O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULIG`BEK NOMIDAGI O`ZBEKISTON
MILLIY UNIVERSITETI

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ

Universite t o`quv- uslubiy kengashi
o`quv qollanmasi sifatida tavsiya etdi

TOSHKENT – 2005

Ushbu o`quv qo`llanmada diskret matematika va matematik mantiq faniga tegishli bo`lgan asosiy tushuncha va ma'lumotlar qisqa ko`rinishda keltirilgan. Hamda, talabalar olgan bilimlarni mustahkamlash va bilim saviyalarini sinab ko`rish maqsadida test savollari taqdim etilgan.

Bu o`quv qo`llanma unversitetlarning amaliy matematika va informatika, informatika va axborot texnologiyalar bakalavriat yo`nalishlarida ta'lim olayotgan talabalarga mo`ljallangan.

Muallif: dots.M.Tuxtasinov

Ma'sul muharrir: katta o`qituvchi A.R.Mamadolimov

Taqrizchi: dots. M.Sh. Mamatov.

Muharrir: Yu.Sobirxonova

Mirzo Ulug`bek nomidagi O`zbekiston Milliy Universiteti
Ilmiy kengashining 2004 yil 29 dekabrdagi majlisida chop etishga tavsiya qilindi (4-sonli bayonnoma).

Kirish

Mazkur o`quv qo`llanma 4 qismdan iborat bo`lib, 1- qismi diskret matematikaning bul funksiyalariga, 2 - qismi $k$- qiymatli funksiyalar, 3- qismi mantiq algebrasiga va 4 - qismi na'munaviy test savollariga bag`ishlangan.

Birinchi qismida nabor tashkil etuvchi vektorlar, ularga aloqador bo`lgan asosiy tushunchalar berilgan. Xamda ikki qiymatli (bul) funksiyalari va elementar funksiyalar haqida ma'lumotlar berilib, keyin diskret matematika va matematik mantiq fanida asosiy hisoblangan formula tushunchasiga to`xtalib o`tilgan. Shundan so`ng yopiq va to`la funksiyalar tizimi hamda to`lalik haqidagi Post teoremasi keltirilgan. Bunda albatta, muhim bo`lgan 5 ta yopiq (maksimal) funksiyalar sinfi va ular bilan bog`liq bo`lgan 3 ta lemma ham eslatib o`tilgan.

Ikkinchi qismi k- qiymatli mantiqiy algebraga bag`ishlangan bo`lib, asosan elementar funksiyalar, ularning xossalari va k- qiymatli funksiyalarning DNSH, KNSH, hamda ko`phadlarga yoyish masalalari haqida to`la ma'lumotlar berilgan.

Uchinchi qismi matematik mantiq algebrasiga bag`ishlangan bo`lib, undan mulohazalar, ular ustida amallar va formulalar to`g`risida ma'lumotlar berilgan.

To`rtinchi qismi talabalar olgan bilimlarni sinab ko`rish maqsadida tuzilgan va yuqorida keltirilgan ma`lumotlarni o`z ichiga olgan testlar majmuasidan iborat.

Ushbu o`quv qo`llanmada har bir mavzudan so`ng ta'kidlab o`tilgan nazariy bilimlarni mustahkamlash maqsadida namunaviy masalalar ham tahlil qilib borilgan.

I.Bul funksiyalari va ularning asosiy xossalari

1. Ikki qiymatli vektorlar (naborlar). Hemming masofasi.

Ta'rif. Komponentlari 0 va 1 sonlaridan iborat bo`lgan $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ ko`rinishdagi vektor ikki qiymatli n- o`lchovli vektor (yoki nabor) deb ataladi va u $\tilde{\alpha}$ *yoki* $\tilde{\alpha}^n$ kabi belgilanadi.

Ta'rif. Ikkita bir xil o`lchovli $\overline{\alpha}^n$ va $\overline{\beta}^n$ naborlarning Hemming masofasi deb quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$$

natural songa aytiladi va $\rho(\overline{\alpha}^n, \overline{\beta}^n)$ kabi belgilanadi.

Masalan:, $\overline{\alpha}^3 = (0,1,1)$, $\overline{\beta}^3 = (1,0,1)$

$$\sum_{i+1}^{3} |\alpha_i - \beta_i| = |0-1| + |1-0| + |1-1| = 2,$$

demak $\rho(\overline{\alpha}^3, \overline{\beta}^3) = 2$ ekan.

Har bir $\overline{\alpha}^n$ naborga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{n-i}$ - natural sonni mos qo`yish mumkin va aksincha har bir natural songa biror $\overline{\alpha}^n$ naborni mos qo`yish mumkin. Bu natural son $\nu(\overline{\alpha}^n)$ bilan belgilanadi.

Masalan: 1) $\overline{\alpha}^4 = (1,0,1,1)$

$$\nu(\overline{\alpha}^4) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i 2^{4-i} = \alpha_1 \cdot 2^3 + \alpha_2 \cdot 2^2$$
$$+ \alpha_3 \cdot 2 + \alpha_4 =$$
$$1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 = 11$$

2) 25 sonini quyidagicha yozish mumkin

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^1 + 1$$

Shu sababli 25 soniga $\overline{\alpha}^5 = (1,1,0,0,1)$ nabor mos keladi.

2.Ikki qiymatli (bul) funksiyalar. Elementar ikki qiymatli funksiyalar

Ta'rif. Argumenti ham, qiymati ham 0 yoki 1 ni qabul qiluvchi funksiyalar ***ikki qiymatli (yoki bul) funksiyalar*** deb ataladi.

n argumentli ikki qiymatli barcha funksiyalar to`plami $P_2$ bilan belgilanadi. Ko`rsatish mumkinki, ularning soni 2^{2^n} ga teng bo`ladi.

Masalan: (x_1, x_2) o`zgaruvchili ikki qiymatli funksiyalar soni 16 ta bo`lib, ularning barchasi quyida jadval ko`rinishda keltirilgan

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Quyida ikki qiymatli elementar funksiyalar keltirilgan.

1) $f_1 = 0$ va $f_2 = 1$ funksiyalari mos ravishda *aynan 0 va 1 funksiyalari* deb ataladi. Ularning argumentlari soni ixtiyoriy sonda bo`lishi mumkin;

2) $f_3(x) = x, \quad x \in \{0,1\}$, funksiya *ayniy funksiya* deb ataladi;

3) $f_4(x) = \bar{x}$ (yoki $\neg$ x) funksiya *inkor funksiyasi* deyilib, quyidagicha aniqlanadi

x	f_4
0	1
1	0

4) $f_5(x_1, x_2)$ funksiya x_1 va x_2 yoki , $x_1 \cdot x_2$ yoki $\min(x_1, x_2)$ bo`lib, u $x_1$ va $x_2$ o`zgaruvchilarning *konyunksiyasi* deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi.

	x_2	f_5
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5) $f_6(x_1, x_2)$ funksiya , $x_1 \vee x_2$ yoki $x_1 + x_2$, yoki $\max(x_1, x_2)$ bo`lib, u $x_1$ va $x_2$ o`zgaruvchilarning *di'yunksiyasi* deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi.

x_1	x_2	f_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

6) $f_7(x_1, x_2)$ funksiya $x_1 \to x_2$ yoki $x_1 \supset x_2$ orqali belgilanib, u x_1 va x_2 o`zgaruvchilarning *implikatsiyasi* deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi

x_1	x_2	f_7
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

7) $f_8(x_1,x_2)$ funksiya $x_1 \sim x_2$, yoki $x_1 \leftrightarrow x_2$, yoki $x_1 \equiv x_2$ orqali belgilanib, u x_1 va x_2 o`zgaruvchilarning *ekvivalentligi* deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi.

x_1	x_2	f_8
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8) $f_9(x_1,x_2)$ funksiya $x_1 \oplus x_2$ orqali belgilanib, u x_1 va x_2 o`zgaruvchilarning *modul ikki bo`yicha qo`shish* deyiladi va u quyidagicha aniqlanadi.

x_1	x_2	f_9
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

9) $f_{10}(x_1,x_2)$ funksiya $x_1 \mid x_2$ orqali belgilanib, u *Sheffer shtrihi* deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi.

x_1	x_2	f_{10}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

10) $f_{11}(x_1,x_2)$ funksiya $x_1 \downarrow x_2$ orqali belgilanib, u *Pirs strelkasi* deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi.

x_1	x_2	f_{11}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Yuqoridagi elementar funksiyalarni aniqlashda $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \sim, |, \downarrow$, belgilardan foydalaniladi. Bu belgilar *mantiqiy bog'lovchilar* deb ataladi. Bunda qavsdan keyingi eng kuchli bog'lovchi inkor ($\neg$) bo'lib, undan keyingisi konyunksiya $(\wedge)$ hisoblanadi.

