O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI
O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATEMATIKA FAKULTETI

KASYMOV N.Kh., DADAJANOV R.N.,
IBRAGIMOV F.N.

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQDAN MASALALAR TO'PLAMI

&

Toshkent-2017

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va O‘rta maxsus ta’lim vazirligi
Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy unversiteti
Matematika fakulteti

Kasymov N.Kh., Dadajanov R.N., Ibragimov F.N.

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQDAN MASALALAR TO’PLAMI

(uslubiy qo‘llanma)

Toshkent 2017

"Diskret matematika va matematik mantiqdan misol va masalalar to'plami"

Ushbu uslubiy qo'llanma "matematika", "informatika va axborot texnologiyalari", "Axborot tizimlarini matematik va dasturiy ta'minoti" ,"Axborot xavfsizligi" va "amaliy matematika va informatika" bakalavriyat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun mo'ljanlangan bo'lib, uning tarkibiga nazariy bilimlar, amaliy mashg'ulotlap uchun va mustaqil ta'lim uchun nazorat savollari va test savollari, hamda misollar kiritilgan.

Сборник задач по дискретной математики и математической логики

Данное методическое пособие рассчитано для студентов бакалаврията направлений «математика», «информатика и информационные технологии», «информационные безопасности», «прикладная математика и информатика» и «математическое и программное обеспечение информационных систем». В пособие приведены теоретические знания, примеры, вопросы для контроля, также тестовые вопросы.

"Exercises on discreet mathematic and mathematical logic"

This manual may be useful for students of educational directions "Mathematics", "Applied mathematics and informatics", "Informatics and information technologies", "Informational security"and "Mathematical and program support of information systems". There are theoretical knowledge, exercises and test questions.

Mualliflar:

1. Fizika-matematika fanlari doctori
Kasymov Nadimulla Khabibullayevich

2. Fizika-matematika fanlari nomzodi
Dadajanov Ruzmat Normatovich

3. Fizika-matematika fanlari nomzodi
Ibragimov Farhod Nurmuhamadjonovich

Taqrizchilar:
1. Fizika-matematika fanlari nomzodi,
Normatov Erkin Panjiyevich

2. Fizika-matematika fanlari nomzodi
Adashev Jobir Qodirovich

Mas'ul muharrir:
Fizika-matematika fanlari doctori, professor Omirov Bahrom Abdazovich

O'zbekiston Milliy universiteti Ilmiy Kengashining 2016 yil 27 dekabrdagi 2-sonli bayonnomasiga asosan nashr etishga ruxsat etilgan.

Kirish

Mantiq fani alohida fan sifatida eramizdan avval IV asrda vujudga kelgan. Uning asoschisi Yunon faylasufi Aristoteldir (384-322). U mantiqiy ta'limotlarni ba'zi tarqoq bo'laklarini bir sistemasi keltirilgan bo'lib, u hozirgacha formal mantiq sifatida saqlanib kelmoqda.

Mantiq fani barcha fanlarning asosi bo'lishiga qaramay uni alohida fundamental fan sifatida, chuqur o'rganish XIX asrda noevklid geometriyasining paydo bo'lishidan boshlandi.

O'tgan asrning o'rtalaridan boshlab matematika fanini o'qitishda mantiq usullaridan keng foydalanib kelinmoqda. Masalan, matematik analizda, limitga ega bo'lmagan ketma-ketliklarning, tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyalarning ta'riflarini berishda kvantorlar nazariyasi usullaridan (ta'rif orqali berilgan jumlalarning inkorini topish usuli) foydalanib, yuqorida keltirilgan tushunchalarning aniq ta'riflari beriladi. O'quvchiga havola qilinayotgan ushbu qo'llanma, avtorlar tomonidan uzoq yillar davomida O'zMUning matematika fakultetida «Diskret matematika va matematik mantiq» fani bo'yicha o'qigan ma'ruzalari va amaliy mashg'ulotlari asosida yozilgan bo'lib, u O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan davlat standartlariga mos keladi.

Ushbu qo'llanmada to'plamlar nazariyasi mulohazalar algebrasi, predikatlar algebrasi, diskret matematika elementlari, shuningdek mulohazalar algebrasi uchun aksiomatik nazariyalar keltirilgan.

Xususan, qo'llanmada mulohazalar algebrasi uchun qurilgan aksiomatik nazariya mavjud adabiyotlarda keltirilgan aksiomatik nazariyalardan qisman farq qiladi. Biz keltirgan aksiomatik nazariya uchun ham Gyodelning to'liqlik haqidagi teoremasi o'z kuchida qoladi: mulohazalar algebrasining tavtologiyalar to'plami bilan uning teoremalar to'plami ustma-ust tushadi.

Ushbu qo'llanma universitetlar hamda pedagogika universitetlari talabalari uchun uslubiy qo'llanma sifatida tavsiya etiladi.

1-§.TO'PLAM. TO'PLAMLAR USTIDA AMALLAR

To'plam tushunchasi.

To'plam matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri. Bu tushunchani o'zidan soddaroq tushunchalar orqali (bunday tushunchalar yo'q) ta'riflab bo'lmaydi. Ayni paytda, to'plam tushunchasini misollar orqali anglash qiyin emas. Masalan, kutubxonadagi kitoblar to'plami, ushbu $x^3+4x^2-4x-16=0$ tenglamaning ildizlari to'plami, bitta nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami.

Demak, to'plam deganda biror umumiy xususiyatga ega bo'lgan narsalar (predmetlar) guruhi, majmuasi, yig'ilmasi tushiniladi.

To'plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan har qanday to'plam bo'sh to'plam deyiladi va uni $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Ikkita A va B to'plamlari berilgan bo'lsin.

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B ning qismi (qismiy to'plami, to'plam osti) deyiladi va $A\subset B$ kabi belgilanadi.

Misollar.

1) $A=\{0,\pi,2\pi\}, B=\{x:\sin x=0\}$, bo'lsin. Agar B to'plamning elementlar $\sin x=0$ tenglamaning echimlari, ya'ni $x=n\pi, n\in Z$ ko'rinishdagi sonlardan iborat ekanligini e'tiborga olsak, $A\subset B$ bo'ladi.

2) $A=\{2,4,6,8,...,2n,...\}, B=N=\{1,2,3,...,n,...\}$ bo'lsin.

Ravshanki, $A\subset B$ bo'ladi.

<u>*Eslatma.*</u> Bo'sh to'plam $\varnothing$ har qanday A to'plamning qismi deb qaraladi: $\varnothing\subset A$. Shuningdek $A\subset A$ bo'ladi.

*Biror A to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning **barcha qismiy** to'plamlaridan tashkil topgan to'plamni $P(A)$ kabi belgilaymiz.*

Odatda $P(A)$ to'plam A to'plamning buleani deyiladi.

Masalan $A=\{-1,0,1\}$ to'plamnig buleani

$$P(A)=\{\{-1\},\{0\},\{1\},\{-1,0\},\{0,1\},\{-1,1\},\{-1,0,1\},\varnothing\}$$ bo'ladi.

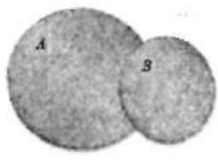
A va B to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar A to'plam B to'plamning qismi, B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, A va B to'plamlar teng to'plamlar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A=\{2,3\}, B=\{x:x^2-5x+6=0\}$ to'plamlar uchun $A=B$ bo'ladi.

To'plamlar ustida amallar.

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deyiladi va $A\cup B$ kabi belgilanadi (1-chizma)



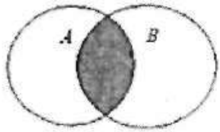
$A\cup B$

1-chizma.

Yuqorida keltirilgan $A_1, A_2, ..., A_n$ birlashmasi quyidagicha $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ yozish mumkin.

Umuman, yuqoridagidek biror α indeks $(\alpha\in I)$,bo'yicha A_α to'plamlar birlashmasi ta'riflanadi va u $\bigcup_{i\in I} A_i$ kabi belgilanadi.

A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va $A\cap B$ kabi belgilanadi (2-chizma).



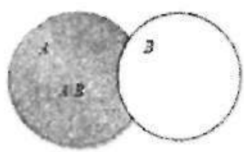
$A \cap B$

2-chizma

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{3,4,5,6,7\}, C=\{6,7,8,9,10\}$ bo'lsa,

$A \cap B=\{3,4,5\}, A \cap C=\varnothing, B \cap C=\{6,7\}$ bo'ladi.

A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi (3-chizma)



3-chizma.

Masalan, $A=\{-1,0,1,2,3,4\}, B=\{-1,0,1,2,5,6,7\}$ bo'lsa,

$A \setminus B=\{3,4\}$, va $B \setminus A=\{5,6,7\}$ bo'ladi.

Agar $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$, $N_1=\{2,4,6,8,\ldots\}$ bo'lsa,

$N \setminus N_1=\{1,3,5,7,\ldots\}$ bo'ladi.

1-misol. $A \setminus (B \cup C)=(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ isbotlang.

Yechish: $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ ni isbotlash uchun

$$A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cap(A\setminus C) \text{ va } A\setminus(B\cup C)\supset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$

munosabatlarning bajarilishini ko'rsatish etarli.

$\forall a\in A\setminus(B\cup C)$, bo'lsin. U holda $a\in A$, $a\notin B\cup C\Rightarrow a\notin B$ va $a\notin C$ bo'lib, $a\in A\setminus B$ va $a\in A\setminus C$ bo'ladi. Demak, $a\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, bundan $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ bo'lishi kelib chiqadi.

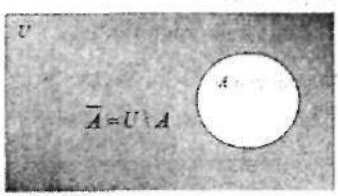
Endi $\forall a\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ bo'lsin. U holda $a\in(A\setminus B)$ va, $a\in(A\setminus C)\Rightarrow a\in A, a\notin B, a\notin C$ bo'lib, $a\in A, a\notin B\cup C$ bo'ladi.

Demak, $a\in A\setminus(B\cup C)$.

Bundan, $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\subset A\setminus(B\cup C)$ bo'lishi kelib chiqadi. ***Tenglik isbotlandi.***

Muayyan vaziyatdan chiqish uchun biror U to'plami (odatda uni universal to'plam deyiladi) olinib, uning qism to'plamlari ustida amallar bajariladi. (masalan, U deb doska tekisligidagi barcha nuqtalar to'plamini olish mumkin). X

Ushbu $U\setminus A$ to'plam A to'plamni U to'plamgacha to'ldiruvchi to'plami deyiladi va $\overline{A}$ kabi yoziladi:



4-chizma.

Ushbu $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ to'plamga A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $A\Delta B$ kabi belgilanadi.

2-Misol. Berilgan A,B,C to'plamlar uchun $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ assotsiativlik munosabati o'rinli ekanligi ko'rsatilsin.

Echish: Quyidagi belgilashni kiritaylik:

$$D = A\Delta B$$

U holda

$$(A\Delta B)\Delta C = D\Delta C = (D\cup C)\cap(\bar{D}\cup\bar{C})$$

bo'ladi.

Endi $D\cup C$ va $\bar{D}\cup\bar{C}$ larni hisoblaymiz:

$$((A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}))\cup C = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)$$

$$\overline{D}\cup\overline{C} = \overline{((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)}\cup\overline{C} = (\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{\overline{A}\cap B})\cup\overline{C} =$$
$$= ((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cup\overline{C} = (\overline{A}\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B}\cup\overline{C})$$

Shunday qilib,

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)\cap(\bar{A}\cup B\cup\bar{C})\cap(A\cup\bar{B}\cup\bar{C})$$

ekan.

Xuddi shunga o'xshash $B\Delta C$ ni D_1 orqali belgilab,

$$A\Delta D_1 = A\Delta(B\Delta C) = (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup C)\cap(\bar{A}\cup B\cup\bar{C})\cap(A\cup\bar{B}\cup\bar{C})$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, $A\Delta(B\Delta C) = A\Delta(B\Delta C)$ o'rinli bo'lar ekan.

Ravshanki, $A = B$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy C to'plam uchun $(A\Delta C) = (B\Delta C)$ bo'ladi.

Bu tasdiqning teskarisi o'rinli bo'larmikan?

3-misol. Biror C to'plam uchun $A\Delta C = B\Delta C$ bo'lsa, $A = B$ ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. $A\Delta C = B\Delta C$ dan $(A\Delta C)\Delta C = (A\Delta C)\Delta C$ ga ega bo'lamiz.

1-misol echimiga binoan esa, $(A\Delta C)\Delta C = A\Delta(C\Delta C) = A\Delta\varnothing = A$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$$(B\Delta C)\Delta C = B\Delta(C\Delta C) = B\Delta\varnothing = B$$

Demak, $A = B$ bo'lar ekan.

4-misol. $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ o'rinli ekanligini ko'rsatilsin.

Yechish. $A\setminus(B\cup C) = A\cap(\overline{B\cup C}) = A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) = (A\cap A)\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) =$

$(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C}) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

To'plamlarning dekart ko'paytmasi

$(a,b) = \{a,\{a,b\}\}$ *to'plamga tartiblangan juftlik deyiladi. Barcha* (a,b) *ko'rinishdagi juftliklardan tashkil topgan* $\{(a,b): a\in A, b\in B\}$ *to'plam* A *va* B *to'plamlarning* ***dekart (to'g'ri) ko'paytmasi*** *deyiladi va* $A\times B$ *kabi belgilanadi.*

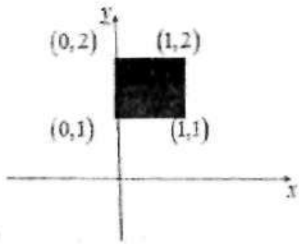
Demak, $A\times B = \{(a,b): a\in A, b\in B\}$

Masalan, $A = \{0,1\}$, $B = \{a,b\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A\times B$ quyidagicha

$A\times B = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$ bo'ladi. $B\times A$ esa ushbu

$B\times A = \{(a,0),(b,0),(a,1),(b,1)\}$ bo'ladi.

Keyingi misol tariqasida A to'plam deb $[0,1]$ segment nuqtalaridan iborat $A = \{x\in R: 0\le x\le 1\}$ to'plamni, B to'plam deb $[1,2]$ cegment nuqtalaridan iborat $B = [y\in R: 1\le y\le 2]$ to'plamni olaylik. Bu to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A\times B = \{(x,y): 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$ to'plam 5-chizmada tasvirlangan kvadrat nuqtalardan iborat to'plam bo'ladi:



5-chizma .

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$-ni isbotlaymiz.

Aytaylik, $x\in A\times(B\cap C)$ bo‘lsin. Unda $x=(a,d)$ bo‘lib,

$$a\in A,\ d\in B\cap C$$

bo‘ladi.

$$d\in B\cap C,$$

bo‘lishidan esa, $d\in B$, $d\in C$ ekanligini topamiz.

$$a\in A,\ d\in B;\quad (a,d)\in A\times B$$

$$a\in A,\ d\in C;\quad (a,d)\in A\times C$$

Demak,

$$(a,d)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

ya’ni

$$x\in(A\times B)\cap(A\times C)\,(1)$$

bo‘ladi.

Endi $x\in(A\times B)\cap(A\times C)$ bo‘lsin. Unda $x\in(A\times B)$, $x\in(A\times C)$ bo‘ladi.

Ta’rifga binoan

$$x\in A\times B;\ x=(a,b)\ ;\ a\in A\ ,\ b\in B$$

$$x\in A\times C\,;\ x=(a,c)\ ;\ a\in A,\ c\in C\quad \text{bo‘ladi.}$$

Ravshanki :

$$x=(a,b)=(a,c)\,; \quad b=c$$

$$(a,b)\in A\times(B\cap C)$$

Demak, $a\in A$, $b\in B\cap C$; ya'ni $x\in A\times(B\cap C)$ **(2) bo'ladi.**

(1) va (2) munosabatlardan

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

To`plamlar va ular ustida amallarga doir

mustaqil o`rganish uchun topshiriqlar

1. A-juft sonlar to'plami, B-5 ga karrali sonlar to'plami bo'lsin.

Bu to'plamlarning kesishmasi ularning umumiy elementlari –5 ga karrali juft sonlardan iborat bo'ladi. Lekin bir to'plam ikkinchi to'plamning to'plamostisi bo'la olmaydi: juft sonlar ichida 5 ga karrali bo'lmagan sonlar mavjud, 5 ga karrali sonlar ichida toq sonlar bor.

2. A- juft sonlar to'plami, B - 4 ga karrali sonlar to'plami.

4 ga karrali hamma sonlar juft sonlar, lekin hamma juft sonlar 4ga karrali emas. Shuning uchun A to'plam B to'plamning to'plamostisi bo'ladi, $B\subset A$.

3. A-juft sonlar to'plami, B- toq sonlar to'plami. Bu to'plamlarning umumiy elementlari mavjud emas.

$$A\cap B\neq\varnothing$$

4. A-juft sonlar to'plami, B - 2ga karrali sonlar to'plami. Barcha juft sonlar 2 ga karrali va 2 ga karrali sonlar juft sonlardir. Shuning uchun, A=B bo'ladi.

5. Eyler doiralari orqali elementlarining xarakteristik xossasi bilan berilgan to'plamlar ustida amallarni ko'ramiz.

I- sinfdagi o'quvchilar to'plami.

K- maktabdagi o'g'il bolalar to'plami.

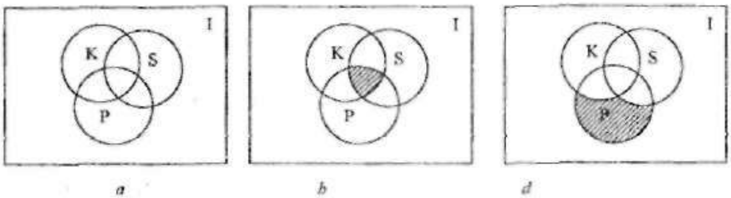
S-sport bilan shug'ullanuvchi o'quvchilar to'plami.

P- sinfdagi a'lochilar to'plami va $K \cap S \cap P \neq \varnothing$

a)Eyler doiralar orqali to'plamlarning tasvirlang.

b) $X = K \cap S \cap P$ ва $Y = (\overline{K} \cap P) \setminus S$ bo'lsa, X va Y to'plamlarning elementlarining xarakteristik xossalarini ko'rsating.

$K \cap S \cap P \neq \varnothing$ bo'lgani uchun ushbu to'plamlarni quyidagicha tasvirlash mumkin (5*a*-rasm).



5-rasm

X to'plam a'lochi va sport bilan shug'ullanuvchi o'g'il bolalardan iborat (5*b*-rasm).

Y- sport bilan shug'ullanmaydigan a'lochi qizlar to'plami (5*d*-rasm).

