma’lum parameter w ga yaqin bo‘lishi kerak.

II. Ishonchlilik oralig^{t}i. Ba’zi hollarda noma’lum parametr p ning aniq qiymati emas, balki 1 ga yetarlicha yaqin ehtimollik bilan uning qiymatini statistik ma’lumotlar asosida aniqlanadigan biror $[w_1;w_2]$ oraliqqa tegishli bo‘lishi qiziqtiradi. Bunda oraliq chegaralari w_i va w_2 - tanlanma miqdorlar faqat m ga bog‘liq bo‘ladi. Tajriba natijasida to‘liq aniqlanadigan [w_1; w_2] oraliq - ishonchlilik oralig‘i deyiladi.

III. Statistik gipotezalarni tekshirish. Faraz qilatlik, qandaydir (aprior) mulohazalar asosida $p = p_0$ degan xulosaga keldik. Bu yerda p_0 - aniq miqdor. Nisbiy chastota m/n asosida biz statistik gipoteza $p = p_0$ ning to‘g‘ri yoki noto‘g‘riligini tekshirishimiz kerak. Yetarli katta n lar uchun m/n nisbiy chastota p ehtimollikka yaqin bo‘gani uchun, statistik gipoteza $p = p_0$ ni tekshiruvchi alomat $\left|\frac{m}{n} - p_0\right|$ ayirma asosida quriladi. Agarda bu ayirma katta bo‘lsa, asosiy gipoteza p p_0 rad etiladi, agarda bu ayirma yetarlicha kichik bo‘lsa, statistic gipotezani rad etishga asos bo‘lmaydi.

Yuqorida ko‘rsatilgan va boshqa statistik ma’lumotlami hal etish matematik statistikaning vazifasidir. Matematik statistika bu masalalarni o‘zining tushunchalari va statistik usullari bilan hal etadi.

Aytaylik, ishlab chiqarilgan mahsulotlarning katta to‘piga tegishli biron-bir xususiyat (masalan, mahsulotning o‘lchami, og‘irligi, narxi va hokazo) o‘rganilayotgan bo‘lsin. To‘pga tegishli barcha mahsulotlar *bosh to'plamni* tashkil qiladi deyiladi. Ko'p hollarda , bosh to'plamga mahsulotlar juda ko'p miqdorda bo'lib, ularning barchasini uzluksiz o'lchash amaliyotda mumkin bolmaydi. Ba'zi hollarda bu umuman mumkin bo'lmasa. ayrim hollarda juda katta xarajatlarni talab qiladi. Bunday hollarda bosh to'plamdan tasodifiy ravishda chekli sondagi mahsulot ajratib olinadi va ularning xususiyatlari o'rganiladi. Bu jarayon tanlanmalarga olib keladi. Demak, *tanlanma* bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementdir. Tanlanmalar usuli deganda biz bosh to'plamdan tasodifiy ravishda olingan elementlarga xos bo'lgan qaralayotgan xususiyatlarni statistik tahlil qilib, shular asosida bosh to'plam elementlariga xos bo'lgan xususiyatlar haqida umumiy xulosalar chiqarishni tushunamiz.

Matematik statistikada har qanday mulohaza va xulosalar statistik ma'lumotlarga yoki boshqacha qilib aytganda, tajriba natijalariga tayanadi. Odatda tajriba natijalari taqsimoti $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdorning X_1 , X_2,..., X_n kuzatilmalaridan iborat bo'ladi. Demak, kuzatilmalar bog'liqsiz va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ekan.

- ✓ Kuzatilmalardan tuzilgan (X_1, X_2, ..., X_n) vektor hajmi n ga teng bolgan *tanlanma* deyiladi.

Endi X bilan X tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlar to'plami bo'lsin. X to'plam bosh to'plamdan iborat bo'ladi. X to'plam chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Mavzu boshida ko'rilgan misoldagi barcha mahsulotlarning xususiyatlaridan iborat to'plam-bosh to'plam va shu xususiyatlarning sonli ifodasi esa X tasodifiy miqdor qiymatlaridan iborat bo'ladi. Bosh to'plam X dan qiymatlar qabul qiluvchi X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini va sonli xarakteristikalarini (masalan, matematik kutilma, dispersiya, yuqori tartibli momentlar va hokazo) mos ravishda nazariy taqsimot va nazariy sonli xarakteristikalar deyiladi. Kuzatishlar asosida aniqlangan taqsimot funksiya va unga mos sonli xarakteristikalar empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi va sonli xarakteristikalari deyiladi.

7.2. Empirik taqsimot funksiya

Faraz qilaylik, taqsimot funksiyasi $F(x)$ bo'lgan X tasodifiy miqdor kuzatilayotgan bo'lsin. (X_1, X_2, ..., X_n) - vektor esa unga mos hajmi *n* ga teng bo‘lgan tanlanma bo‘lsin. Shu vektorning biron-bir aniq qiymati:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (6.1)$$

X tasodifiy miqdorning amalga oshgan qiymati deyiladi. Har qanday tajriba natijalari (6.1) qatordan iborat bo⅛an sonlar to‘plami bo4adi.

- ✓ Birinchi satri tajriba nomerlari, ikkinchisi esa X ning mos amaldagi qiymatlaridan iborat bo‘lgan quyidagi jadvalga
- ✓

1	2	3	…	*n*
x_1	x_2	x_3	…	x_n

statistik qator deb ataladi. Statistik qator turli maqsadlarda va turli usullar bilan tahlil qilinishi mumkin. Mana shunday tahlilning maqsadi *X* tasodifiy miqdorning empiric (yoki statistik) taqsimot funksiyasini tuzishdan iborat bo‘lishi mumkin.

(6.1) qatorni kamaymasligi bo‘yicha tartiblaymiz:

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)} \qquad (6.2)$$

hosil boˁlgan (6.2) qator *variatsion qator* deyiladi.

Ixtiyoriy statistik qator (6.1) yordamida empirik yoki tanlanma taqsimot funksiyasi aniqlanishi mumkin.

- ✓ Quyidagicha

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le x) \qquad (6.3)$$

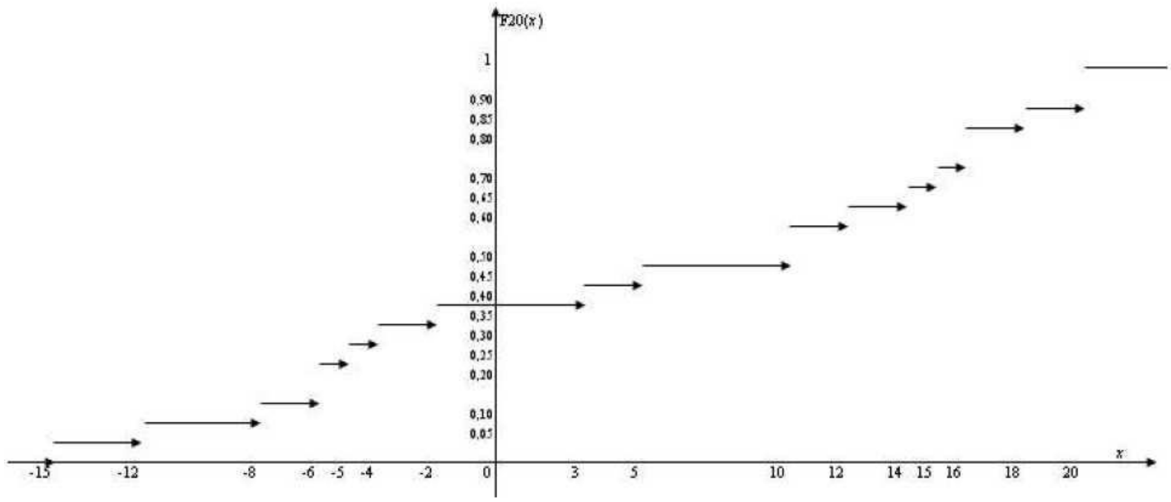
aniqlangan funksiya *empirik* (yoki tanlanma) *taqsimot funksiyasi* deyiladi. Bu yerda I(A) orqali A hodisa indikatori belgilangan. Statistik qator (6.1) tanlanma miqdorlardan iborat bo‘lgani uchun, empirik taqsimot funksiya ham har bir tayinlangan *x* da tanlanma miqdor boˁladi.

1-masala. Uzoqlikni o‘lchovchi asbob bilan ma’lum masofa o‘lchanganda tasodifiy xatolikka yo‘l qo‘yildi. Tajriba 20 marta takrorlanganda yo‘l qo‘yilgan xatoliklar statistik taqsimot funksiyasini tuzing. Statistik qator quyidagicha bo‘lsin:

i	1	2	3		5	6	7	8	9	10
	5	-8	10		3	-6	15	20	12	15

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	-4	-2	20		-8	-12	16	10	-5	18

Eng kichik kuzatilma -15. Demak, $F_{20}(-15) = 0$. -15 bir marta kuzatildi, demak, uning chastotasi 1/20. Shuning uchiun, -15 nuqtada empirik taqsimot funksiya 1/20 ga teng bo‘lgan sakrashga ega, -15 nuqtadan -12 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $F_n(x)$ funksiya 1/20 ga teng. -12 niqtada empirik taqsimot funksiya 1/20 ga teng bo[4]lgan sakrashga ega, -12 nuqtadan -8 nuqtagacha bo‘lgan oraliqda $F_n(x)$ funksiya 2/20 ga teng. -8 niqtada empirik taqsimot funksiya 2/20 ga teng bo‘lgan sakrashga ega, chunki -8 qiymat ikki marta uchraydi va hokazo. Empirik taqsimot funksiya grafigini chizamiz.



34-rasm

Har qanday tanlanma miqdorning empirik taqsimot funksiyasi kuzatilgan nuqtalarda shu kuzatilmaning chastotasiga teng va sakrashga ega bo‘lgan pog[4]onali, uzlukli funksiyadan iborat bo‘ladi.

Bernulli teoremasiga asosan tajribalar soni n cheksiz o‘sganda $\{X<x\}$ hodisaning chastotasi shu hodisaning ehtimolligiga intiladi. Bu esa empirik taqsimot funksiyaning n cheksizlikka intilganda haqiqiy taqsimot funksiya $F(\mathrm{x}) = P\{X< x\}$ ga istalgancha yaqin bo‘lishini anglatadi.

Empirik taqsimot haqida quyidagi tasdiqni keltirish mumkin.

Teorema (Glivenko-Kantelli). Ixtiyoriy s·>0 uchun quyidagi munosabat o‘rinli

$$\lim P\left\{\sup_x |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\right\} = 1 .$$

Demak, *n* ortgani sari $F_n(x)$ funksiya $F(x)$ ga barcha *x* larda 1 ehtimollik bilan tekis yaqinlashar ekan.

7.2. Gistogramma va poligon

Tajribalar soni katta bo‘lsa, tajriba natijalari statistik qatori ham katta bo‘ladi. Shuning uchun, ko‘p hollarda intervallik statistik qatordan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

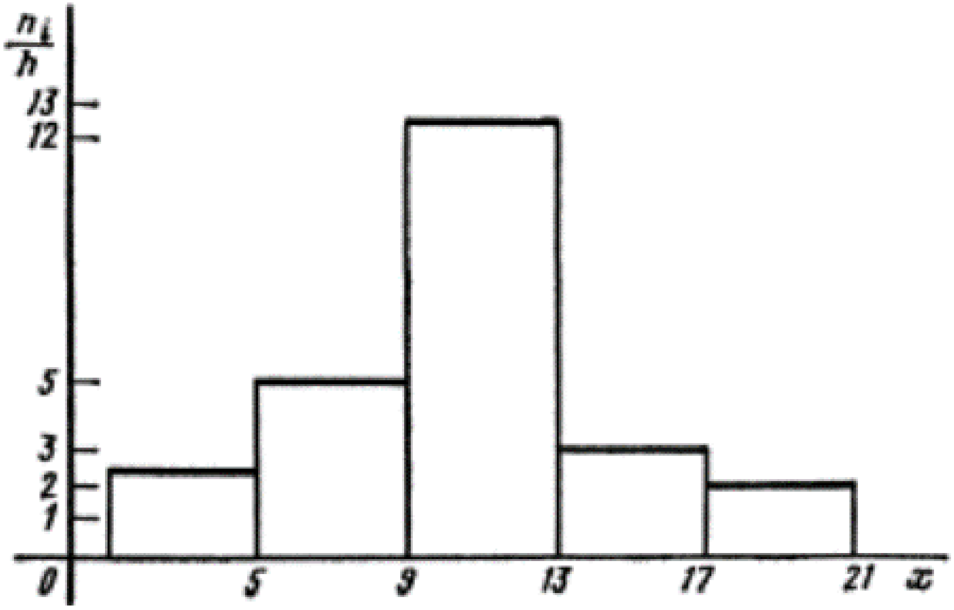
Faraz qilaylik, biron-bir usul bilan tajriba natijalari intervallarga ajratilgan bo‘lsin. Har bir intervaldagi kuzatilmalarning chastotasini hisoblaymiz. Olingan ma’lumotlar asosida jadval tuzamiz. Hosil bo‘lgan jadval tanlanma majmua deyiladi.

2-masala. Ma’lum masofa 100 marta o‘lchanganda yo‘l qo‘yilgan xatolar quyidagilardan iborat:

Guruhlar	[-20;-	[-15;-	[-10;-	[- 5;0)	[0;5)	[5;10)	[10;15)	[15;20]
Guruhlardagi xatolar soni	2	8	17	24	26	13	6	4
Chastotalar	0.02	0.08	0.17	0.24	0.26	0.13	0.06	0.04

✓ Statistik majmuaning grafik tasviri *gistogramma* deyiladi. Uni qurish uchun tanlanma miqdorning qiymatlar sohasini uzunligi *h* ga teng bo‘lgan *k* ta oraliqlarga bo‘linadi va kuzatilmalarning har bir oraliqqa tushgan sonlari aniqlanadi. Masalan, n_i - soni *i* - oraliqqa tushgan kuzatilmalar soni bo‘lsin, u holda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari oraliq uzunligi *h* ga teng bo‘lgan va balandliklari n_i/h bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan shaklga aytiladi. Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



35-rasm

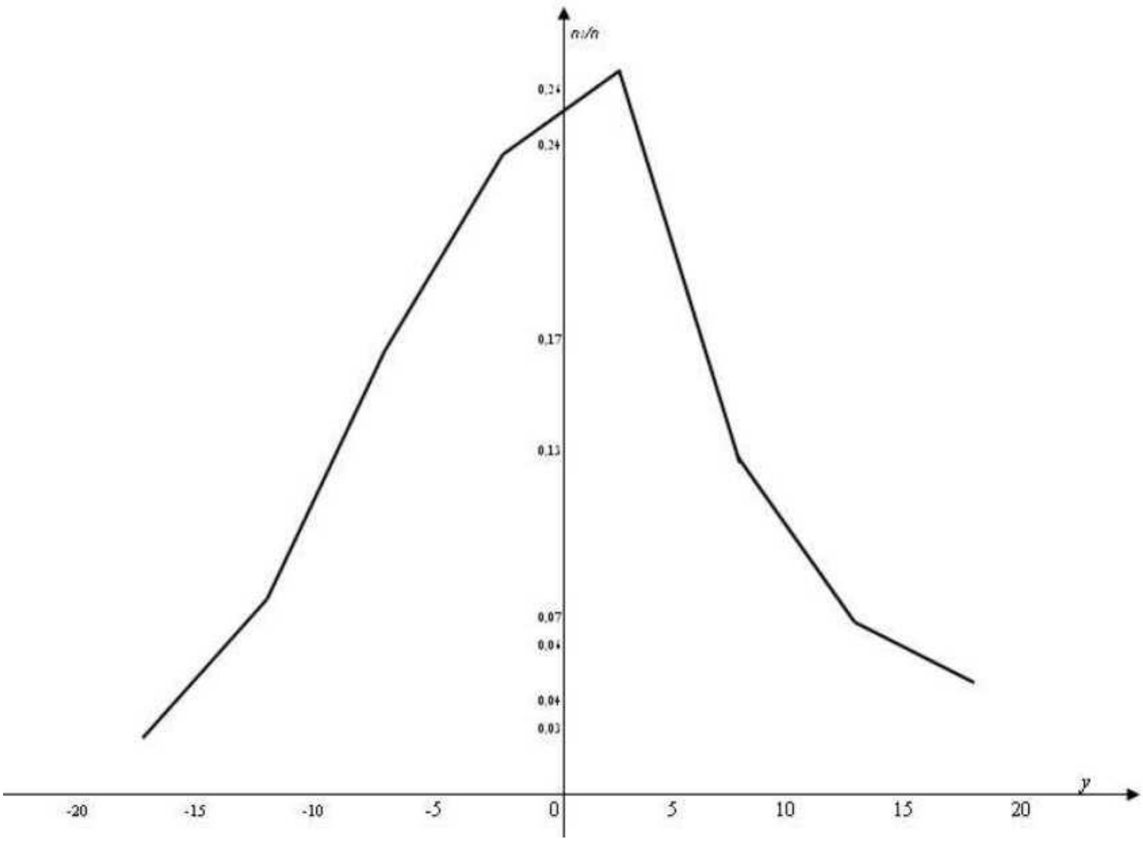
Hosil bo‘lgan figuraning yuzasi *n* ga teng, chunki $\frac{n_i}{h}\cdot h = n_i$, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* bo‘lgan, balandliklari $\frac{n_i}{h}$ bo‘lgan to‘rtburchaklardan tuzilgan pog‘onali figuraga aytiladi. Bu holda hosil bo‘lgan figura yuzasi 1 ga teng.

Masalan. Masofa 100 marta o‘lchanganda hosil bo‘lgan xatolarning nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang. Buning uchun 1-jadvaldan foydalanamiz.

35-rasmdan ko‘rinib turibdiki, nisbiy chastotalar gistogrammasi xatolar taqsimotining zichlik funksiyasiga yaqin bo‘ladi. Bu yaqinlik yanada aniqroq bo‘lishi talab qilinsa, nisbiy chastotalar poligonidan foydalangan ma’qul. Tekislikda $\left(y_1, \frac{n_1}{n}\right), \left(y_2, \frac{n_2}{n}\right), ..., \left(y_k, \frac{n_k}{n}\right)$ nuqtalarni birlashtirishdan hosil bo‘lgan figura nisbiy chastotalar poligoni deyiladi.