Bu bilan ayrim yozuvlarni qisqaroq yozish imkoni tug'iladi.

Masalan $(((\bar{x}_1) \wedge x_2) \to x_3)$ yozuvni quydagicha ifodalash mumkin. $\bar{x}_1 \wedge x_2 \to x_3$, ya'ni qavssiz.

3. Formulalar. Funksiyalarni formulalar orqali tavsifi.

Faraz qilaylik X - o'zgaruvchilar to'plami; Φ - bul funksiyalar to'plamining bir qismi bo'lsin.

Ta'rif. Φ funksiyalar to'plami yordamida qurilgan formula deb quyidagicha aniqlangan ifodalarga aytiladi:

1) Φ to'plamini tashkil etgan ixtiyoriy funksiya va X dagi o'zgaruvchilar;

2) agar $f_1, f_2, \ldots, f_s$ lar Φ funksiyalar to'plami yordamida qurilgan formula bo'lib, $f_0 \in \Phi$ s-o'zgaruvchili funksiya bo'lsa, $f_0(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ ga.

Agar biror U formulani qurish uchun $f_1, f_2, \ldots, f_s$ funksiyalardan foydalanilgan bo'lsa, buni ta'kidlash ma'nosida

$$U[f_1, f_2, \ldots, f_s]$$

deb yoziladi.

Odatda mantiqiy bog'lovchi sifatida

$$\Omega = \{\neg, \wedge, \vee, \oplus, \sim, \to, |, \downarrow,\}$$

belgilar ishlatiladi. Shu sababli quyidagi ta'rifni kiritamiz.

Ta'rif. Ω mantiqiy bog'lovchilar yordamida qurilgan formula deb quyida aniqlangan ixtiyoriy ifodaga aytiladi:

1) X dan olingan ixtiyoriy - o'zgaruvchiga ;

2) Agar - U, V formula bo'lsa,

$$\begin{matrix} \neg U,\ U \wedge V,\ U \vee V,\ U \oplus V,\ U \sim V, \\ U \to V,\ U | V,\ U \downarrow V. \end{matrix}$$ ko'rinishga

Masalan : $$(x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \to \bar{x}_4,$$
$$((x_2 \to x_4) \oplus \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$$

Agar U formulaning ifodasida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o`zgaruvchilar ishtirok etgan bo`lsa, buni ta'kidlash uchun $U[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ belgi ishlatiladi.

Ta'rif. 1) Agar $U[x_1, x_2, \ldots, x_n] = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bo`lsa, u holda U formulaga f funksiya mos qo`yiladi;

2) Agar $U[f_1, f_2, \ldots, f_s]$ bo`lsa, yuqoridan kelib chiqadiki ,

$U[f_1, f_2, \ldots, f_s] = f_0(f_1, f_2, \ldots, f_s)$ bundan

$U[f_1, f_2, \ldots, f_s]$ formulaga $\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \end{array}$ funksiya mos qo`yiladi.

Shu sababli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyalarning superpozitsiyasi deb ataladi. Agar U va V formulalarning mos funksiyalari f_U, f_V teng bo`lsa, bunday formulalar teng deyiladi.

4. Ikkilamchilik tamoyili

Bizga $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bul funksiyasi berilgan bo`lsin.

Ta'rif. $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ funksiya $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaga ikkilamchi deb ataladi.

Masalan: 1) $f(x_1, x_2,) = x_1 \wedge x_2$ bo`lsa,

$$f^*(x_1, x_2) = \overline{(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)} = x_1 \vee x_2$$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$, $\quad f^*(x_1, x_2) = \overline{\bar{x}_1 \to \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \wedge x_2$.

Ikkilamchilik tamoyili. Agar $U[f_1, f_2, \ldots, f_s]$ formulaga $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya mos kelsa, u holda $U[f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*]$ formulaga $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mos keladi.

Bundan kelib chiqadiki, $U[f_1^*, f_2^*, \ldots f_s^*]$ ni topish uchun $U[f_1, f_2, \ldots, f_s]$ da quyidagi almashtirishlarni bajarish zarur ekan: 0 ni 1 ga, 1 ni 0 ga, $\wedge$ ni $\vee$ ga, $\vee$ ni $\wedge$ ga.

Masalan: 1), $U(x_1, x_2) = 1 \vee (x_1 \wedge x_2)$ bundan

2), $U^*(x_1, x_2) = 0 \wedge (x_1 \vee x_2)$ bundan $U^*(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2)$

5. Bul funksiyalarini MDNSH (mukammal dizyunktiv normal shakl) va MKNSH (mukammal konyuktiv normal shakl) larda ifodalash.

Quyidagi belgilashni kiritaylik

$$x^{\delta} = x\delta \vee \overline{x}\,\overline{\delta},$$

demak $x^{\delta} = \begin{cases} \overline{x}, agar\ \delta = 0, \\ x, agar\ \delta = 1 \end{cases}$

va $x^{\delta} = 1$ shu holda va faqat shu holdaki, agar $x = \delta$ bo`lsa

Ta'rif. $x_{i_1}^{\delta_1} \cdot x_{i_2}^{\delta_2} \cdots x_{i_s}^{\delta_s}$ formula *konyunksiya* deb ataladi.

Agar K konyunksiyada har bir o`zgaruvchi faqat bir marta ishtirok etsa, bunday konyunksiya *oddiy* deb ataladi

Oddiy konyunksiyadagi o`zgaruvchilar soni (s), uning rangi deb ataladi.

Agar $K_1, K_2, \ldots, K_r$ konyunksiyalar bo`lsa,

$$D = K_1 V K_2 V \ldots V K_r$$

(yoki qisqacha $\bigvee_{i=1}^{r} K_i$) ko`rinishdagi formula *diz'yunktiv normal shakl* (DNSH) deb ataladi.

Agar $D_1, D_2, \ldots, D_r$ dizyunksiyalar bo`lsa

$$K = D_1 \cdot D_2 \ldots D_r$$

(yo`ki qisqacha $\underset{i=1}{\overset{r}{\&}} D_i$ ) ko`rinishdagi formula *konyunktiv normal shakl* (KNSH) deb ataladi.

Agar DNSH da qatnashgan konyunksiyalar oddiy bo`lib, ularning ranglari $n$ bo`lsa, u *mukammal dizyunktiv normal shakl* (MDNSH) deb ataladi. Huddi shunday, agar KNSH da qatnashadigan dizyunksiyalar oddiy bo`lib, ularning ranglari $n$ bo`lsa, u *mukammal konyunktiv normal shakl* (MKNSH) deb ataladi.

Ta'rif. O`zgaruvchilarning inkori ishtirok etmagan konyunksiya *monoton* deb ataladi.

Teorema. Ixtiyoriy bul funksiyasini biror MDNSH da ifodalash mumkin. Ya'ni

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \\ f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 1}} x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n}$$

Teorema. Ixtiyoriy bul funksiyasini biror MKNSH da ifodalash mumkin. Ya'ni

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigwedge_{\substack{(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)\\ f(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=0}}(x_1^{\bar\delta_1}\vee x_2^{\bar\delta_2}\vee\dots\vee x_n^{\bar\delta_n})$$

Masalan: $f(x_1,x_2)=x_1\to x_2$. Bu funksiyaning DNSH ni aniqlaymiz.

$$f(x_1,x_2)=\bigvee_{\substack{(\delta_1,\delta_2)\\ f(\delta_1,\delta_2)=1}} x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}=$$

$$=x_1^0x_2^0\vee x_1^0x_2^1\vee x_1^1x_2^1=\bar x_1\bar x_2\vee\bar x_1x_2\vee x_1x_2$$

ning KNSHi esa quyidagicha bo`ladi

$$f(x_1,x_2)=\bigwedge_{\substack{(\delta_1,\delta_2)\\ f(\delta_1,\delta_2)=0}}(x_1^{\bar\delta_1}\vee x_2^{\bar\delta_2})=(x_1^1\vee x_2^0)==\bar x_1\vee x_2$$

6. Jegalkin ko`phadi.

$K_1,K_2,\dots,K_s$ - elementar konyunksiyalar bo`lsin, u holda $K_1\oplus K_2\oplus\dots\oplus K_s$- *Jegalkin ko`phadi* deb ataladi.