6. A.Navoiy kutubxonasiga a'zo bo'lgan 100 o'quvchidan 40 tasi mumtoz adabiyotga qiziqadi, 50 tasi hozirgi zamon adiblarining asarlariga qiziqadi. Ikkala janrga qiziquvchi o'quvchilar qancha bo'lishi mumkin.(A.Navoiy kutubxonasini hozirgi ko'rinishi)

7. Bizga $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, k, d, f, x, l\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

A va B to'plamlarning birlashmasini topish uchun A va B to'plamga tegishli barcha elementlarini yozib olinadi. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, k, f, x, l\}$.

A va B to'plamlarning kesishmasi A va B to'plamga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuziladi. $A \cap B = \{b, d\}$.

8. Agar to'plamlar elementlarning xarakteristik xossasiga ko'ra berilgan bo'lsa, u holda ular ustida birlashma, kesishma amallari quyidagicha bajariladi:

Agar A-Toshkent shahrida yashovchi talabalar to'plami, B-o'zbek tilida ta'lim oluvchi talabalar to'plami bo'lsa, u holda

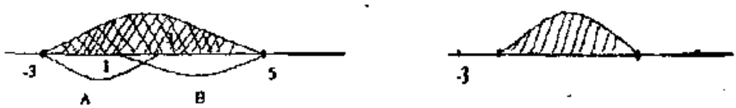
$A\cup B$ - *Toshkent shahrida yashovchi yoki o'zbek tilida ta'lim oluvchi* talabalar to'plamidan iborat bo'ladi.

$A\cap B$ - Toshkent shahrida yashovchi va o'zbek tilida tahsil olayotgan talabalar to'plami.

9. Agar $\begin{array}{l} A=\{a/1\le a\le 5\}, a\in R \\ B=\{b/|b|<3, b\in R\}=\{b/-3<b<3, b\in R\}\end{array}$

U holda,

$A\cup B=\{x/-3<x\le 5\}$ $\qquad$ $A\cap B=\{x/1\le x<3\}$



6-rasm

10. $A=\{a/a>2, a\in N\}$ - 2 dan katta bo'lgan natural sonlar to'plami.

11. Agar A-Toshkent shahrida yashovchi talabalar to'plami, B- o'zbek tilida ta'lim oluvchi talabalar to'plami bo'lsa, u holda

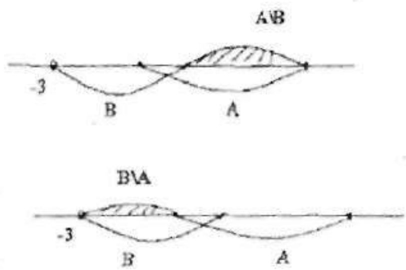
$A\setminus B$ - Toshkent shahrida yashovchi, lekin o'zbek tilida ta'lim olmaydigan talabalar to'plami.

$B\setminus A$ - o'zbek tilida ta'lim oluvchi, lekin Toshkent shahrida yashamaydigan talabalar to'plami.

12. Agar $\begin{array}{l} A=\{a/1\le a\le 5\}, a\in R \\ B=\{b/|b|<3, b\in R\}=\{b/-3<b<3, b\in R\}\end{array}$

$A\setminus B=\{x/3\le x\le 5\}$

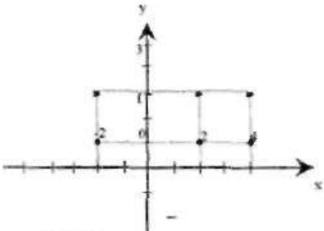
$3\notin B$, u holda $3\in A\setminus B$ $\qquad$ $\begin{array}{ll} B\setminus A=\{x/-3<x<1\} & \\ 1\in A, & 1\notin B\setminus A\end{array}$



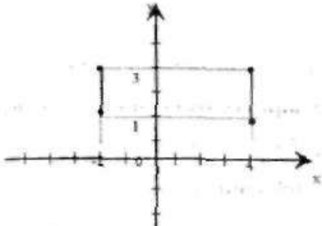
7-rasm

13. Koordinatalar tekisligida sonli to'plamlarning Dekart ko'paytmasini quyidagicha tasvirlanadi.

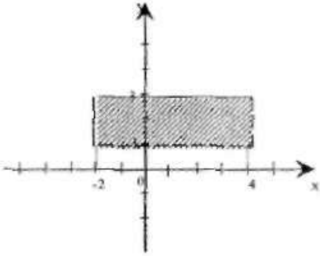
1. A={-2;2;4}; B={1; 3} (8a-rasm)
2. A={-2;4}; B=[1; 3] (8b-rasm)
3. A=[-2;4), B=(1; 3] (8d-rasm)
4. A={-2;2}; B=R (8e-rasm)
5. A=[-2;4]; B=R (8f-rasm)
6. A=R; B=[-1; 3) (8g-rasm)



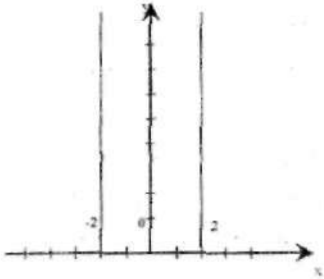
8a-rasm



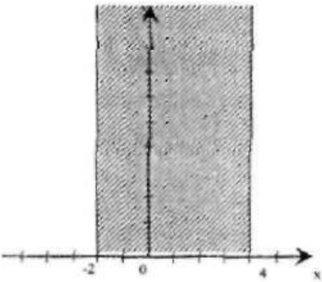
8b-rasm



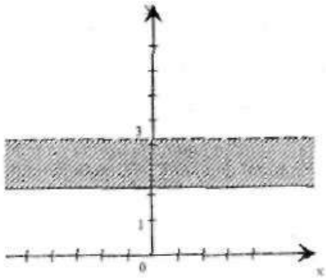
8d-rasm



8e-rasm



8f-rasm



8g-rasm

To'plamlar va ular ustida amallarga doir

mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi berilgan to'plamlar orasidagi ***munosabatni aniqlang:***

1. A-juft natural sonlar to'plami.

   B-7 ga karrali natural sonlar to'plami.

2. A-parallellogrammlar to'plami.

   B-kvadratlar to'plami.

3. C-to'rtburchaklar to'plami.

   D-to'g'ri ko'pburchaklar to'plami.

4. A-5 ga karrali sonlar to'plami.

   B-10 ga karrali sonlar to'plami.

5. D-teng yonli uchburchaklar to'plami.

   E-to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami.

6. F-BTU mutaxassisligi talabalari to'plami.

   K-sport bilan shug'ullanadigan talabalar to'plami.

7. L-toq natural sonlar to'plami.

   M-5 ga karrali natural sonlar to'plami.

8. P-ikki xonali sonlar to'plami.

   K-3 ga karrali natural sonlar to'plami.

9. X-uchburchaklar to'plami.

   Y-to'rtburchaklar to'plami.

10. A-Kutubxonadagi mavjud kitoblar.

    B-darsliklar to'plami.

11. A- 4 sinf o'quvchilari to'plami.

    B-a'lochilar to'plami.

12. A- Alfavitdagi harflar to'plami.

    B- Unli harflar to'plami.

13. A- Barcha juft sonlar to'plami.

    B- 4 ga bo'linadigan barcha natural sonlar to'plami.

14. A- 10 dan kichik natural sonlar to'plami.

B- *Juft natural sonlar to'plami.*

15. P- teng yonli uchburchaklar to'plami.

K- *teng tomonli* uchburchaklar to'plami.

16. P- teng yonli uchburchaklar to'plami.

K- *to'g'ri* burchakli uchburchaklar to'plami.

17. A- barcha juft sonlar to'plami.

B- 5 ga karrali sonlar to'plami.

18. A- 45^o li burchagi bor uchburchaklar to'plami.

B- *teng yonli uchburchaklar to'plami.*

19. A- romblar to'plami.

B- *beshburchaklar to'plami.*

20. A- sinfdagi o'quvchilar to'plami.

B- *sinfdagi a'lochilar to'plami.*

21. S-trapetsiyalar to'plami.

D- parallelogrammlar to'plami.

22. A- bir xonali sonlar to'plami.

B- bir *xonali* toq sonlar to'plami.

23. A- bir xonali sonlar to'plami.

B- 3 ga karrali sonlar to'plami.

24. N-natural sonlar to'plami.

Z- Butun sonlar to'plami.

25. A- ikki xonali sonlar to'plami.

B- *juft natural sonlar* to'plami.

26. A- ikki xonali sonlar to'plami.

B- 3 ga bo'linadigan natural sonlar to'plami.

27. A- manfiy sonlar to'plami.

B- musbat sonlar to'plami.

28. A- maktabdagi o'quvchilar to'plami.

B- a'lochi o'quvchilar to'plami.

Elementlarini xarakterlovchi xossalari bo'yicha berilgan to'plamlar ustida amallarni bajaring:

1. D – 7 dan katta natural sonlar to'plami, M – juft natural sonlar to'plami, P – 3 ga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa,

   a) Eyler doirasi yordamida N, D, M, P to'plamlarni tasvirlang.

   b) $X=(D\cap M)\setminus P, \quad Y=(D\cup M)\cap P$ sohani shtrixlang va xarakterlovchi xususiyatini ko'rsating.

   d) quyidagi jumlalarning rostmi yoki yolg'onligini isbotlang.

   «agar X – juft son bo'lsa, u 3 ga karrali va $x\in X$» «5, 7, 9, $\in Y$»

2. M – juft natural sonlar to'plami, K – 4 ga karrali natural sonlar to'plami, P – 7 ga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa,

   a) M, K, P, N to'plamlarni Eyler doirasida ko'rsating.

   b) $X=M\cup(\overline{K}_N\cap P)$ sohani shtrixlang va xarakterlovchi xossasini ko'rsating.

   d) 7, 8, 12, 15 sonlarining X to'plamga tegishliligini ko'rsating.

3. Y – Matematika fakulteti talabalari to'plami, A-qizlar to'plami, B – a'lochilar to'plami, C – sportchilar to'plami bo'lsa,

   a) Eyler doirasi yordamida Y, A, B, C to'plamlarni ko'rsating.

   b) $X=(A\cap B)\setminus C, \quad Y=A'\cap(B\cup C)$ sohalarni shtrixlang elementlarining xarakteristik xossasini ko'rsating.

   d) «Agar y – student sport bilan shug'ullanadigan bo'lsa, u holda $y\in Y$» «Agar X sport bilan shug'ullanmaydigan a'lochilar bo'lsa, u holda $x\in X$» jumlaning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini toping.

4. M – toq natural sonlar to'plami, K – 8 ga karrali natural sonlar to'plami, P – 5 ga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa,

   a) Eyler doiralari yordamida M, K, P, N to'plamlarni chizing.

b) $X = M \cup (K \cap P)$ va $Y = (\overline{M} \cap K) \cup N$ sohani shtrixlab, xarakteristik xususiyatini ko'rsating.

d) 7, 10, 15, 16 sonlari X, Y to'plamlarning qaysi biriga tegishli?

5. J –maktab o'quvchilari to'plami, D –maktabdagi qizlar to'plami, K –3 sinf o'quvchilari to'plami, P – a'lochilar to'plami bo'lsa,

a) J, D, K, P to'plamlarning Eyler doirasi yordamida to'plamlarni tasvirlang.

b) $X = (P \cup K) \cap \overline{D})$ ва $Y = \overline{D} \cap K \setminus P$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) «agar X – 3 sinf o'quvchisi bo'lsa, u holda $x \in X$ », «agar y – a'lochi o'quvchi bo'lsa, y holda $y \in Y$ », jumlalarning to'g'riligini isbotlang.

6. A –tekislikda ko'pburchaklar to'plami, B – to'g'ri ko'pburchaklar to'plami, C –uchburchaklar to'plami, D – to'rtburchaklar to'plami bo'lsa,

a) A, B, C, D to'plamlarning Eyler doirasi yordamida to'plamlarni tasvirlang.

b) $X = D \cup (C \setminus B)$ ва $Y = (B \cap C) \setminus C$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) to'g'ri ko'pburchaklar va to'rtburchaklar X va Y to'plamlarga tegishlimi?

7. N – natural sonlar to'plami, D – juft natural sonlar to'plami, E –ikki xonali natural sonlar to'plami, A – 5 ga karrali natural sonlar to'plami bo'lsa,

a) D, E, A, N to'plamlarning Eyler doiralari yordamida tasvirlang.

b) $X = (D \cup E) \setminus A)$ ва $Y = (\overline{D}_N \cap A) \cup E$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) 5, 18 sonlari X va Y to'plamlardan qaysi biriga tegishli?

8. M – toq natural sonlar to'plami, K – 11 ga karrali natural sonlar to'plami, P – 5 ga karrali natural sonlar to'plami, N – natural sonlar to'plami bo'lsa,

a) M, K, P, N to'plamlarning Eyler doiralari yordamida tasvirlang.

b) $X = (\overline{M}_N \cap K) \setminus P)$ ва $Y = (M \setminus P) \cup K$ sohalarni shtrixlab, xarakteristik xossasini ko'rsating.

d) $9 \in X$, $10 \in Y$, $11 \notin X$, $12 \notin Y$ to'g'ri noto'g'riligini toping.

9. K –tekislikda uchburchaklar to'plami, D – teng yonli uchburchaklar to'plami, A – teng tomonli uchburchaklar to'plami, M – to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami bo'lsa,

   a) $X=(D\setminus A)\cup M$; $Y=(D\cap M)\cap A$ ni Eyler doiralari yordamida tasvirlang

   b) $X=(D\setminus A)\cap M$; $Y=(D\cup M)\cap A$ sohani shtrixlang va xarakteristik xossalarini ko'rsating.

   d) «agar x to'g'ri burchakli uchburchak bo'lsa, u holda $x\in X$ bo'ladi» «agar y teng yonli uchburchak bo'lmasa, u holda $y\notin Y$» to'g'ri noto'g'riligini isbotlang.

10. S – to'rtburchaklar to'plami, A – trapetsiyalar to'plami, B –parallelogrammlar to'plami, C – to'g'ri burchakli to'rtburchaklar to'plami bo'lsin.

   a) S, A, B, C to'plamlarning Eyler doiralari yordamida tasvirlang.

   b) $X=(S\setminus A)\cap B$, $Y=(S\cup C)\cap A$ sohalarni shtrixlang, xarakteristik xossasini ko'rsating.

   d) «agar x – to'g'ri burchakli trapetsiya bo'lsa, u holda $x\in X$ bo'ladi» «agar y –parallelogramm bo'lsa, u holda $y\notin Y$ bo'ladi».

Berilgan to'plamlar orasidagi $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\times B$, $B\times A$ amallarni bajaring va chizmalarda tasvirlang:

1. $A=\{a\,|\,-3\le a<5, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,3\le b\le 6, b\in R\}$.
2. $A=\{a\,|\,-2<a\le 3, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,1\le b<5, b\in R\}$.
3. $A=\{a\,|\,-5<a<-2, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,-3<b<-1, b\in R\}$.
4. $A=\{a\,|\,-3\le a\le 1, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,-1<b\le 2, b\in R\}$.
5. $A=\{a\,|\,2\le a<5, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,-4<b<3, b\in R\}$.
6. $A=\{a\,|\,|a|<3, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,0\le b<4, b\in R\}$.
7. $A=\{a\,|\,1\le a\le 4, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,|b|\le 2, b\in R\}$.
8. $A=\{a\,|\,-5<a<-3, a\in R\}$, $B=\{b\,|\,-4<b<1, b\in R\}$.

9. $A=\{a|1<a<5, a\in R\}$, $B=\{b|4\le b\le 6, b\in R\}$.

10. $A=\{a|3\le a\le 7, a\in R\}$, $B=\{b|1\le b\le 5, b\in R\}$.

11. $A=\{a|0\le a\le 7, a\in R\}$, $B=\{b|-3<y<2, b\subset R\}$.

12. $A=\{a|-2<a\le 3, a\in R\}$, $B=\{b|1\le b<5, b\in R\}$

13. $A=R$, $B=\{2,4,6\}$.

14. $A=\{-2,2,4\}, B=R$.

15. $A=\{a||-3<a<4, a\in R\}$, $B=\{-2,0,2,4\}$.

16. $A=\{5,6,7\}$, $B=\{b|b>2b\in R\}$.

17. $A=[1;5]$, $B=[-3;3]$.

18. $A=\{a||a<2, a\in R\}$, $B=R$.

19. $A=\{a||a|<2, a\in R\}$, $B=R$.

20. $A=R$, $B=\{b||b|<3, b\in R\}$.

21. $A=[2;2]$ $B=\{2,3,4\}$.

22. $A=[2;2]$ $B=[2;4]$,

23. $A=R$, $B=[2,4\ ]$

24. $A=\{0,2,4,6\}$, $B=\{1,3,5\}$,

25. $A=\{a|\ a<3, a\in R\}$, $B=R$,

26. $A=\{a|\ a\le 2, a\in R\}$, $B=\{b||b|=3\ b\in R\}$,

27. $A=[4,6]$, $B=[3,5]$.

28. $A=[0,\infty[$, $B=[4,21]$,

29. $A=]-100,10[$, $B=]10,33]$,

30. $A=]0,\infty[$, $B=]-2;2]$.

Isbotlashga doir masalalar.

1. A va B to'plamlar uchun $A\subseteq B$ **bo'lishi uchun** $A\cap B=A$ **bo'lishi zarur va** etarli ekanligi ko'rsatilsin.
2. A-to'plam o'nta elementdan **iborat bo'lsa,** $P(A)$ **nechta elementdan iborat** bo'ladi?

3. $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ bo'lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo'ladi?