Ma’lumki, ehtimollar nazariyasida taqsimot funksiyani bilish shu taqsimot funksiyasiga ega bo‘lgan tanlanma miqdor haqida to‘liq ma’lumotga ega bo‘lishni anglatadi. Ammo juda ko‘p amaliy masalalarni hal qilishda tanlanma miqdorni to‘liq bilish shart bo‘lmay, balki uning ayrim sonli xarakteristikalarini bilish kifoya bo‘ladi. Tanlanma miqdorning asosiy sonli xarakteristikalari bu - matematik kutilma va dispersiyalardir.



36-rasm. Tanlanma xarakteristikalari

Matematik kutilma tanlanma miqdorning qiymatlari zich joylashadigan o‘rta qiymatni anglatsa, dispersiya esa tanlanma miqdor qiymatlarini shu o‘rta qiymat atrofida qanchalik tarqoqligini bildiradi. Shunga o‘xshash sonli xarakteristikalarni statistik taqsimot funksiyasiga nisbatan ham kiritish mumkin. Matematik kutilmaning statistik o‘xshashi empirik o‘rta qiymat yoki tanlanma o‘rta qiymatidan iborat bo‘ladi va u (6.1) amaliy qiymat yordamida quyidagicha aniqlanadi

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (6.4)$$

O‘rta qiymatni quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i n_i \qquad (6.5)$$

bu yerda n_i har bir x_i variantaning mos chastotasidir.

Empirik dispersiya yoki tanlanma dispersiyasi esa quyidagicha aniqlanadi:

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}), \text{ (yoki } S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})n_i) \qquad (6.6)$$

r-ichi tartibli tanlanma momentlar va markaziy momentlar ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^r, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_k-\overline{x})^r \qquad (6.5)$$

Agar tajribalar soni cheksiz katta bo‘lsa barcha statistik taqsimot xarakteristikalari nazariy sonli xarakteristikalarga yaqin bo‘ladi. Endi shu yaqinlikni o‘rganishga kirishamiz.

3-masala. Test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagi ballarni yig‘dilar: {5,3,0,1,4,2,5,4,1,5}. Ushbu tanlanmaning sonli xarakteristikalarini hisoblang.

Avval ushbu tanlanmaga mos chastotali taqsimot tuzamiz:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	2	1	1	2	3

(6.5) va (6.6) formulalarga asosan:

$$\overline{x}=\frac{1}{10}(0\cdot1+1\cdot2+2\cdot1+4\cdot2+5\cdot3)=3$$
,
$$\overline{x}=\frac{1}{10}((0-3)^2\cdot1+(1-3)^2\cdot2+(2-3)^2\cdot1+(4-3)^2\cdot2+(5-3)^2\cdot3)=3.2$$

Nazorat savollari va topshiriqlari

1. Quyida berilgan tanlanma uchun variatsion qator hamda chastotali taqsimot tuzing: {5,3,7,10,5,5,2,10,7,2,7,7,4,2,4}.

2. Tavakkaliga tanlangan 30 ta talabalarning bo‘y uzunliklaridan iborat quyidagi tanlanma berilgan:

178	160	154	183	155	153	167	186	155	183
157	175	170	166	159	173	182	167	169	171
179	165	156	179	158	171	175	173	172	164

Ushbu tanlanma uchun interval statistic taqsimot tuzing.

3. Chastotaki taqsimot berilgan tanlamaning empirik taqsimot funksiyasini toping

a)

x_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

b)

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

4. Quyidagi tanlanma uchun: nisbiy chastotali gistogramma yasang.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	8	14	20	25	30	24	16	12	7	4

5. Quyidagi tanlanma uchun: poligon yasang.

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	4	5	6	5	2	1

6. Quyidagi: tanlanmaning sonli xarakteristikalarini hisoblang.

x_i	-1	0	1	2	3
n_i	3	6	7	6	4

7. Quyidagi tanlanmaning o‘rta qiymati va dispersiyasini hisoblang:

Interval chegarasi	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46
n_i	2	3	30	40	20	5

8. Agar har bir variantani a) *d* songa kattalashtirilsa (yoki kichiklashtirilsa); b) *k* marta kattalashtirilsa (yoki kichiklashtirilsa) tanlanma o‘rta qiymati va dispersiyasi qanday o‘zgaradi?

9. Talabalardan 24 savoldan iborat test sinovi o‘tkazildi. Ushbu test natijalariga ko‘ra talabalar quyidagicha taqsimlanishdi:

To‘g‘ri javoblar soni	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Talabalar soni	2	4	8	12	16	10	3

Tanlanma sonli xarakteristikalarini hisoblang.

8-BOB. TASODIFIY JARAYONLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI

8.1. Tasodifiy jarayonlar va ularning sonli o‘lchovli taqsimotlari

Tasodifiy jarayon (tasodifiy funksiya) - bu t parametrga bog‘liq bo‘lgan tasodifiy o‘zgaruvchilar oilasi, vaqt sifatida talqin qilingan va ba’zi bir $T \subseteq R^1$ to‘plamlardan qiymatlarni olgan.

Tasodifiy jarayonlar yunon yoki lotin harflari bilan belgilanadi va parametr indeks sifatida yoziladi yoki qavsga joylashtiriladi, masalan: $\xi_t, t \in T$ yoki $x(t), t \in T$.

Barcha tasodifiy o‘zgaruvchilar bir xil ehtimollik maydonida (Ω, ϑ, P) berilgan va ba’zi bir $T \subseteq R^1$ to‘plamlardan qiymatlarni olgan deb taxmin qilinadi.

T to‘plam sonli o‘qning cheklangan yoki cheksiz oralig‘i bo‘lishi mumkin (masalan, T = [0, 1], [0, + ∞) yoki (- ∞, + ∞)). U holda $\xi_t = \xi_t(x), t \in T, \omega \in \Omega$ uzluksiz vaqtga ega bo‘lgan tasodifiy jarayon deb ataladi. Agar T cheklangan yoki hisoblanadigan elementlar to‘plamidan iborat bo‘lsa (masalan, T = {1, 2, ... l}, {0, 1, 2, ...}, {..., -1, 0, 1, 2, ...}), keyin ξ_t diskret vaqt yoki tasodifiy ketma-ketlik bilan tasodifiy jarayon deb ataladi.

Har bir t uchun $\xi_t(\omega)$ funksiya tasodifiy o‘zgaruvchidir, ya’ni o‘lchov xususiyatiga ega bo‘lgan Ω dan I gacha ifodalash, keyin ixtiyoriy Borel B to‘plam uchun $\{<\rangle\rangle >: \xi(\omega) e \beta\}$ hodisa (σ-algebra elementi) va shuning uchun xarakterlanadi ma’lum bir ehtimollik bilan $P\{\xi_t = B\}$. Xususan, t uchun $\{\xi_t \in [a,b]\}, \{\xi_t \in (a,b)\}, \{\xi_t = a\}, \{\xi_t < x\}$ shaklidagi hodisalar ehtimolligi bilan qiziqish mumkin.

Tasodifiy jarayon $\xi_t(\omega)$ ikkita argumentning funksiyasi ekanligini ta’kidlaymiz. $\omega \in \Omega$ sobit elementar natija uchun biz $t \in T$

argumentining tasodifiy bo‘lmagan funksiyasini olamiz, bu tasodifiy jarayonning tanlab olish funksiyasi (amalga oshirish, traektoriya). $t \in T$ parametrining qiymatini aniqlash tasodifiy o‘zgaruvchiga olib keladi - funksiya $\omega \in \Omega$ tasodifiy funksiyani kesish yoki kesish deb ataladi.

Ma’lumki, ikkita tasodifiy o‘zgaruvchilar deyarli aniq to‘g‘ri keladigan bo‘lsa, ularga teng deyiladi, ya’ni ular teng bo‘lmagan elementar natijalar to‘plamining nol ehtimoli bor. Xuddi shunday kontseptsiya tasodifiy jarayonlar uchun ham kiritilgan: agar barcha $t \in T$ uchun $P\{\omega : \xi_t(\omega) \neq \eta_t(\omega)\} = 0$ bo‘lsa, ikkita jarayon stoxastik ekvivalent deb ataladi.

Kiritilgan ta’rif quyidagicha qo‘llaniladi: tasodifiy funksiyalar bilan bog‘liq bo‘lgan ba’zi hodisalarning ehtimolligini hisoblashda, nol ehtimollik hodisalarini e’tiborsiz qoldirish yakuniy natijalarga ta’sir qilmaydi. Shu nuqtai nazardan, amaliy qo‘llanmalarga zarar etkazmasdan, o‘rganilayotgan tasodifiy funksiyani unga teng keladigan boshqa tasodifiy funksiya bilan almashtirish mumkin.

Tasodifiy jarayon, agar uning yakuniy taqsimoti ma’lum bo‘lsa, to‘liq belgilangan deb hisoblanadi, yna’ni

$$\Phi_{t_1,\ldots t_n}(A) = P\{(\xi_{t_1,\ldots t_n}) \in A\}, A \in \Im^n,$$

har qanday tabiiy $n>1$, t vaqtining istalgan daqiqalari $t_1,\ldots,t_n \in T$ uchun har qanday n-o‘lchovli Borel to‘plami $A \in \Im^n$ uchun.

Xususan, $A=(-\infty, x_1)\times\ldots\times(-\infty, x_n)$ yakuniy tarqatish qo‘shma tarqatish funksiyasiga aylanadi:

$$\Phi_{t_1,\ldots t_n}(A) = F_{t_1,\ldots t_n}(x_1,\ldots,x_n) = P\{\xi_{t_1} < x_1,\ldots,\xi_{tn} < x_n\}$$

Oxirgi o‘lchovli taqsimot to‘plamida ba’zi $t_1,\ldots,t_n$ qiymatlari mos kelishi mumkin. Biroq, bunday taqsimot $\Phi_{t_1,\ldots t_n}(A)$ har doim vaqtinchalik parametrning juft-juft turli qiymatlari bilan yakuniy taqsimot orqali ifodalanishi mumkin.

Shunday qilib, hisoblash ehtimoli uch o‘lchovli vektor $(\xi_t, \xi_t, \xi_s), t, s \in T (t \neq s)$ o‘rnatish $A \in \Im^3$ uchun yetarli topish ehtimoli tomonidan olish bir tasodifiy vektor (ξ_t, ξ_s) bir ikki o‘lchovli ko‘p $B = \{(x, x, y) \in A\} \in \Im^2$. Misol uchun, parallelepiped A= [0,3]×[2,4]×[1,5] uchun to1g‘riburchak B=[2,3]×[1,5] ni hosil qilishga oson ishonch hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, jarayonning yakuniy taqsimlanishini hisoblash orqali faqat *t* parametrining takrorlanmas qiymatlari bilan to‘plamlar ko‘rib chiqilishi mumkin.t

Ikkala stoxastik ekvivalent jarayonning chekli o‘lchovli taqsimoti bir-biriga to‘g‘ri kelishini isbotlash oson. Darhaqiqat, $C'=\{(\xi_{t_1},...,\xi_{tn})\in A\}$, $C''=\{(\eta_{t_1},...,\eta_{tn})\in A\}$, $D_j=\{\xi_{t_1}=\eta_{t_j}\}, j-1,...,n$ hodisalarni qarab, quyidagini olamiz

$$P(C')=P\left(C'(\bigcap_j D_j)\right)=P\left(C''(\bigcap_j D_j)\right)=P(C'').$$

Bu yerda ehtijmollik nazariyasining ikkita oddiy faktidan foydalanilgan:

1) agar $P(D_1)=1$ va $P(D_2)=1$ bo‘lsa, u holda $P(D_1\bigcap D_2)=1$;

2) Agar $P(D)=1$ bo‘lsa, unda har qanday C hodisa uchun $P(C)=P(CD)$ bo‘ladi.

Masalan, tasodifiy jarayonlarning chekli o‘lchovli taqsimoti tasodifidan ularning stoxastik ekvivalentligi amal qilmasligini misol bilan ko‘rsatamiz. Buning uchun mustaqil Bernulli sinovlari sxemasi va ikkita jarayonni ξ_t va η_t nti ko‘rib chiqamiz, bunda *t* = 1, 2, …, ξ_t - muvaffaqiyatlar soni, $\eta_t=1-\xi_t$ - *t*-dagi muvaffaqiyatsizliklar soni.

Har qanday nollar va birliklar to‘plami uchun i_1 *…,* $i_n \in \{0, 1\}$

$$P\{\xi_{t_1}=i_1,...,\xi_{t_n}=i_n\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}^n, \qquad P\{\eta_{t_1}=i_1,...,\eta_{t_n}=i_n\}=\left\{\frac{1}{2}\right\}^n.$$

$A=[-1,3]\times[0.5,1.7]\times[-2,0.5]$ bo‘lsin. Unda

$$P\{(\xi_{t_1},\xi_2,\xi_3)\in A\}=P\{\xi_{t_1}=0 или 1,\xi_{t2}=0,\xi_{t_3}=0\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Xuddi shuningdek, $P\{(\eta_{t_1},\eta_2,\eta_3)\in A\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Boshqa tomondan, bu jarayonlar stoxastik jihatdan teng emas, chunki har qanday *t* = 1, 2, ... uchun $\eta_t+\xi_t=1$.

Ikki stoxastik ekvivalent jarayon traektoriyalarining xossalari umuman mos kelmasligi qiziq. Darhaqiqat, *T* = [0, 1] va τ tasodifiy o‘zgaruvchi bo‘lsin [0, 1] segmentida bir tekis taqsimlansin (ya’ni τ ning zichlik funksiyasi [0, 1] segmentdan tashqarida nolga aylansdi va uning har bir nuqtasida 1 ga teng). Barcha $t\in T$ va $\omega\in\Omega$

lar uchun $\xi_t(\omega) = 0$ va $t \neq \tau(\omega)$ da $\eta_t(\omega) = 0$, $t = \tau(\omega)$ da $\eta_t(\omega) = 1$bo‘ladi. Avvalo shuni e’tiborga olish kerakki, ξ va η ikkalasi ham tasodifiy jarayonlar hisoblanadi, ya’ni har bir t uchun ξ_t va η_t o‘lchovli. $\xi_t \equiv 0$ uchun bu aniq.

η_t ni ω ning funksiyasi sifatida o‘lchash mumkinligiga oson ishonch hosil qilish mumkin. Darhaqiqat, tasodifiy o‘zgaruvchi τ ta’rifi bo‘yicha o‘lchanadigan xususiyatga ega. Borelning ixtiyoriy $A \subseteq [0,1]$ to‘plami va istalgan t uchun $B = \{\omega : \eta_t(\omega) \in A\}$ to‘plam hodisa ekanligini ko‘rsatamiz.

Shubhasiz, $B = \{\omega : \eta_t(\omega) \in A\} = \{\omega : \eta_t(\omega) \in A, \eta_t(\omega) = 1\} \cup \{\omega : \eta_t(\omega) \in A, \eta_t(\omega) = 0\} =$
$= \{1 \in A, \tau = t\} \cup \{0 \in A, \tau \neq t\}$. Olingan ifoda quyidagi to‘rtta qiymatdan birini oladi: $B = \Omega$, agar $0 \in A$ va $1 \in A$; bo‘lsa; $B = \{\tau = t\}$, agar $1 \in A$ va $0 \in A$; $B = \{\tau \neq t\}$ agar faqat $0 \in A$ bo‘lsa; $B = \varnothing$ agar $1 \in A$ va $0 \in A$ bo‘lsa. Ushbu holatlarning har birida biz $\Im$ to‘plamini olamiz. Shunday qilib, ξ_t va η_t - tasodifiy jarayonlar.

Endi ularning stoxastik ekvivalentligini isbotlaymiz. Shu aniqki,
$P\{\xi_t \neq \eta_t\} = P\{\xi_t \neq \eta_t, \eta_t = 0\} + P\{\xi_t \neq \eta_t, \eta_t = 1\} = P\{\xi_t \neq \eta_t, \eta_t = 1\} = P\{\xi_t \neq 1, \eta_t = 1\} = P\{\eta_t = 1\} = 0$
chunki $P\{\xi_t \neq 1\} = 1$, bundan stokastik jarayonlarning ekvivalentligi kelib chiqadi.

Biroq, biz har qanday ω uchun trayektoriyaning $\eta_t(\omega)$ $\tau(\omega)$ nuqtada uzilishga ega ekanligini va har qanday $\xi_t(\omega)$ traektoriyaning uzluksizligini ko‘ramiz.

Agar ko‘rib chiqilayotgan misoldan tasodifiy miqdor τ ixtiyoriy uzluksiz taqsimot [0, 1] ga jamlangan bo‘lsa, xuddi shu natija o‘z kuchini saqlab qoladi.

Ta’rif. $\xi_t, t \in T$ - tasodifiy jarayon bo‘lsin. Deterministik (tasodifiy bo‘lmagan) funksiyalar $a_\xi(t) = E\xi_t$ va $\sigma_\xi^2(t) = D\xi_t = E(\xi_t - a_\xi(t))^2$ va $K_\xi(t,s) = \mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s) = E(\xi_t - a_\xi(t))(\xi_s - a_\xi(t))$ mos ravishda matematik kutish (o‘rtacha qiymat), dispersiya va jarayonning kovaryans funksiyasi deb nomlanadi.

Shubhasizki, har bir $t \in T$ uchun qiymatlar $a_\xi(t)$ va $\sigma_\xi^2(t)$ funksiyalaridan ξ ning t nuqtada jarayoni kesimining matematik kutilmasi va dispersiyasi va kovaryans funksiyasining qiymati, jarayonning kesmalarining nuqtalaridagi kovaryansiyasidir. t va s, tasavvurlar orasidagi chiziqli bog‘lanishning zichlik darajasini tavsiflaydi.

Shubhasiz, $\sigma_\xi^2(t) = K_\xi(t,t), t \in T$. Tasodifiy jarayonning kovaryans funksiyasi simmetriya shartini (har qanday t va s uchun $K_\xi(t,s) = K_\xi(s,t)$) va manfiy bo‘lmagan aniqlikni (har qanday n = 1, 2, ..., har qanday $t_1,...,t_n \in T$ va ixtiyoriy n raqamlar $c_1, c_2, ..., c_n$ uchun $\sum_{i,j=1}^{n} K(t_i,t_j)c_i c_j \geq 0$ tengsizlik bajariladi.

Tasodifiy jarayonning boshqa raqamli xususiyatlari ham kiritilishi mumkin. Masalan, $R_\xi(t,s) = \dfrac{K_\xi(s,t)}{\sqrt{\sigma_\xi^2(t)\sigma_\xi^2(s)}}$ ifodani korrelyatsion funksiya deb atash tabiiy.

