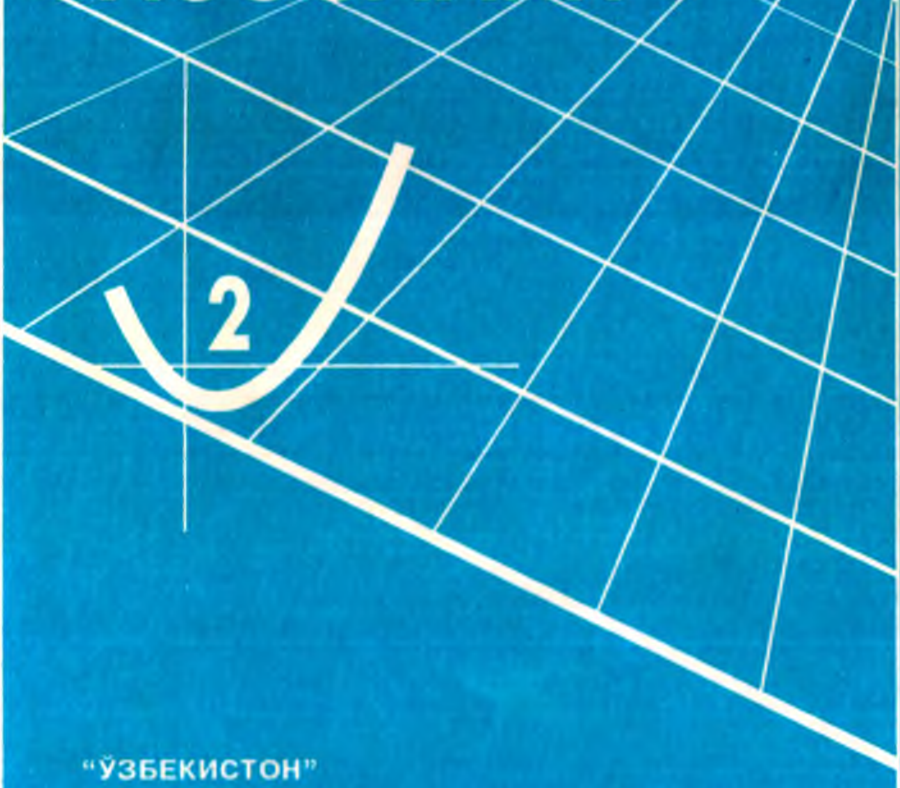
ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ



2

“ЎЗБЕКИСТОН”

Т. ЖЎРАЕВ, А. САЪДУЛЛАЕВ, Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ,
Ҳ. МАНСУРОВ, А. ВОРИСОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА АСОСЛАРИ

2

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус
таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун
дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»

22.11
О 46

Такризчилар: ЎзР ФА мухбир аъзоси, физика-математика
фанлари доктори, проф. Ш. А. АЛИМОВ
ЎзР ФА мухбир аъзоси, физика-математика
фанлари доктори, проф. Н. Ю. САТИМОВ

Муҳаррир ***М. Саъдуллаев***

● *Математик анализ*
● Оддий дифференциал тенгламалар

О 46 **Олий** математика асослари: Олий ўқув юрти талабалари учун дарслик, қ.2. Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов ва бошқ.—Т.: Ўзбекистон, 1999—303 б.
1. Жўраев Т. ва бошқ.

ISBN 5-640-01777-5

Мазкур китоб университетнинг катор факультетлари, шунингдек техника олий ўкув юртлари талабалари учун мўлжалланган.

Китобнинг бу кисмида математик анализ курсининг аникмас ва аник интеграллар, кўп ўзгарувчили функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги, дифференциал ҳисоби, сонли ва функционал каторлар мавзулари ҳамда дифференциал тенгламалар курси баёни ўрин олган.

22.11.я73

№ 153—96
Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси

$$\text{О}\,\frac{1602000000-51}{\text{М}351(04)96}\,99$$

СЎЗ БОШИ

Ушбу китоб «Ўзбекистон» нашриётида чоп этилган «Олий математика асослари», 1-томининг давоми бўлиб, олий математиканинг аниқмас ва аниқ интеграллар, кўп ўзгарувчили функциялар ва уларнинг дифференциал ҳисоби, сонли ва функционал қаторлар мавзуларини ҳамда оддий дифференциал тенгламалар курсини ўз ичига олади.

Бу китобни ёзишда ҳам асосий тушунчалар ҳамда тасдиқларни содда, равон баён этилишига, айни пайтда математик қатъийликни сақлашга эътиборни қаратдик.

Кўп ўзгарувчили функцияларга доир бобларни ёзишда, даставвал икки ўзгарувчили функциялар келтирилди. Унда бир ўзгарувчили функциялардаги мос маълумотлардан фойдаланиш билан бир қаторда улар орасидаги ўхшашлик ва тафовутлар кўрсатила борилди.

Маълумки, назарий маълумотларни ўзлаштиришда намуна сифатида келтириладиган мисол ва масалаларнинг аҳамияти катта. Айниқса бу ҳол оддий дифференциал тенгламалар назариясида яққол кўринади.

Ўқувчи дифференциал тенгламалар курси баёнида ҳар бир мавзу мисол ва масалалар билан таъминланганлигини кузатади. Мисол ва масалаларни келтиришда ҳамда уларни ечиш усулларини кўрсатишда, аввал содда, кўникма ҳосил қилгач мураккаброқ мисолларга ўтиш принципига амал қилдик.

Муаллифлар китоб қўлёзмасини ўқиб унинг сифатини янада яхшилаш борасидаги фикр ва мулоҳазалари учун Ўзбекистон Фанлар Академиясининг мухбир аъзолари, профессорлар Ш. О. Алимов, Н. Ю. Сатимовларга ўз миннатдорчиликларини изҳор қиладилар ва китобнинг камчиликларини бартараф этишга оид таклифлари учун китобхонларга аввалдан ташаккур билдирадилар.

1-БОБ

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Кўп ҳолларда функциянинг ҳосиласига кўра шу функцияни топиш масаласини ҳал қилиш лозим бўлади. Бу эса функцияларни интеграллаш тушунчасига олиб келади.

Ушбу бобда функциянинг аниқмас интеграли, унинг хоссалари, интеграллаш усуллари ҳамда интегралларни ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

1-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар (a, b) интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласи берилган $f(x)$ га тенг бўлса, яъни*

$$F'(x)=f(x)$$

бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

Мисоллар. 1. $f(x)=x^2$ функциянинг $(-\infty, +\infty)$ даги бошланғич функцияси

$$F(x)=\frac{x^3}{3}$$

бўлади, чунки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x) .$$

2. $f(x)=\cos x$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)=\sin x$ бўлади, чунки

$$F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x).$$

3. $f(x)=\sqrt{1-x}$ функциянинг $[-1, 1]$ оралиқдаги бошланғич функцияси

$$F(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}$$

бўлади, чунки

$$F'(x)=\left(-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\right)'=-\frac{2}{3}\left[(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]'=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(-1)=\sqrt{1-x}=f(x) .$$

Агар $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x)+C$ ҳам $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, бунда C — ўзгармас сон. Ҳақиқатан ҳам,

$$F'(x)=f(x)$$

бўлишидан фойдаланиб

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),$$

$F(x)+C$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси эканини топамиз.

Лемма. *Агар $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, бу $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади.*

Исбот. $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функцияларнинг ҳар бири $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x)=f(x),$$
$$\Phi'(x)=f(x).$$

Бу тенгликлардан

$$F'(x)=\Phi'(x)$$

бўлиши келиб чиқади.

Ёрдамчи

$$\varphi(x)=\Phi(x)-F(x) \tag{1}$$

функцияни қараймиз. Равшанки, бу функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $\forall x\in(a, b)$ да унинг ҳосиласи

$$\varphi'(x)=[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=0 \tag{2}$$

бўлади.

(a, b) интервалда ихтиёрий x ва тайинланган x_0 нуқталарни олиб, $[x_0, x]$ ёки $[x, x_0]$, сегментни қараймиз. Бу $\varphi(x)$ функция Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига кўра

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(c)\ (x-x_0)\ \ (x_0<c<x)$$

бўлади. (2) тенгликдан фойдаланиб

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=0,$$

яъни

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)$$

бўлишини топамиз. Энди $\varphi(x_0)=C$ деб оламиз. Унда (1) тенгликка биноан $\Phi(x)-F(x)=C$ бўлади. Бундан

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса леммани исботлайди.

Юқорида айтилганлардан:

1) (a, b) интервалда берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари чексиз кўп бўлиши,

2) $f(x)$ функциянинг ихтиёрий иккита бошланғич функцияси бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилиши келиб чиқади.

Демак, $F(x)$ фукнция $f(x)$ нинг (a, b) интервалдаги бошланғич функцияси бўлса, $F(x)+C$ (бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон) кўринишидаги ҳар бир функция ҳам $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлиб, улар $\{F(x)+C\}$ тўпламни ташкил этади.

2-таъриф. *$f(x)$ функциянинг (a, b) интервалдаги барча бошланғич функцияларидан иборат тўплам унинг аниқмас интеграли дейилади ва $\int f(x)dx$ каби белгиланиб,*

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \ (C-\text{const})$$

кўринишда *ёзилади.* Бунда $\int$ — интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ эса интеграл остидаги ифода дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int x^{10}dx$$

аниқмас интегрални топинг. Бу аниқмас интеграл шундай функцияки (аниқроғи шундай функциялар тўпламики) бу функциянинг ҳосиласи (тўпламдаги ҳар бир функциянинг ҳосиласи) интеграл остидаги функция x^{10} га тенг. Равшанки, агар

$$F(x)=\frac{x^{11}}{11}$$

бўлса, унда

$$F'(x)=\left(\frac{x^{11}}{11}\right)'=\frac{11x^{10}}{11}=x^{10}$$

бўлади. Демак, аниқмас интеграл таърифига кўра

$$\int x^{10}dx=\frac{x^{11}}{11}+C, \ (C-\text{const}) .$$

2. Ушбу

$$\int e^{3x}dx$$

аниқмас интегрални топинг. Қуйидаги $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$ функция учун $F'(x)=\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'=\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 3=e^{3x}$ бўлади. Демак,

$$\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}+C .$$

Кейинчалик, аниқмас интеграл ибораси ўрнига, қисқача, интеграл сўзини ҳам ишлатамиз.

Кўпинча $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўладиган (a, b) интервал кўрсатилмайди. Бундай ҳолда оралиқ сифатида $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳаси тушунилади.

Одатда, функциянинг ҳосиласига кўра унинг ўзини топиш, яъни функциянинг аниқмас интегралини топиш *интеграллаш* дейилади.

Демак, функцияларни интеграллаш амали дифференциаллаш амалига нисбатан тескари амал экан.

2-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Қуйида аниқмас интегралнинг хоссаларини келтирамиз.

1°. $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли $\int f(x)dx$ нинг ҳосиласи $f(x)$ га, дифференциали эса $f(x)dx$ га тенг:

$$(\int f(x)dx)'=f(x), \quad d(\int f(x)dx)=f(x)dx.$$

Исбот. Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x)=f(x).$$

У ҳолда

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad (C-\text{const})$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$(\int f(x)dx)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

$$d(\int f(x)dx)=d[F(x)+C]=dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

Бу эса 1°- хоссани исботлайди.

2^0. Функция дифференциалининг аниқмас интеграли шу функция билан ўзгармас сон йиғиндисига тенг:

$$\int dF(x)=F(x)+C.$$

Исбот. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x)=f(x)$. У ҳолда.

$$\int f(x)dx=F(x)+C \tag{3}$$

бўлади. Агар

$$\int f(x)dx=\int F'(x)dx=\int dF(x) \tag{4}$$

эканини эътиборга олсак, (3) ва (4) тенгликлардан

$$\int dF(x)=F(x)+C$$

бўлиши келиб чиқади.

3^0. Ўзгармас сонни интеграл белгиси остидан чиқариш мумкин:

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k — ўзгармас сон, $k\neq 0$).

Исбот. Фараз қилайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x)=f(x)$. Унда

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

бўлиб,

$$k\int f(x)dx=kF(x)+C_1 \quad (C_1=kC) \tag{5}$$

бўлади. Равшанки, $kF(x)$ функция $kf(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, чунки

$$(kF(x))'=kF'(x)=kf(x).$$

Демак,

$$\int kf(x)\,dx = kF(x) + C_1 . \qquad (6)$$

Натижада, (5) ва (6) муносабатларга кўра

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

бўлишини топамиз.

4^0. Икки функция алгебраик йиғиндисининг аниқмас нитеграли шу функциялар аниқмас интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx .$$

Исбот. Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг, $G(x)$ функция эса $g(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x).$$

Унда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)\,dx = G(x) + C_2$$

бўлиб,

$$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = [F(x) \pm G(x)] + (C_1 \pm C_2) \qquad (7)$$

бўлади.

Равшанки, $F(x) \pm G(x)$ функция $f(x) \pm g(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, чунки

$$[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x).$$

Демак,

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = F(x) \pm G(x) + C . \qquad (8)$$

(7) ва (8) муносабатлардан

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx .$$

бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Ушбу
$$\int (3x^2 + 2e^{3x})\,dx$$

интегрални хисобланг.

Интегралнинг 3^0- ва 4^0- хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\int (3x^2 + 2e^{3x})\,dx = \int 3x^2 dx + \int 2e^{3x} dx =$$

$$= 3\int x^2 dx + 2\int e^{3x} dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot e^{3x}\cdot\frac{1}{3} + C = x^3 + \frac{2}{3}e^{3x} + C .$$

3-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР ЖАДВАЛИ. МИСОЛЛАР.

Ушбу параграфда кейинчалик кўп фойдаланиладиган интегралларни келтирамиз.

1^0. $\int 0\cdot dx = C, \; C - \mathrm{const};$

2^0. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + C\,;$

3^0. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

4^0. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;

5^0. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$;

6^0. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

7^0. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$;

8^0. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

9^0. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

$10.^0$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$;

11^0. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$;

12^0. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$;

13^0. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$;

14^0. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$

15^0. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Бу интегралллардан бирининг, масалан

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C \tag{9}$$

нинг тўғрилигини кўрсатамиз. Бунинг учун тенгликнинг ўнг томонидаги функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$\left(\frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C\right)' = \left(\frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a}\right)' =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{a^2}{x^2+a^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2} .$$

Натижада (9) тенгликнинг чап томонидаги интеграл остидаги функция ҳосил бўлди. Демак, (9) тенглик ўринли.

Юқорида келтирилган 1^0 — 15^0 формулалар *жадвал интеграллари* дейилади.

Аниқмас интегралнинг $3^0 - 4^0$- хоссаларидан ҳамда интеграллар жадвалидан фойдаланиб, интегралларни бевосита ҳисоблаш мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int (1+\sin x+2^x)\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$\int (1+\sin x+2^x)\,dx=\int 1\cdot dx+\int \sin x dx+$$
$$+\int 2^x dx=x-\cos x+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$$

2. Ушбу

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

интегрални ҳисобланг. Интеграл остидаги функцияни

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада:

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx=\int (x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx=$$
$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=$$
$$=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+2\cdot x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{x}{3}+1\right)+C.$$

3. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги

$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$$

функцияни $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ айниятдан фойдаланиб

$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C.$$

4. Ушбу

$$\int x\sqrt[n]{x}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни

$$x\sqrt[n]{x} = x\cdot x^{\frac{1}{n}} = x^{1+\frac{1}{n}} = x^{\frac{n+1}{n}}$$

кўринишда ёзиб, сунг 3^0- формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int x\sqrt[n]{x}\,dx = \int x^{\frac{n+1}{n}}\,dx = \frac{x^{\frac{n+1}{n}+1}}{\frac{n+1}{n}+1} + C =$$

$$= \frac{n}{2n+1}\,x^{\frac{2n+1}{n}} + C = \frac{n}{2n+1}\,x^2\sqrt[n]{x} + C\,.$$

4- §. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

Берилган функциянинг бошланғич функциясини топишда, яъни аниқмас интегралини ҳисоблашда турли усуллар мавжуд. Қуйида ўзгарувчини алмаштириш ҳамда бўлаклаб интеграллаш усулларини келтирамиз.

1^0. Ўзгарувчини алмаштириш усули. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x)\,. \qquad (10)$$

Унда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

бўлади. Энди x ўзгарувчи

$$x = \varphi(t)$$

муносабат ёрдамида t ўзгарувчи билан боғланган бўлсин, бунда $\varphi(t)$ узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга бўлган функция.

Лемма. *Ушбу*

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

муносабат ўринли.

Исбот. Бу тенгликнинг ўнг томонида турган $F(\varphi(t)) + C$ функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$(F(\varphi(t)) + C)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,.$$

(10) тенгликка кўра

$$F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,.$$

Демак, $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ нинг бошланғич функцияси бўлади:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C\,.$$

Лемма исбот бўлди.

Леммага кўра $\int f(x)\,dx$ интегрални ҳисоблаш $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ интегрални ҳисоблашга келар экан:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{11}$$

(11) формула аниқмас интегралда *ўзгарувчини алмаштириш формуласи* дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int (2+3x)^{100}dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда ўзгарувчи x ни $2+3x=t$ тарзида алмаштирамиз. Бунда $x=\frac{t-2}{3}$ бўлиб, $dx=\frac{1}{3}dt$ бўлади. Натижада:

$$\int (2+3x)^{100}dx = \int t^{100}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{100}dt =$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{1}{303}\,(2+3x)^{101}+C\,.$$

2. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}\quad (a>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x=\sqrt{a}t$ алмаштириш бажариб, уни ҳисоблаймиз. Равшанки, $dx=\sqrt{a}dt$. Натижада

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \int\frac{\sqrt{a}\,dt}{\sqrt{a-(\sqrt{a}\,t)^2}} = \int\frac{\sqrt{a}\,dt}{\sqrt{a}\,\sqrt{1-t^2}} =$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}}+C\,.$$

3. Ушбу

$$\int e^{\operatorname{arctg}x}\frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\operatorname{arctg}x=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$d\,(\operatorname{arctg}x)=dt\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}dx=dt$$

бўлиб, натижада

$$\int e^{\operatorname{arctg}x}\frac{1}{1+x^2}dx=\int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg}x}+C\,.$$

4. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\cos^4x}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ эканини эътиборга олиб, берилган интегрални

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Сўнг $\operatorname{tg} x = t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада $\frac{1}{\cos^2 x} dx = dt$ бўлиб,

$$\int (1+\operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+t^2)\,dt = \int dt + \int t^2 dt =$$

$$= t + \frac{t^3}{3} + c = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c$$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c\,.$$

2^0. Бўлаклаб интеграллаш усули.

Фараз қилайлик, $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ функциялар берилган бўлиб, улар узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ хосилаларга эга бўлсин. Икки функция кўпайтмасининг дифференциалини топиш қоидасига кўра

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

бўлади. Кейинги тенгликдан

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

бўлиши келиб чиқади. Равшанки,

$$\int u \cdot dv = \int [d(u \cdot v) - v \cdot du]\,.$$

Аниқмас интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\int u \cdot dv = \int [d(u \cdot v) - vdu] = \int d(u \cdot v) - \int vdu =$$

$$= u \cdot v - \int v \cdot du\,.$$

Натижада ушбу

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (12)$$

формулага келамиз. (12) формула *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

Бўлаклаб интеграллаш формуласи $\int udv$ интегрални ҳисоблашни $\int vdu$ интегрални ҳисоблашга келтиради. Бу формуладан фойдаланиш учун интеграл остидаги ифода u ҳамда dv лар кўпайтмаси кўринишида ёзиб олинади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int xe^x dx\,.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода xe^x ни $u=x$, $dv=e^x dx$ лар кўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C\,.$$

Эслатма. Агар $\int xe^x dx$ интегралда $u=e^x$, $dv=xdx$ деб олинадиган бўлса, унда $du=e^x dx$, $v=\frac{x^2}{2}$ бўлиб, бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра

$$\int xe^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x dx$$

бўлади. Бундан кўринадики, қаралаётган интегрални ҳисоблаш ундан мураккаброқ $\int x^2e^x dx$ интегрални хисоблашга келади.

Демак, бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланишда u ва dv ларни танлаш муҳимдир.

2. Ушбу

$$\int x\sin x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу ҳолда $u=x$, $dv=\sin x dx$ деб оламиз. Натижада

$$du=dx,\ v=\int \sin x dx=-\cos x$$

бўлиб, (12) формулага кўра:

$$\int x\sin x dx=-x\cos x+\int \cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$$

3. Ушбу

$$\int x^2\ln x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $u=\ln x$, $dv=x^2dx$ деб оламиз. У ҳолда $du=\frac{1}{x}dx$, $v=\frac{x^3}{3}$ бўлиб, (12) формулага кўра

$$\int x^2\ln x dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+c\,.$$

4. Ушбу

$$\int \operatorname{arctg} x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Агар $u=\operatorname{arctg}x$, $dv=dx$ дейилса, унда $du=\frac{1}{1+x^2}dx$, $v=x$ бўлиб,

$$\int \operatorname{arctg}x dx=x\operatorname{arctg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=$$

бўлади. $=x\cdot\operatorname{arctg}x-\int\frac{d(1+x^2)}{2(1+x^2)}=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

5. Ушбу

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad\begin{matrix}(n=1,2,3,\ldots)\\(a\neq 0)\end{matrix}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало $n=1$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}\,dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

бўлади. Демак,

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Энди берилган $J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ интегралда $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv=dx$ деб оламиз. Унда

$$du=d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)=d\left[(x^2+a^2)^{-n}\right]=$$

$$=-n(x^2+a^2)^{-n-1}\cdot 2x\cdot dx=-\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx,$$

$$v=x$$

бўлиб, (12) формулага кўра

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx \tag{13}$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx=\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx=$$

$$=\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx-\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx-$$

$$-a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx=J_n-a^2J_{n+1}$$

Унда (13) тенглик ушбу

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2\cdot J_{n+1}$$

тенгликка келади. Бу тенгликдан эса

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n \tag{14}$$

келиб чиқади. (14) тенглик *реккурент формула* дейилади. Маълумки, $n=1$ да

$$J_1=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

(14) формула ва J_1 нинг бу қийматидан фойдаланиб J_2 топилади. (14) формула ва J_2 нинг қийматидан фойдаланиб J_3 топилади ва ҳ. к. Масалан,

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}J_1=$$
$$=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\,.$$

Эслатма. Ушбу

$$\int x^n\ln x dx,\ \int x^n\arcsin x dx,\ \int x^n\arccos x dx$$
$$\int x^n\operatorname{arctg} x dx,\ \int x^n(\operatorname{arctg} x)^2 dx,\ \int x^n\sin x dx$$
$$\int x^n\cos x dx,\ \int x^n e^x dx,\int e^{ax}\cos bx dx$$
$$\int e^{ax}\sin bx dx,\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int\cos(\ln x)\,dx$$

каби интеграллар бўлаклаб интеграллаш формуласи ёрдамида ҳисобланиб, уларнинг баъзилари учун бу формула бир неча марта қўлланиши мумкин.

5-§. СОДДА КАСРЛАР ВА УЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Ушбу

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^m},\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

кўринишдаги функциялар *содда касрлар* дейилади. Бу ерда A, B, C, p, q — ўзгармас сонлар, x^2+px+q квадрат учҳад эса ҳақиқий илдизга эга эмас, яъни

$$\frac{p^2}{4}-q<0. \tag{15}$$

Содда касрларнинг аниқмас интегралларини ҳисоблаймиз.

1^0. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интеграли $\int\frac{A}{x-a}dx$ ни ҳисоблаш учун $x-a=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dx=dt$ бўлиб,

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{Adt}{t}=A\cdot\ln|t|+C_1=A\cdot\ln|x-a|+C_1$$

бўлади.

2^0. $\frac{A}{(x-a)^m}$ содда касрнинг аниқмас интеграли қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m}=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=$$
$$=\frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C_2\ \ (m\neq 1)\,.$$

3^0. Энди

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

содда касрнинг аниқмас интегралини ҳисоблаймиз.

Аввало касрнинг маҳражидаги x^2+px+q квадрат учҳаднинг кўринишини ўзгартириб ёзамиз:

$$x^2+px+q=x^2+2\,\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

(15) шартга кўра $q-\frac{p^2}{4}>0$. Уни a^2 орқали белгилаймиз: $a^2=$ $=q-\frac{p^2}{4}$ Демак, қаралаётган содда касрнинг интеграли учун

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

бўлади. Кейинги интегралда $x+\frac{p}{2}=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $x=t-\frac{p}{2}$ ва $dx=dt$ бўлиб,

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=$$

$$=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2} \qquad (16)$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграллар қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{tdt}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2)+C_1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)+C_1=\frac{1}{2}\ln(x^2+px+q)+C_1, \qquad (17)$$

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{t}{a}+C_2=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\text{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_2 \qquad (18)$$

90

(қаралсин — 4- §, 5- мисол)

(16), (17) ва (18) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+$$

$$+\frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C^* \qquad (16)$$

(бунда C^* — ўзгармас сон).

4⁰. Ушбу

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\quad(m>1)$$

содда касрнинг интеграли

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx$$

ни ҳисоблашда 3°- ҳолдаги каби белгилаш ва алмаштиришлар бажарамиз. Натижада:

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\int\frac{Bt+\left(C-\frac{1}{2}Bp\right)}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$=B\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}. \qquad (19)$$

Равшанки,

$$\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}=\frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-m}d(t^2+a^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C.$$

(19) тенгликнинг ўнг томонидаги $\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ интеграл эса 4- § да келтирилган 5- мисолдаги реккурент формула орқали ҳисобланади.

6- §. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Рационал функцияларни интеграллашни баён этишдан аввал, рационал функциялар тўғрисида баъзи бир маълумотларни, шунингдек алгебранинг кўпҳад ва унинг илдизларига оид теоремаларини исботсиз келтирамиз.

1⁰. Рационал функциялар. Ушбу

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \qquad (20)$$

функция бутун рационал функция (кўпҳад) деб аталар эди. (Қаралсин [1], 1-боб). Бунда a_0, a_1,..., a_n — ўзгармас ҳақиқий сонлар, n — натурал сон бўлиб, у (20) кўпҳаднинг даражасидир.

Иккита

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

ҳамда

$$Q_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m$$

бутун рационал функциялар нисбати

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x_2+\dots+b_mx^m} \tag{21}$$

каср рационал функция деб аталар эди. (Қаралсин [1], 1-боб). Бунда $a_0, a_1,\dots,a_n$; $b_0, b_1,\dots,b_m$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $n\in N$, $m\in N$.

Агар (21) касрда суратдаги кўпҳаднинг даражаси махраждаги кўпҳаднинг даражасидан кичик бўлмаса, яъни $n\geqslant m$ бўлса, у ҳолда (21) тўғри каср дейилади.

Агар (21) касрда суратдаги кўпҳаднинг даражаси махраждаги кўпҳаднинг даражасидан кичик бўлса, яъни $n\geqslant m$ бўлса, у ҳолда (21) нотўғри каср дейилади.

2^0. Кўпҳадни илдизлари орқали ифодалаш.

Айтайлик,

$$Q_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m \tag{22}$$

кўпҳад берилган бўлсин. Алгебранинг асосий теоремасига кўра бу кўпҳад m та илдизга эга.

1) Агар $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_m$ сонлар (22) кўпҳаднинг ҳақиқий илдизлари бўлса, у ҳолда бу кўпҳад

$$Q_m(x)=b_m(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m)$$

кўринишда ифодаланади.

2) Агар $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_s$ сонлар (22) кўпҳаднинг мос равишда k_1, $k_2,\dots,k_s$ каррали ҳақиқий илдизлари бўлса, у ҳолда

$$Q_m(x)=b_m(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_s)k_s$$

$(k_1+k_2+\dots+k_s=m)$ бўлади.

3) Агар $a=\alpha+i\beta$ комплекс сон $Q_m(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда $\bar{a}=\alpha-i\beta$ (комплекс сонга қўшма бўлган комплекс сон) ҳам шу кўпҳаднинг илдизи бўлади. Бу ҳолда $Q_m(x)$ кўпҳад ифодасида $(x-a)\ (x-\bar{a})$ кўпайтувчи ушбу

$$(x-a)\ (x-\bar{a})=[x-(\alpha+i\beta)]\ [x-(\alpha-i\beta)]=$$
$$=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2=x^2+px+q$$
$$(p=-2\alpha,\ q=\alpha^2+\beta^2)$$

кўринишда қатнашади.

4) Агар $a=\alpha+i\beta$ комплекс сон $Q_m(x)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлса, $\bar{a}=\alpha-i\beta$ ҳам шу кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлиб, $Q_m(x)$ нинг ифодасида $(x^2+px+q)^k$ кўпайтувчи қатнашади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$3x^2+3x-6$$

кўпҳад $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$ илдизларга эга бўлганлиги сабабли:

$$3x^2+3x-6=3(x-1)\ (x+2).$$

2. Ушбу

$$x^3-3x+2$$

кўпҳад учун $\alpha_1=1$ икки каррали илдиз ва $\alpha_2=-2$ бўлганлигидан:

$$x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$$

3. Ушбу

$$x^4+x^3-x-1$$

кўпҳаднинг илдизлари $x_1=1$, $x_2=-1$,

$$x_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

бўлиб, у

$$x^4+x^3-x-1=(x-1)\ (x+1)\left[x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\times$$

$$\times\left[x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]=(x-1)\ (x+1)\ (x^2+x+1)$$

кўринишда бўлади.

Фараз қилайлик,

$$Q_m\ (x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m,\ (b_m\neq 0)$$

кўпҳад берилган бўлиб, $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_k,\dots$ лар унинг мос равишда $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_k$ каррали ҳақиқий илдизлари, $h_1, h_2,\dots, h_s$ $(h_j=c_j+id_j,\ j=1,2,\dots s)$ лар эса $Q_m(x)$ кўпҳаднинг мос равишда $\gamma_1, \gamma_2,\dots,\gamma_s$ каррали илдизлари бўлсин.

1-теорема. ***Ушбу $Q_m(x)$ кўпҳад***

$$Q_m(x)=b_m(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\dots(x-\alpha_k)^{\lambda_k}\times$$

$$\times\ (x^2+p_1x+q_1)^{\gamma_1}\cdot(x_2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}\dots(x_2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}$$

кўринишда ифодаланади, бунда

$$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k+2(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_s)=m$$

бўлиб, $x^2+p_jx+q_j=0$ $(j=1,2,\dots,s)$ квадрат тенгламалар ҳақиқий илдизга эга эмас.

3^0. Тўғри касрларни содда касрлар орқали ифодалаш. Ушбу пунктда тўғри касрларнинг содда касрлар орқали ифодаланишини кўрсатадиган теоремани исботсиз келтирамиз.

Фараз қилайлик,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_mx^m}$$

тўғри каср ($n\in N$, $m\in N$, $n<m$) берилган бўлиб, унинг махражидаги $Q_m(x)$ кўпҳад илдизлари орқали (2^0- пунктдаги сингари)

$$Q_m(x)=b_m(x-\alpha_1)^{\lambda_1}\cdot(x-\alpha_2)^{\lambda_2}\cdot\ \dots\ \cdot(x-\alpha_k)^{\lambda_k}\times$$

$$\times\ (x^2+p_1x+q_1)^{\gamma_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}\cdot\dots\ \cdot(x^2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}$$

ифодалансин.

2-теорема. ***Ушбу***

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

тўғри каср содда касрлар йиғиндиси орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = {} & \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{\lambda_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\lambda_1}} + \\ & + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{\lambda_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{\lambda_2}} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \frac{A_1^{(k)}}{x-\alpha_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{A_{\lambda_k}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{\lambda_k}} + \\ & + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{\gamma_1}^{(1)}x + C_{\gamma_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\gamma_1}} + \\ & + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_2^{(2)}x + C_2^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{B_{\gamma_2}^{(2)}x + C_{\gamma_2}^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}} + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{B_2^{(s)}x + C_2^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \ldots + \frac{B_{\gamma_s}^{(s)}x + C_{\gamma_s}^{(s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}}.\end{aligned}$$

Бу ерда $A_1^{(1)}, \ldots, A_{\lambda_k}^{(k)}$; $B_1^{(1)}, \ldots, B_{\gamma_s}^{(s)}$; $C_1^{(1)}, \ldots, C_{\gamma_s}^{(s)}$ ўзгармас сонлар (коэффициентлар).

(23) тенгликдаги ўзгармас сонлар (номаълум коэффициентлар) қуйидагича топилади.

(23) тенгликнинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғиндиси умумий махражга келтирилади. Натижада

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{q_n(x)}{Q_m(x)}$$

тенглик ҳосил бўлади. Бундан

$$P_n(x) = q_n(x)$$

тенгликка келамиз. Бу тенглик барча x лар учун ўринли бўлганлигидан унинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаштириб, номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

Ниҳоят, шу системадан номаълум коэффициентлар топилади. Мисоллар қараймиз.

1. Ушбу

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}$$

тўғри касрни содда касрлар орқали ифодаланг.

Аввало берилган касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=$$
$$=(x-2)\ (x^2-1)=(x-1)\ (x+1)\ (x-2).$$

Унда

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{5-7x}{(x-1)\ (x+1)\ (x-2)}.$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги тўғри каср 2-теоремага кўра

$$\frac{5-7x}{(x-1)\ (x+1)\ (x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

бўлади. Уни қуйидагича

$$\frac{5-7x}{(x-1)\ (x+1)\ (x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}=$$
$$=\frac{A(x+1)\ (x-2)+B(x-1)\ (x-2)+C(x-1)\ (x+1)}{(x-1)\ (x+1)\ (x-2)}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада

$$5-7x=A(x+1)\ (x-2)+B(x-1)\ (x-2)+C(x-1)\ (x+1)=$$
$$=(A+B+C)x^2-(A+3B)x-2A+2B-C$$

бўлади. Икки кўпҳаднинг тенглигидан

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+3B=7 \\ -2A+2B-C=5 \end{cases}$$

келиб чиқади. Бу системани ечиб $A=1$, $B=2$, $C=-3$ эканини топамиз. Шундай қилиб, берилган тўғри каср учун:

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x-2}.$$

бўлади.

2. Ушбу

$$\frac{1}{x^4-1}$$

тўғри касрни содда касрлар орқали ифодаланг.

Равшанки,

$$x^4-1=(x^2-1)\ (x^2+1)=(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1).$$

Унда 2- теоремага кўра:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Бу тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A(x+1)\ (x^2+1)+B(x-1)\ (x^2+1)+(Cx+D)\ (x^2-1)}{(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)}.$$

У ҳолда

$$1=A(x+1)\ (x^2+1)+B(x-1)\ (x^2+1)+(Cx+D)\ (x^2-1),$$

яъни

$$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D).$$

Натижада A, B, C, D ларни топиш учун

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=O \\ A-B-D=1 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб, $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}$ $C=0$, $D=-\frac{1}{2}$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

3. Ушбу

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$$

тўғри касрни содда касрлар орқали ифодаланг.

Юқорида келтирилган 2- теоремага кўра:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

Бу тенгликни

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x(x-1)^3}$$

кўринишда ёзиб оламиз. У ҳолда

$$x^3+1=A\ (x-1)^3+Bx\ (x-1)^2+Cx\ (x-1)+Dx$$

яъни

$$x^3+1=(A+B)x^3-(3A+2B-C)x^2+(3A+B-C+D)x-A.$$

Натижада A, B, C, D ларни топиш учун

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3A-2B+C=0 \\ 3A+B-C+D=0 \\ -A=1 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб $A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$ бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

Энди бутун ҳамда каср рационал функцияларни интеграллашни қараймиз.

4^0. Бутун рационал функцияни интеграллаш. Аниқмас интегралнинг содда қоидаларидан ҳамда интеграллар жадвалидан фойдаланиб,

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

бутун рационал функциянинг интегралини топамиз:

$$\int P_n(x)\,dx=\int(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\,dx=$$
$$=\int a_0dx+\int a_1xdx=\int a_2x^2dx+\ldots+\int a_nx^ndx=$$
$$=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

5^0. Тўғри касрларни интеграллаш. Ушбу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ тўғри каср берилган бўлиб, унинг аниқмас интеграли $\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$ ни ҳисоблаш талаб этилсин. Бу интегрални ҳисоблаш учун $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ тўғри касрни (юқорида кўрсатилган усул билан) содда касрлар йиғиндиси сифатида ифодалаб олинади. Натижада тўғри касрни интеграллаш содда касрларни интеграллашга келади. Содда касрларни интеграллаш эса 5- § да батафсил баён этилди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{(x+2)\,(x-1)\,(x-3)}$$

аниқмас интегрални ҳисобланг.

Аввало интеграл остидаги тўғри каср $\frac{1}{(x+2)\,(x-1)\,(x-3)}$ ни содда касрлар орқали ифодалаймиз:

$$\frac{1}{(x+2)\,(x-1)\,(x-3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги касрларни умумий махражга келтириб, сўнг суратдаги кўпҳадларни тенглаштириб

$$1=A(x-1)\ (x-3)+B(x+2)\ (x-3)+C(x+2)\ (x-1),$$

яъни

$$1=(A+B+C)x^2-(4A+B-C)x+(3A-6B-2C)$$

тенгликка келамиз.

Натижада A, B, C ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A-B+C=0 \\ 3A-6B-2C=1 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб, $A=\frac{1}{15}$, $B=-\frac{1}{6}$, $C=\frac{1}{10}$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб,

$$\frac{1}{(x+2)\ (x-1)\ (x-3)}=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{10}\,\frac{1}{x-3}$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{(x+2)\ (x-1)\ (x-3)}=\frac{1}{15}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}+$$

$$+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{15}\ln|x+2|-\frac{1}{6}\ln|x-1|+$$

$$+\frac{1}{10}\ln|x-3|+C=\frac{1}{30}\ln\frac{(x+2)^2\cdot|x-3|^3}{|x-1|^5}+C.$$

2. Ушбу

$$\int\frac{dx}{x^3+1}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги $\frac{1}{x^3+1}$ тўғри касрни, $x^3+1=(x+1)\times$ $\times(x^2-x+1)$ эканини эътиборга олиб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)\ (x+1)}{(x+1)\ (x^2-x+1)}.$$

Унда

$$1=Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C,$$

яъни

$$1=(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C.$$

Натижада A, B, C ларга нисбатан

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб топамиз: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}\cdot$ Демак,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}.$$

Шундай қилиб

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx.$$

Равшанки,

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+C.$$

Мазкур бобнинг 5- § да $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг аниқмас интеграли топилган эди. Ўша (16) формуладан фойдаланиб ($B=1$, $C=-2$, $p=-1$, $q=1$) топамиз:

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{-4+1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\text{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_1.$$

Демак,

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C^*=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{|x^2-x+1|}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C^*.$$

6^0. Нотўғри касрларни интеграллаш. Айтайлик,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m} \tag{24}$$

функция нотўғри каср (суратдаги кўпҳаднинг даражаси махраждаги кўпҳаднинг даражасидан катта ёки тенг, яъни $n \geqslant m$) бўлсин. Бу ҳолда суратдаги кўпҳадни махраждаги кўпҳадга бўлиб (кўпҳадни кўпҳадга бўлиш қоидасидан фойдаланиб) берилган нотўғри касрни бутун рационал функция ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишида қуйидагича

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = q(x) + \frac{S_k(x)}{Q_m(x)},\ k<m$$

ифодалаб олинади. Масалан, бизга $\frac{x^4}{x^2-x+1}$ нотўғри каср берилган бўлсин. Бу касрнинг сурати x^4 ни махражи x^2-x+1 га бўлиб топамиз:

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^4 & x^2-x+1 \\ \cline{3-3}
 & x^4-x^3+x^2 & x^2+x \\ \cline{2-2}
- & x^3-x^2 & \\
 & x^3-x^2+x & \\ \cline{2-2}
 & -x &
\end{array}$$

Демак,

$$\frac{x^4}{x^2-x+1} = x^2+x-\frac{x}{x^2-x+1}.$$

Шундай қилиб,(24) нотўғри касрни интеграллаш бутун рационал функция ҳамда тўғри касрни интеграллашга келади:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{S_k(x)}{Q_m(x)}\,dx.$$

Бутун рационал функция ҳамда тўғри касрни интеграллаш юқоридаги 4^0 ва 5^0 пунктларда келтирилган эди.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало интеграл остидаги нотўғри каср $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ нинг суратини махражига бўламиз:

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^3+x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3}
 & x^3+x & x \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

Натижада $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1}$ бўлиб,

$$\int\frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx=\int\left(x+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+\operatorname{arctg}x+C\,.$$

7-§. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Биз 6-§ да рационал функцияларнинг интегралланишини кўрдик. Иррационал функцияларни интеграллашда эса вазият бирмунча мураккаб бўлади.

Ушбу параграфда баъзи иррационал функцияларни интеграллаш билан шуғулланамиз. Бунда асосан иррационал функцияларни интеграллаш мос алмаштиришлар ёрдамида рационал функцияларни интеграллашга келтирилади.

1^0. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция x ва унинг турли каср даражалари (рационал даражалари) устида арифметик амаллар бажарилишидан юзага келган функция бўлсин. Масалан,

1) $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$;

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}$;

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

Равшанки, $\int f(x)dx$ интеграл иррационал функциянинг интеграли бўлади. Бу ҳолда, аввало $f(x)$ ифодасидаги x ларнинг даражаларида қатнашган касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчисини топамиз. Айтайлик, у σ бўлсин. Агар $\int f(x)dx$ интегралда $x=t^\sigma$ алмаштириш бажарилса, у ҳолда иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$$

интегрални ҳисоблайлик.

Интеграл остидаги функция

$$\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\frac{1}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{2}}}$$

ифодасидаги x нинг даражалари $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{3}$ бўлиб, бу каср махражлари 2 ва 3 нинг энг кичик умумий бўлинувчиси 6 га тенг бўлади.

Агар қаралаётган интегралда $x=t^6$ алмаштириш бажарилса, унда $dx=6t^5dt$ бўлиб,

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{(1+x^{1/3})x^{1/2}}=\int\frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}\,dt$$

бўлади. Натижада иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Равшанки,

$$\int\frac{6t^5dt}{(1+t^2)\,t^3}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\left[\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=6t-6\operatorname{arctg}t+C.$$

Демак,

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

2. Ушбу

$$\int\frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\sqrt[6]{x}=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x^2}=t^4$, $dx=6t^5dt$ бўлиб,

$$\int\frac{(x-1)dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})x}=\int\frac{6(t^6-1)\cdot t^5dt}{(t^3+t^4)t^6}=$$

$$=6\int\frac{t^6-1}{t^4(1+t)}\,dt=\int\frac{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1}{t^4}dt=$$

$$=6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)+C.$$

2^0. Фараз килайлик, $f(x)$ функция $ax+b$ иккиҳаднинг (a, b — ўзгармас сонлар) турли каср даражалари устида арифметик амаллар бажаришидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

1) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$;

2) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-5}}{1+\sqrt[3]{2x-5}}$.