4. A va B to'plamlar U to'plamning chekli qism to'plamlari bo'lsa, quyidagilar isbotlansin:

а) агарда $A\cap B=\varnothing$ бўлса, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$;

б) $n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B)$;

в) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

5. Quyida keltirilgan munosabatlar o'rinli bo'lsa, isbotini keltiring, aks holda o'rinli emasligini tasdiqlovchi misol keltiramiz:

5.1. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
5.2. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$
5.3. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
5.4. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
5.5. $A\cup(A\cap B)=A$
5.6. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$
5.7. $A\cap(A\cup B)=A$
5.8. $(A\vartriangle B)\cap C=(A\cap C)\vartriangle(B\cap C)$
5.9. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B$
5.10. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus B$
5.11. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
5.12. $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$
5.13. $(A\cup B)\setminus(A\cap C)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$
5.14. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\vartriangle(B\setminus C)$
5.15. $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$
5.16. $(A\vartriangle B)\setminus C=(A\setminus C)\vartriangle(B\setminus C)$
5.17. $(B\cup C)\setminus A=(B\setminus A)\cup(C\setminus A)$
5.18. $A\setminus B=A\cap\overline{B}$
5.19. $B\cup(A\setminus B)=A\cap B$
5.20. $(A\cup B)\setminus(A\cap C)=(A\cup\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
5.21. $B\cap(A\setminus B)=\varnothing$
5.22. $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\cup(A\cap B)$
5.23. $A\setminus(B\cup C)=(A/B)\cap(A\setminus C)$
5.24. $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$
5.25. $A\setminus(B\cap C)=(A/B)\cup(A\setminus C)$

6. X to'plamning ixtiyoriy A, B va C qism to'plamlari uchun tasdiqlar to'g'ri ekanligi isbotlansin

6.1. $A \setminus B = A \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

6.2. $A \subset C \to A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

6.3. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \leftrightarrow A = B$

6.4. $A \cup B = \varnothing \leftrightarrow A = \varnothing \& B = \varnothing$

6.5. $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \leftrightarrow A \cap B = A$

6.6. $A \setminus B = A \leftrightarrow B \setminus A = B$

6.7. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \leftrightarrow C \subset A$

6.8. $A \setminus B = A \leftrightarrow B \setminus A = B$

6.9. $A = B \cup C \to A \setminus B \subset C$

6.10. $A \setminus B = A \cap B \leftrightarrow A = \varnothing$

6.11. $B \subset A \to (A \setminus B) \cup B = A$

6.12. $A \cup B \subset C \leftrightarrow A \subset C \& B \subset C$

6.13. $A \cap B = \varnothing \to (A \cup B) \setminus B = A$

6.14. $C \subset A \cap B \leftrightarrow C \subset A \& C \subset B$

6.15. $A \subset B \to A \setminus C \subset B \setminus C$

6.16. $A \subset B \subset C \leftrightarrow A \cup B = A \cap C$

6.17. $A \subset B \to A \cap C \subset B \cap C$

6.18. $(A \cup B) \setminus B = A \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

6.19. $A \subset B \to A \cup C \subset B \cup C$

6.20. $(A \setminus B) \cup B = A \leftrightarrow B \subset A$

6.21. $B \subset A \& C = A \setminus B \to B \cup C$

6.22. $C = A \Delta B \to A \Delta C = B$

6.23. $C = A \setminus B \to B \cap C = \varnothing$

6.24. $A \subset B \leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

6.25. $B \cap C = \varnothing \& A \cap C = \varnothing \to A \setminus B = \varnothing$

Testlar

1. A –barcha juft sonlar to'plami

$A = \{a \mid a = 2n,\ n \in N\}$,

B – barcha toq sonlar to'plami ,

$B = \{b \mid b = 2n-1,\ n \in N\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \cup B = N$

b) $A \cup B = Q$

d) $A \cup B = R$

e) $A \cup B = Z$

2. $A = \{a \mid 4 \le a \le 14,\ a \in N\}$,

$B = \{b \mid 10 < b < 19,\ b \in N\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \cap B = \{x \mid 11 \le x \le 14,\ x \in N\}$.

b) $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 19,\ x \in N\}$.

d) $A \cap B = \{x \mid 10 < x < 14,\ x \in N\}$.

e) $A \cap B = \{x \mid 11 \le x \le 19,\ x \in N\}$.

3. $A = \{a \| a |< 4, a \in R\}$, $B = \{b \| b | \le 2, b \in R\}$ **berilgan bo'lsa**, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2 \bigcup 2 < x < 4\}$.

b) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2\}$.

d) $A \setminus B = \{x \mid 2 < x < 4\}$.

e) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < 4\}$.

4. $A = \{2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.

a) $A \times B = \{(2;a),(2;b),(2;c),(3;a),(3;b),(3;c)\}$.

b) $A \times B = \{(2;b),(2;a),(3;a),(c;2),(c;3)\}$.

d) $A \times B = \{(a;3),(a;2),(b;a),(c;a)\}$.

e) $A \times B = \{(2;c),(2;b),(2;a),(3;a),(3;b),(3;c)\}$.

5. $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$ sonli to'plamlar **uchun xarakteristik xossani formula** bilan bering.

a) $C = \{c \mid c \le 9, C \in N\}$.

b) $C = \{c \mid c < 11, C \in N\}$.

d) $C = \{c \mid c > 10, C \in R\}$.

e) $C = \{c \mid c \ge 9, C \in N\}$.

6. $B = \{-2;-1;0;1;2;3;4;5;6\}$ **ni formula bilan yozing.**

a) $B = \{x \mid -2 \le x \le 6, x \in Z\}$.

b) $B = \{x \mid -2 < x \le 6, x \in N\}$.

d) $B = \{x \mid -2 > x > 6, x \in Z\}$.

e) $B = \{x \mid -1 < x < 10, x \in R\}$.

7. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ **berilgan bo'lsa, to`g`ri tenglikni toping.**

a) $A \ne B$.

b) $A = B$.

d) $A > B$.

e) $A < B$.

8. Tengliklarning qaysi birida distributivlik xossasi to'g'ri ko'rsatilgan?

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$.

d) $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$.

e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

9. $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{1;5\}$ berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) $A / B = \{2,3\}$.

b) $A / B = \{1,5\}$.

d) $A / B = \{1,2\}$.

e) $A / B = \{3,5\}$.

10. A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) $A \cap B = \{2; 7\}$.

b) $A \cap B = \{\varnothing\}$.

d) $A \cap B = \{5; 9\}$.

11. A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) $A \cup B = \{2; 5; 7; 9\}$.

b) $A \cup B = \{2; 4; 5; 7; 9\}$.

d) $A \cup B = \{\varnothing\}$.

12. A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{5; 9\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2\}$.

d) $A \setminus B = \{\varnothing\}$.

13. Agar A={1; 2; 3; 4}, B={1; 2} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) $A \setminus B = \{3; 4\}$.

b) $A \setminus B = \{1; 2\}$.

d) A\ B = {∅}.

14. Agar A={1; 2; 3}, B={3; 4; 5; 6} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) A\B = {1; 2}.

b) A\B = {1; 2; 3}.

d) A\B = {3; 4}.

15. Agar A={1; 2; 5}, B={3; 4} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.

a) A\B = {∅}.

b) A\B = {1; 2; 5}.

d) A\B = {3; 4}.

16. Agar A={1; 2}, **B={1; 2; 3} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.**

a) A\B = {1; 2}.

b) A\B = {∅}.

d) A\B = {1; 2; 3}.

17. Agar A={2; 5; 7; 9}, **B={2; 4; 7} berilgan bo'lsa, to'g'ri tenglikni toping.**

a) A\B = {∅}.

b) A\B = {1; 2; 3}.

d) to'g'ri javob yo'q?

2 -§. BINAR MUNOSABATLAR

Binar munosabat tushunchasi

Ushbu paragrafda matematikada o'rganiladigan munosabatlarni bayon etamiz.

2.1 - t a ' r i f. *$A\times B$ to'plamning ixtiyoriy R qism to'plami $(R\subset A\times B)$ A va B to'plamlar orsidagi binar munosabat deyiladi. Bu binar munosabat A va B to'plamlarda aniqlangan deyiladi.*

Xususan, $A=B$ bo'lsa, $R\subset A\times A$ binar munosabat A da aniqlangan binar munosabat deb qaraladi.

Binar munosabatlar, odatda $R, Q, R,$ ... - kabi belgilanadi.

2.1.-misol.

$A=\{2,5,4,6\}$ bo'lsin, $E=\{(x,y):x=y\}\subset A\times A$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda $E=\{(2,2),(5,5),(4,4),(6,6)\}$ bo'ladi. R munosabat xRu ; $x=u$ tenglikni bildiradi.

Binar munosabatlar ustida amallar.

Endi binar munosabatlar ustida bajariladigan amallarni qaraymiz.

Binar munosabatlarda birlashma, kesishma, ayirma amallari bilan bir qatorda, ulargagina xos bo'lgan teskari hamda ko'paytma amallari kiritiladi.

A va B to'plamlarda R munosabat berilgan bo'lsin: $(x,y)\subset R$, $R\subset A\times B$ $B\times A$ to'plamda aniqlangan ushbu $Q=\{(y,x):(x,y)\in R\}$ munosabat, berilgan munosabatga teskari munosabat deyiladi.

Uni R^{-1} kabi belgilanadi.

Demak , $R^{-1}=\{(y,x):(x,y)\in R\}$

A va B to'plamda $R_1(R_1\subset A\times B)$, B va C da $R_2(R_2\subset B\times S)$ munosabatlar berilgan bo'lsin. B to'plamda shunday y element topilib, $(x,y)\in R_1$,

$(y,z)\in R_2$ bo'lsin.

Shunday (x,z) lardan tuzilgan ushbu

$R_1\cdot R_2=\{(x,z):\exists y\in B,(x,y)\in R_1,(y,z)\in R_2\}\subset A\times C$ to'plamga R_1 va R_2 binar munosabatlarning ko'paytmasi deyiladi va $R_1\cdot R_2$ kabi belgilanadi.

Binar munosabat turlari

Aytaylik, A to'plamda biror $R\subset A\times A$ munosabat berilgan bo'lsin.

A to'plamning ixtiyoriy x elementi uchun xRx bo'lsa, R refleksiv munosabat deyiladi.

A to'plamning ixtiyoriy x va y elementlari R munosabatda (xRy) bo'lishidan, y va x elementlarning ham shu munosabatda, ya'ni yRx bo'lishi kelib chiqsa, R simmetrik munosabat deyiladi.

A to'plamning ixtiyoriy x, y va z elementlari uchun x va y ning R munosabatda (xRy), y va z larning ham shu munosabatda (yRz), bo'lishidan x va z elementlarining R munosabatda (xRz) bo'lish kelib chiqsa, R tranzitiv munosabat deyiladi.

A to'plamning ixtiyoriy x va y elementlari xRy va yRx munosabatlarda bo'lishidan $x = y$ kelib chiqsa, R antisimmetrik munosabat deyiladi. Bu holda $R \cap R^{-1} = E$ bo'ladi.

2.2-m i s o l. Ushbu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ to'plamni olaylik.

Bu to'plamda quyidagi binar munosabatlarini qaraymiz :

1) R_1 munosabat: $\forall x, y \in A$, $xR_1y : x - y$ ayirmaning 3 ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

2) R_2 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_2y : x$ ning y dan kichik yoki tengligini ifodalasin;

3) R_3 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_3y : y$ ning x ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

4) R_4 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_4y : 0$ $x \cdot y$ ko'paytmaning manfiy emasligini ifodalasin;

5) R_5 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_5y : x$ ninig kvadrati y ning kvadratiga teng ekanligini ifodalasin.

Ravshanki, R_1, R_2, R_4, R_5 -refleksiv, R_1, R_4, R_5 - simmetrik, R_1, R_2, R_3, R_5 tranzitiv, y -antisimmetrik, hamda chiziqli munosabatlar bo'ladi. Bu holat quyidagi jadvaldan yaqqol ko'rinadi.

Ekvivalentlik munosabati

Agar R refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabat bo'lsa, uni ekvivalentlik munosabati deyiladi.

2.3-m i s o l . A - tekislikdagi to'g'ri chiziqlar to'plami bo'lsin. R binar munosabat A to'plamining ixtiyoriy to'g'ri chiziqlarining o'zaro paralel bo'lishi munosabatini ifodalasin:

$$R = \{(x, y) \in A \times A : x \quad parallel \quad y\} \; R \subset A \times A$$

Ravshanki, bu munosabat refleksiv (har bir to'g'ri chiziq o'zi o'ziga parallel bo'ladi), simmetrik (agar x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, y to'g'ri chiziq ham x to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi) hamda tranzitiv (agar x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa, y to'g'ri chiziqqa z to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda x to'g'ri chiziq z to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi). Demak, A to'plamda aniqlangan bunday munosabat ekvivalentlik munosabat bo'ladi.

To'plam elementlari orasida ekvivalentlik munosabatining bo'lishi bu to'plam elementlarini o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish imkonini beradi.

Biror M to'plam va $\{M_i (i \in N)\}$ to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agar $\{M_i\} (i \in N)$ to'plamlar sistemasi uchun ushbu

1. $\bigcup_{i \in I} M_i = M$

2. $M_i \cap M_j = \varnothing \; (i \neq j)$ *shartlar bajarilsa,* $\{M_i\}$ *sistema* M

to'plamda bo'laklashni bajaradi deyiladi.

2.4-misol.

a) $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ bo'lsin. Ushbu $M_1 = \{1,2\}$,

$M_2 = \{3,4\}$, $M_3 = \{5,6\}$ to'plamlar M da bo'laklashni bajaradi, chunki

1) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$

2) $M_1 \cap M_2 = \varnothing, M_1 \cap M_3 = \varnothing, M_2 \cap M_3 = \varnothing$ bo'ladi.

b) $M = N$ bo'lib , $M_i = \{i\}$ $i = 1,2,...$ bo'lsin.

Ravshanki, $\cup M_i = N = M$ $M_i \cap M_j = \{i\} \cap \{j\} = \varnothing \; (i \neq j)$ bo'ladi.

Demak, berilgan $M = N$ to'plam $M_i = \{i\}$ to'plamlarga bo'laklangan.

2.1.-teorema. *Har qanday ekvivalentlik munosabati R uchun shunday π_R bo'laklash topiladiki, $R_{\pi_R} = R$ bo'ladi.*

Tartiblangan to'plamlar

Biror M to'plam ($M \neq \varnothing$) berilgan bo'lib, bu to'plamda R binar munosabat aniqlangan bo'lsin.

Agar R – refleksiv, tranzitiv va antisimetrik bo'lsa, u holda R munosabat M to'plamda aniqlangan qisman tartib munosabat deyiladi. M to'plam qisman tartiblangan to'plam deyiladi.

Odatda qisman tartib munosabat R ni $\leq$ simvol orqali belgilanadi. Shuni e'tiborga olib, keyinchalik qisman tartiblangan to'plamni $(M, \leq)$ kabi belgilaymiz.

Agar qisman tartiblangan $(M, \leq)$ to'plamning ixtiyoriy x, y elementlari $x \leq y$ yoki $y \leq x$ munosabatda bo'lsa, u holda $(M, \leq)$ chiziqli tartiblangan to'plam deyiladi.

2.5-m i s o l. Barcha natural sonlardan iborat $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ to'plamni olaylik. Bu to'plamyning ixtiyoriy n va m elementlari orasidagi $n \leq m$ munosabat n ning m dan kichik yoki tengligini ifodalasin.

Ravshanki, $(N, \leq)$ to'plam chiziqli tartiblangan to'plam bo'ladi.

2.6-m i s o l. $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ to'plamning ixtiyoriy n va m ($n \in N$, $m \in N$) elementlari orasida $n \leq m$ munosabat m ning n ga qoldiqsiz bo'linishini ($m/n = k$, $k \in N$) ifodalasin.

Bu holda $(N, /)$ to'plam qisman tartiblangan to'plam bo'ladi.

Agar tartiblangan $(M, \leq)$ to'plamning biror S qisim to'plami uchun $(S, \leq)$ chiziqli tartiblangan to'plam bo'lsa, $(S, \leq)$ zanjir deyiladi.

Masalan $(N, /)$ ning ushbu $S = \{2^n;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ qisim to'plami uchun $(S, \leq)$ zanjir bo'ladi.

Aytaylik, tartiblangan $(M,\leq)$ *to'plam berilgan bo'lib,* $m \in M$ *bo'lsin.* M *to'planning barcha* x *elemenlari uchun* $x \leq m$ $(m \leq x)$ *munosabat o'rinli bo'lsa,* m *element* M *to'plamning* ***eng katta (eng kichik) elementi*** *deyiladi.*

Odatda, tartiblangan $(M,\leq)$ to'plamning eng katta elementi uning biri, eng kichik elementi esa uning noli deyiladi. Ba'zan M ning universal chegaralari ham deyiladi.

Masalan, tartiblangan $(R(N),\leq)$ to'plamning biri N noli esa $\varnothing$ bo'ladi.

Ushbu $(N,/)$ tartiblangan to'plamning biri mavjud emas, noli esa 1 bo'ladi.

Agar tartiblangan $(M,\leq)$ *to'plam eng katta (eng kichik) elementga ega bo'lsa,* $(M,\leq)$ *to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.*

Agar tartiblangan $(M,\leq)$ *to'plam ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan deyiladi.*

Aytaylik, M tartiblangan to'plam bo'lib, $m^* \in M$, $m_* \in M$ bo'lsin.

Agar M to'plamning biror x elementi uchun $m^* \leq x$ bo'lishidan $x = m^*$ ($x \leq m_*$ bo'lishidan $x = m_*$) bo'lishi kelib chiqsa, m_* - M to'plamning maksimal (m_* - M to'plamning minimal) elementi deyiladi.

Masalan, $(\{1,2,3,4,5,6\},/)$ tartiblangan to'plam uchun 4,5,6 lar maksimal elementlar bo'lib, 1 esa minimal element bo'ladi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. X to'plamda aniqlangan R qanday xossalarga ega?