8.2. Tasodifiy tahlil elementlari

Stoxastik jarayonlar nazariyasida, shuningdek funktsional tahlilda yaqinlashish, uzluksizlik, differentsiallik va integrallik tushunchalari muhim o‘rin tutadi. Dastlab, tasodifiy ketma-ketlikning turli xil konvergentsiya turlari haqidagi ba’zi dalillarni ko‘rib chiqing. Keyin biz tasodifiy funksiyalarning uzluksizlik va differentsiallik tushunchalarini kiritamiz, bu bizga stokastik integratsiya apparati asoslarini, shu jumladan, Wiener jarayoni bo‘yicha integratsiyani bayon qilish va ushbu tushunchalarning stoxastik differentsial tenglamalarni echishda qanday qo‘llanilishini ko‘rsatish imkonini beradi.

Ehtimollar nazariyasida tasodifiy o‘zgaruvchilar ketma-ketligining chegarasi kontseptsiyasini ko‘rib chiqishda, har xil konvergentsiya turlari bilan shug‘ullanish kerak. Yaqinlashuvning quyidagi asosiy turlariga ta’riflar beraylik: ehtimollik bo‘yicha; ehtimollik bilan; o‘rtacha p ning tartibi; tarqatish bo‘yicha.

Ξ_1, ξ_2, ... va ξ – ba’zi ehtimollik fazosida $(\Omega, \Im, P)$ aniqlangan tasodifiy o‘zgaruvchilar bo‘lsin.

Ta’rif. ξ_1, ξ_2, ... tasodifiy o‘zgaruvchilar ketma-ketligi ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi tasodifiy o‘zgaruvchi ξ ga bo‘lsa, agar har qanday ε>0 uchun

$$P\{|\xi_n - \xi| \geq \xi\} \to 0, n \to \infty. \qquad (8.1)$$

Bu shuni anglatadiki, har qanday ε> 0 va δ> 0 uchun shunday *N* soni topiladiki, bunda barcha *n*≥*N* uchun $P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \delta$ tengsizlik yoki bir xil bo‘ladi, $P\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \delta$. Boshqacha qilib aytganda, yetarlicha katta *n* ni tanlab, o‘zboshimchalik bilan birlikka yaqin ehtimollik bilan ξ_n va ξ o‘rtasida oldindan belgilangan yaqinlikka erishish mumkin.

Ushbu turdagi konvergentsiya quyidagicha belgilanadi: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$.

Ta’rif. ξ_1, ξ_2, ... tasodifiy o‘zgaruvchilar ketma-ketligi ehtimollik bilan (ehtimol hamma joyda, deyarli hamma joyda) tasodifiy o‘zgaruvchi ξ ga, agar

$$P\{\omega : \xi_n \not\to \xi\} = 0, \tag{8.2}$$

bo‘lsa, ya’ni agar ω ketma-ketligi ξ(ω) ga yaqinlashmaydigan natijalar to‘plami nolga teng bo‘lsa. Bunday konvergentsiya $\xi_n \to \xi$ deb belgilanadi.

Ushbu ta’rifning ma’nosini tushunish uchun raqamli ketma-ketlikning yaqinlashuvi nima ekanligini eslaymiz. ω_0 - dastlabki qatiy element bo‘lsin. $\xi_n(\omega_0)$ ktma-ketlik $\xi(\omega_0)$ ga yaqimlashadi, agar $\forall\omega > 0 \exists N |\xi_n(\omega_0)| < \varepsilon$.

Barcha ω_0 larni birlashtirib, biz quyidagicha ifodalanishi mumkin bo‘lgan hodisani olamiz:

$$\{\omega : \xi_n \to \xi\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq N} \left\{|\xi_n - \xi| < \frac{1}{m}\right\}$$

Aks holda ω_0 natija uchun $\xi_n(\omega_0)$ ketma-ketlik $\xi(\omega_0)$ ga yaqinlashmasa, u holda $\exists\omega > 0 \exists N |\xi_n(\omega_0) - \xi(\omega_0)| \geq \varepsilon$, shuning uchun

$$\{\omega : \xi_n \not\to \xi\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq N} \left\{|\xi_n - \xi| \geq \frac{1}{m}\right\}$$

Shunday qilib, ta’rifda $\xi_n(\omega_0)$ sonli ketma-ketliklar yaqinlashmaydigan elementar natijalar to‘plamining o‘lchovi nolga teng:

$$P\left\{\omega : \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} (|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Tasodifiy jarayonlarning uzluksizligi. Tasodifiy o‘zgaruvchilarning yaqinlashuvining har bir turi uchun tegishli uzluksizlik tushunchasini ko‘rib chiqish mumkin. Uzluksizlikning eng zaif turi - bu stoxastik uzluksizlik deb ataladi, ya’ni. ehtimollik yaqinlashuvi ma’nosidagi uzluksizlik.

Ta’rif. $\xi_t, t \in T$ tasodifiy jarayon $t_0 \in T$ nuqtada stoxastik uzluksiz deyiladi, agar $\xi_t \xrightarrow{P} \xi_{t_0}, t \to t_0$ bo‘lsa, boshqacha qilib aytganda, har qanday ε>0 uchun $t \to t_0$ uchun $P\{|\xi_t - \xi_{t_0}| > \varepsilon\} \to 0$.

Tasodifiy jarayonlar uchun “bir nuqtada uzluksizlik” tushunchasidan tashqari, “to‘plamdagi uzluksizlik” tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif. Biz tasodifiy funksiya *T* to‘plamda stoxastik ravishda uzluksiz deb aytamiz, agar u ushbu to‘plamning har bir *t* nuqtasida stoxastik ravishda uzluksiz bo‘lsa.

Ta’rif. Tasodifiy jarayon $\xi_t, t \in T$, t_0 nuqtada $p(p \geq 1)$ o‘rtacha daraja bo‘yicha uzluksiz deyiladi, agar $t \to t_0$ da $E|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 \to 0$ bo‘lsa.

O‘rtacha daeaja $p(p \geq 1)$ ning uzluksizligi, shuningdek, L^p ma’nosida uzluksizlik deb ataladi, chunki $\|\xi_t - \xi_{t_0}\|_p \to 0, ya`ni, \xi_t \xrightarrow{L^p} \xi_{t_0}$.

Eng muhimi p=2 da o‘rtacha uzluksizlik yoki o‘’rtacha kvadratik uzluksizlik.

Oddiy raqamli funksiyalarda bo‘lgani kabi, nuqtada uzluksizlik tushunchasi bilan bir qatorda, to‘plamdagi uzilish va to‘plamda bir xil uzluksizlik tut+hshunchasi ham ko‘rib chiqiladi.

Tasodifiy jarayonlarni farqlash. Tasodifiy jarayonning hosilasi deb ξ_t ifoda, agar u mavjud bo‘lsa, $h \to 0$ dagi chegarasini tushunamiz $\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h`}$.

Tabiiyki, turli xil cheklovlar turli xil differensiallashga mos keladi.

Ta’rif. Tasodifiy jarayon, agar *p* elementi bo‘lgan tasodifiy o‘zgaruvchi mavjud bo‘lsa, L^p o‘rtacha qiymatidagi ξ_t' nuqtasida differensiallanadi, biz buni ξ_t' bilan belgilaymiz, $\lim_{h \to 0} E\left|\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \xi_t'\right|^p \to 0$

.

Shuni e’tiborga olingki, jarayonning *t* tartibidagi differentsialligi *p* tartibining o‘rtacha qiymati bo‘yicha jarayonning *t* nuqtada uzluksizligini anglatadi.

Isbotlash uchun $\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} - \eta_t = \gamma(h)$ debolamiz, bunda $h \to 0$ da L^p nolga intiladi. Unda $E|\xi_{t+h} - \xi_t|^p = E|h \cdot \gamma(h) + h\eta_t|^p$ va

$$(E|h\cdot\gamma(h)+h\eta_t|^p)^{1/p}\le(E|h\cdot\gamma(h)|^p)^{1/p}+(E|hh\eta_t|^p)^{1/p}.$$

h nolga intilayotganda, o‘ng tomondagi ikkala qo‘shiluvchi nolga teng. *t* nuqtada tasodifiy jarayonning o‘rtacha kvadrat differentsialligi (*p*=2) mezonini berishga imkon beradi. O‘rtacha kvadrat chetlanishda chegaraning mavjudligi uchun *h→0* da

$$\eta_h(t)=\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h}$$

O‘rtacha kvadrat qiymatida chegara mavjudligi *h→0* uchun $\eta_h(t)=\frac{\xi_{t+h}-\xi_t}{h}$, $h,h'\to 0$ uchun $E\eta_{t+h}\eta_{t+h'}$ cheklangan chegarasi bo‘lishi zarur va yetarli.

Tasodifiy jarayonlarning integrallash. Tavsiya etilgan usul Riman integralining ta’rifidan olingan g‘oyaga asoslangan. Integralni qurishning yana bir printsipial yangi usuli.

Riman integrali matematik tahlil jarayonida integralning har xil yorliqli bo‘limlari uchun hisoblangan integral yig‘indilarning chegarasi sifatida ajratilganligini, chunki bo‘linma diametri nolga intilishini eslaymiz.

Aniqrog‘i, *f(x)* tasodifiy bo‘lmagan [0,1] oraliqda funksiya bo‘lsin; $T_n=\{t_0,t_1,...,t_n;s_1,...,s_n:a=t_0<t_1<...<t_n=b;s_i\in(t_{i-1},t_i),i=1,...,n\}$ - [a,b] oraliqning belgilangan qismi; *t* nuqtalarni tanlashni aniqlaydi ma’lum bir bo‘linmasini *n* oraliqlarga bo‘lish; har bir oraliqda bitta s belgilash nuqtalari berilgan qismning yorlig‘ini belgilaydi; bo‘lim oraliqlarining eng kattasining uzunligi bo‘limning diametri deb ataladi: $diam(T)=\max\{(t_i-t_{i-1}),i=1,2,...,n\}$.

Keyinchalik, *n*→∞ da nolga intiladigan diametrlar bilan belgilangan bo‘linish ketma-ketligini ko‘rib chiqing va ularga biriktirilgan integral summalarning nisbati $\sum_{i=1}^{n}f(s_i)(t_i-t_{i-1})$.

Agar *n*→∞ da integral summalarning yakuniy chegarasi mavjud bo‘lsa, unda oraliq nuqtalarni ajratish va tanlash usulidan qat’i nazar, bu chegara Rimning *f(x)* funksiyasi integral deb ataladi) [a, b]:

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{diam(T_n)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(s_i)(t_i-t_{i-1}).$$

va funksiyaning o‘zi segmentda [a, b] (Rimanga ko‘ra) integratsiya qilingan deb ataladi.

f(x) funksiya [a, b] oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u shu oraliqda integralanadi.

8.3. Itoning stoxastik integrali

Standart Wiener jarayoni natijasida hosil bo‘lgan stoxastik o‘lchovga nisbatan tasodifiy funksiyaning stoxastik integrali tushunchasini ko‘rib chiqamiz.

Eslatib o‘tamiz, biz tasodifiy funksiya bilan uzluksiz vaqt bilan tasodifiy jarayonni $\xi(t)$ nazarda tutamiz, ya’ni t parametr R sonli o‘qning ba’zi bir cheklangan yoki cheksiz T oralig‘ida aniqlanadigan bir xil ehtimollik maydonida $(\Omega, \Im, P)$ aniqlangan tasodifiy o‘zgaruvchilar oilasi. Keyinchalik, hamma joyda tasodifiy funksiya har qanday $t\in T$ uchun ikkinchi darajali cheklangan momentlarga ega bo‘ladi.

$I(f) = \int_0^T f(t)dW(t)$ - Ito integrali deyiladi. I(f) – tasodifiy miqdor;

8.4. Stoxastik differensial tenglamalarning yechimi

Dastlab,

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sigma t, x(t))dW(t), t \in [0, T] \tag{8.1}$$

ko‘rinishidagi stoxastik differentsial tenglamalarning yechimlarini ko‘rib chiqamiz.

Ta’rif. *x(t)*, $t\in[0, T]$ tasodifiy jarayon stoxastik differentsial tenglamaning yechimi (8.1) $x(0) = x_0$ boshlang‘ich sharti bilan deyiladi, bu erda $x_0 - \Im_0$-o‘lchovli, agar:

1) *(t, ω)* ga nisbatan *x(t)* o‘lchanadigan;

2) barcha $t\in[0, T]$ uchun $x_t - \Im_t$ o‘lchanadigan;

3) $\int_0^T |f(t, x(t))| dt$ va $\int_0^T \sigma^2(t, x(t))dt$ integrallar aniqlangan va 1 ehtimollik bilan cheklangan;

4) hamma $t\in[0, T]$ uchun

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t \sigma(t, x(t))dW(t). \tag{8.2}$$

1-teorema. (Mavjudlik va yagonalik teoremasi.) *f(s, x)* va *σ (s, x)* koeffitsientlar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$|f(s,x)-f(s,y)|+|\sigma(s,x)-\sigma(s,y)|\le K|x-y|$ (Lipschitz sharti); Agar ba’zi bir doimiy K va barcha *s∈[0, 7], x, y ∈ (-∞ , ∞)* uchun $|f(s,x)|^2+|\sigma(s,x)|^2\le K^2(1-|x|^2)$.

Dastlabki shart x_0 tasodifiy miqdor $\Im_0$ - $Ex_0^2<\infty$ bilan o‘lchanadigan bo‘lsin, unda:

1) 1 ehtimolligi bilan shunday uzluksiz yechim *x(t)* mavjudki bunda $x(0)=x_0$;

2) $\sup\limits_t Mx_t^2<\infty$;

3) agar $x_t^{(1)}$ va $x_t^{(2)}$ - 1 va 2 shartlarni qanoatlantiruvchi yechim bo‘lsa, unda $P\left\{\sup\limits_{t\in[0,T]}\left|x_t^{(1)}-x_t^{(2)}\right|=0\right\}=1$.

Ko‘pgina masalalarda *x(t), t∈[0, T]* tasodifiy jarayonlar paydo bo‘lib, ular yuqorida ko‘rib chiqilgan (8.1) ko‘rinishdagi tenglamalarga qaraganda ko‘proq umumiy stoxastik tenglamalarni qoniqtiradi.

Masalan, to‘g‘ridan-to‘g‘ri kuzatishga yaroqsiz bo‘lgan ba’zi bir tasodifiy jarayon (“signal”) *θ(t), t∈[0, T]* mavjud bo‘lib, ular *x(t)* jarayonini qondirish orqali oladigan ma’lumotlar. tenglama:

$$dx(t)=f(t,x(t),\theta(t))dt+\sigma(t,x(t),\theta(t))dW(t),t\in[0,T] \qquad (8.3)$$

umumiy tenglik doirasida javob beradigan bunday tenglamani yechimi borligi va o‘’ziga xosligi haqida savol tug‘iladi. Unga umumiy sxemada javob beramiz.

$(\Omega,\Im,P)$ - ehtimollik maydoni, *W(t)* - Wiener jarayoni, *t∈[0, T]* bo‘lsin. $\varphi(t,\omega), f(t,x,\omega),\sigma(t,x,\omega)$ tasodifiy funksiyalar berilsin, ular o‘zgaruvchilar to‘plamiga nisbatan o‘lchanadi, va qat’iy *t* va *x* uchun o‘lchanadigan $\Im_t$ - funksiyalar mavjud bo‘lsin.

x (t), t∈[0, T] tasodifiy jarayon

$$x(t)=\varphi(t,\omega)+\int_0^t f(s,x(s),\omega)ds+\int_0^t\sigma(s,x(s),\omega)dW(s), \qquad (8.4)$$

tenglamaning yechimi deb ataladi, agar:

X(t)

1)*(t,ω)* bo‘yicha *x(t)* o‘lchovli;

2)*X(t)* - $\Im_t$ -har bir *t∈[0, T] da o‘lchivli;*

3)(8.4) integrallar aniqlangan;

4)(8.4) tenglik har bir *t* da 1 ehtomollik bilan bajarilgan.

2-teorema. $\sup_{0\le t\le T} M\varphi^2(t,\omega) < \infty$ bo‘lsin va ehtimolligi 1 bo‘lgan ba’zi bir doimiy *K* uchun *f* va σ koeffitsientlar shartlarni qondiradi:

$$|f(t,x,\omega) - f(t,y,\omega)| + |\sigma(t,x,\omega) - \sigma(t,y,\omega)| \le K|x-y|;$$

$$|f(t,x,\omega)|^2 + |\sigma(t,x,\omega)|^2 \le K(1+|x|^2)$$

barcha *t, x* va *y* uchun. Unda:

1) tenglama (8.4) quyidagi shartni qondiradigan echimga ega:

$$\sup_{0\le t\le T} Ex^2(t) < \infty; \tag{8.5}$$

2) (8.5) xususiyatiga ega bo‘lgan har qanday ikkita $x_t^{(1)}$ va $x_t^{(2)}$ yechimlari stoxastik jihatdan tengdir, ya’ni $P\{x_t^{(1)} = x_t^{(2)}\} = 1$ har qanday *t∈[0,T]* uchun.

Stoxastik differentsial tenglama (8.3) yechimining mavjudligi va o‘ziga xosligi haqidagi savolga qaytsak, amaliy qo‘llanilishi uchun yana bitta umumlashtiruvchi sxemani keltiramiz. Biz stoxastik differentsial tenglamalar tizimining yechimi va ushbu echim mavjud bo‘lgan va yagona bo‘lgan shartlar haqida gaplashamiz.

$X=(x_1, ..., x_n)^T \in R^n$ argumentlar to‘plami bo‘lsin; $X(t)\in R^n$ - vektor tasodifiy funksiyasi; $f(t, X)\in R^n$ - *n* o‘lchamdagi vektor tasodifiy bo‘lmagan funksiyasi; $\sigma(t, X) \in R^{nxm}$ - $n\times m$ o‘lchovning matritsali tasodifiy bo‘lmagan funksiyasi, $W(t, X)\in R^n$ -o‘lchovli standart Wiener jarayoni, uning tarkibiy qismlari mustaqil standart Wiener jarayonlari; $X_0 = (x_1^0,..., x_n^0)^T \in R^n$ - bu boshlang‘ich shartlarning tasodifiy vektori.