Бу ҳолда ҳам $\int f(x)dx$ интегрални ҳисоблаш учун аввало $f(x)$ ифодасидаги $ax+b$ ларнинг даражаларида қатнашган касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчиси топилади. Айтайлик, у σ га тенг бўлсин. Агар $\int f(x)dx$ интегралда $ax+b=t^{\sigma}$ алмаштириш бажарилса, иррационал функциянинг интегралини ҳисоблаш рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1)\cdot\sqrt{3x+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $3x+1=t^6$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$dx=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot t^5dt,\quad \sqrt[3]{3x+1}=t^2,\quad \sqrt{3x+1}=t^3$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{3x+1}-1)\sqrt{3x+1}}=\int \frac{2t^5dt}{(t^2-1)t^3}=$$

$$=2\int \frac{t^2dt}{t^2-1}=2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=2\left[t+\int \frac{dt}{t^2-1}\right]=$$

$$=2\left(t-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt\right)=2\left(t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)+C=$$

$$=2\left(\sqrt[6]{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt[6]{3x+1}-1}\right|\right)+C.$$

3°. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $\frac{ax+b}{cx+d}$ нинг (a, b, c, d — ўзгармас сонлар, $ad\neq bc$) турли каср даражалари устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

1) $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}$;

2) $f(x)=\frac{1}{(2+x)^2\cdot(3-x)}\cdot\sqrt[3]{\frac{2+x}{3-x}}$;

3) $f(x)=\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Бу ҳолда ҳам, $\frac{ax+b}{cx+d}$ ларнинг даражаларида қатнашган касрлар махражларининг энг кичик умумий бўлинувчиси σ дейилса, унда ушбу $\frac{ax+d}{cx+d}=t^{\sigma}$ алмаштириш натижасида иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\frac{1+x}{x}=t^2$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$\frac{1+x}{x}=t^2 \Rightarrow x=\frac{1}{t^2-1},$$

$$dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

бўлиб,

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=\int (t^2-1)\,t\,\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt=$$

$$=-2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C.$$

2. Ушбу

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=2\int \frac{t^2dt}{t^2+1}$$

бўлади. Равшанки,

$$\int \frac{t^2dt}{t^2+1}=t-\operatorname{arctg}t+C.$$

Демак,

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=2\ (t-\operatorname{arctg}t)+C=$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{1+x}{1+x}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+C.$$

4°. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция x ва $\sqrt{ax^2+bx+c}$ лар устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}$;

2) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x\sqrt{x^2-x+1}}$;

3) $f(x)=\frac{x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$.

Равшанки, бу ҳолда $\int f(x)dx$ интеграл иррационал функциянинг интеграли бўлади. Қуйидаги уч ҳолни қараймиз.

Биринчи ҳол. Агар $a>0$ бўлса, қаралаётган интегралда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}=t \tag{25}$$

алмаштириш бажарилса, иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда, $a=1>0$ бўлганлиги учун (25) каби

$$\sqrt{x^2+6x+5}-x=t$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$\sqrt{x^2+6x+5}-x=t\Rightarrow x^2+6x+5=x^2+2tx+t^2\Rightarrow x=\frac{t^2-5}{6-2t},$$

$$dx=2\frac{-t^2+6t-5}{(6-2t)^2}dt,\quad \sqrt{x^2+6x+5}=\frac{-t^2+6t-5}{6-2t}$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=\int\frac{6-2t}{-t^2+6t-5}\cdot 2\cdot\frac{-t^2+6t-5}{(6-2t)^2}dt=$$

$$=\int\frac{2dt}{6-2t}=-\ln|3-t|+c.$$

Демак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=-\ln|3+x-\sqrt{x^2+6x+5}\,|+c.$$

Иккинчи ҳол. Агар $c>0$ бўлса, қаралаётган интегралда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c} \tag{26}$$

алмаштириш бажарилса, иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $c=4>0$ бўлганлиги учун (26) алмаштиришдан фойдаланамиз

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=xt+2.$$

Натижада

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=xt+2\Rightarrow -x^2-3x+4=x^2t^2+4xt+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-3=xt^2+4t\Rightarrow x=-\frac{4t+3}{1+t^2},$$

$$dx=2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{-x^2-3x+4}=-\frac{2t^2+3t-2}{t^2+1}$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}=\int-\frac{t^2+1}{2t^2+3t-2}\cdot 2\frac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=-\int\frac{2dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+c.$$

Демак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-x^2-3x+4}-2}{x}+c.$$

Учинчи ҳол. Агар $b^2-4ac>0$ бўлса, у ҳолда

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

квадрат тенглама α ва β илдизларга эга ва қаралаётган интегралда

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha) \qquad (27)$$

алмаштириш бажарилса, иррационал функцияни интеграллаш рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу ҳолда

$$b^2-4ac=4^2-4\cdot1\cdot3=4>0,$$
$$-x^2+4x-3=(x-1)(3-x)$$

бўлади. Берилган интегралда

$$\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{(x-1)(3-x)}=(x-1)t$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$\sqrt{(x-1)(3-x)}=(x-1)t\Rightarrow(x-1)(3-x)=(x-1)^2t^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(3-x)=(x-1)t^2\Rightarrow(t^2+1)x=t^2+3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{t^2+3}{t^2+1}\left(t=\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}\right),$$
$$dx=\left(\frac{t^2+3}{t^2+1}\right)'dt=-\frac{4t}{t^2+1}dt,$$
$$\sqrt{-x^2+4x-3}=\frac{2t}{t^2+1}$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}=\int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\left(-\frac{4t}{(t^2+2)^2}\right)dt=$$
$$=-2\int\frac{dt}{t^2+1}=-2\operatorname{arctg}t+c=$$
$$=-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+c.$$

8-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $\sin x$ ҳамда $\cos x$ функциялар устида аналитик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлган функция бўлсин. Масалан,

1) $f(x)=\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+5}$,

2) $f(x)=\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

Бундай $f(x)$ функциянинг интеграли $\int f(x)\,dx$ ни ҳисоблаш учун $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ $(x=2\operatorname{arctg} t)$ алмаштириш бажарилади. Унда $\sin x$ ҳамда $\cos x$ лар t орқали қуйидагича

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

ифодаланиб, тригонометрик функцияларни интеграллаш рационал функцияларни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{2\sin x+4\cos x+5}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ бўлиб,

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=$$

$$=2\int(t+3)^{-2}d(t+3)=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда ҳам $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Эслатма. Айрим ҳолларда тригонометрик функцияларни интеграллашда $t=\sin x$, $t=\cos x$, $t=\operatorname{tg} x$ алмаштиришлар қулай бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t=\sin x$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dt=\cos x dx$ бўлиб,

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin^5 x} = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^5} =$$

$$= \frac{t^{-4}}{4} - \frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 x} + C.$$

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$$

ингетрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t=\operatorname{tg} x$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$ бўлиб,

$$\int\frac{dx}{\cos^6 x}=\int\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\mathrm{tg}^2 x)^2\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\int(1+t^2)^2 dt=\int(1+2t^2+t^4)\,dt=$$

$$=t+\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+c=\mathrm{tg}x+\frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x+C.$$

Эслатма. Ушбу $\int\sin mx\cdot\cos nx dx$, $\int\cos mx\cdot\cos nx dx$, $\int\sin mx\cdot\sin nx dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\int\sin x\cdot\sin 3x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Равшанки,

$$\sin x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}(\cos 2x-\cos 4x).$$

Натижада:

$$\int\sin x\cdot\sin 3x dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x dx-\frac{1}{2}\int\cos 4x dx=\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C.$$

2-БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

Функциянинг аниқ интегралини таърифлашдан аввал бу тушунча билан боғлиқ бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзини топиш масаласини келтирамиз.

1. Эгри чизиқли трапециянинг юзи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ҳамда $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан Ox — абсцисса ўқи билан чегараланган шаклни қарайлик (1-чизма). Одатда бундай шаклни *эгри чизиқли трапеция* деб аталади. Биз кейинги бобда текис шаклнинг, жумладан эгри чизиқли трапециянинг юзи тушунчаси ва у билан боғлик бўлган масалаларни батафсил ўрганамиз.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгармас, яъни

$$f(x)=C=\text{const}$$

бўлса, у ҳолда $aABb$ шакл тўғри тўртбурчак бўлиб, унинг юзи

$$S=C\cdot(b-a)$$

формула билан аниқланади.

Агар $f(x)$ функция учун $f(x)\neq C=\text{const}$ бўлса, у ҳолда $aABb$ шаклнинг юзини топиш учун $[a, b]$ сегментни

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b\quad (x_0<x_1<\ldots<x_n)$$

нуқталар билан n та бўлакка бўламиз ва ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots, n-1)$ сегментда ихтиёрий ξ_k $(\xi_k\in[x_k, x_{k+1}])$ нуқта оламиз. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots, n-1)$ сегментда $f(x)$ функцияни ўзгармас ва уни $f(\xi_k)$ га тенг қилиб олсак, у ҳолда $x_k A_k B_k x_{k+1}$ эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$f(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$

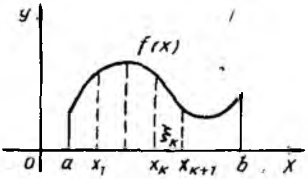
га яқин бўлиб, $aABb$ шаклнинг юзи S эса

$$f(\xi_0)(x_1-x_0)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\ldots+$$
$$+f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)+\ldots+f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

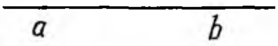
га яқин миқдор билан аниқланади. Демак,

$$S\approx\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k,\qquad (1)$$

бунда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Равшанки, *aABb* эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодаловчи (1) формула тақрибий формуладир. Энди $[a, b]$ сегментни бўлувчи нуқталари сонини шундай орттириб борайликки, бунда ҳар бир сегмент узунлиги Δx_k нолга интила борсин. У ҳолда $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ йиғиндининг микдори ҳам ўзгара боради ва бу миқдорлар борган сари *aABb* эгри чизиқли трапециянинг юзини аниқроқ ифодалайди. Умуман, жуда кўп масалаларнинг ечими юқоридаги (1)га ўхшаш йиғиндиларнинг лимитини топиш билан ҳал қилинади. Бундай йиғиндиларнинг лимити математик анализнинг асосий тушунчаларидан бири — аниқ интеграл тушунчасига олиб келади:



1- чизма



2- чизма

2. $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши. Маълумки, $[a, b]$ сегмент ушбу

$$[a, b] = \{x \in R : a \leqslant x \leqslant b\}$$

ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат. У геометрик нуқтаи-назардан тўғри чизиқда (сонлар ўқида) учлари a ва b нуқталарда бўлган кесмани ифодалайди (2-чизма).

$[a, b]$ сегментда

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,\ x_0 = a,\ x_n = b)$$

нуқталар оламиз. Бу нуқталар системасини $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши деб атаймиз ва уни

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

каби белгилаймиз. Равшанки, $[a, b]$ сегментнинг P бўлиниши уни n та

$$[x_0 x_1],\ [x_1,\ x_2], \ldots,\ [x_k,\ x_{k+1}], \ldots,\ [x_{n-1},\ x_n]$$

бўлакларги ажратади.

Ҳар бир $x_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ нуқта P бўлинишнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ сегмент $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ эса P бўлинишнинг бўлаги (бўлакчаси) дейилади.

P бўлиниш бўлаклари узунликлари

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

нинг энг каттаси, яъни ушбу

$$\lambda = \max_k \{\Delta x_k\} = \max \{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$$

миқдор унинг *диаметри* дейилади. Бу λ миқдор P га боғлиқ бўлади ($\lambda = \lambda_p$). Хусусан, $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлишдан ҳосил қилинган ушбу

$$P = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b\}$$

бўлинишнинг диаметри

$$\lambda = \frac{b-a}{n}$$

бўлади.

$[a, b]$ сегмент берилган ҳолда унинг турли усуллар билан исталган сондаги бўлинишларини тузиш мумкин. Бу бўлинишлардан иборат тўплам $\mathscr{P}$ бўлсин:

$$\mathscr{P} = \{P\}$$

3. Интеграл йиғинди. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин, $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлинишини қарайлик; $(a < b)$. Бу бўлинишга мос келувчи ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, n-1)$ оралиқда ихтиёрий $\xi_k(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта олиб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_k)\Delta x_k + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}, \quad (2)$$

бунда

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0, \ \Delta x_1 = x_2 - x_1, \ \ldots, \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \ \ldots$$
$$\Delta x_{n-1} = x_n - x_{n-1}.$$

Одатда (2) йиғинди $f(x)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* дейилади. Уни йиғинди белгиси Σ орқали қисқача қуйидагича

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k \quad (2')$$

ҳам ёзиш мумкин.

Интеграл йиғинди σ нинг тузилишидан кўринадики, у $f(x)$ функцияга, $[a, b]$ сегментнинг бўлинишига ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, n-1)$ бўлакчадан олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади.

4. Аниқ интеграл таърифи. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин.

$[a, b]$ сегментнинг шундай

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m, \ldots \quad (3)$$

($P_m \in \mathscr{P}$, $m=1, 2, \ldots$) бўлинишларини қараймизки, уларнинг мос диаметрларидан ташкил топган

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \lambda_{P_3}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

кетма-кетлик нолга интилсин: $\lambda_{P_m} \to 0$

Бундай P_m ($m=1, 2, \ldots$) бўлинишларга нисбатан $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиларини тузамиз. Натижада

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m, \ldots \qquad (4)$$

кетма-кетлик ҳосил бўлади.

1-таъриф. *Агар $[a, b]$ сегментнинг ҳар қандай бўлинишлари кетма-кетлиги $\{P_m\}$ олинганда ҳам унга мос интеграл йиғинди қийматларидан иборат $\{\sigma_m\}$ кетма-кетлик ξ_k нуқталарнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган ҳолда ҳамма вақт ягона I сонга интилса, бу I сон σ йиғиндининг лимити деб аталади ва*

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = I \qquad (5)$$

каби белгиланади.

(2′) йиғинди лимитини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

2-таьриф. *Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон берилганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $[a, b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлгани ҳар қандай P бўлиниши учун тузилган σ йиғинди ихтиёрий ξ_k нуқталарда*

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда I сон σ йиғиндининг $\lambda_p \to 0$ даги лимити деб аталади ва у юқоридагидек ((5) га қаранг) *белгиланади.*

3-таъриф. *Агар $\lambda_p \to 0$ да $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси (2′) чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи* (Риман маъносида интегралланувчи) *дейилади, σ йиғиндининг чекли лимити I эса $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги аниқ интеграли ёки Риман интеграли деб аталади ва у*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Бунда a сон *интегралнинг қуйи чегараси,* b сон эса *интегралнинг юқори чегараси,* $[a, b]$ сегмент *интеграллаш оралиғи* деб аталади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x)=c \qquad (c=\text{const})$$

функцияни $[a, b]$ сегментда қарайлик, $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n\} \ (x_0<x_1<x_2< \dots <x_n,\ x_0=a,\ x_n=b)$$

бўлинишини олиб, берилган функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Ҳар доим

$$f(\xi_k)=c$$

бўлгани сабабли

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} c\cdot\Delta x_k=c\cdot\Delta x_0+c\cdot\Delta x_1+\dots+c\cdot\Delta x_{n-1}=$$
$$=c\cdot[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_n-x_{n-1})]=$$
$$=c\cdot(x_n-x_0)=c\cdot(b-a)$$

бўлади.

Кейинги тенгликда $\lambda\to 0$ да ($\lambda=max\{\Delta x_n\}$) лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0} c\cdot(b-a)=c(b-a).$$

Демак, $f(x)=c$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи ва

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a).$$

Хусусан, $f(x)=1$ бўлса, унда

$$\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$$

бўлади.

2. Ушбу

$$f(x)=x$$

функцияни $[a, b]$ сегментда қарайлик. $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n, x_0=a, x_n=b)$ бўлинишини олайлик. Унинг диаметри

$$\lambda=max\{\Delta x_k\} \quad (k=0, \overline{n-1})$$

бўлсин. Бу бўлинишнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлагида ихтиёрий ξ_k нуқтани олиб, берилган функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз. Равшанки, бу ҳолда $f(\xi_k)=\xi_k$ бўлиб,

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k\cdot\Delta x_k \tag{6}$$

бўлади, бунда $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

Энди (6) йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi_k-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}+\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\cdot\Delta x_k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\cdot\Delta x_k+\alpha, \tag{7}$$

бунда

$$\alpha=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi_k-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\Delta x_k.$$

(7) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳадини ҳисоблаймиз.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\cdot\Delta x_k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}+x_k)\ (x_{k+1}-x_k)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2-x_k^2)=\frac{1}{2}[(x_1^2-x_0^2)+(x_2^2-x_1^2)+\ldots+$$

$$+(x_n^2-x_{n-1}^2)]=\frac{1}{2}(x_n^2-x_0^2)=\frac{b^2-a^2}{2}. \tag{8}$$

Энди (7) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи ҳадини баҳолаймиз. Агар

$$\xi_k\in[x_k, x_{k+1}], \ \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\in[x_k, x_{k+1}],$$

$$\lambda=\max_k(x_{k+1}-x_k) \quad (k=\overline{0,n-1})$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$|\alpha| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot \Delta x_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|\xi_k - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right| \Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \max_k (x_{k+1} - x_k) \Delta x_k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \lambda (b-a)$$

эканини топамиз. Демак,

$$|\alpha| \leqslant \lambda (b-a). \tag{9}$$

(7), (8), (9) муносабатлардан $\lambda \to 0$ да σ йиғиндининг лимити $\frac{b^2-a^2}{2}$ бўлишини кўрамиз. Бу эса таърифга кўра

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

эканини билдиради.

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МАВЖУДЛИГИ

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ бўлинишини олайлик. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда ихтиёрий ξ_k нуқта олиб, $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Берилишига кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да чегараланган:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (\forall x \in [a, b]) \tag{10}$$

Демак, у ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да ҳам чегараланган. Унда $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ да аниқ чегаралари

$$m_k = \inf \{f(x)\}, \ x \in [x_k, x_{k+1}], \ (k = \overline{0, n-1}) \tag{11}$$

$$M_k = \sup \{f(x)\}, \ x \in [x_k, x_{k+1}], \ (k = \overline{0, n-1}) \tag{12}$$

мавжуд бўлади. Бу сонлардан фойдаланиб қуйидаги

$$s = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_{n-1} \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k. \tag{13}$$

$$S = M_0\Delta x_0 + M_1\cdot\Delta x_1 + \ldots + M_{n-1}\cdot\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k \qquad (14)$$

йиғиндиларни тузамиз. Одатда бу йиғиндилар мос равишда $f(x)$ функциянинг P бўлинишга нисбатан қуйи ҳамда юқори интеграл йиғиндилари дейилади. Равшанки,

$$s \leqslant S.$$

Юқоридаги (10), (11) ва (12) муносабатлардан барча $k (k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ учун

$$m \leqslant m_k,\ M_k \leqslant M$$

ҳамда

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k \geqslant m\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = m\cdot(b-a),$$

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k \leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = M(b-a)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$m\cdot(b-a) \leqslant s \leqslant S \leqslant M(b-a). \qquad (15)$$

1-лемма. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлиб, $P=\{x_0,, x_1, \ldots, x_n\}$ эса $[a, b]$ нинг ихтиёрий бўлиниши бўлса, у ҳолда шу бўлинишга нисбатан $f(x)$ функциянинг қуйи, юқори ҳамда интеграл йиғиндилари учун*

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. (11) ва (12) муносабатлардан фойдаланиб $\forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ да

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$$

бўлишини топамиз. Бу тенгсизликларни Δx_k га кўпайтирсак, $(\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0)$ унда

$$m_k\Delta x_k \leqslant f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \leqslant M_k\cdot\Delta x_k$$

келиб чиқади. Кейинги тенгсизликларни k нинг $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ қийматлари учун ёзиб, сўнг уларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k.$$

Демак,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Фараз қилайлик,

$$P_1 = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}\ (x_0 < x_1 < \ldots < x_n,\ x_0 = a,\ x_n = b)$$

$[a, b]$ сегментнинг бирор бўлинишини бўлсин. Бу бўлинишнинг бўлувчи нуқталари қаторига битта x^* нуқта ($x^* \in [a, b]$) қўшиб, $[a, b]$ нинг бошқа P_2 бўлинишини ҳосил қилайлик. Аниқлик учун бу x^* нуқта x_k ҳамда x_{k+1} лар орасида жойлашган бўлсин.

$$P_2 = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_k,\ x^*,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_n\},$$

$$(x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x^* < x_{k+1} < \ldots < x_n; x_0 = a,\ x_n = b\}.$$

2-лемма. *$[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган $f(x)$ функциянинг P_1 ҳамда P_2 бўлинишларга нисбатан тузилган қуйи интеграл йиғиндилари s_1, s_2 ва юқори интеграл йиғиндилари S_1, S_2 лар учун*

$$s_1 \leqslant s_2,$$
$$S_1 \geqslant S_2$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг P_1 ҳамда P_2 бўлинишларига нисбатан юқори интеграл йиғиндиларини ёзамиз:

$$S_1 = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + \ldots + M_k\Delta x_k + \ldots + M_{n-1}\Delta x_{n-1},$$
$$S_2 = M_0\Delta x_0 + M_1\Delta x_1 + \ldots + (M'_k\Delta x'_k + M'_k\Delta x''_k) + \ldots +$$
$$+ M_{n-1}\cdot\Delta x_{n-1},$$

бунда

$$M'_k = \sup\{f(x)\},\ x \in [x_k, x^*],$$
$$M''_k = \sup\{f(x)\},\ x \in [x^*, x_{k+1}]$$
$$\text{ва}\ \Delta x'_k = x^* - x_k,\ \Delta x''_k = x_{k+1} - x^*.$$

S_1 ҳамда S_2 йиғиндилар бир-биридан битта ҳадга фарқ қилиб, S_1 да $M_k\Delta x_k$ қўшилувчи бўлган ҳолда S_2 да унга мос қўшилувчи

$$M'_k\cdot\Delta x'_k + M''_k\Delta x''_k$$

ифодадан иборатдир.

Равшанки,

$$[x_k, x^*] \subset [x_k, x_{k+1}],$$
$$[x^*, x_{k+1}] \subset [x_k, x_{k+1}].$$

Унда $M'_k \leqslant M_k$, $M''_k \leqslant M_k$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$M'_k \cdot \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k = M''_k(x^* - x_k) + M''_k(x_{k+1} - x^*) \leqslant$$
$$\leqslant M_k \cdot [(x^* - x_k) + x_{k+1} - x^*)] = M_k \cdot \Delta x_k$$

бўлади. Бундан эса

$$S_1 \geqslant S_2$$

тенгсизлик келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш

$$s_1 \leqslant s_2$$

бўлиши кўрсатилади. Лемма исбот бўлди.

Энди функция аниқ интеграли мавжудлигининг зарур ва етарли шартини келтирамиз. Аслида функциянинг интегралланувчи бўлиши ёки бўлмаслигини таъриф ёрдамида текшириш мумкин. Лекин кўпчилик ҳолларда интеграл йиғиндининг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатиш жуда мураккаб бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин.

1-теорема. ***$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан***

$$S - s < \varepsilon \qquad (16)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, \overline{n-1})$ оралиқдаги тебранишини ω_k орқали белгиласак, $(\omega_k = M_k - m_k)$, у ҳолда (16) тенгсизлик

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \qquad (16')$$

кўринишга эга бўлади. Кўпчилик ҳолларда теореманинг (16′) кўринишдаги шарти ишлатилади.

2-теорема. ***$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда интегралланувчи бўлади.***

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлганлигидан Вейерштрасс теоремасига кўра у чегараланган бўлади. Иккинчи томондан Кантор теоремасига биноан у шу сегментда текис узлуксиз бўлади. Унда $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ сегментни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда функциянинг ҳар бир бўлагидаги тебраниши учун

$$\omega_k < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $[a, b]$ оралиқнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишида

$$S-s=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon(b-a)$$

бўлади. Бу эса (16′) га кўра $[a, b]$ оралиқда $f(x)$ функциянинг интегралланувчи эканини билдиради.

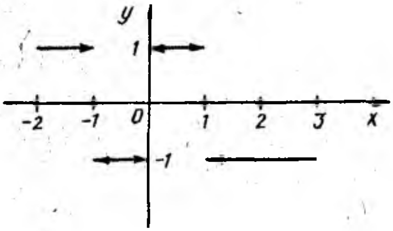
3-теорема. ***Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.***

4-теорема. ***Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва бу оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.***

Масалан,

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left[x(1-x^2)\right]$$

функция $[-2, 3]$ сегментда интегралланувчи бўлади, чунки у шу сегментнинг $x=-1$, $x=0$, $x=1$ нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлади (3-чизма).



3- чизма

Юқорида келтирилган теоремадан кўринадики $f(x)$ функция интегралланувчи бўлса, у ҳолда интеграл йиғиндининг лимити $[a, b]$ сегментнинг бўлиниш усулига ҳам, ҳар бир бўлакдан олинган ξ_k нуқталарга ҳам боғлиқ бўлмай, $\lambda_p\to 0$ да ягона

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

га (сонга) интилди. Демак, интегралланувчи функция учун унинг интегралини топишда ҳисоблаш учун қулай бўлган бирорта бўлиниш ҳамда топилган ξ_k ларга нисбатан интеграл йиғиндининг лимитини ҳисоблаш етарли бўлади.

Масалан, бизга маълум $\int\limits_a^b x\,dx$ интегрални қарайлик. $[a, b]$ сегментда $f(x)=x$ функция узлуксиз бўлгани сабабли у 2-теоремага кўра интегралланувчи. Қаралаётган интегрални ҳисоблаш учун $[a, b]$ сегментнинг

$$P=\left\{x_0=a,\ x_1=a+\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_k=a+k\frac{b-a}{n},\ \dots,\ x_n=a+n\frac{b-a}{n}=b\right\}$$

бўлинишини (бунда $\lambda=\frac{b-a}{n}$) ҳамда $\xi_k=a+k\cdot\frac{b-a}{n}$ ни оламиз. Унда $f(x)=x$ функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{n}\cdot\left[n\cdot a+\frac{b-a}{n}(1+2+\ldots+n-1)\right]=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[n\cdot a+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right]=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b-a}{2}\lambda$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{b-a}{2}\lambda\right]=\frac{b^2-a^2}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

Энди $f(x)$ функция аниқ интегралининг хоссаларини ўрганамиз ва улардан баъзиларининг исботини ҳам келтирамиз.

1°. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.*

2°. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $c\cdot f(x)$ функция ҳам интегралланувчи ва*

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\int_a^b f(x)\cdot dx \quad (c=\text{const})$$

тенглик ўринли.

Исбот. $c\cdot f(x)$ ҳамда $f(x)$ функцияларнинг $\forall P$ бўлинишга нисбатан интеграл йиғиндиларини ёзамиз:

$$\sigma^*=\sum_{k=0}^{n-1} c\cdot f(\xi_k)\cdot\Delta x_k,\quad \sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k.$$

Унда

$$\sigma^*=\sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\cdot\Delta x_k=c\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=c\cdot\sigma$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma^*=\lim_{\lambda\to 0}c\cdot\sigma=c\cdot\lim_{\lambda\to 0}\sigma=c\cdot\int_a^b f\ (x)\,dx$$

бўлади.

Агар

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma^*=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}cf\ (\xi_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b c\cdot f\ (x)\,dx$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\int_a^b c\cdot f\ (x)\ dx=c\cdot\int_a^b f\ (x)\,dx$$

бўлишини топамиз.

3°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)\pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва*

$$\int_a^b [f\ (x)\pm g\ (x)]\,dx=\int_a^b f\ (x)\,dx\pm\int_a^b g\ (x)\ dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлганлиги учун

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_1=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f\ (\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f\ (x)\,dx,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_2=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}g\ (\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b g\ (x)\ dx$$

бўлади.

Энди $f(x)\pm g(x)$ функциянинг $[a, b]$ ораликдаги мос интеграл йиғиндисини ёзамиз:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)\pm g(\xi_k)]\cdot\Delta x_k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}f\ (\xi_k)\Delta x_k\pm\sum_{k=0}^{n-1}g\ (\xi_k)\Delta x_k=\sigma_1\pm\sigma_2.$$

Кейинги тенгликдан $\lambda \to 0$ да

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \lim_{\lambda\to 0} \sigma_1 \pm \lim_{\lambda\to 0} \sigma_2 = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

формулага эга бўламиз. Бу 3°-хоссанинг ўринлилигини кўрсатади.

Натижа. Агар $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) \quad (c_i = \text{const},\ i = \overline{1,\ n})$$

функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]dx =$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx$$

формула ўринли бўлади.

Бу натижанинг исботи юқоридаги 2°, 3°- хоссалардан келиб чиқади.

4°. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.*

5°. *Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ҳамда $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу*

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

формула ўринли бўлади.

6°. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \quad (a < b)$$

бўлади.

Исбот. $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$ бўлганлигидан

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0$$

ва

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

Натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ ораликда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \leqslant g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

7°. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва*

$$\left| \int_a^b [f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

8°. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $\xi(a<\xi<b)$ нуқта топиладики*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлганлигидан унинг шу сегментда чегараланганлиги келиб чиқади. Демак, шундай ўзгармас m ва M сонлар мавжудки, $\forall x \in [a, b]$ учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

бўлади. Кейинги тенгсизликларни интеграллаб топамиз:

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Бу тенгсизликларни $b-a$ га бўлсак, ушбу

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Демак,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

миқдор $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган $f(x)$ функциянинг энг кичик қиймати m ҳамда энг катта қиймати M лар орасида экан. Узлуксиз функциянинг хоссасига кўра $[a, b]$ сегментда шундай ξ нуқта

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

бўлади.

Одатда

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

миқдор $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги ўрта қиймати, 8°- хосса эса ўрта қиймати ҳақидаги теорема деб юритилади.

Энди $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f(x)$ функцияни қарайлик. У ҳолда бу функция $[a, b]$ сегментнинг истаган $[a, x]$ қисмида $(a \leqslant x \leqslant b)$ ҳам узлуксиз бўлади. Бинобарин, функция $[a, x]$ да интегралланувчи.

Равшанки, бу интеграл x га боғлиқ бўлиб, биз уни $F(x)$ орқали белгилайлик:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{17}$$

Бу (17) интеграл юқори чегараси *ўзгарувчи аниқ интеграл* дейилади.

9°. *$F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ҳосилага эга ва*

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x).$$

бўлади.

Исбот. $[a, b]$ сегментда ихтиёрий x_0 ички нуқта олиб, $\Delta F(x_0)$ ни топамиз:

$$\Delta F(x_0) = F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt \tag{18}$$

(18) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб топамиз:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi), \quad (x_0 < \xi < x).$$

Равшанки, $x \to x_0$ да $\xi \to x_0$ бўлиб, $f(x)$ функциянинг узлуксизлигидан $\xi \to x_0$ да $f(\xi) \to f(x_0)$ эканлигини топамиз. Демак, (18) тенгликда $x \to x_0$ лимитга ўтсак,

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

бўлади.

x_0 нуқта $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий нуқтаси бўлганлигидан

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

бўлади.

Натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция $[a, b]$ сегментда бошланғич функцияга эга бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, 9°-хоссага кўра

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

функция учун $F'(x) = f(x)$ бўлади. Бу эса $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция эканини билдиради.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Унда бу функция $[a, b]$ нинг ихтиёрий $[x, b]$ қисмида $(a \leqslant x \leqslant b)$ ҳам узлуксиз бўлиб,

$$\int_x^b f(t)\,dt$$

интеграл мавжуд бўлади. Уни

$$\Phi(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

орқали белгилайлик. Бу куйи чегараси ўзгарувчи бўлган аниқ интегралдир.

10°. $\Phi(x)$ *функция* $[a, b]$ *сегментда ҳосилага эга ва*

$$\Phi'(x) = -f(x)$$

формула ўринли.

Исбот. Аниқ интегралнинг 5°-хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = F(x) + \Phi(x).$$

Бундан

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

бўлиб,

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)' - F'(x) = -f(x)$$

бўлади (чунки, $\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)' = 0,\ F'(x) = f(x)$).

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Равшанки, функциянинг аниқ интеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мавжуд. Бу интегрални ҳисоблаш билан шуғулланамиз.

1°. Ньютон-Лейбниц формуласи. 3-§ да келтирилган формулага кўра

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

функция $f(x)$ нинг $[a, b]$да бошланғич функцияси бўлади. Маълумки, $f(x)$ функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси $\Phi(x)$ учун

$$\Phi(x)=F(x)+c$$

бўлади, бунда c — ихтиёрий ўзгармас сон. Демак,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+c.$$

Бу тенгликда $x=a$ деб олиб

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,dt+c=0+c=c,$$

сўнг $x=b$ деб олиб,

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+c$$

бўлишини топамиз. Кейинги икки тенгликдан

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a) \tag{19}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

интеграл бошланғич функция $\Phi(x)$ нинг $x=b$ нуқтадаги қийматидан $x=a$ нуқтадаги қийматининг айирмасига тенг экан.

(19) формула Ньютон-Лейбиц ёки интеграл ҳисобнинг асосий формуласи деб юритилади. Одатда $\Phi(b)-\Phi(a)$ айирмани $\Phi(x)\Big|_a^b$ каби ёзилади:

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi(x)\Big|_a^b.$$

Унда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(x)\Big|_a^b$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_a^b x dx$$

аниқ интегрални ҳисобланг.

Равшанки, $f(x)=x$ нинг бошланғич функцияси $\Phi(x)=\frac{1}{2}x^2$ бўлади. Унда Ньютон Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

2. Ушбу

$$\int_0^1 x^n dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги $f(x)=x^n$ функциянинг бошланғич функциясини топиш учун $\int x^n dx$ аниқмас интегрални ҳисоблаймиз: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Демак, бошланғич функция $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ бўлади. Ньютон-Лейбниц формуласига кўра.

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

3. Ушбу

$$\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}dx \quad (a>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини топамиз:

$$\int \frac{x^2dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(a^3+x^3)}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\ln(a^3+x^3).$$

Унда (19) формулага кўра

$$\int_0^a \frac{x^2dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)\Big|_0^a = \frac{1}{3}\ln(a^3+a^3) - \frac{1}{3}\ln a^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\ln 2a^3 - \frac{1}{3}\ln a^3 = \frac{1}{3}\ln 2.$$

2°. Ўзгарувчини алмаштириш усули билан аниқ интегралларни ҳисоблаш.

Функцияларнинг аниқ интегралларини ўзгарувчиларини алмаштириш усули ёрдамида ҳам ҳисоблаш мумкин. $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ни ҳисоблаш мақсадида $x=\varphi(t)$ муносабат билан x ўзгарувчини алмаштирамиз.

5-теорема. ***$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда, $x=\varphi(t)$ функция эса $[\alpha, \beta]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, t ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ да ўзгарганда $x=\varphi(t)$ нинг қийматлари $[a, b]$ ни ташкил этсин.***

Агар $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга бўлиб, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (20)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз. Бинобарин, у бошланғич функцияга эга. Уни $\Phi(x)$ билан белгилайлик:

$$\Phi'(x)=f(x).$$

Ньютон-Лейбниц формуласига кўра:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Энди $[\alpha, \beta]$ сегментда $\Phi(\varphi(t))$ мураккаб функцияни қарайлик. Равшанки, $\Phi(\varphi(t))$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз бўлиб, унинг ҳосиласи

$$[\Phi(\varphi(t))]'=\Phi'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

бўлади. Натижада

$$[\Phi(\varphi(t))]'=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

тенгликка келамиз. Бу эса $[\alpha, \beta]$ да $\Phi(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси эканлигини билдиради. Яна Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\Phi(\varphi(\beta))-\Phi(\varphi(\alpha)).$$

Шартга кўра $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ бўлганлигидан

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (21)$$

бўлади. (19) ва (21) муносабатлардан

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x=\sqrt{t^2-1}$ алмаштириш бажарамиз. Унда $x=0$ да $t=1$, $x=1$ да $x=\sqrt{2}$ бўлиб, қаралаётган алмаштириш $[1, \sqrt{2}]$ сегментни $[0, 1]$ сегментга ўтказади. Равшанки,

$$dx=\frac{1}{2\sqrt{t^2-1}}\cdot 2t\,dt=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

бўлади. (20) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_{1}^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}=\int_{1}^{\sqrt{2}} t^2\,dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

2. Ушбу

$$\int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0)$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $x=a\sin t$ алмаштириш бажарамиз. Натижада, (20) формулага кўра:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2} a^2\cdot\sin^2t\cdot\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\cdot a\cos t\,dt=$$

$$=a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cdot\cos^2t\,dt.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2t\cdot\cos^2t\cdot dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}(2\sin t\cdot\cos t)^2dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cdot dt=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\int_0^{\pi/2}dt-\int_0^{\pi/2}\cos 4t\,dt\right]=\frac{1}{8}\left[t\,\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\sin 4t}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right]=\frac{\pi}{16}.$$

Демак,

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^4}{16}.$$

3°. Бўлаклаб интеграллаш усули билан аниқ интегралларни ҳисоблаш.

6-теорема. ***Агар $U(x)$ ва $V(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу сегментда узлуксиз $U'(x)$ ҳамда $V'(x)$ ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда***

$$\int_a^b U(x)dV(x)=U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b-\int_a^b V(x)dU(x) \tag{22}$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Равшанки,

$$[U(x)\cdot V(x)]'=U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x).$$

Демак, $[a, b]$ сегментда $U(x)\cdot V(x)$ функция $U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b [U'(x)\cdot V(x)+U(x)\cdot V'(x)]dx=U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b.$$

Кейинги тенгликдан

$$\int_a^b U'(x)V(x)dx + \int_a^b U(x)\cdot V'(x)dx = U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b V(x)\cdot dU(x) + \int_a^b U(x)\cdot dV(x) = U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b U(x)\cdot dV(x) = U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\cdot dU(x)$$

келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $U(x)=x$, $dV(x)=\cos x$ деб олиб, $dU(x)=dx$, $V(x)=\sin x$ бўлишини топамиз. Унда (22) формулага кўра:

$$\int_0^\pi x\cos x dx = x\cdot\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = 0-(-\cos x)\Big|_0^\pi = -2.$$

Демак,

$$\int_0^\pi x\cos x dx = -2.$$

2.Ушбу

$$\int_0^1 \mathrm{arctg}\, x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $U(x)=\mathrm{arctg}\,x$, $dV(x)=dx$ деб олиб, $dU(x)= =\frac{1}{1+x^2}dx$, $V(x)=x$ бўлишини топамиз. Унда (22) формулага кўра:

$$\int_0^1 \mathrm{arctg}\,x dx = x\cdot\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

Демак,

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

3. Ушбу

$$\int_1^e (x\cdot\ln x)^2 dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $u=\ln^2 x$, $dv=x^2dx$ деб олинса, унда $du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$, $v=\frac{x^3}{3}$ бўлади. (22) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_1^e (x\cdot\ln x)^2dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\cdot\ln x dx.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\int_1^e x^2\ln x dx$ интегралда $u=\ln x$, $dv=x^2dx$ деб, сўнг унга яна (22) формулани қўллаб топамиз:

$$\int_1^e x^2\ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Натижада

$$\int_1^e (x\cdot\ln x)^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{5e^3-2}{27}$$

бўлади.

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШ

Фаннинг турли соҳаларида, айниқса, физика ва техникада учрайдиган масалаларни ҳал қилиш кўпинча аниқ интегралларни ҳисоблаш билан боғлиқ бўлади. Агар интеграл остидаги функция мураккаб бўлса, равшанки, интегралларни ҳисоблаш қийин бўлади. Бундай ҳолларда уларни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблайдиган бир қанча усуллар мавжуд. Ушбу параграфда улардан учтасини; тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ҳамда параболалар (Симпсон) усулларини келтирамиз.

1. Тўғри тўртбурчаклар усули.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли $\int_a^b f(x)\,dx$ ни тақрибий ҳисоблаймиз.

$[a, b]$ сегментни

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

$(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўламиз. Унда аниқ интегралнинг хоссасига кўра:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

Ҳар бир $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ $(k=0,1,2,\ \ldots,\ n-1)$ интегралга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб топамиз:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=f(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)=f(\tau_k)\cdot\Delta x_k \quad (x_k<\tau_k<x_{k+1})$$

Равшанки,

$$x_0=a,\ x_1=a+\frac{b-a}{n},\ x_2=a+2\cdot\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_k=a+k\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n=$$
$$=a+n\cdot\frac{b-a}{n}=b,$$
$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=a+(k+1)\frac{b-a}{n}-\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)=\frac{b-a}{n}.$$

Энди

$$\bar{x}_k=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}=a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n} \qquad (x_k<\bar{x}_k<x_{k+1})$$

деб олиб, $f(\tau_k)\cdot\Delta x_k(x_k<\tau_k<x_{k+1})$ ифодани қуйидагича

$$f(\tau_k)\cdot\Delta x_k=[f(\bar{x}_k)+(f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)]\cdot\Delta x_k=$$
$$=f(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k+[f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)]\cdot\Delta x_k$$

ёзиб оламиз. Агар $f(x)>0$ бўлса, у ҳолда $f(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k$ миқдор асоси $[x_k, x_{k+1}]$ баландлиги $f(\bar{x}_k)$ бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини ифодалайди. Натижада

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=f(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k+[f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)]\cdot\Delta x_k$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k+\sum_{k=0}^{n-1}[f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)]\cdot\Delta x_k=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)+R_n$$

бўлади. Бу тенгликдаги

$$R_n=\sum_{k=0}^{n-1}[f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)]\cdot\Delta x_k\quad (x_k<\tau_k<x_{k+1}),$$

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Демак, у шу сегментда текис узлуксиз. Унда $\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ топиладики, $[a, b]$ сегментни узунликлари δ дан кичик бўлган $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакларга ажратилганда ҳар бир $x'\in[x_k, x_{k+1}]$, $x''\in[x_k, x_{k+1}]$ да

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

бўлади. Унда $\lambda<\delta$ бўлганда $\left(\lambda=\max\limits_k|\Delta x_k|=\frac{b-a}{n}\right)$

$$|f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Демак,

$$|R_n|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|f(\tau_k)-f(\bar{x}_k)|\Delta x_k<\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon(b-a).$$

Бундан $\lim\limits_{\lambda\to 0}R_n=0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\bar{x}_k)$$

деб олиш имконини беради.

Шундай қилиб, берилган аниқ интегрални ҳисоблаш учун ушбу

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}[f(\bar{x}_0)+f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_k)+\ldots+f(\bar{x}_{n-1})]\tag{23}$$

$\left(\bar{x}_k=a+\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{b-a}{n},\ k=0,1,2,\ldots,n-1\right)$ тақрибий формулага келамиз. (23) формула тўғри тўртбурчаклар формуласи дейилади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу сегментда узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}[f(\bar{x}_0)+f(\bar{x}_1)+\ldots+f(\bar{x}_k)+\ldots+f(\bar{x}_{n-1})]+R_n$$

бўлиб,

$$R_n=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(c)\qquad(a<c<b)$$

бўлади (қаралсин, [7], 11-боб).

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

[0, 1] ораликни 5 та тенг:

$$\left[0\ \frac{1}{5}\right],\ \left[\frac{1}{5};\ \frac{2}{5}\right],\ \left[\frac{2}{5};\ \frac{3}{5}\right],\ \left[\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right],\ \left[\frac{4}{5};\ 1\right]$$

бўлакка бўламиз. Бу ҳолда ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{1}{5}$ га тенг бўлиб,

$$\bar{x}_0=0{,}1,\ \bar{x}_1=0{,}3,\ \bar{x}_2=0{,}5,\ \bar{x}_3=0{,}7,\ \bar{x}_4=0{,}9$$

бўлади.