1.1 $a) xRy \leftrightarrow y = 2x+1, X = N$

$b) xRy \leftrightarrow EKUB(x,y), X = Z$

1.2 $a) R = \{(x,y): y = 2x\}, X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow x + y \leq 100, X = \mathbb{N}$

1.3 $a) R = \{(x,y): x^2 + y^2\}, X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow y \leq 2x, X = \mathbb{N}$

1.4 $a) R = [0,2] \times [0,2], X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow |x-y| = 12, X = \mathbb{N}$

$1.5 a) R = [0,2] \times [1,3], X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow (x-y)+3, X = \mathbb{Z}$

$1.6 a) xRy \leftrightarrow xy = 0, X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow x = 3y, X = \mathbb{N}$

$1.7 a) xRy \leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1, X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow x \le y-1, X = \mathbb{N}$

$1.8 a) xRy \leftrightarrow xy = 1, X = \mathbb{R}$

$b) xRy \leftrightarrow x \le y+1, X = \mathbb{N}$

$1.9 a) xRy \leftrightarrow |x| \le |y|, X = \mathbb{C}$

$b) xRy \leftrightarrow (x \setminus y)+2, X = \mathbb{Z}$

$1.10 a) xRy \leftrightarrow x^n = y^n, n \in \mathbb{N}, X = \mathbb{C}$

$b) xRy \leftrightarrow (x+y)+3, X = \mathbb{Z}$

$1.11 a) xRy \leftrightarrow \operatorname{Im}(x, y) = 0, X = \mathbb{C}$

$b) xRy \leftrightarrow (x / y)+3, X = \mathbb{Z}$

$1.12 a) xRy \leftrightarrow \operatorname{Im}(x+y) = 0, X = \mathbb{C}$

$b) ARB \leftrightarrow A \subset B, X = 2^M$

$1.13 a) xRy \leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1, X = \mathbb{R}$

$b) ARB \leftrightarrow A \subseteq B \,\&\, A \ne B, X = 2^M$

$1.14 a) xRy \leftrightarrow x+y, X = \mathbb{N}$

$b) ARB \leftrightarrow A \Delta B = \varnothing, X = 2^M$

$1.15 a) xRy \leftrightarrow y < x, X = \mathbb{R}$

$b) ARB \leftrightarrow A \cap B = \varnothing, X = 2^M$

$1.16 a) xRy \leftrightarrow |x| + |y| \le 1, X = [-1,1]$

$b) ARB \leftrightarrow A = M \setminus B, X = 2^M$

$1.17 a) xRy \leftrightarrow \max\{|x|, |y|\} \le 1, X = \mathbb{R}$

$b) ARB \leftrightarrow A \setminus B = \varnothing, X = 2^M$

$1.18 a) xRy \leftrightarrow -1 \le y - x \le 1, X = \mathbb{R}$

$b) ARB \leftrightarrow A \setminus B = A, X = 2^M$

$1.19 a) xRy \leftrightarrow xy > 0, X = \mathbb{R}$

$b) ARB \leftrightarrow A \Delta B = A \cup B, X = 2^M$

$1.20 a) xRy \leftrightarrow x - y = 8, X = \{1, 2, \dots, 10\}$

$b) ARB \leftrightarrow B \subset M \setminus A, X = 2^M$

$1.21 a) xRy \leftrightarrow x = y^2, X = \{1, 2, \dots, 10\}$

$b) R = \{(1,1)\}, X = \mathbb{N}$

$1.22 a) xRy \leftrightarrow xy = 12, X = \{1, 2, \dots, 10\}$

$b) R = \{(1,5)\}, X = \mathbb{N}$

$1.23 a) xRy \leftrightarrow x + y = 11, X = \{1, 2, \dots, 10\}$

$b) R=\{(3,5),(5,3),(3,3),(5,5)\}, X=\mathbb{N}$

1.24.$a) xRy \leftrightarrow x>y^2, X=\{1,2,\ldots,10\}$

$b) R=\{(2,7),(7,2)\}, X=\mathbb{N}$

1.25.$a) xRy \leftrightarrow x+y, X=\mathbb{Z}$

$b) xRy \leftrightarrow (x+y)+2, X=\mathbb{Z}$

2. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ bo'lib, $\pi=\{1,3,5\}, \{2,6\}, \{4,7\}$ A ning bo'laklashi bo'lsin. π bo'laklashga mos kelgan R_π-ekvivalentlik munosabati topilsin. (R_π elementlari sanab chiqilsin).

3. $R - A$ to'plamda aniqlangan binar munosabat bo'lsin. U holda quyidagi ikki shart teng kuchli ekanligi ko'rsatilsin.

a) $R - A$ da ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

b) R refleksiv va barcha $a,b,c\in A$ uchun, agarda aRb, bRc bo'lsa, cRa bo'ladi.

4. $A=\{1,2,3,5,6,7\}$ bo'lib, $aRb \Leftrightarrow a-b/4$ bo'lsin.

a) R ning elementlari sanab chiqilsin.

b) R ning aniqlanish sohasi topilsin.

c) R ning qiymatlar sohasi topilsin.

d) R^{-1} ning elementlari sanab chiqilsin.

e) R^{-1} ning aniqlanish sohasi topilsin.

f) R^{-1} ning qiymatlar sohasi topilsin.

5. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ bo'lib, $aRb \Leftrightarrow a+b\le 9$ bo'lsin.

a) $E\subseteq R$ bo'ladimi? Bu erda $E=\{(x,x)\mid x\in A\}$.

b) $R=R^{-1}$.

c) $R\circ R\subseteq R$.

6. Quyidagi keltirilgan munosabatlarning qaysi biri Z da ekvivalentlik munosabati bo'ladi?

a) $xRy \Leftrightarrow x-y$ juft son bo'lsa;

b) $xRy \Leftrightarrow x-y$ toq son bo'lsa;

c) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ bo'lsa;

d) $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$ bo'lsa;

e) $xRy \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ bo'lsa;

f) $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$.

7. $R = \{(a,b) \mid a,b \in Q \text{ va } a - b \in Z\}$ bo'lsin. R ning Q to'plamda ekvivalentlik munosabati ekanligi ko'rsatilsin.

8. $A = \{a,b,c\}$ to'plamda aniqlash mumkin bo'lgan barcha ekvivalentlik munosabatlari topilsin.

9. R_1 va R_2 lar A to'plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo'lsa, $R_1 \cap R_2$ ham A da ekvivalentlik munosabati bo'lishi ko'rsatilsin.

10. R_1 va R_2 lar A da aniqlangan simmetrik binar munosabatlar bo'lsin. Bundan tashqarii, $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$ bo'lsa, $R_2 \circ R_1$ simmetrik ekanligi va $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$ bo'lishi ko'rsatilsin.

11. R_1 va R_2 lar A da aniqlangan ekvivalentlik munosabatlari bo'lib, $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$ bo'lsa, u holda $R_1 \circ R_2$ ham A da ekvivalentlik munosabati bo'lishi ko'rsatilsin.

3-§. MULOHAZALAR ALGEBRASI

Biz kundalik hayotda turli iboralarni eshitamiz va ishlatamiz, har xil mulohaza va mulohazalar yuritamiz va boshqalarning mulohazalariga munosabatlarimizni bildiramiz. Bunda aytiladigan iboralar, yuritiladigan fikr va mulohazalar turlicha bo'lsada, ulardan chiqariladigan xulosa, umuman aytganda ikki xil bo'ladi:

1. Iboralar, fikr va mulohazalar to'g'ri, ya'ni chin,
2. Iboralar, fikr va mulohazalar noto'g'ri, ya'ni yolg'on bo'ladi.

Odatda biror ibora aytilsa, ravshanki, bu ibora biror gap bo'lib, u darak, so'roq yoki undov alomatlariga ega bo'ladi.

Matematik mantiqda chinligi yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gaplar o'rganiladi. Bunday darak gaplar mulohaza deb ataladi.

Masalan, Toshkent O'zbekiston davlatining poytaxti, 13 soni tub son bo'ladi degan darak gaplar mulohaza bo'ladi. Ravshanki, bu mulohazalar chin. Boku Ukraina davlatining poytaxti, uchburchak ichki burchaklar yig'indisi 360^0 ga teng degan darak gaplar ham mulohaza bo'ladi. Bu mulohazalar yolg'ondir.

Mulohazalar bosh harflar, masalan, $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_n, B_n, C_n, \ldots$, harflari bilan belgilanadi.

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 \; agar \;\; A - chin \; fikr \; bo'lsa, \\ 0, \; agar \;\; A - yolg'on \;\; fikr \; bo'lsa. \end{cases}$$

bo'lar ekan. $\mu = \mu(A)$ mantiqiy funksiya, μ_0 ga esa $\mu_0 = \mu(A_0), A_0 \in \Phi$ mantiqiy qiymat deyiladi.

Endi mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallarni keltiramiz.

Chinlilik jadvali

$\mu(A)$	$\mu(B)$	$\mu(\neg A)$	$\mu(A \wedge B)$	$\mu(A \vee B)$	$\mu(A \rightarrow B)$	$\mu(A \leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Umuman olganda mulohazalar ustida 16 ta binar amal aniqlash mumkin

M.A.F tushunchasi induktiv usulda beriladi.

__Ta'rif.__ *1) Har qanday propozitsional o'zgaruvchi M.A.F sidir.*

2) F_1 va F_2 ifodalar M.A.F bo'lsa, u holda
$\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$,

ifodalar ham M.A.F dir.

3) Boshqacha ko'rinishli M.A.F yo'q, ya'ni M.A.F lari faqat yuqorida keltirilgan 1 va 2 bandlarda aytilganlar yordamida hosil qilinadi.

Propozitsional o'zgaruvchilar $X_1, X_2, ..., X_n$ larga bog'liq M.A.F. $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ berilgan bo'lsin.

Demak, propozitsional o'zgaruvchilar $X_1, X_2, ..., X_n$ larning chinlik taqsimoti 0 va 1 simvollardan tuzilgan ixtiyoriy $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlikni ifodalar ekan.

Agar $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ formulada $X_1, X_2, ..., X_n$ o'zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ topilib, $F(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$ $(F(e_1, e_2, ..., e_n) = 0)$ bo'lsa, $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ bajariluvchi (radlanuvchi) formula deyiladi. Agar $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ formula propozitsional o'zgaruvchi $X_1, X_2, ..., X_n$ larning ixtiyoriy chinlik taqsimotida bir (nol) qiymat qabul qilsa, $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ aynan rost formula yoki tavtologiya (aynan yolg'on formula yoki ziddiyat) deyiladi.

Masalan, Ushbu $F_1(X_1, X_2) = ((X_1 \wedge X_2) \rightarrow (X_1 \vee X_2))$ formulada $F_1(0,0) = F_1(1,0) = F_1(0,1) = F_1(1,1) = 1$ bo'lgani uchun $F_1(X_1, X_2)$ formula tavtologiya bo'ladi.

quyidagi $F_2(X_1, X_2) = \rceil((X_1 \wedge X_2) \rightarrow (X_1 \vee X_2))$ formulada esa

$F_2(0,0) = F_2(1,0) = F_2(0,1) = F_2(1,1) = 0$ bo'lganligi sababli F_2 formula ziddiyat bo'ladi.

Agar $(F \leftrightarrow G)$ formula tavtologiya bo'lsa, ya'ni $\models (F \leftrightarrow G)$ bo'lsa, u holda F va G mantiqiy ekvivalent formulalar deyiladi va $F \sim G$ kabi belgilanadi.

Mulohazalar algebrasining $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ va $B(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulalari propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining barcha *tanlanmalarida bir xil qiymat qabul qilsalar, bu formulalar teng kuchli formulalar deyiladi va bu* $U \equiv B$ *ko'rinishida yoziladi.*

Misol. $F(A,B,C)=(A \Rightarrow B) \wedge C$ va $G(A,B,C)=(\neg A \vee B) \wedge C$ formulalar teng kuchli formulalar ekanligini ko'rsatamiz:

A	B	C	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \wedge C$	$(\neg A \vee B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

$A \Leftrightarrow B$ va $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ formulalar teng kuchli formulalar ekanligini ko'rsataylik:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Shunday qilib, bu tebgkuchliliklardan ko'rinadiki, $F \equiv G$ bo'lishi uchun $F \Leftrightarrow G$ formula AR formula bo'lishi zarur va yetarlidir. Teng kuchli bo'lish munosabati ekanligi binary munosabat ekanligi ravshandir, ya'ni bu munosabat

F *formulaning tarkibida faqat konyunksiya, dizyunksiya va inkor amallari qatnashgan bo'lib, inkor amalsi propozitsional o'zgaruvchilargagina tegishli bo'lsa, bunday formula keltirilgan formula deyiladi.*

3.2-teorema. *Mulohazalar algebrasining har bir F formulasining yo o'zi keltirilgandir yoki uni teng kuchli keltirilgan formula bilan almashtirish mumkin.*

I. $\neg\neg A \equiv A$ (qo'sh inkor tengkuchlilikgi)

II. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (konyunksiya va

III. $A \vee B \equiv B \vee A$ dizyunksiyaning kommutativligi)

IV. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (konyunksiya va dizyunksiyaning

V. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ assosiativligi)

VI. $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (dizyunksiyaning konyunksiyaga va

VII. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ konyunksiyaning dizyunksiyaga nisbatan distributivligi)

VIII. $A \vee A \equiv A$ (dizyunksiya va konyunksiyaning

IX. $A \wedge A \equiv A$ idempotentligi)

X. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (yutilish tengkuchliliklari)

XI. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

XII. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (de Morgan

XIII. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ tengkuchliliklari)

XIV. $A \vee \neg A \equiv 1$ (uchinchini inkor etish tengkuchliligi)

XV. $A \wedge \neg A \equiv 0$ (qarama-qarshilik tengkuchliligi)

XVI. a) $A \vee 1 \equiv A$ b) $A \wedge 1 \equiv A$ c) $A \vee 0 \equiv A$ d) $A \wedge 0 \equiv 0$

XVII. $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ (kontropozitsiya tengkuchliligi)

3.3-misol. $(\neg A \vee \neg B) \wedge C \Rightarrow \neg(A \wedge B \vee \neg C)$ formulaning shaklini almashtiring va soddalashtiring.

$$
\begin{aligned}
&(\neg A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow\neg(A\wedge B\vee\neg C)\equiv\neg((\neg A\vee\neg B)\wedge C)\vee\neg(A\wedge B\vee\neg C)\equiv\\
&\equiv\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg C\vee\neg(A\wedge B)\wedge\neg\neg C\equiv\\
&\equiv\neg\neg A\wedge\neg\neg B\vee\neg C\vee(\neg A\vee\neg B)\wedge\neg\neg C\equiv\\
&\equiv A\wedge B\vee\neg C\vee(\neg A\vee\neg B)\wedge C\equiv\\
&\equiv A\wedge B\vee(\neg C\vee\neg A\vee\neg B)\wedge(\neg C\vee C)\equiv\\
&\equiv A\wedge B\vee(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge 1\equiv\\
&\equiv A\wedge B\vee\neg A\vee\neg B\vee\neg C\equiv\\
&\equiv(A\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg A)\vee\neg B\vee\neg C\equiv\\
&\equiv 1\wedge(B\vee\neg A)\vee\neg B\vee\neg C\equiv\\
&\equiv\neg A\vee B\vee\neg B\vee\neg C\equiv\\
&\equiv\neg A\vee 1\vee\neg C\equiv 1
\end{aligned}
$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$
A^{\alpha}=\begin{cases} agar\ \ \alpha=1\ \ bo'lsa, & A\\ agar\ \ \alpha=0\ \ bo'lsa, & \neg A\end{cases}
$$

$A_1,\dots,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilar $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ 1 va 0 lardan tuzilgan tanlanma bo'lsa, u holda $A_1^{\alpha_1}, A_2^{\alpha_2},\dots,A_n^{\alpha_n}$ formula elementar konyunksiya deyiladi (bunda propozitsional o'zgaruvchilar takrorlangan bo'lishi ham mumkin).

Elementar konyunksiyalarning har qanday dizyunksiyasi dizyunktiv normal forma (DNF) deyiladi.

Elementar konyunksiyasiga har bir propozitsional o'zgaruvchi (inkor belgisi qatnashganini ham e'tiborga olsak) bir martadan ortiq kirmagan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya to'g'ri elementar konyunksiya deyiladi.

$A_1,A_2,\dots,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilardan tuzilgan to'g'ri elementar konyunksiyadagi har bir propozitsional o'zgaruvchi bu konyunksiyaga faqat bir marta kirgan bo'lsa,bunday elementar konyunksiya $A_1,A_2,\dots,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan to'liq elementar konyunksiya deyiladi.

Tarkibida bir xil elementar konyunksiyalar bo'lmagan hamda barcha elementar konyunksiyalar $A_1,\dots,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan to'g'ri va to'liq bo'lgan DNF $A_1,\dots,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan mukammal dizyunktiv normal forma (MDNF) deyiladi.

3.3-teorema. *Mulohazalar algebrasining AYo formula bo'lmagan ixtiyoriy U formulasi yagona MDNF ga teng kuchlidir.*

3.5-misol. $(A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow(\neg A\vee B)\wedge C$ formulaning MDNF ini yozing. Berilgan formula keltirilmagan bo'lgani uchun undagi implikatsiyani dizyunksiya va inkor bilan almashtiramiz:

$$(A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\neg((A\vee\neg B)\wedge C)\vee(\neg A\vee B)\wedge C$$

Hosil bo'lgan formulada $\neg$ amalsi murakkab formula $(A\vee\neg B)\wedge C$ oldida qatnashgan. Shuning uchun unga de Morgan tengkuchliliklari va qo'sh inkor tengkuchligini qo'llaymiz:

$$\neg((A\vee\neg B)\wedge C)\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\neg(A\vee\neg B)\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv$$
$$\equiv\neg A\wedge\neg\neg B\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv$$
$$\equiv\neg A\wedge B\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C.$$

Bu keltirilgan formulada dizyunksiya konyunksiyadan oldin bajariladigan had mavjud; shuning uchun distributivlik tengkuchliligini qo'llasak, quyidagi DNF hosil bo'ladi: $\neg A\wedge B\vee\neg C\vee(\neg A\vee B)\wedge C\equiv\neg A\wedge B\vee\neg C\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge C$

Ushbu DNF da qatnashgan barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalar bo'lsa-da, ammo to'liq elementar konyunksiyalar emas. Shuning uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$\neg A\wedge B$ ni $\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)$ bilan,

$\neg C$ ni $(A\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg B)\vee\neg C$ bilan,

$\neg A\wedge C$ ni $\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C$ bilan,

$B\wedge C$ ni esa $(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C$ bilan almashtiramiz.

Ravshanki, natijada teng kuchli formula hosil bo'ladi:

$$\neg A\wedge B\vee\neg C\vee\neg A\wedge C\vee B\wedge C\equiv\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)\vee(A\vee\neg A)\wedge$$
$$(B\vee\neg B)\wedge\neg C\vee\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C$$

Ushbu formulaga yana distributivlikni qo'llasak:

$$\neg A \wedge B \wedge (C \vee \neg C) \vee (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge C \vee (A \vee \neg A) \wedge B \wedge C \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

tengkuchlilikka ega bo'lamiz. Bundagi bir xil elementar konyunksiyalarni tashlab yuborsak (faqat bittasini qoldirib) u holda quyidagi oxirgi natijaga kelamiz: $A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee$
$\vee \neg A \wedge B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Tengkuchlilikning o'ng tomoni berilgan formulaning MDNF idir.

Yuqoridagi 6.1-6.5- ta'riflarda „konyunksiya'' so'zi „dizyunksiya'' bilan„„dizyunksiya'' so'zini „konyunksiya'' so'zi bilan almashtirsak, u holda „elementar dizyunksiya'' „to'liq elementar dizyunksiya'' „mukammal konyuktiv normal forma'' (MKNF) tushunchalari hosil bo'ladi.

MKNF lar uchun quyidagi teorema o'rinli.