Teorema. Ixtiyoriy bul funksiyasini Jegalkin ko`phadi ko`rinishda ifodalash mumkin

Berilgan bul funksiyasining Jegalkin ko`phadini tuzish uchun aniqmas koeffitsientlar usuli ishlatiladi. Bu usulni $f(x_1,x_2)=\bar x_1\vee x_2$ funksiya uchun qo`llaylik

$$f(x_1,x_2)=\beta_0\oplus\beta_1x_1\oplus\beta_2x_2\oplus\beta_{12}x_1x_2,$$

bu yerda $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_{12}$ lar aniqlanishi lozim bo`lgan koeffitsientlar

$f(0,0)=1,\quad f(0,1)=1,\quad f(1,0)=0,\quad f(1,1)=1.$

bo`lganligi uchun $\beta_0=1,\beta_0\oplus\beta_2=1,\beta_0\oplus\beta_1=0,\beta_0\oplus\beta_1\oplus\beta_2\oplus\beta_{12}=1$

bo`ladi.

Bundan $\beta_1=1,\quad\beta_2=0,\quad\beta_{12}=1$

Demak, $\bar x_1\vee x_2=1\oplus x_1\oplus x_1x_2$ bo`lar ekan.

7. Muhim va nomuhim o`zgaruvchilar

Ta'rif. Bizga $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ bul funksiyasi berilgan bo`lsin agar shunday $\bar\alpha^n=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$ nabor topilsaki, uning uchun

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)\neq$$
$$\neq f(\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$$

tengsizlik o`rinli bo`lsa, x_i o`zgaruvchi $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya uchun *muhim* deb ataladi, aks holda o`zgaruvchi *nomuhim* deyiladi.

Masalan. 1) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\to x_2)x_3$ funksiya uchun x_2 o`zgaruvchi muhim, chunki

$f(1,0,1)=0,\quad f(1,1,1)=1$, ya'ni $\quad f(1,0,1)\neq f(1,1,1)$

2) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee\bar{x}_1)x_2x_3$ funksiya uchun x_1 o`zgaruvchi nomuhim, chunki ixtiyoriy (x_1,x_2,x_3) lar uchun $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3$.

8. To`lalik va yopiqlik.

Bizga $f_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,f_s(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyalari berilgan bo`lsin.

Ta'rif. Agar P_2 dagi ixtiyoriy funksiyaga $f_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,f_s(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyalar orqali ifodalangan biror formula mos keltirilsa, u holda bu funksiyalar tizimi *to`la* deb ataladi.

Masalan . 1) $f_1(x_1,x_2)=\bar{x}_1,\ f_2(x_1,x_2)=x_1x_2,\ f_3(x_1,x_2)=x_1\vee x_2$ funksiyalar tizimi to`la, bu yuqorida eslatib o`tilgan ixtiyoriy funksiyani MDNSH da ifodalash mumkinligidan kelib chiqadi.

2) Ko`rsatish mumkinki $f(x_1,x_2)=x_1\mid x_2$ funksiya to`la bo`ladi.

Teorema. Bizga quyidagi ikkita

$$A=\{f_1,f_2,\dots\}$$
$$B=\{g_1,g_2,\dots\}$$

funksiyalar tizimi berilgan bo`lsin. Agar A funksiyalar tizimi to`la bo`lib, uning har bir funksiyasi B ning funksiyalari orqali formula ko`rinishida ifodalansa, u holda B funksiyalar tizimi ham to`la bo`ladi.

Masalan: $\quad A=\{\bar{x},x_1\wedge x_2,x_1\vee x_2\}$, $\ B=\{x_1\mid x_2\}$ bo`lsin. A funksiyalar tizimining to`laligi ixtiyoriy funksiyani MDNSH ko`rinishida ifodalash mumkinligidan kelib chiqadi. Teoremadan foydalanib B funksiyalar tizimining to`laligini ko`rsatamiz.

$$\bar{x}_1=x_1\mid x_2,\qquad x_1\wedge x_2=\overline{x_1\mid x_2}=(x_1\mid x_2)\mid(x_1\mid x_2).$$
$$x_1\vee x_2=\overline{\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2}=\bar{x}_1\mid\bar{x}_2=(x_1\mid x_1)\mid(x_2\mid x_2).$$

Ya'ni, A ning har bir funksiyasi V ning funksiyasi orqali ifodalandi.

9.Funksiyalar tizimining yopig`i va yopiq sinflar.

$A=\{f_1,f_2,\dots\}$ biror funksiyalar tizimi bo`lsin.

Ta'rif. A funksiyalar tizimining yopig`i deb A ning funksiyalari orqali formula yordamida ifodalash mumkin bo`lgan barcha funksiyalar to`plamiga aytiladi va u $[A]$ ko`rinishida belgilanadi.

Masalan: $A=\{\bar{x},x_1\vee x_2,x_1\vee x_2\}$ bo`lsa, $[A]=P_2$.

Funksiyalar tizimining yopig`i xossalari.

1) $A \subseteq [A]$; 2) $[[A]] = [A]$; 3) Agar $A \supseteq B$ bo`lsa $[A] \supseteq [B]$ bo`ladi;

4) $[A \vee B] \supseteq [A] \vee [B]$; 5) $[A \wedge B] \subseteq [A] \wedge [B]$;

Ta'rif. A funksiyalar tizimi *yopiq* deb ataladi, agar $[A] = A$ bo`lsa.

Masalan: 1) $[P_2] = P_2$; 2) $A = \{x_1 \mid x_2\}$ yopiq emas, chunki $[A] = P_2, A \neq P_2$.

10. Muhim yopiq sinflar.

a) T_0 bilan nolni saqlovchi funksiyalar to`plamini belgilaymiz. Ya'ni $T_0 = \{f : f(0,0,\dots,0) = 0\}$

b) T_1 bilan birni saqlovchi funksiyalar sinifini belgilaymiz. Ya'ni $T_1 = \{f : f(1,1,\dots,1) = 1\}$

c) Agar $f^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n) = f(x_1 x_2,\dots,x_n)$ tenglik o`rinli bo`lsa, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya *o`z- o`ziga ikkilamchi* deb ataladi.

S bilan barcha o`z- o`ziga ikkilamchi funksiyalar to`plamini belgilaymiz. Ya'ni $S = \{f : \bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n) = f(x_1,x_2,\dots,x_n)\}$.

Masalan: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$

Bo`lsin, u holda

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3) &= \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3} = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}\;\overline{\bar{x}_1\bar{x}_3}\;\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} = \\
&= (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3)(x_2 \vee x_3) = \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_1x_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_2x_3 = \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_2x_3 = \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3(1 \vee x_2) \vee x_2x_3 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.
\end{aligned}$$

Demak berilgan $f(x_1,x_2,x_3)$ funksiya o`z- o`ziga ikkilamchi ekan, ya'ni $f \in S$.

Lemma.1. Agar $f(x_1,x_2,\dots,x_n) \notin S$ bo`lsa, u holda $x_1,x_2,\dots,x_n$ o`zgaruvchilar o`rniga $x$ yoki $\bar{x}$ larni qo`yish orqali bir o`zgaruvchan o`zgarmas funksiyani hosil qilish mumkin.