$f(x)=e^{-x^2}$ функциянинг $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$ нуқталардаги қиймати қуйидагича бўлади:

$$f(\bar{x}_0)=0{,}99005,$$
$$f(\bar{x}_1)=0{,}91393,$$
$$f(\bar{x}_2)=0{,}77680,$$
$$f(\bar{x}_3)=0{,}61263,$$
$$f(\bar{x}_4)=0{,}44486.$$

(23) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{5}(0{,}99005+0{,}91393+0{,}77680+0{,}61263+$$
$$+0{,}44486)=\frac{1}{5}3{,}74027\approx0{,}74805.$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx0{,}74805.$$

2. Трапециялар усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Берилган функциянинг аниқ интегралини тақрибий ҳисоблаш учун, бу ҳолда ҳам $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўламиз. Сўнг

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx$$

деб ёзиб оламиз. Ҳар бир

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\quad(k=0,1,2,\ \dots,\ n-1)$$

интегралга яна ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб топамиз:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx=f(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)=f(\tau_k)\cdot\Delta x_k,\ (x_k<\tau_k<x_{k+1}).$$

Энди $f(\tau_k)\cdot\Delta x_k$ ифодани қуйидагича

$$f(\tau_k)\cdot\Delta x_k=\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\Delta x_k+\left[f(\tau_k)-\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right]\cdot\Delta x_k$$

ёзиб оламиз. (Агар $f(x)>0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\Delta x_k$ миқдор асослари $[x_k, f(x_k)]$ ва $[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$, баландлиги эса Δx_k бўлган трапеция юзини ифодалайди.) Натижада

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx=\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\Delta x_k+\left[f(\tau_k)-\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right]\cdot\Delta x_k$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right]\cdot\Delta x_k+R_n$$

бўлади, бунда

$$R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\tau_k)-\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right]\cdot\Delta x_k,$$

$$(x_k<\tau_k<x_{k+1}).$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ да текис узлуксиз бўлишидан фойдаланамиз. $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ топиладики, $\lambda<\delta$ бўлганда $\left(\lambda=\max\limits_k\{\Delta x_k\}=\frac{b-a}{n}\right)$

$$|f(\tau_k)-f(x_k)|<\varepsilon,\ |f(\tau_k)-f(x_{k+1})|<\varepsilon$$

бўлади. Унда

$$|R_n|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\tau_k)-\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right]\cdot\Delta x_k\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(\tau_k)-\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right|\cdot\Delta x_k\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}[f(\tau_k)-f(x_k)|+|f(\tau_k)-f(x_{k+1})|]\Delta x_k<$$

$$<\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\varepsilon\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon.\ (b-a)$$

бўлиб, $\lim\limits_{\lambda\to 0} R_n=0$ бўлади. Натижада ушбу

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\Delta x_k$$

тақрибий формулага келамиз. Бу муносабатни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+\right.$$

$$\left.+f(x_k)+\ldots+f(x_{n-1})\right] \qquad (24)$$

$$\left(x_k=a+k\cdot\frac{b-a}{n},\ k=0,1,2,\ \ldots,\ n\right).$$

(24) формула *трапециялар формуласи* дейилади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу сегментда узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_k)+\ldots+f(x_{n-1})\right]+R_n$$

бўлиб,

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot f''(c) \qquad (a<c<b)$$

бўлади (қаралсин, [7], 11-боб).

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

интегрални трапециялар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

$[0,\ 1]$ сегментни 5 та тенг бўлакка бўламиз.

$$\left[0,\ \frac{1}{5}\right],\ \left[\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right],\ \left[\frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right],\ \left[\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right],\ \left[\frac{4}{5},\ 1\right]$$

Равшанки, ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{1}{5}$ га тенг бўлади. Интеграл остидаги $f(x)=e^{-x^2}$ функциянинг $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{2}{5}$, $x_3=\frac{3}{5}$, $x_4=\frac{4}{5}$, $x_5=1$ нуқталардаги қийматлари қуйидагича бўлади:

$$f(x_0)=f(0)=1{,}00000,$$

$$f(x_1)=f\left(\frac{1}{5}\right)=0{,}96079,$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{2}{5}\right)=0{,}85214,$$

$$f(x_3)=f\left(\frac{3}{5}\right)=0{,}69768,$$

$$f(x_4)=f\left(\frac{4}{5}\right)=0{,}52729,$$

$$f(x_5)=f(1)=0{,}36788.$$

(24) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{1{,}00000+0{,}36788}{2}+\right.$$
$$\left.+0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot 3{,}72184 \approx 0{,}74437.$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}74437.$$

3. Параболалар (Симпсон) усули. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ни тақрибий ҳисоблаш учун аввало $[a, b]$ ни

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2k},\ x_{2k+1},\ x_{2k+2},\ \ldots,\ x_{2n-2},$$
$$x_{2n-1},\ x_{2n}=b\ (x_0<x_1<\ldots<x_{2n})$$

нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг бўлакка бўламиз ва интегрални ушбу

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\ \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$$

кўринишда ёзиб оламиз. Сўнг ҳар бир $\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx\ (k=1,\ 2{,}3,\ \ldots,\ n)$ интегралда $f(x)$ функция учта

$$A_k(x_{2k-2}, f(x_{2k-2})),\ B_k(x_{2k-1}, f(x_{2k-1})),$$
$$D_k(x_{2k},\ f(x_{2k}))$$

нуқталардан ўтувчи $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ квадрат учҳад (парабола) билан тақрибан алмаштирилади:

$$f(x)\approx \alpha x^2+\beta x+\gamma\ .$$

Унда

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx$$

тақрибий формула ҳосил бўлади. Бу формуладаги

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx$$

интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx=\alpha\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}+\beta\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}+\gamma\cdot x\Bigg|_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}=$$

$$=\alpha\cdot\frac{x_{2k}^3-x_{2k-2}^3}{3}+\beta\frac{x_{2k}^2-x_{2k-2}^2}{2}+\gamma(x_{2k}-x_{2k-2})=$$

$$=\frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}[2\alpha(x_{2k}^2+x_{2k}\cdot x_{2k-2}+x_{2k-2}^2)+$$

$$+3\beta(x_{2k}-x_{2k-2})+6\gamma]=\frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}\{(\alpha\cdot x_{2k-2}^2+\gamma]+$$

$$+\beta\cdot x_{2k-2}+(\gamma)+4[\alpha\left(\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}\right)^2+\beta\cdot\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}+\gamma]+$$

$$+(\alpha\cdot x_{2k}^2+\beta x_{2k}+\gamma)\}=$$

$$=\frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}\left[f(x_{2x-2})+4f\left(\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}\right)+f(x_{2k})\right].$$

Натижада берилган аниқ интегрални тақрибий ифодалайдиган қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}\left[f(x_{2k-2})+4f\left(\frac{x_{2k-2}+x_{2k}}{2}\right)+f(x_{2k})\right].$$

Агар

$$x_{2k-2}=a+(2k-2)\cdot\frac{b-a}{n},\quad x_{2k-1}=a+(2k-1)\cdot\frac{b-a}{n},$$

$$x_{2k}=a+2k\cdot\frac{b-a}{n},\quad x_{2k}-x_{2k-2}=\frac{b-a}{n}$$

($k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$) бўлинишини эътиборга олсак, унда тақрибий формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6n}[(f(x_0)+f(x_{2n}))+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+$$

$$+f(x_{2n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))] \qquad (25)$$

Бу (25) формула *параболалар (Симпсон) формуласи* дейилади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу сегментда узлуксиз $f^{(IV)}(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0)+f(x_{2n}))+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+$$

$$+f(x_{2n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2})]+Rn$$

бўлиб,

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}f^{(IV)}(c)$$

бўлади (қаралсин, [7], 11-боб).

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

интегрални параболалар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

$[0, 1]$ сегментни $x_0=0,\ x_1=\frac{1}{10},\ x_2=\frac{2}{10},\ x_3=\frac{3}{10},\ x_4=\frac{4}{10},$

$$x_5=\frac{5}{10},\ x_6=\frac{6}{10},\ x_7=\frac{7}{10},\ x_8=\frac{8}{10},\ x_9=\frac{9}{10},\ x_{10}=1$$

нуқталар ёрдамида 10 та тенг бўлакка бўламиз. Бунда ҳар бир бўлакнинг узунлиги $\frac{1}{10}$ га тенг бўлади.

Интеграл остидаги

$$f(x)=e^{-x^2}$$

функциянинг x_i, $(i=0,1,\ \ldots\ ,\ 10)$ нуқталардаги қийматлари қуйидагича бўлади:

$$f(x_0)=f(0)=1{,}00000,$$

$$f(x_1)=f\left(\frac{1}{10}\right)=0{,}99005,$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{2}{10}\right)=0{,}96079,$$

$$f(x_3)=f\left(\frac{3}{10}\right)=0{,}91393,$$

$$f(x_4)=f\left(\frac{4}{10}\right)=0{,}85214,$$

$$f(x_5)=f\left(\frac{5}{10}\right)=0{,}77680,$$

$$f(x_6)=f\left(\frac{6}{10}\right)=0{,}69768,$$

$$f(x_7)=f\left(\frac{7}{10}\right)=0{,}61263,$$

$$f(x_8)=f\left(\frac{8}{10}\right)=0{,}52729,$$

$$f(x_9)=f\left(\frac{9}{10}\right)=0{,}44486,$$

$$f(x_{10})=f(1)=0{,}36788.$$

(25) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{30}[(1{,}00000+0{,}36788)+4(0{,}99005+$$

$$+0{,}91393+0{,}77680+0{,}61263+0{,}44486)+$$

$$+2(0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729)]=$$

$$=\frac{1}{30}(1{,}36788+6{,}07580+14{,}96108)\approx 0{,}74682.$$

Демак, $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}74682.$

Шундай қилиб,

$$J=\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

интегрални тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида ҳисоблаб $J=0{,}74805$, трапециялар формуласи ёрдамида ҳисоблаб $J=0{,}74437$, параболалар формуласи ёрдамида ҳисоблаб $J=0{,}74682$ бўлишини топдик.

3-БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

Аниқ интегралнинг татбиқ доираси кенгдир. Жумладан ёй узунлигини, текис шаклнинг юзини, ўзгарувчи кучнинг бажарган ишини, айланма жисмнинг ён сиртини, жисмнинг оғирлик марказини ва ҳоказоларни топиш масалалари аниқ интеграл ёрдамида ҳал этилади.

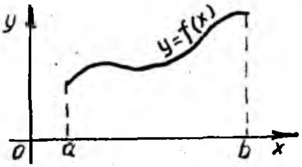
1-§. ЁЙ УЗУНЛИГИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, бу функция графиги 4-чизмада кўрсатилган эгри чизиқ ёйини тасвирласин. Уни AB деб белгилайлик.

$[a, b]$ сегментнинг бирор $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(a=x_0<x_1<x_2<<\ldots<x_n=b)$ бўлинишини олиб, унинг бўлувчи $x_k (k=\overline{o, n})$ нуқталари орқали O_y ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Уларнинг $\overset{\smile}{AB}$ ёйи билан кесишган нуқталари

$$A_k=(x_k, f(x_k))$$

$(A_0=(a, f(x)), A_n=B=(b, f(b)), k=\overline{1, n-1})$ бўлсин.



4-чизма

$\overset{\smile}{AB}$ ёйдаги A_k $(k=\overline{o, n})$ нуқталарни бир-бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб $\overset{\smile}{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқ периметрини L билан белгилайлик. Унда текисликда икки нуқта орасидаги масофа формуласидан фойдаланиб, $A_k=(x_k, f(x_k))$ ва $A_{k+1}=(x_{x+1}, f(x_{k+1}))$ нуқталар орасидаги масофа

$$|A_k-A_{k+1}|=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}$$

ва L синиқ чизиқ периметри

$$L=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2} \qquad (1)$$

бўлишини топамиз.

Равшанки, синиқ чизиқ периметри $f(x)$ функцияга ҳамда $[a, b]$ сегментнинг бўлинишига боғлиқ бўлади:

$$L=L_p(f).$$

P бўлинишнинг бўлувчи нуқталар сонини орттириб борилса, $\overset{\smile}{AB}$ ёйига синиқ чизиқлар шу $\overset{\smile}{AB}$ ёйига яқинлаша боради.

1-таъриф. Агар $\overset{\smile}{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ ($[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий P бўлинишида) периметри

$$L_p=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}$$

$\lambda_p\to 0$ да чекли лимитга эга бўлса, у ҳолда $\overset{\smile}{AB}$ ёй узунликка эга деб аталади ва ушбу

$$\lim_{\lambda_p\to 0} L_p=l$$

$\overset{\smile}{AB}$ ёйнинг узунлиги дейилади.

Қаралаётган $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши билан бирга у шу сегментда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага ҳам эга бўлсин. Юқоридагидек, $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлинишини олиб, $\overset{\smile}{AB}$ ёйига чизилган унга мос синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқ периметри (1) формулага кўра

$$L_p=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-(f(x_k))^2}$$

бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Унда бу теоремага кўра шундай $\tau_k (x_k\leqslant\tau_k\leqslant x_{k+1})$ нуқта топиладики,

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)\,(x_{k+1}-x_k)$$

бўлади. Натижада

$$L_p=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+f'^2(\tau_k)\,(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\;(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\;\Delta x_k \qquad (2)$$

тенгликка келамиз.

Равшанки, $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функция $[a, b]$ да узлуксиз. Бинобарин, у шу сегментда интегралланувчи. Бу функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^{2}(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, унинг лимити $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқлардан олинган нуқталарга боғлиқ эмас. Демак, $\xi_k=\tau_k$ ларда

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^{2}(\tau_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^{2}(x)}\, dx \qquad (3)$$

бўлади.

(2) ва (3) муносабатлардан

$$\lim_{\lambda_p \to 0} L_p = \int_a^b \sqrt{1+f'^{2}(x)}\, dx$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\overset{\smile}{AB}$ ёйининг узунликка эга ва у

$$l = \int_a^b \sqrt{1+f'^{2}(x)}\, dx \qquad (3')$$

бўлишини билдиради.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 4)$$

функция тасвирлаган эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

Аввало берилган функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}.$$

Унда

$$1+f'^2(x) = 1+\frac{9}{4}x, \quad \sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

бўлиб, (3′) формулага биноан

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

бўлади. Кейинги интегралда $1+\frac{9}{4}x = t$ алмаштириш бажарамиз. Унда $dx = \frac{4}{9}dt$ $1 \leqslant t \leqslant 10$ бўлиб,

$$\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{8}{27} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} =$$

$$= \frac{8}{27}(\sqrt{1000} - 1) = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

бўлади. Демак,

$$l=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

2. Ушбу

$$f(x)=\frac{x^2}{2p}\quad (p>0)$$

параболанинг $[0,\ a]$ оралиқдаги $(a>0)$ қисмининг узунлигини топинг. Аввало $f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб, $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ни топамиз:

$$f'(x)=\frac{x}{p},\quad 1+f'^2(x)=\frac{p^2+x^2}{p^2},\quad \sqrt{1+f'^2(x)}=\frac{1}{p}\sqrt{p^2+x^2}.$$

(3′) формулага кўра қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l=\frac{1}{p}\int_0^a\sqrt{x^2+p^2}\,dx$$

бўлади. Энди ушбу

$$\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx$$

аниқмас интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$u=\sqrt{x^2+p^2},\quad dv=dx$$

дейилса, унда

$$du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+p^2}},\quad v=x$$

бўлиб,

$$\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=x\sqrt{x^2+p^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+p^2}}=\int\frac{x^2+p^2-p^2}{\sqrt{x^2+p^2}}dx=\int\frac{x^2+p^2}{\sqrt{x^2+p^2}}dx-p^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}=$$

$$=\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx-p^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}}=\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx-p^2\ln|x+\sqrt{x^2+p^2}|.$$

Демак,

$$\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=x\cdot\sqrt{x^2+p^2}-\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx+p^2\cdot\ln|x+\sqrt{x^2+p^2}|.$$

Бу тенгликдан

$$2\cdot\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=x\sqrt{x^2+p^2}+p^2\ln|x+\sqrt{x^2+p^2}|$$

бўлиб,

$$\int\sqrt{x^2+p^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+p^2}|$$

бўлиши келиб чиқади.

Натижада

$$l=\frac{1}{p}\int\limits_0^a\sqrt{x^2+p^2}\,dx=\frac{1}{p}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+p^2}+\frac{p^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+p^2}|\right]_0^a=$$

$$=\frac{1}{2p}a\sqrt{a^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln|a+\sqrt{a^2+p^2}-\frac{p}{2}\ln p$$

бўлади.

Фараз қилайлик, AB ёй (эгри чизиқ)

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

тенгламалар системаси, билан яъни параметрик ҳолда берилган бўлиб, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ функциялар $[\alpha,\beta]$ да аниқланган, узлуксиз ва $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Бунда AB ёйи узунликка эга бўлиб, унинг узунлиги

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \tag{4}$$

формула ёрдамида топилади.

(4) тенгликнинг ўринлилигини (3′) формула ёрдамида ҳамда аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласидан фойдаланиб келтириб чиқариш мумкин.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} \varphi(t)=a\cdot(t-\sin t), \\ \psi(t)=a\cdot(1-\cos t) \end{cases} \quad (o\leqslant t\leqslant\pi)$$

тенгламалар системаси билан аниқланган эгри чизиқнинг (циклоиданинг) узунлигини топинг.

$\varphi(t)=a(t-\sin t)$, $\psi(t)=a(1-\cos t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\varphi'(t)=a(1-\cos t),$$
$$\psi'(t)=a\cdot\sin t.$$

Унда

$$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2\ 2\cdot(1-\cos t)$$

бўлиб,

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=a\sqrt{2(1-\cos t)}$$

бўлади.

(4) формулага кўра эгри чизиқнинг узунлиги

$$l=\int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cdot\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cdot\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a\,.$$

Демак,

$$l=8a$$

Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ қутб координата системасида

$$\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)\tag{5}$$

тенглик билан берилган бўлсин. Бунда $\rho=\rho(\theta)$ функция $[\alpha,\ \beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга.

Аввало (4) муносабат билан берилган эгри чизиқ тенгламасини параметрик кўринишда ифодалаб оламиз:

$$\begin{cases}\varphi(\theta)=\rho(\theta)\cdot\cos\theta,\\ \psi(\theta)=\rho(\theta)\cdot\sin\theta\end{cases}\qquad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

Сўнг (4) формуладан фойдаланиб $\breve{AB}$ эгри чизиқ ёйининг узунлигини топамиз:

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(\theta)+\psi'^2(\theta)}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\theta)\cdot\cos\theta)'^2+(\rho(\theta)\cdot\sin\theta)'^2d\theta}=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho'(\theta)\cdot\cos\theta-\rho(\theta)\cdot\cos\theta)^2+(\rho'(\theta)\cdot\sin\theta+\rho\theta\cdot\cos\theta)^2d\theta}=$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2\theta)}\,d\theta.$$

Демак, (5) муносабат билан берилган эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2|\theta|+\rho'^2(\theta)}\,d\theta\tag{6}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\rho=2a(1+\cos\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

эгри чизиқ (кардиода) ёйининг узунлигини топинг.

Бу ёпиқ чизиқ бўлиб, қутб ўқига нисбатан симметрик жойлашган (5-чизма). Шунинг учун эгри чизиқнинг узунлиги, унинг қутб ўқининг юқорисида жойлашган қисми узунлигининг иккиланганига тенг бўлади. (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,d\theta=$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{(2a(1+\cos\theta))'^2+(2a(1+\cos\theta))^2}=$$

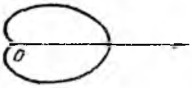
$$=2\cdot 2a\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}\,d\theta=4\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=$$

$$=8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=16a.$$

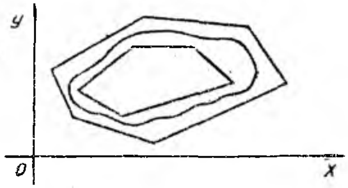
Демак, кардоида ёйининг узунлиги

$$l=16a$$

бўлади.



5-чизма



6-чизма

2-§. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ЮЗИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

1°. Маълумки китобхон текис шакллар – учбурчак, тўғри тўртбурчак ва ҳоказоларнинг юзи тушунчаси билан мактаб математика курсидан таниш. Ушбу параграфда текисликда чегараланган шаклнинг юзи тушунчаси ва уни интеграл орқали ифодаланиши билан шуғулланамиз.

Текисликда бирор чегараланган *(p)* шаклни қарайлик (6-чизма). Бу шаклнинг ичига кўпбурчак чизамиз. Бундай кўпбурчаклар чексиз кўп бўлиб, улар ташкил топган тўпламни *(A)* орқали белгилаймиз. Худди шунга ўхшаш *(p)* шаклни ўз ичига олувчи кўпбурчак қараймиз. Бундай кўпбурчаклар ҳам чексиз кўп бўлиб, улардан ташкил топган тўплам *(B)* бўлсин.

(A) кўпбурчакларнинг юзини S_A билан, *(B)* кўпбурчакларнинг юзини S_B билан белгилаш натижасида *(p)* шаклга ички чизилган

кўпбурчак юзаларидан иборат $\{S_A\}$ тўплам, $\{p\}$ шаклни ўз ичига олган кўпбурчак юзаларидан иборат $\{S_B\}$ тўплам ҳосил бўлади. Равшанки, $\{S_A\}$ тўплам юқоридан, $\{S_B\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган. Шунинг учун $\{S_A\}$ тўплам аниқ юқори чегарага, $\{S_B\}$ тўплам эса аниқ қуйи чегарага эришади.

$$\sup\{S_A\}=P,\ \inf\{S_B\}=\bar{P}.$$

2- таъриф. Агар $p=\bar{p}$, яъни

$$\sup\{S_A\}=\inf\{S_B\}$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда (P) шакл юзага эга дейилади ва $P=\bar{P}=P$ миқдор (1) шаклнинг юзи дейилади.

2°. Энди (p) шакл сифатида юқоридан узлуксиз $f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ функция графиги, ён томондан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан Ox — ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни қарайлик (7- чизма). Бу эгри чизиқли трапеция юзага эга эканини ва у аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

$[a, b]$ оралиқнинг бирор $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ $(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$ бўлинишини олайлик. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун бу оралиқда чегараланган ва

$$\inf\{f(x)\}=m_k,$$
$$\sup\{f(x)\}=M_k$$

$(x\in[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1, \ldots, n-1)$ лар мавжуд. (Қаралсин, [7], 11- боб.)

Қуйидаги йиғиндиларни тузамиз.

$$S=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k,\ S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k$$

Бу йиғиндилардан биринчиси $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган кўпбурчак — тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндисидан, иккинчиси эса бу эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган кўпбурчак — тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндисидан иборатдир.

Равшанки, бу кўпбурчаклар юзалари $f(x)$ функцияга ҳамда $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишларига боғлиқ бўлади:

$$s=s_p(f),\ S=S_p(f).$$

$[a, b]$ оралиқнинг турли бўлинишлари олинса, уларга нисбатан $aABb$ эгри чизиқли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу эгри чизиқли трапецияни ўз ичига олган турли кўпбурчаклар ҳосил бўлади. Натижада бу кўпбурчаклар юзаларидан иборат қуйидаги $\{s_p(f)\}$, $\{S_p(f)\}$ тўпламлар ҳосил бўлади. Бунда $\{s_p(f)\}$ тўплам юқоридан $\{S_p(f)\}$ тўплам эса қуйидан чегараланган бўлади. Демак, бу тўпламларнинг

$$\sup\{s_p(f)\}\quad \inf\{S_p(f)\}$$

аниқ чегаралари мавжуд.

Шартга кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз. У ҳолда Кантор теоремасининг натижасига кўра $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $[a, b]$ ораликнинг диаметрлари $\lambda_p < \delta$ бўлган ихтиёрий бўлинишлари P учун ҳар бир $\{x_k, x_{k+1}\}$ ораликда функциянинг тебраниши

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Унда

$$\inf\{S_p(f)\} - \sup\{s_p(f)\} \leqslant S_p(f) - s_p(f) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon.$$

Демак, $[a, b]$ ораликнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай бўлиниши олинганда ҳам бу бўлинишга мос $aABb$ эгри чизикли трапециянинг ичига чизилган ҳамда бу трапецияни ўз ичига олган кўпбурчак юзалари учун ҳар доим

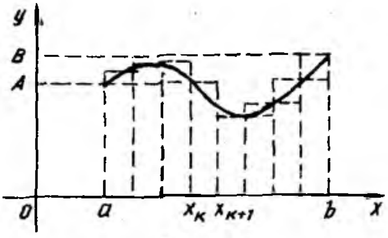
$$0 \leqslant \inf\{S_p(f)\} - \sup\{s_p(f)\} < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан эса

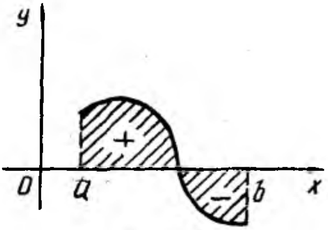
$$\inf\{S_p(f)\} = \sup\{s_p(f)\} \tag{7}$$

тенглик келиб чиқади.

(7) тенглик $aABb$ эгри чизикли трапециянинг юзага эга бўлишини билдиради.



7- чизма



8- чизма

3°. Энди бу трапеция юзининг интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. Маълумки, $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз бўлиб, унинг интеграл йиғиндиси $\sigma_p = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ учун

$$s_p < \sigma_p < S_p$$

тенгсизликлар ўринли. $\lambda_p \to 0$ да $s_p \to I$, $S_p \to I$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда $\lambda_p \to 0$ да $\sigma_p \to I$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб $aABb$ эгри чизикли трапеция юзи $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ ораликдаги интегралига тенг экан. Демак,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

1- **эслатма**. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлиб, унда ишора сақламаса (8) формуладаги интеграл эгри чизиқли трапециялар юзаларининг йиғиндисидан иборат бўлади. Бунда Ox ўқининг юқорисидаги юза мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастидаги юза манфий ишора билан олинади (8- чизма).

2- **эслатма**. Агар $f_1(x)$, $f_2(x)$ функциялар $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз ва $\forall x \in [a, b]$ ларда $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant 0$ бўлса, юқоридан $f_1(x)$, пастдан $f_2(x)$ функциялар графиги, ён томонларидан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзи

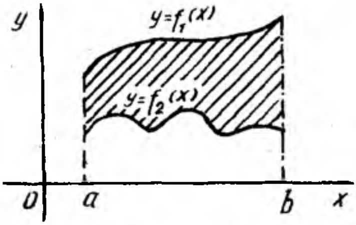
$$S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx \tag{9}$$

формула орқали ифодаланади (9- чизма).

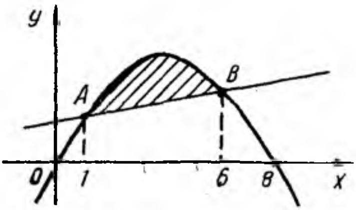
Мисол. Ушбу

$$4y=8x-x^2, \quad 4y=x+6$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.



9- чизма



10- чизма

Бу чизиқлардан бири парабола, иккинчиси тўғри чизиқ бўлиб, улар бир-бири билан $A\left(1; \frac{7}{5}\right)$ ва $B(6; 3)$ нуқталарда кесишади (10- чизма). (9) формулага кўра

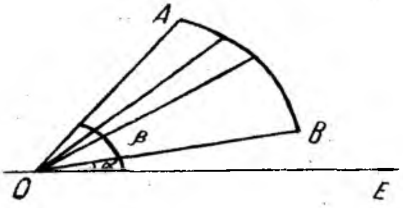
$$S=\frac{1}{4}\int_1^6 [(8x-x^2)-(x+6)]dx=\frac{1}{4}\int_1^6 (7x-x^2-6)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{7}{2}x^2-\frac{x^3}{3}-6x\right)\Big|_1^6=5\frac{5}{24}\text{кв.бир}$$

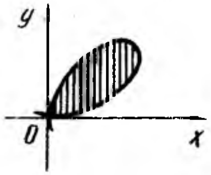
4°. Энди қутб координаталари системасида ушбу $\rho=\rho(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ функция тасвирлаган $\breve{AB}$ ёй ҳамда OA ва OB радиус — векторлар билан чегараланган шакл — эгри чизиқли секторни қарайлик (11- чизма). Юқоридагига ўхшаш бу эгри чизиқли сектор ҳам юзага эга эканлиги кўрсатилади ва у ушбу

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\,d\theta \tag{10}$$

формула орқали ҳисобланади.



11- чизма



12- чизма

Мисол. Ушбу

$$S=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi},\quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Қаралаётган шаклнинг юзини (10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right]^2 d\varphi=$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi.$$

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{tg^2\varphi}{(1+tg^3\varphi)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(1+tg^3\varphi)^{-2}d(1+tg^3\varphi)=$$

$$=-\frac{1}{3}(1+tg^3\varphi)^{-1}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}.$$

Демак,

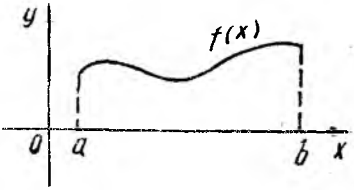
$$S=\frac{9a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3a^2}{2}\ \text{кв.бир.}$$

Одатда, $\rho=\frac{3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ чизиқ *Декарт япроғи* дейилади. Декарт япроғи билан чегараланган шакл 12- чизмада тасвирланган.

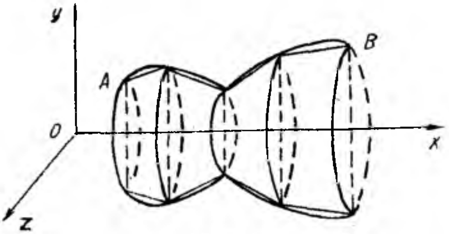
3- §. АЙЛАНМА СИРТ ЮЗИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

$y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geqslant 0$ бўлсин (13- чизма). $f(x)$ функция графигининг Ox ўқи атрофида айлантиришдан айланма сирт ҳосил бўлади (14- чизма).

Бу сирт юзасининг аниқ интеграл орқали ифодаланишини кўрсатамиз. $[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ $(a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$ бўлинишини олайлик. P бўлинишнинг ҳар бир $x_k (k=0,1, \dots, n)$ бўлувчи нуқталари орқали Oy ўқига параллел



13- чизма



14- чизма

тўғри чизиқлар ўтказиб, уларни $\overset{\smile}{AB}$ ёй билан кесишган нуқталарини $A_k(x_k, f(x_k))$ билан белгилайлик. Бу $A_k(x_k, f(x_k))$ $(k=0,1, \dots, n)$,

$$A_0=A, A_n=B$$

нуқталарни ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан бирлаштириб $\overset{\smile}{AB}$ ёйга L синиқ чизиқ чизамиз. $\overset{\smile}{AB}$ ёйни ва L чизиқни Ox ўқи атрофида айлантирамиз. Натижада L нинг айланишидан кесик конус сиртларидан ташкил топган сирт ҳосил бўлади. Бу сиртнинг юзи ушбу

$$Q=2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2} \qquad (11)$$

формула билан ифодаланади.

P бўлинишнинг диаметри $\lambda_p \to 0$ да $\overset{\smile}{AB}$ ёйига чизилган L синиқ чизиқ периметри $\overset{\smile}{AB}$ ёйи узунлигига интилади. Демак, $\lambda_p \to 0$ да L синиқ чизиқни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг юзаси Q нинг лимити биз қараётган айланма сиртнинг юзасини аниқлайди. Бу юзанинг аниқ интеграл орқали ифодасини топамиз.

Бунинг учун $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга деб оламиз.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда шундай ξ_k нуқта топиладики,

$$\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}=f(\xi_k), \ \xi_h \in [x_k, x_{k+1}]$$

тенглик ўринли бўлади. Иккинчи томондан, Лагранж теоремасига кўра $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда шундай τ_k нуқта топиладики

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)(x_{k+1}-x_k),\ \tau_h\in[x_k,\ x_{k+1}]$$

тенглик ҳам ўринли бўлади. Натижада (11) муносабат ушбу

$$Q=2\pi\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+f'^2(\tau_k)(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=2\pi\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_h)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot\Delta x_k \qquad (12)$$

кўринишни олади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k$$

йиғинди

$$f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)} \qquad (12')$$

функциянинг интеграл йиғиндисини эслатади. (12′) функция интегралланувчи бўлганлиги сабабли ξ_k нуқта сифатида τ_k ни олиш мумкин.

$\lambda_p\to0$ да (12) тенгликдан топамиз:

$$\lim_{\lambda_p\to0}Q=\lim_{\lambda_p\to0}2\pi\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\cdot\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot\Delta x_k=$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Шундай қилиб, айланма сиртнинг юзи учун ушбу

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

формула ўринли.

4-§. ЎЗГАРУВЧИ КУЧНИНГ БАЖАРГАН ИШИ ВА УНИ ҲИСОБЛАШ

Фараз қилайлик, бирор жисм Ox ўқи бўйлаб F куч таъсири остида ҳаракат қилаётган бўлсин. Бунда F куч жисмнинг Ox ўқидаги ҳолатига боғлиқ. Шу $F=F(x)$ кучнинг йўналиши ва ҳаракат йўналиши устма-уст тушсин. Бу куч таъсирида жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказишда бажарилган ишни топиш масаласи юзага келади. Маълумки, $F=F(x)$ куч $[a, b]$ оралиқда $F(x)=c$ ($c=\text{const}$) бўлса, жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказишда бажарган иш $A=c(b-a)$ формула билан ифодаланади.

$F=F(x)$ куч $[a, b]$ ораликда x ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бўлсин. $[a, b]$ ораликнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad (a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

бўлинишини олиб, бу бўлинишнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ оралиғида ихтиёрий ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта оламиз.

Агар ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ораликда жисмга таъсир этаётган $F(x)$ кучни ўзгармас $F(\xi_k)$ га тенг деб олсак, у ҳолда $[x_k, x_{k+1}]$ ораликда бажарилган иш тахминан $F(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$ формула билан, $[a, b]$ оралиғида бажарилган иш эса тахминан

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k \tag{13}$$

формула билан ифодаланади. Бу формула тақрибий бўлиб, $\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$ йиғинди $F=F(x)$ функция билан бир қаторда $[a, b]$ ораликнинг бўлинишига ҳамда $[x_k, x_{k+1}]$ ораликдан олинган ξ_k нуқталарга боғлиқдир. P бўлиниш диаметри $\lambda_p \to 0$ да (13) йиғинди қиймати изланаётган иш миқдорини тобора аниқроқ ифодалайди. $\lambda_p \to 0$ да (13) йиғинди $[a, b]$ ораликнинг бўлиниш усулига ҳамда ξ_k нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ҳолда чекли A сонга интилса, бу A сон ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ ораликдаги бажарган иши деб аталади.

Демак,

$$A=\lim_{\lambda_p\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k .$$

$F(x)$ функция $[a, b]$ ораликда узлуксиз эканлигини эътиборга олсак,

$$A=\int_a^b F(x)\,dx$$

формулага эга бўламиз.

Шундай қилиб, ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a, b]$ ораликда бажарган иши

$$A=\int_a^b F(x)\,dx$$

формула билан ифодаланади.

5-§. ГЕОМЕТРИК ШАКЛЛАРНИНГ СТАТИК МОМЕНТЛАРИ ВА ОҒИРЛИК МАРКАЗИНИ ТОПИШ

Агар геометрик шакл юқоридан $y=y(x)$ пастдан Ox ўқи, ён томонидан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар билан чегараланган бўлса, бундай фигуранинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2(x)\,dx,\quad M_y=\int_a^b x\cdot y(x)\,dx$$

формулалар ёрдамида, оғирлик маркази эса

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{M_y}{S},\frac{M_x}{S}\right)$$

формула топилади, бунда $S=\int_a^b y(x)\,dx$— геометрик шаклнинг юзи.

4- БОБ

ҚАТОРЛАР

1-§. СОНЛИ ҚАТОР ТУШУНЧАСИ. СОДДА ТЕОРЕМАЛАР

Бирор $\{a_n\}$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. $\{a_n\}$ *кетма-кетликнинг ҳадларидан ташкил топган ушбу*

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots$$

ифода сонли қатор (қисқача қатор) дейилади, у $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ каби ёзилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots \qquad (1)$$

a_1, a_2, a_3, ... сонлар (1) қаторнинг *ҳадлари*, a_n эса қаторнинг *умумий ҳади* дейилади.

Масалан,

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}+\dots$$

қаторда ҳар бир $1, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \ \dots$ сонлар шу қаторнинг ҳадлари $\frac{1}{(n-1)n}$ эса унинг умумий ҳади бўлади.

(1) қатор ҳадлари ёрдамида қуйидаги

$$\begin{aligned}
&A_1=a_1,\\
&A_2=a_1+a_2,\\
&A_3=a_1+a_2+a_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_n=a_1+a_2+\dots+a_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

йиғиндиларни тузамиз. Бу (1) қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади.

Натижада (1) катор берилган ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади.

2-таъриф. *Агар $n\to\infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва чекли бўлиб,*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

бўлса, (1) қатор яқинлашувчи дейилади. Бу муносабатдаги A сон қаторнинг *йиғиндиси* дейилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = A.$$

3-таъриф. *Агар $n\to\infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз ёки лимити мавжуд бўлмаса, (1) қатор узоқлашувчи дейилади.*

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots$$

каторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} -$$

ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Сўнг $n\to\infty$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Демак, берилган катор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси 2 га тенг.

2. Ушбу

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$$

каторни қарайлик. Арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланиб берилган каторнинг кисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

бўлишини топамиз. Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n+1)}{2} = +\infty.$$

Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

3. Ушбу

$$-1+1-1+1-\dots+(-1)^n+\dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=-1+1-1+1-\dots+(-1)^n=\begin{cases}0, \text{ агар } n \text{ — жуфт сон бўлса,}\\ 1, \text{ агар } n \text{ — тоқ сон бўлса}\end{cases}$$

бўлиб, $n\to\infty$ да унинг лимити мавжуд эмас. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

4. Ушбу

$$a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}+\dots$$

қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳадлари геометрик прогрессияни ташкил этгани учун уни геометрик қатор дейилади. Қаралаётган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=a+aq+aq^2+\dots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}\quad(q\neq1)$$

бўлиб, $|q|<1$ бўлганда

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}$$

бўлади. Демак, геометрик қатор $|q|<1$ бўлганда яқинлашувчи бўлади. Геометрик қатор $|q|\geqslant1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

5. Ушбу

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$$

қатор узоқлашувчи бўлади, чунки унинг қисмий йиғиндиси учун

$$A_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\infty$$

бўлади.

Энди қатор ҳақидаги содда теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+\dots$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=ca_1+ca_2+ca_3+\dots+ca_n+\dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c\cdot A$ га тенг бўлади (c ўзгармас сон).

Исбот. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A бўлсин. Унда бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

учун

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

бўлади. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ қаторнинг қисмий йиғиндисини A'_n билан белгиласак, у ҳолда

$$A'_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cA_n$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} cA_n = c\lim_{n\to\infty} A_n = cA$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ қаторнинг яқинлашувчилигини ҳамда унинг йиғиндиси $c \cdot A$ бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A+B$ га тенг бўлади.

Исбот. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B бўлсин. Унда бу қаторларнинг қисмий йиғиндилари

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

учун

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

бўлади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ қаторнинг қисмий йиғиндисини C_n билан белгилайлик. Унда

$$C_n = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) =$$
$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots+b_n)=A_n+B_n$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n+B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A+B$$

бўлади. Бу эса $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ каторнинг яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A+B$ эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

3-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

бўлади.

Исбот. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор якинлашувчи бўлсин. Унда бу қаторнинг кисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad (A \text{ — чекли сон})$$

бўлади. Равшанки,

$$A_n = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n = A_{n-1}+a_n.$$

Бундан эса

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = A - A = 0$$

бўлади. Бу эса теоремани исботлайди.

Эслатма. Бирор каторнинг умумий ҳади $n\to\infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқмайди. Масалан,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

қаторнинг умумий ҳади $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, $n\to\infty$ да нолга интилади. Бироқ бу қатор узоқлашувчидир. Демак, 3-теорема қатор яқинлашишининг зарурий шартини ифодалар экан.

2-§. МУСБАТ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР. СОЛИШТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

қатор берилган бўлсин. Агар бу қаторда

$$a_n \geqslant 0 \quad (n = 1,2,3, \ldots)$$

бўлса, у мусбат ҳадли қатор, қисқача мусбат қатор дейилади.

4-теорема. ***Мусбат***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ нинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги.* (2) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

бўлади. Чекли лимитга эга бўлган кетма-кетликларнинг чегараланган бўлиши маълум. Шунинг учун $\{A_n\}$ юқоридан чегараланган бўлади.

Етарлилиги. (2) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлсин. Равшанки,

$$A_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n$$

(чунки, $a_n \geqslant 0$). Бу эса $\{A_n\}$ нинг ўсувчи кетма-кетлик эканини билдиради. Демак, $\{A_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва юқоридан чегараланган. Унда монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра, $\{A_n\}$ кетма-кетлик $n \to \infty$ да чекли лимитга эга бўлади. Бу эса (2) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Натижа. Мусбат қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

Энди 4-теоремадан фойдаланиб қуйида келтириладиган теоремаларни исботлаймиз.

5-теорема. ***Фараз қилайлик,***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

мусбат қаторлар берилган бўлсин. Агар бу қаторларда

$$a_n \leqslant b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

бўлса, у ҳолда

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***қатор яқинлашувчи бўлса,*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,***

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***қатор узоқлашувчи бўлса,*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.***

Исбот. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ каторнинг кисмий йиғиндилари

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

учун (3) шартдан фойдаланиб

$$A_n \leqslant B_n \tag{4}$$

бўлишини топамиз.

Айтайлик, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ катор якинлашувчи бўлсин. Унда бу каторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{B_n\}$ кетма-кетлик чегараланган, жумладан юқоридан чегараланган бўлади. (4) тенгсизликдан $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг ҳам юқоридан чегараланган бўлиши келиб чиқади. 4-теоремага мувофиқ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Энди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. Унда $\{A_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлади. (4) тенгсизликдан эса $\{B_n\}$ кетма-кетликнинг ҳам юқоридан чегараланмаганлиги келиб чиқади. Натижага биноан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор узоқлашувчи бўлади. Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема ҳам исботланади.

6-теорема. ***Фараз қилайлик,***

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

мусбат қаторлар берилган бўлсин. Агар бу қаторларда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

бўлса, у ҳолда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***қатор яқинлашувчи бўлса,*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,***

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***қатор узоқлашувчи бўлса,*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ***қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.***

Одатда 5- ва 6- теоремалар *солиштириш теоремалари* дейилади.

Энди мусбат қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлашда кўп фойдаланиладиган Коши ҳамда Даламбер аломатларини келтирамиз.

Коши аломати. *Агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

мусбат қаторнинг умумий ҳади a_n *учун*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad (n=1,2,\ \ldots)$$

бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи бўлади,*

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \quad (n=1,2,\ \ldots)$$

бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликдан

$$a_n \leqslant q^n$$

тенгсизлик келиб чиқади. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ геометрик қаторнинг яқинлашувчи эканини эътиборга олиб, 5- теоремадан фойдаланиб берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар

$$\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$$

бўлса, унда $a_n \geqslant 1$ бўлиб, $n \to 0$ да a_n нинг лимити нолга тенг бўлмайди. Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди. Демак, бу ҳолда қатор узоқлашувчи. Коши аломати исбот бўлди.