3.4-teorema. *Mulohazalar algebrasining AP formula bo'lmagan ixtiyoriy formulası yagona MKNF ga teng kuchlidir.*

Mulohazalar algebrasi bo'yicha nazorat savollari

1. Muloxazalar ustida amallar. Mulohazalar algebrasi.
2. Tavtalogiya va ziddiyat. Tavtalogiyalar haqida teoremalar.
3. Rostlik jadvalini to'ldirish.
4. Tengkuchli formulalar.
5. Rostlik funksiyalari. Ikkilik qonuni.
6. Amallarning to'liq sistemalari.
7. Echilish muammosi.
8. Dizyunktiv va Konyunktiv normal formalar.
9. Mukammal dizyunktiv va konyunktiv normal formalar.
10. MAF ning tatbiqlari. Rele kontakt sxemalar.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi so'zlardan qaysi biri MA ning formulasi bo'ldi.

a) $A \to \neg B$

b) A

c) $((A \to \neg\neg B) \wedge C)$

d) $((A \to \neg B) \vee \neg(A \wedge C)$

2. Quyidagi formularning barcha qism **formulalarini toping**.

a) $((A \to \neg B) \vee \neg(A \wedge C))$

b) $(((A \to C)\neg B) \vee (\neg A \leftrightarrow (A \wedge C)))$

3. Keltirilgan formaga keltiring.

a) $((A \to \neg B) \vee \neg(A \wedge C))$

b) $((A \to \neg B) \vee \neg(A \leftrightarrow C))$

c) $\neg((A \to \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge C))$

d) $((A \to \neg B) \to \neg(\neg A \leftrightarrow C))$

e) $\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge C))$

f) $((A \to \neg B) \to C)$

g) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$

h) $\neg(\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge \neg C))$

i) $((A \to \neg B) \wedge \neg(A \vee C))$

j) $(\neg(A \leftrightarrow \neg B) \to (A \leftrightarrow C))$

4. DNF va KNF ga keltiring.

a) $((A \to \neg B) \to \neg(A \leftrightarrow C))$

b) $(\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow C))$

c) $\neg((A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \to C))$

d) $(\neg(A \vee \neg B) \to \neg(\neg A \leftrightarrow C))$

e) $\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge C))$

f) $((A \to \neg B) \to C)$

g) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$

h) $\neg(\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge \neg C))$

i) $((A \to \neg B) \wedge \neg(A \vee C))$

j) $(\neg(A \leftrightarrow \neg B) \to (A \leftrightarrow C))$

5. MDNF va MKNF ga keltiring.

a) $((A \to \neg B) \to \neg(A \leftrightarrow C))$

b) $(\neg(A \to \neg B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow C))$

c) $\neg((A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \to C))$

d) $(\neg(A \vee \neg B) \to \neg(\neg A \leftrightarrow C))$

e) $\neg((A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge C))$

f) $((A \to \neg B) \to C)$

g) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C)$

h) $\neg(\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge \neg C))$

i) $((A \to \neg B) \wedge \neg(A \vee C))$

j) $(\neg(A \leftrightarrow \neg B) \to (A \leftrightarrow C))$

Nazorat uchun testlar

1. **Quyidagi belgilar ketma-ketliklarining qaysi biri formula bo'ladi?**

A. $((A \leftrightarrow B) \wedge \neg A)$

B. $(A \to B) \neg \vee B$

C. $\neg(A \vee B) \to \neg B$

D. $(\neg B \to \vee A)$

2. **Quyidagi belgilarketma-ketliklarining qaysi biri formula bo'lmaydi?**

A. $\neg(\to B \vee C) \wedge A, D)$

B. $((A \leftrightarrow B) \wedge \neg A)$

C. $((A \leftrightarrow B) \wedge \neg(A \vee \tilde{N}))$

D. $((A \to B) \vee A)$

3. $F = (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ **formulaning barcha qism formulalarini yozing.**

A. $A, B, \neg A, \neg B, (A \to B), (\neg B \to \neg A), F$

B. $A, B, (A \to B), (\neg B \to \neg A)$

C. $(A \to B), (\neg B \to \neg A)$

D. $\neg A, \neg B, (A \to B), (\neg B \to \neg A), F$

4. $(\neg((A \to \neg B) \vee C) \wedge B)$ **uch o'zgaruvchili qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi?**

A. 1

B. 3

C. 6

D. 8

5 **Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi?** $(P \to (Q \to (P \wedge Q)))$

A.0

B.2

C.4

D.1

6. **Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?**

A. $(A \to B)$

B. $(A \vee B)$

C. $\neg(A \vee B)$

D. $\neg(A \wedge B)$

7. **Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo'ladi?**

A. $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$

B. $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$

C. $((\neg A \to B) \vee (\neg C \to \neg B))$

D. $(\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$

8. **Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo'ladi?**

A. $(A \to B)$

B. $(B \to \neg A)$

C. $(A \vee \neg B)$

D. $((A \vee B) \wedge C)$

9 **Quyidagi formulalarning qaysi biri KNF bo'ladi?**

A. $(\neg A \vee B \vee C)$

B. $((\neg A \to B) \vee (\neg C \to \neg B))$

C. $((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \to \neg B))$

D. $(\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg C)$

10. $(((P \vee \neg Q) \to Q) \wedge (\neg P \vee Q))$ **formulaning MKNFida nechta xad bor?**

A.2

B.3

C.1

D.4

4-§. MANTIQ ALGEBRASI FUNKSIYALARI

Faraz qilaylik, E to'plam elementlari 0 va 1 lardan iborat bo'lgan bo'lsin, yani $E=\{0,1\}$.

E^n to'plamni E to'plamga akslantiruvchi har qanday $f: E^n \to E$ funksiya chinlik funksiyasi yoki n ta argumentli Bul funksiyasi deyiladi va uni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kabi belgilanadi.

Barcha Bul funksiyalar to'plaminini P_2 orqali belgilaymiz.

4.1- teorema. *n ta o'zgaruvchili barcha Bul funksiyalari soni 2^{2^n} ga teng.*

Endi elementar funksiyalar deb ataluvchi funksiyalarni keltiramiz.

1^0. $f(x)=0$ tenglik bilan aniqlangan funksiya nol funksiya deyiladi va uni 0 kabi belgilanadi: $f(x)=0$

2^0. $f(x)=1$ tenglik bilan aniqlanadigan funksiya birlik funksiya deyiladi va uni 1 kabi belgilanadi: $f(x)=1$

3^0. Quyidagi jadval elementar Bul funksiyalarni aniqlaydi:

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x+y$	x/y	$x \downarrow y$
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Elementar funksiyalar yordamida formulalar qurish mumkin. Aytaylik, $\mathcal{B} \subseteq P_2$- qandaydir Bul funksiyalar to'plamibo'lsin. $\mathcal{B}$ ustidagi formulaga quyidagicha ta'rif beramiz.

4.1-ta'rif. *a) Barcha o'zgaruvchilarni $\mathcal{B}$ ustidagi formula deb ataymiz;*

b) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}$ va $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ifodalar $\mathcal{B}$ ustidgia formulalar bo'lsa, $f(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ ifodani $\mathcal{B}$ ustida formula deb ataymiz.

Masalan, $\mathcal{B}$ - elementar funksiyalar to'plami bo'lsin. Quyidagi ifodalar $\mathcal{B}$ ustidagi formula bo'ladi.

1) $(((x_1 \wedge x_2)+x_1) \vee x_3)$

2) $\left(\left(\overline{(x_1 \wedge x_2)}+x_1\right) \leftrightarrow \overline{x_3}\right)$

3) $\overline{\left(\left((x_1 \to x_2) \to x_1\right) \leftrightarrow x_3\right)}$

Formulalar ekvivalentligi. Duallik printsipi.

Yuqorida aytilganidek, turli formulalarga bitta Bul funksiyasi mos qo'yilishi mumkin. Masalan, $x_1 \downarrow x_2$ va $\overline{x_1 \vee x_2}$ formulalarga bitta funksiya mos qo'yiladi.

Mos qo'yilgan funksiyalari f_Φ va f_Ψ *teng bo'lgan* Φ va Ψ *formulalarga ekvivalent formulalar deyiladi va* $\Phi \sim \Psi$ *kabi belgilanadi. Boshqacha aytganda formulalar bir xil rostlik jadvaliga ega bo'lsa, ular ekvivalent formulalar deyiladi.*

Quyidagi ekvivalent formulalar elementar funksiyalarning xossalarini ko'rsatadi.

1)	$x \wedge x \sim x$	2)	$x \vee x \sim x$
3)	$x \wedge 1 \sim x$	4)	$x \wedge 0 \sim 0$
5)	$x \vee 0 \sim x$	6)	$x \vee 1 \sim 1$
7)	$x \wedge \overline{x} \sim 0$	8)	$x \vee \overline{x} \sim 1$
9)	$x \wedge y \sim y \wedge x$	10)	$x \vee y \sim y \vee x$
11)	$(x \wedge y) \wedge z \sim x \wedge (y \wedge z)$	12)	$(x \vee y) \vee z \sim x \vee (y \vee z)$
13)	$(x+y)+z \sim x+(y+z)$	14)	$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z \sim x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$
15)	$(x \wedge y) \vee z \sim (x \vee z) \wedge (y \vee z)$	16)	$(x \vee y) \wedge z \sim (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
17)	$\overline{\overline{x}} \sim x$	18)	$\overline{x \wedge y} \sim \overline{x} \vee \overline{y}$
19)	$\overline{x \vee y} \sim \overline{x} \wedge \overline{y}$	20)	$x \to y \sim \overline{x} \vee y$

$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$ *tenglik yordamida aniqlangan funksiyani* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *funksiyaga dual funksiya deyiladi.*

Misol. Quyidagi funksiyalarga dual funksiyani toping:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$

2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1001101100011011)$

Yechish: 1) ta'rifga ko'ra $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = \overline{\overline{\overline{x_1} \vee ((\overline{x_2} \to \overline{x_3})(\overline{x_3} \to \overline{x_2}))}}$

2) Bu misolni yechish uchun dual funksiyaning qiymatral jadvali to'g'risida aytilgan mulohazalardan foydalanamiz, yani *0 ni 1 ga va1 ni 0 ga o'zgartirib, teskari aylantirib dual funksiyani hosil qilamiz:*

$f^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0010011100100110)$.

4.2-teorema. *Agar* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m}))$ *bo'lsa, u holda* $F^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \ldots x_{1p_1}), \ldots, f_m^*(x_{m1}, \ldots x_{mp_m}))$.

Duallik printsipi. *Agar* $\Phi = \tilde{N}[f_1, \ldots, f_s]$ *formula* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *funksiyani aniqlasa, u holda* Φ *formuladagi* $f_1, \ldots, f_s$ *funksiyalarni* $f_1^*, \ldots, f_s^*$ *funksiyalarga mos ravishda almashtirib hosil qilingan* $\Phi^* = \tilde{N}[f_1^*, \ldots, f_s^*]$ *formula* $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ *funksiyani aniqlaydi.* $\Phi^* = \tilde{N}[f_1^*, \ldots, f_s^*]$ *formulani* Φ *formulaga dual formula deb ataymiz.*

Elementar funksiyalarga dual funksiyalarni ko'rsatamiz

$f(x_1, x_2)$	$f^*(x_1, x_2)$
0	1
1	0
$\bar{x}$	$\bar{x}$
x	x
$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$
$x_1 \to x_2$	$\overline{x_1} \wedge x_2$
$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 + x_2$

$x_1 + x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$

Misol. Duallik printsipidan foydalanib berilgan funksiyaga dual funksiyani toping. 1) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$

2) $f(x_1,x_2,x_3)=\left(\left(\left(x_1 \wedge x_2\right)+x_1\right)\vee x_3\right)$

Yechish: 1) Yuqoridagi jadvaldan foydalanib, berilgan funksiyada qatnashgan barcha funksiyalarni dualiga almashtiramiz

$f^*(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 \wedge ((\overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2))}$

2) $f^*(x_1,x_2,x_3)=\left(\left(\left(x_1 \vee x_2\right)\leftrightarrow x_1\right)\wedge x_3\right)$.

***4.2-ta'rif.** Quyidagi tenglik* $f(x_1, x_2,\dots,x_n)=f^*(x_1, x_2,\dots,x_n)$ *o'rinli bo'lsa,* $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ *funksiyani o'z-o'ziga dual funksiya deyiladi.*

To'liqlik va yopiqlik.

Faraz qilaylik, bizga $B=\{f_1,f_2,\dots,f_s,\dots\}\subseteq P_2$- Bul funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Agarda ixtiyoriy Bul funksiyasini B *funksiyalar sistemasiustida formula ko'rinishida ifodalash mumkinbo'lsa,* B *to'liq sistema deyiladi.*

1-misol. P_2–barcha Bul funksiyalar to'plami – to'liq sistema bo'ladi.

2-misol. $B=\{\bar{\ },\wedge,\vee\}$- funksiyalar sistemasini to'liq sistema ekanligi ko'rsatildi.

4.3-teorema. *Agar* $B_1=\{f_1,f_2,\dots\}$ *va* $B_2=\{f_1,f_2,\dots\}$ *Bul funksiyalar sistemalaridan* B_1*- to'liq sistema bo'lib, uning har bir funksiyasini* B_2 *ustida formula ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda* B_2 *funksiyalar sistemasi to'liqdir.*

3-misol. $B=\{\bar{\ },\wedge\}$- funksiyalar sistemasini toliqligini 4.1-teoremaga asoslanib ko'rsatamiz. B_1 sifatida 2-misoldagi sistemani, B_2 sifatida esa 3-

misoldagi sistemani qaraymiz va $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$ ayniyatdan foydalansak, $B = \{\bar{\ }, \wedge\}$ sistemaning to'liqligi kelib chiqadi.

4-misol. $B = \{\bar{\ }, \vee\}$ - funksiyalar sistemasi to'liqdir. Bu sustemaning to'liqligi 3-misol kabi ko'rsatiladi.

5-misol. $B = \{/\}$ - funksiyalar sistemasi to'liqdir. Quyidagi ayniyatlarning o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas. $\bar{x} = x/x, \quad x_1 \wedge x_2 = (x_1/x_2)/(x_1/x_2)$

Demak 3-misoldagi sistemaning barcha funksiyalari bu sistema ustida formula ko'rinishida ifodalanadi.

6-misol. $B = \{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2\}$ - funksiyalar sistemasi to'liqdir. Quyidagi ayniyatlarning o'rinli ekanlini ko'rsatish qiyin emas.

$\bar{x} = x + 1, \quad x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2$

Demak 3-misoldagi sistemaning barcha funksiyalari bu sistema ustida formula ko'rinishida ifodalanadi.

Ixtiyoriy Bul funksiyasini $0, 1, x_1 \cdot x_2$ va $x_1 + x_2$ funksiyalari yordamida formula ko'rinishida ifodalagandan keyin, qavslarni ochib chiqib, algebraik almashtirishlar bajarib mod 2 bo'yicha ko'phad (Jegalkin ko'phadi) ko'rinishida ifodalanadi. Quyidagi teorema o'rinli.

4.4-teorema.(Jegalkin). *Ixtiyoriy Bul funrsiyasi Jegalkin ko'phadi yordamida ifodalanishi mumkin, ya'ni* $\forall f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ *uchun*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1, \ldots, i_s)} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}, \text{ bu yerda } a_{i_1 \ldots i_s} \in E.$$

Misol. Ushbi funksiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishida ifodalang:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1/x_2) + (x_1 \wedge x_3)$

Yechish: Berilgan funksiya uchun noma'lum koeffisientli ko'phad ko'rinishidagi ifodasini izlaymiz:

$(x_1/x_2) + (x_1 \wedge x_3) = ax_1x_2x_3 + bx_1x_2 + cx_1x_3 + dx_2x_3 + ex_1 + fx_2 + gx_3 + h$

Funksiyaning qiymatlar jadvalida noma'lum koeffisientlarni aniqlaymiz:

x_1	x_2	x_3	$(x_1/x_2)+(x_1 \wedge x_3)$	$ax_1x_2x_3+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2x_3+$ $+ex_1+fx_2+gx_3+h$	
0	0	0	1	h	$h=1$
0	0	1	1	$g+h$	$g=0$
0	1	0	1	$f+h$	$f=0$
0	1	1	1	$d+f+g+h$	$d=0$
1	0	0	1	$e+h$	$e=0$
1	0	1	0	$c+e+g+h$	$c=1$
1	1	0	0	$b+e+f+h$	$b=1$
1	1	1	1	$a+b+c+d+e+f+g+h$	$a=0$

Jadvalning 4 va 5- ustunlarini tenglashtirishdan hosil bo'lgan tenglamalar (noma'lum koeffisientlarga nisbatan) sistemasini yechib, 6- ustunni hosil qilamiz. Demak

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1/x_2)+(x_1 \wedge x_3)=x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+1$

To'liqlik tushunchasi bilan yopilma va yopiq sinf tushunchalari bevosita bog'liq hisoblanadi.

Aytaylik $M \in P_2$ bo'lsin. M to'plamning funksiyalari yordamida formula ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lgan barcha funksiyalar to'plamiga M to'plamning yopilmasi deyiladi. M to'plamning yopilmasi [M] kabi belgilanadi.

Misol: 1) $M=P_2$ bo'lsa, ko'rinib turibdiki $[M]=P_2$ bo'ladi.

2) $M=\{1, x_1+x_2\}$ bo'lsa, bu to'plamning yopilmasi barcha chiziqli funksiyalar sinfi L, yani $f(x_1,\dots,x_n)=c_0+c_1x_1+\dots+c_nx_n$ ko'rinishidagi funksiyalar sinfi bo'ladi.

Agarda M to'plamning yopilmasi o'ziga teng, yani [M]=M bo'lsa, M yopiq to'plam deyiladi.

Misol: 1) $M=P_2$ sinf yopiq sinf bo'ladi.

2) $M=\{1, x_1+x_2\}$ sinf yopiq emas.

3) L sinf yopiq.

Muhim yopiq sinflar. Post teoremasi.

1. Nolni saqlovchi barcha Bul funksiyalari sinfini T_0 orqali belgilaymiz, yani $T_0 = \{f(x_1,...,x_n) \mid f(0,0,..,0) = 0\}$.

Masalan, 0, x, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$ funksiyalar T_0 sinfga tegishli bo'ladi.

T_0 – yopiq sinfdir.

2. Birni saqlovchi barcha Bul funksiyalari sinfini T_1 orqali btlgilaymiz, yani $T_1 = \{f(x_1,..,x_n) \mid f(1,1,..,1) = 1\}$.

Masalan, 1, x, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$ funksiyalar T_1 sinfga tegishli bo'ladi.

T_1 – yopiq sinfdir.

3. O'z-o'ziga dual barcha Bul funksiyalar sinfini S orqali btlgilaymiz, yani $S = \{f(x_1,..,x_n) \mid f(x_1,..,x_n) = f^*(x_1,...,x_n)\}$.

Masalan, x va $\bar{x}$ funksiyalar S sinfiga tegishli bo'ladi.

S – yopiq sinfdir.

4. E^n da quyidagi tartib munosabatini kiritamiz. $\alpha = (e_1,..,e_n)$, $\beta = (e_1',..,e_n') \in E^n$ uchun $\alpha \le \beta \Leftrightarrow e_1 \le e_1'$, $e_2 \le e_2',...,e_n \le e_n'$; Ushbu munosabat o'rinli bo'lsa, $\alpha = (e_1,..,e_n)$-n lik $\beta = (e_1',..,e_n') \in E^n$-$n$ likdan "*oldin keladi*" deyiladi. Masalan, $(0,1,1,0) \le (0,1,1,1)$, ammo $(0,1,0)$ va $(1,0,0)$ uchliklarni solishtirib bo'lmaydi. Bu munosabat qisman tartib munosabat bo'ladi.