Masalan: $f(x_1,x_2) = (x_1x_2 \oplus \bar{x}_1) \to x_2 \notin S$ $x_1 = \bar{x}, x_2 = x$ almashtirish bajarilsa $\varphi(x) = f(\bar{x},x) = (\bar{x}\,x \oplus x) \to x = x \to x \equiv 1$.

d) L bilan chiziqli funksiyalar to`plamini belgilaymiz. Ya'ni

$L = \{f : f(x_1,x_2,\dots,x_n) = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus \dots \oplus C_nx_n\}$

bu erda C_i - koeffitsientlar nol yoki birdan iborat.

Masalan: 1) $f(x_1,x_2) = x_1 \sim x_2$ chiziqli funksiya, chunki $f(x_1,x_2)=1\oplus x_1,\oplus x_2$

2) $f(x_1,x_2)=x_1\to x_2$ chiziqsiz funksiya,

Chunki $f(x_1,x_2)=1\oplus x_1\oplus x_1x_2$

Lemma.2. Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)\notin L$ bo`lsa, u holda $x_1,x_2,...x_n$ o`zgaruvchilar o`rniga $0,1,x,\bar{x}$ larni qo'yish va zarur deb topilsa f ni inkorini olish hisobiga $x_1\wedge x_2$ funksiyani hosil qilish mumkin.

Masalan $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\to x_2)x_3$ ma'lumki $f(x_1,x_2,x_3)=(1\oplus x_1\oplus x_1\ x_2)x_2\ x_3=x_2\ x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3=x_2x_3$ Demak $x_2=x_1,x_3=x_2$

almashtirish orqali $f(x_1,x_2)=x_1\ x_2$ funksiyasi hosil qilish mumkin ekan.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $i=1,2,...,n$ uchun $\beta_i\le\alpha_i$ shart bajarilsa $\bar{\alpha}^n=(\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n)$ nabor $\bar{\beta}^n=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ nabordan *ustun (afzal)* deb ataladi, va $\bar{\alpha}_n\succ\bar{\beta}_n$ kabi belgilanadi.

Masalan: $\bar{\alpha}^3=(1,0,1)$ nabor $\bar{\beta}^3=(0,0,1)$ nabordan ustun.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\bar{\alpha}^n\succ\bar{\beta}^n$ naborlar uchun $f(\bar{\alpha}^n)\ge f(\bar{\beta}^n)$ tengsizlik o`rinli bo`lsa, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya *monoton* deb ataladi.

e) Barcha monoton funksiyalar to`plamini M bilan belgilaymiz.

Masalan: $f(x)=x,\quad f(x_1,x_2)=x_1\vee x_2,\quad f(x_1,x_2)=x_1\wedge x_2$ funktsiyalar monoton;

$f(x)=\bar{x},f(x_1,x_2)=x_1\to x_2,f(x_1,x_2)=x_1\sim x_2$

funksiyalari monoton emas.

Lemma 3. Agar $f(x_1,x_2,...,x_n)\notin M$ bo`lsa, u holda $x_1,x_2,...,x_n$ o`zgaruvchilar o`rniga $0,1,x$ larni qo`yish hisobiga $\bar{x}$ funksiya hosil qilish mumkin.

Masalan $f(x_1,x_2)=x_1\sim x_2$ funksiya uchun $x_1=0\quad x_2=x$ almashtirishni bajaramiz :

$$\varphi(x)=f(0,x)=0\sim x=\bar{x}.$$

Shunday qilib, biz yuqorida beshta T_0,T_1,S,L,M funksiyalar sinfini ko`rib chiqdik. Ko`rsatish mumkin, ular har biri yopiq funksiyalar sinifini tashkil etadi.

Quyidagi tasdiq diskret matematika sonida juda muhim ro`l o`ynaydi.

Tasdiq (funksional to`lalik haqida). Biror funksiyalar to`plami to`la bo`lishi uchun, u yuqorida keltirilgan yopiq T_0,T_1,S,M,L to`plamlarning hech birining to`la qismi bo`lmasligi zarur va yetarlidir.

Ta'rif. Biror A funksiyalar sinfi uchun quyidagi ikkita shart bajarilsa, u *to'lalikka davogar* yoki *maksimal* deb ataladi

1) A to'la emas
2) Ixtiyoriy $f \in P_2(f \notin A)$ funksiya uchun $A \vee \{f\}$ to'la.

Tasdiq 2. Funksiyalar to'plami P_2 da faqat 5 ta T_0, T_1, S, M, L to'lalikka da'vogar funksiyalar sinfi bor.

Tasdiq. P_2 da to'la bo'lgan ixtiyoriy funksiyalar tizimidan 4 tadan ko'p bo'lmagan to'la tizimni tashkil etuvchi funksiyalarni ajratib olish mumkin.

Ta'rif. A yopiq funksiyalar sinifiga tegishli $\{f_1, f_2, \ldots\}$ funksiyalar tizimi A da to'la deyiladi, agar $\{f_1, f_2, \ldots\}$ ning yopig'i A ga teng bo'lsa.

Ta'rif. Biror A yopiq funksiyalar sinifidagi $\{f_1, f_2, \ldots\}$ funksiyalar tizimi A da bazis tashkil etadi deyiladi, agar

1) $\{f_1, f_2, \ldots,\}$ tizim A da to'la,
2) $\{f_1, f_2, \ldots,\}$ ning hech bir xos to'plam osti A da to'la emas.

Masalan: $\{0,1, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ funksiyalar tizimi M yopiq sinfida bazis tashkil etadi.

II. k-qiymatli mantiq algebrasi

Ta'rif. komponentalari $0,1,\ldots,k-1$ sonlardan iborat bo'lgan vektorga k - *qiymatli nabor* deb ataladi.

Ta'rif. Komponentalari ham, o'zi ham $0,1,\ldots,k-1$ sonlar qabul qiluvchi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaga k qiymatli mantiq funksiya deb ataladi.

Teorema. n o'zgaruvchili k qiymatli mantiq funksiyalar to'plami P_k, k^{k^n} elementdan iborat.

1. *k*- qiymatli mantiq algebrasining sodda funksiyalari.

1) $0,1,\ldots,k-1-$ o'zgarmas funksiyalar;
2) $\bar{x} = x \oplus 1 \pmod k$ - Post inkori;
3) $\sim x = (k-1) - x$ (yoki $Nx = (k-1) - x$) - Lukashevich inkori;
4) $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ sonining birinchi jins xarakteristik funksiyasi:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & agar \quad x = i, \\ 0, & agar \quad x \neq i. \end{cases}$$

5) $i \in \{0,1,\ldots,k-1\}$ sonining ikkinchi jins xarekteristik funksiyasi

$$Y_i(x)=\begin{cases}k-1, & agar \quad x=i,\\ 0, & agar \quad x\neq i.\end{cases}$$

6) $\min(x_1\cdot x_2)$ - minimum funksiyasi.

7) $\max(x_1,x_2)$ - maksimum funksiyasi.

8) $x_1\oplus x_2(\mathrm{mod}\,k)$ – modul k bo`yicha qo`shish funksiyasi;

9) $x_i x_2(\mathrm{mod})$ – modul k bo`yicha ko`paytirish funksiyasi;

10) $x_1\overset{\circ}{-}x_2=\begin{cases}0, & agar \quad 0\le x_1<y_2\le k-1,\\ x_1-y_2, & agar \quad 0\le x_2\le x_1\le k-1-\end{cases}$ qisqartirilgan

ayirima;

11) $x_1\supset x_2=\begin{cases}k-1, & agar \quad 0\le x_1<y_2\le k-1,\\ (k-1)-x_1+y_2, & agar \quad 0\le y_2\le x_1\le k-1\end{cases}$ implikatsiya funksiyasi;

12) $\vartheta_k(x_1,x_2)=\max(x_1,x_2)\oplus 1(\mathrm{mod}\,k)$ – Vebb funksiyasi;

13) $x_1-x_2=\begin{cases}x_1-x_2, & agar \quad 0\le x_2\le x_1\le k-1\\ k-(x_2-x_1), & agar \quad 0\le x_1<x_2\le k-1\end{cases}$ modul k bo`yicha ayirma