Ta’rif. Vektorli tasodifiy funksiya *X(t)* ni

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{8.6}$$

stoxastik differentsial tenglamalar tizimining [*0, T*] oraliqda

$$X(0)=X_0 \tag{8.7}$$

boshlang‘ich shart bilan yechimi deb aytamiz, agar har bir $t\in[0, T]$ uchun

$$x(t) = \varphi(t,\omega) + \int_0^t f(s, x(s),\omega)ds + \int_0^t \sigma(s, x(s),\omega)dW(s), \tag{8.8}$$

bu yerda birinchi integral avvalgidek o‘rtacha kvadrat ma’noda, ikkinchisi Ito integrali hisoblanadi.

Matritsali ifodalar (8.6) - (8.8) ixcham shaklida

$$dx_i(t) = f_i(t, X(t))dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t, X(t))dW_j(t); \tag{8.9}$$

$$x_i(0) = x_i^0, i = 1,..., n \tag{8.10}$$

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_0^t f_i(s, X(s))ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X(s))dW_j(s)\,. \qquad (8.11)$$

Belgilash kiritamiz:

$$|f(t,X)|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t,X), \|\sigma(t,X)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}^2(t,X)$$

Quyida $f_i(t, X)$, $\sigma_{ij}(t, X)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$ funksiyalariga qo‘yiladigan shartlar berilgan, ularda (8.11) ning o‘ng tomonidagi barcha integrallar ma’noga ega, *X(t)* jarayonining barcha tarkibiy qismlari uchun har qanday $t \in [0,T]$ uchun (8.11) tenglik bajarilasi.

3-teorema. X_0 va $W(t)$, $t \in [0, T]$ stoxastik b0g‘liq bo‘lmagan, $EX_0^2 < \infty$ (8.6) tenglama koeffitsientlari, *f(t, X)* va *σ(t, X)*, $t \in [0, T]$ va $X \in R^n$ o‘zgaruvchilar. Aytaylik, qo‘shimcha ravishda K <∞ mavjud, shunday qilib,

• barcha $t \in [0, T]$, $X \in R^n$ da

$$|f(t,X)|^2 + \|\sigma(t,X\|^2 \le K(1+|X|)^2; \qquad (8.12)$$

• Lipschitz sharti bajariladi: barcha t∈[0, 7] va $X,Y \in R^n$ da

$$|f(t,X) - f(t,Y)|^2 + \|\sigma(t,X) - \sigma(t,Y)\|^2 \le K|X-Y|)^2; \qquad (8.13)$$

Unda [0, *T*] da (8.7) boshlang‘ich sharti bilan (8.6) tenglamalar tizimining yagona uzluksiz *X(t)* yechimi mavjud va

$$E|X(t)|^2 \le L(1+E|X_0|^2), t \in [0,T], \qquad (8.14)$$

bunda *L* faqat *K* va *T* ga bog‘liq o‘zgarmas.

Uzluksiz yechimning mavjudligi deyarli barcha traektoriyalari uzluksiz (8.6) tenglama va (8.7) shartni qondiradigan *X(t)* tasodifiy funksiya mavjudligini anglatadi. Uzluksiz yechimning o‘ziga xosligi shuni anglatadiki, agar *Y(t)* bir xil xossalarga ega bo‘lgan boshqa tasodifiy funksiya bo‘lsa, unda deyarli barcha *X(t)* va *Y(t)* traektoriyalar [0, T], ya’ni barcha $t \in [0, T] = 1$ da X(t)=Y(t) bo‘ladi.

(8.12) shart X ga nisbatan vektor funksiyalari *f(t, X)* va *σ(t, X)* tarkibiy qismlarining o‘zgarish tezligini |X|→∞ sifatida cheklaydi, ular chiziqli funksiyalardan tezroq o‘smasligi kerak. Lipschitzning (8.13) sharti (8.6) tenglamaning koeffitsientlari *f* va *σ* nisbatan *X* uzluksizligiga nisbatan ancha qattiq talablar qo‘yadi. Tengsizliklar (8.12) va (8.13), masalan, *f(t, x)* va *σ(t, x)* funksiyalar *x* va $|f_x^{'}(t,x)|^2 + \|\sigma_x^{'}(t,x)\|^2 \le C$ ga nisbatan farqlanadigan bo‘lsa, amal qiladi, har qanday $t \in [0, T]$, $x \in R^n$ va C<∞ bo‘lganda.

Ta'rif. Stoxastik differentsial tenglamalar tizimi (8.6) chiziqli deyiladi, agar

$$f(t, x) = a\,(t)\,x + u\,(t),\ \sigma\,(t, x) = b\,(t), \tag{8.15}$$

bu yerda $a(t)\in R^{nxn}$, $u(t)\in R^{n}$, $\sigma(t)\in R^{nxm}$ - matritsaning deterministik funksiyalari.

Boshqacha qilib aytganda, chiziqli stoxastik differentsial tenglamalar tizimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$dX(t) = (a(t)X(t) + u(t))dt + b(f)dW(t),\ X(0) = X_0. \tag{8.16}$$

Agar [0, T] da $a(t)$, $u(t)$ va $b(t)$ funksiyalar uzluksiz bo'lsa, (8.15) da aniqlangan funksiyalar shartlarni qondirishini osonlikcha ko'rsatish mumkin. 8..3 teoremasining (8.12), (8.13) va shuning uchun (8.16) chiziqli stoxastik differentsial tenglamasi yagona va uzluksiz yechimga ega.

Shunga o'xshash natija (8.16) dan ko'ra umumiyroq shakldagi tenglamalar tizimlari uchun ham amal qiladi. Matritsa koeffitsientlari $f(t, X)\in R^{n}$ va $\sigma(t, X)\in R^{nxm}$ $X = (xl \ldots, x_n)$ ga nisbatan chiziqli funksiyalar bo'lgan tenglamalar tizimini ko'rib chiqamiz:

$$f_i(t, X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + u_i(t), \tag{8.17}$$

$$a_{ij}(t, X) = \sum_{i=1}^{n} b_{ikj}(t)x_j + v_i(t), i = 1,\ldots, n, k = 1,\ldots, m,$$

bu yyerda $a_{ij}(t)$, $u_j(t)$, $b_{ijk}(t)$, $v_{ik}(t)$ deterministik funksiyalar $t\in[0, T]$ uchun uzluksiz.

1-masala. $a(t)$, $u(t)$, $b(t)$, $v(t)$ deterministic [0, T] da aniqlangan uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Tenglamani ko'rib chiqamiz:

$$dx(t) = (a(t)x(t) + u(t))dt + (b(t)x(t)+v(t)dW(t), \tag{8.18}$$

$$K_1 = \max_t |a(t)|^2,\ K_2 = \max_t |u(t)|^2,\ K_3 = \max_t |b(t)|^2,.\ K_4 = \max_t |v(t)|^2$$

Funksiyalarning uzluksizligi tufayli barcha ko'rsatilgan maksimumlari mavjud. Biz K = 4max {K1, K2, K3, K4} · deb belgilaymiz

$$|f(t,x)|^2 = |a(t)x + u(t)|^2 \le 2|a(t)x|^2 + 2|u(t)|^2 \le 2|a(t)x|^2|x|^2 + 2|u(t)|^2 \le 2K_1|x|^2 + 2K_2 \le \frac{K}{2}\left(1+|x|^2\right)$$

Xuddi shuningdek, $\|\sigma(t,x)\|^2 = \|b(t)+v(t)\|^2 \le \frac{K}{2}\left(1+|x|^2\right)$.

Bundan $|f(t,x)|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \le \frac{K}{2}\left(1+|x|^2\right)$.

Shuningdek,

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|^2 = \|b(t)(x-y)\|^2 \le K_3|x-y|^2 \le \frac{K}{2}|x-y|^2,$$

$$|f(t,x)-f(t,y)|^2 = |a(t)(x-y)|^2 \le K_1|x-y|^2 \le \frac{K}{2}|x-y|^2,$$

bundan

$$\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|^2 = |f(t,x)-f(t,y)|^2 \le K|x-y|^2 ,$$

shuni ko‘rsatish talab qilingan edi.

Shuni ta’kidlaymizki, matritsadan foydalanib, Ito formulasini quyidagicha yozish mumkin.

Faraz qilaylik $u(t, X), X\in R^n, t\in[0, T]$ skalyar funksiyasi berilgan, t va X ga nisbatan doimiy, X ga nisbatan ikki marta doimiy ravishda differentsiallanadigan. Shuningdek, vektor tasodifiy jarayon X(t) = $(x_l(t),\dots x_l(t))^T$ uchun qoniqtiriladi. Unda $y(t) = u(t, X(t))$ tasodifiy jarayon faqat koeffitsientlari formulalar bo‘yicha hisoblanadigan

$$dy(t) = F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t), \tag{8.19}$$

stoxastik differentsial tenglamasining koeffisiyenti quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$F(t,X) = \frac{\partial u(t,X)}{\partial t} + \left(\frac{\partial u(t,X)}{\partial X}\right)^T f(x,T) + \frac{1}{2} tr\left(\frac{\partial^2 u(t,X)}{\partial X^2}\sigma(t,X)\sigma^T(t,X)\right)$$

$$G(t,X) = \left(\frac{\partial u(t,X)}{\partial X}\right)^T \sigma(t,X), \tag{8.20}$$

Bunda $\frac{\partial u(t,X)}{\partial X} = \left(\frac{\partial u(t,X)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u(t,X)}{\partial x_n}\right)^T$ - $u(t,X)$ skalyar funksiyaning vector-ustunli xususiy hosilasi, $\frac{\partial^2 u(t,X)}{\partial X^2} = \left(\frac{\partial^2 u(t,X)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots n}$ - ikkinchi darajali xususiy hosilali matritsa, tr(.) - kvadrat matritsaning izi (uning diagonali elementlari yig‘indisi).

2-masala. Y(0)=1 boshlang‘ich shart bo‘yicha stoxastik differentsial tenglamaning yechimini toping

$$dy(t) = \frac{1}{2} y(t)dt + y(t)dW(t). \tag{8.21}$$

Ito differentsial formulasini $u(t, x)$ - $exp(x)$ funksiyasi bilan qo‘llagan holda, $y(t) = exp\ \{W(t)\}$ uchun quyidagi munosabat mavjudligini ko‘rsatish oson:

$$dy(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,W(t))}{\partial x^2}dt+\frac{\partial u(t,W(t))}{\partial x}dtdW(t) \quad \text{yoki} \quad dy(t)=\frac{1}{2}y(t)dt+y(t)dW(t).$$

Shunday qilib, $y(t)=\exp\{W(t)\}$ yechim bo‘ladi. Bundan tashqari, y(0) = exp(0) = 1, ya’ni. dastlabki shart qondiriladi. Tenglamaning yechimi tagonadir.

Quyidagi misol shuni ko‘rsatadiki, shartlar, yechim mavjudligi uchun etarli, ammo zarur emas.

3-misol. *x(t) x(0) = 0* boshlang‘ich shartini qondirsin va *dx(t) = -2sinx(t)* tenglamaning yechimi bo‘lsin. Yechimi *y(t) = cos(x(t))* bo‘lgan stoxastik differentsial tenglamani toping.

U(t, x) = cosx va *x(t)* uchun differentsial tenglamaning koeffitsientlari mos ravishda teng bo‘lganligi uchun *f(t, x) = 0* va *σ(t, x) = - 2sinx*, shuning uchun $u_t^{'}(t,x)=0, u_x^{'}(t,x)=-\sin x, u_t^{''}(t,x)=-\cos x$. (8.20) formulalar bo‘yicha *F(t,x)=-cosxsin^{2}x*, *G(t, x) = 2sin^{2}x* ni olamiz. Ushbu ifodalarni *cos x* funksiyalari sifatida ifodalash va *cosx (t) = y(t)* ni hisobga olib, biz olamiz

$$dy(t)=-2y(t)dt(1-y^2(t))dt+(1-y^2(t))dW(t), \tag{8.22}$$

$$y(0)=cos0=1.$$

Demak, *y(t) = cosx(t)* (8.22) tenglamaning yechimi.

(8.22) tenglama koeffitsientlari uchun Lipschitz (8.13) sharti bajarilmasligini ko‘rsatish oson, shuning uchun techim, ko‘rib turganimizdek, hali ham mavjud. Quyidagi misol, stoxastik differentsial tenglama tomonidan berilgan tasodifiy jarayonning sonli xarakteristikalarini topish uchun Ito formulasidan foydalanish imkoniyatini ko‘rsatadi.

4-misol. *a* va *b* o‘zgarmag bo‘lsin, *x(t)*

$$dx(t)=ax(t)+bx(t)dW(t) \tag{8.23}$$

tenglamaning $x(0)=x_0, Ex_0^4<\infty$ boshlang‘ich shart bilan yechimi bo‘lsin. *m(t)=Ex(t)* va *γ(t)=Ex^2(t)*.

(8.14) ga binoan, shuningdek (8.12), (8.13) shartlar bajarilishi tufayli *Ex^2(t)* <∞ bo‘lgani uchun, (8.23) yechim mavjud va *Ex^2(t)*<∞. Shuning uchun

$$E\left(\int_0^t x(s)dW(s)\right)=0. \tag{8.24}$$

(8.23) ni integral shaklga yozamiz:

$$x(t)=x(0)+a\int_0^t x(s)ds+b\int_0^t x(s)dW(s). \qquad (8.25)$$

(8.25) ning ikkala tomonidan matematik kutilma olamiz. (8.24) ni hisobga olib, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$Ex(t)=Ex(0)+a\int_0^t E\{x(s)\}ds,$$

yoki

$$m(t)=m(0)+a\int_0^t m(s)ds. \qquad (8.26)$$

(8.26) ni t ga nisbatan differentsiallasak, biz odatdagi differentsial tenglamaga kelamiz $\frac{dm(t)}{dt}=am(t)$, uni yechib quyidagini olamiz $m(t)=m(0)exp(at)$. Bunda $m(0)=Ex(0)=Ex_0$.

$\gamma(t)=Ex^2(t)$ ni hisoblash uchun $y(t)=x^2(t)$ tasodifiy jarayonni qonoatlantiradigan differentsial tenglamani topamiz.

$u(t,x)=x^2$ bo‘lganda Ito formulasiga asosan

$$dy(t)=(2a+b^2)y(t)dt+2by(t)dW(t). \qquad (8.27)$$

$Ey^2(0)=Ex^4(0)<\infty$ bo‘lgani uchun (8.14) dan $Ey^2(0)<\infty$, shuning uchun

$$E\left(\int_0^t y(s)dW(s)\right)=0. \qquad (8.28)$$

(8.27) ni integrallab va ikkala qismidan matematik kutish olib, topamiz

$$Ey(t)=Ey(0)+(2a+b^2)\int_0^t E\{y(s)\}ds,$$

yoki

$$\gamma(t)=g(0)+(2a+b^2)\int_0^t \gamma(s)ds \qquad (8.29)$$

Differensial tenglamaga o‘tib, $\frac{d\gamma(t)}{dt}=(2a+b^2)\gamma(t)$ va uni yechib olamiz $\gamma(t)=g(0)\exp\{(2a+b^2)t\}$, bunda $\gamma(0)=Ex^2(0)=Ex_0^2$.

Stoxastik differentsial tenglamalarni o‘rganish metodikasini jadvalda ko‘rib chiqamiz, unda Wiener jarayonining ba’zi funksiyalari va tegishli differentsial tenglamalar berilgan.

Jadval

Standart Wiener jarayonining stoxastik differentsial tenglamalari va ularning echimlari

Itoning stoxastik differensial tenglamasi	Yechimi
$dX(t) = \alpha W(t)^{\alpha-1} dW(t) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)W(t)^{\alpha-2} dt$	$X = W^{\alpha}$
$dX = e^{\alpha W} dW + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha W} dt$	$X = e^{\alpha W}$
$dX = -\frac{\alpha}{W} dW - \frac{\alpha^2}{2W^2} dt$	$X = \ln \alpha W$
$dX = \alpha \cos \alpha W dW - \frac{1}{2}\alpha^2 \sin \alpha W dt$	$X = \sin \alpha W$
$dX = -\alpha \sin \alpha W dW - \frac{1}{2}\alpha^2 \cos \alpha W dt$	$X = \cos \alpha W$
$dX = \frac{\alpha}{\cos^2 \alpha W} dW + \frac{\alpha^2 \sin \alpha W}{\cos^2 \alpha W} dt$	$X = \mathrm{tg}\, \alpha W$
$dX = -\frac{\alpha}{\sin^2 \alpha W} dW + \frac{\alpha^2 \cos \alpha W}{\sin^2 \alpha W} dt$	$X = \mathrm{ctg}\, \alpha W$
$dX = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2 W^2}} dW + \frac{\alpha^3 W}{2\sqrt{(1-\alpha^2 W^2)^3}} dt$	$X = \arcsin \alpha W$
$dX = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2 W^2}} dW - \frac{\alpha^3 W}{2\sqrt{(1-\alpha^2 W^2)^3}} dt$	$X = \arccos \alpha W$
$dX = \frac{\alpha}{1+\alpha^2 W^2} dW - \frac{\alpha^3 W}{(1+\alpha^2 W^2)^2} dt$	$X = \mathrm{arctg}\, \alpha W$
$dX = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2 W^2} dW + \frac{\alpha^3 W}{(1+\alpha^2 W^2)^2} dt$	$X = \mathrm{arcctg}\, \alpha W$

9-BOB. INVESTITSIYANI LOYIHALASHTIRISHDA NOANIQ TO‘PLAMLAR NAZARIYASINI QO‘LLASHNING ASOSLARI

9.1. Investitsiyani loyihalashtirishda noaniq to‘plamlar nazariyasining asosiy qoidalari.
9.2. Noaniq to‘plam va u bilan operatsiyalar.
9.3. Noaniq to‘plamlarni ekspert tizimlarida qo‘llanilishi.
9.4. Loyihaviy risklarni tahlil qilishda noaniq to‘plamlarni qo‘llash

9.1. Investitsiyani loyihalashtirishda noaniq to‘plamlar nazariyasining asosiy qoidalari

Xatarlarni baholashni amalga oshiradigan loyihaning ekspert-tahlilchisi nafaqat ularning ro‘yxatini tuzishi, balki ularni amalga oshirishning barcha mumkin bo‘lgan oqibatlarini hisoblab chiqishi kerak. Bunday tadqiqotchining oldida quyidagi vazifalar turibdi, deb aytishimiz mumkin:

1) tavakkalchilik holatining alohida tarkibiy qismlarining va umuman butun vaziyatning ahamiyatini baholash;

2) yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan oqibatlarni tahlil qilish, ularni baholash;

3) eng yaxshi echimni (yoki ularning kompleksini) taklif qilish.