<u>**5.1-ta'rif.**</u> *Agar $f(x_1,...,x_n)$ Bul funksiyasi uchun ixtiyoriy shunday $\alpha = (e_1,..,e_n)$, $\beta = (e_1',...,e_n') \in E^n$ topilsaki, ular uchun $\alpha \le \beta \;\Rightarrow\; f(\alpha) \le f(\beta)$ shart bajarilsa, $f(x_1,...,x_n)$ funksiya monoton funksiya deyiladi.*

Barcha monoton funksiyalari sinfini M orqali belgilaymiz, yani $M = \{f(x_1,...,x_n) / \alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta)\}$.

Masalan, 0,1, x, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$ funksiyalar S sinfiga tegishli bo'ladi.

M – yopiq sinfdir.

5. Barcha chiziqli Bul funksiyalari sinfi L quyidagi sinf bo'ladi.

$$L=\{f(x_1,...,x_n)/\,f(x_1,...,x_n)=c_0+c_1\cdot x_1+...+c_nx_n\}\ .$$

Masalan, x , $\overline{x}$ va x_1+x_2 funksiyalar L sinfiga tegishli bo'ladi.

L – yopiq sinfdir.

Quyidagi jadval T_0, T_1, S, M va L sinflarni o'zora turli ekanligini ko'rsatadi.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\overline{x}$	-	-	+	-	+

<u>4.5.-teorema(Post).</u> *$B\subseteq P_2$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lishi uchun B yuqoridagi beshta T_0, T_1, S, M va L sinflarning hech birining qism to'plami bo'lmasligi zarur va etarli.*

Mantiq algebrasi funksiyalar mavzusiga doir mustaqil echish misollar

1.Quyidagifunksiyalarni chinlilik jadvalini tuzing:

1.1. $f(x,y)=xy+y+1$

1.2. $f(x,y)=\overline{xy+y}+1$

1.3. $f(x,y)=(xy\vee y)\to\overline{y}$

1.4. $f(x,y)=x\vee\overline{(x\to y)}$

1.5. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee xy\vee yz}$

1.6. $f(x,y,z)=\overline{x\to y}\vee\overline{y\to z}$

1.7. $f(x,y,z)=\overline{x\to zy}\vee\overline{xy\to z}$

1.8. $f(x,y,z)=(x\to z)\vee\overline{(x\to y)}$

1.11. $f(x,y,z)=\overline{x\to z\vee\overline{(x\to y)}}+1$

1.12. $f(x,y,z)=xz\vee\overline{(x\to y)}+x+1$

1.13. $f(x,y,z)=(x\to z)\vee\overline{(x\to y)}+x+1$

1.14. $f(x,y,z)=xz\vee(x\to y)+x+1$

1.15. $f(x,y,z)=xz\vee\overline{(x\to y)+x+1}$

1.16. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee(x\to y)}+x+1$

1.17. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee\overline{(x\to y)+1}}$

1.18. $f(x,y,z)=xz\vee xy+x+1$

1.9. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y)}$

1.10 $f(x,y,z) = \overline{xz \vee (x \to y)}$

1.19. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee (x \to y) + x + 1}$

1.20. $f(x,y,z) = \bar{x}z \vee (x \to y) + \bar{x} + 1$

2. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

2.1. $\overline{(x \vee y)} = \bar{x}\bar{y}$

2.2. $x \downarrow y = \bar{x}\bar{y}$

2.3. $\overline{(xy)} = \bar{x} \vee \bar{y}$

2.4. $x / y = \bar{x} \vee \bar{y}$

2.5. $x \to y = \bar{x} \vee y$

2.6. $\bar{x} = x / x$

2.7. $(x + y)z = xz + yz$

2.8. $xy = (x/y)/(x/y)$

2.9. $x + y = \overline{(x \leftrightarrow y)}$

2.10. $x \to y = x/(y/y)$

2.11. $x + y = (\bar{x}y) \vee (x\bar{y})$

2.12. $\bar{x} = x \downarrow x$

2.13. $x \vee y = xy + x + y$

2.14. $xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

2.15. $\bar{x}\bar{y} = xy + x + y$

2.16. $x \downarrow y = ((x/x)/(y/y))/((x/x)/(y/y))$

2.17. $(x \to y) = xy + x + 1$

2.18. $x / y = ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))$

2.19. $(x \leftrightarrow y) = x + y + 1$

2.20. $(x \leftrightarrow y) = (xy) \vee (\bar{x}\bar{y})$.

3.Tenglamani yeching

3.1. $x \vee y = 0$

3.2 $x \cdot y = 1$

3.3 $(1 \to x) \to y = 0$

3.4 $((x \to 1) \cdot x) \leftrightarrow 1 = 0$

3.5. $x \vee y = \bar{x}$

3.6. $x + y = \bar{x}$

3.7. $x \to y = \bar{y}$

3.8. $xy = x \to \bar{y}$

3.11. $x + y = x \vee y$

3.12. $1 + xy = x \vee y$

3.13. $1 + x \vee y = xy$

3.14. $(x \leftrightarrow y) = x + y + 1$

3.15. $(x \leftrightarrow y) = (xy) \vee (\bar{x}\bar{y})$

3.16. $x = xy + 1$

3.17. $x \vee \overline{x \to y} = \overline{xy}$

3.18 $xy + 1 = x + y$

3.9. $x \leftrightarrow y = x \vee y$

3.10. $xy = x \leftrightarrow y$

3.19. $xy \vee \overline{y \to x} = y + 1$

3.20 $xy + \overline{y \to x} = y \to 1$

4.Quyidagi funksiyalarni Jegalkin polinomi ko'rinishida ifodalang:

4.1. $f(x,y,z) = \bar{x}z \vee (x \to y) + \bar{x} + 1$

4.2. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee xy \vee yz}$

4.3. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y)} + x + 1$

4.4. $f(x,y,z) = \overline{x \to y} \vee \overline{y \to z}$

4.5. $f(x,y,z) = (x \to z) \vee \overline{(x \to y)} + x + 1$

4.6. $f(x,y,z) = \overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z}$

4.7. $f(x,y,z) = xz \vee (x \to y) + x + 1$

4.8. $f(x,y,z) = (x \to z) \vee \overline{(x \to y)}$

4.9. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y) + x + 1}$

4.10. $f(x,y,z) = xz \vee \overline{(x \to y)}$

4.11. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee (x \to y)} + x + 1$

4.12. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee \overline{(x \to y)}}$

4.13. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee \overline{(x \to y) + 1}}$

4.14. $f(x,y,z) = \overline{(x + z) \vee \overline{(x \to y)}}$

4.15. $f(x,y,z) = xz \vee xy + x + 1$

4.16. $f(x,y) = xy \to x + y + 1$

4.17. $f(x,y,z) = \overline{xz \vee (x \to \bar{y}) + x + 1}$

4.18. $f(x,y,z) = xyz \to xz + 1$

4.19. $f(x,y,z)=\bar{x}z \vee (x/y)+\bar{x}+1$

4.20. $f(x,y,z)=x \to z+(y \vee \bar{y})$

5. Muhim va sohta uzgaruvcnilarni aniqlang:

5.1. $f(x,y,z)=z+xy+y+\bar{z}+1$

5.2. $f(x,y,z)=\overline{xyz\bar{z}+y}+1$

5.3. $f(x,y,z)=(xy \vee y) \to \bar{y}+z$

5.4. $f(x,y)=x \vee \overline{(x \to y)} \to z$

5.5. $f(x,y,z)=\overline{xz \vee xy \vee yz}+1$

5.6. $f(x,y,z)=\overline{x \to y} \vee \overline{y \to z} \vee z$

5.7. $f(x,y,z)=\bar{y} \vee \overline{x \to z} \vee \overline{x \to \bar{z}} \vee y$

5.8. $f(x,y,z)=(x \to z) \vee \overline{(x \to y)}$

5.9. $f(x,y,z)=xz \vee \overline{(x \to y)}$

5.10 $f(x,y,z)=\overline{xz \vee \overline{(x \to y)}}+\bar{z}$

5.11. $f(x,y,z)=\overline{(x \to z) \vee y\bar{y}}+1$

5.12. $f(x,y,z)=xz \vee \overline{(x \to y)}+x$

5.13. $f(x,y,z)=\bar{x}+(x \to z) \vee \overline{(x \to y)}+x$

5.14. $f(x,y,z)=xz \vee (x \to y)$

5.15. $f(x,y,z)=x\bar{z} \vee xz \vee \overline{(x \to y)+x+\bar{1}}$

5.16. $f(x,y,z)=\overline{xz \vee (x \to y)}+x$

5.17. $f(x,y,z)=\overline{xz} \vee xz \vee y$

5.18. $f(x,y,z)=xz \vee xy+x$

5.19. $f(x,y,z)=xy \vee \overline{xy} \vee z\bar{z}$

5.20. $f(x,y,z)=\bar{x}z \vee xz \vee y\bar{y}$

6. Formulalarning ekvivalentligini kursating

6.1. $\overline{(x \vee y)} \sim \overline{xy}$

6.2. $\overline{(xy)} \sim \bar{x} \vee \bar{y}$

6.3. $x \to y \sim \bar{x} \vee y$

6.4. $(x+y)z \sim xz+yz$

6.5. $x+y \sim \overline{(x \leftrightarrow y)}$

6.6. $x+y \sim (\bar{x}y) \vee (x\bar{y})$

6.7. $x \vee y \sim xy+x+y$

6.8. $\overline{xy} \sim xy+x+y$

6.11. $x/y \sim \bar{x} \vee \bar{y}$

6.12. $x \downarrow y \sim \bar{x} \cdot \bar{y}$

6.13. $\bar{x} \sim x/x$

6.14. $xy \sim (x/y)/(x/y)$

6.15. $x \to y \sim x/(y/y)$

6.16. $\bar{x} \sim x \downarrow x$

6.17. $xy \sim (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

6.18. $x \downarrow y \sim ((x/x)/(y/y))/((x/x)/(y/y))$

6.9. $(x \to y) = xy + x + 1$

6.10. $(x \leftrightarrow y) = x + y + 1$

6.19. $x / y = ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))$

6.20. $(x \leftrightarrow y) = (xy) \vee (\overline{x}\overline{y})$.

7. Quyidagi funksiyalarni monotonligini tekshiring:

7.1. $f(x,y,z) = xy \vee xz \vee \overline{xz}$;

7.2. $f(x,y) = x \to (x \to y)$;

7.3. $f(x,y) = \overline{(x \vee y)} \leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$;

7.4. $f(x,y,z) = xy \vee xz \vee \overline{x}z$;

7.5. $f(x,y) = \overline{(x \vee y)} \leftrightarrow \overline{xy}$;

7.6. $f(x,y,z) = xy \vee x \vee \overline{x}z$;

7.7. $f(x,y,z) = xy \vee yz \vee xz$

7.8. $f(x,y) = xy + x \to \overline{y}$

7.9. $f(x,y) = (x \leftrightarrow y)(x \vee y)$

7.10. $f(x,y) = xy + x \leftrightarrow y$

7.11. $f(x,y) = (x + y)(x \vee y)$

7.12. $f(x,y) = (1 + xy) \to (x \vee y)$

7.13. $f(x,y) = (1 + x \vee y) \to xy$

7.14. $f(x,y) = x + y + 1$

7.15. $f(x,y) = (xy) \vee (x\overline{y})$

7.16. $f(x,y) = x \to (xy + 1)$

7.17. $f(x,y) = x \vee \overline{x \to y}$

7.18 $f(x,y) = (xy + 1) \vee (x + y)$

7.19. $f(x,y) = \overline{x} \vee (y + 1)$

7.20 $f(x,y) = (xy + \overline{y \to x}) \vee (y \to 1)$

8. Quyidagi funksiyalarga dual funksiyalarni toping.

8.1. $f(x,y,z) = (x + y)(x \vee y)(\overline{xz \vee (x \to y)} + x + 1)$

8.2. $f(x,y,z) = \left(1 + x \vee (\overline{xz \vee (x \to y)} + x + 1)\right) \to xy$

8.3. $f(x,y,z) = xy + y + (\overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z})$

8.4. $f(x,y,z) = (xy \vee y) \to \overline{\overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z}}$

8.5. $f(x,y,z) = \left(1 + x(\overline{xz \vee (x \to y)} + x + 1)\right) \to (x \vee y)$

8.6. $f(x,y,z) = (\overline{xz \vee (x \to y)} + x + 1) \vee \overline{x \to y}$

8.7. $f(x,y,z) = \overline{xy + y} + (\overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z})$

8.8. $f(x,y,z) = \overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z}$

8.9. $f(x,y,z)=((x\to\overline{(xz\vee(x\to y)}+x+1))\vee\overline{(x\to y)}y)\vee(\overline{xy})$

8.10. $f(x,y,z)=\left(xy+(x\to\overline{(xz\vee(x\to y)}+x+1))\vee\overline{(x\to y)}\right)\vee(x+y)$

8.11. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee xy\vee yz}$

8.12. $f(x,y,z)=(x\to\overline{(xz\vee(x\to y)}+x+1))\vee\overline{(x\to y)}$

8.13. $f(x,y,z)=((x\to\overline{(xz\vee(x\to y)}+x+1))\vee\overline{(x\to y)})\to(xy+1)$

8.14. $f(x,y,z)=(\bar{x}\vee\overline{(xz\vee(x\to y)}+x+1))(y+1)$

8.15. $f(x,y,z)=\overline{x\to y}\vee\overline{(\overline{x\to zy}\vee\overline{xy\to z})\to z}$

8.16. $f(x,y,z)=(xy\to x+y+1)z\vee\overline{(x\to y)}$

8.17. $f(x,y)=(xy\to x+y+1)\vee\overline{(x\to y)}$

8.18 $f(x,y)=\left(xy+\overline{y\to x}\right)\vee(y\to 1)$

8.19. $f(x,y)=x+(xy\to x+y+1)+(x\vee y)$

8.20 $f(x,y,z)=\overline{xz\vee\overline{(x\to y)}}$

9. Ushbu funksiyalar nolni saqlaydimi?

9.1. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee\overline{(x\to y)}}$

9.2. $f(x,y,z)=\overline{(x+z)\vee\overline{(x\to y)}}$

9.3. $f(x,y)=xy\to x+y+1$

9.4. $f(x,y,z)=xyz\to xz+1$

9.5. $f(x,y,z)=x\to z+(y\vee\bar{y})$

9.6. $f(x,y,z)=z+xy+y+\bar{z}+1$

9.7. $f(x,y,z)=\overline{xyz\bar{z}+y}+1$

9.8. $f(x,y,z)=(xy\vee y)\to\bar{y}+z$

9.9. $f(x,y)=x\vee\overline{(x\to y)}\to z$

9.11. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee(x\to y)}+x+1$

9.12. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee\overline{(x\to y)+1}}$

9.13. $f(x,y,z)=xz\vee xy+x+1$

9.14. $f(x,y,z)=\overline{xz\vee(x\to\bar{y})+x+1}$

9.15. $f(x,y,z)=\bar{x}z\vee(x\to y)+\bar{x}+1$

9.16. $f(x,y,z)=\overline{x\to y}\vee\overline{y\to z}$

9.17. $f(x,y,z)=\overline{x\to zy}\vee\overline{xy\to z}$

9.18. $f(x,y,z)=(x\to z)\vee\overline{(x\to y)}$

9.19. $f(x,y,z)=xz\vee\overline{(x\to y)}$

9.10. $f(x,y,z)=\overline{xz \vee xy \vee yz}+1$

9.20 $f(x,y,z)=\overline{xz \vee \overline{(x \to y)}}$

10. Ushbu funksiyalar birni saqlaydimi?

10.1. $f(x,y,z)=xz \vee xy + x + 1$

10.2. $f(x,y,z)=\overline{xz \vee (x \to \bar{y}) + x + 1}$

10.3. $f(x,y,z)=xz \vee (x \to y)$

10.4. $f(x,y,z)=\bar{x}z \vee (x \to y) + \bar{x} + 1$

10.5. $f(x,y,z)=x\bar{z} \vee xz \vee \overline{(x \to y) + x + 1}$

10.6. $f(x,y,z)=\overline{x \to y} \vee \overline{y \to z}$

10.7. $f(x,y,z)=\overline{xz \vee (x \to y)} + x$

10.8. $f(x,y,z)=xz \vee \overline{(x \to y)} + 1$

10.9. $f(x,y,z)=xz \vee \overline{(x \to y)} + x$

10.10. $f(x,y,z)=xz \vee xy + x$

10.11. $f(x,y,z)=\bar{x} + (x \to z) \vee \overline{(x \to y)} + x$

10.12. $f(x,y,z)=xy \vee \overline{xy} \vee z\bar{z}$

10.13. $f(x,y,z)=\overline{xz \vee \overline{(x \to y)}}$

10.14. $f(x,y,z)=\bar{x}z \vee xz \vee y\bar{y}$

10.15. $f(x,y,z)=\overline{(x \to z) \vee y\bar{y}} + 1$

10.16. $f(x,y,z)=\overline{x \to zy} \vee \overline{xy \to z}$

10.17. $f(x,y,z)=\bar{x}z \vee xz \vee y$

10.18. $f(x,y,z)=xz \vee \overline{(x \to y)}$

10.19. $f(x,y,z)=(x \to z) \vee \overline{(x \to y)}$

10.20 $f(x,y,z)=\overline{xz \vee \overline{(x \to y)}} \to xz$

11. Quyidagi funksiyalar sinfini yopiq yoki yopiq emasligini ko'rsating?

11.1. bir o'zgaruvchilu funksiyalar sinfi.

11.2. ikki o'zgaruvchilu funksiyalar sinfi.

11.3. barcha mantiq algebrasi barcha funksiyalar sinfi.

11.4. chiziqli funksiyalar sinfi.

11.5. o'zi-o'ziga dual funksiyalar sinfi.

11.6. monoтon funksiyalar sinfi

11.7. monoтon kamayuvchi funksiyalar sinfi.

11.8. nolni saqlovchi funksiyalar sinfi.

11.9. birni saqlovchi funksiyalar sinfi.

11.10.nol va birni saqlovchi funksiyalar sinfi.

11.11.nolni saqlovchi va birni saqlmaydigan funksiyalar sinfi.

11.12.birni saqlovchi va nolni saqlmaydigan funksiyalar sinfi.

11.13.chiziqli bo'lmagan funksiyalar sinfi.

11.14.chiziqli va mononon funksiyalar sinfi.

11.15.chiziqli yoki monoton funksiyalar sinfi.

11.16.monoton va o'z- o'ziga dual funksiyalar sinfi.