14) $-x=\begin{cases}0, & agar \quad x=0\\ k-x, & agar \quad x\neq 0\end{cases}$

4.Elementar funksiyalarning asosiy xossalari

$(x_1\circ x_2)$ bilan $\min(x_1,x_2)$, $x_1\cdot x_2(\mathrm{mod}\,k)$,

$\max(x_1,x_2)$, $x_1+x_2(\mathrm{mod}\,k)$ funksiyalarning birortasi belgilangan bo`lsin. U holda

1) $(x_1\circ x_2)$ funksiya assotsiyativlik xossasiga ega

$((x_1\circ x_2)\circ x_3)=(x_1\circ(x_2\circ x_3))$

2) $x_1\circ x_2$ kommutativlik xossasiga ega

$(x_1\circ x_2)=(x_2\circ x_1)$

3) Distributivlik xossasiga ega

$(x_1\vee x_2)x_3=(x_1x_3)\vee(x_2x_3)$

$(x_1x_2)\vee x_3=(x_1\vee x_3)(x_2\vee x_3)$

4) J simvolini formulaga kiritish qoidasi

$$J_\delta(J_i(x)) = \begin{cases} J_0(x) \vee J \ldots \vee J_{i-1}(x) \vee J_{i+1}(x) \\ \vee \ldots \vee J_{k-1}(x)_1 \; \delta = 0 \\ 0, agar\ 0 < \delta < k-1 \\ J_i(x), agar\ \delta = k-1. \end{cases}$$

5) O`zgaruvchini sof holda ishtirok etishini chiqarib tashlash

$$x = 1 \wedge J_1(x) \vee 2 \wedge J_2(x) \vee \ldots \vee (k-1) \wedge J_{k-1}(x)$$

6) yangi o`zgartiruvchi kiritish qoidasi

$$x_1 = x_1 \wedge (J_0(x_2) \vee J_1(x_2) \vee \ldots \vee J_{k-1}(x_2))$$

7) Soddalashtirish qoidasi .

$$J_\delta(x) J_i(x) = \begin{cases} J_\delta(x), azap\ \delta = i, \\ 0, azap\ \delta \neq i \end{cases}$$

$$\delta \wedge i = \min(\delta, i): \quad \delta \vee i = \max(\delta, i)$$

$$(k-1) \wedge x = x: \quad 0 \wedge x = 0$$

$$(k-1) \vee x = k-1, \quad 0 \vee x = x$$

Lekin, bu umumlashishda bul funksiyalarining barcha xossalari saqlanib qolmaydi.

Masalan.

1) $\sim (\sim \mathrm{x}) = x \sim$ lekin $\bar{\bar{x}} \neq x (k \geq 3)$

2) $\sim \underline{\min(x_1, x_2)} = \max(\sim \mathrm{x}_1, \sim \mathrm{x}_2)$ lekin $\min(x_1, x_2) \neq \max(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

MDNF ning o`hshash ko`rinishi $f(x, \ldots, x_n) = \underset{(\delta_1, \ldots \delta_n)}{\vee} J_{\delta_1}(x_1) \wedge \ldots J_{\delta_n}(x_n) \wedge f(\delta_1, \ldots, \delta_n)$

Yoki

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max_\delta(\min\{J_{\delta_1}(x_1), \ldots, J_{\delta_n}(x_n), f(\delta_1, \ldots, \delta_n)\})$$

Bu birinchi shaklli (formasi) deyiladi.

Ikkinchi shakli quyidagicha

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\delta f(\delta_1, \ldots, \delta_n) \cdot j_{\delta_1}(x_1) \ldots j_{\delta_n}(x_n)$$

Ta'rif. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o`zgaruvchilarning *ko`phadi* deb

$$a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_m X_m$$

ko`rinishdagi ifodaga aytiladi, bu yerda $X_1, X_2, \ldots, X_m$ lar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lardan yoki ularning ko`paytmasidan iborat.

Teorema. P_k dagi ixtiyoriy funksiya $\bmod k$ bo`yicha ko`phad ko`rinishida ifodalanishi uchun $k$ sonining tub bo`lishligi zarur va yetarlidir.

Quyidagilar o`rinli

1) $\{0,1,\ldots,k-1, J_0(k), J_1(x),\ldots,J_{k-1}(x), \min(x_1,x_2)\max(x,y)\}$-Rosser- Turkett

2) $\{\bar{x}, \max(x_1,x_2)\}$ funksiyalar tizimi P_k da to`la bo`lishadi .

3) Vebb funksiyasi $v_k(x_1,x_2)$ P_k da to`la bo`ladi.

Teorema. P_k da shunday $B_1, B_2,\ldots,B_s$ yopiq funksiyalar to`plamini qurish mumkinki, ularning hech biri boshqasining ichida butunlay yotmaydi. Biror funksiyalar tizimi $P_k$ da to`la bo`lishligi uchun u $B_1, B_2,\ldots,B_s$ to`plamlarning hech birining ichida butunlay yotmasligi zarur va yetarli.

3. k - qiymatli funksiyalarning ko`phad ko`rinishda yoyilmasi

1) $f(x) = x \stackrel{\circ}{-} x^2, \quad k=5.$

javob $f(x) = 3x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4$

2)

$$f(x_1,x_2) = \min(x_1,x_2), \quad k=3$$
$$f(x_1,x_2) = x_1x_2(1+2x_1+2x_1x_2+2x_2) =$$
$$x_1x_2 + 2x_1^2x_2 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2^2$$

3) $f(x_1,x_2) = x_1 \supset x_2 = \begin{cases} k-1, & x_1 < x_2 \\ x_1 - x_2, & x_1 \geq x_2 \end{cases}, \quad k=3$

4) Fermaning kichik teoremasi:

Agar p - tub son bo`lsa, $1 \leq a \leq p-1$ uchun $r_1 = a\cdot 1,\ r_2 = a\cdot 2,\ldots,\ \ r_{p-1} = a\cdot(p-1)$ lar $\bmod p$ bo`yicha taqqoslanmaydi.

Faraz qilaylik, taqqoslansin, u holda $ak \equiv a\cdot e \mod p, \quad 1\leq k, 2\leq p-1$ yoki $k\equiv e$ bundan

$$r_1r_2\ldots r_{p-1} \equiv a^{p-1}(p-1)!.$$

Lekin $r_{j_1} \equiv 1,\ r_{j_2} \equiv 2,\ldots,r_{j_{p-1}}$ ga $\bmod p$ bo`yicha keltirish mumkin, demak, $(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \Rightarrow \quad 1 \equiv a^{p-1} \bmod p$

5) $J_{k-2}(x) = (k-1)[1-(k-1-x)^{k-1}], \quad k$ - tub son

6) $j_1(y) = y[1-(y-1)^{k-1}], \quad k$ - tub son

III. Mulohazalar algebrasi

1. Mulohaza. Mulohazalar ustida amallar (Inkor, konyunksiya, dizyunksiya, ekvivalentlik va implikatsiya mantiqiy amallar. Sheffer amali).

Matematik mantiq (MM) asosan gaplar bilan ish ko`radı. MM gaplarning ma`nosiga qarab uning chin yoki yolg`on bo`lishligi bilan qiziqadi.

Masalan 1) Toshkent - O`zbekiston poytaxti

2) Oy yer atrofida aylanadi.

3) Yer oydan kichik

4) "3>5" - yolg`ondir.

Ayrim gaplarni chin yoki yolg`onligini birdan aniqlab bo`lmaydi. Masalan "Bugungi tun kechagidan qorong`iroq" bu gap qanday holatda aytilishiga qarab chin ham yolg`on ham bo`lishi mumkin.

1). Oldimga kel. 2) Uyda bo`ldingmi. 3) Yangi yil bilan 4) Agar bilsang edi - gaplar chin ham. yolg`on qiymatlar ham qabul qilmaydi.

Ta'rif. Faqat chin yoki yolg`on qiymat qabul qila oladigan darak gaplarga mulohazalar deb aytiladi. Mulohazalarni belgilash uchun $a,b,c\ldots,u,v,x,y,\ldots,$ lar ishlatiladi.