Mutaxassisga topshirilgan bunday muammolarni har doim ham klassik usullardan foydalanib hal qilish mumkin emas. Buning sababi, avvalo, dekartiyaviy ratsionalistik usulni ifoda etuvchi yondashuvlar-ning aksariyati an’anaviy ravishda "noaniqlik" kabi atamalarni rad etishidir. Biroq, aniq vaziyatda tadqiqotchi noaniqliklar va hodisalar, xususiyatlar va baholashlar bo‘yicha noto‘g‘ri ma’lumotlarni hisobga olish muammosidan qochib qutulishning iloji bo‘lmaydigan ko‘p holatlarga duch kelishi muqarrar. Noaniq to‘plamlarni modellashtirish yordamida noaniqlikning o‘ziga xos shakllaridan biri bo‘lgan noaniqlik, tavakkalchilikni tahlil qilish jarayonida organik ravishda o‘rnatiladi.

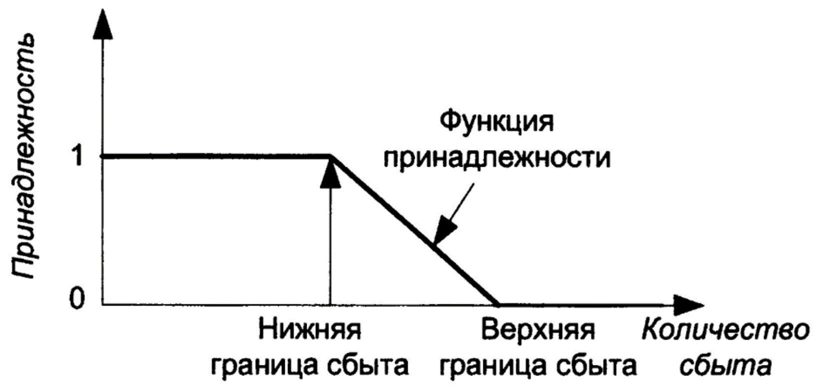
Ko‘pgina tadqiqotchilar sarmoyaviy hisob-kitoblarni amalga oshirayotganda, faqat ba’zi bir hodisalar va sharoitlarning yuzaga kelishidagi noaniqlikni (xavf holatlari) hisobga olishadi. Bundan tashqari, ular mumkin bo‘lgan voqealar yoki holatlar sonini aniq belgilashga asoslanadi. Biroq, noaniqlikning namoyon bo‘lish shakllari quyidagilar bo‘lishi mumkin: 1) noaniq haqiqat yoki yolg‘on bo‘lmagan munosabatlar deb tushunilgan noaniq munosabatlar (masalan, “bir oz ko‘proq” yoki “aniqdan yaxshiroq” narsa); 2) yoki insonning hissiyot-lari asosida paydo bo‘ladigan hodisalarning noaniq tavsiflari, masalan, “juda yuqori o‘sish sur’ati” iborasi yoki noaniq axborot natijasida.

Noma’lum munosabatlar yoki tavsiflar noaniq to‘plamlar yorda-mida rasmiy ravishda tavsiflanishi mumkin bo‘lgan ko‘plab investitsiya muammolariga xosdir. Ushbu nazariyaning asosiy postulatlaridan biri, to‘plamning klassik tushunchasiga xos bo‘lgan ma’lum bir to‘plamga tegishli (1-qiymat) va tegishli bo‘lmagan (0-qiymat) elementlarning aniq farqlanishini olib tashlashdir. Shunday qilib, X elementining A to‘plamiga mansubligini 0 dan 1 gacha bo‘lgan qiymatlar bilan tavsiflash mumkin.

Investitsiya loyihalarini iqtisodiy va matematik modellashtirish jarayonida chiziqli optimallashtirish modellari ko‘pincha qo‘llaniladi. Noaniq to‘plamlar usuli cheklovlar chegarasi, cheklov koeffitsientlari yoki kerakli funksiya koeffitsientlari mavjud bo‘lgandagina ularga kiritilishi mumkin.

Biz Yu Blech, U. Goetz ishida keltirilgan savdo cheklovi misolida yopiq cheklovlarni hisobga olish imkoniyatlarini misol qilib keltiramiz. “Har bir sotish cheklash bilan muayyan barqaror vaziyatni taqdim mahsulot yoki uning savdo miqdori kam yoki oldindan belgilangan chegarasiga teng bo‘ladi, deb kafolatlanadi. *Fuzzy Set* modelidan foydalanib, savdo chegaralarining noaniqligini hisobga olish mumkin. Agar interval savdo chegaralari uchun belgilanishi mumkin bo‘lsa, u holda *Fuzzy*-mantiqini quyidagi shaklda cheklov buzilishini tan olish yo‘li bilan modelda qo‘llashi mumkin: "Intervalning pastki chegarasi va har qanday holatda iloji boricha amalga oshiriladigan ishlab chiqarish miqdorini tanlang va har qanday holatda ham – uning miqdori intervalning yuqori chegarasidan kattaroq yoki teng bo‘ladi”.

Qarashlilik funksiyasi bizga ushbu cheklovning bajarilish darajasini ifodalashga imkon beradi. Buni chiziqli qarashlilik funksiyasi diagrammasi yordamida tasvirlab beramiz (9.1-rasm).



9.1-rasm

Agar investorning maqsadi pastki chegaradan chetga chiqishni minimallashtirish bo‘lsa, unda dastlabki cheklovlardan biz *Fuzzi*-funksiyasini olishimiz mumkin. Shunday qilib, qidirilayotgan *Fuzzi*-funksiyasining har bir qiymati uchun maksimal qoniqarli qiymatni topishdan iborat bo‘lgan ko‘p maqsadli optimallashtirish muammosi ishlab chiqilgan. Belgilangan qiymat qanchalik katta bo‘lsa, pastki chegaradan kichikroq og‘ish, ya’ni u har safar qarashlilik funksiyasining qiymati orqali aniqlanadi.

Tavsiya etilgan “qoida” asosida qurilgan ko‘p maqsadli optimallashtirish tizimi, shuningdek, boshlang‘ich maqsad funksiyasini o‘z ichiga olishi kerak, masalan, *Fuzzi*-funksiyasi (qarashlilik yoki qoniqish parametri). Ushbu muammoni hal qilish uchun maqsad funksiyasini qarashlilik funksiyasiga aylantirish kerak bo‘ladi, bu maqsad funksiyasining turli xil kerakli qiymatlariga nisbatan qoniqish darajasini ko‘rsatadi.

Belgilangan qarashlilik funksiyasini qurish imkoniyati maqsad funksiyasining ikkita aniq qiymatining mavjudligi bilan bog‘liq: birinchi qiymat, pastki chegarasi hech qanday tarzda kesib o‘tilmasligi kerak (qarashlilik qiymati nolga teng) va ikkinchi qiymat erishiladigan maksimal qiymat (qarashlilik qiymati birga teng). Ularning qiymatlarini hisoblash barcha quyi qiymatlarni va barcha yuqori chegara qiymatlarini birlamchi o‘rnini belgilovchi dastlabki modelga almashtirish yordamida amalga oshiriladi; shunga ko‘ra optimallashtirish amalga oshiriladi.

Natijada, bir nechta obyektiv Fuji funksiyalari paydo bo‘ladi, ularning integratsiyasini ikkita operator funksiyalari bitta funksiyaga birlashtirilganda, har bir qiymatga minimal qiymatni beradigan minimal operator deb ataladigan maxsus operator yordamida amalga oshirilishi mumkin bo‘lgan bu ikkita qarashlilik funksiyasidan birini oladi.

Сршяшйдш optimallashtirish modelini yaratishga imkon beradigan bunday operatordan foydalanganda, ma’lumotlarning yo‘qolishi bilan bog‘liq bo‘lgan xavf belgilari hisobga olinadi. Qarorlarni qabul qilishning insoniy uslubiga ko‘proq mos keladigan boshqa operatorlar mavjud, ulardan foydalanish chiziqli optimallashtirish modelini qo‘llash imkoniyatini inkor etadi, bu esa investitsiya loyihasi modelining murakkabligini kuchayishiga olib keladi va natijada, xatarlarni tahlil qilishning shaffofligini yomonlashtiradi.

Keltirilgan protsedura loyihaning xatarlarini tahlil qilish uchun nosniq to‘plamlardan foydalanishning quyidagi ketma-ketligini taklif qilishga imkon beradi.

9.1-jadval

Noaniq to‘plam metodologiyasidan foydalangan holda loyiha xavfini o‘rganish algoritmi

Bochqich	Bochqich mazmuni	Zarur talablar
1	Kerakli ma’lumotlar ro‘yxatini shakllantirish.	Loyiha muammosini tuzish. Loyihaning barcha tarkibiy qismlarini aniqlash
2	Noaniq mantiqning maxsus “atamalari”dan foydalangan holda loyihaning tavsiflash, modellashtirishning bir turi	Sifatli (lingvistik) o‘zgaruvchilar va miqdoriy xususiyatlardan birgalikda foydalanishga asoslangan noaniq mantiq qonunlarini izchil qo‘llash
3	Xatarlarni tahlil qilish uchun tuzilmaviy ma’lumotlar	Qo‘lda va kompyuterda hisoblash uchun ma’lumotlarni tashkil etish va ajratish. Kerakli dasturiy ta’minotni tanlash
4	Xatarlarni tahlil qilish.	Tabiiy tahlil kursiga muvofiqligi
5	Xulosa: loyihaning oëzini va uning tavsifini (modelini) yaxshilash kerakmi?	

9.2. Noaniq to‘plam va u bilan operatsiyalar

Loyihaviy mantiqiy yondashuvning klassik yondashuvdan loyihaviy tahlili bilan qiyosiy qo‘llanilishidagi afzalligi shundaki, noaniqa yondashuv bilan jarayonning analitik tavsifini bermaslik mumkin. L.A. Zade tomonidan tavsiya etilgan noaniq mantiq, allaqachon aytib o‘tilganidek, noaniqlikning ikki turini qo‘llaydi: ya’ni obyektlarning qiymatlari turli maqsadlarni amalga oshirishda bajaradigan funksiyalari bilan bog‘liq.

Shunday qilib, noaniq to‘plamlar nazariyasi noaniq, taxminiy, taxminiy baholash va vaziyatlarga tayanadi.

Bunday yondashuvning zaruriyati, avvalambor, tizimning murakkabligi oshgani sayin, tahlilchining xulq-atvori to‘g‘risida aniq va shu bilan birga mazmunli bayonotlar berish qobiliyati ostonaga erishilgunga qadar asta-sekin yo‘q bo‘lib ketishi bilan bog‘liq. deyarli bir-birini istisno qiladigan xususiyatlarga aylanadi. Ko‘p yoki kamroq noaniq tushunchalarni aniqlaydigan maxsus belgilarni (yorliqlarni) joriy etish va ushbu yorliqlardan keyingi fikrlarda foydalanish taklif qilinadi.

Bunday noaniq tushunchalarni aniqlash usuli quyidagicha: *U* - istalgan obyektlar to‘plami yoki matematik qurilmalar bo‘lishi mumkin bo‘lgan universal 1t,o‘plam bo‘lsin. Agar *A* - *U* ning u_1, u_2, ..., u_n elementlardan iborat cheklangan kichik to‘plami bo‘lsa, u holda

$$A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

A ning U-dan yakuniy noaniq qismyo‘plami bu tartiblangan juftliklar to‘plamidir.

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i))\}, u_i \in U \text{ ,}$$

bu yerda $\mu_A(u_i)$ - ushbu to‘plamdagi elementning kutilayotgan a’zolik darajasini ko‘rsatib, a’zolik o‘lchovini (yoki a’zolik funksiyasini, a’zolik funksiyasini) aniqlaydi.

Agar hamma $\mu_A(u_i) \in \{0,1\}$ bo‘lsa, ya’ni 0 yoki 1 ga teng, keyin “noaniq” to‘plam “noaniq”, “oddiy” aniq to‘plamga aylanadi va $\mu_A(u_i)$ funksiyasi oddiy mantiqiy funksiyaga aylanadi. Ammo, agar $\mu_A(u_i)$ (0, 1) oralig‘ida qiymatlarni qabul qila oladigan bo‘lsa, $\mu_A(u_i) = 0$ element va to‘plamga tegishli emasligini anglatadi, $\mu_A(u_i) = 1$

U to‘plamga tegishli ekanligini anglatadi va har qanday $0 < \mu_A(u_i) < 1$ ning U to‘plamga tegishli darajasini aniqlaydi, keyin A noaniq to‘plamdir.

Noaniq mantiqda, yuqorida ta’kidlab o‘tilganidek, haqiqat qiymati har qanday yetarlicha tartiblangan to‘plamning noaniq qismosti bo‘lishi mumkin. Ammo odatda bu [0, 1] oralig‘idagi noaniq qismosti yoki ushbu intervalning bir nuqtasidir. lingvistik haqiqat mezonlari deb nomlanuvchi, masalan, “to‘g‘ri”, “juda ham to‘g‘ri”, “juda ham to‘g‘ri emas” va boshqalarni noaniq to‘plamlarning yorlig‘i sifatida talqin qilinishi mumkin.

Ma’lum bir miqdoriy miqyosda berilgan va tabiiy tilning so‘zlari va iboralari ko‘rinishidagi qiymatlarni lingvistik o‘zgaruvchi deb ataymiz. Lingvistik o‘zgaruvchining qiymatlari noaniq o‘zgaruvchilar bilan tavsiflanadi. Har qanday lingvistik o‘zgaruvchi va uning qiymatlari bazaviy deb nomlanadigan ma’lum bir miqdoriy o‘lchov bilan bog‘liq. Ushbu o‘lchov ekspertning sub’ektiv fikrini aks ettiradi. Masalan, yosh - T to‘plami lingvistik o‘zgaruvchi sifatida qarash mumkin, unda: T (yosh) = (“yosh”, “qari”, “juda yosh”, “ozmi-ko‘pmi yoshm”, ...). Bundan tashqari, lingvistik o‘zgaruvchilarning qiymatlari nafaqat bazaviy o‘lchov bilan, balki funksiyasi bilan ham o‘rnatilishi mumkin. Ehtimollik raqam yoki interval bilan ifodalanadigan klassik mantiqiy tizimlardan farqli o‘laroq, noaniq mantiqda, bundan tashqari siz noaniq tushunchalardan foydalanishingiz mumkin, masalan, “o‘xshash”, “farqli o‘laroq”, “juda o‘xshash”, “taxminan 0,8” va boshqalar. Bunday tushunchalarni noaniq arifmetika qoidalariga binoan bajariladigan operatsiyalar, qarashlilik funksiyalari sifatida talqin qilish mumkin.

Qarashlilik funksiyasining qiymati $\mu_A(u_i)$ mutaxassis yoki qaror qabul qiluvchi tomonidan belgilanadi. Ushbu funksiyaning turi har xil bo‘lishi mumkin, chunki u har bir mutaxassisning sub’ektiv fikriga, masalan, tasodifiy o‘zgaruvchining yoki ekspertning bunga munosabatiga qaramay Bayes qonunining taqsimlash funksiyasidan farqli o‘laroq bog‘liq bo‘lib, ular obyektiv qonuniyatning ifodasidir. Boshqacha qilib aytganda, qarashlilik funksiyasini shakllantirish ekspertning afzalliklarini ifodalash usullaridan biridir. Yuqoridagi gapni rasmiylashtiramiz.

Ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan *X* to‘plamdagi noaniq munosabat ($\tilde{\varphi}=(X,\tilde{F})$ bilan belgilanadi va $X,\tilde{F}$ to‘plamlarning juftligi deyiladi, bu yerda *F* – X^2 ning noani’ to‘plam osti hisoblanadi. *X* to‘plam topshiriq sohasi, $\tilde{F}$ esa munosabatlarning noaniq grafigi deb ataladi.

Noaniq munosabatlarni berishning to‘rtta ekvivalent usuli mavjud: nazariy-to‘plam, matritsali, grafik va noaniq predikatlar yordamida berish usuli.

Nazariy-to‘plam ko‘rinishidagi noaniq munosabatni berish uchun to‘plamni quyidagicha keltirish zarur $X=\{x_i\}(i\in I\{1,2,...,n\}$ va noaniq grafikni $\tilde{F}=\{(\mu_F(x_{i,}x_j),(x_{i,}x_j))\}(x_{i,}x_j)\in X^2$

Matritsa shaklida noaniq munosabatlar $\tilde{\varphi}$ aralash matritsa R_φ yordamida beriladi, ularning satrlari va ustunlari elementlar $x\in X$ bilan belgilanadi. x ∈ X, *i*-satr va *j*-ustunning elementi kesishgan joyda $r_{ij}=\mu_F(x_i,x_j)$, bunda μ_F - X^2 noaniq grafigi $\tilde{F}$ elementlarining qarashlilik funksiyasi.

Noaniq munosabat $\tilde{\varphi}=(X,\tilde{F})$ bir qancha tepaliklar to‘plami *X*, qarashlilik funksiyasi μ_F ning $\mu_F(x_i,x_j)$ ga mos keluvchi qiymatli (x_i,x_j) yoydan iborat bo‘lgan grafik shaklida belgilanishi mumkin.

$\tilde{\varphi}=(X,\tilde{F})$ ixtiyoriy noaniq munosabat bo‘lsin. Agar $\mu_F(a,b)\in F;a,b,\in X$ bo‘lsa, unda $a\tilde{\varphi}b$ ifoda noaniq mantiqiy bayon bo‘lib, uning haqiqat qiymati $\mu_F(x_i,x_j)$ dir. Shuning uchun, X ning $\tilde{\varphi}$ qandaydir noaniq munosabatni o‘rnatish uchun X^2 to‘plamda aniqlangan ikkita o‘zgaruvchidan iborat $a\tilde{\varphi}b$ mantiqiy formuladan yoki noaniq predikatlar berilishi kerak va ularning qiymatlari (0,1) oraliqdadan olinadi.