11.17.monoton yoki o'z- o'ziga dual funksiyalar sinfi.

11.18.monoton bo'lmagan funksiyalar sinfi.

11.19.o'z- o'ziga dual bo'lmagan funksiyalar sinfi.

11.20. monoton bo'lmagan birni saqlovchi funksiyalar sinfi.

12. Quyidagi sistemalarni to'liqlikka tekshiring:

12.1. $\{\vee, {}^{-}\}$; 12.2 $\{\cdot, {}^{-}\}$; 12.3. $\{\rightarrow, {}^{-}\}$;

12.4. $\{/\}$; 12.5. $\{\downarrow\}$; 12.6 $\{+, \cdot, 1\}$;

12.7. $\{x+y, x\vee y, 1\}$; 12.8. $\{x+y+z, xy, 0, 1\}$; 12.9. $\{x\to y, 0\}$;

12.10. $\{xy,\ x+y, 1\}$; 12.11. $\{xy,\ \bar{x}\}$; 12.12. $\{\overline{xy}\}$;

12.13. $\{\overline{x\vee y}\}$; 12.14. $\{\bar{x},\ 1\}$; 12.15. $\{x\cdot y, x\vee y\}$;

12.16. $\{x+y,\ \bar{x}\}$; 12.17. $\{xy\vee yz\vee xz, \bar{x}\}$; 12.18. $\{x+y, xy, 1\}$;

12.19. $\{\overline{x\vee y\vee z}\}$; 12.20. $\{x\cdot y, x+y, 1, 0\}$

Nazorat uchun test savollari

1. Quyidagi mulohazalarning qaysi biri to'g'ri?

   a) $\vee$ ni $\bullet, \to$ funksiyalar yordamida ifodalash mumkin emas
   b) $\bullet$ ni $\vee, ^{-}$ funksiyalar yordamida ifodalash mumkin emas
   c) $\vee$ni $\bullet, ^{-}$ funksiyalar yordamida ifodalash mumkin emas
   d) $\bullet$ ni $\bullet, \to$ va $^{-}$ funksiyalar yordamida ifodalash mumkin emas

2. $(1\to x)\to y=0$ tenglamani yeching

   a. $(0,0)$
   b. $(0,1)$
   c. $(1,0)$
   d. $(1,1)$

3. $\begin{cases} x\leftrightarrow y=x \\ x\vee y=x \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching

A) (1,1)
B) (1,1) *va* (0,0)
C) (0,0)
D) (1,1)
E) (0,0) *va* (0,1)

4. Quyidagi funksiyalarni qaysi biri nolni saqlaydi?.

$A)\ \overline{x+y+1}$

$B)\ \overline{x+y}$

$C)\ x \to y$

$D)\ (x \to y)(y \to x)$

$E)\ \overline{xy}$

5. Quyidagi funksiyalarni qaysi biri birni saqlaydi?.

$A)\ \bar{x}+y$

$B)\ \overline{x+y+1}$

$C)\ \bar{\bar{x}}+\bar{y}+1$

$D)\ x \cdot y+1$

$E)\ (x \vee y)+1$

6. Quyidagi funksiyalarni qaysi biri monoton?.

$A)\ x \cdot y$

$B)\ x+y$

$C)\ x+y+1$

$D)\ x+y+z$

$E)\ x+y+z+1$

7. Quyidagi funksiyalarni qaysi biri o'z-o'ziga dual?.

$A)\ x+y+z+1$

$B)\ x \vee y \vee z$

$C)\ x+y$

$D)\ x+y+1$

$E)\ x \cdot y$

8. Quyidagi funksiyalarni qaysi biri chiziqli?..

$A)\ \overline{x+y}$

$B)\ \overline{x \vee y}$

$C)\ x \rightarrow y$

$D)\ x \cdot y$

$E)\ x \vee y$

9. Quyidagi funksiyalarni qaysi biri o'zaro teng?

$A)\ x \leftrightarrow y \ \ va \ \ (x \cdot (x \vee y)) \leftrightarrow z$

$B)\ x \rightarrow y \ \ va \ \ x \vee \bar{y}$

$C)\ x \cdot y \ \ va \ \ x + y$

$D)\ x \vee y \ \ va \ \ y \rightarrow x$

$E)\ \overline{x \vee y} \ \ va \ \ \bar{x} \vee \bar{y}$

10. Qaysi Bul funsiyalar sistemasi to'liq funksiyalar sistemasini tashkil etadi?

$A)\ \{\cdot,\ -\}$

$B)\ \{+,\ \rightarrow\}$

$C)\ \{\rightarrow,\ \leftrightarrow\}$

$D)\ \{\cdot,\ \leftrightarrow\}$

$E)\ \{\cdot,\ \cup\}$

11. Qaysi Bul funsiyalar sistemasi to'liq funksiyalar sistemasini tashkil etadi?

$A)\ \{+,\ \cdot,\ 1\}$

$B)\ \{+,\ \cdot\}$

$C)\ \{\cdot,\ \rightarrow\}$

$D)\ \{+,\ \leftrightarrow\}$

$E)\ \{\leftrightarrow\}$

12. Uch o'zgaruvchili Bul funsiyalar soni qancha?

$A)$ 256

$B)$ 16

$C)$ 64

$D)$ 128

$E)$ 512

13. To'liqmas funksiyalar sistemasini ko'rsating?

$A)$ $\{xy \vee yz \vee xz,\ \overline{x}\}$

$B)$ $\{x\,y,\ x+y, 1\}$

$C)$ $\{x\,y,\ \overline{x}\}$

$D)$ $\{x \rightarrow y,\ 0\}$

$E)$ $\{x \rightarrow y,\ \overline{x}\}$

14. Quyidagi qaysi funksiya bilan $x \downarrow y$ (Pirs strelkasi) funksiya ustma-ust tushadi?

$A)$ $\overline{x \vee y}$

$B)$ $x \vee y$

$C)$ $x \cdot y$

$D)$ $\overline{xy}$

$E)$ $x \rightarrow y$

15. Quyidagi qaysi funksiya bilan x / y (Sheffer shtrixi) ustma-ust tushadi?

$A)$ $\overline{x} + \overline{y}$

$B)$ $\overline{x} + y$

C) $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

$D)$ $x \rightarrow y$

$E)$ $x \leftrightarrow y$

16. Quyidagi qaysi tenglik munosabati o'rinli?

$A)\ \overline{x} = x/x$

$B)\ \overline{x} = x \to y$

$C)\ \overline{x} = x + x$

$D)\ \overline{x} = x + \overline{x}$

$E)\ \overline{x} = x + y$

5-§. MULOHAZALAR HISOBI. L NAZARIYA

Biz endi mulohazalar hisobining L aksiomatik nazariyasini kiritamiz.

(1) L ning simvollari sifatida $\rceil, \to, (,)$ va butun musbat indeksli X_i propozitsional xarflarni olamiz: $X_1, X_2, X_3, \ldots$

Bu erda $\rceil$ va $\to$ lar primitiv bog'lovchilar deyiladi. Mulohazalar xisobining muhim tushunchasi hisoblangan formula tushunchasini kiritamiz.

(2) (a) Barcha propozitsional harflar formulalardir;

(b) agar F va G lar formulalar bo'lsa, u holda $\rceil F, (F \to G)$ lar ham formulalardir.

(3) L nazariyaning F, G, H formulalari qanday bo'lishidan qat'iy nazar quyidagi formulalar L ning aksiomalaridir:

$(A_1)\ (F \to (G \to F));$

$(A_2)\ ((F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H)));$

$(A_3)\ ((\rceil G \to \rceil F) \to ((\rceil G \to F) \to G));$

(4) Yagona keltirib chiqarish qoidasi bo'lib, u ham bo'lsa, modus ponens qoidasi xizmat qiladi: F va $F \to G$ formulalarning bevosita natijasi G dir. Bu qoidani qisqacha MP ko'rinishda belgilaymiz.

Boshqa bog'lovchilarni quyidagicha aniqlaymiz:

(D_1) $(F \wedge G)$ *formula* $\rceil(F \to \rceil G)$ *ekanini;*

(D_2) $(F \vee G)$ *formula* $(\rceil F \to G)$ *ekanini;*

(D_3) $(F \leftrightarrow G)$ *formula* $(F \to G) \wedge (G \to F)$

ekanini bildiradi.

Bu ta'riflarning ma'nosi, masalan (D_1) da, F va G formulalar qanday bo'lganda ham $(F \wedge G)$ ifoda $\rceil(F \to \rceil G)$ formulaning qisqartirilgan ifodasi ekanini bildiradi.

5.1-lemma $\vdash (F \to F)$, bu erda F ixtiyoriy formuladir.

5.1-teorema (Deduksiya teoremasi). *Agar Γ -formulalar to'plami, F va G lar esa formulalar bo'lib, $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$ bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F \to G$ bo'ladi. Xususan, agar $F \vdash G$ bo'lsa, u holda $\vdash F \to G$ bo'ladi.*

1-natija. *L nazariyaning ixtiyoriy F,G,H formulalari uchun quyidagilar o'rinlidir:*

(a) $F \to G,\ G \to H \ \vdash F \to H$ tranzitivlik

(b) $F \to (G \to H) \vdash G \to (F \to H)$ shartlarni o'rnini almashtirish

Isbot. Masalan (b) ning isbotlaylik.

(1) $F \to (G \to H)$ gipoteza

(2) G gipoteza

(3) F gipoteza

(4) $G \to H$ (1) va (3) lar *MP* qo'llandi.

(5) H (2) va (4) lar *MP* qo'llandi.

Demak, $F \to (G \to H),\ G, F \vdash H$

Bunga deduksiya teoremasini qo'llab

$F \to (G \to H),\ G \vdash F \to H$ ni hosil qilamiz.

(a) bandning isbotini mustaqil bajarish uchun o'quvchi e'tiboriga xavola etiladi.

Isbotlashga doir misollarni echish namunalari

Quyidagi formulalar L nazariyaning teoremasi bo'lishligini korsatamiz.

1. $\vdash (\neg F \Rightarrow F) \Rightarrow F$

1) $\neg F \Rightarrow \neg F$ $\quad A_1$

2) $(F \Rightarrow F) \Rightarrow (\neg F \Rightarrow F) \Rightarrow F$ $\quad A_3$

3) $(\neg F \Rightarrow F) \Rightarrow F$ $\quad 1,2MP$

2. $F \Rightarrow G, G \Rightarrow H \vdash F \Rightarrow H$

1) $F \Rightarrow G$ $\quad$ *gipoteza*

2) $G \Rightarrow H$ $\quad$ *gipoteza*

3) $(G \Rightarrow H) \Rightarrow (F \Rightarrow (G \Rightarrow H))$ $\quad A_1$

4) $F \Rightarrow (G \Rightarrow H)$ $\quad MP$

5) $(F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$ $\quad A_2$

6) $(F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)$ $\quad MP$

7) $F \Rightarrow H$ $\quad MP$

3. $F \Rightarrow (G \Rightarrow H) \vdash G \Rightarrow (F \Rightarrow H)$

1) $F \Rightarrow (G \Rightarrow H)$ $\quad$ *gipoteza*

2) $((F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$ $\quad A_2$

3) $(F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H)$

4) $G \Rightarrow (F \Rightarrow G)$ $\quad A_1$

5) $G \Rightarrow (F \Rightarrow H)$ *3 va 4 formulalarga 2-misolni qullanishi*

$\neg G \Rightarrow \neg F \vdash F \Rightarrow H$

1) $\neg G \Rightarrow \neg F$ $\quad$ *gipoteza*

2) $(\neg G \Rightarrow \neg F) \Rightarrow ((\neg G \Rightarrow F) \Rightarrow G)$ $\quad A_3$

3) $(\neg G \Rightarrow F) \Rightarrow G$ $\quad$ *MP qoidasi 1 va 2-formulalarga qullanilgan*

4) $F \Rightarrow (\neg G \Rightarrow F)$ $\quad A_1$

5. $\vdash (\neg G \Rightarrow \neg F) \Rightarrow (F \Rightarrow G)$

1) $(\neg G \Rightarrow \neg F) \Rightarrow ((\neg G \Rightarrow F) \Rightarrow G)$ $\quad A_3$

2) $(\neg G \Rightarrow F) \Rightarrow ((\neg G \Rightarrow \neg F) \Rightarrow G)$ $\quad 1)ga3-misol$

3) $F \Rightarrow (\neg G \Rightarrow F)$ $\quad A_1$

4) $F \Rightarrow ((\neg G \Rightarrow \neg F) \Rightarrow G)$ *3 va 2 formulalarga 2-misolni qulanishi*

5) $(\neg G \Rightarrow \neg F) \Rightarrow (F \Rightarrow G)$ *4formulaga 3-misolni qulanishi*

6. $F \& G \vdash G$

$\neg(F\Rightarrow\neg G)\vdash G$

1)$\neg(F\Rightarrow\neg G)$ *gipoteza*

2)$\neg(F\Rightarrow\neg G)\Rightarrow(\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G))$ A_1

3)$\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G)$ 1,2MP

4)$(\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G))\Rightarrow((\neg G\Rightarrow(F\Rightarrow\neg G))\Rightarrow G)$ A_3

5)$(\neg G\Rightarrow(F\Rightarrow\neg G))\Rightarrow G$ 3,4MP

6)$\neg G\Rightarrow(F\Rightarrow\neg G)$ A_1

7)G 5,6MP

7. $G\vdash F\vee G$ ya'ni $G\vdash\neg F\Rightarrow G$

1)G *gipoteza*

2)$G\Rightarrow(\neg F\Rightarrow G)$ A_1

3)$\neg F\Rightarrow G$ 1,2MP

8. $F\Leftrightarrow G\vdash G\Rightarrow F$

$(F\Rightarrow G)\&(G\Rightarrow F)\vdash G\Rightarrow F$

1)$(F\Rightarrow G)\&(G\Rightarrow F)$

2)$G\Rightarrow F$ *1- formulalarga 6-misolni qulanishi*

Deduksiya teoremasini qullab isbotlashga doir misollar.

1. $\vdash F\Rightarrow(G\neg(F\Rightarrow\neg G))$

1)F *gipoteza*

2)G *gipoteza*

3)$F\Rightarrow(\neg\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G))$ (f)

4)$\neg\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G)$ 1,3MP

5)$G\Rightarrow\neg\neg G$ (b)

6)$G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G)$ 5,4*tran*

7)$\neg(F\Rightarrow\neg G)$ 2,6MP

8) $\vdash F\Rightarrow(G\Rightarrow(F\& G))$

9) $\vdash F\Rightarrow(G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G))$

2. $\vdash F\Rightarrow(G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G))$

1)$F, F\Rightarrow\neg G\vdash G$ MP

2)$F\vdash(F\Rightarrow\neg G)\Rightarrow\neg G$ *deduksiya*

3) $\vdash((F\Rightarrow\neg G)\Rightarrow\neg G)\Rightarrow(\neg\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G))$ (e)

4)$F\vdash\neg\neg G\Rightarrow\neg(F\Rightarrow\neg G)$ 3,2MP

5) $\vdash G\Rightarrow\neg\neg G$ (b)

6) $F \vdash G \Rightarrow \neg(F \Rightarrow \neg G)$ 4,5*tran*

7) $\vdash F \Rightarrow (G \Rightarrow \neg(F \Rightarrow \neg G))$ 6*teor.deduk*

3. $\vdash ((F \Rightarrow G) \Rightarrow F) \Rightarrow F$

1) $(F \Rightarrow G) \Rightarrow F$ *gipoteza*

2) $\neg F \Rightarrow (F \Rightarrow G)$ (c)

3) $\neg F \Rightarrow F$ 1,2*tran*

4) $(\neg F \Rightarrow F) \Rightarrow F$ (h)

5) F 3,4*MP*

$(F \Rightarrow G) \Rightarrow F \vdash F$

4. $\vdash F \to (\neg G \to \neg(F \Rightarrow G))$

1) F *gipoteza*

2) $((F \to G) \to G) \to (\neg G \to \neg(F \Rightarrow G))$ **(e)**

3) $(F \to G) \to (F \to G)$

4) $F \to ((F \to G) \to G)$ (3)$T.3$

5) $(F \to G) \to G$ 1,4*MP*

6) $\neg G \to \neg(F \Rightarrow G)$ 5,2*MP*

$F \vdash \neg G \to \neg(F \to G)$

$\vdash F \to (\neg G \to \neg(F \Rightarrow G))$

5. $F \& G \vdash G$

$\neg(F \to G) \vdash G$

1) $\neg(F \to G)$ *gipoteza*

2) $\neg(F \to G) \Rightarrow (\neg G \Rightarrow \neg(F \Rightarrow G))$ A_1

3) $\neg G \Rightarrow \neg(F \Rightarrow G)$ 1,2*MP*

4) $(\neg G \Rightarrow \neg(F \Rightarrow G) \Rightarrow ((\neg G \Rightarrow (F \Rightarrow \neg G)) \Rightarrow G$ A_2

5) $(\neg G \Rightarrow (F \Rightarrow \neg G)) \Rightarrow G$ 3,4*MP*

6) $\neg G \Rightarrow (F \Rightarrow \neg G)$ A_1

7) G

6. $F \vee G, F \Rightarrow H, G \Rightarrow H \vdash H$

1) $\neg F \Rightarrow G$ *gipoteza*

2) $F \Rightarrow H$ *gipoteza*

3) $G \Rightarrow H$ *gipoteza*

4) $\neg F \Rightarrow H$ 1,3tran

5) $(F \Rightarrow H) \Rightarrow ((\neg F \Rightarrow H) \Rightarrow H)$ (2)

6) $(\neg F \Rightarrow H) \Rightarrow H$ 2,5MP

7) H 4,6MP

<u>Mustaqil echishga doir misollar</u>

Quyidagilarni L nazariyaning teoremasi ekanligin ko'rsating

(a) $\neg\neg G \to G$;

(b) $G \to \neg\neg G$;

(c) $\neg F \to (F \to G)$;

(d) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$;

(e) $F \to (\neg G \to \neg(F \to G))$;

(f) $(\neg F \to F) \to F$;

(g) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$;

(h) $(F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$.

(i) $A \to (\neg B \to (A \vee B))$

(j) $A \to (\neg B \to \neg(A \wedge B))$

O'z o'zini tekshirish uchun nazorat savollari

1. Aksiomatik nazariya.
2. Teorema tushunchasi.
3. Muloxazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasi.
4. Deduksiya teoremasi.
5. Keltirib chiqariladigan formulalar.
6. To'liqlik haqidagi Gyodel teoremasi.
7. L nazariyaning zidsizligi.
8. Teoremalarni isbotlash.

6-§. PREDIKATLAR ALGEBRASI

M to`plamda aniqlangan n -ar predikat (mulohazaviy forma) deb $P: M^n \to E$ funksiyaga aytiladi.