O`zgaruvchi mulohazalar ham bo`lib, ular bilan belgilanadi $x_1,\ldots,x_n$

- o`zgaruvchili mulohazalar bo`lsa 2 ta kombinatsiya bo`lishi mumkin

Matematik mantiqda "emas", "yoki", "va", "agar ... u holda" , "shunda va faqat shundagina" bog`lovchilar mulohazalar orasidagi mantiqiy amallar deyiladi. Bu amallar yordamida elementar mulohazalardan murakkab mulohazalar quriladi.

Bu amallar muloqazalar algebrasi yoki sinonim bo`lgan muloqazalar mantiqi bo`limida o`rganiladi.

Mantiqiy amallar, asosan 5 ta bo`lib, ular quydagilardir:

1) inkor;
2) konyunksiya - mantiqiy ko`paytma;
3) dizyunksiya - mantiqiy yig`indi;
4) impilikatsiya;
5) ekvivalentlik

1) Inkor amalı; x-mulohaza bo`lsa $\bar{x}$ ham mulohazadir.

Ta'rif. x mulohazaning inkori deb atalgan $\bar{x}$ mulohaza shu bilan harakatlanadigan, k mulohaza "Ch" bo`lsa, $\bar{x}$ "Yo" va aksincha.

Demak, inkor oddiy tildagi manfiy sifatdosh emasga to`g`ri keladi.

x – "bugun havo ochiq", $\bar{x}$ - "bugun havo buzuq".

Chinlik jadvali

x	$\bar{x}$
Ch	Yo
Yo	Ch

2) Konyunksiya (mantiqiy ko`paytma) amali konyunksiya (lotincha - bog`layman) $\wedge$ bilan belgilanadi.

Ta'rif. "Va" bog`lovchisiga mos keluvchi mantiqiy amalga konyunksiya deyiladi. $x$ va $y$ mulohazalarning kon'yunksiyasi $x$ va $y$ mulohazalar ch bo`lgandagina ch bo`lib, qolgan hollarda yolg`ondir.

$$x \wedge y \text{ - "} x \text{ в} a\ y \text{"}$$

"5 soni toq va tub" - chin.

Chunki "5 toq" va "5 tub" mulohazalar chin.

Chinlik jadvali

x	y	$x \wedge y$
Ch	Ch	Ch
Ch	Yo	Yo
Yo	Ch	Yo
Yo	Yo	Yo

3) Dizyunksiya (mantiqiy qo`shuv.) amali.

"yoki" bog`lovchiga to`g`ri keladi

yoki - rad etuvchi va rad etmaydigan ma'noda ishlatiladi.

Masalan: "Bugun yakshanba yoki men kinoga boraman"

Ta'rif. Rad etmaydigan manoda ishlatilmaydigan "yoki" mantiqiy amal dizyunksiya (lotincha - amal qilaman) deyiladi.

x va y mulohazalarning dizyunksiyasi $x \vee y$ deb yoziladi x yoki y deb o`qiladi.

$$x \vee y = Yo \Leftrightarrow x = Yo, y = Yo$$

x	y	$x \vee y$
Ch	Ch	Ch
Yo	Ch	Ch
Ch	Yo	Ch
Yo	Yo	Yo

4.Implikatsiya.

Misollar.

1). "Agar $2\times5=10$ bo`lsa, u holda $6\times7=42$ bo`ladi"

2). "Agar 30 soni juft bo`lsa, u holda 5 juftdir"

3). "Agar $3=5$ bo`lsa, u holda $15=17$ "

4). "Agar $4x3=13$ bo`lsa, u holda $9+3=12$ bo`ladi".

(Implikatsiya - lotincha zich bog`layman)

Ta'rif. Ikki x va y mulohazalarning implikatsiyasi deb shunday mulohazalarga aytiladiki, u faqat x chin va y yolg`on bo`lgandagina yolg`on bo`lib, qolgan hollarda chindir.

$x\to y$ mulohaza "agar x, u holda y" deb o`qiladi.

x	y	$x\to y$
Ch	Ch	Ch
Ch	Yo	Yo
Yo	Ch	Ch
Yo	Yo	Ch

$x\to y$ da x asos, shart, gipoteza,

bu asosning dalil

y oqibati deb ataladi.

Implikatsiyaning sinonimlari bor:

"agar x u holda y"

" x bo`lsa, $y$ bo`ladi"

"agar x bo`lsa, u vaqtida $y$ bo`ladi"

" x soni y hosil bo`ladi"

" x son y kelib chiqadi"

"y agar x bo`lsa"

" y uchun x yetarli".

5) Ekvivalentlik (tengkuchlilik) amali.

Ko`p murakkab mulohazalar elementar mulohazalarda "zarur va kifoya" , "faqat va faqat", "shunda va faqat shundagina" "bajarilish yetarli va zarur" kabi bog`lovchilar yordamida tuziladi. $\leftrightarrow$ bilan belgilanadi" va x ekvivalent y deb o`qiladi".

Ta'rif. Murakkab mulohaza $x\leftrightarrow y$ chin bo`ladi, agar $x$ va $y$ chin yoki $x$ va $y$ yolg`on bo`lsa, boshqa hollarda yolg`on dir.

x	y	$x \leftrightarrow y$
Ch	Ch	Ch
Ch	Yo	Yo
Yo	Ch	Yo
Yo	Yo	Ch

Quidagi tenglik o`rinlidir:

$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$.

ya'ni 2 tomonlama iplikatsiya.

$x \leftrightarrow y$ "x bo`lsa (bajarilsa), $y$ bo`ladi (bajariladi va y bo`lsa, $x$ bo`ladi) " yoki x dan y kelib chiqadi va y dan x kelib chiqadi"

6) Jeffer amali (shtrihi)

belgilanishi "|".

Ta'rif. Faqat x va y mulohazalar chin bo`lgandagina $x \mid y$ mulohaza yolg`ondir.

x	y	$x \mid y$
Yo	Yo	Ch
Yo	Ch	Ch
Ch	Yo	Ch
Ch	Ch	Yo

Masalalar

1) quyidagi gaplaming qaysi birlari mulohaza bo`ladi.

1. Toshkent O`zbekiston poytaxti
2. $\sqrt{5} + 4\sqrt{3 + b}$.
3. Oy Mars yo`ldoshi

2) quyidagi mulohazalaming chin yoki yolg`onligini aniqlang.

1. $2 \in \{x \mid 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0,\ x \ni R\}$
2. $\{|\} \in N$.

3) quyidagi impilikatsiyalaming qaysi biri chin bo`ladi?

1. agar $2 \times 2 = 4$ bo`lsa, u holda 2<3
2. agar $2 \times 2 = 4$ bo`lsa, u holda 2>3

2. Mantiqiy bog`lovchilarning to`laligi

n ta harf orqali ifodalangan ixtiyoriy mulohazaviy shakl n o`zgaruvchilik funksiyani aniqlaydi. Bunday o`zgaruvchilar ham, funksiya ham chin yoki yolg`on qiymatlar qabul qiladi.

Tasdiq. Ixtiyoriy funksiyani $\neg, \wedge, \vee$ mantiqiy bog`lovchilar orqali hosil qilingan mulohazaviy shakl bilan ifodalash mumkin.

Misol 1

A_1	A_2	$f(A_1, A_2)$
ch	ch	yo
ch	yo	ch
yo	ch	ch
yo	yo	ch

Mulohazaviy shakl :

$$(A_1 \wedge \overline{A}_2) \vee (\overline{A}_1 \vee A_2) \vee (\overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2)$$

Misol 2.

A_1	A_2	A_3	$f(A_1, A_2, A_3)$
ch	ch	ch	

Natija. Ixtiyoriy f funksiyani quydagi $\neg$ va $\wedge, \vee$ va $\vee \neg$ va $\to$ mantiqiy bog`lovchilarning birorta juftligi orqali mulohazaviy shakl bilan ifodalash mumkin.

Bu quyidagi mantiqiy ekvivalentlikdan kelib chiqadi.

$A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$

$A \wedge B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$

$A \wedge B \equiv \overline{A \to \overline{B}}$

$A \vee B \equiv \overline{A} \to B$

Yuqoridagi bog`lovchilar juft bo`lgan edi. Bitta bog`lovchili mulohazaviy shakllar ham to`la bo`lishi mumkin. Masalan $|$ va $\downarrow$. Bu quyidagidan kelib chiqadi.