Бу аломатнинг қуйидаги кўринишидан амалиётда кенг фойдаланилади.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

бўлса, $q < 1$ бўлганда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор якинлашувчи, $q > 1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Даламбер аломати. *Агар* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ *мусбат қаторнинг* a_n *ва* a_{n+1} *ҳадлари* $(n = 1,2, \ldots)$ *учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$$

бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи бўлади,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$$

бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор узоқлашувчи бўлади.*

Исбот. Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликни қуйидагича

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{q^{n+1}}{q^n} \tag{5}$$

ёзиш мумкин. Равшанки, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ геометрик қатор $(0 < q < 1)$ яқинлашувчи. Унда (5) муносабатни эътиборга олиб, 6- теоремадан фойдаланиб берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Агар

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$$

бўлса, унда $a_{n+1} \geqslant a_n$ бўлиб, $n \to \infty$ да a_n нинг лимити нолга тенг бўлмайди. Бу ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади. Даламбер аломати исбот бўлди.

Бу аломатнинг қуйидаги кўринишидан амалиётда кенг фойдаланилади:

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мусбат қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

бўлса, $q<1$ бўлганда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи, $q>1$ бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

қаторни солиштириш теоремаларидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Қаралаётган қаторда $a_n = \frac{1}{n^n}$.

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

геометрик қатор бўлиб, у яқинлашувчидир. Бу қатор учун

$$b_n = \frac{1}{2^n}.$$

$n \geqslant 3$ лар учун

$$a_n \leqslant b_n$$

эканлигини эътиборга олсак, 5- теоремага кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ қаторнинг яқинлашувчилигидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ қаторнинг ҳам яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

2. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

қаторни солиштириш теоремаларидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг барча ҳадлари $a_n = \frac{1}{\ln n}$ учун $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатор узоқлашувчидир.

5- теоремага кўра $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади. Демак, қаралаётган қатор узоқлашувчи.

3. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

қаторни Коши аломатидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Қаралаётган қаторнинг умумий ҳади $a_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ учун

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}$$

бўлади. $\frac{1}{e} < 1$ бўлгани учун Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи.

4. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$$

қаторни Даламбер аломатидан фойдаланиб яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қатор учун

$$a_n = \frac{5^n n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$$

эканлигини эътиборга олиб $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нисбатни ҳисоблаймиз:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{5^n n!} = \frac{5\cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{5}{e}.$$

$5e > 1$ бўлгани учун Даламбер аломатига кўра берилган қатор узоқлашувчи.

3-§. ИХТИЁРИЙ ҚАТОРЛАР. ЛЕЙБНИЦ ТЕОРЕМАСИ

Биз 2-§ да мусбат ҳадли қаторларни қарадик. Энди ихтиёрий ҳадли сонли (ҳадларининг ишораси ихтиёрий бўлган) қаторларни караймиз. Аввало бундай қаторларнинг яқинлашишини ифодалайдиган теоремани исботсиз келтирамиз.

Фараз қилайлик

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{6}$$

ихтиёрий ҳадли сонли қатор бўлсин.

7-теорема. ***(6) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун*** $\forall \varepsilon > 0$ ***сон олинганда ҳам шундай*** $n_0 \in N$ ***сон топилиб, барча*** $n > n_0$ ***ва*** $m = 1, 2, 3, \ldots$ ***ларда*** $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$ ***тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.***

Энди (6) ихтиёрий ҳадли қатор ҳадларининг абсолют қийматидан ушбу

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{6'}$$

қаторни тузамиз. Равшанки, бу мусбат ҳадли қатор бўлади.

8-теорема. ***Агар*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ***қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.***

Исбот. Шартга кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи. Унда 7-теоремага биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, \ldots$ бўлганда

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Абсолют қиймат хоссасидан фойдаланиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳадлари учун

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

7-теоремага асосан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Эслатма. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ихтиёрий ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқмайди.

4-таъриф. *Агар* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *қатор яқинлашувчи бўлса,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.*

5-таъриф. *Агар* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *қатор узоқлашувчи бўлиб,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатор яқинлашувчи бўлса,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *шартли яқинлашувчи қатор дейилади.*

Энди ихтиёрий ҳадли қаторларнинг битта муҳим хусусий холини — ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қаторларни қараймиз.

Ушбу

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + (-1)^{n-1} C_n + \dots \qquad (7)$$

қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор дейилади, бунда

Лейбниц теоремаси. ***Агар (7) қаторда*** $C_{n+1} < C_n$ ***(n= 1, 2, ...) бўлиб,***

$$\lim_{n\to\infty} C_n = 0$$

бўлса, (7) қатор яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Берилган (7) каторнинг $2n$ ҳадидан иборат йиғиндиси

$$A_{2n} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + C_{2n-1} - C_{2n}$$

ни олайлик. Теореманинг $C_{n+1} < C_n (n=1, 2, \dots)$ шартидан фойдаланиб $\{A_{2n}\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи ҳамда юқоридан чегараланганлигини топамиз.

Аввало

$$A_{2n+2} = A_{2n} + (C_{2n+1} - C_{2n+2}) \geqslant A_{2n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

бўлишидан $\{A_{2n}\}$ нинг ўсувчи экани келиб чиқади. Сўнг

$$A_{2n} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + C_{2n-1} - C_{2n} =$$
$$= C_1 - (C_2 - C_3) - (C_4 - C_5) - \dots - (C_{2n-2} - C_{2n-1}) - C_{2n} < C_1$$

бўлишидан эса $\{A_{2n}\}$ нинг юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади. Шундай қилиб $\{A_{2n}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ҳамда юқоридан чегараланган. Демак, бу кетма-кетлик чекли лимитга эга:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = A \,. \qquad (8)$$

Энди берилган каторнинг $2n+1$ та ҳадидан иборат қисмий йиғиндиси

$$A_{2n+1} = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots - C_{2n} + C_{2n+1}$$

ни олайлик. Равшанки,

$$A_{2n+1}=A_{2n}+C_{2n+1}$$

бўлади. Теореманинг

$$\lim_{n\to\infty} C_n=0$$

шартидан ҳамда (8) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(A_{2n}+C_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} A_{2n}+$$
$$+\lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = A+0=A\,.$$

Шундай қилиб, берилган қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик $n\to\infty$ да чекли лимитга эга бўлишини кўрсатдик. Бу эса қаторнинг яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

қаторни абсолют ёки шартли яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки, бу қатор ишораси навбат билан ўзгариб келадиган қатор бўлиб, у Лейбниц теоремасининг шартларини қаноатлантиради:

1) $C_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $C_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ лар учун $C_{n+1}<C_n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0\,.$

Демак, қатор яқинлашувчи.

Энди қаторни абсолют ёки шартли яқинлашувчиликка текширамиз.

$a_n= (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ учун $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ қатор узоқлашувчи экани маълум (1- § га қаралсин). Бундан берилган қаторни шартли яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n(n+1)}$ қаторни абсолют яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг умумий ҳади $a_n= (-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n\,(n+1)}$ учун

$$|a_n| = \left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n\,(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{n\,(n+1)}$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ қатор яқинлашувчидир (1- § га қаралсин). Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи.

4-§. ФУНКЦИОНАЛ КЕТМА-КЕТЛИК ВА ҚАТОРЛАР

1. Функционал кетма-кетлик тушунчаси.

Натурал сонлар тўплами N ва бирор X соҳада ($X\subset R$) аниқланган функциялар тўплами F берилган бўлсин. Ҳар бир натурал $n\in N$ сонга F тўпламдаги битта функцияни мос қўйиш

$$n\to u_n(x)$$

натижасида ҳосил бўлган

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots \tag{9}$$

тўплам функционал кетма-кетлик дейилади ва $\{u_n(x)\}$ каби белгиланади. Одатда $u_n(x)$ функция (9) функционал кетма-кетликнинг умумий ҳади дейилади.

Мисоллар. 1. Ҳар бир натурал n сонга $\frac{1}{n^2+x^4}$ функцияни мос қўйиш натижасида $(-\infty;\ +\infty)$ да берилган

$$\frac{1}{1^2+x^4},\ \frac{1}{2^2+x^4},\ \frac{1}{3^2+x^4},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2+x^4},\ldots$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади.

2. Ҳар бир натурал n сонга $n\sin\frac{x}{n}$ функцияни мос қўйиш натижасида $(-\infty,\ +\infty)$ да берилган ушбу

$$\sin x,\ 2\sin\frac{x}{2},\ 3\sin\frac{x}{3},\ldots,n\sin\frac{x}{n},\ldots$$

функционал кетма-кетликка келамиз.

Фараз қилайлик, X тўпламда ($X\subset R$) бирор

$$u_1\ (x),\ u_2\ (x),\ u_3\ (x)\ ,\ldots,\ u_n\ (x),\ \ldots$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин. X тўпламда x_0 нуқтани олиб, берилган функционал кетма-кетликнинг ҳар бир ҳадининг шу нуқтадаги қийматларини қарайлик. Улар

$$u_1\ (x_0),\ u_2\ (x_0),\ u_3\ (x_0)\ ,\ldots,\ u_n\ (x_0)\ ,\ldots \tag{9'}$$

сонлар кетма-кетлигини ташкил этади.

6-таъриф. *Агар (9′) сонлар кетма-кетлиги яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса, у ҳолда $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик x_0 нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади, x_0 нуқта эса яқинлашиш (узоқлашиш) нуқтаси дейилади.*

$\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг барча яқинлашиш (узоқлашиш) нуқталаридан иборат тўплам, унинг яқинлашиш (узоқлашиш) соҳаси дейилади.

Айтайлик, M тўплам ($M\subset R$) $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг яқинлашиш соҳаси бўлсин. Унда M тўпламдан олинган ҳар бир

x нуқтада функционал кетма-кетлик сонлар кетма-кетлигига айланиб, у яқинлашувчи, яъни чекли лимит

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

га эга бўлади. M тўпламдан олинган ҳар бир x га унга мос келадиган сонли кетма-кетликнинг чекли лимитини мос қўйсак, унда функцияга эга бўламиз. Уни $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси дейилади:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x) .$$

Бу холда $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M соҳада (M соҳанинг ҳар бир нуқтасида) $f(x)$ га яқинлашади дейилади. Бошқача қилиб айтганда, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон ҳамда ҳар қандай x ($x \in M$) нуқта олинганда ҳам шундай n натурал сон n (y олинган ε ва x ларга боғлиқ) топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$|u_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади.

7-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, фақат ε га боғлиқ шундай n_0 натурал сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун*

$$|u_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{u_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда $f(x)$ га текис яқинлашади дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{2+x}, \frac{1}{3+x}, \ldots, \frac{1}{n+x}, \ldots$$

функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси $f(x) = 0$ бўлади, чунки

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+x} = 0 .$$

2. Ушбу

$$\sin x, 2\sin\frac{x}{2}, 3\sin\frac{x}{3}, \ldots, n\sin\frac{x}{n}, \ldots$$

функционал кетма-кетлик ихтиёрий x ($x \in R$) нуктада якинлашувчи бўлиб, унинг лимит функцияси $f(x) = x$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \cdot x =$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \cdot 1 = x .$$

2^0. Функционал қатор тушунчаси.

Энди функционал қатор тушунчаси билан танишамиз.

Бирор X тўпламда $(X \subset R)$

$$u_1(x),\ u_2(x)\ ,...,\ u_n(x),\ ... \tag{9}$$

функционал кетма-кетлик берилган бўлсин.

8-таъриф. (9) *кетма-кетлик ҳадларидан ташкил топган*

$$u_1(x)+u_2(x)\ +...+\ u_n(x)+\ ...$$

ифода функционал қатор дейилади. Уни қисқача $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ каби ҳам ёзилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ ...\ +u_n(x)+... \tag{10}$$

$u_1(x),\ u_2(x),\ ...$ функциялар (10) қаторнинг *ҳадлари,* $u_n(x)$ эса унинг *умумий ҳади* дейилади.

(10) функционал қатор ҳадлари ёрдамида қуйидаги

$$\begin{aligned}
&s_1(x)=u_1(x),\\
&s_2(x)=u_1(x)+u_2(x),\\
&s_3(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x),\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .
\end{aligned}$$

йиғиндиларни тузамиз. Улар (10) функционал қаторнинг қисмий йиғиндилари дейилади.

Натижада (10) функционал қатор берилган ҳолда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{s_n(x)\}$:

$$s_1(x),\ s_2(x),\ ...,\ s_n(x),\ ... \tag{11}$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлади.

9-таъриф. *Агар* $n\to\infty$ *да* $\{s_n(x)\}$ *функционал кетма-кетлик* x_0 *нуқтада* $(x_0 \in X)$ *яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлса,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функционал қатор* x_0 *нуқтада яқинлашувчи (узоқлашувчи) дейилади.*

$\{s_n(x)\}$ функционал кетма-кетликнинг якинлашиш соҳаси мос $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади. $\{s_n(x)\}$ нинг лимит функцияси $s(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)\ =\ s(x)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг *йиғиндиси* дейилади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

функционал (геометрик) қаторни қарайлик. Бу қаторнинг ҳар бир $u_n(x) = x^{n-1}$ ҳади $(-\infty;\ +\infty)$ да аниқланган функциядир.

Геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланиб берилган функционал қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Унда $\forall x \in (-1,\ 1)$ да

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-x} - \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Берилган функционал қатор $(-1;\ 1)$ да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x) = \frac{1}{1-x}$ бўлади.

Агар $x > 1$ бўлса,

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \infty$$

бўлади.

Агар $x = 1$ бўлса,

$$S_n(x) = n$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \infty$$

бўлади.

Агар $x \leqslant -1$ бўлса,

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

бўлиб, $n \to \infty$ да $S_n(x)$ нинг лимити мавжуд бўлмайди.

Шундай қилиб, берилган геометрик қатор $|x| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|x| > 1$ ва $x = \pm 1$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Фараз қилайлик, M тўпламда $(M \subset R)$ бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \quad (10)$$

функционал қатор берилган ва шу тўпламда яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $S(x)$ бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)\ .$$

10-таъриф. Агар (10) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик M тўпламда $S(x)$ га текис яқинлашувчи бўлса, (10) функционал қатор M да *текис яқинлашувчи* дейилади.

9-теорема. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ***функционал қатор M тўпламда S(x) га текис яқинлашиши учун***

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги.* M тўпламда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор текис яқинлашувчи бўлсин. Унда бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетлик $S(x)$ га текис яқинлашади. Таърифга кўра, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $n > n_0$ бўлганда M тўпламнинг барча x нуқталари учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Бундан эса барча $n > n_0$ лар учун

$$\sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon\ .$$

Етарлилиги. (10) функционал қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик M тўпламда лимит функция $S(x)$ га эга бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

бўлсин. Лимит таърифига биноан, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, барча $n > n_0$ учун

$$\sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлади. Равшанки,

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \sup_{x\in M} |S_n(x) - S(x)| \quad (x\in M)\ .$$

Кейинги тенгликлардан эса $\forall x \in M$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (10) функционал қаторнинг $S(x)$ га текис яқинлашишини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Қуйида функционал қаторнинг текис яқинлашишини таъминлайдиган, айни пайтда масалаларни ечишда кенг фойдаланиладиган аломатни исботсиз келтирамиз.

Вейерштрасс аломати. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $M(M \subset R)$ тўпламда

$$|u_n(x)| \leqslant C_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

тенгсизликни қаноатлантирса, ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор M тўпламда текис яқинлашувчи бўлади.

5-§. ТЕКИС ЯҚИНЛАШУВЧИ ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Фараз қилайлик, $[a,\ b]$ сегментда бирор яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қатор берилган бўлиб, унинг хусусий йиғиндиси $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$, йиғиндиси эса $S(x)$ бўлсин.

1-хосса. *Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ $[a,\ b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, қатор шу сегментда текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда функционал қатор йиғиндиси $S(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда узлуксиз бўлади.*

Исбот. Аввало $[a,\ b]$ сегментда ихтиёрий x_0 нуқта оламиз. Шартга кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор $[a,\ b]$ да текис яқинлашувчи. Унда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a,\ b]$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{12}$$

тенгсизлик бажарилади. Жумладан $x = x_0$ да ҳам

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (12')$$

бўлади. Равшанки,

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз. Демак, у $x = x_0$ нуктада ҳам узлуксиз. Унда таърифга биноан, юқоридаги $\forall\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (12'')$$

бўлади.

(12), (12′) ва (12″) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$|S(x) - S_n(x_0)| = |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + \\ + S_n(x_0) - S(x_0) \leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - \\ - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Демак, $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ топиладики, $|x - x_0| < \delta$ бўлганда

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

бўлади. Таърифга кўра $S(x)$ функция x_0 нуктада узлуксиз. 1- хосса исбот бўлди.

2- хосса. *Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади $u_n(x)$ ($n = 1,2,\ldots$) $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, қатор шу сегментда $S(x)$ га текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx$$

бўлади.

Исбот. Берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал катор $[a, b]$ да $S(x)$ га текис якинлашсин: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$. Унда таърифга биноан, $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $\forall x \in [a, b]$ учун

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad (13)$$

тенгсизлик бажарилади, бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x).$$

Шартга кўра ҳар бир $u_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз. Демак,

$$\int_a^b u_n(x)\,dx \quad (n=1, 2, \ldots)$$

ҳам мавжуд.

Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)]\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx$$

ни олиб

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx$$

айирмани қараймиз. Аниқ интегралнинг хоссасидан ҳамда (13) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\left| \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx < \varepsilon \int_a^b dx = \varepsilon(b-a).$$

Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx - \left(\int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx \right) \right] = 0,$$

яъни

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

экани келиб чиқади. 2- хосса исбот бўлди.

Одатда бу хоссани функционал қаторнинг ҳадлаб интеграллаш хоссаси дейилади.

3- хосса. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *функционал қатор* $[a, b]$ *да яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси* $S(x)$ *бўлсин:*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) .$$

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *қаторнинг ҳар бир ҳади* $u_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ $[a, b]$ *да узлуксиз* $u'_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *ҳосилага эга бўлиб,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots$$

функционал қатор $[a, b]$ *да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ катор $[a, b]$ сегментда текис яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини $S^*(x)$ дейлик:

$$S^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) . \qquad (14)$$

нда 2- хоссага кўра бу каторни $[a, x]$ сегмент $(a < x \leqslant b)$ бўйича адлаб интеграллаш мумкин

$$\int_a^x S^*(t)\,dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t)\,dt.$$

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Bigg|_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) =$$

$$= S(x) - S(a) .$$

Демак,

$$S(x) - S(a) = \int_a^x S^*(t)\,dt .$$

гар

$$\left(\int_a^x S^*(t)\,dt \right)' = S^*(x)$$

эканини эътиборга олсак (2- боб, 3- § га қаралсин), унда

$$[S(x)-S(a)]'=\left(\int_a^x S^*(t)\,dt\right)=S^*(x)$$

бўлиб,

$$S'(x)=S^*(x) \qquad (14')$$

бўлади. Унда (14) ва (14′) муносабатлардан

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

бўлишини топамиз. Хосса исбот бўлди.

Бу хоссани функционал қаторнинг *хадлаб дифференциаллаш хоссаси* дейилади.

6- §. ДАРАЖАЛИ ҚАТОРЛАР

1. Даражали қатор тушунчаси. Ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (15)$$

кўринишдаги қатор *даражали қатор* дейилади, бунда a_0, a, ..., a_n,... ўзгармас ҳақиқий сонлар. Улар (15) даражали қаторнинг *коэффициентлари* дейилади.

Масалан,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

даражали қаторлардир.

Даражали қаторлар 5- §. да ўрганилган функционал қаторларнинг хусусий, яъни

$$u_n(x) = a_n x^n$$

бўлган холидир.

10-теорема (Абель теоремаси). ***Агар***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қатор $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ ***нуқтада яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*** x ***нинг***

$$|x| < |x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталарида даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Исбот. Модомики даражали қатор $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ нуқтада яқинлашувчи экан, унда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи бўлади. Қатор яқинлашишининг зарурий шартидан эса

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\{a_n x_0^n\}$ кетма-кетлик чегараланган, яъни шундай ўзгармас $M>0$ сон мавжуд бўлиб,

$$|a_n x_0^n| \leqslant M \quad (\forall n \in N)$$

тенгсизлик бажарилади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб топамиз:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leqslant M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n. \qquad (16)$$

Равшанки, $|x| < |x_0|$ тенгсизликдан $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ бўлиши келиб чиқади. Демак, ушбу

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots$$

геометрик қатор яқинлашувчи. Унда (16) муносабатдан ҳамда 2- § даги теоремадан фойдаланиб

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз. Бу эса берилган $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Бу теорема $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор $x_0 (x_0 \neq 0)$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, $y(-|x_0|,\ |x_0|)$ интервалда абсолют яқинлашувчи бўлишини ифодалайди (15- чизма).

11-теорема. *Агар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қатор $x = x_1$ ***нуқтада узоқлашувчи бўлса, у ҳолда*** x ***нинг***

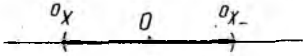
$$|x| > |x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

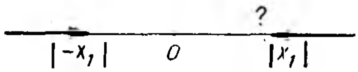
Исбот. Тескарисини фараз қилайлик. Берилган даражали қатор x_1 нуқтада узоқлашувчи бўлса ҳам $|x|>|x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бирор x^* нуқтада $(|x^*|>|x_1|)$ яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда Абель теоремасига кўра бу қатор $|x|<|x^*|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x нуқталарда яқинлашувчи бўлади. Жумладан юқоридаги x_1 нуқтада ҳам яқинлашувчи бўлиб қолади. Бу эса қаторнинг x_1 нуқтада узоқлашувчи бўлиши шартига зиддир. Демак, қаралаётган даражали қатор x нинг $|x|>|x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади.

Теорема исбот бўлди.

Бу теорема $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор x_1 нуқтада узоқлашувчи бўлса, у $(-\infty;\ -|x_1|)\cup(|x_1|,\ +\infty)$ тўпламда ҳам узоқлашувчи бўлишини ифодалайди (16- чизма).



15- чизма



16- чизма

2. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва яқинлашиш интервали. Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{15}$$

даражали қатор берилган бўлсин. Айтайлик, бу қатор $x_0 (x_0 \neq 0)$ нуқтада яқинлашувчи, x_1 нуқтада узоқлашувчи бўлсин. Унда (15) даражали қатор 10- теоремаларга мувофиқ x нинг

$$|x|<|x_0|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида яқинлашувчи,

$$|x|>|x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида узоқлашувчи бўлади. Равшанки, бунда $|x_0|<|x_1|$ бўлади. Агар (15) даражали қатор яна бирор x^* нуқтада яқинлашувчи бўлса, унда

$$|x_0| \leqslant |x^*| < |x_1| \tag{17}$$

тенгсизлик бажарилади. Берилган даражали қаторнинг яқинлашувчи бўладиган нуқталар тўпламини $\{|\bar{x}|\}$ билан белгилайлик. (17) муносабатдан $\{|\bar{x}|\}$ тўпламнинг юқоридан чегараланган бўлишини топамиз. Маълумки, бундай тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Уни r билан белгилайлик:

$$\sup\{|\bar{x}|\} = r. \tag{18}$$

Энди x нинг

$$|x| < r$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (15) даражали қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз.

(17) тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x олинганда ҳам, аниқ юқори чегара таърифига кўра шундай x^* топиладики, $|x| < |x^*| < r$ бўлиб, x^* нуқтада қатор яқинлашувчи бўлади. Унда Абель теоремасига кўра x нуқтада даражали қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш x нинг

$$|x| > r$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида (15) даражали қатор узоқлашувчи бўлиши кўрсатилади.

Натижада, шундай r $(r > 0)$ сон топиладики, (15) даражали қатор x нинг $|x| < r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида абсолют яқинлашувчи, $|x| > r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида эса узоқлашувчи бўлади.

11-таъриф. (18) *муносабат билан аниқланган* r *сони* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади.*

$(-r, r)$ интервал шу даражали қаторнинг *яқинлашиш интервали* дейилади.

(15) даражали қатор $x = \pm r$ нуқтада яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

даражали қатор (геометрик қатор)нинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали $(-1, 1)$ бўлади. Бу қатор $r = \pm 1$ нуқтада узоқлашувчи, чунки

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots,$$
$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

сонли қаторлар узоқлашувчидир.

2. Ушбу

$$1 + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = 1$, яқинлашиш интервали эса $(-1, +1)$ бўлади. Бу қатор $r = \pm 1$ нуқтада яқинлашувчи бўлади. Чунки,

$$1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$1 - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n^2} + \ldots$$

қаторлар яқинлашувчидир. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси $[-1, 1]$ сегментдан иборат.

Энди даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини топиш имконини берадиган теоремаларни келтирамиз.

12-теорема. *Бирор*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қатор берилган бўлсин. Агар бу қаторда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

лимит мавжуд бўлиб, $l \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r = \frac{1}{l}$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l, \ l \neq 0$$

бўлсин. Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = l \cdot |x|.$$

Коши аломатига кўра

$$l \cdot |x| < 1, \quad \text{яъни} \quad |x| < \frac{1}{l}$$

бўлганда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ қатор яқинлашувчи,

$$l \cdot |x| > 1, \quad \text{яъни} \quad |x| > \frac{1}{l}$$

бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади.

Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r = \frac{1}{l}$ га тенг бўлар экан. Теорема исбот бўлди.

13-теорема. *Агар*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

даражали қаторда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

лимит мавжуд бўлиб, $l\neq 0$ бўлсин, у ҳолда даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси

$$r=\frac{1}{l}$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қаторда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{a_n}\right|=l,\ l\neq 0,$$

бўлсин. Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=l\cdot|x|.$$

Даламбер аломатига кўра

$$l\cdot|x|<1, \text{ яъни } |x|<\frac{1}{l}$$

бўлганда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ қатор яқинлашувчи,

$$l\cdot|x|>1, \text{ яъни } |x|>\frac{1}{l}$$

бўлганда эса қатор узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=\frac{1}{l}$ га тенг экан. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. Юқоридаги 12 ва 13- теоремаларда $l=0$ бўлса, унда даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=\infty$ бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}x^n$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳамда яқинлашиш интервалини топинг.

Берилган даражали қатор учун

$$a_n=\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}},\ a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}:\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{3}$$

бўлади. Демак, қаралаётган даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r=3$, яқинлашиш интервали эса $(-3, 3)$ бўлади.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$$

даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ҳамда яқинлашиш интервалини топинг.

Берилган қатор учун

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 2}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

бўлади. Демак, қаралаётган қаторнинг яқинлашиш радиуси 2, яқинлашиш интервали эса $(-2, 2)$ бўлади.

3. Даражали қаторнинг хоссалари

Бирор

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (15)$$

даражали қатор берилган бўлсин.

1-хосса. *Агар (15) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси r $(r>0)$ бўлса, у ҳолда бу қатор $[-x_0, x_0]$ сегментда $(0<x_0<r)$ текис яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $x_0 \in (-r, r)$ бўлганлиги сабабли

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\cdot x_0^n = |a_0| + |a_1|\cdot x_0 + |a_2|\cdot x_0^2 + \ldots + |a_n| x_0^n + \ldots \qquad (19)$$

сонли қатор яқинлашувчи. Равшанки, $\forall x \in [-x_0, x]$ учун

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n|\cdot x_0^n \qquad (19')$$

бўлади. Унда $(19')$ муносабатдан ҳамда (19) қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан (Вейерштрасс аломатига кўра) берилган (15) даражали қаторнинг $[-x_0, x_0]$ да текис яқинлашувчи бўлишини топамиз. Хосса исбот бўлди.

2-хосса. *Агар (15)даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси, $r(r>0)$ бўлса, у ҳолда бу қаторнинг йиғиндиси $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(-r, r)$ да узлуксиз функция бўлади.*

Исбот. Берилган даражали қаторнинг яқинлашиш интервали $(-r, r)$ га тегишли бўлган ихтиёрий x_0 нуқтани олайлик. Равшанки, $|x_0|<r$ бўлади. Унда $|x_0|<c<r$ тенгсизликни қаноатлантирувчи

c сони учун $[-c, c]\subset(-r, r)$ бўлиб, 1- хоссага кўра $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ даражали қатор $[-c, c]$ да текис яқинлашувчи бўлади. Текис якинлашувчи функционал қаторларнинг 1- хоссасидан фойдаланиб, берилган қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг $[-c, c]$ да узлуксиз, жумладан x_0 нуқтада узлуксиз бўлишини топамиз. x_0 нукта $(-r, r)$ га тегишли ихтиёрий нукта бўлганлигидан қатор йиғиндиси $S(x)$ нинг $(-r, r)$ интервалда узлуксиз экани келиб чиқади. Хосса исбот бўлди.

Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг ҳадлаб интеграллаш ҳамда ҳадлаб дифференциаллаш хоссаларидан фойдаланиб даражали қаторларнинг қуйидаги хоссалари ҳам исботланади.

3- хосса. *Агар (15) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси* $r\,(r>0)$ *бўлса, бу қаторни* $[a, b]$ $([a, b]\subset(-r, r))$ сегментда ҳадлаб интеграллаш мумкин.

4- хосса. Агар (15) даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси $r\,(r>0)$ бўлса, $(-r, r)$ да бу қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин.

4. Функцияни даражали қаторга ёйиш. Маълумки, $f(x)$ функция $x=0$ нуқтанинг $(-\delta, \delta)$ атрофида $(\delta>0)$ $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ тартибли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x) \qquad (20)$$

Тейлор формуласи ўринли бўлар эди, бунда $r_n(x)$ қолдиқ ҳад.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(-\delta, \delta)$ да исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳол

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

йиғинди ҳадлари сонини ҳар қанча катта қилиб олиш имконини бериб, қуйидаги

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\ldots \qquad (20')$$

даражали қаторни ҳосил қилиш мумкин бўлади.

Одатда (20′) даражали қатор $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори дейилади.

14- теорема. $f(x)$ функция $(-r, r)$ интервалда $(r>0)$ исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлсин. Бу функциянинг Тейлор қатори

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (20')$$

яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлиши учун унинг Тейлор формуласи

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)$$

даги $r_n(x)$ қолдиқ ҳад $n\to\infty$ да нолга интилиши зарур ва етарли.

Исбот. *Зарурлиги.* (20′) қатор яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $f(x)$ га тенг бўлсин:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}_{(0)}}{(n+1)!}x^{n+1}+\ldots$$

Бу тенгликни қуйидагича

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x) \tag{21}$$

ёзиш мумкин, бунда

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(20′) каторнинг қисмий йиғиндиси, $r_n(x)$ — қолдиқ ҳад. Равшанки, $\forall x\in(-r,\ r)$ да

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Энди

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0 \quad (\forall x\in(-r,r))$$

бўлсин. Унда (21) муносабатга кўра

$$r_n(x)=f(x)-S_n(x)$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0,$$

яъни

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$$

бўлади. Бу эса (20′) қаторнинг йиғиндиси $f(x)$ га тенг эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Демак, $f(x)$ функция $(-r,\ r)$ да $(r>0)$ 14-теореманинг шартларини қаноатлантирганда

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

бўлади. Бу ҳолда $f(x)$ функция даражали қаторга ёйилган дейилади.

Энди баъзи элементар функцияларнинг Тейлор қаторларини келтирамиз.

а) $f(x)=e^x$ функциянинг Тейлор қатори. Маълумки, $f(x)=e^x$ функция ихтиёрий $[-a, a]$ да $(a>0)$ исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг Тейлор формуласи

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x)$$

бўлади. Бунда қолдиқ ҳад Лагранж кўринишида қуйидагича

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \ (0<\theta<1)$$

бўлади (қаралсин, [1], 20- боб). Ихтиёрий $x\in[-a, a]$ да

$$e^{\theta x}\leqslant e^a$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\leqslant\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^a.$$

Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)=e^x$ функциянинг Тейлор қатори

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

бўлади.

б) $f(x)=\sin x$ функциянинг Тейлор қатори. $f(x)=\sin x$ функция ихтиёрий $[-a, a]$ да $(a>0)$ исталган тартибдаги ҳосилага эга бўлиб, унинг Тейлор формуласи

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+r_{2n}(x)$$

бўлади. Бу формуладаги қолдиқ ҳад $r_{2n}(x)$ нинг Лагранж кўринишидан фойдаланиб

$$|r_{2n}(x)|\leqslant\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

бўлишини топамиз. Бундан эса

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n}(x)=0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x)=\sin x$ функциянинг Тейлор қатори

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

бўлади.

в) $f(x)=\cos x$ функциянинг Тейлор қатори. б) ҳолдаги каби $f(x)=\cos x$ функциянинг Тейлор қатори

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

бўлиши келиб чиқади.

Функцияларни даражали қаторларга ёйишнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд. Қуйида бундай усуллардан бирини келтирамиз. Айтайлик, $f(x)=\ln(1+x)$ функцияни даражали қаторга ёйиш лозим бўлсин. Бунинг учун, аввало, ушбу

$$1-x+x^2-x^3+...$$

қаторни қараймиз. Бу геометрик қатор бўлиб, $(-1, 1)$ да текис яқинлашувчи. Унинг йиғиндиси $\frac{1}{1+x}$ га тенг ($q=-x$, қаралсин, [1], 20- боб). Демак,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...\ (-1<x<1)$$

Кейинги тенгликни $[0, x]$ оралиқ бўйича ҳадлаб интеграллаб

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\int_0^x dx-\int_0^x xdx+\int_0^x x^2dx-\int_0^x x^3dx+...,$$

яъни

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+... \qquad (22)$$

бўлишини топамиз. Равшанки, $x=1$ бўлганда (22) тенгликнинг ўнг томонидаги қатор

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$$

кўринишдаги сонли қатор бўлиб, у Лейбниц теоремасига кўра яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$$

қатор $(-1, 1]$ да яқинлашувчи бўлар экан.

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

интегрални тақрибий ҳисобланг.

$F(x)=e^x$ функциянинг даражали қаторга ёйилмаси

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

дан фойдаланиб

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

бўлишини топамиз.

Равшанки, ушбу

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}$$

тақрибий формуладан

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right) dx$$

келиб чиқади. Бу тақрибий тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^9}{4!\cdot 9} - \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} + \frac{x^{13}}{6!\cdot 13}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0{,}7469 .$$

Демак,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0{,}7468 .$$

5- БОБ

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР, УЛАРНИНГ ЛИМИТИ ВА УЗЛУКСИЗЛИГИ

Биз «Олий математика асослари»нинг 1- томида $y=f(x)$ функция тушунчаси билан танишдик ва уни батафсил ўргандик. Бунда функция битта эркли ўзгарувчи x гагина боғлиқ эди. Шунинг учун уни бир ўзгарувчили (бир аргументли) функция дейилган эди.

Табиатда, техникада учрайдиган кўпгина миқдорлар бир неча эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади. Масалан, томонлари x ва y бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$S=x\cdot y$$

бўлиб, у икки x ва y ўзгарувчига боғлиқ.

Ер юзининг ҳар бир нуқтасидаги ҳаво ҳарорати учта ўзгарувчи — шу нуқтани аниқловчи параллел, меридиан ҳамда вақтга боғлиқ бўлади.

Шунга ўхшаш мисоллар жуда кўплаб учрайди.

Бир неча ўзгарувчига боғлиқ бўлган миқдорларни ўрганиш кўп ўзгарувчили функция тушунчасини киритилишини ҳамда уни ўрганишни тақозо этади.

Соддалик учун икки ўзгарувчили функцияларни қараймиз. Аввало R^2 фазо тушунчаси билан танишамиз.

1-§. R^2 ФАЗО ВА УНДАГИ БАЪЗИ БИР ТЎПЛАМЛАР

Икки x ва y ўзгарувчи миқдорлар ($x\in R$, $y\in R$) берилган бўлиб, уларнинг қийматларидан (x, y) жуфтликларни ҳосил қиламиз. Бундай жуфтликлардан ташкил топган

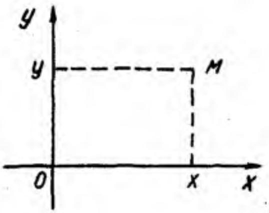
$$\{(x, y):\ x\in R,\ y\in R\} \tag{1}$$

тўпламни қараймиз. (1) тўпламнинг элементи нуқта дейилади ва уни битта ҳарф билан; масалан, M ҳарфи билан белгиланади:

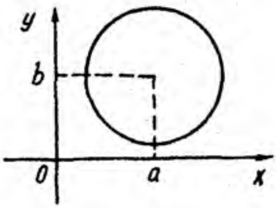
$$M=(x, y).$$

Текисликда Декарт координаталар системасини олиб, абсцисса ўқида x ўзгарувчининг қийматларини, ордината ўқида эса y ўзгарувчининг қийматларини жойлаштирамиз. У ҳолда (x, y) жуфтлик, текисликда координаталари x ва y бўлган M нуқтани ифодалайди (17- чизма).

Ушбу $\{(x, y):x\in R, y\in R\}$ тўпламда ихтиёрий икки (x_1, y_1) ҳамда (x_2, y_2) нуқталарни олайлик. Равшанки, бу нуқталар текисликда



17- чизма



18- чизма

координаталари x_1 ва y_1 бўлган M_1 нуқтани, координаталари x_2, y_2 бўлган M_2 нуқтани ифодалайди. Аналитик геометрияда келтирилган формулага кўра бу нуқталар орасидаги масофа

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

бўлади. Бу масофа қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Ҳар доим $\rho(M_1, M_2) \geqslant 0$ бўлиб, $\rho(M_1, M_2)=0$ да $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ ва аксинча $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ бўлганда $\rho(M_1, M_2)=0$ бўлади.

2°. $\rho(M_1, M_2)=\rho(M_2, M_1)$.

3°. $\rho(M_1, M_3) \leqslant \rho(M_1, M_2)+\rho(M_2, M_3)$

(бунда M_3 — координаталари x_3 ҳамда y_3 бўлган нуқта).

Одатда

$$\{(x, y): x \in R, y \in R\}$$

тўплам R^2 фазо (*икки ўзгарувчили Евклид фазоси*) дейилади.

Юқорида айтилганлардан R^2 фазонинг геометрик тасвири текисликдан иборат бўлишини кўрамиз.

Энди R^2 фазодаги (текисликдаги) баъзи бир тўпламларга мисоллар келтирамиз.

1. $(a, b) \in R^2$ нуқта ҳамда бирор ўзгармас мусбат r сон берилган бўлсин. Ушбу

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2\} \quad (2)$$
$$(\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2\})$$

тўплам R^2 фазода *ёпиқ доира* (*очиқ доира*) дейилади. Бунда (a, b) нуқта *доира маркази*, r эса *доира радиуси* дейилади (18- чизма).

Қуйидаги

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$$

тўплам *айлана* дейилади. У (2) доиранинг чегараси бўлади.

2. Айтайлик, a, b, c, d — ўзгармас ҳақиқий сонлар бўлиб, $a<b$; $c<d$ бўлсин. Ушбу

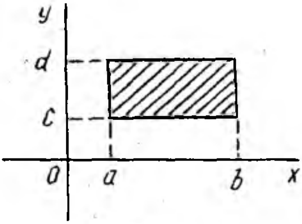
$$\{(x, y) \in R^2: a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$
$$(\{(x, y) \in R^2: a<x<b, c<y<d\})$$

тўплам R^2 фазода ***ёпиқ тўғри тўртбурчак (очиқ тўғри тўртбурчак)*** дейилади (19- чизма).

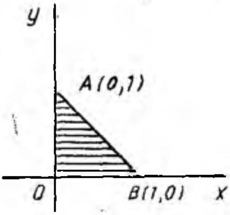
3. Ушбу

$$\{(x, y) \in R^2: x \geqslant y,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant h\}$$

тўплам R^2 фазода симплекс дейилади, бунда h — мусбат сон. Симплекс (simplex) лотинча сўз бўлиб, у содда деган маънони англатади (20- чизма).



19- чизма



20- чизма

2-§. R^2 ФАЗОДА ОЧИҚ ҲАМДА ЁПИҚ ТЎПЛАМЛАР

R^2 фазода бирор $A=(a, b)$ нуқта ҳамда ε мусбат сонни олайлик.

1-таъриф. Ушбу

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}$$

очиқ доира A нуқтанинг атрофи (ε-атрофи) дейилади ва уни $U(A, \varepsilon)$ каби белгиланади:

$$U(A, \varepsilon)=\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2\}.$$

R^2 фазода бирор G тўплам берилган бўлсин.

2-таъриф. *Агар G тўпламнинг $A=(a, b)$ нуқтаси ўзининг бирор $U(A, \varepsilon)$ атрофи билан бирга шу тўпламга тегишли, яъни*

$$A=(a, b) \in G \Rightarrow \exists \varepsilon>0,\ U(A, \varepsilon) \subset G$$

бўлса, у ҳолда A нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.

3-таъриф. *Фақат ички нуқталардан ташкил топган тўплам очиқ тўплам дейилади.* Масалан, R^2 фазода очиқ доира очиқ тўплам бўлади.

4-таъриф. *Агар $A=(a, b)$ нуқтанинг исталган $U(A, \varepsilon)$ атрофида ($\forall \varepsilon>0$) G тўпламнинг A нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, A нуқта G тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.*

Равшанки, A нуқта G тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, A нуқтанинг ихтиёрий атрофида G тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади.

R^2 фазодаги қуйидаги

$$\{(x, y) \in R^2: (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2\}$$

ёпиқ доиранинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

R^2 фазодаги

$$\{(x, y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\} \tag{3}$$

очиқ доира

$$\{(x, y)\in R^2:\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$$

тўпламнинг ҳар бир нуқтаси лимит нуқтаси бўлади.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, тўпламнинг лимит нуқтаси шу тўпламга тегишли бўлиши ҳам мумкин, тегишли бўлмасдан қолиши ҳам мумкин экан.

5-таъриф. *Агар F тўпламнинг ($F\subset R^2$) барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам дейилади.*

Масалан, R^2 фазода ёпиқ доира ёпиқ тўплам бўлади. R^2 фазода бирор M тўпламни олайлик. Унда

$$R^2\setminus M$$

тўплам M ни R^2 га тўлдирувчи тўплам дейилади.

Агар $A=(a, b)\in R^2$ нуқтанинг ихтиёрий $U(A, \varepsilon)$ атрофида $(\forall\varepsilon>0)$ M тўпламнинг ҳам, $R^2\setminus M$ тўпламнинг ҳам нуқталари бўлса, A нуқта M тўпламнинг *чегаравий нуқтаси* дейилади. M тўпламнинг барча чегаравий нуқталари унинг чегарасини ташкил этади. Одатда M тўпламнинг чегараси $\partial(M)$ каби ёзилади.

6-таъриф. *Агар R^2 фазода шундай*

$$U_0=\{(x, y)\in R^2:\ x^2+y^2<r^2\}$$

очиқ доира топилсаки,

$$M\subset U_0$$

бўлса, M чегараланган тўплам дейилади.

Чегараланган ёпиқ тўплам *компакт тўплам* (ёки *компакт*) дейилади.

R^2 фазонинг (x, y):

$$x=\alpha_1 t+\beta_1, \qquad (c_1\leqslant t\leqslant c_2)$$
$$y=\alpha_2 t+\beta_2$$

(бунда α_1, β_1, α_2, β_2 — ўзгармас сонлар) нуқталаридан ташкил топган

$$\{(x, y)\in R^2:\ x=\alpha_1 t+\beta_1,\ y=\alpha_2 t+\beta_2\}$$

тўплам равшанки, тўғри чизиқ ташкил қилади. R^2 фазода ихтиёрий (a_1, b_1) ва (a_2, b_2) нуқталарни олайлик. Унда ушбу

$$\{(x, y)\in R^2:\ (x=a_1+t(b_1-a_1),\ y=a_2+t(b_2-a_2))\}$$
$$0\leqslant t\leqslant 1$$

тўплам (a_1, b_1) ҳамда (a_2, b_2) нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси бўлади. Чекли сондаги тўғри чизиқ кесмаларини бирлаштиришдан ташкил топган чизиқ *синиқ чизиқ* дейилади.