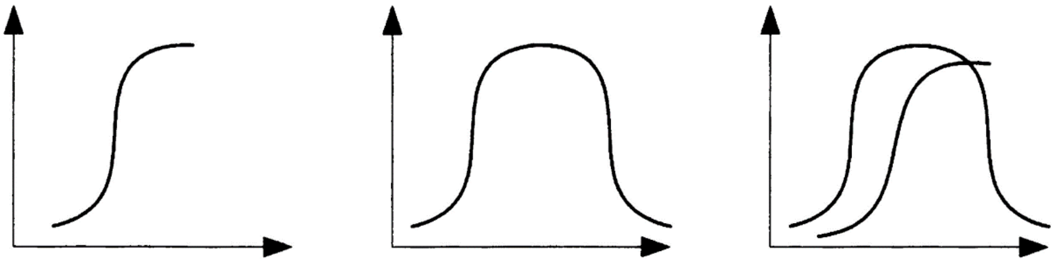
Aniq to‘plamlardagi o‘xshashlik bilan noaniq to‘plamlarda turli xil operatsiyalarni ko‘rib chiqish mumkin. Til o‘zgaruv-chilarining ta’rifida kiritilgan “emas”, “va” va “yoki” qo‘shma qo‘shimchalarini, “juda”, “ko‘proq”, “kamroq” va boshqa atama-larni U to‘plamosti turli amallarining belgisi sifatida talqin qilish mumkin:

1) To‘ldiriuvchi inkor etishga mos keladi va quyidagicha aniqlanadi

$-A = \{1-(a(x))/x, x \in U\}$;

2) Noaniq to‘plamlarni birlashtirish bir qancha rasmlar yordamida grafik ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin (9.1-rasm) Birlashtirish “yoki” bog‘lovchisiga mos keladi va tenglik bilan yoziladi:

$$A \cup B = \{\max(a(x), b(x))/x, x \in U\};$$



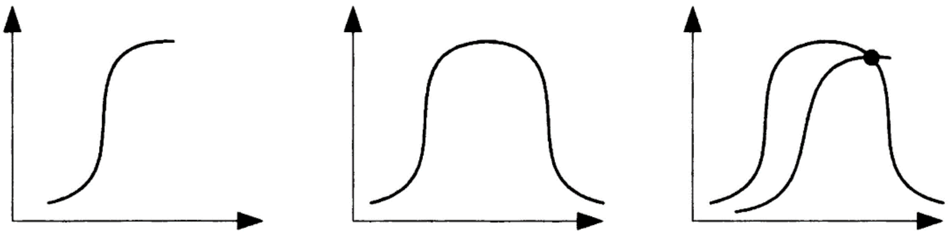
A to‘plamosti B to‘plamosti $A \cup B$

9.1-rasm

3) noaniq to‘plamlarning kesishishi “va” bog‘lovchisiga mos keladi, quyidagi tenglama bilan yoziladi

$$A \cap B = \{\max(a(x), b(x))/x, x \in U\}$$

va 9.2-rasmdagidek tasvirlanadi



A to‘plamosti B to‘plamosti $A \cap B$

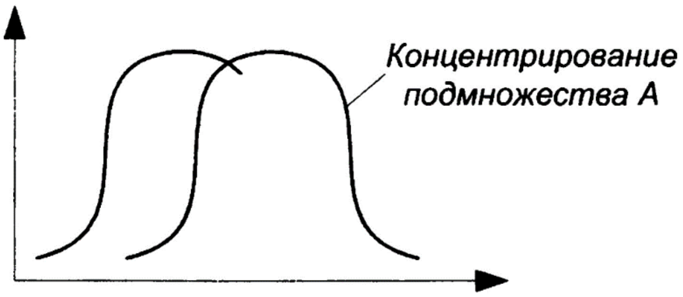
9.2-rasm

Ro‘yxatda keltirilganlardan tashqari, lingvistik noaniqliklarni ifodalashda ishlatiladigan boshqa operatsiyalar ham mavjud (asosiylarini ko‘rib chiqing);

3) Jamlash amali to‘’plamga elementlarning tegishli bo‘lishining pasayishini anglatadi:

$$conA = \{a(x) \times a(x)/x, x \in U\} = \{a^2(x)/x, x \in U\}.$$

Jamlash amali 9.3-rasmda tasvirlangan;



9.3-rasm

5) cho‘zish amali jamlashga teskari;

6) intensifikatsiya noaniq to‘plamlar ustida amal bo‘lib, ularning noaniqligini kamaytirishga imkon beradi;

7) “intensivatsiyadan farqli o‘laroq” noaniqlikni oshirish operatsiyasi mavjud, bu oddiy (aniq) to‘plamni noaniqqa aylantirishga imkon beradi. Ushbu amal lingvistik noaniqliklarni aniqlashda muhim rol o‘ynaydi, masalan, “ko‘p yoki oz”, “zaif”, “ko‘p” va boshqalar.

Loyiha tahlilchisi nuqtai nazaridan qiziqarlisi shundaki, haqiqiy yoki butun sonlar bilan aniqlangan yordamchi funksiyadan noaniq to‘plamlar tomonidan aniqlangan foydali yoki afzal funksiyaga o‘tish imkoniyati. Noaniq to‘plamlar tomonidan aniqlangan mumkin bo‘lgan yechim muqobillarini tartiblash usullarini ko‘rib chiqishga to‘xtalamiz. $A_k \rightarrow A_l$ muqobillarining reyting koeffitsienti quyidagicha aniqlanadi: garchi muqobillarning birortasi k va l boshqasiga matematik jihatdan qat’iyan ustunlik qilmasa ham / lekin, ekspert A_k ni deyarli A_l dan yaxshiroq deb taxmin qilish xavfini oladi. “Deyarli aynan”, “Hisoblash xavfini o‘z zimmasiga oladi” qarorlar muqobillarini reytinglash uchun noaniq to‘plam usullaridan foydalanish imkoniyati haqida gapiradi.

Noaniq to‘plamlar nazariyasiga asoslanib, $S^d(k,l)$ afzalliklarining noaniq munosabatlari $\mu(k,l)$ qarashlilik funksiyasi bilan tavsiflanadi, bu muqobil A_k alternativining A_l muqobilidan ustunlik darajasini belgilaydi. Bu holda $\mu(k,l)$ funksiyasi A_k ning A_l dan ustunligi darajasini emas, balki mutaxassislarning A_k ning A_l dan ustun ekanligiga ishonch darajasini bildiradi.

$\mu(k,l)$ funksiyasining xususiyatlari quyidagicha:

1) $\mu(k,l)$ muqobil A_k ning A_l dan ustunligi bahosining

ishonchliligi oshishi bilan ortadi. Xususan, $\mu(k,l)$ r_{ij}, $\forall j$ ning kamaytirmaydigan funksiyasi, $\forall j$, r_{lj}, r_{kj} parametr qiymatini mos ravishda 1-va *k*-chi miqobillarning *j*-atributi bilan aniqlaydi;

2) $\mu(k,l)$ = 1 A_l muqobilidan muqobil A_k ning mutlaq ustunligini, $\mu(k,l)$ = 0 muqobil A_k ning A_l ga nisbatan to‘iq ustunligining yo‘qligini anglatadi. Shunga ko‘ra, noaniq munosabatdagi $\mu(k,l) \in [0,1]$, agar $S^d(k,l) > S^d(j,k)$ bo‘lsa, A_k dan A_l afzalroq ekanligini anglatadi.

Afzallik munosabatini shakllantirish uchun uchta chegara qiymati ishlatiladi: t^i - befarqlik chegarasi; t^p - ustunlik chegarasi; t^v - veto chegarasi.

J-atributiga nisbatan ko‘rsatilgan chegaralarni quyidagicha aniqlash mumkin:

$r_{kj} \geq r_{lj} + t_j^i$ A_k hech bo‘lmaganda A_L dan kam emasligini ko‘rsatadi;

$r_{kj} \geq r_{lj} + t^p$ A_k ning A_v dan qat’iyan yaxshiroq ekanligini ko‘rsatadi;

$r_{kj} \geq r_{lj} + t_j^v$ A_k ning A_t dan sezilarli darajada yaxshiroq ekanligini ko‘rsatadi.

Ma’lumki $0 \leq t^i \leq t^p \leq t^v$.

Noaniq to‘plamlar nazariyasini amalda qo‘llash ba’zi holatlarda muqobillarni taqqoslash mumkin emasligiga olib keladi. Ushbu muammolarni hal qilish shartnomaning maxsus shartlari asosida amalga oshiriladi.

Takidlash kerakki, murakkab matematik tuzilmalar va juda katta miqdordagi hisob-kitoblarga qaramay, noaniq to‘plamlar apparati noaniq va sub’ektiv baholarni ifodalash uchun samarali vosita hisoblanadi. Noaniq to‘plamlarni amalda qo‘llash zarurati, ma’lum bir miqdoriy qiymatni sifatli og‘zaki tavsiflash uchun xizmat qiladigan, odamlar tomonidan osonlikcha qabul qilinadigan va noaniq to‘plamlarni haqiqiy va butun sonlar to‘plamiga xaritalashga imkon beradigan, ilgari aniqlangan lingvistik o‘zgaruvchilarning kiritilishiga sabab bo‘ldi.

9.3. Noaniq to‘plamlarni ekspert tizimlarida qo‘llanilishi

Noaniq mantiqni ekspert tizimlarida qo‘llash bir qator mezonlarni shakllantirish va ularning ahamiyatini baholash muammosi bilan bog‘liq. Mezon - bu qaror qabul qiluvchi nuqtai nazaridan muqobil variantlarni baholashdagi farqlarni ifodalash usuli sifatida tushuniladi. Ushbu ta’rifni tushuntirib beraylik.

Cheklangan to‘plamning bir qancha (muqobil) A yechimlari berilgan bo‘lsin. Ulardan ba’zi bir ma’noda yaxshiroq yoki ko‘proq oldindan kelishilgan shartlarga mos keladigan bir yoki bir nechta variantlarni ajratib ko‘rsatish kerak. Buning uchun biz quyidagilarni o‘z ichiga olgan kriteriya-ekstremizm yondashuvidan foydalanamiz: miqyoslash jarayoni amalga oshiriladi, unda A variantlar to‘plami shkala deb nomlangan sonli o‘qga proektsiyalanadi, shunda har bir variant ma’lum bir nuqtaga to‘g‘ri keladi raqamli o‘qi va shu vaqtning o‘zida u bir nechta o‘zgarishni prognoz qilishi mumkin yoki bo‘lmasligi mumkin. So‘ngra, ularga berilgan raqamli taxminlar qiymatiga ko‘ra A dan barcha variantlarni tartiblash va ularning tartib sonlarini faqat variantlar orqasida saqlash tartibidan foydalanib, tartibli yoki daraja shkalasi deb nomlanadi.

O‘lchov tanlov mezonlari yoki agar tanlov “yaxshiroq” yoki “oldindan belgilangan maqsadga muvofiqroq” deb hisoblansa, unga sonli yoki darajadagi ball qanchalik katta (yoki kamroq) berilgan bo‘lsa, o‘lchov deb nomlanadi.

Faraz qilaylik $x \in A$ variant. Variant prognoz qilinadigan shkala nuqtasining sonli qiymati, ya’ni uning tanqidiy bahosi $f(x)$ bilan belgilanadi. Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ ning barcha variantlari uchun berilgan va mezon shkalasi asosida aniqlangan raqamli qiymatlarga ega bo‘lgan mezon deb nomlangan funksiya.

Yuqorida ko‘rsatilgan $f(x)$ mezoniga muvofiq, A ning eng yaxshi variantlarining pastki qismini ekstremistik tanlov deb ataymiz, agar Y_A faqatgina bunday variantlarni o‘z ichiga olgan bo‘lsa, unda juda katta tanqidchi alna bahosiga ega bo‘lgan variantlar mavjud emas.

Ushbu tasdoqni vektor shaklida yozamiz:

$$Y_A = \{y \in A / \bar{\exists} x \in A : \{f(x)\} \rangle \{f(y)\}\},$$

$$Y_A = \{y \in A / \bar{\exists} x \in A : \{f(y)\} \rangle \{f(x)\}\},$$

bu yerda $\{f(x)\}\rangle\{f(y)\}$ munosabat shuni bildiradiki $f_i(x)\rangle f_i(y), \forall i \in \{1,2,...,n\}$.

Agar hech bo‘lmaganda birorta $i \in \{1,2,...,n\}$ qat’iy tengsizlik $f_i(x)\rangle f_i(y)$ saqlansa, “>” belgi “≥” belgiga almashtiriladi va bu qo‘shimcha taxmin Paretto qoidasiga olib keladi.

Qaror qabul qilish uchun ishlatiladigan mezonlar to‘lami to‘liqligi, samaradorligi, ajralib chiqishi, bajarilmasligi va minimalligi xususiyatlariga ega bo‘lishi kerak. Ushbu xususiyatlarni batafsil aniqlaylik.

Agar to‘plam muammoning barcha muhim jihatlarini qamrab oladigan bo‘lsa, unda biz mezonlar to‘plamining to‘liqligi haqida gapirishimiz mumkin. Boshqacha qilib aytganda, n mezonlari to‘plamining to‘liqligi qaror qabul qiluvchiga umumiy maqsadga erishish darajasini to‘liq anglash imkoniyatini berishi kerak. Shu ma’noda, loyiha xatarlarini aniqlash bosqichi, umuman olganda, loyihaning muvaffaqiyatsiz bo‘lishiga olib kelishi mumkin bo‘lgan hisobga olinmaslik mezonlari tizimini (to‘plamini) ishlab chiqish sifatida qaralishi mumkin.

Mezonlarning samaradorligi ularni qaror qabul qiluvchi mezonlarning ma’nosini, shuningdek, ularni amalga oshirishning muhokama qilinayotgan muammoga ta’sirini tushunadigan darajada ishlab chiqish zarurligidadir. Belgilangan har bir xatarni yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan oqibatlarni o‘rganishdan iborat bo‘lgan sifatni tahlil qilishning ikkinchi bosqichining bir qismi ushbu xususiyatning yorqin tasviridir.

Parchalanish xususiyati rahbarning oqibatlariga nisbatan afzalliklarini va noaniq baholangan hodisalar to‘g‘risidagi qarorlarini miqdoriy ifodalashga muhtoj bo‘lishida namoyon bo‘ladi. Loyiha xatarlarini tadqiq qilishda, bunday baholash, birinchi navbatda, sifatli tahlilning ikkinchi bosqichi ikkinchi qismining ekvivalenti - aniqlangan har bir xatarning mumkin bo‘lgan amalga oshirilishining “bahosi” bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

Ikkinchidan, bunday baho sifatida, bir nechta mezonlardan (*n*) foydalanilganda, loyiha samaradorligini baholash mezonlari tizimidan foydalangan holda loyiha xatarlarini tahlil qilishda yuzaga keladigan *n*-o‘lchovli imtiyoz funksiyasini tuzish kerak.

Mezonlar tizimi ortiqcha emaslik xususiyatini hisobga olgan holda shakllantirilishi kerak, ya'ni har bir mezon bir xil jihatlarni ko'rib chiqishni takrorlamasligi uchun o'ziga xos "o'ziga xos" bo'lishi kerak. Shu ma'noda, tavakkalchiliklarni tahlil qilishning miqdoriy jihatlari bo'yicha loyihalarning samaradorligini baholash mezonlaridan foydalanish ushbu xususiyatga to'liq mos keladi.

Bu xususiyat, parchalanish xususiyati bilan birgalikda, ularning har birida kamroq miqdordagi mezonlardan foydalanish uchun muammolarning mumkin bo'lgan parchalanishi to'g'risida xulosaga keladi. Mezonlarning taklif etilayotgan xususiyatlari mezonning ahamiyatini (yoki uning "miqdori", ahamiyatini) aniqlash tartibini ishlab chiqish zarurligiga olib keladi. Mezonlarning ahamiyatini baholash usullarining aksariyati ekspertlar yoki qaror qabul qiluvchilar tomonidan mezonlarning "miqdori" ni baholashning turli usullariga asoslangan. Ko'pincha, bunday baho mutaxassisning shu kabi holatlardagi tajribasi va uning bilimlariga asoslanadi; kamroq hollarda, bunga qo'shimcha ravishda, vaziyatni tanqidiy tahlil qilish, nazorat harakatlarisiz obyekt dinamikasini o'rganish qo'llaniladi. Ekspertning g'oyalari asosida nafaqat mezonlarning ahamiyati, balki obyektning kerakli holati ham belgilanadi va tegishli choralarni ko'rmaslik natijasida yuzaga kelishi mumkin bo'lgan xavf baholanadi. Boshqacha qilib aytganda, xatarlarni sifatli tahlil qilish ekspert tizimlariga nisbatan loyqa to'plamlarning o'rganilayotgan printsiplariga eng mos keladi.

Keyingi muhim savol - bu yechimlar variantlarini baholash zarurati.

Eng mashhurlaridan biri bu ierarxiya usuli. Ushbu usulni tavakkalchiliklarni tahlil qilishda qo'llashning amaliy namunasi tanish bo'lgan "qarorlar daraxti" dir. Har qanday tizim, shu jumladan, iqtisodiy tizim, bir-biri bilan chambarchas bog'liq bo'lgan uning tuzilishi va funksiyalari nuqtai nazaridan ko'rib chiqilishi kerak: tizim tuzilishi asosida uning funksiyalari tahlil qilinishi mumkin va tizimning ishlash jarayoni tizim uning tuzilishini o'zgartirishi mumkin.

Iyerarxiya - bu tizim tuzilishining mavhum modeli bo'lib, uning asosiy maqsadi tizim elementlari (tarkibiy qismlari) ning funksional o‘zaro ta’sirini va ularning umuman tizimga ta’sirini o‘rganishdir. Shunday qilib, iyerarxik tipdagi tizimlarning xususiyati bu tizim elementlarini bir-biriga bog‘langan to‘plamlarga birlashtirish qobiliyatidir. Iyerarxiyaning har bir guruhi elementlari (daraja, klaster deb ataladi) boshqa guruh elementlari bilan o‘zaro aloqada, lekin mustaqil.

Mumkin yechimlarni baholashning yana bir usuli - bu qaror qabul qiluvchilarning afzalliklari funksiyalari usuli, bu asosiy o‘lchov kontseptsiyasidan foydalanadi, bu mezonlarni aniq jismoniy ma’noga ega parametrlar bilan bog‘laydi, masalan, atrof-muhit ifloslanish darajasi asosiy o‘lchov (9.3-rasm).

Shkala ustidagi sonli parametrlar atrof-muhitning ifloslanish darajasini aks ettiradi va shkaladan pastdagi lingvistik o‘zgaruvchilar mezon baholari hisoblanadi. O‘lchov diapazoni, uning ko‘lami va lingvistik o‘zgaruvchilar soni (ball) har qanday bo‘lishi mumkin.