Yuqorida aytilganlaridan ko'rinadiki, M to'plamda aniqlangan $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ n -ar predikat M^n (n=1,2,3,...) to`plamning yagona qism to`plamini ajratib berar ekan (bu qism to`plamga kirgan har bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $n$ -lik uchun $P(x_1, x_2, ......, x_n)$ rost bo`lib, qolgan n -liklarda esa $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ yolg`ondir). Bu qism to`plam $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikatning rostlik sohsi deyiladi va P bilan belgilanadi.

Shunday qilib $P \subseteq M^n$ bo`lib,

$P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \setminus (x_1, x_2, ...x_n) \in M^n \,\&\, P(x_1, x_2, ..., x_n) = rost\}$ dir.

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikat P to`plamning harakteristik funksiyasi bo`lishini ko`rish qiyin emas. Demak, $n - ar$ predikatni yana quyidagicha ta'riflasa bo`lar ekan:

M to`plamda aniqlangan $n - ar$ predikat deb $M^n$ to`plamning ixtiyoriy qism to`plamiga aytiladi.

Predikatlarni $P, Q, T, S, ...P_1, P_2, ...$ simvollar yordamida ifodalaymiz.

1-misol. $M = \{1,2,3,4\}$ to`plamda $P(x)$: "$x - tub\ son$" predikati aniqlangan bo`lsin.

Bu predikat $x = 2$ *va* $x = 3$ bo`lgandagina rost mulohazaga aylanadi, ya'ni olingan predikatning rostlik sohasi $P = \{2,3\} \subseteq M$ to`plamdan iboratdir.

$Q(x)$: "$x < 4$" predikatni ham shu M to`plamda qaraylik . Bu predikat $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ bo`lgandagina rost mulohazaga aylanadi, ya'ni uning rostlik sohasi $P = \{1,2,3\} \subseteq M$ to`plamdan iboratdir.

Yana shu to`plamda $W(x,y)$: "$x$ - $y$ *ning bo'luvchisi*" predikatini qaraylik. Ravshanki bu predikat $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)$ *va* $(4,4)$ juftliklarada rost mulohazaga aylanib qolgan tartiblangan juftliklarda yolg`on qiymat qabul qiladi. Demak, $W(x,y)$ predikatning rostlik sohasi

$$W = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(4,4)\} \subseteq M^{n}$$

to`plamdan iborat ekan.

$W(x,y)$ predikat W to`plamning harakteristik **funksiyasi bo`lishi ravshandir:**

$W = \{(x,y) | x, y \in M \,\&\, W(x,y) = rost\}$.

M to`plamda $P(x)$ predikat aniqlangan bo'lsin. "*M to`plamning barcha elementlari P xossaga ega*" va "*M to`plamda P xossaga ega bo'lgan elementlar mavjud*" degan darak gaplar mulohazalar ekanligi ravshandir. **Bu mulohazalarga** quyidagicha tus berish mumkin:

"*Barcha x lar P xossaga ega*", "*Shunday x mavjudki, u P xossaga ega*".

Yuqoridagi mulohazalar tarkibida qatnashgan "*barcha x lar*" va "*shunday x mavjudki*" iboralar mos ravishda umumiylik va mavjudlik kvantori deyiladi hamda $\forall x$ *va* $\exists x$ simvollar bilan belgilanadi.

Shunday qilib yuqorida keltirilgan mulohazalar qisqacha $\forall x P(x)$ *va* $\exists x P(x)$ ko'rinishida belgilanadi. $P(x)$ predikat tarkibidagi x o`zgaruvchi erkin predmet o`zgaruvchi deb ataladi.

Shuni ham aytish kerakki, $\forall x P(x)$ *va* $\exists x P(x)$ mulohazalarda x predmet o`zgaruvchi qatnashsa-da, $x$ endi erkinlik xususiyatini yo`qotadi va bog`liq predmet o`zgaruvchiga aylanadi.(kvantorlar yordamida bog`langan).

$P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar M to`plamda aniqlangan bo`lsin. $R(x) = P(x) \,\&\, Q(x)$ M to`plamda aniqlangan xossa bo`lib, bu xossaga ham P ham Q xossalarga ega bo`lgan elementlargina egadir, ya'ni $R(x)$ predikat

*$P(x)$ va $Q(x)$ **predikatlar bilan** bir paytda **rost bo`lgandagina** rost bo`luvchi predikatdir.*

Huddi shunday $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar dizyunksiyasi $T(x)=P(x)\vee Q(x)$ M_1 va M_2 larning birlashmasi $M_1\cup M_2$ ni harakterlanishini ko`rish qiyin emas.

"$x-P$ xossaga ega emas" degan darak gap, tabiiy, $P(x)$ predikatning inkoridir: u yangi predikat bo`lib, uni $S(x)=\neg P(x)$ bilan belgilaylik.

Endi $P(x)\Rightarrow Q(x)$ ifodani ko`raylik. Implikatsiya amalini diz`yunksiya va inkor orqali ifoda qilish mumkinligini mulohazalar algebrasida ko`rgan edik. Shunga asosan, $P(x)\Rightarrow Q(x)$ va $\neg P(x)\vee Q(x)$ lar teng kuchli ifodalar ekanligini hamda $P(x)\Rightarrow Q(x)$ predikat $C_M P\cup Q$ to`plamning harakteristik funksiyasi ekanligini ko`ramiz.

Nixoyat $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ va $\left[P(x)\Rightarrow Q(x)[\&]Q(x)\Rightarrow P(x)\right]$ ifodalar teng kuchli ekanligiga, $P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ predikat esa $(C_M P\cup Q)\cap(C_M Q\cup P)$ to`plamning harakteristik funksiyasi bo`lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

M to`plamda aniqlangan $P(x)$ predikat to`plamning har bir elementi uchun rost qiymat qabul qilsa, bunday predikat M to`plamda $AP$ predikat deyiladi. $P(x)$ predikat har qanday $M$ to`plamda AP predikat bo`lsa, bunday predikat AP predikat deyiladi.

2-misol. $P(x)=F(x)\vee\neg F(x)$ predikat AP predikatdir. (isbotlang !).

M to`plamda aniqlangan $P(x)$ predikat $M$ to`plamning har bir elementi uchun yolg`on qiymat qabul qilsa, bunday predikat $M$ to`plamda AE predikat deyiladi. Agar $P(x)$ ixtiyoriy M to`plamda $AE$ predikat bo`lsa, u holda uni AE predikat deyiladi.

3-misol. $P(x)=F(x)\&\neg F(x)$ predikat AYo predikatdir (isbotlang!).

M to`plamda aniqlangan $P(x)$ predikat uchun M to`plamda shunday x_0 element topilsaki, $P(x_0)=1$ bo`lsa, u holda $P(x)$ M to`plamda bajariluvchi predikat deyiladi.. Agar $P(x)$ ixtiyoriy M to`plamda bajariluvchi bo`lsa, u holda $P(x)$ bajariluvchi predikat deyiladi.

4-misol. $P(x)$: "$x>5 \& x \neq 10$" natural sonlar to`plamda bajariluvchi predikatdir.

Endi PA ning formulasi tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. 1^0. *Har bir propozitsional o`zgaruvchi formuladir.*

2^0. *$P-n-ar$ predikat o`zgaruvchi $t_1,t_2,...t_n$ lar predmet o`zgaruvchilar yoki individual predmetlar bo`lsa, $P(t_1,t_2,...,t_n)$ ifoda formuladir.* $(n=1,2,....)$.

3^0. *$U(x)$ formula bo`lib, $x$ erkin predmet o`zgaruvchisi bo`lsa, u holda $\forall x U(x)$ va $\exists x U(x)$ lar formulalardir.*

4^0 *U va B lar formula bo`lib, ularda birida bog`liq, ikkinchisida erkin bo`lgan predmet o`zgaruvchilar bo`lmasin. U holda quyidagi ifodalar formuladir:*

$(U \& B)$, $(U \vee B)$, $(U \Rightarrow B)$, $(U \Leftrightarrow B)$, $(\neg U)$

bunda U va B formulalarda erkin bo`lgan predmet o`zgaruvchilar yuqorida qurilgan formulalarda ham erkin, U va B formulalarda bog`liq bo`lgan predmet o`zgaruvchilar mazkur formulalarda ham bog`liq bo`lib qoladilar.

5-misol. $(\forall x \exists y(A \vee (P(x) \& F(x,y))) \Rightarrow \exists t P(t))$ ifoda PA ning formulasidir, bu yerda A-propozitsional o`zgaruvchi, $P(x), F(x,y)$ -lar o`zgaruvchi predikatlar, $\forall x$ *va* $\exists y$ kvantorlarning ta'sir sohasi $(A \vee (P(x) \& F(x,y)))$ formuladir.

6-misol. $((A \Rightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow \forall y F(y,t))) \& P(x)$ ifoda PA ning formulasi emas, chunki $(\neg A \Rightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow \forall y F(y,t))$ formulada x predmet o`zgaruvchi bog`langan bo`lib, ifodaning ikkinchi qismi $P(x)$ *da* $x$ erkin o`zgaruvchidir, ya'ni berilgan ifodada x predmet o`zgaruvchiga nisbatan kolliziya paydo bo`lgan.

7-misol. $\exists x(P(x) \Rightarrow \forall tF(x,t))$ formuladagi $P(x)$ va $F(x,t)$ predikatlarni N natural sonlar sohasida, masalan.

$P(x)$: "$x-3=0$", $F(x,t)$: "$x<t+5$"

kabi aniqlasak, M matematika fakulteti talabalari to`pllami bo`lganda esa:

$P(x)$: "*x – hushchaqchaq talaba*"

$F(x,t)$: "*x – t ning do`sti*" kabi belgilash mumkin.

Birinchi holda olgan formulamiz:

"*Shunday x natural son topiladiki, agar* $x-3=0$ *bo`lsa **u holda** barcha t natural sonlar uchun* $x<t+5$ *bo`ladi*"

degan jumla bo`lsa ikkinchisi:

"***Shunday x talaba mavjudki,agar u hushchaqchaq bo`lsa, u holda u ixtiyoriy t talaba bilan do`stdir***"

degan jumla hosil bo`ladi.

Shuning uchun o`zgaruvchi P predikat muayyan to`plamda aniqlangan, bo`lsa u holda uni shu to`plamda aniqlangan individual predikat deb ataladi.

<u>2-ta'rif.</u> *Predikatlar algebrasining* $U(A_1,...,A_k;a_1,...,a_m;x_1,...,x_s;P_1,...P_r)$; *Formulasi* $P_1,...P_r$ *predikatalar* M *to`plamda ixtiyoriy ravishda aniqlanganda,* $x_1,...,x_s$ *predmaet o`zgaruvchilarni* M *to`plamning ixtiyoriy elementlari bilan alamashtirganda hamda* $A_1,...,A_k$ *propozitsional o`zgaruvchilar qiymatlarining ixtiyoriy tanlanmasida 1 qiymat qabul etsa, u holda* U M *to`plamda aynan rost formula deyiladi. Agar* $U$ *formula ixtiyoriy* $M$ *to`plamda aynan rost bo`lsa, u holda* U *aynan rost formula deyiladi.*

8-misol. $P(x)$ natural sonlar to`plamida aniqlangan ixtiyoriy unar predikat bo`lsin. Quyidagi formula natural sonlar to`plamida aynan rost formuladir: $P(1)\&[x\in N \,\&\, P(x) \Rightarrow P(x+1)] \Rightarrow \forall yP(y)$. Ushbu $\forall x\left[P(x) \vee \neg P(x)\right]$ formula esa har qanday to`plamda aynan rostdir.

2-ta'rifda 1 ni 0 bilan, rost so`zini yolg`on so`zi bilan alamashtirsak, u holda $M$ to`plamda aynan yolg`on formula tushunchalari hosil bo`ladi.

3-ta'rif. $U(A_1,\ldots,A_k;a_1,\ldots,a_m;x_1,\ldots,x_s;P_1,\ldots P_r)$; *formula* $P_1,\ldots P_r$ *predikatlarni* M *to`plamda kamida bitta usulda aniqlanganda,* $x_1,\ldots,x_s$ *predmet o`zgaruvchilarni* M *to`plam elementlari bilan kamida bitta usulda almashtirilganda hamda* $A_1,\ldots,A_k$ *propozitsional o`zgaruvchilar qiymatlarining kamida bitta naborida 1 qiymat qabul qilsa,* U *formula* M *to`plamda bajariluvchi deyiladi.* $U$ *formula ixtiyoriy* $M$ *to`plamda bajariluvchi bo`lsa, uni bajariluvchi formula deyiladi.*

9-misol. $\exists x[A \& P(x) \Rightarrow \forall t F(x,t)]$ formula natural sonlar to`plamida bajariluvchidir. Haqiqatan "$P(x)$: "$x-$ *tub son*", $F(x,t)$ *esa* "$x \le t$" bo`lsa, A propozitsional o`zgaruvchini masalan rost jumla bilan alamashtirsak, qaralayotgan formula rost qiymat qabul qiladi.

4-ta'rif. *Predikatlar algebrasining* M *predmet sohasi ustida qaralayotgan* U *va* B *formulalari tarkibida* $A_1,\ldots,A_k$ *propozitsional o`zgaruvchilar,* $a_1,\ldots,a_m$ *-individlar,* $x_1,\ldots,x_s$ *-predmet o`zgaruvchilari va* $P_1,\ldots P_r$ *o`zgaruvchi predikatlar qatnashgan bo`lsin.Agar bu formulalarda propozitsional o`zgaruvchilar qiymatlarining ixtiyoriy tanlanmasida erkin predmet o`zgaruvchilari va o`zgaruvchi predikatlarni* $M$ *to`plamda ixtiyoriy individual predmetlar va individual predikatlar bilan almashtirganda bir xil qiymat qabul qilsa, bunday formulalar* M *to`plamda teng kuchli deyiladi va* $U \equiv B$ *ko`rinishda belgilanadi. Agar* U *va* B *formulalar ixtiyoriy* M *predmet sohada teng kuchli bo`lsalar, u holda bunday formulalar teng kuchli formulalar deyiladi.*

10-misol.

$\exists x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)$ *formula*

$\exists x(\neg P(x) \vee \forall y Q(y)$ *formulaga teng kuchlidir.*

11-misol.

$\exists x(P(x) \& Q(x))$ *formula*

$\exists x P(x) \& \exists x Q(x)$ *formulaga teng kuchli emas,* Chunki shunday M predmet soha va undan shunday individual predikatlar topish mumkinki, bu ikkita formulaning qiymatlari har xil bo`ladi.

Masalan, "$P(x)$: "$x-tub \quad son$", $Q(x)$:"$x-to'liq \quad kvadrat$" predikatlar bo`lib, predmet soha esa $N$ natural sonlar to`plami bo`lsin. U holda $\exists x(P(x)\,\&\,Q(x))$:«shunday $x$ topiladiki, u tub son va to`liq kvadrat» yolg`on jumla, $\exists xP(x)\,\&\,\exists xQ(x)$ «shunday $x$ topiladiki, u tub son va shunday $x$ topiladik, u to`liq kvadrat» esa rost jumladir.

Mustaqil echish uchun misollar

1. f^1 - bir o'rinli, g^2 - ikki o'rinli, h^3 - uch o'rinli funksional simvollar bo'lsin. Quyidagi so'zlar term bo'ladimi?
   a) $f^1(g^2(x_0,x_1))$
   b) $g^2(f^1(x_2,h^3(x_0,x_1,x_2)))$
   c) $f^1(g^2(x_0),h^3(x_0,x_1,x_2))$
2. f^1 - bir o'rinli, g^2 - ikki o'rinli, h^3 - uch o'rinli funksional simvollar va P^1 - bir o'rinli, Q^3 -uch o'rinli predikat simvollar bo'lsin. Quyidagi so'zlar formula bo'ladimi?

a) $Q^3(x_0,f^1(x_1),h^3(x_0,x_2,x_2))$

b) $(P^1(x_0)\to\forall x_1(Q^3(x_0,x_1,x_2)\wedge P^1(g^2(x_1,x_2))))$

c) $Q^3(P^1(x_0),f^1(x_1),f^1(x_2))$

d) $f^1(h^3(x_1,x_2,x_1))$

3. Barcha qism formulalarni toping
   a) $Q^3(x_0,f^1(x_1),h^3(x_0,x_2,x_2))$
   b) $(P^1(x_0)\to\forall x_1(Q^3(x_0,x_1,x_2)\wedge P^1(g^2(x_1,x_2))))$
4. $M=\langle N,S^3,P^3\rangle$ modelda, bu erda $S^3(x,y,z)=r\Leftrightarrow x+y=z$, $P^3(x,y,z)=r\Leftrightarrow x\cdot y=z$ bitta erkli x o'zgaruvchili shunday formula yozingki, u rost bo'lishi uchun quyidagi shart zarur va yetarli bo'lsin:

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 2$

d) x – juft son

e) x – toq son

f) x – tub son.

5. 4-misoldagi M modelda ikkita erkli x va y o'zgaruvchili shunday formula yozingki, u rost bo'lishi uchun quyidagi shart zarur va yetarli bo'lsin:

a) $x = y$

b) $x \leq y$

c) $x < y$

d) x soni y soniga bo'linadi

e) x va y tub egizak-sonlar

6. Quyidagi formulalar bajariladimi?

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x P(x)$

c) $\exists x \forall y (Q(x, x) \wedge \neg Q(x, y))$

d) $\exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$

e) $(P(x) \to \forall y P(y))$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Mendelson E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku. M. «Nauka». 1976
2. Novikov P.S. Elementi matematicheskoy logiki. M. «Nauka» 1973
3. Ershov Yu.L., Palyutin E.A. Matematicheskaya logika. M. «Nauka» 1979
4. Yablonskiy S.V. Vvedenie v diskretnuyu matematiku. M. «Nauka» 2000
5. Lavrov I.A., Maksimova L.L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M. «Nauka» 2001
6. Igoshin V.I. Zadachnik-praktikum po matematicheskoy logike. M. «Prosveshenie» 1986
7. Igoshin V.I. Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov. M. 2008
8. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7-edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
9. Uspenkiy V.A. Teorema Gyodelya o nepolpote. M. 1982
10. Yokubov T. Matematik logika elementlari. Toshkent. «O'qituvchi» 1983
11. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. T., 2008

Mundarija.

Kirish	3
1§. To'plam. To'plamlar ustida amallar.	4
2§. Binar munosabatlar.	26
3§. Mulohazalar algebrasi.	34
4§. Mantiq algebrasi funksiyalari.	45
5§ Mulohazalar hisobi. L nazariy	64
6§. Predikatlar algebrasi.	70
Adabiyotlar	78

Босишга рухсат этилди 27. 12.2016. Ҳажми 5 босма табоқ.
Бичими 60×84 1/16. Адади 100 нусха. Буюртма 29.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.