7-таъриф. *R^2 фазода M тўпламни қарайлик. Агар M тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини шу тўпламга тегишли бўлган синиқ чизиқ билан бирлаштириш мумкин бўлса, M боғламли тўплам дейилади.*

8-таъриф. *R^2 фазода очиқ ва боғламли бўлган тўплам соҳа деб аталади.*

Масалан, R^2 фазодаги очиқ доира соҳа бўлади.

3-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР

Фараз қилайлик, R^2 фазода бирор M тўплам берилган бўлсин.

9-таъриф. *Агар M тўпламдаги ҳар бир (x, y)* нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий u сони $(u \in R)$ мос қўйилган бўлса, M тўпламда икки ўзгарувчили функция берилган (аниқланган) деб аталади ва уни

$$u = f(x, y)$$

каби белгиланади. Бунда M — функциянинг аниқланиш тўплами, x ва y эркли ўзгарувчилар функция аргументлари, u эса x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси дейилади.

Мисоллар. 1. R^2 фазонинг ҳар бир (x, y) нуқтасига $x^2 + y^2$ сонни мос қўйиб, ушбу

$$u = x^2 + y^2$$

функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами R^2 бўлади.

2. R^2 фазода $M = \{(x, y) \in R^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ тўпламни олиб, унинг ҳар бир (x, y) нуқтасига $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ сонни мос қўйиш натижасида

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функция ҳосил бўлади. Бу функциянинг аниқланиш тўплами маркази $(0, 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган ёпиқ доира $M = \{(x, y) \in R^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ дан иборат.

Айтайлик, $u = f(x, y)$ функция M тўпламда $(M \subset R)$ берилган бўлсин. (x, y) нуқта M тўпламда ўзгарганда функция қийматлари ҳақиқий сонлар тўпламида ўзгариб, ушбу

$$\{f(x, y) \colon (x, y) \in M\}$$

ҳақиқий сонлар тўпламини ҳосил қилади. Бу *функциянинг қийматлари тўплами* ёки *функциянинг ўзгариш соҳаси (тўплами)* дейилади.

Масалан, $u=x^2+y^2$ функциянинг қийматлари тўплами $[0, +\infty)$ ярим интервалдан, $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функциянинг қийматлари тўплами эса $[0, 1]$ сегментдан иборат бўлади.

Одатда ушбу

$$u=P_n(x, y)=C_{00}+C_{10}x+C_{01}y+C_{20}x^2+C_{11}xy+$$
$$+C_{02}y^2+..+C_{n0}x^n+...+C_{0n}y^n$$

функция *n-тартибли кўпҳад* дейилади, бунда c_{00}, $c_{10},...,c_{0n}$ — ўзгармас ҳақиқий сонлар. Бу функциянинг аниқланиш тўплами R^2 фазодан (бутун текисликдан) иборат.

Икки $P_n(x, y)$ ҳамда $Q_m(x, y)$ кўпҳадлар нисбатидан ташкил топган

$$U=\frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$$

функция *рационал функция* дейилади. Унинг аниқланиш тўплами

$$M=\{(x, y)\in R^2:\ Q_m\ (x, y)\neq 0\}$$

бўлади.

Маълумки, бир ўзгарувчили функциянинг геометрик тасвири (графиги) текисликда, умуман айтганда эгри чизиқдан иборат бўлади.

Бир ўзгарувчили функциялар каби икки ўзгарувчили функцияларни *ҳам геометрик тасвирлаш мумкин. Икки* ўзгарувчили функцияларнинг геометрик тасвирлари (графиклари) умуман айтганда сиртлар бўлади.

Айтайлик, $u=f(x, y)$ функция M тўпламда $(M\subset R^2)$ берилган бўлсин. M тўпламдан (x_0, y_0) нуқтани олиб, функциянинг шу нуқтадаги қиймати $u_0=f(x_0, y_0)$ ни топамиз. Натижада координаталари x_0, y_0, u_0 бўлган (x_0, y_0, u_0) нуқтага эга бўламиз. Бу эса фазода нуқтани тасвирлайди (21- чизма).

Фазода (x, y, u) нуқталарнинг ушбу

$$\{(x, y, u):\ (x, y)\in M,\ u=f(x, y)\}$$

тўплами $u=f(x, y)$ функциянинг *графиги* дейилади.

Масалан, $u=x^2+y^2$ функциянинг графиги 22- чизмада тасвирланган параболоидни ифодалайди.

Мазкур параграфнинг пировардида R^2 фазо нуқталари кетма-кетлиги тушунчасини келтирамиз.

Фараз қилайлик, ҳар бир натурал n сонга R^2 фазонинг битта (x_n, y_n) нуқтани мос қўювчи қоида берилган бўлсин:

$$n\to(x_n, y_n).$$

Бу мослик R^2 фазо нуқталаридан иборат ушбу

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)\ ,...,\ (x_n, y_n),...$$

кетма-кетликни ҳосил қилади. Уни $\{(x_n, y_n)\}$ каби белгиланади. Равшанки, $\{(x_n, y_n)\}$ нуқталар кетма-кетлигининг координаталаридан ташкил топган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар сонлар кетма-кетликлари бўлади.

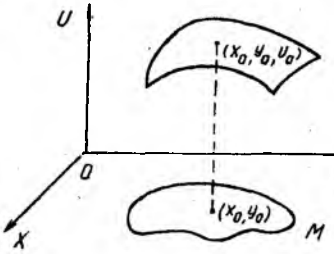
Масалан,

$$(1,1),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots,$$

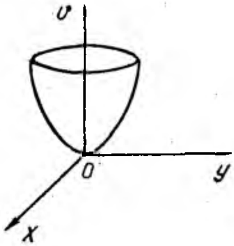
$$(1,0),\ \left(\frac{1}{2}, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{n}, 0\right), \dots,$$

$$(1,1),\ (-1, -1), \dots, \left((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1}\right),$$

кетма-кетликлар R^2 фазо нуқталаридан иборат кетма-кетликлардир.



21- чизма



22- чизма

4-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ

1°. Кетма-кетлик лимити. Аввало R^2 фазода кетма-кетлик лимити тушунчаси билан танишамиз.

Айтайлик, R^2 фазода бирор

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

кетма-кетлик ҳамда (a, b) нуқта $((a, b) \in R^2)$ берилган бўлсин.

10-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон олинганда ҳам шундай натурал* n_0 *сон топилсаки,* $\forall n > n_0$ *учун*

$$\rho\left((x_n, y_n), (a, b)\right) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, (a, b) *нуқта* $\{(x_n, y_n)\}$ *кетма-кетликнинг лимити дейилади ва*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (a, b)$$

каби белгиланади.

Бу ҳолда $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик (a, b) нуқтага интилади деб ҳам айтилади.

Масалан, $(0,0)$ нуқта $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ кетма-кетликнинг лимити бўлади:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0).$$

1-теорема. ***Фараз қилайлик, R^2 фазода $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик (a, b) лимитга эга бўлсин:***

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

У ҳолда бу $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик координаталаридан ташкил топган $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, улар мос равишда (a, b) нуқтанинг координаталарига тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Исбот. Шартга кўра

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Кетма-кетлик лимити таърифига биноан, $\forall\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, $\forall n > n_0$ учун

$$\rho\ ((x_n, y_n), (a, b)) < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки,

$$\rho\ ((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

Унда

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon$$

бўлиб, кейинги тенгсизликдан

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$
$$|y_n - b| < \varepsilon$$

келиб чиқади. Сонлар кетма-кетлигининг лимити таърифидан фойдаланиб,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

бўлишини топамиз. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. ***Фараз қилайлик, R^2 фазода $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик координаталаридан иборат $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлари лимитга эга бўлиб, улар (a, b) нуқтанинг мос координаталарига тенг бўлсин:***

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

У ҳолда $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлиб, у (a, b) га тенг бўлади:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (a, b).$$

Исбот. Теореманинг шартига кўра

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b\,.$$

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига биноан, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ сонга кўра шундай натурал n_0' сон топиладики, $\forall n>n_0'$ учун

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \tag{4}$$

тенгсизлик бажарилади.

Шунингдек, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ сонга кўра шундай натурал n_0'' сон топиладики, $\forall n>n_0''$ учун

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \tag{4'}$$

тенгсизлик бажарилади.

Айтайлик, $\max\{n_0', n_0''\} = n_0$ бўлсин. У ҳолда $\forall n>n_0$ учун бир вақтда (4), (4′) тенгсизликлар бажарилади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\rho((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} <$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Бу эса

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a, b)$$

эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

Келтирилган теоремалардан ушбу

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

муносабат келиб чиқади.

Демак, R^2 фазода кетма-кетликни ўрганиш сонлар кетма-кетлигининг лимитини ўрганишга келар экан.

Айтайлик, R^2 фазода M тўплам берилган бўлиб, (x_0, y_0) нуқта $((x_0, y_0)\in R^2)$ шу M нинг лимит нуқтаси бўлсин. Унда M тўплам нуқталаридан тузилган ҳамда нуқтага интилувчи $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик $((x_n, y_n)\in M,\ n=1,2,\ldots)$ мавжуд бўлади. Бундай кетма-кетлик чексиз кўп бўлади. Бу ҳолда 1-теоремага кўра $\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги x_0 га, $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетлиги эса y_0 га интилади.

2°. Функция лимити. M тўпламда $u=f(x, y)$ функция берилган бўлсин.

11-таъриф. *Агар M тўплам нуқталаридан тузилган, (x_0, y_0) нуқтага интилувчи ҳар қандай $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик $((x_n, y_n) \neq \neq (x_0, y_0),\ n=1,2,\ldots)$ олинганда ҳам мос $\{f(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим ягона l га интилса, у ҳолда l $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити дейилади ва уни*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)=l \quad \text{ёки} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y)=l$$

каби белгиланади.

Функция лимитига куйидагича ҳам таъриф бериш мумкин:

12-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $0<\rho\left((x, y), (x_0, y_0)\right)<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y)\in M$* нуқталарда

$$|f(x, y)-l|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, l сон $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити дейилади.

Функция лимитининг бу таърифлари ўзаро эквивалент таърифлардир.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y)=x^2+xy+y^2$$

функциянинг $(1, 1)$ нуқтадаги лимитини топинг.

R^2 нинг нуқталаридан тузилган ва $(1, 1)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{(x_n, y_n)\}$кетма-кетликни $((x_n, y_n)\neq(1, 1),\ n=1,2,\ldots)$ оламиз.

Унда

$$\{f(x_n, y_n)\}=\{x_n^2+x_n\cdot y_n+y_n^2\}$$

бўлиб,

$$\lim_{(x_n, y_n)\to(1,1)} f(x_n, y_n)=\lim_{\substack{x_n\to 1 \\ y_n\to 1}}(x_n^2+x_n\cdot y_n+y_n^2)=3$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ y\to 1}}(x^2+xy+y^2)=3.$$

2. Ушбу

$$f(x, y)=\frac{x-y}{x+y}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $M=\{(x, y)\in R^2\colon\ x+y\neq 0\}$ тўпламда аниқланган. Берилган функция $(0,0)$ нуқтада лимитга эга бўлмайди, чунки $(0,0)$ нуқтага интилувчи

$$\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}, \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$$

кетма-кетликлар учун

$$\left\{f\left(\frac{1}{n}, 0\right)\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}+0}\right\}=\{1\},$$

$$\left\{f\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}=\left\{\frac{-\frac{1}{n}+0}{0+\frac{1}{n}}\right\}=\{-1\}$$

бўлиб, уларнинг лимити 1 ва —1, яъни бир-бирига тенг эмас.

3°. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари.

Фараз қилайлик, $\alpha(x, y)$ функция M тўпламда аниқланган бўлиб, (x_0, y_0) эса M нинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \alpha(x, y)=0$$

бўлса, у ҳолда $\alpha(x, y)$ функция $(x, y)\to(x_0, y_0)$ да чексиз кичик функция дейилади.

3-теорема. ***M тўпламда берилган $f(x, y)$ функциянинг $(x, y)\to(x_0, y_0)$ да чекли l лимитга эга бўлиши учун***

$$\alpha(x, y)=f(x, y)-l$$

нинг чексиз кичик функция бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи функция лимити таърифидан бевосита келиб чиқади.

Биз [1] нинг 18-бобида чекли лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссаларини келтирган эдик. Чекли лимитга эга бўлган икки ўзгарувчили функциялар ҳам мос хоссаларга эга бўлади. Қуйида лимитга эга бўлган икки ўзгарувчили функциянинг хоссаларини келтирамиз.

$f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда $(M\subset R^2)$ берилган бўлиб, $(x_0, y_0)\in R^2$ эса M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1°. Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада чекли лимитга эга бўлса, шу (x_0, y_0) нуқтанинг етарли кичик атрофида чегараланган бўлади.

2°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада чекли лимитга эга бўлиб, шу нуқтанинг $U((x_0, y_0), \delta)$ атрофидаги барча нуқталарида

$$f(x, y)\leqslant g(x, y)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)\leqslant \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)$$

бўлади.

3°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y) \pm g(x, y)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x, y) \pm g(x, y)] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) \pm \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)$$

бўлади.

4^0. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада лимитга эга бўлса, у ҳолда $f(x, y) \cdot g(x, y)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) \cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y).$$

бўлади.

5°. Агар $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада лимитга эга бўлиб, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y) \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x, y)}$$

бўлади.

4^0. **Каррали ва такрорий лимитларни солиштириш.** Юқорида келтирилган икки ўзгарувчили функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги лимити унинг *каррали лимити* дейилади.

Икки ўзгарувчили функцияга нисбатан каррали лимитдан бошқача лимит тушунчаси ҳам киритилади.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция R^2 фазонинг

$$M = \{(x, y) \in R^2 : |x - x_0| < a, \ |y - y_0| < b\}$$

тўпламида берилган бўлсин.

$f(x, y)$ да y ўзгарувчини тайинласак (ҳозирча ўзгармас ҳисобласак), натижада у фақат x гагина боғлиқ бўлган функцияга айланади.

$x \to x_0$ да бу функциянинг лимити $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ мавжуд бўлсин дейлик. Равшанки, бу лимит тайинланган y нинг қийматига боғлиқ, бинобарин y нинг функцияси бўлади:

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

Энди $y \to y_0$ да $\varphi(y)$ функциянинг лимитини қараймиз. Фараз қилайлик, $y \to y_0$ да $\varphi(y)$ функциянинг лимити

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y)$$

мавжуд бўлсин. Натижада $f(x, y)$ функциянинг аввал $x \to x_0$ да, сўнг $y \to y_0$ да лимити

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$$

га эга бўламиз. Бу лимит $f(x, y)$ функциянинг *такрорий лимити* дейилади.

Юқорида келтирилган мулоҳаза юритиш билан $f(x, y)$ функциянинг аввал $y \to y_0$ да, сўнг $x \to x_0$ даги

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

такрорий лимитига келамиз.

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада битта

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

каррали лимитга, иккита

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) ,$$

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

такрорий лимитга эга бўлиши мумкин экан.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x-y}{x+3y}, & \text{агар } x+3y \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x+3y = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0, 0) нуқтада такрорий лимитларини топинг.

Бу функциянинг такрорий лимитларини топамиз:

$$\lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{2x-y}{x+3y} = \frac{-y}{3y} = \frac{-1}{3},$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} \frac{2x-y}{x+3y} = \frac{2x}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} 2 = 2.$$

Демак, берилган функциянинг такрорий лимитлари

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = -\frac{1}{3}, \quad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 2$$

бўлади.

2. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \cdot \sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг (0, 0) нуқтадаги каррали ва такрорий лимитларини топинг.

Равшанки,

$$\lim_{y \to 0} f(x, y) = x, \ \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$$

бўлади. Бироқ $x \to 0$ да $\sin\frac{1}{x}$ функция лимитга эга бўлмаганлиги сабабли берилган функциянинг

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y)$$

такрорий лимити мавжуд эмас.

Энди ушбу

$$|f(x, y) - 0|$$

айирмани баҳолаймиз:

$$|f(x, y) - 0| = \left| x + y \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \leqslant |x| + |y|, \ x \neq 0.$$

Бу тенгсизликдан эса $x \to 0, y \to 0$ да $f(x, y) \to 0$ бўлишини кўрамиз.

Шундай қилиб, берилган функциянинг (0, 0) нуқтада битта такрорий ҳамда каррали лимити мавжуд бўлиб, улар нолга тенг бўлар экан.

Энди $f(x, y)$ функциянинг такрорий ҳамда каррали лимитлари орасидаги муносабатни ифодаловчи теоремаларни келтирамиз.

4-теорема. ***Агар $(x, y) \to (x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг каррали лимити***

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$$

мавжуд бўлиб, ҳар бир тайинланган x да

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = l$$

бўлади.

Исбот. Шартга кўра $(x, y)\to(x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг каррали лимити

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=l$$

мавжуд. Лимит таърифига кўра, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $(x, y)\in M$ нуқталари учун

$$|f(x, y)-l|<\varepsilon \tag{5}$$

тенгсизлик бажарилади.

Энди

$$\lim_{y\to y_0} f(x, y)=\varphi(x)$$

лимитнинг мавжудлигини эътиборга олиб, (5) тенгсизликда $y\to y_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$|\varphi(x)-l|\leqslant\varepsilon.$$

Бу эса

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=l$$

эканини билдиради. Демак,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y)=l.$$

Теорема исбот бўлди.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

5-теорема. ***Агар*** $(x, y)\to(x_0, y_0)$ ***да*** $f(x, y)$ ***функциянинг каррали лимити***

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=l$$

мавжуд бўлиб, ҳар бир тайинланган y ***да***

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y)=\Psi(y)$$

лимит мавжуд бўлса, y ***ҳолда ушбу***

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)$$

такрорий лимит мавжуд ва

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y)=l$$

бўлади.

Энди $u=f(x, y)$ функциянинг лимити (каррали лимити) мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Фараз қилайлик, $u=f(x, y)$ функция M тўпламда ($M\subset R^2$) берилган бўлиб, (x_0, y_0) эса M нинг лимит нуқтаси бўлсин.

6-теорема (Коши теоремаси). ***$f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун, $\forall\varepsilon>0$ сон берилганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилиб, $0<\rho((\bar{x}, \bar{y}), (x_0, y_0))<\delta$ $0<\rho((x, y), (x_0, y_0))<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $(x, y)\in M$, $(x, y)\in M$ ларда***

$$|f(\bar{x}, \bar{y})-f(x, y)|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

5-§. ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

$u=f(x, y)$ функция M тўпламда ($M\subset R^2$) берилган. (x_0, y_0) нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлиб, тўпламга тегишли бўлсин.

13-таъриф. *Агар $(x, y)\to(x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлиб,*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0) \tag{6}$$

бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз деб аталади.

Масалан, $f(x, y)=x^2+y^2$ функция ихтиёрий $(x_0, y_0)\in R^2$ нуқтада узлуксиздир, чунки

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (x^2+y^2)=x_0^2+y_0^2=f(x_0, y_0).$$

Энди M тўпламдаги (x_0, y_0) нуқтанинг координаталарига мос равишда Δx ва Δy орттирмалар берамизки, $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in M$ бўлсин. Агар

$$x_0+\Delta x=x,$$
$$y_0+\Delta y=y$$

дейилса, у ҳолда $f(x, y)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ бўлади.

Ушбу

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

айирма $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги тўлиқ орттирмаси дейилади.

$$x\to x_0 \text{ да } \Delta x\to 0 \text{ ва } y\to y_0 \text{ да } \Delta y\to 0$$

бўлишини эътиборга олиб, (6) тенгликдан топамиз:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)\Rightarrow \lim_{\substack{x-x_0\to 0\\ y-y_0\to 0}} [f(x, y)-f(x_0, y_0)]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x\to x_0\\ \Delta y\to y_0}} \Delta f(x_0, y_0)=0.$$

Бу эса

$$\lim_{\substack{\Delta x\to x_0\\ \Delta y\to y_0}} \Delta f(x_0, y_0)=0$$

бўлганда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз дейилади деб қараш мумкинлигини кўрсатади.

Функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги узлуксизлигини қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин.

14-таъриф. *Агар M тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва (x_0, y_0) нуқтага интилувчи ҳар қандай $\{(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик $((x_n, y_n)\in M$, $n=1,2,3,\ldots)$ олинганда ҳам, мос $\{f(x_n, y_n)\}$ кетма-кетлик ҳар доим $f(x_0, y_0)$ га интилса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз дейилади.*

15-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $\rho\ ((x, y), (x_0, y_0))<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y)\in M$ нуқталарда*

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз дейилади.

16-таъриф. *Агар $f(x, y)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция M тўпламда узлуксиз дейилади.*

Биз юқорида $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксизлиги таърифларини келтирдик. Бу таърифлар ўзаро эквивалент таърифлар.

17-таъриф. *Агар $(x, y)\to(x_0, y_0)$ да $f(x, y)$ функциянинг лимити мавжуд бўлмаса, ёки*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=\infty$$

бўлса, ёки

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=l\neq f(x_0, y_0)$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узилишга эга дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y}, & \text{агар } x+y\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x+y=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция $(0, 0)$ нуқтада узилишга эга бўлади, чунки $(x, y)\to(0, 0)$ да бу функциянинг лимити мавжуд эмас.

2. Ушбу

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{агар } (x, y)\neq(0, 0) \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } (x, y)=(0, 0) \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция (0, 0) нуқтада узилишга эга бўлади, чунки

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

бўлиб, у $f(x, y)$ функциянинг (0, 0) нуқтасидаги қийматига ($f(0, 0)=0$) тенг эмас.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар M тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$f(x, y) \pm g(x, y),\ f(x, y)\cdot g(x, y),\ \frac{f(x, y)}{g(x, y)}\quad (g(x, y) \neq 0)$$

функциялар ҳам (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлади.

Бу тасдиқлардан бирини, масалан икки функция йиғиндисининг узлуксизлиги исботини келтирамиз.

$f(x, y)$ ва $g(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлганлигидан таърифга биноан $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, $\rho((x, y), (x_0, y_0))<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $(x, y)\in M$ нуқталарда

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|g(x, y)-g(x_0, y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу тенгсизликлардан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned}&|[f(x, y)+g(x, y)]-[f(x_0, y_0)+g(x_0, y_0)]| =\\ &=|[f(x, y)-f(x_0, y_0)]+[g(x, y)-g(x_0, y_0)]| \leqslant\\ &\leqslant |f(x, y)-f(x_0, y_0)|+|g(x, y)-g(x_0, y_0)|<\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$|[f(x, y)+g(x, y)]-[f(x_0, y_0)+g(x_0, y_0)]|<\varepsilon$$

тенгсизликка келамиз.

Бу эса $f(x, y)+g(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлишини билдиради.

УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Узлуксиз функциялар қатор хоссаларга эга. Одатда улар теоремалар орқали ифодаланадилар.

1°. **Больцано-Коши теоремаси.** ***Агар $f(x, y)$ функция D соҳада ($D\subset R^2$) аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу соҳадаги***

иккита турли (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) нуқталарда ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда D да шундай (ξ, η) нуқта топиладики,

$$f(\xi, \eta)=0$$

бўлади.

Исбот. Аниқлик учун $f(x, y)$ функциянинг (x_1, y_1) нуқтадаги қиймати $f(x_1, y_1)$ манфий ишорали: $f(x_1, y_1)<0$, (x_2, y_2) нуқтадаги қиймати $f(x_2, y_2)$ мусбат ишорали: $f(x_2, y_2)>0$ деб оламиз.

D соҳа, яъни боғламли очиқ тўплам бўлганлигидан (x_1, y_1), (x_2, y_2) нуқталарни бирлаштирувчи ҳамда D га тегишли бўлган P синиқ чизиқ мавжуд бўлади.

Бу P синиқ чизиқнинг учлари (c_1, d_1), (c_2, d_2) ,..., (c_n, d_n) бўлсин. Ушбу икки ҳолдан биттаси албатта бажарилади:

1) бирорта (c_i, d_i) нуқтада $f(c_i, d_i)=0$ бўлади (бу ҳолда теорема исбот бўлади),

2) барча (c_i, d_i) $(i=1,2,3,...,n)$ нуқталар учун $f(c_i, d_i)\neq 0$ бўлиб, бунда синиқ чизиқнинг шундай (c_j, d_j), (c_{j+1}, d_{j+1}) учлари мавжуд бўладики,

$$f(c_j, d_j)<0,\ f(c_{j+1}, d_{j+1})>0$$

бўлади.

Энди (c_j, d_j) ва (c_{j+1}, d_{j+1}) нуқталарни бирлаштирувчи синиқ чизиқ кесмасини қараймиз. Бу кесманинг параметрик тенгламаси қуйидагича

$$x=c_j+t\ (c_{j+1}-c_j), \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

$$y=d_j+t\ (d_{j+1}-d_j)$$

бўлади.

Берилган $f(x, y)$ функцияни шу кесмада қарасак, унда $[0,1]$ ораликда берилган ушбу

$$\varphi(t)=f(c_j+t\ (c_{j+1}-c_j),\ d_j+t\ (d_{j+1}-d_j)) \tag{7}$$

функция ҳосил бўлади. Бу функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\varphi(0)=f(c_j, d_j)<0,$$
$$\varphi(1)=f(c_{j+1}, d_{j+1})>0$$

бўлади. Унда [1] нинг 19-бобида келтирилган теоремага кўра, шундай t_0 нуқта $(t_0\in[0, 1])$ топиладики,

$$\varphi(t_0)=0$$

бўлади. (7) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$f(c_j+t_0\ (c_{j+1}-c_j),\ d_j+t_0\ (d_{j+1}-d_j))=0.$$

Энди

$$\xi=c_j+t_0\ (c_{j+1}-c_j),\ \eta=d_j+t_0\ (d_{j+1}-d_j)$$

деб оламиз. Равшанки, $(\xi, \eta)\in D$,

$$f(\xi, \eta)=0.$$

Бу эса теоремани исботлайди. Узлуксиз функция кейинги хоссаларини ифодаловчи теоремаларни исботсиз келтирамиз.

2°. Вейерштрасснинг биринчи теоремаси. Агар $f(x, y)$ функция M компакт тўпламда ($M \subset R^2$) аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция M да чегараланган бўлади.

3°. Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси. Агар $f(x, y)$ функция M компакт тўпламда ($M \subset R^2$) аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция M да ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни M тўпламда шундай (x_0, y_0), (x_1, y_1) нуқталар топиладики,

$$f(x_0, y_0) = \sup \{f(x, y)\},$$

$$f(x_1, y_1) = \inf \{f(x, y)\}$$

бўлади.

18-таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон олинганда ҳам шундай* $\delta > 0$ *сон топилсаки,* M *тўпламнинг* ($M \subset R^2$) $\rho((x', y'), (x'', y'')) < \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий* $(x', y') \in M$, $(x'', y'') \in M$ *нуқталарида,*

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ *функция* M *тўпламда текис узлуксиз дейилади.*

7-теорема (Кантор теоремаси). ***Агар*** $f(x, y)$ ***функция компакт*** $M(M \subset R^2)$ ***тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.***

6- *Б О Б*

ИККИ ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРИ

$u=f(x, y)$ функция M тўпламда ($M\subset R^2$) берилган бўлиб, (x_0, y_0) нуқта шу M тўпламга тегишли бўлсин. Бу (x_0, y_0) нуқтанинг биринчи координатаси x_0 га шундай Δx орттирма берайликки, $(x_0+\Delta x,\ y_0)\in M$ бўлсин. Натижада $f(x, y)$ функция x ўзгарувчиси бўйича

$$\Delta_x f(x_0,\ y_0)=f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)$$

орттирмага эга бўлади.

1-таъриф. *Агар $\Delta x\to 0$ да*

$$\frac{\Delta_x f\ (x_0, y_0)}{\Delta x}$$

нисбатнинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\ \text{ёки}\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \text{ёки}\ f_x'(x_0, y_0)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x'(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f\ (x_0, y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\ (x_0+\Delta x, y_0)-f\ (x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи таърифланади:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y'(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f\ (x_0, y_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\ (x_0, y_0+\Delta y)-f\ (x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Мисоллар.

1. Ушбу

$$f(x, y)=e^{xy}$$

функциянинг (1, 1) нуқтадаги f_x', f_y' хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Таърифга кўра:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\ (1+\Delta x, 1)-f(1,1)}{\Delta x},\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\ (1,1+\Delta y)-f(1,1)}{\Delta y}$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,1)-f(1,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{1+\Delta x}-e}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e.$$

Худди шунга ўхшаш:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,1+\Delta y)-f(1,1)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{1+\Delta y}-e}{\Delta y}=e.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=e,\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=e.$$

2. Ушбу

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

функциянинг (0, 0) нуқтадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Таърифга кўра

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta y^3}}{\Delta y}=1.$$

Демак,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1.$$

Демак, $f(x, y)$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи таърифланганда y ни ўзгармас, y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи таърифланганда x ни ўзгармас деб ҳисобланар экан. Бу ҳол 1- том, 20- боб, 4- § да келтирилган бир ўзгарувчили функциянинг ҳосиласини ҳисоблашда маълум бўлган қоида ва жадваллардан тўлиқ фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$u=f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Берилган функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда y ни ўзгармас деб топамиз:

$$f'_x(x, y)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{y}+y\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}.$$

Худди шунга ўхшаш, функциянинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласини ҳисоблашда x ни ўзгармас деб топамиз:

$$f'_y(x, y)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)'_y=x\left(\frac{1}{y}\right)'_y+\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}.$$

2. Ушбу

$$u=x\cdot\ln\frac{y}{x}$$

функция қуйидаги

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$$

тенгламани қаноатлантиришини кўрсатинг.

Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}[x(\ln y-\ln x)]=$$

$$=1\cdot\ln y-\ln x-x\cdot\frac{1}{x}=\ln\frac{y}{x}-1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[x\ln y-x\ln x]=x\cdot\frac{1}{y}=\frac{x}{y}.$$

Унда

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=x\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+y\cdot\frac{x}{y}=x\cdot\ln\frac{y}{x}-x+x=x\cdot\ln\frac{y}{x}=u$$

бўлади. Бу эса берилган функция тенгламани қаноатлантиришини билдиради.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция M тўпламда ($M\subset R^2$) берилган бўлсин. Бу M тўпламда (x_0, y_0) ҳамда $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ нуқталарни олиб функциянинг тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

ни қараймиз.

2-таъриф. *Агар $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0, y_0)$ ни*

$$\Delta f(x_0, y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи деб аталади, бунда A, B — ўзгармас, α, β лар эса Δx ва Δy ларга боғлиқ ва $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ да $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$.

Агар $f(x, y)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, $f(x, y)$ функция M тўпламда дифференциалланувчи дейилади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

функцияни $\forall(x_0, y_0) \in R$ да дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= (x_0+\Delta x)^2 + (y_0+\Delta y)^2 + (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y) - x_0^2 - y_0^2 - x_0 y_0 =$$
$$= (2x_0+y_0)\Delta x + (2y_0+x_0)\Delta y + (\Delta x+\Delta y)\Delta x + \Delta y \Delta y.$$

Агар $A = 2x_0+y_0$, $B = 2y_0+x_0$, $\alpha = \Delta x+\Delta y$, $\beta = \Delta y$ дейилса,

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу эса берилган функциянинг $\forall(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтада дифференциалланувчи эканини билдиради.

1-теорема. ***Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.***

Исбот. $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу тенгликдан

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз. Теорема исбот бўлди.

2-теорема. ***Агар $f(x, y)$ функция $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, функция шу нуқтада $f'_x(x_0, y_0)$ $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилаларга эга ва***

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B$$

бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Таърифга кўра

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

бўлади. Бу тенгликда, аввал $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$ деб

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \quad (2)$$

сўнг $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$ деб

$$\Delta y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = B\Delta y + \beta\Delta y \quad (3)$$

бўлишини топамиз.

Юқоридаги (2) ва (3) тенгликларнинг ҳар икки томонини мос равишда Δx ҳамда Δy ларга бўлиб, $\Delta x \to 0$ да ҳамда $\Delta y \to 0$ да лимитга ўтсак, унда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (A+\alpha) = A,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta y f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} (B+\beta) = B$$

бўлади. Демак,

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \; f'_y(x_0, y_0) = B.$$

Теорема исбот бўлди.

Эслатма. $f(x, y)$ функциянинг бирор $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилаларининг мавжуд бўлишидан, функциянинг шу нуқтада дифференциалланувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$$

функцияни (0, 0) нуқтада дифференциалланувчанликка текширинг.

Маълумки бу функция (0, 0) нуқтада $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар 1 га тенг (2- мисолга қаранг). Функциянинг (0,0) нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0,0) = f(0+\Delta x, \; 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \; \Delta y) = \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3}\,.$$

Фараз қилайлик берилган функция (0, 0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда $\Delta f(0,0) = f'_x(0, \; 0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ бўлиб, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$.

$f'_x(0,0) = 1$, $f'_y(0,0) = 1$ бўлишини эътиборга олсак,

$$\Delta f(0,0) = \Delta x + \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

келиб чиқади. Натижада ушбу

$$\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} = \Delta x + \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан $\Delta x = \Delta y$ бўлганда

$$\Delta x \sqrt[3]{2} = 2\Delta x + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta x,$$

яъни

$$\sqrt[3]{2} - 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ бўлишига зиддир. Зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб, функциянинг

(0, 0) нуқтада дифференциалланувчи бўлсин деб қаралишидир. Демак, қаралаётган функция (0, 0) нуқтада дифференциалланувчи эмас.

Энди $f(x, y)$ функциянинг $(x_0, y_0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлишининг етарли шартини ифодаловчи теоремани исботсиз келтирамиз.

3-теорема. ***Агар $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтанинг бирор атрофида (бу атроф M тўпламга тегишли) $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлади.***

Энди мураккаб функциянинг хусусий ҳосилаларини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $F=f(u, v)$ функция $(u_0, v_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U(u_0, v_0)$ атрофида аниқланган ва узлуксиз бўлсин. u ҳамда v ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида x ва y ларнинг функцияси

$$u=\varphi(x, y), \quad v=\psi(x, y)$$

бўлиб, $u_0=\varphi(x_0, y_0)$, $v_0=\psi(x_0, y_0)$ бўлсин. Бу функциялар ёрдамида қуйидаги

$$F=f(\varphi(x, y), \psi(x, y))=F(x, y)$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ҳамда $f(u, v)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда мураккаб функция ҳам хусусий ҳосилаларга эга бўлади. Бу хусусий ҳосилаларни қуйидагича топамиз:

x ўзгарувчига Δx орттирма берсак, унда $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ функциялар

$$\Delta_x u=\varphi(x+\Delta x, y)-\varphi(x, y),$$
$$\Delta_x v=\psi(x+\Delta x, y)-\psi(x, y)$$

орттирмаларга, $F=f(u, v)$ функция эса

$$\Delta_x F=f(u+\Delta_x u, v+\Delta_x v)-f(u, v)$$

орттирмага эга бўлади. Бу $\Delta_x F$ нинг ифодасини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\Delta_x F=[f(u+\Delta_x u, v+\Delta_x v)-f(u, v+\Delta_x v)]+$$
$$+[f(u, v+\Delta_x v)-f(u, v)].$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан (қаралсин, 1-том, 20-боб. 7-§) фойдаланиб топамиз:

$$f(u+\Delta_x u, v+\Delta_x v)-f(u, v+\Delta_x v)=f'_u(u+\theta_1\Delta_x u, v+\Delta_x v)\cdot\Delta_x u,$$
$$f(u_1 v+\Delta_x v)-f(u, v)=f'_v(u, v+\theta_2\cdot\Delta_x v)\Delta_x v$$
$$(0<\theta_1, \theta_2<1).$$

Натижада

$$\Delta_x F = f'_u(u+\theta_1\Delta_x u, v+\Delta_x v)\cdot\Delta_x u + f'_v(u,\ v+\theta_2\cdot\Delta_x v)\Delta_x v$$

бўлади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини Δx га бўлиб,

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = f'_u(u+\theta_1\cdot\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v(u,\ v+\theta_2\Delta_x v)\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x},$$

сўнг $\Delta x \to 0$ да лимитга ўтсак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f'_u(u+\theta_1\cdot\Delta_x u,\ v+\Delta_x v)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0} f'_v(u,\ v+\theta_2\Delta_x v)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} =$$

$$= f'_u(u,\ v)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v(u,\ v)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

бўлишини эътиборга олсак, кейинги тенгликдан

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди юқоридагидек

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (4')$$

бўлиши топилади.

Шундай қилиб, (4) ва (4′) формулалар

$$F\ (x,\ y) = f\ (u,\ v) = f\ (\varphi(x,\ y),\ \psi\ (x,\ y)$$

мураккаб функциянинг хусусий ҳосилалари $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ ларни топиш формулалари бўлар экан.

Мисол. Ушбу

$$F = (x+1)^{y+1}$$

функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Бу функция

$$F = u^v,\ u = x+1,\ v = y+1$$

функциялардан тузилган мураккаб функциядир. (4) ва (4′) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot 1+u^{v}\ln u\cdot 0=$$

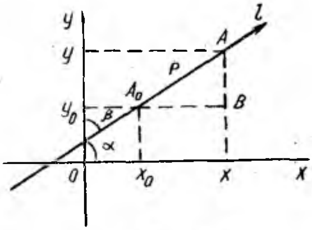
$$=(y+1)\ (x+1)^{y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\cdot u^{v-1}\cdot 0+u^{v}\cdot\ln u\cdot 1=$$

$$=(x+1)^{y+1}\cdot\ln\ (x+1).$$

2-§. ЙЎНАЛИШ БЎЙИЧА ҲОСИЛА

$f(x,\ y)$ функция M тўпламда ($M\subset R^2$) берилган бўлсин. Бу тўпламда ихтиёрий $A_0=(x_0,\ y_0)$ нуктани олиб, у орқали тўғри чизиқ ўтказамиз ва ундаги икки йўналишдан бирини мусбат йўналиш, иккинчисини манфий йўналиш деб қабул киламиз. Йўналган бу тўғри чизиқни l дейлик. l нинг мусбат йўналиши билан Ox ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак α, Oy ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак эса β бўлсин (23- чизма).



23- чизма

Агар $A_0=(x_0,\ y_0)$ ҳамда $A=(x,\ y)\in l$ нуқталар орасидаги масофани ρ десак, унда тўғри бурчакли учбурбурчак A_0AB дан

$$\frac{x-x_0}{\rho}=\cos\alpha,\quad \frac{y-y_0}{\rho}=\cos\beta$$

бўлиши келиб чиқади.

3-таъриф. *Агар A нуқта l тўғри чизиқ бўйлаб A_0 нуқтага интилганда ($A\to A_0$) ушбу*

$$\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho(A_0,A)}=\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\rho((x_0,y_0),\ (x,y))}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x,\ y)=f(A)$ функциянинг $A_0=(x_0,\ y_0)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи деб аталади ва

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}\ \text{ёки}\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\lim_{A\to A_0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho(A,A_0)}.$$

$f(x,\ y)$ функциянинг l йўналиш бўйича ҳосиласининг мавжудлигини ҳамда $\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ ни топишни қуйидаги теорема ифодалайди. Бу теоремани исботсиз келтирамиз.

4-теорема. ***Агар $f(x, y)$ функция $A_0=(x_0, y_0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция шу нуқтада ҳар қандай l йўналиш бўйича ҳосилага эга ва***

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$$

функциянинг (1,1) нуқтадаги (0, 0) нуқтадан (1, 1) нуқтага қараб йўналган l чизиқ бўйича ҳосиласини топинг.

Равшанки, берилган функция $A_0=(1,1)$ нуқтада дифференциалланувчи. Унда 4-теоремага кўра

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\cos\frac{\pi}{4}$$

бўлади.

Энди

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{y}{x^2+y^2}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб,

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

эканини топамиз.

3-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

$f(x, y)$ функция M тўпламда $(M\subset R^2)$ берилган бўлиб, $(x_0, y_0)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда функциянинг дифференциалланувчи бўлиши таърифига кўра $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

учун

$$\Delta f(x_0, y_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

бўлади, бунда $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$ да $\alpha\to0$, $\beta\to0$.

4-таъриф. *$f(x, y)$ функция орттирмаси $\Delta f(x_0, y_0)$ нинг Δx ҳамда Δy ларга нисбатан чизиқли бош қисми*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$$

$f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги дифференциали (тўлиқ дифференциал) деб аталади ва

$$df \text{ ёки } df(x_0, y_0)$$

каби белгиланади. Демак,

$$df=df(x_0, y_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y .$$

Одатда $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y$ лар $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтадаги хусусий дифференциаллари дейилади ва улар мос равишда d_xf, d_yf каби белгиланади:

$$d_xf=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x, \quad d_yf=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y .$$

Мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x^2+5xy^2-y^3$$

функциянинг $(x, y)\in R^2$ нуқтадаги дифференциалини топинг.

Берилган функциянинг (x, y) нуқтадаги хусусий ҳосилалари

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+5xy^2-y^3)'_x=2x+5y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+5xy^2-y^3)'_y=10xy-3y^2$$

бўлиб, унинг дифференциали

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=(2x+5y^2)\Delta x+(10xy-3y^2)\Delta y$$

бўлади.

Агар Δx ва Δy ларни мос равишда dx ва dy га алмаштирсак, унда $f(x, y)$ функциянинг дифференциали қуйидаги

$$df(x_0, y_0)=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy \tag{5}$$

кўринишга келади.

Фараз қилайлик, $F=f(u, v)$ функциянинг u ва v ўзгарувчилари ўз навбатида x ва y ларнинг функцияси

$$u=\varphi(x, y), \quad v=\psi(x, y)$$

бўлиб, улар ёрдамида қуйидаги

$$F=f(\varphi(x, y), \psi(x, y))=F(x, y)$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ функциялар (x_0, y_0) нуқтада дифференциалланувчи бўлиб, $F=f(u, v)$ функция мос (u_0, v_0) нуқтада $(u_0=\varphi(x_0, y_0),\ v_0=\psi(x_0, y_0))$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда

$$dF=df=\frac{\partial f}{\partial u} du+\frac{\partial f}{\partial v} dv \tag{6}$$

бўлади. Шуни исботлаймиз.

$F=F(x, y)$ функциянинг дифференциали

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y} dy \tag{7}$$

бўлади. Мураккаб функциянинг хусусий ҳосиласини топиш формулаларидан фойдалансак, унда

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{8'}$$

ҳосил бўлади. Натижада (6), (8) ва (8′) муносабатлардан

$$dF=df=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right]+\frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right]=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$df=\frac{\partial f}{\partial u} du+\frac{\partial f}{\partial v} dv\ . \tag{9}$$

(6) ҳамда (9) муносабатларни солиштириб, функция мураккаб бўлган ҳолда ҳам унинг дифференциалининг кўриниши (6) дагидек бўлишини аниқлаймиз. Одатда бу хосса дифференциал шаклининг *инвариантлиги* деб аталади.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция M тўпламда $(M\subset R^2)$ берилган бўлиб, $(x_0, y_0)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0\ y_0)=$$
$$=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y$$

бўлади. Агар

$$df(x_0, y_0)=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f(x_0,y_0)}{df(x_0,y_0)}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y}=1$$

бўлиб, ушбу

$$\Delta f(x_0,\ y_0)\approx df(x_0,\ y_0),$$

яъни

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y \qquad (10)$$

тақрибий тенгликка келамиз.