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6

toza	Kam ifloslangan	Ifloslangan	Juda iflaslangan	Favqulotda ifloslangan

9.3-rasm

Asosiy bo‘shliq asosiy shkaladan to‘g‘ridan-to‘g‘ri mahsulotidan foydalangan holda hosil bo‘ladi. Asosiy bo‘shliqda tayanch o‘lchovlari asosida qurilgan afzallik funksiyasi odatda raqamlar o‘q’ga muqobil to‘plamlarni xaritalash shaklida bo‘ladi. Shunday qilib, har bir muqobil uchun imtiyozli funksiya raqamni belgilaydi (muqobilni baholash), ekvivalent raqamlar ekvivalent muqobillarga (afzallik funksiyasining qiymatlari) mos keladi va har ikkala tengsiz muqobildan kattaroq raqam eng yaxshisiga beriladi. Boshqacha qilib aytganda, chiziqli yoki chiziqsiz tushirilishi mumkin bo‘lgan yechimlarni ko‘p mezonli baholash zarur, bu esa to‘plamning har bir elementiga uni taxmin qiladigan sonni yozishmalarini kiritish imkonini beradi. Bunday baho imtiyozli funksiyalar yordamida amalga oshiriladi, uning afzalliklari turli omillarning o‘zaro ta’sirini hisobga olgan holda lingvistik o‘zgaruvchilardan keng foydalanish va turli qaror qabul qiluvchilarning qarorlarini muvofiqlashtirishda rasmiy usullarni qo‘llash imkoniyatlarini o‘z ichiga oladi.

Afzallik funksiyalarini yaratish juda qiyin vazifadir, ammo qaror qabul qilish variantlarini baholash qaror qabul qiluvchilarning afzallik munosabatlaridan foydalangan holda mumkin. Qaror qabul qiluvchilarning afzallik munosabatlaridan foydalanadigan va tenglik, afzallik va muhim imtiyozli munosabatlarni aniqlash uchun kelishuv, kelishmovchilik va chegara funksiyalarini joriy qiladigan reyting usullari juda ko‘p. Taqqoslangan moslamalarni chiziqli tartiblash uchun skalar mezon va konvolyutsiya usullaridan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Chiziqli bo‘lmagan buyurtma Pareto reytingi yordamida amalga oshirilishi mumkin, shu asosda obyektlar guruhdagi barcha obyektlar teng degan taxmin asosida guruhlarga ajratiladi.

Ushbu yondashuvning asosiy afzalligi bitta emas, balki bir nechta ko‘rsatkichlardan foydalanishdir.

Pareto tanlov qoidasi quyidagicha. Agar *li* obyekti kamida bitta ko‘rsatkich bo‘yicha l_k obektining bahosidan oshib ketgan bo‘lsa va boshqa barcha korsatkichlarda bu undan yomon bo‘lmasa, *li* obyekti l_k obyekti uchun qat’iyan afzaldir.

Pareto qoidasidan foydalanish ba’zi bir taqqoslanmaydigan va taxmin qilinadigan ekvivalent obyektlarni bir guruhga birlashtirishga imkon beradi, shuningdek, ushbu guruhga bizning reytingimizga kiritilmagan ma’lum algoritm bo‘yicha guruh darajasini belgilaydigan raqamni tayinlash va quyidagi nisbatni hisobga oling: son qancha kichik bo‘lsa, obyektlarning daraja guruhlari shunchalik yuqori bo‘ladi. Mumkin bo‘lgan yechimlarni, shuningdek, guruh tartibida emas, balki chiziqli asoslangan, lekin qaror qabul qiluvchidan katta miqdordagi ma’lumotni talab qiladigan qismli chiziqli yaqinlashish usuli asosida baholash mumkin. Ushbu usul obyektlar holati to‘g‘risida qaror qabul qiladigan shaxs tomonidan tasniflash muammosini sifatli va/yoki miqdoriy xususiyatlar to‘plami asosida hal qilishni amalga oshiradi.

9.4. Loyihaviy risklarni tahlil qilishda noaniq to‘plamlarni qo‘llash

naoaniq to‘plamlar nazariyasini noaniq xatarlarini tahlil qilish muammolariga bevosita tatbiq etishga to‘xtalamiz. Investitsiya loyihasi – bu iqtisodiy tizimning quyi tizimi sifatida qaraladigan firmaning modeli, deb taxmin qilaylik. Bundan tashqari, loyihaning chiqish parametrlarining uning kirish parametrlariga bog‘liqligini tavsiflovchi model mavjud.

Loyihaning tashqi parametrlari bir necha usullar bilan baholanishi mumkin bo‘lgan makro va mikroiqtisodiy bo‘linadi:

- statistik usullar;
- iqtisodiy va matematik modellarni yaratish usullari;
- ekspert usullari;
- ssenariy yozish usullari.

Yuqorida aytib o‘tilganidek, investitsiya loyihasi tavakkalchiliklarini baholash uchun statistik usullardan foydalanishga har bir investitsiya loyihaning o‘ziga xosligi sababli statistik ma’lumotlarning yetishmasligi yoki ba’zi parametrlar uchun tanlangan hajmning kichikligi bilan bog‘liq sabablar to‘sqinlik qiladi. Bundan tashqari, ushbu usullardan foydalangan holda tashqi sharoitlarning o‘zgarishi natijasida yuzaga keladigan parametrlarning xatti-harakatlarini taxmin qilish mumkin emas, chunki statistik usullardan foydalanishning asosiy sharti tashqi sharoitlarning o‘zgarmasligidir. Hozirgi vaqtda iqtisodiy va matematik modellar ekspert baholash uslubining aniqligidan sezilarli darajada oshadigan aniqlikni ta’minlay olmaydi, ammo ulardan foydalanish ikkinchisiga qaraganda ancha qimmat.

Yuqorida aytilganlar investitsiyalarni loyihalashda ekspert baholari va stsenariylarni tahlil qilish usullarining ommabopligini tushuntiradi, ammo ushbu uslublar doirasida an’anaviy matematik yondashuvlardan foydalanish ulardan foydalanish samaradorligini sezilarli darajada pasaytiradi. Shuni inobatga olgan holda biz ushbu muammoga an’anaviy iqtisodiy yondashuvlarning nomuvofiqligini yanada ko‘rib chiqamiz va uni hal qilish uchun loyqa to‘plamlardan foydalanish imkoniyatini asoslaymiz.

Investitsiyalarni baholash muammosini hal qilish uchun u yoki bu matematik apparatdan foydalanishga yaroqliligini quyidagi mezonlar asosida baholash mumkin. Birinchidan, ushbu apparatni qo‘llash ushbu modelga qat’iy kiritilgan va ekspert baholariga bog‘liq bo‘lmagan minimal sonli apriori taxminlarni o‘z ichiga olishi kerak; ikkinchidan, apparat mutaxassisdan ongli va ong osti darajalarida ega bo‘lgan maksimal ma’lumotni “chiqarib olish” imkoniyatini yaratishi kerak; uchinchidan, mutaxassisdan ma’lumot olish tartibi respondent uchun imkon qadar sodda va tushunarli bo‘lishi kerak; to‘rtinchidan, matematik apparat kompyuterda tezkor hisob-kitoblarni amalga oshirishni osonlashtirishi kerak; beshinchidan, vaziyatni rivojlantirish uchun imkon qadar ko‘proq stsenariylarni ko‘rib chiqishga imkon berishi kerak.

Eslatib o‘tamiz, ekspert baholash usuli, odatda, qo‘yilgan vazifaga etarli bo‘lmagan aksiomalar tizimiga asoslangan an’anaviy ehtimollar nazariyasi asosida qo‘llaniladi. Ushbu nazariya hodisa ehtimoli chastotali talqini bilan tavsiflanadi: biz ma’lum bir tajribaning natijasi qanday bo‘lishini bilmaymiz, ammo biz bu mumkin bo‘lgan natijalar to‘plamida u yoki bu natijaning ulushi qanchaligini bilamiz. doimiy boshlang‘ich sharoitida bir necha bor o‘tkazilgan tajriba.

Agar tashqi sharoit doimo o‘zgarib tursa va tajriba bir marta o‘tkazilsa, bu yondashuv katta qiyinchiliklarga duch kelishi aniq. Shuning uchun, ma’lum bir voqea ehtimolini baholash uchun mutaxassisni so‘rash, umuman aytganda, noto‘g‘ri. Bundan tashqari, ehtimollar nazariyasida tasodifiy o‘zgaruvchilar ba’zi “yaxshi” taqsimotlarga (odatda Gauss taqsimotiga) taqsimlanadi deb taxmin qilinadi. Bunday holda, hisob-kitoblar juda soddalashtirilgan. Ushbu taxmin, masalan, fizik jarayonlarni modellashtirishda (mavjud teoremalar asosida) asossiz emas, ammo iqtisodiyotda bu mutlaqo asossizdir. Bundan tashqari, ko‘plab o‘yinchilar va juda ko‘p bitimlar mavjud bo‘lgan moliyaviy bozorlarda ham tasodifiy o‘zgaruvchilar Gauss taqsimotiga bo‘ysunmaydi. Shuning uchun, masalan, ekspertdan tasodifiy o‘zgaruvchining o‘rtacha va o‘rtacha og‘ishini baholash so‘ralsa, bu kamida uchta sababga ko‘ra noto‘g‘ri: birinchi navbatda, tabiat to‘g‘risida mutlaqo asossiz va aksariyat hollarda umuman noto‘g‘ri taxmin tasodifiy o‘zgaruvchining taqsimlanishi amalga oshiriladi; ikkinchidan, mutaxassis inson nuqtai nazaridan tushunish qiyin bo‘lgan parametrlarni baholashi kerak bo‘lgan holatga qo‘yiladi; uchinchidan, mutaxassis hech bo‘lmaganda ong osti darajasida bo‘lishi mumkin bo‘lgan boshqa ma’lumotlar (masalan, tarqatishning asl mohiyati to‘g‘risida) shunchaki e’tibordan chetda qolmaydi.

Noaniq to‘plamlar apparatlaridan foydalanganda mutaxassis taxmin qilinadigan miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari haqidagi g‘oyalarini qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plamining xarakterli funksiyasini belgilash nuqtai nazaridan rasmiylashtirishi kerak. Bunday holda, u, uning fikriga ko‘ra, taxminiy qiymat qabul qila olmaydigan qiymatlar to‘plamini ko‘rsatishi kerak (ular uchun xarakterli funksiya 0 ga teng) va keyin mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plamini tartiblashi kerak iloji boricha. Agar mumkin bo‘lgan qiymatlar to‘plami diskret va cheklangan bo‘lsa, unda mutaxassis minimal (*n-1*) taqqoslashni va maksimal $\frac{(n-1)}{2}n$ taqqoslashni talab qiladi, bu esa foydalanilganidan sezilarli darajada kam an’anaviy ehtimollik nazariyasi qo‘llanilganidan.

Loyihaning barcha parametrlarini baholashdan so‘ng, quyidagi formula bo‘yicha loyihaning chiqish parametrlari taqsimotini hisoblash mumkin:

$$\mu_f(s) = \underset{t_1,\dots t_m : f(t_1,\dots t_m)=s}{Sup} (\min(\mu_{x_1}(t_1),\dots,\mu_{x_m}(t_m)))$$

bu erda $\mu_a(b)$- noaniq qiymat *a* ning *b* qiymatga ega bo‘lish ehtimoli; $f(t_1,\dots,\ t_m)$ - chiqish parametrining kirishga bog‘liq bo‘lgan funktsional bog‘liqligi, bu biz uchun faraz bilan ma’lum.

Xatarlarni tahlil qilish uchun noaniq to‘plam usulidan foydalanish sxematik ravishda quyidagi bosqichlar ketma-ketligini aks ettirishi mumkin:

• e’tiborga olinadigan xususiyatlarni (omillarni) aniqlash;

• ushbu xususiyatlarni tortish qoidalarini aniqlash (og‘zaki (lingvistik) o‘zgaruvchilarni - sonli qiymatlarga ega bo‘lgan omillarni – a’zolik funksiyalarini bog‘lash);

• reytingni kompyuterda hisoblash va afzallik darajasini aniqlash (reyting);

• loyihaning xavfliligi to‘g‘risida qaror qabul qilish.

Tanlangan mezon tizimiga asoslanib, taklif qilingan yondashuvni baholaylik. Noaniq matematikaning o‘ziga xos xususiyatlaridan kelib chiqqan holda, ushbu yondashuv mutaxassisning fikriga bog‘liq bo‘lmagan priori ma’lumotlardan amalda foydalanmaydi. Boshqa tomondan, mutaxassisdan ma’lumot olish tartibi juda sodda va uning ixtiyoridagi barcha ma’lumotlardan tabiiy usulda foydalanishga imkon beradi. Kompyuter hisoblashlari nuqtai nazaridan tavsiflangan yondashuv ajoyib xususiyatga ega: hisob-kitoblarning murakkabligi o‘ziga xos taqsimot turiga zaif bog‘liq bo‘lib, bu haqiqatni ataylab soddalashtirishdan voz kechishga imkon beradi. Bundan tashqari, taklif qilingan yondashuv tashqi parametrlarning o‘zaro bog‘liqligini hisobga olishga imkon beradi: buning uchun ularning birgalikda taqsimlanishini qurish kerak.

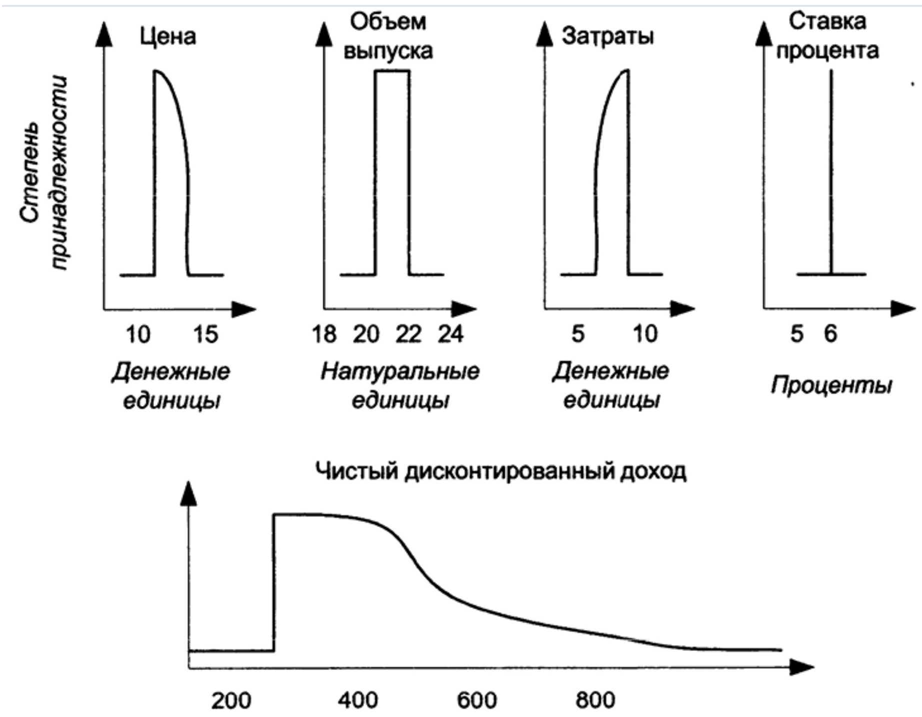
Bunday qurilish protsedurasining murakkabligi bir o‘lchovli taqsimotni qurish protsedurasining murakkabligidan sezilarli darajada oshmaydi. Tavsiya etilgan usulning eng muhim afzalliklaridan biri shundaki, u barcha mumkin bo‘lgan stsenariylarni hisobga oladi va chiqish parametrining har bir qiymati uchun unga erishish imkoniyatini hisoblab chiqadi. Shunday qilib, ushbu yondashuv muqobil yondashuvlarning barcha afzalliklarini birlashtiradi va shu bilan birga ularning kamchiliklaridan xoli bo‘ladi.

Taklif qilingan yondashuvni amaliy amalga oshirish uchun quyidagi oddiy algoritm mumkin. Birinchi bosqichda ekspert (yoki mutaxassislar guruhi) loyihaning kirish parametrlarining xarakterli funksiyalarini tuzadi. Noaniq miqdordagi xarakterli funksiyani qurish algoritmi an’anaviy ravishda 9.4-rasm.

9.1-rasm

Taklif qilingan algoritmni batafsilroq tavsiflab beramiz: ekspert noaniq miqdorning qiymatini bitta bo‘lishi mumkin bo‘lgan oraliqni aniqlaydi, ya’ni nima bo‘lganda ham. Bundan tashqari, faqat shu oraliqda xarakterli funksiya aniq tahlil vazifalari nuqtai nazaridan mantiqiy bo‘ladi, masalan, NPV> 0, deb taxmin qilinadi, shunda mutaxassis xarakteristik funksiya qiymatini optimistik va pessimistik stsenariylar asosida aniqlaydi. Ushbu qiymatlarning imkoniyati 0,5 ga teng deb hisoblanadi. Agar loyihaning jozibadorligi qiymatning o‘sishi bilan ortib borsa, yuqori qiymat optimistik stsenariyga to‘g‘ri keladi, aks holda - aksincha. Oxir-oqibat, mutaxassis taxmin qilingan qiymatning qiymati bo‘lishi mumkin bo‘lgan oraliq chegaralarini aniqlaydi va u bu oraliqning biron bir nuqtasini boshqasidan afzal ko‘rishi mumkin emas, chunki ular teng ravishda afzaldir. Ushbu intervalning barcha nuqtalariga bittaga teng imkoniyat beriladi.

Shundan so‘ng, kirish parametrlarining xarakterli funksiyalari asosida va yuqoridagi formuladan foydalanib, loyihaning chiqish xususiyatlari hisoblab chiqiladi. Natijalar qaror qabul qiluvchiga loyqa to‘plam shaklida taqdim etiladi va quyidagicha talqin qilinishi mumkin: chiqish parametrining xarakteristik funksiyasining nolga teng bo‘lmagan maksimal qiymati, masalan, foyda, bu foyda olishning mumkin bo‘lgan eng katta qiymati va minimal - kafolatlangan minimal foyda; Imkoniyati 0,5 ga teng bo‘lgan yuqori qiymat optimizm stsenariysi bo‘yicha foyda, kichik qiymati pessimistik stsenariy bo‘yicha, xarakteristikaning maksimal darajasiga mos keladigan qiymatlar esa mumkin bo‘lgan foyda. Tavsiya etilgan yondashuvni amaliy amalga oshirish turli xil dasturiy vositalardan, masalan, Mat Lab dasturlash muhiti yordamida amalga oshiriladi.



9.2-rasm

Noaniq to‘plamlar shaklida berilgan parametr qiymatlari bilan investitsiya loyihalarini hisoblashning asosiy imkoniyati 9.2-rasm. Bu MatLab dasturlash muhiti yordamida investitsiya loyihasining soddalashtirilgan modelining NPV-ni hisoblash natijalarini ko‘rsatadi.