$\overline{A} = A \mid A = \overline{A \wedge A} = 1 \quad A \vee B =$

$(A \mid A) \mid (B \mid B) \mid \overline{A} \mid \overline{B} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} = A \vee B$

$A \wedge B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) = \overline{A} \downarrow \overline{B} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} =$

Tasdiq. Ixtiyoriy funksiyani ifoda etuvchi yagona mantiqiy bog`lovchilshar faqat $|$ va $\downarrow$ dan iborat.

Misol: A - "uchragan odam to`g`ri gapiradi"

B - "chap tomondagi yo`l markazga olib boradi."

Shunday mulohazaviy shakl tuzish kerakki, uning chin bo`lishligi B ning chin bo`lishligi bilan mantiqiy ekvivalent bo`lsin.

IV. Test sinovlari

1. $f(x_1,x_2)=x_1\to(x_2\to 1)$ funksiyadagi muhim o`zgaruvchilarni aniqlang

A) x_1 B) x_2 C) x_1x_2 D) $\varnothing$

2. $f=(11001100)$ funksiyadagi nomuhim o`zgaruvchilarni aniqlang

A) x_2 B) x_1x_3 C) $\varnothing$ D) x_2x_3

3. $f(x_1,x_2,x_3)=(10110011)$ funksiyadagi muhim o`zgaruvchilarni aniqlang

A) x_1x_2 B) x_1 C) $x_1x_2x_3$ D) x_2x_3

4. $f(x_1,x_2)=x_1\oplus(x_1\vee\bar{x}_1x_2)\oplus\bar{x}_1$ funksiyadagi nomuhim o`zgaruvchilarni aniqlang

A) x_1 B) x_2 C) $\varnothing$ D) x_1x_2

5. $\tilde{\alpha}=(10101110)$, $\tilde{\beta}=(00010101)$ kub uchlari orasidagi Hemming ($\rho(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$) masofasini toping.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

6. $\tilde{\alpha}=(00110101)$ vektor nomerini toping.

A) 16 B) 32 C) 43 D) 53

7. Barcha qo`shni uchlarni toping $\tilde{\alpha}=(1011101)$, $\tilde{\beta}=(1001101)$, $\tilde{\gamma}=(1011010)$

A) $\tilde{\alpha}$ va $\tilde{\beta}$ B) $\tilde{\alpha}$ va $\tilde{\gamma}$ C) $\tilde{\beta}$ va $\tilde{\gamma}$ D) $\tilde{\alpha}$ va $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}$ va $\tilde{\gamma}$

8. Nomeri 17 bo`lgan uchni aniqlang.

A) (10010001) V)(01000010) S) (00010001) Д) (00010010)

9. Quyidagi ifodalardan qaysilari formuladan iborat

1. $x\leftarrow y$; 2. $y\to(x)$ 3. $x|(y\&\rceil x)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2,3

10. $\alpha_f=(01)$, $\alpha_g=(0111)$ bo`lsa, $\varphi=f(g)$ ni toping.

A) $\alpha_\varphi=(0011)$ B) $\alpha_\varphi=(1100)$ D) $\alpha_\varphi=(1111)$

11. $\alpha_f(0111)$, $\alpha_g=(01)$ bo`lsa $\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,g(x_2))$ ni toping.

A) (1010) V) (0101) S) (0111) Д) (0011)

12. Quyidagi ifodalardan qaysilari formuladan iborat?

1. $(x \& y)\rceil x$; 2. $\bar{x}\ \rceil y \to z$; 3. $x \vee y \& z$

A) 1,3 V) 1,2 S) 3 Д) 2,3

13. Ekvivalent formulalarni toping

1. $x \to y$; 2. $x \& \bar{y}$; 3. $\bar{x} \vee y$

A) 1,2 V) 1,3 S) 2,3 Д) 1, 2,3

14. $x \vee y$ funksiyaning Jegalkina ko`phadida qaysi qo`shiluvchi qatnashadi.

A) xy B) 1 C) $\bar{x}$ D) $\bar{x}\ \bar{y}$

15. Barcha yopiq sinflarni ajrating.

1) $\{0,1\}$; 2) $\{\bar{x}, x \vee y\}$ 3) $\{x \vee y, x \cdot y\}$

A) 1), 2) B) 2) C) 2), 3) D) 1), 2), 3)

16. Barcha yopiq sinflarni ajrating

1) $\{0,1\}$ 2) $\{\bar{x}\}$ 3) $\{1, \bar{x}\}$

A) 1) B) 2) C) $\{1, \bar{x}\}$ D) 1), 2)

17. To`g`ri munosabatni aniqlang

1) $[A] = A$, 2) $[A \vee B] \supseteq [A] \vee [B]$ 3) $[A] = P_2$

A) 1) B) 2) C) 3) D) 2), 3)

18. To`g`ri javobni aniqlang:

1) yopiq sinflar kesishmasi yopiq sinfdir;

2) yopiq sinflar ayirmasi yopiq sinfdir;

3) yopiq sinfning to`ldiruvchisi yopiq sinf emas.

A) 1) B) 2) C) 3) D) 1), 2)

19. Funksiyalar sistemasini yopilmasini aniqlang $\{1, \bar{x}\}$

A) $\{1, \bar{x}\}$ B) $\{0,1, \bar{x}\}$ C) $\{0,1, x\}$ D) $\{0,1, x, \bar{x}\}$

20. Quyidagi funksiyalar sinflaridan (maksimal) yarimto`lalarini aniqlang

1) T_0, T_1; 2) S, L; 3) P_2

A) 1),2) B) 1) C) 2) D) 3)

21. To`la funksiyalar sistemasini ajirating

A) $\{x_1 \downarrow x_2, \bar{x}\}$ B) $\{x_1 \vee x_2, x_1 x_2\}$ C) $\{x, x_1 \vee \dot{x_2}\}$ D) $\{x, x_1 \cdot x_2\}$

22. $g = (10010111)$ funksiya o`zaro ikkilamchisini toping.

A) (10010111) B) (10010101) C) (11110111) D) o`zaro ikkilamchi emas

23. O`zaro ikkilamchi funksiya topilsin

A) (11010100) B) (00000111) C) (11100011) D) (11111111)

24. O`zaro ikkilamchi funksiya topilsin

A) $x_1 \vee x_2$ B) $x_1 x_2$ C) $x, x_1 x_2$ D) $x, \bar{x}$

25. Chiziqli funksiyalar sinfini ko`rsating

A) $\{x_1 \oplus x_1 x_2\}$ B) $\{x_1 \to x_2\}$ C) (10101010) D) (10010110)

26. Chiziqli funksiyani ko`rsating

A) $\{0,1; x_1 \to x_2\}$ B) $\{0,1\}$ C) $\{1, x_1 \to x_2\}$ D) $\{x_1 \to x_2\}$

27. T_0 da yotuvchi funksiyani aniqlang

A) $1 \oplus x_1 \oplus x_2$ B) $1 \vee x_1 x_2$ C) $x_1 \to x_2$ D) $x_1 x_2$

28. T_1 da yotuvchi funksiyani aniqlang

A) $1 \oplus x_1 \oplus x_2$ B) $x_1 \to \bar{x}_2$ C) $1 \oplus x_1 x_2$ D) $x_1(x_1 \oplus x_2)$

29. T_1 dagi funksiyalar sonini aniqlang

A) 2^n B) 2^{2^n} C) $2^{2^n - 1}$ D) $2^{2^{2-n}}$

30. $T_0 \cap T_1$ dagi funksiyalar sonini aniqlang

A) $2^{2^{n-2}}$ B) $2^{2^n - 2}$ C) 2^{2^n} D) 2^n

31. Monoton funksiyani aniqlang.

A) $(x_1 \oplus x_2)(x_1 \vee x_2)$ B) $x_1 \to x_2$ C) $x_1 \vee x_2$ D) $x_1 \sim x_2$

32. Monoton funksiyani aniqlang.

A) (10010000) B) (00000000) C)(00100000) D) (10)

33. $f(010)=1,\ f(100)=0$ shartni qanoatlantiruvchi monoton funksiyalar sonini aniqlang.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1