Мисол. Ушбу $1{,}08^{3{,}96}$ миқдорни тақрибий ҳисобланг.

Қуйидаги

$$f(x,\ y)=x^y$$

функцияни қарайлик. Бу функция учун (x_0,y_0) нуқтада (10) формулани ёзамиз:

$$(x_0+\Delta x)^{y_0+\Delta y}\approx x_0^{y_0}+y\cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\cdot\Delta x+x^y\ln x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\cdot\Delta y.$$

Агар

$$x_0=1,\ y_0=4,\ \Delta x=0{,}08,\ \Delta y=-0{,}04$$

дейилса, у ҳолда

$$(1+0{,}08)^{4-0{,}04}\approx 1+y\cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\ y=4}}\cdot 0{,}08+x^y\cdot\ln x\Big|_{\substack{x=1\\ y=4}}\cdot(-0{,}04)=$$

$$=1+4\cdot 0{,}08=1{,}32\,.$$

бўлади. Демак,

$$1{,}08^{3{,}96}\approx 1{,}32.$$

4-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

$f(x,\ y)$ функция M тўпламда $(M\in R^2)$ берилган бўлиб, $\forall(x,\ y)\in M$ нуқтада $f'_x(x,\ y)$, $f'_y(x,\ y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Равшанки, бу хусусий ҳосилалар x ва y ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади.

5- таъриф. *$f(x, y)$ функция ҳосилалари $f'_x(x, y)$, $f'_y(x,\ y)$ ларнинг хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосиласи дейилади.*

$f'_x(x,\ y)$ нинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{x^2}(x,\ y)\qquad\text{ёки}\qquad\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{x^2}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right).$$

$f'_x(x,y)$ нинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{xy}(x, y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right).$$

$f'_y(x,y)$ функциянинг x ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{yx}(x,y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{yx}(x,y) = (f'_y(x,y))'_x, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

$f'_y(x,y)$ функциянинг y ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосиласи

$$f''_{y^2}(x,y) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f''_{y^2}(x,y) = (f'_y(x,y))'_y, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right).$$

Одатда иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

га аралаш ҳосилалар дейилади.

Худди юқоридагидек, $f(x,y)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади.

Мисол. Ушбу

$$f(x,y) = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$$

функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Аввало берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1) = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1) = 12x^2y^2 + 7x .$$

Энди 5-таърифдан фойдаланиб функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\,(4x^3+8xy^3+7y)=12x^2+8y^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\,(4x^3+8xy^3+7y)=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\,(12x^2y^2+7x)=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\,(12x^2y^2+7x)=24x^2y.$$

5-теорема. ***$f(x, y)$ функция M тўпламда ($M\in R^2$) берилган бўлиб, у шу тўпламда f'_x, f'_y ҳамда f''_{xy}, f''_{yx} ҳосилаларга эга бўлсин. Агар f''_{xy}, f''_{yx} аралаш ҳосилалар $(x_0, y_0)\in M$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда***

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлади.

Исбот. (x_0, y_0) нуқтанинг координаталарига мос равишда шундай $\Delta x>0$, $\Delta y>0$ орттирмалар берайликки,

$$(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\in M$$

бўлсин. Сўнг ушбу

$$u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)$$

ифодани қараймиз. Агар

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0),\\ \psi(y)&=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,\ y)\end{aligned}\tag{11}$$

деб олинса, унда юқоридаги ифода учун

$$\begin{aligned}u&=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0),\\ u&=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)\end{aligned}$$

бўлади.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{gathered}\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\cdot\Delta x,\\ \psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\\ (0<\theta_1,\theta_2<1).\end{gathered}$$

Иккинчи томондан (11) муносабатдан $\varphi(x)$ ҳамда $\psi(y)$ функцияларнинг ҳосилаларини топиб, сўнг Лагранж теоремасини қўлласак, унда

$$\varphi'(x)=f'_x(x,y_0+\Delta y)-f'_x(x,y_0)=f''_{xy}(x,y_0+\theta_3\Delta y)\cdot\Delta y,$$

$$\psi'(y)=f'_y(x_0+\Delta x,y)-f'_y(x_0,\ y)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\cdot\Delta x,y)\Delta x$$

бўлиши келиб чиқади ($0<\theta_3,\ \theta_4<1$). Натижада

$$u=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=f''_{xy}(x_0+\theta_1\cdot\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)\cdot\Delta x\Delta y,$$

$$u=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$$

бўлади. Бунда эса ушбу

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)=f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y) \qquad (12)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Шартга кўра f''_{xy}, f''_{yx} аралаш ҳосилалар (x_0, y_0) нуқтада узлуксиз. Унда $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$ да

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\to f''_{xy}(x_0, y_0)\ ,$$

$$f''_{yx}(x_0+\theta_4\cdot\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\to f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлади. (12) тенгликда $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$ да лимитга ўтиб,

$$f''_{xy}(x_0, y_0)=f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлишини топамиз. Бу тенглик теоремани исботлайди.

Фараз қилайлик, $f(x,\ y)$ функция M тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир $(x,\ y)$ нуқтасида дифференциалланувчи бўлсин.

Маълумки, бу функциянинг дифференциали

$$df(x,\ y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (13)$$

бўлади (бунда dx, dy лар x ва y ўзгарувчиларнинг Δx ҳамда Δy орттирмаларидир).

6-таъриф. *$f(x,y)$ функциянинг (x,y) нуқтадаги дифференциали $df(x,y)$ нинг дифференциали берилган $f(x,y)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва $d^2f(x,y)$ каби белгиланади:*

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y)).$$

(13) тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$d^2f(x,y)=d(df(x,y))=d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right]=$$

$$=dx\cdot d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)+dy\cdot d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)=$$

$$=dx\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dy\right]+dy\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 fx,y)}{\partial y^2}dy\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2.$$

Шундай қилиб, $f(x,\ y)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали унинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари орқали қуйидагича

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2$$

ифодаланар экан.

Функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридагидек таърифланади.

Функциянинг кейинги тартибли дифференциалларини унинг хусусий ҳосилалари орқали ифодалаш борган сари мураккаблашиб боради. Юқори тартибли дифференциалларни символик равишда ифодалаш қулай бўлади.

$f(x, y)$ функциянинг дифференциали

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

ни символик равишда (f ни қавсдан ташқарига чиқариб) қуйидагича ёзамиз:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)f.$$

Унда

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

деб қараш мумкин. Бу ерда қавс ичидаги йиғинди квадратга кўтарилиб, сўнг f га «кўпайтирилади». Кейин $\frac{\partial}{\partial x}$ ва $\frac{\partial}{\partial y}$ ларнинг даража кўрсаткичлари хусусий ҳосилалар тартиби деб қаралади.

Шундай йўл билан киритилган символик ифодалаш $f(x, y)$ функциянинг n- тартибли дифференциалини

$$d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$$

каби ёзиш имконини беради.

Энди мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциалларини топамиз.

Айтайлик, $F = f(u, v)$ функциянинг u ва v ўзгарувчилари ўз навбатида x ва y ларнинг функцияси

$$u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$$

бўлиб, улар ёрдамида қуйидаги

$$F = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

мураккаб функция тузилган бўлсин.

$u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ функциялар (x, y) нуқтада узлуксиз иккинчи тартибли барча хусусий ҳосилаларга, $F = f(u, v)$ функция эса мос (u, v) нуқтада барча иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv,$$

$$d^2f=d(df)=d\left(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right)=du\cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial f}{\partial u}d(du)+$$

$$+dv\cdot d\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial f}{\partial v}d(dv)=d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)du+d\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}d^2v=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv\right)^2 f+\frac{\partial f}{\partial u}d^2u+\frac{\partial f}{\partial v}d^2v\,.$$

Шу йўл билан берилган мураккаб функциянинг кейинги тартибдаги дифференциаллари топилади.

5-§. ЎРТА ҚИЙМАТ ҲАҚИДА ТЕОРЕМА

$f(x, y)$ функция M тўпламда берилган бўлсин. Бу M тўпламда (a_1, b_1) ҳамда (a_2, b_2) нуқталарни оламизки, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси

$$l=\{(x,y)\in R^2 : x=a_1+t(b_1-a_1),\ y=a_2+t(b_2-a_2)\}.$$

$0\leqslant t\leqslant 1$ қаралаётган тўпламга тегишли бўлсин.

6-теорема. ***Агар $f(x, y)$ функция l кесманинг (a_1, b_1) ҳамда (a_2, b_2) нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган барча нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда l кесмада шундай (c_1, c_2) нуқта топиладики,***

$$f(a_2,b_2)-f(a_1,b_1)=f'_x(c_1,c_2)\cdot(a_2-a_1)+f'_y(c_1,c_2)(b_2-b_1)$$

бўлади.

Исбот. $f(x, y)$ функцияни l кесмада қараймиз. Унда

$$f(x, y)=f(a_1+t(b_1-a_1),\ a_2+t(b_2-a_2))$$

бўлиб, у $[0, 1]$ сегментда берилган $F(t)$ функцияга айланади:

$$F(t)=f(a_1+t(b_1-a_1),\ a_2+t(b_2-a_2)).$$

Бу $F(t)$ функция $(0, 1)$ да ҳосилага эга бўлади.

Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қоидасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$F'(t)=f'_x(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2))\cdot(b_1-a_1)+f'_y(a_1+t(b_1-a_1),$$
$$a_2+t(b_2-a_2))\cdot(b_2-a_2). \qquad (14)$$

Шундай қилиб, $[0, 1]$ сегментда берилган $F(t)$ функция Лагранж теоремасининг шартларини бажарар экан. Лагранж теоремасига кўра $(0, 1)$ интервалда шундай t_0 нуқта топиладики,

$$F(1)-F(0)=F'(t_0)\cdot(1-0) \qquad (15)$$

бўлади.

Равшанки,

$$F(0)=f(a_1, a_2),\ F(1)=f(b_1, b_2).$$

Оқоридаги (14) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$F'(t_0)=f'_x(a_1+t_0(b_1-a_1),\ a_2+t_0(b_2-a_2))(b_1-a_1)+$$
$$+f'_y(a_1+t_0(b_1-a_1),\ a_2+t_0(b_2-a_2))(b_2-a_2)=$$
$$=f'_x(c_1,\ c_2)\cdot(b_1-a_1)+f'_y(c_1,\ c_2)(b_2-a_2).$$

Бу ерда

$$c_1=a_1+t_0\ (b_1-a_1),$$
$$c_2=a_2+t_0\ (b_2-a_2)$$

деб белгиладик.

Натижада (15) тенглик ушбу

$$f(a_2,b_2)-f(a_1,\ b_1)=f'_x(c_1,c_2)\cdot(a_2-a_1)+f'_y(c_1,c_2)\cdot(b_2-b_1)$$

тенгликка келади ($(c_1,\ c_2)\in l$). Бу эса теоремани исботлайди.

6-§. ФУНКЦИЯНИНГ ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

$f(x,\ y)$ функция M соҳада ($M\subset \mathrm{R}^2$) берилган бўлиб, $(x_0,\ y_0)\in M$ бўлсин. Бу $(x_0,\ y_0)$ нуқтанинг $U_\delta(x_0,\ y_0)$ атрофини ($U_\delta(x_0,\ y_0)\subset M$) олиб, унда шундай $(x,\ y)$ нуқтани қараймизки, ушбу

$$l=\{(x',\ y')\in R^2: x'=x_0+t(x-x_0),\ y'=y_0+t(y-y_0)\}$$

кесма $U_\delta(x_0,\ y_0)$ га тегишли бўлсин ($0\leqslant t\leqslant 1$).

Фараз қилайлик, $f(x,\ y)$ функция $U_\delta(x_0,\ y_0)$ да барча биринчи, иккинчи ва ҳоказо $(n+1)$-тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар узлуксиз бўлсин.

Агар $f(x,\ y)$ функцияни l кесмада қарайдиган бўлсак, унда

$$f(x,\ y)=f(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\quad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

бўлиб, у t ўзгарувчининг функциясига айланади:

$$F(t)=f(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$F'(t)=f'_x(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))\cdot(x-x_0)+$$
$$+f'_y(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0))(y-y_0),$$
$$F''(t)=f''_{x^2}(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))(x-x_0)^2+$$
$$+2f''_{xy}(x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0))(x-x_0)(y-y_0)+$$
$$+f''_{y^2}(x_0+t(x-x_0),\ \ y_0+t(y-y_0))(y-y_0)^2, \tag{16}$$

умуман,

$$F^{(k)}(t)=\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0\Big)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0))^k$$
$$(k=1,2,\ 3,\ \dots,\ n+1)$$

Равшанки,

$$F(0)=f(x_0,\ y_0),\ F(1)=f(x,\ y),$$
$$F^{(k)}(0)=\Big(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0\Big)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0))^k \tag{16'}$$

бўлади. Бу тенгликдаги $f(x, y)$ функциянинг барча хусусий ҳосилалари (x_0, y_0) нуқтада ҳисобланган.

Бундай $F(t)$ функция учун 1- том, 20- боб, 8- § да келтирилган ушбу

$$F(t)=F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{F''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+R_n(t) \qquad (17)$$

Тейлор формуласи ўринли бўлар эди, бунда $R_n(t)$ — қолдиқ ҳад. Унинг Лагранж кўринишдаги ифодаси

$$R_n(t)=\frac{F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

бўлади. Хусусан, $t=1$, $t_0=0$ бўлганда

$$F(1)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}+F''(0)\cdot\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+\bar{R}_n(1)$$

бўлади. Юқоридаги (16), (16′) ва (17) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$f(x,y)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^n}(x-x_0)^n+C_n^1\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial y^n}(y-y_0)^n\right]+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial x^{n+1}}\cdot(x-x_0)^{n+1}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial y^{n+1}}(y-y_0)^{n+1}\right]$$

Бу формула икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг *Тейлор формуласи* дейилади.

Символик белгилашлар ёрдамида Тейлор формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)f+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^2 f+\dots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^n f+R_n, \qquad (18)$$

бунда функциянинг барча хусусий ҳосилалари (x_0, y_0) нуқтада ҳисобланган, қолдиқ ҳад эса

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right)^{n+1} f$$

бўлиб, барча $(n+1)$-тартибли хусусий ҳосилалар $(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))$ нуқтада ҳисобланган $(0<\theta<1)$.

(18) формулада $x_0=0$, $y_0=0$ дейилса, унда

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)f+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot y\right)^2 f+\dots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^n f+R_n^0$$

бўлиб,

$$R_n^0=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot y\right)^{n+1} f$$

бўлади. Бунда барча $(n+1)$-тартибли хусусий ҳосилалар $(\theta x, \theta y)$ нуқтада ҳисобланган $(0<\theta<1)$.

7-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМ ҚИЙМАТЛАРИ

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция M $(M\subset R^2)$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, y_0)\in M$ бўлсин.

Маълумки, ушбу

$$U_\delta(x_0,y_0)=\{(x,y)\in R^2: \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

$(\delta>0)$ тўплам (x_0, y_0) нуқтанинг *атрофи* деб аталар эди.

7-таъриф. *Агар* (x_0, y_0) *нуқтанинг* M *тўпламга тегишли* $U_\delta(x_0, y_0)$ *атрофи топилсаки,* $\forall(x,y)\in U_\delta(x_0, y_0)$ *учун*

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0) \quad (f(x, y)<f(x_0, y_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ *функция* (x_0, y_0) *нуқтада максимумга (қатъий максимумга) эришади деб аталади,* $f(x_0, y_0)$ *қиймат эса* $f(x, y)$ *функциянинг максимум (қатъий максимум) қиймати дейилади.*

Функциянинг максимум қиймати

$$f(x_0, y_0)=max\{f(x, y)\} \quad ((x, y)\in U_\delta(x_0, y_0))$$

каби белгиланади.

8-таъриф. *Агар* (x_0, y_0) *нуқтанинг* M *тўпламга тегишли* $U_\delta(x_0, y_0)$ *атрофи топилсаки,* $\forall(x,y)\in U_\delta(x_0, y_0)$ *учун*

$$f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0) \quad (f(x, y)>f(x_0, y_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x, y)$ *функция* (x_0, y_0) *нуқтада минимумга* *(қатъий минимумга) эришади деб аталади,* $f(x_0, y_0)$ *қиймат эса* $f(x, y)$ *функциянинг минимум (қатъий минимум) қиймати дейилади.*

Функциянинг минимум қиймати

$$f(x_0, y_0)=\min\{f(x, y)\} \quad ((x, y)\in U_\delta(x_0, y_0))$$

каби белгиланади.

$f(x, y)$ функциянинг максимум ҳамда минимуми умумий ном билан унинг *экстремуми* дейилади.

7- ҳамда 8- таърифлардаги (x_0, y_0) нуқта мос равишда $f(x, y)$ функцияга максимум, минимум қиймат берадиган нуқта дейилади.

7- теорема. ***Агар*** $f(x, y)$ ***функция*** (x_0, y_0) ***нуқтада экстремумга эришса ва шу нуқтада*** $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ ***хусусий ҳосилалар мавжуд бўлса, у ҳолда***

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \; f'_y(x_0, y_0)=0$$

бўлади.

Исбот. Айтайлик, $f(x, y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада максимумга эришиб, шу нуқтада f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Унда таърифга кўра (x_0, y_0) нуқтанинг $U_\delta(x_0, y_0)\subset M$ атрофи топиладики, $\forall(x, y)\in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)$$

жумладан

$$f(x, y_0)\leqslant f(x_0, y_0)$$

бўлади. Бу эса $f(x, y_0)$ — бир ўзгарувчили (x — ўзгарувчили) функциянинг $U_\delta(x_0, y_0)$ да энг катта қиймати $f(x_0, y_0)$ га эришишини билдиради. Унда 1- том, 20- боб, 7- § да келтирилган Ферма теоремасига биноан

$$f'_x\,(x_0, y_0)=0$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш

$$f'_y\,(x_0, y_0)=0$$

бўлиши кўрсатилади. Теорема исбот бўлди.

Эслатма. $f(x, y)$ функциянинг бирор (x^*, y^*) нуқтада f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларга эга ва $f'_x(x^*, y^*)=0$, $f'_y(x^*, y^*)=0$ бўлишидан унинг (x^*, y^*) нуқтада экстремумга эга бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан,

$$f(x, y)=x\cdot y$$

функциянинг хусусий ҳосилалари

$$f'_x(x, y)=y, \quad f'_y(x, y)=x$$

(0,0) нуқтада нолга айланади:

$$f'_x(0, 0)=0, \quad f'_y(0, 0)=0.$$

Бироқ бу функция (0,0) нуқтада экстремумга эга эмас. (Буни функция графиги-гиперболик параболоиднинг тасвиридан кўриш мумкин. (Қаралсин [1] , 15- боб, 4- §.)

Шундай қилиб, 7- теорема икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функция экстремумга эришишининг зарурий шартини ифодалар экан.

$f(x, y)$ функция хусусий ҳосилалари f'_x, f'_y ларни нолга айлантирадиган нуқталар унинг *стационар нуқталари* дейилади.

Энди икки ўзгарувчили функция экстремумга эришишнинг етарли шартини топиш билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция $f(x_0, y_0)$ нуқтанинг бирор $U_\delta f(x_0, y_0)$ атрофида берилган бўлсин.

Агар $\forall(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0) \geqslant 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада минимумга эга бўлади.

Агар $\Delta(x, y) \in U_\delta(x_0, y_0)$ учун

$$\Delta = f(x,y) - f(x_0, y_0) \leqslant 0$$

бўлса, у ҳолда $f(x,y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада максимумга эга бўлади.

Демак, $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришишини аниқлаш Δ айирманинг U_δ (x_0, y_0) да ишора сақлашини кўрсатишдан иборат экан.

Айтайлик, $f(x, y)$ функция U_δ (x_0, y_0) да узлуксиз f'_x, f'_y ҳамда f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2} узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (19)$$

бўлсин.

6- § да келтирилган Тейлор формуласидан фойдаланиб, (19) муносабатларни ҳисобга олиб топамиз:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\Big[f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta x^2 +$$

$$+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x\cdot\Delta y + f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\Big].$$

бунда

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad 0<\theta<1.$$

Унда

$$\Delta = \frac{1}{2}\Big[f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta x^2 +$$

$$+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x\cdot\Delta y + f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\Big] \qquad (20)$$

$$+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x\cdot\Delta\ y + f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\Big]$$

бўлади.

Қулайлик учун қуйидаги белгилашларни қиламиз:

$$a_{11} = f''_{x^2}\ (x_0, y_0),$$

$$a_{12} = f''_{xy}\ (x_0, y_0),$$

$$a_{22} = f''_{y^2}\ (x_0, y_0),$$

Δ айирманинг ишораси

$$a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}^2$$

миқдорнинг ишорасига боғлиқ бўлади.

1^0. $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$ бўлсин. Бу ҳолда Δ нинг ишорасини аниқлаш учун уни қуйидагича

$$\Delta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f''_{x^2}(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}\Big[(f''_{x^2}(x_\theta+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta x+$$

$$+f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\cdot\Delta y)^2+(f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\cdot$$

$$\cdot f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)-f''^2_{xy}(x_0+\Delta x\cdot\theta, y_\theta+\theta\Delta y))\cdot\Delta y^2\Big] \qquad (21)$$

ёзиб оламиз.

Айтайлик,

$$f''_{x^2}(x_0,y_0)=a_{11}>0$$

бўлсин. Унда иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг узлуксиз бўлишидан

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)=a_{11}>0,$$

шунингдек

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Big(f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\cdot f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)-$$

$$-f''^2_{xy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\Big)=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$$

келиб чиқади.

Δx ҳамда Δy лар етарлича кичик бўлганда (21) муносабатдан $\Delta\geqslant 0$ бўлишини топамиз.

Демак,

$$a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0 \text{ ва } a_{11}>0 \text{ бўлганда}$$

$$\Delta=f(x,y)-f(x_0,\ y_0)\geqslant 0,$$

яъни

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,\ y_0)$$

бўлади. Бу ҳолда $f(x,\ y)$ функция (x_0,y_0) нуқтада минимумга эришади.

Ҳудди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки, $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2>0$ ва $a_{11}>0$ бўлганда

$$\Delta=f(x,y)-f(x_0,\ y_0)\leqslant 0,$$

яъни

$$f(x,y)\leqslant f(x_0,\ y_0)$$

бўлади. Бу ҳолда $f(x,\ y)$ функция $(x_0,\ y_0)$ нуқтада максимумга эришади.

2^0. $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}^2<0$ бўлсин. Ушбу

$$a_{22}z^2+2a_{12}z+a_{11}$$

квадрат учҳаднинг дискриминанти

$$D=4a_{12}^2-4a_{11}a_{22}=-4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)>0$$

бўлганлиги сабабли Δ айирма ишора сақламайди, яъни шундай α_1, α_2 қийматлар топиладики,

$$a_{22}\alpha_1^2+2a_{12}\alpha_1+a_{11}>0\,,$$

$$a_{22}\alpha_2^2+2a_{12}\alpha_2+a_{11}<0$$

бўлади. Аввало

$$a_{22}\alpha_1^2+2a_{12}\alpha_1+a_{11}>0$$

бўлган ҳолни қараймиз.

Иккинчи тартиб хусусий ҳосилаларнинг узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Big[f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\alpha_1^2+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)\ \alpha_1+$$

$$+f''_{x^2}(x_0+\Delta x\theta,\ y_0+\theta\Delta y)\Big]=a_{22}\cdot\alpha_1^2+2a_{12}\alpha_1+a_{11}>0.$$

Унда $(x_0,\ y_0)$ нуктанинг шундай $U_\varepsilon(x_0,y_0)$ атрофи топиладики, $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\subset U_\varepsilon(x_0,y_0)$ бўлганда

$$f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\alpha_1^2+f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\alpha_1+$$

$$+f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)>0 \tag{22}$$

бўлади.

Энди $(x_0,\ y_0)$ нуктанинг етарлича кичик $U_{\varepsilon_0}(x_0,y_0)$ атрофини олайлик. Унда шундай кичик ρ сон топиш мумкинки, $(x_0+\rho,\ y_0+\rho\alpha_1)$ нуқта ҳам $U_\varepsilon(x_0,\ y_0)$, ҳам $U_{\varepsilon_0}(x_0,y_0)$ атрофга тегишли бўлади. Агар

$$\Delta x=\rho,\ \ \Delta y=\rho\alpha_1$$

дейилса, (20) ҳамда (22) муносабатлардан

$$\Delta=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\rho^2\ \Big[f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)+$$

$$+2f''_{xy}(x_0+\Delta x\cdot\theta,y_0+\theta\Delta y)\alpha_1+f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\cdot\alpha_1^2\Big]>0$$

бўлади.

Шундай қилиб, $(x_0,\ y_0)$ нуқтанинг атрофида шундай $(x_0+\Delta x,$ $y_0+\Delta y)$ нуқта топиладики,

$$\Delta>0$$

бўлади.

Шунга ўхшаш

$$a_{22}\alpha_2^2+2a_{12}\alpha_2+a_{11}<0$$

бўлган ҳолда $(x_0,\ y_0)$ нуқтанинг атрофида шундай нуқта $(x_0+\Delta x,$ $y_0+\Delta y)$ топилиши кўрсатиладики,

$$\Delta=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)<0$$

бўлади.

Демак, (x_0, y_0) нуқтанинг атрофида Δ айирма ишора сақламайди. Бу ҳолда $f(x, y)$ функциянинг (x_0, y_0) нуқтада экстремуми бўлмайди.

3°. $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда $f(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмасдан қолиши ҳам мумкин. Уни қўшимча текшириш ёрдамида аниқланади.

Мисол. Ушбу

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$$

функциянинг экстремумини топинг.

Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y) = (x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y)'_x = 2x + y - 2,$$

$$f'_y(x, y) = (x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y)'_y = x + 2y - 3.$$

Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаб,

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва уни ечиб,

$$x_0 = \frac{1}{3}, \qquad y_0 = \frac{4}{3}$$

бўлишини топамиз. Демак, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ нуқта функциянинг стационар нуқтаси.

Берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини ҳисоблаб, уларнинг стационар нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$f''_{x^2}(x, y) = (2x + y - 2)'_x = 2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = (2x + y - 2)'_y = 1,$$

$$f''_{y^2}(x, y) = (x + 2y - 3)'_y = 2,$$

$$f''_{x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2, \ f''_{xy}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 1, \ f''_{y^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2,$$

$$a_{11} = 2, \ a_{12} = 1, \ a_{22} = 2.$$

Энди $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ миқдорни топамиз:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Демак, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} = 2 > 0$. Берилган функция $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ нуқтада минимумга эришади. Функциянинг минимум қиймати $-\frac{7}{3}$ га тенг: $\min f(x, y) = -\frac{7}{3}$.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция чегараланган ёпиқ $\bar{D}$ $(\bar{D} \subset R^2)$ соҳада берилган бўлсин. Равшанки,

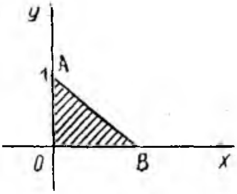
$$\bar{D} = D \cup \partial D.$$

Қаралаётган функция $\bar{D}$ да узлуксиз бўлсин. Унда Вейерштрасс теоремасига биноан $f(x, y)$ функция $\bar{D}$ да ўзининг энг катта ҳамда энг кичик қийматларига эга бўлади. Функциянинг $\bar{D}$ даги энг катта (энг кичик) қиймати қуйидагича топилади:

1) $f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги максимум (минимум) қийматлари топилади,

2) $f(x, y)$ функциянинг ∂D даги максимум (минимум) қийматлари топилади.

1) ва 2) ҳоллардаги топилган максимум (минимум) қийматлар таққосланиб, улар орасидаги энг каттаси (энг кичиги) аниқланади. Бу $f(x, y)$ функциянинг $\bar{D}$ даги энг катта (энг кичик) қиймати бўлади.



24- чизма

Мисол. Ушбу

$$f(x, y)=x^2+2xy-3y^2+y$$

функциянинг

$$\bar{D}=\{(x, y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x+y\leqslant 1\}$$

даги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг (24- чизма).

Равшанки,

$$\bar{D}=D\cup\partial D,$$

бунда $D=\{(x, y)\in R^2: 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<x+y<1\}$,

$$\partial D=OA\cup AB\cup OB$$

Берилган функциянинг стационар нуқталарини топамиз:

$$f'_x(x, y)=2x+2y=2(x+y),\ f'_y(x, y)=2x-6y+1,$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-6y+1=0 \end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{8},\ y=\frac{1}{8}.$$

Демак, $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ нуқта функциянинг стационар нуқтаси. Бироқ бу нуқта D соҳага тегишли бўлмагани учун уни қарамаймиз.

Энди функцияни D соҳанинг чегараси ∂D да қараймиз.

а) $(x, y)\in OB$ бўлсин. Бунда $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=0$ бўлиб, берилган $f(x, y)$ функция қуйидаги

$$f(x, y)=x^2$$

кўринишга эга бўлади. Равшанки, бу функциянинг OB даги энг кичик қиймати $f_1(0, 0)=0$, энг катта қиймати $f_2(1, 0)=1$ бўлади.

б) $(x, y)\in OA$ бўлсин. Бунда $x=0$, $0\leqslant y\leqslant 1$ бўлиб, берилган $f(x, y)$ функция қуйидаги

$$f(x, y)=-3y^2+y$$

кўринишга эга бўлади. Бу функциянинг $[0, 1]$ даги экстремумини топамиз:

$$f'=-6y+1;\ -6y+1=0\Rightarrow y=\frac{1}{6}.$$

Демак, $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ стационар нуқта. $f'' = -6$, демак $\left(0, \frac{1}{6}\right)$ нуқтада $f(x, y)$ максимумга эришиб, унинг максимум қиймати $f_3\left(0, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$ бўлади.

в) $(x, y) \in AB$ бўлсин. Бунда $x+y=1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1)$ бўлади. $y = 1-x$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$f(x, y) = f(x, 1-x) = x^2 + 2x(1-x) - 3(1-x)^2 + (1-x) =$$
$$= -4x^2 + 7x - 2.$$

Бу функциянинг экстремумини топамиз:

$$f' = -8x + 7; \quad -8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{8},$$

$$y = 1 - x = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

Демак, $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$ стационар нуқта. $f'' = -8$ бўлганлиги сабабли функция $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$ нуқтада максимумга эришади ва унинг максимум қиймати

$$f_4\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) = -4 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{8} - 2 = 1\frac{1}{16}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган мулоҳазаларда $A = A(0, 1)$ нуқта эътибордан четда қолди. Шу сабабли берилган $f(x, y)$ функциянинг $(0, 1)$ нуқтадаги қиймати

$$f_5(0, 1) = -2$$

ҳам ҳисобга олиниши лозим.

Функциянинг f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 қийматларини солиштириб, берилган функция $\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$ нуқтада энг катта қиймат $1\frac{1}{16}$ га, $(0, 1)$ нуқтада энг кичик қиймат -2 га тенг бўлишини топамиз.

8-§. ОШКОРМАС ФУНКЦИЯЛАР

Икки x ва y ўзгарувчиларни боғловчи ушбу

$$F(x, y) = 0 \tag{23}$$

тенгламани қарайлик.

x ўзгарувчининг бирор $x = x_0$ қийматини олиб, уни (23) тенгламадаги x нинг ўрнига қўямиз. Натижада y ни топиш учун

$$F(x_0, y) = 0 \tag{23'}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Айтайлик, (23′) тенглама ягона y_0 ечимга эга бўлсин. Унда, равшанки,

$$F(x_0, y_0)=0$$

бўлади.

Энди X $(X\subset R)$ тўплам x ўзгарувчининг кийматларидан иборат шундай тўплам бўлсинки, бу тўпламдан олинган ҳар бир x $(x\in X)$ қийматда

$$F(x, y)=0$$

тенглама ягона y ечимга эга бўлсин.

X тўпламдан ихтиёрий x сонни олиб, бу сонга $F(x, y)=0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган y сонни мос қўямиз. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га кўрсатилган қоидага кўра битта y ни мос қўядиган $y=f(x)$ функция ҳосил бўлади. Одатда бундай аниқланган функция *ошкормас функция* дейилади.

Демак, ошкормас функция $F(x, y)=0$ тенглама ёрдамида аниқланар экан.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y)=y\sqrt{1-x^2}-2=0 \qquad (24)$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлайдими?

Агар x ўзгарувчининг $(0, 1)$ *интервалдаги ихтиёрий* x_0 *қийматига* y ўзгарувчининг

$$y_0=\frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

қийматини мос қўйсак, унда

$$F(x_0, y_0)=y_0\cdot\sqrt{1-x_0^2}-2=\frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}}\cdot\sqrt{1-x_0^2}-2\equiv 0$$

бўлишини топамиз. Демак, (24) тенглама ошкормас функцияни аниқлайди.

2. Ушбу

$$F(x, y)=x^2+y^2+1=0$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлайдими?

Бу тенглама x ўзгарувчининг $(-\infty, +\infty)$ оралиқдан олинган ҳеч бир қийматида ечимга эга эмас. Демак, берилган тенглама ошкормас функцияни аниқламайди.

Келтирилган мисоллардан кўринадики, $F(x, y)=0$ тенглама ҳар доим ҳам ошкормас функцияни аниқлайвермас экан.

Қуйида $F(x, y)$ функция қандай шартларни бажарганда

$$F(x, y)=0$$

тенглама ошкормас функцияни аниқлашини, яъни ошкормас функциянинг мавжуд бўлишини ифодаловчи теоремани исботсиз келтирамиз.

8-теорема. *$F(x, y)$ функция (x_0, y_0) нуқтанинг $((x_0, y_0) \in R^2)$ бирор $U_\delta(x_0, y_0)$ атрофида $(\delta > 0)$ аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар (x_0, y_0) нуқтада*

1) $F(x_0, y_0) = 0$,

2) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

бўлса, у ҳолда x_0, y_0 нуқталарнинг шундай $U_{\delta_0}(x_0)$, $U_{\delta_0}(y_0)$ атрофлари $(\delta_0 > 0)$ топиладики, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун $F(x, y) = 0$ тенглама ягона $y \in U_\delta(y_0)(y = f(x))$ ечимга эга ва

1) $f(x_0) = y_0$

2) $f(x)$ функция $U_{\delta_0}(x_0)$ да узлуксиз ҳосилага эга ва

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad (x \in U_{\delta_0}(x_0)) \qquad (*)$$

бўлади.

Одатда бу теорема ошкормас-функциянинг мавжудлиги ҳақидаги теорема дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$F(x, y) = xy + x + y - 1$$

функцияни қарайлик.

Бу функция, масалан, $x_0 = 2$, $y_0 = -\frac{1}{3}$, яъни $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ нуқтанинг $U_\delta\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ атрофида узлуксиз ҳамда узлуксиз

$$F'_x(x, y) = y + 1, \quad F'_y(x, y) = x + 1$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$F\left(2, -\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 + \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 = 0,$$

$$F'_y\left(2, -\frac{1}{3}\right) = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

бўлади. Демак, берилган функция $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ нуқтанинг атрофида 8-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Унда шу теоремага кўра

$$F(x, y) = xy + x + y - 1 = 0$$

тенглама $(2 - \delta_0, 2 + \delta_0)$ атрофда ошкормас функцияни аниқлайди.

2. Ушбу

$$F(x, y) = x - y + \frac{1}{2}\sin y$$

функцияни қарайлик. Бу функция $(0, 0)$ нуқтанинг $U_\delta(0, 0)$ атрофида $(\delta > 0)$ узлуксиз, узлуксиз

$$F'_x(x, y) = 1, \quad F'_y(x, y) = -1 + \frac{1}{2}\cos y$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлиб,

$$F(0,\ 0)=0,$$
$$F'_y(0,\ 0)=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\neq 0$$

бўлади. Демак, берилган функция (0, 0) нуқтанинг атрофида 8-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Унда шу теоремага кўра

$$F(x,y)=x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$$

тенглама $(-\delta_0,\ \delta_0)$ атрофда $(\delta_0>0)$ ошкормас функцияни аниқлайди.

3. Ушбу

$$F(x,\ y)=x^2+y^2-1=0$$

тенглама билан аниқланадиган ошкормас функциянинг ҳосиласини топинг.

$F(x,\ y)=x^2+y^2-1$ функциянинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(x,\ y)=(x^2+y^2-1)'_x=2x,$$
$$F'_y(x,\ y)=(x^2+y^2-1)'_y=2y.$$

Унда (*) тенгликка кўра ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$y'=-\frac{x}{y}$$

бўлади.

4. Ушбу

$$F(x,\ y)=x\cdot e^y+ye^x-2=0$$

тенглама билан аниқланадиган ошкормас функциянинг ҳосиласини топинг.

Аввало $F(x,\ y)=xe^y+ye^x-2$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$F'_x(x,\ y)=(xe^y+ye^x-2)'_x=e^y+ye^x,$$
$$F'_y(x,\ y)=(xe^y+ye^x-2)'_y=xe^y+e^x.$$

Ошкормас функциянинг ҳосиласи

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{e^y+ye^x}{xe^y+e^x}$$

бўлади.

Агар $F(x,\ y)=0$ тенглама $y=f(x)$ ошкормас функцияни аниқлаб, функция барча иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, унда ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳам ҳисоблаш мумкин.

Иккинчи тартибли ҳосила таърифига биноан

$$y''=(y')'$$

бўлади. Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right)' = \left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right)'_x +$$

$$+\left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right)'_y \cdot y' = -\frac{F'_y(x, y)\cdot F''_{x^2}(x, y) - F'_x(x,y)\cdot F''_{xy}(x, y)}{(F'_y(x, y))^2} -$$

$$-\frac{F'_y(x, y)\cdot F''_{xy}(x, y) - F'_x(x, y)\cdot F''_{y^2}(x,y)}{(F'_y(x, y))^2}\cdot\left(-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right) =$$

$$= -\frac{(F'_y(x, y))^2\cdot F''_{x^2}(x, y) - 2F''_{xy}(x, y)\cdot F'_x(x, y)\cdot F'_y(x, y) + (F'_x(x, y))^2\cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3}$$

Демак,

$$y'' = -\frac{(F'_y(x, y))^2\cdot F''_{x^2}(x, y) - 2F''_{xy}(x, y)\cdot F'_x(x, y)\cdot F'_y(x, y) + (F'_x(x, y))^2\cdot F''_{y^2}(x, y)}{(F'_y(x, y))^3} \qquad (^{**})$$

Мисол. Ушбу

$$F(x,\ y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

тенглама билан аниқланадиган ошкормас функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Аввало ошкормас функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(x,\ y) = 2x + y,\quad F'_y(x,\ y) = x + 2y,$$

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x+y}{x+2y}.$$

Равшанки,

$$F''_{x^2}(x,y) = 2,\quad F''_{xy} = 1,\quad F''_{y^2}(x, y) = 2.$$

Унда (**) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y'' = -\frac{(x+2y)^2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(2x+y)(x+2y) + (2x+y)^2\cdot 2}{(x+2y)^3} =$$

$$= \frac{2x^2+8xy+8y^2-4x^2-2xy-8xy-4y^2+8x^2+8xy+2y^2}{(x+2y)^3} =$$

$$= -\frac{6x^2+6xy+6y^2}{(x+2y)^3} = -\frac{6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3} = -\frac{6\cdot 3}{(x+2y)^3} = -\frac{18}{(x+2y)^3}.$$

Демак,

$$y'' = -\frac{18}{(x+2y)^3}.$$

7-БОБ

m ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР

«Олий математика асослари»нинг 1-томида бир ўзгарувчили функция, мазкур китобнинг 5, 6-бобларида эса икки ўзгарувчили функциялар батафсил ўрганилди.

Фан ва техниканинг турли соҳаларида учрайдиган кўпгина масалалар эркли ўзгарувчиларнинг сони иккидан ортиқ бўлган функцияларга боғлиқ бўлиши ҳам мумкин. Бу эса ўз навбатида m ўзгарувчили $(m>2)$ функцияларни ўрганишни тақозо этади.

m ўзгарувчили функциялар $(m>2)$ билан боғлиқ тушунча ва тасдиқлар икки ўзгарувчили функциялардаги каби бўлишини назарда тутиб ушбу бобда m ўзгарувчили функциялар билан боғлиқ бўлган асосий тушунчаларни таърифлаб, тасдиқларни эса исботсиз келтириш билан кифояланамиз.

1-§. R^m ФАЗО ВА УНИНГ МУҲИМ ТЎПЛАМЛАРИ

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) : x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ \ldots,\ x_m \in R\} \qquad (1)$$

тўпламни қараймиз. Бу тўпламнинг элементи $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ шу тўплам *нуқтаси* дейилади ва у одатда битта ҳарф билан белгиланади:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Бунда $x_1, x_2, \ldots, x_m$ сонлар x нуқтанинг мос равишда биринчи, иккинчи ва ҳоказо *m-координаталари* дейилади.

(1) тўпламда ихтиёрий

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

нуқталарни оламиз. Қуйидаги

$$\rho(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k)^2}$$

миқдор x ва y нуқталар орасидаги *масофа* дейилади.

Масофа қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. $\rho(x, y) \geqslant 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2^0. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3^0. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$, $(z = (z_1, z_2, \ldots, z_n))$.

Одатда (1) тўплам R^m *фазо* деб аталади.

Бирор $a=(a_1, a_2, \ldots, a_m)\in R^m$ нуқта ва $r>0$ сонни оламиз. Қуйидаги

$$\{x\in R^m : \rho(x, a)<r\},$$
$$\{x\in R^m : \rho(x, a)\leqslant r\}$$

тўпламлар мос равишда *очиқ шар* ҳамда *ёпиқ шар* дейилади. Бунда a нуқта *шар маркази*, r эса *шар радиуси* дейилади.

Ушбу

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R^m : a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2,\ \ldots,\ a_m<x_m<b_m\},$$
$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in R^m : a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\ a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\ \ldots,\ a_m\leqslant x_m\leqslant b_m\}.$$

($a_1, a_2, \ldots, a_m$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$—ҳақиқий сонлар) тўпламлар мос равишда *очиқ параллелепипед* ҳамда *ёпиқ параллелепипед* дейилади.

Айтайлик, бирор $x^0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)\in R^m$ ҳамда мусбат ε сон берилган бўлсин.

1-таъриф. *Маркази x^0 нуқтада, радиуси ε га тенг бўлган очиқ шар x^0 нуқтанинг атрофи (ε атрофи) дейилади ва $U_\varepsilon(x^0)$ каби белгиланади:*

$$U_\varepsilon(x^0) = \{x\in R^m : \rho(x, x_0)<\varepsilon\}.$$

R^m фазода бирор G тўплам берилган бўлсин: $G\subset R^m$.

2-таъриф. *Агар $x^0\in G$ нуқтанинг бирор атрофи $U_\varepsilon(x^0)\subset G$ бўлса, у ҳолда x^0 нуқта G тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.*

3-таъриф. *G тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, бундай тўплам очиқ тўплам дейилади.*

Масалан, очиқ шар очиқ тўплам бўлади.