Yuqoridagi raqamlarda birlik narxi, sotish hajmi, birlik tannarxi va foiz stavkasini tavsiflovchi noaniq to‘plamlar ko‘rsatilgan. Tegishli noaniq to‘plamlar parametrlarning namoyish etilishi turi bo‘yicha barcha imkoniyatlar to‘plamini grafik tarzda namoyish etadigan tarzda tanlanadi: loyqa to‘plam, loyqa o‘ng chegarasi bilan, o‘ng va chap chegaralari bilan aniq, chap tomoni bilan chegara va to‘liq aniq to‘plam. 9.4-rasm (pastki rasmga qarang) loyihaning NPV-ni besh yillik davrini tavsiflovchi noaniq to‘plamni ko‘rsatadi.

Noaniq matematika apparatlaridan foydalangan holda, shuningdek, ancha murakkab masalalarni, masalan, ayrim loyihalar ba’zi ko‘rsatkichlar bo‘yicha, boshqalari esa boshqa loyihalarda ustunlikka ega bo‘lgan taqdirda investitsiya loyihalarini tartiblashtirish muammosini hal qilish mumkin; bundan tashqari, biz ko‘rsatkichlarning afzallik tartibini bilamiz. Bundan tashqari, ushbu uslubni yanada rivojlantirish va undan amaliy foydalanish, aftidan, investitsiyalar samaradorligini baholashning yangi metodologiyasini ishlab chiqish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

Nazorat savollari va topshiriqlar

1. Noaniqlikning namoyon bo‘lishining mumkin bo‘lgan shakllarini sanab o‘ting.
2. A’zolik funksiyasi nimani aks ettiradi?
3. Noaniq mantiqiy yondashuvlardan foydalangan holda noaniq xavfini o‘rganish algoritmini aytib bering.
4. Lingvistik o‘zgaruvchiga ta’rif bering.
5. Noaniq to‘plamlar bilan qanday operatsiyalarni bajarish mumkin?
6. Qaysi shkala mezon deb ataladi?
7. Pareto tanlov qoidasi qanday?
8. Investitsiyalar samaradorligini baholash uchun har qanday matematik apparatdan foydalanishga yaroqliligini baholash mezonlarini sanab o‘ting.
9. Loyiha xavfini tahlil qilishda noaniq to‘plamlar usulidan foydalanish sxemasi qanday?
10. Noaniq miqdordagi xarakterli funksiyani qurish algoritmini tushuntiring.

GLOSSARIY

Additiv model – bu komponentlari bir-biriga qo‘shiladigan model.

Arifmetik o‘rtacha – bu to‘plamdagi barcha sonlar yig‘indisining ushbu sonlar miqdoriga bo‘lish orqali topiladi

Asimmetriklik – mazkur tasodifiy miqdor taqsimotining assimetrikligini (simmetrik bo‘lmaganligini) ifodalovchi miqdor.

Avtokorrelyatsiya – bu qatorlar korrelyatsiyasidir, ya’ni vaqt va makonda tartiblashtirilgan ko‘rsatkichlar o‘rtasidagi korrelyatsiyadir.

Belgilar to‘plami (1 dan 10 gacha raqamlangan) – bu tanlangan funksiyalarga tezda kirishni ta’minlaydigan bo‘lim.

Bir vaqtli tenglamalar tizimi – tenglamalar tizimi ko‘rinishidagi ekonometrik modellardir.

Birinchi turdagi xatolar – bu axborotlarni yig‘ish, qayta ishlash va uzatishdagi texnik xatolardir.

Bitta tenglamali regression modellar – bu ikki o‘zgaruvchi asosida tuziladigan madellardir.

Chiquvchi ma’lumotlar – bu ishlab chiqarish natijalari (tayyor mahsulot hajmi, uning tarkibi, sifati) bo‘yicha ma’lumotlardir.

Determinatsiya koeffitsienti – bu natijaviy ko‘rsatkich necha foizga modelga kiritilgan o‘zgaruvchilar asosida tushuntirilishini (bog‘liqligini) ifodalovchi ko‘rsatkich.

Determinatsiya koeffitsienti - bu natijaviy omil y necha foizga modelga kiritilgan omillarga bog‘liqligini ko‘rsatuvchi koeffitsientdir.

Dinamik qator – ketma-ket (xronologik tartibda) joylashgan statistik ko‘rsatkichlar qatori, ularning o‘zgarishi o‘rganilayotgan hodisaning ma’lum bir rivojlanish tendentsiyasiga egaligini ko‘rsatadi.

Dinamik qator – lag tashkil etuvchisini o‘z ichiga oluvchi qator.

Dinamik qator (dinamika qatori) – bu boshqa ko‘rsatkichning ketma-ket ortib boruvchi yoki kamayuvchi qiymatlariga qarab tartiblangan bir ko‘rsatkich (xususiyat) ning kuzatuvlar ketma-ketligidir.

Ekonometrik model – bu ehtimolli-stoxastik model.

Ekonometrik modellarni parametrlashtirish – bu modelning noma’lum parametrlarini topish jarayonidir.

Eksponentsial tekislash usuli – vaqtli qatorlarni tekislash va prognozlashning eng samarali usuli.

Ekstsess – bu tasodifiy o‘zgaruvchining taqsimlanish cho‘qqisi o‘tkirligining o‘lchovidir.

Elektron javdal – bu jadval ko‘rinishida taqdim etilgan ma’lumotlarni saqlash va qayta ishlash uchun mo‘ljallangan, ya’ni bu qatorlar va ustunlardan iborat bo‘lgan ikki o‘lchovli massivlardir.

Eng kichik kvadratlar usuli – bu regressiya tenglamasi parametrlarining sifatli baholarini olish uchun foydalaniladigan usul.

Eng kichik kvadratlar usuli – bu vaqtli qatorlarni tekislash usuli bo‘lib, natijaviy ko‘rsatkichning haqiqiy qiymati va hisoblangan qiymati o‘rtasidagi farqning kvadrati yig‘indisi eng minimum bo‘lishini ta’minlaydigan hisoblash usulidir.

Gauss-Markov shartlari – bu eng kichik kvadratlar usulining bajarilishini nazorat qiluvchi shartlardir.

Geteroskedastlik – bu qoldiqlar dispersiyasi o‘zgaruvchanligidir.

Gomoskedastlik – bu qoldiqlar dispersiyasi doimiyligidir.

Identifikatsiya – bu izlanayotgan noma’lum o‘zgaruvchilar qaysi, qanday maqsadni ko‘zda tutadi, natija nimalarga olib keladi kabi savollarga javob beruvchi jarayon.

Ikkinchi turdagi xatolar – bu anomal darajalar epizodik tarzda harakat qiladigan obyektiv xarakterda bo‘lgan omillar ta’siri tufayli yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan xatolar.

Interval (variatsiya qulochi) – tanlamadagi maksimal va minimal qiymatlar o‘rtasidagi farq.

Iqtisodiy model – iqtisodiy obyektlarning soddalashtirilgan nusxasidir.

Iqtisodiy-matematik usullar fanini o‘rganish jarayoni – bu iqtisodiyot, iqtisodiy jarayonlarning matematik modellarini tuzish jarayonidir.

Irvin mezoni – bu vaqtli qatorning anomal qiymatlarini aniqlash mezonidir.

Keng ma’noda model – biror obyektni yoki obyektlar sistemasini namunasidir.

Kiritiladigan ma’lumot – bu moddiy resurslar xarajatining ko‘lami va tarkibi (xomashyo, asosiy fondlar, ishchi kuchi va boshqalar) bo‘yicha ma’lumotlardir.

Ko‘p omilli ekonometrik model – bu bitta natijaviy ko‘rsatkich va unga ta’sir etuvchi bir necha o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘lanishni ko‘rsatuvchi funksiyadir.

Ko‘p omilli ekonometrik model – bu natijaviy ko‘rsatkich (omil - Y) bir qator ta’sir etuvchi omillarning (o‘zgaruvchilarning) funksiyasi hisoblanadi ($y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Ko‘rsatkich darajalari davrini uzaytirish usuli – ketma-ket joylashgan qator darajalari teng sonda olib qo‘shiladi, natijada uzunroq davrlarga tegishli darajalardan tuzilgan yangi ixchamlashgan qator hosil bo‘ladi.

Korrelyatsion matritsa – bu modelga kiritiladigan o‘zgaruvchilar o‘rtasida bog‘lanish zichligi koeffitsientlarini ko‘rsatuvchi matritsa.

Ma’lumotlar – bu inson tomonidan qabul qilingan faktlar, hodisalar, xabarlar, o‘lchab bo‘ladigan xususiyatlar, qayd qilingan signallar.

Ma’lumotlar tahlili – bu qaror qabul qilish uchun avvaldan tashkil etilgan ma’lumotlardan axborot olish usullari va vositalari to‘plamidir.

Ma’lumotlarning etishmasligi – bu zarur va aniq axborotlarning mavjud emasligidir.

Markaziy muammo – modelni tuzish va real iqtisodiy jarayonlarni tavsiflash, tahlil qilish va prognozlashda undan foydalanish imkoniyatlarini aniqlashdan iborat.

Mavsumiy tebranishlar – bu tabiiy va iqlim sharoitlarining iqtisodiy ko‘rsatkichga ta’siri oqibatida bir yil muddatga ega bo‘lgan tebranishlardir.

Mavsumiylik deganda – tabiiy omillar ta’siridan kelib chiqqan holda yil davomida ishlab chiqarishning cheklangan vaqti tushuniladi.

Mediana – bu variatsion qatorni teng ikkiga bo‘luvchi belgidir

Moda – bu tanlama yoki variatsion qatorda eng ko‘p uchraydigan belgi yoki variantadir.

Model – lotincha *modulus* so‘zidan olingan bo‘lib, o‘lchov, me’yor degan ma’noni anglatadi.

Moment (oniy) – bu vaqtdagi ma’lum nuqtalar bilan bog‘liq iqtisodiy ko‘rsatkichning qiymatlari o‘rnatilgan vaqtli qatorlardir.

Multiplikativ model – bu komponentlari bir-biriga ko‘paytiriladigan model.

Normal tenglamalar tizimi – bu ekonometrik modeldagi noma’lum parametrlarni aniqlash uchun tuzilgan tenglamalar tizimidir.

O‘rtacha sirg‘aluvchi usul – bu qator darajalarini birin-ketin ma’lum tartibda surish yo‘li bilan hisoblangan o‘rtacha darajadir

O‘zgaruvchilar (jarayonlar) ro‘yxati – bu to‘plamdagi ochiq ma’lumotlar o‘zgaruvchilarining nomi va izohi ro‘yxatini o‘z ichiga olgan bo‘lim.

Operatsion tizim imkoniyatlarini kengaytiruvchi amaliy dasturiy paketlar – har xil konfiguratsiyadagi kompyuterlarning ishlashini ta’minlaydi.

Panel ma’lumotlar (panel data) – bu bir necha obyektni xarakterlovchi turli davrlardagi faoliyati bo‘yicha ma’lumotlar to‘plami.

Qo‘zg‘alish manfiy bo‘lsa, u holda baholangan standart xatolar zarur bo‘lganidan ko‘ra kichik bo‘ladilar, tekshirish mezonlari esa - haqiqatdagidan ham katta bo‘ladi.

Qo‘zg‘alish musbat bo‘lsa, u holda baholangan standart xatolar zarur bo‘lganidan ko‘ra katta bo‘ladilar, tekshirish mezonlari esa - haqiqatdagidan ham kichik bo‘ladi.

Qoldiq komponent – buvaqtli qatordan muntazam komponentlar ajratib olingandan keyin qoladigan tarkibiy qismidir.

Qoldiqlarni grafiklar yordamida tahlil qilish – bu geteroskedastlikni aniqlashning eng samarali vizual usulidir.

***r*-qiymat** – bu ekonometrik modeldagi parametrlarning ishonchliligini ko‘rsatuvchi qiymatdir.

Spetsifikatsiyalash – bu ekonometrik model tuzish uchun iqtisodiy muammoni qo‘yilishidir.

Spirmenning ranglar korrelyatsiyasi testi – ta’sir etuvchi o‘zgaruvchining qiymatlari ortib borishi bilan chetlanishlar dispersiyasi yoki ortib boradi, yoki kamayib borishini aniqlashda foydalaniladigan test.

Standart chetlanish (o‘rtacha kvadratik chetlanish, standart tarqalish) – bu tasodifiy miqdor qiymatlarining uning (o‘zining) matematik kutilishiga nisbatan tarqalish ko‘rsatkichidir

Standart xatolik – bu tanlama o‘rtachaning standart (o‘rtacha kvadratik) chetlanishini xarakterlaydigan miqdorga aytiladi.

Statistik modellar – bu statistikada foydalaniladigan statistik modellardir.

Statistik yoki fazoviy (cross section data) ma’lumotlar – bu turli obyektlar bo‘yicha vaqtning aniq bir davrida olingan ma’lumotlar.

Tanlama dispersiyasi – bu dastlabki tanlama ma’lumotlari asosida hisoblangan taqsimotning nazariy dispersiyasi bahosi.

Tenglamalar tizimi ko‘rinishidagi ekonometrik model – bu tengsizliklar va regression tenglamalar tizimidan iborat bo‘lgan model.

Tenglamalar tizimining aniqlovchisi – bu noma’lumlar oldida turgan koeffitsientlardan tuzilgan aniqlovchidir.

Trend – bu vaqt bo‘yicha qatorning barqaror tendentsiyasi bo‘lib, ma’lum miqdorda tasodifiy tebranishlar ta’siridan ozoddir.

Trend – iqtisodiy jarayon rivojlanishining umumiy yo‘nalishini belgilab beruvchi ko‘rsatkich.

Trend modeli – o‘rganilayotgan iqtisodiy tizimning rivojlanishi, uning asosiy ko‘rsatkichlari tendentsiyasi orqali aks ettiriladigan ekonometrik modeldir.

Tsikliktebranishlar – bu bir necha yil muddatga ega bo‘lgan tebranishlardir.

Umumlashtirilgan eng kichik kvadratlar usuli (UEKKU) – tasodifiy qoldiqlarga xos bo‘lib, Gauss-Markov shartlari buzilgan hollarda qo‘llaniladi.

Umumlashtirilgan eng kichik kvadratlar usuli – o‘zgartirilgan ma’lumotlarga qo‘llaniladi va nafaqat qo‘zg‘almas xususiyatga ega bo‘lgan, balki tanlama dispersiyasi kichikroq bo‘lgan baholarni olishga ham imkon beradi.

Vaqtli qator – vaqt bo‘yicha ketma-ket tartibda joylashgan sonli ko‘rsatkichlar qatori bo‘lib, ular hodisa yoki jarayonning holati darajasi va o‘zgarishini xarakterlaydi.

Vaqtli qator – vaqt bo‘yicha ko‘rsatkich qiymatlari tartiblangan dinamik ketma-ketlik.

Vaqtli qatorlar ko‘rinishidagi ekonometrik model – bu natijaviy ko‘rsatkich (omil - Y) vaqt omilining (o‘zgaruvchisining) yoki vaqtning boshqa momentlariga xos funksiya hisoblanadi ($y = f(t)$).

Vaqtli qatorlar modellari – ma’lum bir ko‘rsatkichning vaqtga bog‘liq modelidir.

Vaqtli qatorning asosiy elementlari – vaqt ko‘rsatkichi (t) va qator darajasi (y) dan iborat.

Vaqtli yoki dinamik qatorlar (time series data) ko‘rinishidagi ma’lumotlar – bu bitta obyektni xarakterlovchi turli davrlardagi faoliyati bo‘yicha ma’lumotlar to‘plami.

Verifikatsiya – bu tuzilgan modelning ahamiyatini tekshirish jarayonidir.

Vizualizatsiya – bazaga kiritilgan ma’lumotlar asosida turli grafiklarni aks ettirish jarayoni.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Greene, W. H. (2012). Econometric Analysis, 7th Edition (Int. Edition), Essex: Pearson.
2. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов / Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 791 с.
3. Davidson, R. and MacKinnon, J. (2009). Econometric Theory and Methods, Int. Edition, New York: Oxford University Press.
4. Hayashi, F. (2000). Econometrics, New Jersey; Woodstock: Princeton University Press.
5. Johnston, J. and DiNardo, J. (1997), Econometric Methods, 4th Edition, New York: McGraw-Hill.
6. Verbeek, M. (2012). A Guide to Modern Econometrics, 4th Edition, Chichester: Wiley.
7. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika: Darslik./ A.S. Rasulov, G.M. Raimova, X.K. Sarimsakova. — T.: O‘zbekiston faylasuflari milliyjamiyati nashriyoti, 2006. -272 b.
8. Қ.Сафаева. М атематик дастурлаш. Дарслик «Ибн Сино»-2004й , 324-б.
9. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
10. www.lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
11. www.mineconomy.uz (O‘zbekiston Respublikasi Iqtisodiyot vazirligi)
12. www.mehnat.uz (O‘zbekiston Respublikasi Mehnat va aholini ijtimoiy muhofaza qilish vazirligi)
13. www.mf.uz (O‘zbekiston Respublikasi Moliya vazirligi)
14. www.stat.uz (O‘zbekiston Respublikasi Davlat statistika qo‘mitasi)
15. www.ima.uz (O‘zbekiston Respublikasi Intellektual mulk agentligi)
16. www.academy.uz (Fanlar akademiyasi)

MUNDARIJA

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

R.A. FAYZIYEV

MIQDORIY TADQIQOT TEXNIKALARI

Toshkent – «INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI» – 2021

Muharrir:	Sh.Kusherbayeva
Tex. muharrir:	A.Moydinov
Musavvir:	A.Shushunov
Musahhih:	L.Ibragimov
Kompyuterda sahifalovchi:	Sh.Muzaffarova

E-mail: nashr2019@inbox.ru Tel: +99899920-90-35
Nashr.lits. AI№009, 20.07.2018. Bosishga ruxsat etildi 09.09.2021.
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. «Timez Uz» garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 12,5. Nashriyot bosma tabog‘i 11,75.
Tiraji 50. Buyurtma № 224.

«INNOVATSION RIVOJLANISH NASHRIYOT-MATBAA UYI»
bosmaxonasida chop etildi.
100174, Toshkent sh, Olmazor tumani,
Universitet ko‘chasi, 7-uy.

INNOVATSIYA
NASHRIYOTI

ISBN 978-9943-7664-8-8
9 789943 766488