34. To`g`ri tenglikni aniqlang

A) $-(\bar{x}) = \sim x$ B) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim \max(x,y)$

C) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \min(x,y)$ D) $(x \supset y) + \bar{x} = \max(x,y)$

35. Noto`g`ri tenglikni aniqlang

A) $x \supset y = \min(k-1,(\sim x)+y)$ B) $x \dot{-} y = \sim \overline{\min(0, y-x)}$

C) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim \min(x,y)$ D) $(x \supset y) \dot{-} (y \supset x) = -\min(0, x-y)$

36. To`g`ri tenglikni aniqlang

A) $\min(\max(x,y),z) = \max(\max(x,z),\min(y,z))$

B) $\min(\max(x,y),z) = \max(\min(x,z),\max(y,z))$

C) $\min(\max(x,y),z) = \max(\min(x,z),\min(y,z))$

D) $\max(\max(x,y)z) = \max(\min(x,z),\min(y,z))$

37. P_k da to`la sistemani aniqlang

A) $\{0,1,\ldots,k-1\}$

B) $\{j_0(x), j_1(x),\ldots, j_{k-1}(x), x+y, x\cdot y\}$

C) $\{0,1,\ldots,k-1, j_0(x), j_1(x),\ldots, j_{k-1}(x)x+y, x\cdot y\}$

D) $\{x+y,\ x\cdot y\}$

38. Quyidagilardan qaysi biri mulohaza emas ?

A) 3+2=5

B) 3<2

C) Kuz- yilning eng yaxshi fasli

D) To`rtburchakning qarama-qarshi tomonlari teng.

39. Quyidagilardan qaysi biri mulohaza emas ?

A) 3<2 B) $y^2 \geq 0$

C) Siz Ukraina tunini bilasizmi? D) H shaharda 100000 dan ortiq aholi yashaydi.

40. Quyidagilardan qaysi biri mulohaza emas

A) Matematika fandir. B) Qor qora rangda.

C) Yoz yilning eng yahshi fasli. D) 9 tub sondir.

41. Chin mulohazani ko`rsating

A) $1-$ tub son va $2-$ tub son
B) $2 \cdot 2 = 4$ va $2 \cdot 2 \leq 5$, va $2 \cdot 2 \geq 4$
C) $3x \geq 2$
D) $3x \leq 0, \quad 3x \geq 0$

42. Yolg`on $B$ mulohazani ko`rsating

A) $B \vee (2-$ murakkab son$)$ $-$yolg`on
B) $B \vee (2-$tub son$)$ $-$ chin
C) $B \wedge (3 \cdot 5 = 15)$ $-$ chin
D) $B \vee (3 \cdot 15 = 25)$ $-$ chin

43. Chin F mulohazani ko`rsating

A) $F \vee (5 \cdot 2 = 7)$ $-$ yolg`on
B) $F \wedge (5 \cdot 2 = 10)$ $-$ yolg`on
C) $F \vee (2 \cdot 3 = 5)$ $-$ yolg`on
D) $F \wedge (2 \cdot 4 = 8)$ $-$ yolg`on

44. «ABS-to`g`ri burchakli uchburchak» gapini inkormasini toping.

A) ΔABC - to`g`ri burchakli emas

B) ΔABC - o`tkir burchakli.

C) ΔABC - to`g`ri burchakka ega.

D) ΔABC —to`g`ri burchakli degan gap noto`g`ri.

45. Quyida $\overline{a > b}$ ni inkor belgisisiz yozing

A) $a \geq b$
B) $a \leq b$
C) $a = b$
D) $a < b$

46. Yolg`on mulohazani aniqlang

A) Diagonallari perpendikular bo`lgan ixtiyoriy turtburchak romb bo`ladi

B) $2 \geq 2$

C) 5>2

D) Barcha tub sonlar toq

47. Chin mulohazani aniqlang

A) $\sin 90^\circ = 1 \leftrightarrow (2 \cdot 2 = 5)$

B) $\sin 90^\circ = 1 \leftrightarrow (2 \cdot 2 = 4)$

C) $\sin 90^\circ = 0 \leftrightarrow (2 \cdot 2 = 4)$

D) $\sin 90^\circ = 0 \leftrightarrow (2 \cdot 3 = 6)$

48. B mulohazaning chin qiymatini toping.

A) $B \to 0 -$ cin

B) $\overline{B} \to 0 -$ yolg`on

C) $1 \to B -$ yolg`on

D) $1 \to \overline{B} -$ yolg`on

49. A mulohazaning chin qiymatini toping.

A) Agar 4- juft bo`lsa, u holda A yolg`on

B) Agar A bo`lsa, u holda 4 toq - chin

C) Agar A bo`lsa, u holda 4 toq - yolg`on

D) agar 5 toq bo`lsa, u holda A - yolg`on

50. B mulohazaning chin qiymatini toping.

A) $B \leftrightarrow (2+5=7) -$ chin

B) $B \to (2-1=0) -$ yolg`on

C) $(2 \cdot 3 = 6) \to B -$ yolg`on

D) $\overline{B} \leftrightarrow (4 \cdot 2 = 8) -$ chin

51. Chin formulani toping.

A) $\overline{x \to y}$

B) $\bar{x} \to (y \vee z)$

C) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})$

D) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow (x \wedge \bar{y})$

52. Chin formulani toping.

A) $(x_1 \to x_2) \leftrightarrow (\bar{x}_1 \vee x_2)$ B) $(x_1 \vee x_2) \leftrightarrow \overline{x_1 \wedge x_2}$

C) $\overline{x_1 \vee x_2} \leftrightarrow (x_1 \wedge x_2)$ D) $(\bar{x}_1 \vee x_2) \leftrightarrow (x_1 \vee \bar{x}_2)$

53. Yolg`on formulani toping.

A) $(x \vee \wedge) \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{u})$ B) $(x \wedge y) \leftrightarrow (\overline{\bar{x} \vee \bar{y}})$

C) $(x \to y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee y)$ D) $(x \vee y) \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})$

54. Tavtologiyani toping

A) $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})$ B) $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$

C) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$ D) $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$

55. Tavtologiyani toping

A) $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (\bar{y} \rightarrow \bar{x})$ B) $(\overline{x \wedge y}) \leftrightarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})$

C) $(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \leftrightarrow (x \rightarrow y)$ D) $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)$

56. Tavtologiyani toping

A) $(x \rightarrow y) \equiv u$ B) $(x \rightarrow y) \equiv (\bar{x} \vee y)$

C) $(x \rightarrow y) \equiv (\bar{y} \rightarrow x)$ D) $(x \rightarrow y) \equiv (y \rightarrow \bar{x})$

57. $\tilde{\alpha} = (01110011)$, $\tilde{\beta} = (11010011)$ Vektorlar orasidagi Hemming (ρ) masofasini toping.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

58. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow (x_1 \vee x_2)) \rightarrow x_3$ funksiyadagi muhim o`zgaruvchilarni aniqlang

A) x_1, x_2 B) x_1 C) x_2 D) x_3

59. $\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee 0$ elementar dizyunksiya rangini aniqlang

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

60. $\bar{x} \rightarrow y$ funksiyaning Jegalkin ko`phadida qaysi qo`shiluvchi qatnashadi?

A) 1 B) x C) $\bar{x}\,\bar{y}$ D) $\bar{y}$

A D A B I YO T L A R

1. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику- М: Наука, 1986.

2. Нефедов В.Н. Осипова В.А. Курс дискретной математики -М: Изд-во МАИ, 1992.

3. Гаврилов Г.П, Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике- М: Наука, 1972.

4. Гаврилов Г.П, Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.-М: Наука, 1992.

5. Эршов Ю.Л. Палютин Е.А. Математическая логика. М: Наука, 1987.

6. Yoqubov T., Kallibekov S. Matematik mantiq elementlari. Toshkent, O`qituvchi, 1996

7. To`rayev H.T. Matematik mantiq va diskret matematika. Samarqand, 2003.

8. Акимов О.Е Дискретная математика. .Логика, группа, -М: ЛБЗ, 2001.

Mundarija

08.07.2005 yilda bosishga ruxsat etildi.

№1 buyurtma.

Adadi 220 nusxa