4-таъриф. *Агар $x^0\in R^m$ нуқтанинг ҳар қандай $U_\varepsilon(x^0)$ атрофида F тўпламнинг ($F\subset R^m$) x^0 дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, x^0 нуқта F тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.*

5-таъриф. *F тўпламнинг ($F\subset R^m$) барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, F ёпиқ тўплам дейилади.*

2-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

R^m фазода бирор M тўплам берилган бўлсин:

$$M\subset R^m.$$

6-таъриф. *Агар M тўпламдаги ҳар бир $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтага бирор қоида ёки қонунга кўра битта ҳақиқий y сон ($y\in R$) мос қўйилган бўлса, у ҳолда M тўпламда m ўзгарувчили функция аниқланган (берилган) дейилади ва уни*

$$y=f(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

каби белгиланади. Бунда M тўплам функциянинг аниқланиш тўплами, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — функция *аргументлари*, y эса $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ларнинг *функцияси* дейилади.

Масалан, f — R^m фазодаги ҳар бир $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтага шу нуқта координаталари квадратларининг йиғиндисини мос қўювчи қоида бўлсин. Бу ҳолда

$$y=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2$$

функцияга эга бўламиз. Функциянинг аниқланиш тўплами $M=R^m$ дан иборат.

$y=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг аниқланиш тўплами M дан олинган $x^0=(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтага мос келувчи y_0 сон $y=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтадаги қиймати дейилади:

$$y_0=f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0).$$

Масалан, юқорида келтирилган $y=x_1^2+x_2^2+...+x_m^2$ функциянинг $(1,1, ..., 1)$ нуқтадаги қиймати

$$y=f(1,1, ..., 1)=1+1+...+1=m$$

бўлади.

$y=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция M $(M\subset R^m, x=(x_1, x_2, ..., x_m))$ тўпламда берилган бўлиб, $a=(a_1, a_2, ..., a_m)$ нуқта M тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

7-таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон олинганда ҳам шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки, ушбу* $\rho(x, a)<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча* $x\in M$ *нуқталарда*

$$|f(x_1, x_2, ..., x_m)-b|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b *сон* $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *функциянинг* a *нуқтадаги лимити дейилади* ва

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_m\to a_m}} f(x_1, x_2, ..., x_m)=b$$

каби белгиланади.

1-теорема (Коши теоремаси). ***$f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг $a=(a_1, a_2, ..., a_n)$ нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилиб, $0<\rho(\bar{x}, a)<\delta$, $0<\rho(x, a)<\delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\bar{x}\in M$, $x\in M(\bar{x}=\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)$, $x=(x_1, x_2, ..., x_m))$ нуқталарда***

$$|f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m)-f(x_1, x_2, ..., x_m)|<\varepsilon$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Энди кўп ўзгарувчили функциялар учун такрорий лимит тушунчасини киритамиз.

$f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг x_1 аргумент a_1 га интилгандаги лимити (бунда $x_2, x_3, ..., x_m$ тайинланган деб қаралади)

$$\lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

ни қарайлик. Бу лимит $x_2, x_3, ..., x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ функция бўлади:

$$\lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2, ..., x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, ..., x_m).$$

Сўнг $\varphi_1(x_2, x_3, ..., x_m)$ функциянинг x_2 аргументи a_2 га интилгандаги (бунда x_3, x_4, ..., x_m тайинланган деб қаралади)

$$\lim_{x_2\to a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m)$$

ни қарайлик.

Юқоридагидек бирин-кетин $x_3\to a_3$, $x_4\to a_4$, ..., $x_m\to a_m$ да лимитга ўтиб

$$\lim_{x_m\to a_m} \lim_{x_{m-1}\to a_{m-1}} \dots \lim_{x_1\to a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу лимит $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг такрорий лимити дейилади.

3-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ

$f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $M\subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $a=(a_1, a_2, ..., a_n)\in M$ нукта эса M нинг лимит нуқтаси бўлсин.

8-таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон олинганда ҳам шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки, ушбу* $\rho(x, a)<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча* $x=(x_1, x_2, ..., x_m)\in M$ *нуқталарда*

$$|f(x_1, x_2, ..., x_m) - f(a_1, a_2, ..., a_m| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *функция* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ *нуқтада узлуксиз деб аталади.*

Агар $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция M тўпламнинг $(M\subset R^m)$ ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу M тўпламда *узлуксиз* дейилади.

m ўзгарувчили функциялар учун ҳам икки ўзгарувчили функциялар каби Вейерштрасс ҳамда Больцано-Коши теоремалари ўринли бўлади.

9-таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон олинганда ҳам шундай* $\delta>0$ *сон топилсаки,* M *тўпламнинг* $\rho(x', x'')<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий* $x'=(x_1', x_2', ..., x_m')\in M$, $x''=(x_1'', x_2'', ..., x_m'')\in M$ *нуқталарда*

$$|f(x_1', x_2', ..., x_m') - f(x_1'', x_2'', ..., x_m'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *функция* M *тўпламда текис узлуксиз функция деб аталади.*

2-теорема (Кантор теоремаси). ***Агар*** $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ***функция чегараланган ёпиқ*** M ***тўпламда*** $(M\subset R^m)$ ***аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.***

4-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛАРИ

$f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция M $(M\subset R^m)$ тўпламда берилган бўлсин. Бу тўпламда $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нукта билан бирга $(x_1^0+\Delta x, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтани олиб, ушбу

$$\Delta_{x_1} f = f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

айирмани қараймиз. Уни $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтадаги x_1 аргументи бўйича *хусусий орттирмаси* дейилади.

10-таъриф. *Агар* $\Delta x_1 \to 0$ *да*

$$\frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1},$$

нисбатнинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *функциянинг* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ *нуқтадаги* x_1 *аргументи бўйича хусусий ҳосиласи деб аталади* ва

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \quad \text{ёки} \quad \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)}{\partial x_1}$$

каби белгиланади. Демак,

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f}{\Delta x_1}.$$

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг x_2, x_3 ва ҳоказо x_m аргументлари бўйича хусусий ҳосилалари таърифланади.

Энди M тўпламда $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқта билан бирга $(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2, ..., x_m^0+\Delta x_m)$ нуқтани олиб, ушбу $\Delta f = f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2, ..., x_m^0+\Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ айирмани қараймиз. Одатда бу айирма функциянинг тўлиқ орттирмаси дейилади.

11-таъриф. *Агар функциянинг тўлиқ орттирмаси* Δf *ни*

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + ... + \alpha_m\Delta x_m \qquad (2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ *функция* $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ *нуқтада дифференциалланувчи деб аталади,* бунда $A_1, A_2, ..., A_m$ *ўзгармас сонлар,* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ лар эса $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$ да $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$, ..., $\alpha_m \to 0$.

Агар $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция M тўпламнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи бўлса, функция M тўпламда *дифференциалланувчи* дейилади.

3-теорема. ***Агар*** $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ***функция*** $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ ***нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функция шу нуқтада узлуксиз бўлади.***

4-теорема. ***Агар*** $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ ***функция*** $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ ***нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда бу функциянинг шу нуқтада барча хусусий ҳосилалари*** $f'_{x_1}, f'_{x_2}, ..., f'_{x_m}$ ***мавжуд ва улар мос равишда (2) муносабатдаги*** $A_1, A_2, ..., A_m$ ***ларга тенг бўлади:***

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = A_1,$$

$$f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = A_2,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = A_m.$$

5-теорема (Функция дифференциалланувчи бўлишининг етарли шарти). ***Агар $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтанинг бирор атрофида барча аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади.***

5-§. *m* ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $M(M\subset R^m)$ тўпламда берилған бўлиб, $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда шу нуқтадаги функциянинг тўлиқ орттирмаси

$$\Delta f=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+ \ldots +A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+ \ldots +\alpha_m\cdot\Delta x_m \quad (2)$$

бўлади.

12-таъриф. *Ушбу*

$$A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+ \ldots +A_m\Delta x_m$$

ифода $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нуқтадаги дифференциали деб аталади ва $df(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ каби белгиланади:

$$df(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+ \ldots +A_m\Delta x_m.$$

$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ орттирмаларни мос равишда уларнинг дифференциаллари $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ билан алмаштириб, сўнг 8-теоремани эътиборга олиб, $f(x_1, ..., x_m)$ функциянинг дифференциалини қуйидагича

$$df(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)\,dx_1+$$
$$+f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)dx_2+ \ldots +f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)\cdot dx_m \quad (3)$$

ёзиш мумкинлигини кўрамиз.

Равшанки, $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциянинг $(x_1^0, x_2^0, .., x_m^0)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмаси $\Delta f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ ҳам, шу функциянинг қаралаётган нуқтадаги дифференциали $df(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ ҳам аргумент орттирмалари $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ ларга боғлиқ.

Бир томондан функциянинг дифференциали $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m$ ларга содда, яъни чизиқли боғлиқ бўлиши, иккинчи томондан эса

$\Delta x_1\to 0, \Delta x_2\to 0, ..., \Delta x_m\to 0$ да

$$\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+ \ldots +\alpha_m\Delta x_m$$

ифоданинг юқори тартибли чексиз кичик миқдор бўлиши ушбу

$$\Delta f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \approx df(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$$

тақрибий формулани ёзишга имкон беради.

Демак,

$$f(x_1^0+\Delta x_1, x_2^0+\Delta x_2, ..., x_m^0+\Delta x_m)\approx f(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)+$$
$$+f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)\Delta x_1+f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)\Delta x_2+ \ldots +$$
$$+f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)\Delta x_m .$$

Бу формуладан тақрибий ҳисоблашларда кенг фойдаланилади.

6- §. m ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция M $(M\subset R^m)$ тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтасида $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу хусусий ҳосилалар $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиб, ўз навбатида уларнинг хусусий ҳосилаларини қараш мумкин.

13- таъриф. *$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция хусусий ҳосилалари $f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \ldots, f'_{x_m}(x_1, x_2, \ldots x_m)$ ларнинг $x_k (k=1, 2, 3, \ldots m)$ ўзгарувчиси бўйича хусусий ҳосилалари берилган функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари дейилади ва*

$$f''_{x_1x_k}, f''_{x_2k_k}, \ldots, f''_{x_mx_k} \quad (k=1, 2, 3, \ldots, m)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_k} \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

каби белгиланади. Демак,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_m\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right).$$

Турли ўзгарувчилар бўйича олинган иккинчи тартибли

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k} \quad (i\neq k)$$

хусусий ҳосилалар аралаш ҳосилалар дейилади.

Худди шунга ўхшаш $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибдаги хусусий ҳосилалари таърифланади.

Маълумки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция $(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, унда бу функциянинг дифференциали

$$df = f'_{x_1}\cdot dx_1 + f'_{x_2}\cdot dx_2 + \ldots. + f'_{x_m}\cdot dx_m$$

бўлади.

14- таъриф. *$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция дифференциали $df(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нинг дифференциали берилган $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали дейилади ва d^2f каби белгиланади:*

$$d^2f = d(df).$$

Фараз қилайлик, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ҳамда $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциялар $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in M$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда

1) $d(f \pm g) = df \pm dg,$

2) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df,$

3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$

бўлади. Бу қоидалардан кейинчалик фойдаланамиз.

Энди функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини унинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари орқали ифодаланишини кўрсатамиз.

Таърифга биноан

$$d^2f = d(df) = d(f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \ldots + f'_{x_m} \cdot dx_m)$$

бўлади. Бунда биринчи тартибли хусусий ҳосилалар $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нуқтада ҳисобланган.

$dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ — ихтиёрий орттирмалар бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ эмаслигини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} d(f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \ldots + f'_{x_m}dx_m) &= dx_1 \cdot df'_{x_1} + dx_2 \cdot df'_{x_2} + \ldots + dx_m \cdot df'_{x_m} = \\ &= (f''_{x_1^2} \cdot dx_1 + f''_{x_1 \cdot x_2} \cdot dx_2 + \ldots + f''_{x_1 x_m} \cdot dx_m) \cdot dx_1 + \\ &+ (f''_{x_2 x_1} \cdot dx_1 + f''_{x_2^2} \cdot dx_2 + \ldots + f''_{x_2 x_m} \cdot dx_m) \cdot d_x^2 + \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\ &+ (f''_{x_m x_1} dx_1 + f''_{x_m x_2} \cdot dx_2 + \ldots + f''_{x_m^2} \cdot dx_m) \cdot dx_m = \\ &= f''_{x_1^2} \cdot dx_1^2 + f''_{x_2^2} \cdot dx_2^2 + \ldots + f''_{x_m} \cdot dx_m^2 + \\ &+ 2f''_{x_1 x_2} \cdot dx_1 \cdot dx_2 + 2f''_{x_1 x_3} \cdot dx_1 \cdot dx_3 + \ldots + 2f''_{x_1 x_m} \cdot dx_1 \cdot dx_m + \\ &+ 2f''_{x_2 x_3} \cdot dx_2 dx_3 + \ldots + 2f''_{x_2 x_m} \cdot dx_2 \cdot dx_m + \ldots + \\ &+ 2f''_{x_{m-1} x_m} \cdot dx_{m-1} \cdot dx_m . \end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ фукциянинг $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in M$ нуқтадаги учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридагидек таърифланади.

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Дифференциал тенгламалар олий математиканинг муҳим, айни пайтда фан ва техниканинг турли соҳаларида кенг фойдаланиладиган бўлимларидан бири.

Табиат ва техникада юз бераётган жараёнларни кузатишда бу жараёнларни ифодаловчи миқдорларнинг бир-бири билан турлича боғланганлигини кўрамиз. Масалан, T^0C ҳароратли $(T>0)$ жисмнинг вақт ўтиши билан совуши $T(t)$ — Ньютон қонунига биноан

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k \cdot T(t) \tag{1}$$

(k — ўзгармас мусбат сон) тенглама билан боғланган бўлиб, у шу тенгламадан топилади.

(1) тенгламада номаълум $T(t)$ функция билан бирга унинг ҳосиласи $\frac{dT(t)}{dt}$ ҳам қатнашгандир.

Умуман, номаълум функция ва унинг ҳосилалари қатнашган тенгламаларга келадиган масалалар жуда кўп. Қуйида улардан баъзиларини келтирамиз.

1-масала. Идишда 140 л аралашма бўлиб, унинг таркибида 14 кг туз бор. Бу идишга иккита қувур уланган. Биринчи қувурдан ҳар минутда таркибида 1 кг туз бўлган 7 л аралашма узлуксиз равишда қуйилади, иккинчи қувурдан эса шу тезлик билан аралашма оқизилади. Бир соатдан сўнг идишдаги аралашма таркибида қанча туз бўлади?

t вақтни эркли ўзгарувчи сифатида қабул қиламиз. Равшанки, аралашмадаги тузнинг миқдори t га боғлиқ бўлади. Уни $y(t)$ дейлик. Унда $t+\Delta t$ пайтда аралашмадаги туз миқдори $y(t+\Delta t)$ бўлиб, Δt вақт оралиғида туз миқдори $y(t+\Delta t)-y(t)$ га ўзгаради.

Масаланинг шартига биноан Δt вақт ичида идишга $1\cdot\Delta t$ кг туз тушади ва

$$\frac{y(t)}{140}\cdot 7\cdot \Delta t \text{ кг} = \frac{y(t)}{20}\cdot \Delta t \text{ кг}$$

туз чиқиб кетади. Уларнинг фарқи эса

$$\left(1-\frac{y(t)}{20}\right)\cdot \Delta t$$

бўлади. Ҳар онда идишдаги аралашма таркибида туз миқдори ўзгариб турганлиги сабабли

$$y(t+\Delta t)-y(t) \approx \Delta t - \frac{y(t)}{20}\cdot \Delta t \tag{2}$$

бўлади.

Агар Δt нолга интила борса, (2) тақрибий тенглик қатъий тенгликка айлана боради. Бинобарин,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = 1 - \frac{y(t)}{20}$$

бўлади. Натижада

$$y'(t) = 1 - \frac{y(t)}{20} \qquad (3)$$

тенгламага келамиз.

Шундай қилиб, идишдаги аралашма таркибидаги туз миқдорини топиш — номаълум функция $y(t)$ ва унинг ҳосиласи $y'(t)$ қатнашган тенгламани ечишга келар экан.

2-масала. Массаси m га тенг бўлган, оғирлик кучи таъсирида маълум баландликдан тушаётган жисмнинг ҳаракат қонуни топилсин.

Жисм вертикал ўқнинг O нуқтасидан бошлаб пастга қараб тушишида унинг босиб ўтган йўли S — вақтнинг функцияси бўлади.

Айтайлик, $S(t)$ жисмнинг t вақт ичида босиб ўтган йўлини, $v(t)$ — тезлигини, $a(t)$ эса тезланишини аниқласин.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларининг механик маъноларини эътиборга олиб топамиз:

$$\begin{aligned} S'(t) &= v(t), \\ S''(t) &= a(t). \end{aligned} \qquad (4)$$

Масаланинг шартига кўра, жисмга таъсир этувчи кучлар:

1) пастга қараб йўналган оғирлик кучи

$$P = m \cdot g$$

(g — эркин тушиш тезланиши, $g \approx 981$ см/с^2),

2) юқорига қараб йўналган қаршилик кучи

$$Q = -\alpha \cdot v(t)$$

($\alpha > 0$ — пропорционаллик коэффициенти).

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан, жисмга таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчиси $F(t)$ учун

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

муносабат ўринли. Демак,

$$m \cdot a(t) = m \cdot g - \alpha \cdot v(t).$$

(4) муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$m \cdot S''(t) = m \cdot g - \alpha \cdot S'(t). \qquad (5)$$

Шундай қилиб, жисмнинг ҳаракат қонуни $S(t)$ ни топиш номаълум функция $S(t)$ нинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари қатнашган тенгламаларни ечишга келар экан.

Умуман, жуда кўп масалалар юқоридагига ўхшаш номаълум функция ва унинг турли тартибдаги ҳосилалари қатнашган тенгламаларга келади. Улар эса дифференциал тенгламалар тушунчасига олиб келади.

Битта эркли ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг турли тартибдаги ҳосилалари қатнашган тенглама *оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Масалан, юқоридаги (3) ва (5) тенгламалар оддий дифференциал тенгламалардир.

Айтайлик, x — эркли ўзгарувчи, y унинг функцияси $(y=y(x))$, $y'=y'(x)$, ..., $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ лар эса шу функциянинг ҳосилалари бўлсин.

Бу x, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ ларни боғловчи ушбу

$$\Phi(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0 \tag{6}$$

тенглик дифференциал тенгламанинг умумий кўринишини ифодалайди.

(6) тенгламада қатнашган номаълум функция хосиласининг юқори тартиби (6) дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

Масалан,

$$y'=5\sqrt{y}, \quad y'+y\cdot\operatorname{tg}x=\cos^2 x$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламалар,

$$y''=\arcsin x, \quad y''+4y'+4y=0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар,

$$y'''=2\frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad y'''-3y''+3y'-y=0$$

учинчи тартибли дифференциал тенгламалардир.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функция (a, b) да аниқланган, узлуксиз бўлиб, у шу оралиқда узлуксиз $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., $\varphi^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар (6) тенгламадаги y нинг ўрнига $\varphi(x)$, y' нинг ўрнига $\varphi'(x)$, y'' нинг ўрнига $\varphi''(x)$, ..., $y^{(n)}$ нинг ўрнига $\varphi^{(n)}(x)$ қўйилганда у айниятга айланса:

$$\Phi(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

$\varphi(x)$ функция (6) дифференциал тенгламанинг ечими дейилади.

Масалан, ушбу

$$y'=\sqrt{1-y^2}$$

дифференциал тенгламанинг ечими

$$y=\sin x \quad \left(x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

бўлади. Чунки

$$y=\sin x,\ y'=(\sin x)'=\cos x$$

лар берилган дифференциал тенгламани

$$\cos(x)=\sqrt{1-\sin^2x}\quad\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

айниятга айлантиради.

Дифференциал тенгламаларнинг ечимини топиш масаласини дифференциал тенгламаларни интеграллаш масаласи ҳам деб юритилади.

Биз, аслида содда дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш билан аввалроқ, функция интеграли тушунчасини ўрганишда дуч келганмиз. (Қаралсин, [1], 1-боб, 1-§.) Берилган узлуксиз $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси. $y=y(x)$ ни топиш

$$y'(x)=f(x) \tag{7}$$

дифференциал тенгламани ечиш демакдир. Маълумки, бу тенгламанинг ечими

$$y(x)=\int f(x)dx+C \tag{8}$$

бўлади. Демак, (7) дифференциал тенглама чексиз кўп ечимларга эга. Ўзгармас C нинг турли қийматларида (7) тенгламанинг турли ечимлари ҳосил бўлаверади.

Одатда (8) ечим

$$y'(x)=f(x)$$

дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* дейилади. Ўзгармас C нинг тайин бир қийматидаги ечим эса (7) дифференциал тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади.

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалаларидан бири тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги бўлса, иккинчиси тенгламаларни ечиш, яъни дифференциал тенгламаларнинг ечимини топишдан иборат.

8-БОБ

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Биз ушбу бобда биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ўрганамиз.

Маълумки, биринчи тартибли дифференциал тенглама, умумий ҳолда

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда x — эркли ўзгарувчи, $y=y(x)$ — номаълум функция, y' эса $y=y(x)$ функциянинг ҳосиласи.

Фараз қилайлик, (1) тенглама y' га нисбатан ечилган бўлсин:

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Одатда (2) тенглама, ҳосилага нисбатан *ечилган дифференциал тенглама* дейилади.

(2) тенглама $y=y(x)$ функция ҳосиласи $y'(x)$ ни $(x \in (a, b))$ текисликдаги бирор D соҳада берилган $f(x, y)$ функция билан боғловчи тенгликдир. Равшанки, бу тенглик маънога эга бўлиши учун ҳар бир $x \in (a, b)$ да $(x, y) = (x, y(x)) \in D$ бўлиши лозим. Кейинчалик бу шарт ҳар доим бажарилган деб қараймиз.

Агар $\varphi(x)$ функция (a, b) да аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, ихтиёрий $x \in (a, b)$ да $(x, \varphi(x)) \in D$ ва

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

бўлса, яъни (2) тенглама $y=\varphi(x)$, $y'=\varphi'(x)$ ларда айниятга айланса, $\varphi(x)$ функция (2) тенгламанинг *ечими* дейилади.

Айтайлик, $y=\varphi(x)$ функция (2) дифференциал тенгламанинг ечими бўлсин. Бу функция графиги, умуман айтганда, эгри чизиқни ифодалайди. Шунинг учун уни (2) дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиғи ҳам дейилади.

Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

дифференциал тенглама чексиз кўп ечимларга эга бўлиб, улар тенгламанинг ечимлари тўпламини ташкил этади.

Кўп ҳолда (2) дифференциал тенгламанинг барча ечимларини, битта ихтиёрий ўзгармас C га боғлиқ бўлган

$$y = \varphi(x, C) \text{ ёки } F(x, y, C) = 0$$

муносабат билан умумий кўринишда ифодалаш мумкин. Уни дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* дейилади. Бунда, ўзгармас C нинг ҳар бир тайин қийматида x ва унга мос y лар учун $(x, y) \in D$ бўлиши керак. Ўзгармас C нинг ҳар бир қийматида унга мос ечим ҳосил бўлади. Бундай ечим берилган дифференциал тенгламанинг *хусусий ечими* дейилади.

Масалан,

$$y' = e^x - y \tag{3}$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бунда

$$f(x, y) = e^x - y$$

бўлиб, у текисликнинг барча нуқталарида аниқланган. Қуйидаги

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}e^x \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

функция берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлади, чунки (3) тенгламадаги y нинг ўрнига $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}e^x$ ни, y' нинг ўрнига $\varphi_0'(x) = \left(\frac{1}{2}e^x\right)' = \frac{1}{2}e^x$ ни қўйсак, у айниятга айланади:

$$\frac{1}{2}e^x = e^x - \frac{1}{2}e^x \Rightarrow \frac{1}{2}e^x \equiv \frac{1}{2}e^x.$$

Шунингдек,

$$\varphi_1(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}e^x,$$

$$\varphi_2(x) = 2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

функцияларнинг ҳар бири (3) тенгламанинг ечими бўлади. Бу берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимларидир.

(3) тенгламанинг умумий ечими

$$\varphi(x) = C \cdot e^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

кўринишда бўлиб, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

Айтайлик,

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \varphi(x, C)$$

бўлсин. Бу ечимдан тенгламанинг хусусий ечимини келтириб чиқариш учун изланаётган $y = y(x)$ функция аргументи x нинг бирор x_0 қийматида функция y_0 қийматни $(y_0 = y(x_0))$ қабул қилишини билиш етарлидир. Одатда, x_0 аргументнинг, y_0 эса изланаётган функциянинг бошланғич қийматлари дейилади. $x = x_0$ да изланаётган функциянинг қиймати y_0 га тенг бўлсин, деган шарт бошланғич шарт дейилиб, қуйидагича

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

ёзилади.

Бошланғич шартдан фойдаланиб

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

тенгламага келамиз. Ундан эса C топилади. Топилган C нинг қиймати C_0 га тенг бўлса, берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$y=\varphi(x, C_0)$$

га тенг бўлади.

Биринчи тартибли

$$y'=f(x, y)$$

дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масалаларидан бири бошланғич шарт

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

ни қаноатлантирувчи ечимни топишдан иборат. Бу масала *Коши масаласи* дейилади.

Биринчи тартибли

$$y'=f(x, y)$$

дифференциал тенглама ва унинг ечими содда геометрик маънога эга. Тенгламадаги $f(x, y)$ функция текисликдаги D соҳада аниқлансин. Бинобарин, бу соҳанинг ҳар бир (x, y) нуқтасида тайин қийматга эга. Масалан, $(x_0, y_0)\in D$ нуқтада $f(x, y)$ функциянинг қиймати

$$f(x_0, y_0) = k_0$$

бўлсин. Унда (2) га кўра

$$y'(x_0) = k_0$$

бўлади. Демак, $k_0 - y=y(x)$ эгри чизиққа (x_0, y_0) нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти.

Маълумки, уринманинг бурчак коэффициенти тўғри чизиқ йўналишини ифодалайди. Демак, D соҳанинг (x_0, y_0) нуқтасида йўналиш аниқланар экан.

Шундай қилиб

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенгламанинг берилиши билан D соҳанинг ҳар бир нуқтасида йўналиш аниқланади. Бу йўналишлар биргаликда *йўналишлар майдони* дейилади.

Демак, (2) дифференциал тенглама йўналишлар майдонини аниқлайди.

Энди (2) дифференциал тенглама ечимининг геометрик маъносини келтирамиз. Маълумки, D соҳадаги $y=y(x)$ эгри чизиқ учун

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

бўлса, унда $\varphi(x)$ функция (2) тенгламанинг ечими бўлар эди.

Демак, (2) тенгламанинг ечими D соҳада шундай $y=\varphi(x)$ эгри чизиқки, бу чизиққа, унинг ихтиёрий (x, y) нуқтасида ўзказилган уринма йўналиши D соҳанинг шу нуқтадаги майдон-йўналиши билан бир хил бўлади.

1-§. $y'=f(x, y)$ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

Ушбу параграфда биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$y'=f(x, y)$$

ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги масаласи билан шуғулланамиз.

Аввало баъзи тушунча ва тасдиқларни келтирамиз.

Фараз қилайлик, $f(x, y)$ функция икки ўзгарувчининг функцияси сифатида R^2 фазодаги ёпиқ тўғри тўртбурчак

$$D=\{(x, y)\in R^2:\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}=$$
$$=\{(x, y)\in R^2:\ x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$$

да берилган бўлсин.

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас мусбат k сон мавжуд бўлсаки, $f(x, y)$ функция x аргументнинг $|x-x_0|\leqslant a$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий қийматларида, y аргументнинг $|y-y_0|\leqslant b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\bar{y}$ ва $\bar{\bar{y}}$ қийматларида*

$$|f(x, \bar{y})-f(x, \bar{\bar{y}})|\leqslant k\cdot|\bar{y}-\bar{\bar{y}}| \tag{4}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x, y)$ функция иккинчи аргументи y бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.

Агар $f(x, y)$ функция D да узлуксиз бўлса, у шу соҳада чегараланган, яъни шундай ўзгармас мусбат M сон мавжудки, $\forall(x, y)\in D$ учун

$$|f(x, y)|\leqslant M \tag{5}$$

бўлади (қаралсин, 5- боб, 5- §).

1-теорема. *Агар*

$$y'=f(x, y) \tag{2}$$

тенгламада $f(x, y)$ функция

$$D=\{(x, y)\in R^2: |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$$

да узлуксиз бўлиб, иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини бажарса, у ҳолда (2) дифференциал тенгламанинг $[x_0-h, x_0+h]$ сегментда ($h=\min(a; \frac{b}{M})$) бошланғич

$$y|_{x=x_0}=y_0$$

шартни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўлиб, у ягона бўлади.

Исбот. Аввало

$$y'=f(x, y)$$

тенгсизликнинг ҳар икки томонини $[x_0, x]$ оралиқ бўйича интеграллаймиз:

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt\,.$$

Бошланғич шартни ҳисобга олиб топамиз:

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt=y(x)-y(x_0)=y(x)-y_0.$$

Натижада берилган (2) дифференциал тенгламага эквивалент бўлган ушбу

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \qquad (2')$$

тенгламага келамиз. (Номаълум $y(x)$ функция интеграл белгиси остида бўлганлиги сабабли (2′) тенглама *интеграл тенглама* дейилади.)

Демак, берилган дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини кўрсатиш учун (2′) тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини кўрсатиш етарли бўлади.

(2′) тенглама ечимининг мавжудлигини исботлашда кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланамиз. Берилган бошланғич қиймат y_0 ни олиб, $f(x, y_0)$ ни қараймиз. $f(x, y_0)$ функция $[x_0-h,\ x_0+h]$ да узлуксиз бўлганлиги сабабли

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt$$

интеграл мавжуд ва у x нинг функцияси сифатида $[x_0-h,\ x_0+h]$ да узлуксиз. Бу функция ёрдамида $y_1(x)$ функцияни қуйидагича тузамиз:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt\,. \qquad (2'')$$

Равшанки, $y_1(x)$ функция $[x_0-h,\ x_0+h]$ да узлуксиз ва $x=x_0$ да $y_1=y_0$ бўлади.

(2″) тенгликдан, $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$y_1(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt \Rightarrow |y_1(x)-y_0|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\,dt\right| \Rightarrow |y_1(x)-y_0|\leqslant M\cdot\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y_1(x)-y_0|\leqslant M\cdot|x-x_0| \Rightarrow |y_1(x)-y_0||\leqslant M\cdot h.$$

$h \leqslant \frac{b}{M}$ бўлганлиги учун кейинги тенгсизликдан

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant b$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ да $y_1(x)$ функциянинг қийматлари $[y_0 - b,\ y_0 + b]$ га тегишли бўлишини кўрсатади.

Шундай қилиб, $y_1(x)$ функция $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ учун $(x,\ y_1(x)) \in D$ бўлади.

Энди маълум бўлган бу $y_1(x)$ функция ёрдамида $y_2(x)$ функцияни қуйидагича тузамиз:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt. \tag{6}$$

Бу $y_2(x)$ функция ҳам $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ да аниқланган, узлуксиз ва $x = x_0$ да $y_2 = y_0$ бўлади. (6) тенгликдан топамиз:

$$y_2(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt \Rightarrow |y_2(x) - y_0| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt\right| \Rightarrow |y_2(x) - y_0| \leqslant M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot |x - x_0| \Rightarrow |y_2(x) - y_0| \leqslant M \cdot h \Rightarrow |y_2(x) - y_0| \leqslant b.$$

Бу эса $x_0 \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ да $y_2(x)$ функциянинг қийматлари $[y_0 - b,\ y_0 + b]$ га тегишли эканини билдиради.

Шундай қилиб $y_2(x)$ функция $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ учун $(x,\ y_2(x)) \in D$ бўлади.

Бу жараённи давом эттирабориб, n та қадамдан кейин $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ аниқланган, узлуксиз ва $x = x_0$ да $y_n = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt \tag{6'}$$

функцияни ҳосил қиламиз. Бу функция учун

$$|y_n(x) - y_0| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))|\,dt\right| \leqslant M \cdot |x - x_0| \leqslant b$$

бўлади.

Шундай қилиб, $y_n(x)$ функция $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ учун $(x,\ y_n(x)) \in D$ бўлади.

Бу жараённи чексиз давом эттириш натижасида

$$y_0,\ y_1(x),\ y_2(x), \ldots,\ y_n(x), \ldots \tag{7}$$

функционал кетма-кетлик ҳосил бўлиб, унинг ҳар бир ҳади $[x_0-h, x_0+h]$ да узлуксиз, $x\in[x_0-h, x_0+h]$ учун $(x, y_n(x))\in D$, $(n=0,1,2,\dots)$ ва $x=x_0$ да $y_n=y_0$ $(n=0,1,2,\dots)$ бўлади.

(7) функционал кетма-кетлик ҳадлари ёрдамида ушбу

$$y_0+[y_1(x)-y_0]+[y_2(x)-y_1(x)]+[y_3(x)-y_2(x)]+\dots+ \\ +[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+\dots \tag{7'}$$

функционал қаторни ҳосил қиламиз. Бу функционал қаторнинг дастлабки $n+1$ та ҳадидан иборат хусусий йиғиндиси:

$$S_{n+1}(x)=y_0+[y_1(x)-y_0]+[y_2(x)-y_1(x)]+ \\ +[y_3(x)-y_2(x)]+\dots+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]=y_n(x).$$

Энди (7′) функционал қаторнинг ҳадларини баҳолаймиз. Равшанки,

$$|y_1(x)-y_0|=|\int\limits_{x_0}^{x}f(t,y_0)dt|\leqslant M\cdot|x-x_0|\ . \tag{8}$$

Қаторнинг кейинги ҳадларини баҳолашда $f(x, y)$ функциянинг иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартининг бажарилишидан фойдаланамиз:

$$|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t))-f(t,y_0)|dt|\leqslant$$

$$\leqslant k|\int\limits_{x_0}^{x}|y_1(t)-y_0|dt|\leqslant k\cdot M\cdot|\int\limits_{x_0}^{x}|t-x_0|dt|\leqslant k\cdot M\cdot\frac{|x-x_0|^2}{2}, \tag{8'}$$

$$|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant|\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_2(t))-f(t,y_1(t))|dt|\leqslant$$

$$\leqslant k|\int\limits_{x_0}^{x}|y_2(t)-y_1(t)|dt|\leqslant\frac{k^2\cdot M}{2}|\int\limits_{x_0}^{x}|t-x_0|^2dt|\leqslant k^2\cdot M\cdot\frac{|x-x_0|^3}{2\cdot 3}.$$

Умуман,

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant|\int\limits_{x_0}^{x}|f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y_{n-2}(t))|dt|\leqslant$$

$$\leqslant k^{n-1}M\cdot\frac{|x-x_0|^n}{n!} \tag{8''}$$

бўлади. (Кейинги тенгсизлик математик индукция усули ёрдамида исботланади.)

Энди $|x-x_0|\leqslant h$ бўлишидан фойдалансак, унда юқоридаги (8), (8′) ва (8″) муносабатлар қуйидаги

$$
\begin{aligned}
&|y_1(x)-y_0|\leqslant M\cdot h,\\
&|y_2(x)-y_1(x)|\leqslant M\cdot\frac{k\cdot h^2}{2!},\\
&|y_3(x)-y_2(x)|\leqslant M\cdot\frac{k^2\cdot h^3}{3!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant M\cdot\frac{k^{n-1}h^n}{n!},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

кўринишга келади.

Ушбу

$$M\cdot h+M\frac{k\cdot h^2}{2!}+M\cdot\frac{k^2\cdot h^3}{3!}+\ldots+M\frac{k^{n-1}h^n}{n!}+\ldots \tag{10}$$

сонли қаторни қарайлик. Даламбер аломатидан фойдаланиб,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\cdot\frac{k^nh^{n+1}}{(n+1)!}}{M\frac{k^{n-1}h^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{kh}{n+1}=0<1.$$

(10) қаторнинг яқинлашувчи эканини топамиз.

Демак, (7′) функционал қаторнинг ҳар бир ҳадининг абсолют қиймати, (9) муносабатга кўра яқинлашувчи (10) сонли қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. Вейерштрасс аломатига биноан (7′) функционал қатор $[x_0-h, x_0+h]$ да текис яқинлашувчи. Демак, (7′) функционал қаторнинг кисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $n\to\infty$ да $y(x)$ лимитга эга ва бу лимит функция узлуксиз бўлади.

Агар

$$S_{n+1}(x)=y_n(x)$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$y_0,\ y_1(x),\ y_2(x)\ ,\ldots,\ y_n(x),\ldots$$

функционал кетма-кетлик учун

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=y(x)\qquad(\forall x\in[x_0-h,\ x_0+h]$$

бўлади.

Энди топилган $y(x)$ функция

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\,dt$$

тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатамиз.

Юқоридаги (6′)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ y_{n-1}(t))\,dt$$

тенгликнинг ўнг томонига

$$\int_{x_0}^{x} f(t, J(t))\,dt$$

ни ҳам қўшамиз, ҳам айирамиз. Унда

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t) - f(t,\ J(t)]dt + \int_{x_0}^{x} f(t, J(t))dt \qquad (10')$$

бўлади. Бу тенгликдаги

$$\int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))]\,dt$$

интегрални Липшиц шартидан фойдаланиб баҳолаймиз:

$$\left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))]dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t)|dt\right| \leqslant k \cdot \left|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(t) - J(t)|dt\right|. \qquad (11)$$

$\{y_n(x)\}$ функционал кетма-кетлик $[x_0-h,\ x_0+h]$ да $J(x)$ га текис яқинлашганлигидан, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топиладики, $\forall n>n_0$ ва $\forall x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ учун

$$|y_{n-1}(x) - J(x)| < \frac{\varepsilon}{k\cdot h} \qquad (12)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(11) ва (12) муносабатлардан

$$\left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))]dt\right| \leqslant k\cdot\frac{\varepsilon}{k\cdot h}\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{h}|x - x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{h}\cdot h = \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, J(t))]dt = 0$$

эканини билдиради.

(10′) тенгликда, $n\to\infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\{y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(t, y(t))) - f(t, J(t))]dt +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} f(t, J(t))\,dt\} = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{n-1}(t)) -$$

$$-f(t,\ J(t))]\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t,\ J(t))\,dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, J(t))\,dt.$$

Демак,

$$J(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ J(t))\,dt$$

ва $x = x_0$ да $J(x_0) = y_0$.

Шундай қилиб, $J(x)$ функция (2′) тенгламанинг ечими, айни пайтда

$$y' = f(x,\ y)$$

дифференциал тенгламанинг ҳам ечими эканлиги исботланди. Бу ечим бошланғич шартни қаноатлантиради.

Энди топилган $J(x)$ ечимнинг ягоналигини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, (2′) дифференциал тенгламанинг $y = J(x)$ ечими билан бир қаторда, бошланғич шартни қаноатлантирадиган иккинчи $y = U(x)$ ечими ҳам мавжуд бўлсин. ($x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$, $x = x_0$ да $U(x_0) = y_0$; $J(x) \neq U(x)$).

$J(x)$ ва $U(x)$ функциялар $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ да узлуксиз бўлганлиги сабабли $|J(x) - U(x)|$ функция ҳам шу сегментда узлуксиз бўлади. Узлуксиз функцияларнинг хоссаларига кўра $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ да шундай x^* нуқта топиладики,

$$|J(x^*) - U(x^*)| = \max|J(x) - U(x)| = A \qquad (13)$$

бўлади.

Иккинчи томондан $J(x)$ ва $U(x)$ функциялар (2′) тенгламанинг ечимлари бўлганлиги учун

$$J(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\ (t, J(t))\ dt, \qquad U(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ U(t))\,dt$$

бўлиб,

$$|J(x) - U(x)| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} f(t, J(t)) - f(t,\ U(t)\,|dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant k \cdot \left|\int_{x_0}^{x} |J(t) - U(t)|\,dt\right| \leqslant k \cdot A\,|x - x_0| \leqslant k \cdot A \cdot h$$

бўлади. Агар $h=\min\left(a;\ \frac{b}{M}\right)$ бўлиши билан бирга $h<\frac{1}{k}$ ҳам бўлса, унда

$$k\cdot A\cdot h<A$$

бўлиб,

$$|J(x)-U(x)|<A \qquad (\forall x\in[x_0-h,\ x_0+h]$$

бўлади. Бу эса (13) муносабатга зиддир.

Бу зиддиятнинг келиб чиқишига сабаб (2) тенгламанинг ечими иккита бўлсин деб олинишидир. Демак, $J(x)$ функция (2) дифференциал тенгламанинг ягона ечими.

Теорема тўлиқ исбот бўлди.

Исбот этилган теорема, D нинг ҳар бир ички (x_0, y_0) нуқтасидан $y'=f(x,\ y)$ тенгламанинг ягона интеграл эгри чизиғи ўтишини ифодалайди.

Мазкур бобнинг кейинги параграфларида турли хилдаги (турли типдаги) биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш билан шуғулланамиз.

2-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{14}$$

кўринишдаги тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама* дейилади. Бунда $f_1(x)$ функция (a, b) да, $f_2(y)$ функция эса $(c,\ d)$ оралиқда аниқланган узлуксиз функциялардир.

Аввало (14) тенгламанинг баъзи ҳолларини қараймиз.

1°. (14) тенгламада $f_2(y)=1$ бўлсин. Бу ҳолда (14) тенглама

$$y'=f_1(x) \tag{14'}$$

кўринишда бўлади. Равшанки, (14') тенгламанинг умумий ечими

$$y=\int f_1(x)dx+C=F(x)+C$$

бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон, $F(x)$ эса $f_1(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси: $F'(x)=f_1(x)$.

Агар (14') дифференциал тенгламани

$$y\,\big|_{x=x_0}=y_0$$

бошланғич шартда қарайдиган бўлсак, унда

$$y_0=F(x_0)+C,$$

яъни

$$C=y_0-F(x_0)$$

бўлиб,

$$y=F(x)+y_0-F(x_0)=y_0+[F(x)-F(x_0)]=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1(x)\ dx$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган (14′) дифференциал тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими (хусусий ечими)

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx$$

бўлар экан.

2°. (14) тенгламада $f_1(x)=1$ бўлсин. Бу ҳолда (14) тенглама

$$y'=f_2(y) \qquad (14'')$$

кўринишга эга бўлади. (14″) тенгликда $f_2(y)\neq 0$ бўлсин деб қараймиз.

Агар

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

эканини эътиборга олсак, унда (14″) тенгликдан

$$\frac{dy}{dx}=f_2(y)$$

ва ундан эса

$$dx=\frac{dy}{f_2(y)}$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$\int dx=\int\frac{dy}{f_2(y)}\Rightarrow x=\int\frac{dy}{f_2(y)}+C.$$

Демак,

$$y'=f_2(y)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$x=\int\frac{dy}{f_2(y)}+C$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y'=5\sqrt{y}$$

дифференциал тенгламанинг

$$y\,|_{x=0}=25$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Берилган тенгламани

$$\frac{dy}{dx}=5\sqrt{y}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Кейинги тенгликдан

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}}=dx$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$\int\frac{dy}{5\sqrt{y}}=\int dx \Rightarrow \frac{1}{5}\int y^{-\frac{1}{2}}dy=x+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{y}=x+C\Rightarrow y=\frac{25}{4}(x+C)^2.$$

Демак,

$$y=\frac{25}{4}(x+C)^2$$

қаралаётган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Бошланғич шартга биноан $x=0$ да $y=25$. Шунга кўра

$$25=\frac{25}{4}(0+C)^2\Rightarrow C=2$$

бўлади.

Демак, тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими

$$y=\frac{25}{4}(x+2)^2$$

бўлади.

3°. Энди

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

дифференциал тенгламани қараймиз. Уни қуйидагича

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

ёзиб оламиз. Бу тенгликдан, $f_2(y)\neq 0$ бўлганда

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)\cdot dx$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_2(x)\,dx+C.$$

Бу тенглик қаралаётган

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини беради.

Мисол. Ушбу

$$y' = xy + x + y + 1$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

Берилган тенгламани қуйидагича

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)\ (y+1)$$

ёзиб оламиз. Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни $y \neq -1$ деб ечамиз:

$$\frac{dy}{y+1} = (x+1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)dx + \ln C \Rightarrow \ln|y+1| =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} + \ln C \Rightarrow (y+1)\cdot\frac{1}{C} = e^{\frac{(x+1)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+1 = C\cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}} \Rightarrow y = C\cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C\cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}} - 1$$

бўлади.

4°. Энди ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келадиган баъзи дифференциал тенгламаларни қараймиз.

Фараз қилайлик,

$$y' = f(x,\ y) \qquad (2)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, бундаги $f(x,\ y)$ функция учун

$$f(tx,\ ty) = f(x,\ y), \qquad (15)$$

бўлсин. (Бу ҳолда $f(x,y)$ нол ўлчовли бир жинсли функция, (2) тенглама эса бир жинсли дифференциал тенглама[1] дейилади.)

(15) тенгликда

$$t = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

дейилса, у ҳолда

$$f(x,\ y) = f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$$

---

[1] Дифференциал тенгламанинг бир жинсли деб аталиши $f(x,\ y)$ нинг бир жинсли функция эканлигидандир.

бўлиб, $f(x, y)$ функция эса $\frac{y}{x}$ нинг функцияси бўлиб қолади:

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Натижада (2) дифференциал тенглама

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{16}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани ечиш учун

$$\frac{y}{x} = u \qquad (u = u(x))$$

деб оламиз. Унда

$$y = u \cdot x$$

бўлади.

Энди

$$y' = (u \cdot x)' = u + x \cdot u',$$

яъни

$$\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$$

эканлигини эътиборга олиб, сўнг уни (16) тengликка қўйиб, ушбу

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

тенгламага келамиз. Равшанки,

$$u + x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi\ (u) \Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi\ (u) - u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot du = [\varphi(u) - u] \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \qquad (\varphi(u) \neq u).$$

Кейинги тенгликнинг иккала томонини интеграллаб топамиз:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln x + C \qquad \left(u = \frac{y}{x}\right).$$

Бу тенглик берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини беради.

Мисол. Ушбу

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Берилган тенгламада

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

бўлиб, унинг учун

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)\ (ty)} = \frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2xy} = \frac{x^2+y^2}{xy} = f(x, y)$$

бўлади. Демак, қаралаётган тенглама бир жинсли дифференциал тенглама экан. Қуйидаги

$$y = u \cdot x \qquad (u = u(x))$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$y' = u + x \cdot u'$$

бўлиб, берилган дифференциал тенглама ушбу

$$x \cdot u'(x) + u = \frac{x^2+u^2x^2}{x \cdot ux},$$

яъни

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$

кўринишга келади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уни ечамиз:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow u \cdot du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int udu = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 = 2\ln|x \cdot C|.$$

Бу тенгликдаги u *нинг* ўрнига $\frac{y}{x}$ ни қўйиб топамиз:

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x \cdot C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 2x^2\ln|x \cdot C|.$$

Демак, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = |x| \cdot \sqrt{2\ln|x \cdot C|}$$

бўлади.

3-§. ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум функция $y = y(x)$ ва унинг $y' = y'(x)$ ҳосиласига нисбатан чизиқли бўлган

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \tag{17}$$

тенглама *биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Бунда $p=p(x)$ ва $q=q(x)$ лар $(a, b)\subset R$ да аниқланган ва узлуксиз функциялардир.

1°. Аввало (17) да $q(x)=0$ бўлган хусусий ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (17) тенглама ушбу

$$y'+p(x)\cdot y=0 \tag{17'}$$

кўринишга эга бўлиб, уни бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама дейилади (берилган (17) тенгламани эса бир жинссиз чизиқли дифференциал тенглама дейилади). (17′) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни ечамиз:

$$y'+p\ (x)\cdot y=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-p\ (x)\cdot y\Rightarrow \frac{dy}{y}=-p\ (x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y|=-\int p\ (x)dx+\ln|C|\Rightarrow \ln|y|-\ln|C|=$$

$$=-\int p\ (x)dx\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right|=-\int p\ (x)\ dx\Rightarrow y=C\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Демак, бир жинсли (17′) тенгламанинг умумий ечими

$$y=C\cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{17''}$$

бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон.

2°. Энди

$$y'+p\ (x)\cdot y=q\ (x)$$

тенгламанинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини топишда

$$y=C\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

ифодадаги C ни x нинг дифференциалланувчи функцияси $C=C(x)$ бўлсин деб қараб, (17) тенгламанинг умумий ечимини

$$y=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{18}$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$y'=C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}-p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Бу y ва y' ларнинг ифодасини (17) тенгламадаги y ва y' ларнинг ўрнига қўямиз:

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}-p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}+p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=q(x).$$

Натижада, $C(x)$ ни топиш учун

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

яъни

$$\frac{dC(x)}{dx}=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

дифференциал тенгламага келамиз. Унинг ечими

$$C(x)=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C_1$$

бўлади, бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Топилган $C(x)$ ни (18) тенгликдаги $C(x)$ нинг ўрнига қўямиз. Натижада,

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C_1\right) \qquad (18')$$

бўлади. Бу (17) дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'+\frac{1}{x}y=x$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y'+\frac{1}{x}y=0$$

ни ечамиз:

$$y'+\frac{1}{x}y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|y|=-\ln|x|+\ln C\Rightarrow y\cdot x=C\Rightarrow y=\frac{C}{x}.$$

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y=\frac{C}{x}$$

бўлади.

Энди бу тенгликда $C=C(x)$ деб

$$y=\frac{C(x)}{x}, \qquad y'=\frac{C'(x)\cdot x-C(x)}{x^2}$$

ларни берилган тенгламадаги y ва y' ларнинг ўрнига қўямиз:

$$\frac{C'(x)\cdot x-C(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{C(x)}{x}=x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x\Rightarrow C'(x)=x^2.$$

Кейинги тенгликдан топамиз:

$$C(x)=\int x^2dx+C_1=\frac{x^3}{3}+C_1,$$

бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Демак, берилган чизиқли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)=\frac{x^2}{3}+\frac{C_1}{x}$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y'+y=e^x$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг

$$y|_{x=0}=1$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Биз юқорида

$$y'+p(x)=q(x)$$

тенгламанинг умумий ечими

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[C_1+\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

бўлишини кўрдик. Берилган дифференциал тенглама учун

$$p(x)=1,\ q(x)=e^x$$

бўлиб,

$$\int p(x)dx=\int dx=x,\ \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^x\cdot e^xdx=\frac{1}{2}e^{2x}$$

бўлади. Демак,

$$y'+y=e^x$$

тенгламанинг умумий ечими

$$y=e^{-x}\left[C_1+\frac{1}{2}e^{2x}\right]$$

бўлади.

Энди бошланғич шартдан фойдаланиб, ўзгармас C_1 ни топамиз:

$$1=e^0\left(C_1+\frac{1}{2}e^0\right)\Rightarrow C_1=\frac{1}{2}.$$

Демак, берилган тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$y=e^{-x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\text{sh}x$$

бўлади.

4-§. БЕРНУЛЛИ ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^m \tag{19}$$

кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Бунда $p(x)$ ва $q(x)$ — (a, b) да аниқланган ва узлуксиз функциялар, m эса ўзгармас сон.

Равшанки, $m=0$ бўлганда

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)$$

бўлиб, чизиқли бир жинссиз дифференциал тенгламага, $m=1$ бўлганда

$$y'+[p(x)-q(x)]y=0$$

бўлиб, чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламага келамиз.

Қуйида $m\neq 0$, $m\neq 1$ деб қараймиз. (19) тенгламанинг ҳар икки томонини y^m га ($y\neq 0$ деб) бўлиб топамиз:

$$\frac{y'}{y^m}+p(x)\cdot\frac{y}{y^m}=q\ (x),$$

яъни

$$y^{-m}y'+p(x)\cdot y^{1-m}=q(x). \tag{19'}$$

Кейинги тенгламада

$$u=y^{1-m} \tag{*}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$u'=(1-m)\cdot y^{-m}y',$$

яъни

$$y^{-m}y'=\frac{1}{1-m}\cdot u'$$

бўлади. Натижада (19′) тенглама

$$\frac{du}{dx}+(1-m)\cdot p(x)\cdot u=(1-m)\ q\ (x) \tag{19''}$$

кўринишга келади. Бу эса чизиқли бир жинссиз дифференциал тенгламадир.

Шундай қилиб. Бернулли тенгламаси (*) алмаштириш ёрдамида чизиқли тенгламага келар экан.

Маълумки,

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$$

бўлар эди. Шунга кўра (19″) тенгламанинг умумий ечими

$$u=e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left[\int(1-m)q(x)\cdot e^{\int(1-m)p(x)dx}+C\right]$$

бўлади. $u=y^{1-m}$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$y=\left\{e^{-\int(1-m)p(x)dx}\left[\int(1-m)\cdot q(x)\cdot e^{\int(1-m)p(x)dx}+C\right]\right\}^{\frac{1}{1-m}}.$$

Бу берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечимидир.

Мисол. Ушбу

$$y'-\frac{3}{x}y=-x^3y^2$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу $m=2$ бўлган Бернулли тенгламасидир. Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $-y^2$ га бўлиб топамиз:

$$-y^{-2}\cdot y'+\frac{3}{x}\cdot y^{-1}=x^3$$

Кейинги тенгламада

$$u=y^{-1}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$u'=-y^{-2}\cdot y'$$

бўлиб, тенглама қуйидаги

$$u'+\frac{3}{x}u=x^3 \tag{20}$$

кўринишга келади. Шундай қилиб, Бернулли тенгламасини ечиш (20) чизиқли тенгламани ечишга келди. (20) чизиқли тенгламанинг умумий ечими (18′) формулага кўра

$$u=e^{-\int\frac{3}{x}dx}\left[\int x^3\cdot e^{\int\frac{3}{x}dx}dx+C\right]=e^{-3\ln|x|}\left[C+\int x^3e^{3\ln|x|}dx\right]=$$

$$=|x|^{-3}\left[C+\int x^3\cdot|x|^3dx\right]=|x|^{-3}\left[C+\frac{x^4|x^3|}{7}+\tilde{C}\right]=\frac{x^4}{7}+\frac{C_1}{|x|^3}$$

бўлади. Демак,

$$u=\frac{x^4}{7}+\frac{C_1}{|x|^3},\quad u=\frac{1}{y}.$$

Бундан

$$y=\frac{7|x|^3}{7C_1+x^4|x|^3}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

5-§. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА

1°. Биринчи тартибли ушбу

$$y' = f(x, y),$$

яъни

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламани

$$-f(x, y)dx + dy = 0$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу ҳол умумийроқ

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{21}$$

дифференциал тенгламани қараш масаласини юзага келтиради.

Агар (21) тенгламанинг чап томонидаги

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ифода бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлса, у ҳолда (21) *тўлиқ дифференциал тенглама* дейилади.

Айтайлик, (21) тўлиқ дифференциал тенглама бўлсин. Унда (21) тенглама ушбу

$$du(x, y) = 0$$

кўринишда ёзилади. Бундан эса

$$u(x, y) = C$$

бўлиши келиб чиқади (C — ўзгармас сон). Бу тўлиқ дифференциал (21) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Тўлиқ дифференциал тенгламалар мавзусини ўрганишда, биринчидан тенгламанинг чап томонидаги

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ифода бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциал бўлишини аниқлаш, иккинчидан шу $u(x, y)$ функцияни топиш муҳимдир.

2°. Айтайлик,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

тенглама берилган бўлиб, $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар D соҳада ($D \subset R^2$) аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

хусусий ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар D соҳада

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{22}$$

бўлса, у ҳолда

$$M(x, y)dx+N(x, y)\, dy$$

ифода бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади ва аксинча (бу тасдиқ кейинчалик, Грин формуласи ва унинг татбиқлари баёнида келтирилади).

3^0. Фараз қилайлик,

$$M(x, y)dx+N(x, y)\, dy=0$$

тенгламанинг чап томонидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни $M(x, y)$ ҳамда $N(x, y)$ функциялар учун (22) шарт бажарилган бўлсин. Энди масала шу функцияни топишдан иборат.

Изланаётган функция $u(x, y)$ бўлсин. Унда бир томондан

$$du(x, y)=M(x, y)dx+N(x, y)dy,$$

иккинчи томондан эса икки ўзгарувчили функциянинг тўлиқ дифференциали таърифига кўра

$$du(x, y)=\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\, dy,$$

бўлади. Бу икки тенгликдан

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=N(x, y)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=M(x, y)$$

тенгликда y ни ўзгармас ҳисоблаб, унинг ҳар икки томонини x бўйича интеграллаймиз. Натижада,

$$u\ (x, y)=\int M(x, y)dx+C(y) \tag{23}$$

бўлади, бунда $C(y)$ — ихтиёрий дифференциалланувчи функция. Сўнг кейинги тенгликнинг иккала томонини y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x, y)dx+C(y)\right|=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right)+C'(y).$$

Агар

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=N(x, y)$$

эканини эътиборга олсак, унда ушбу

$$C'(y)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right)=N(x, y)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламадан $C(y)$ ни аниқлаш натижасида қаралаётган тўлиқ дифференциал тенгламанинг ечими $u(x, y)$ топилади.

4°. Мисоллар. 1. Ушбу

$$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$M(x, y)=(2xy+3y^2),\ N(x, y)=x^2+6xy-3y^2$$

бўлиб,

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+6xy-3y^2)=2x+6y,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy+3y^2)=2x+6y$$

бўлади. Демак,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Бу эса берилган тенгламанинг чап томонидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлишини билдиради:

$$du(x, y)=(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy.$$

Равшанки,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=2xy+3y^2,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2. \qquad (**)$$

Энди

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=2xy+3y^2$$

тенгликнинг ҳар икки томонини x бўйича интеграллаб топамиз:

$$u(x, y)=\int(2xy+3y^2)dx=2y\frac{x^2}{2}+3y^2x+C(y)=$$

$$=x^2y+3xy^2+C(y).$$

Бу тенгликдаги $C(y)$ ни топиш учун

$$u(x, y)=x^2y+3xy^2+C(y) \qquad (***)$$

ни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+3xy^2+C(y))=x^2+6xy+C'(y).$$

Демак, (**) муносабатга кўра

$$x^2+6xy+C'(y)=x^2+6xy-3y^2,$$

яъни

$$C'(y)=-3y^2$$

бўлади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни ечамиз:

$$C'(y)=-3y^2 \Rightarrow \frac{dC(y)}{dy}=-3y^2 \Rightarrow dC(y)=-3y^2dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(y)=-y^3+C_1.$$

Бунда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон. Топилган $C(y)$ ни (***) тенгликдаги $C(y)$ ўрнига қўйсак, унда

$$u(x,\ y)=x^2y+3xy^2-y^3+C_1$$

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими

$$u(x,\ y)=x^2y+3xy^2-y^3+C_1=C,$$

яъни

$$x^2y+3xy^2-y^3=C^*$$

бўлади. Бунда C^* — ўзгармас сон.

2. Ушбу

$$2x\ (1+\sqrt{x^2-y})\ dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$M(x,y)=2x(1+\sqrt{x^2-y}),\ N(x,y)=-\sqrt{x^2-y}$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[2x(1+\sqrt{x^2-y})\right]=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{x^2-y}\right)=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Демак,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Бинобарин, берилган тенглама тўлиқ дифференциал тенглама экан:

$$du(x,y)=2x\ (1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}\ dy.$$

Иккинчи томондан

$$du(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy.$$

Бу тенгликлардан

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x\ (1 + \sqrt{x^2 - y}\,),$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x\ (1 + \sqrt{x^2 - y}\,)$$

тенгликнинг ҳар икки томонини x бўйича интеграллаймиз:

$$u(x, y) = \int \left[2x(1 + \sqrt{x^2 + y}\,)\right] dx = \int (2x + 2x\sqrt{x^2 - y}\,)\, dx =$$

$$= x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + C(y).$$

Бу тенгликдаги $C(y)$ ни топиш учун

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + C(y)$$

ни y бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + C(y)\right) = -\sqrt{x^2 - y} + C'(y).$$

Иккинчи томондан

$$\frac{\partial u\ (x, y)}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}\,.$$

Демак,

$$-\sqrt{x^2 - y} + C'(y) = -\sqrt{x^2 - y}\,.$$

Кейинги тенгликдан

$$C'(y) = 0,\ C(y) = C_1 - \text{const}$$

бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими

$$u\ (x,\ y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + C = C_1,$$

яъни

$$x_2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C^*$$

булади. Бунда C^* — ўзгармас сон.

5°. Ўрганилаётган дифференциал тенглама

$$M(x,\ y)\ dx+N(x,\ y)\ dy=0 \qquad (21)$$

кўринишда бўлиб, унинг чап томонидаги ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмасин. Баъзи ҳолларда шундай $\mu(x,\ y)$ функцияни топиш мумкин бўладики, (21) тенгламани шу функцияга кўпайтиришдан ҳосил бўлган

$$\mu\ (x,\ y)\cdot M\ (x,\ y)\ dx+\mu\ (x,\ y)\cdot N\ (x,\ y)\ dy=0$$

тенгламанинг чап томони бирор функциянинг тўлиқ дифференциалига айланади:

$$du\ (x,\ y)=\mu\ (x,\ y)\cdot M\ (x,\ y)\ dx+\mu\ (x,\ y)\cdot N\ (x,\ y)\ dy.$$

Одатда бундай $\mu\ (x,\ y)$ функция *интегралловчи кўпайтувчи* ейилади.

Модомики,

$$\mu\ (x,\ y)\cdot M\ (x,\ y)\ dx+\mu\ (x,\ y)\cdot N\ (x,\ y)\ dy$$

фода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали экан, унда 22) шартга кўра.

$$\frac{\partial}{\partial y}\ [\mu(x,\ y)\cdot M(x,\ y)]=\frac{\partial}{\partial x}\ [\mu(x,\ y)\cdot N(x,\ y)]$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{\partial}{\partial y}\ [\mu(x,\ y)\cdot M(x,\ y)]=\frac{\partial\mu(x,\ y)}{\partial y}M(x,\ y)+\mu(x,\ y)\cdot\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ [\mu(x,\ y)\cdot N(x,\ y)]=\frac{\partial\mu(x,\ y)}{\partial x}N(x,\ y)+\mu\ (x,\ y)\cdot\frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x}.$$

Унда

$$\frac{\partial\mu(x,\ y)}{\partial y}M(x,\ y)+\mu(x,y)\cdot\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial\mu\ (x,\ y)}{\partial x}N(x,\ y)+\mu\ (x,\ y)\cdot\frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x},$$

яъни

$$M(x,y)\ \frac{\partial\mu(x,\ y)}{\partial y}-N(x,\ y)\ \frac{\partial\mu(x,\ y)}{\partial x}=\mu(x,\ y)\cdot\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y}\right)$$

бўлади.

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $\mu(x, y)$ га бўлиб,

$$M(x, y)\,\frac{\dfrac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}}{\mu(x,y)}-N(x, y)\,\frac{\dfrac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}}{\mu(x,y)}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y},$$

сўнг

$$\frac{\dfrac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}}{\mu(x,y)}=\frac{\partial\ln\mu(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\dfrac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}}{\mu(x,y)}=\frac{\partial\ln\mu(x,y)}{\partial x}$$

эканини эътиборга олиб, ушбу

$$M(x, y)\,\frac{\partial\ln\mu(x,y)}{\partial y}-N(x, y)\,\frac{\partial\ln\mu(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\tag{24}$$

тенгламага келамиз.

Шундай қилиб, (21) тенгламани тўла дифференциал тенгламага айлантирадиган интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x, y)$ (24) тенгламадан топилар экан. Бу тенгламани ечиш анча машаққатли ишдир.

Қуйида битта содда ҳолни қараш билан кифояланамиз.

Айтайлик, топиладиган интегралловчи кўпайтувчи фақат x гагина боғлиқ бўлсин: $\mu=\mu(x)$.

Унда

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

бўлиб, (24) тенглама

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

кўринишга келади. Бу тенгламадан $\mu(x)$ ни топамиз:

$$d\ln\mu\,(x)=\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\cdot dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\mu\,(x)=\int\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\cdot dx+\ln C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\frac{\mu(x)}{C}=\int\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mu(x)=C\cdot e^{\int\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx}$$

Хусусан, $C=1$ бўлганда битта

$$\mu(x)=e^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx}$$

интегралловчи кўпайтувчига эга бўламиз.

Мисол. Ушбу

$$(x+y^2)\,dx-2xydy=0$$

тенгламани ечинг. Бу тенгламада

$$M(x,\ y)=x+y^2,\ N(x,\ y)=-2xy$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y,\qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-2y$$

бўлади:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Берилган тенглама тўла дифференциал тенглама эмас. Интегралловчи кўпайтувчини топамиз. Аввало

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

ни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}=-\frac{2}{x}.$$

Унда

$$\frac{d\ln\mu(x)}{dx}=-\frac{2}{x}$$

бўлиб,

$$\ln\mu(x)=-2\ln|x|,\ \mu(x)=\frac{1}{x^2}$$

бўлади.

Берилган тенгламани $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$ га кўпайтирсак, у тўла дифференциал тенгламага айланади:

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=0.$$

Бу тенгламанинг чап томонидаги ифода учун

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=\frac{1}{x}dx-\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=$$

$$=d\ln|x|-d\,\frac{y^2}{x}=d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)$$

бўлади. Унда тенглама ушбу

$$d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)=0$$

кўринишга келади. Бу тенгламанинг ечими

$$\ln|x|-\frac{y^2}{x}=\ln C,$$

яъни

$$x=C\cdot e^{\frac{y^2}{x}}$$

бўлади.

6-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ МАХСУС ЕЧИМЛАРИ

1°. Биз мазкур бобнинг 2-§ ида

$$y'=f(x,\ y) \tag{2}$$

дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақида теорема келтирган эдик. Бу теоремага кўра, $D=\{(x,y)\in\in R^2: |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ да:

1) $f(x,\ y)$ функция узлуксиз,

2) иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини бажарса, унда (2) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи ягона интеграл эгри чизиғи (ечими) мавжуд бўлади.

$f(x,\ y)$ функция шу шартларнинг бирини ёки иккаласини бажармаса, унда (2) тенглама ечимга эга бўлиши мумкинми деган савол туғилади. Мисоллар келтирайлик.

1. Ушбу

$$y' = \frac{x}{y}$$

дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламада $f(x, y) = \frac{x}{y}$ бўлиб, у (0, 0) нуқтада узлуксиз эмас (1- шарт бажарилмайди). Равшанки, $\forall(x, y) \in R^2$, $(x, y) \neq (x, 0)$ да

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow y^2 = x^2 + C$$

бўлади.

Демак, $y^2 = x^2 + C$ тенгламанинг умумий ечимидир. Айни пайтда берилган тенгламанинг

$$y|_{x=0} = 0$$

шартни қаноатлантирадиган, яъни (0, 0) нуқтадан ўтадиган ечимлари мавжуд бўлиб, улар иккита:

$$y = x, \ y = -x$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y' = \sqrt[3]{y}$$

дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламада $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ бўлиб, $f'_y(x, y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$ бўлади. Ox ўқдаги нуқталарда ($y = 0$ бўлади) бу ҳосила чексизга айланади. Бинобарин, бундай $(x, 0)$ нуқталарда функция Липшиц шартини бажармайди. Берилган тенгламанинг $\forall(x, y) \in R^2$, $(x, y) \neq (x, 0)$ бўлган нуқталардаги умумий ечимини топамиз:

$$y' = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}}dy = dx \Rightarrow \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = x - C.$$

Қуйидаги

$$y|_{x=C} = 0$$

шартни қаноатлантирадиган, яъни $(C, 0)$ нуқтадан ўтадиган ечимлар ҳам мавжуд бўлиб, улар

$$y = 0 \text{ ва } y = \left(\frac{2x - 2C}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

3. Ушбу

$$y' = x + \sqrt[3]{y}$$

дифференциал тенгламани қарайлик. Бу тенгламада $f(x, y) = x + \sqrt[3]{y}$ бўлиб, Ox ўқининг нуқталарида у иккинчи аргументи бўйича Липшиц шартини бажармайди.

Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики, $y' = f(x, y)$ тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақидаги теореманинг шартлари бажарилмаган нуқталарда шу дифференциал тенгламанинг ё ечими мавжуд бўлмайди, ёки бундай нуқталар орқали тенгламанинг икки ва ундан ортиқ интеграл эгри чизиқлари (ечимлари) ўтади.

Одатда дифференциал тенгламанинг бундай ечими унинг махсус ечими дейилади.

Демак, берилган (2) дифференциал тенгламанинг махсус ечими шундай эгри чизиқ эканки, у биринчидан (2) тенгламанинг интеграл эгри чизиғи бўлади, иккинчидан эса бу чизиқнинг ҳар бир нуқтасида мавжудлик теоремасининг шартлари бажарилмайди.

Фараз қилайлик,

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб,

$$F(x, y, C) = 0 \qquad (25)$$

унинг умумий ечими,

$$y = \varphi(x)$$

эса топилиши лозим бўлган махсус ечими бўлсин.

Унда ҳар бир $(x_0, y_0) \in D$ нуқтадан (бунда $y_0 = \varphi(x_0)$) (2) тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта интеграл эгри чизиғи ўтади. Шунинг учун

$$F(x_0, y_0, C) = 0$$

бўлади. Бу муносабатдаги C олинган x_0 га боғлиқ: $C = C(x_0)$. Умуман, x_0 ни ихтиёрий x дейилса $(x_0 = x)$, унда

$$F(x, y, C\ (x)) = 0$$

бўлади. Ошкормас функция ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F' \cdot C = 0. \qquad (26)$$

Иккинчи томондан (2) тенгламанинг умумий ечими

$$F(x, y, C) = 0$$

ни дифференциалласак,

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0 \qquad (27)$$

бўлади.

(26) ва (27) муносабатлардан

$$F'_c=0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенглама (2) дифференциал тенглама махсус ечимидаги нуқталар учун ўринли бўлади.

Шундай қилиб,

$$\begin{cases} F(x, y, C)=0, \\ F'_c=0 \end{cases}$$

тенгламалардан C ни йўқотиш натижасида берилган тенгламанинг махсус ечими келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$y'=x\sqrt{1-y^2}$$

дифференциал тенгламанинг махсус ечимларини топинг.

Бу тенгламада

$$f(x, y)=x\sqrt{1-y^2}$$

бўлиб, $(x, -1)$ ҳамда $(x, 1)$ нуқталарда Липшиц шарти бажарилмайди.

$D=\{(x, y)\in R^2: (x, y)\neq(x, -1), (x, y)\neq(x, 1)\}$ да берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y'=x\sqrt{1-y^2}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\sqrt{1-y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=xdx\Rightarrow\arcsin y=\frac{x^2}{2}-C\Rightarrow y=\sin\left(\frac{x^2}{2}-C\right)$$

Демак,

$$y=\sin\left(\frac{x^2}{2}-C\right)$$

тенгламанинг умумий ечими.

Берилган тенгламанинг махсус ечимларини топиш учун, унинг умумий ечими

$$F(x, y, C)=y-\sin\left(\frac{x^2}{2}-C\right)=0$$

да $C=C(x)$ деб, C бўйича ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$F'_c=\left(y-\sin\left(\frac{x^2}{2}-C\right)\right)'_c=\cos\left(\frac{x^2}{2}-C\right)=0.$$

Энди

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ C) = y - \sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = 0, \\ F'_c = \cos\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = 0 \end{cases}$$

дан C ни йўқотамиз.

Агар

$$\sin\left(\frac{x^2}{2} - C\right) = \pm\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{x^2}{2} - C\right)} = \pm 1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y = \pm 1$$

эканини топамиз.

Демак, $y = -1$, $y = 1$ берилган тенгламанинг махсус ечимлари экан.

7-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Маълумки, биринчи тартибли дифференциал тенглама умумий кўриниши

$$\Phi\ (x,\ y,\ y') = 0 \tag{28}$$

бўлади.

Мазкур бобнинг аввалги параграфларида ҳосила y' га нисбатан ечилган

$$y' = f(x,\ y)$$

тенгламани қарадик ва ўргандик. Шуни айтиш керакки, кўпинча кейинги тенгламанинг ечими ошкормас функция кўринишида топилди. Бундай вазият (28) тенгламага нисбатан ҳам рўй беради.

Ушбу параграфда

$$\Phi\ (x,\ y,\ y') = 0$$

тенгламани ўрганар эканмиз, аввало унинг ошкормас ҳамда параметрик кўринишдаги ечимлари тушунчасини эслатиб ўтамиз.

Агар

$$F(x,\ y) = 0$$

тенглама y ни x нинг функцияси сифатида аниқласа ва бу функция (28) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда

$$F(x,\ y) = 0$$

(28) тенгламанинг ошкормас кўринишдаги ечими бўлади.

Агар $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ функциялар (α, β) да аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$\Phi\left(\varphi(t),\ \psi(t),\ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\equiv 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} x&=\varphi(t), \\ y&=\psi(t) \end{aligned}$$

(28) тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими бўлади.

Қаралаётган тенгламада

$$\begin{aligned} x&=\varphi(u,\ v), \\ y&=\psi(u,\ v), \\ y'&=\chi(u,\ v) \end{aligned}$$

деб, уни параметрик кўринишда ифодалаймиз, бунда $\varphi(u,\ v)$, $\psi(u,\ v)$ ҳамда $\chi(u,\ v)$ дифференциалланувчи функциялар.

Равшанки,

$$\frac{dy}{dx}=y' \quad \Rightarrow \quad dy=y'\cdot dx.$$

Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$dy=y'\cdot dx \Rightarrow d[\psi(u,\ v)]=\chi(u,\ v)\cdot d[\varphi(u,\ v)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi(u,\ v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\cdot dv=\chi(u,\ v)\cdot\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}dv\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}=\chi(u,\ v)\cdot\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}\right]$$

Кейинги тенгликдан $\frac{dv}{du}$ ни топамиз:

$$\frac{dv}{du}\cdot\left[\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}-\chi(u,\ v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\right]=\chi(u,\ v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du}=\frac{\chi(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}}{\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}-\chi(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}}.$$

Бу ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенгламадир.

Шундай қилиб, (28) дифференциал тенгламани ечиш ҳосилага нисбатан ечилган тенгламани ечишга келар экан. (28) дифференциал тенглама ҳар доим ҳам осон ечилавермайди.

Энди баъзи хусусий ҳолларни қараймиз.

1°. Айтайлик,

$$\Phi(x,\ y,\ y')=0$$

тенгламани x га нисбатан ечиш мумкин бўлсин:

$$x=f(y,\ y'). \tag{29}$$

Бу ҳолда u ва v параметрлар сифатида y ва $y'=p$ $(u=y,\ v=y')$ олинади. Сўнг $dy=y'dx$ тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$dy=y'\cdot dx \Rightarrow dy=pd\ [f(y,\ p)] \Rightarrow dy=p\left[\frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp\right] \Rightarrow \frac{1}{p}=\frac{\partial f(y,p)}{\partial y}+\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}.$$

Ҳосил бўлган дифференциал тенгламани ечамиз. Фараз қилайлик, бу тенгламанинг ечими $F(y,\ p,\ c)=0$ бўлсин. Унда

$$F(y,\ p,\ c)=0,\ x=f(y,\ p)$$

лардан p ни йўқотиб, қаралаётган дифференциал тенгламанинг ечимига келамиз.

Эслатма. (29) тенгламанинг ҳар икки томонини y бўйича дифференциаллаш натижасида

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f(y,p)}{\partial y}+\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}$$

тенглама ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан ҳам,

$$x=f(y,y') \Rightarrow dx=d\ [f(y,y')] \Rightarrow dx=\frac{\partial f(y,y')}{\partial y\cdot}dy+\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'}dy' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx=\frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$$

ва

$$dy=y'dx \Rightarrow dy=p\cdot dx$$

муносабатлардан

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f(y,p)}{\partial y}+\frac{\partial f(y,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}$$

келиб чиқади

Мисол. Ушбу

$$x-\ln\frac{y'}{y}=0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$\Phi(x,\ y,\ y')=x-\ln\frac{y'}{y}=0$$

бўлиб, у тенглама x га нисбатан ечилади:

$$x=\ln\frac{y'}{y}.$$

Кейинги тенгламада $y'=p$ деб,

$$x=\ln\frac{p}{y}=\ln|p|-\ln|y|$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб,

$$dx=\frac{1}{p}dp-\frac{1}{y}dy$$

сўнг

$$dy=y'dx=p\cdot dx$$

эканини ҳисобга олиб, $dy=p\left(\frac{1}{p}dp-\frac{1}{y}dy\right)$, яъни $\frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}\cdot p=1$ тенгламага келамиз. Бу биржинсли бўлмаган чизиқли тенгламадир. Унинг умумий ечими (18′) формулага кўра

$$p=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left[C+\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy\right],$$

$$p=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left[C+\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy\right],$$

яъни

$$p=|y|\,(C+\ln|y|)$$

бўлади. Энди

$$p=|y|\,(C+\ln|y|),$$

$$x=\ln|p|-\ln|y|$$

муносабатлардан p ни йўқотиб (бунда $\ln|p|=\ln|y|+\ln|c+\ln|y||$ эканини эътиборга оламиз),

$$x=\ln|c+\ln|y|| \text{ ёки } e^{x}=|c+\ln|y||$$

бўлишини топамиз. Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

2°. Айтайлик, $\Phi(x,\ y,\ y')=0$ тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин бўлсин:

$$y=f(x,\ y'). \tag{30}$$

Бу ҳолда u ва v параметрлар сифатида x ва $y'=p$ $(u=x,\ v=y')$ олинади. Сўнг

$$y=f(x,\ p)$$

ни дифференциаллаб топамиз:

$$y=f(x,\ p)\Rightarrow dy=d\,[f(x,\ p)]\Rightarrow dy=$$
$$=\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp.$$

Кейинги тенгликдан

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx},$$

яъни

$$p=\frac{\partial f(x,p)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$$

бўлиши келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $(30')$ дифференциал тенгламанинг ечими $F(x,\ p,\ c)=0$ бўлсин. Унда

$$F(x,\ p,\ c)=0,\ y=f(x,\ p)$$

лардан p ни йўқотиб, қаралаётган дифференциал тенгламанинг ечимига келамиз.

Мисол. Ушбу

$$y'^2-y'\cdot x-y+\frac{x^2}{2}=0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$\Phi(x,\ y,\ y')=y'^2-y'\cdot x-y+\frac{x^2}{2}=0$$

бўлиб, у тенглама y га нисбатан ечилади:

$$y=y'^2-y'\cdot x+\frac{x^2}{2}.$$

Кейинги тенгламада $y'=p$ деб, унинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y=p^2-px+\frac{x^2}{2},$$

$$dy=d\left(p^2-px+\frac{x^2}{2}\right)=2pdp-xdp-pdx+xdx=$$
$$=(2p-x)dp-(p-x)dx.$$

Энди $dy=y'\cdot dx=p\cdot dx$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$pdx=(2p-x)dp-(p-x)dx\ \Rightarrow\ p=(2p-x)\frac{dp}{dx}-p+x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2p-x)\cdot\frac{dp}{dx}=2p-x\ \Rightarrow\ \frac{dp}{dx}=1\qquad(2p-x\neq 0).$$

Равшанки,

$$\frac{dp}{dx}=1$$

тенгламанинг ечими $p=x+C$ бўлади.

Юқоридаги $y=p^2-px+\frac{x^2}{2}$ ҳамда $p=x+c$ тенгликлардан p ни йўқотиб топамиз:

$$y=(x+c)^2-(x+c)x+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2.$$

Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

8-§. ЛАГРАНЖ ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$y=\varphi(y')\cdot x+\psi(y') \tag{31}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама Лагранж тенгламаси дейилади, бунда φ ва ψ лар дифференциалланувчи функциялар.

Бу тенгламада $y'=p$ деб, сўнг унинг ҳар икки томонини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\begin{gathered}y=\varphi(p)\cdot x+\psi(p),\\ dy=d[\varphi(p)\cdot x+\psi(p)]=\varphi(p)\cdot dx+x\cdot d\varphi(p)+d\psi(p)=\\ =\varphi(p)\cdot dx+x\cdot\varphi'(p)dp+\psi'(p)dp.\end{gathered}$$

Натижада

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

яъни

$$p=\varphi(p)+[x\cdot\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

тенгламага келамиз. Бу тенгламада x ни номаълум функция, p ни эса унинг аргументи сифатида қараб, уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{x\cdot\varphi'(p)+\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\Rightarrow\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}\cdot x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.\quad(\varphi(p)-p\neq0)$$

Шундай қилиб, Лагранж тенгламасини ечиш

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}\cdot x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}\quad(\varphi(p)-p\neq0)$$

чизиқли тенгламани ечишга келади. Айтайлик, бу чизиқли тенгламанинг ечими $F(x, p, c)=0$ бўлсин. Унда

$$\begin{cases}F(x,p,c)=0\\ y=x\varphi(p)+\psi(p)\end{cases}$$

система Лагранж тенгламасининг параметрик кўринишдаги ечимини беради.

Мисол. Ушбу

$$y=2xy'+\ln y'$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу Лагранж тенгламасидир. Берилган тенгламада $y'=p$ деб, уни қуйидагича

$$y=2xp+\ln p \tag{32}$$

ёзиб оламиз. Кейинги тенгламанинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$dy=d(2xp+\ln p) \Rightarrow y'\cdot dx=2pdx+2xdp+\frac{1}{p}dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\cdot dx=2pdx+2xdp+\frac{1}{p}dp.$$

Натижада,

$$p\frac{dx}{dp}=-2x-\frac{1}{p}, \quad \frac{dx}{dp}=-2\frac{x}{p}-\frac{1}{p^2}$$

тенгламага келамиз. Бу x га нисбатан чизиқли дифференциал тенгламадир. (18′) формуладан фойдаланиб чизиқли тенгламанинг ечимини топамиз:

$$x=e^{-\int\frac{2}{p}dp}\left[C+\int\left(-\frac{1}{p^2}\right)\cdot e^{\int\frac{2}{p}dp}dp\right]=e^{-2\ln p}\left(C-\int\frac{1}{p^2}e^{2\ln p}dp\right)=$$

$$=e^{\ln\frac{1}{p^2}}\left(C-\int\frac{1}{p^2}e^{\ln p^2}dp\right)=\frac{1}{p^2}\left(C-\int\frac{1}{p^2}p^2dp\right)=\frac{C}{p^2}-\frac{1}{p}.$$

Топилган x ни (32) даги x нинг ўрнига қўямиз:

$$y=2p\left(\frac{c}{p^2}-\frac{1}{p}\right)+\ln p=\ln p+\frac{2C}{p}-2.$$

Натижада, берилган дифференциал тенгламанинг

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}-\dfrac{1}{p}, \\ y=\ln p+\dfrac{2c}{p}-2 \end{cases}$$

параметрик кўринишдаги ечими келиб чиқади.

9-§. КЛЕРО ТЕНГЛАМАСИ

Ушбу

$$y=x\cdot y'+\psi(y') \tag{33}$$

кўринишдаги дифференциал тенглама Клеро тенгламаси дейилади, бунда $\psi(y')$ дифференциалланувчи функция.

Клеро тенгламаси Лагранж тенгламасининг $\varphi(y')=y'$ бўлган хусусий ҳолидир.

(33) тенгламада $y'=p$ деб оламиз. Унда (33) тенглама

$$y=px+\psi(p) \tag{33'}$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб топамиз:

$$\begin{gathered} y=p\cdot x+\psi(p) \Rightarrow dy=d(px+\psi(p)) \Rightarrow \\ \Rightarrow y'\cdot dx=x\cdot dp+pdx+\psi'(p)dp \Rightarrow \\ \Rightarrow p\cdot dx=x\cdot dp+pdx+\psi'(p)dp \Rightarrow \\ \Rightarrow x\cdot dp+\psi'(p)dp=0 \Rightarrow [x+\psi'(p)]dp=0. \end{gathered}$$

1) $dp=0$ бўлсин. У ҳолда $p=C$ — const бўлади. Бу топилган p нинг қийматини (33′) тенгликдаги p нинг ўрнига қўйиб, Клеро тенгламасининг умумий ечимини топамиз:

$$y=C\cdot x+\psi(C).$$

(33) ва (33′) муносабатларни солиштириб, (33) тенгламадаги y' нинг ўрнига ихтиёрий ўзгармас C ни қўйиш натижасида Клеро тенгламасининг умумий ечими ҳосил бўлишини кўрамиз.

2) $x+\psi'(p)=0$ бўлсин. Бу тенгликдан $x=-\psi'(p)$ бўлиши келиб чиқади. Топилган x нинг бу қийматини (33) даги x нинг ўрнига қўямиз:

$$y=(-\psi'(p))\cdot p+\psi(p)=-p\psi'(p)+\psi(p).$$

Натижада берилган дифференциал тенгламанинг

$$\begin{cases} x=-\psi'(p), \\ y=-p\cdot\psi'(p)+\psi(p) \end{cases}$$

параметрик кўринишдаги ечими келиб чиқади.

Мисол. Ушбу

$$y=xy'+\frac{1}{2y'}$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу Клеро тенгламасидир. Унинг умумий ечимини тенгламадаги y' нинг ўрнига ихтиёрий ўзгармас c ни қўйиш билан топилади:

$$y=C\cdot x+\frac{1}{2C}\cdot$$

Берилган тенгламада $\psi(y')=\frac{1}{2y'}$ бўлиб, $\psi'(p)=-\frac{1}{2p^2}$ бўлади. Шу сабабли

$$x=-\psi'(p)$$

тенглик

$$x=\frac{1}{2p^2}$$

кўринишга келади.

Унда

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2p^2} \\ y=px+\dfrac{1}{2p} \end{cases}$$

берилган тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими (махсус ечими) бўлади.

10-§. ОШҚОРМАС КЎРИНИШДАГИ БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ АЙРИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Энди

$$\Phi\ (x,\ y,\ y')=0 \qquad (34)$$

дифференциал тенгламанинг чап томонидаги $\Phi(x,\ y,\ y')$ функцияда айрим аргументларнинг ошкор кўринишда қатнашмаган ҳолларини қараймиз.

1°. (34) тенгламада x ва y лар қатнашмасин. Бундай ҳолда (34) тенглама қуйидаги

$$\Phi\ (y')=0 \qquad (34')$$

кўринишга эга бўлади. Айтайлик,

$$y'=a \quad (a-\mathrm{const}) \qquad (34'')$$

бўлсин.

Унда (34″) тенгламанинг ечими $ax+c$ га тенг:

$$y=ax+c.$$

Бу тенгликдан эса $a=\frac{y-c}{x}$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $\Phi(y')=0$ тенгламанинг умумий ечими $\Phi\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(y')^6-3(y')^3+y'^2+y'-7=0$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу тенгламада

$$\Phi\ (y')=(y')^6-3\ (y')^3+(y')^2+y'-7$$

бўлади. Юқорида айтилганга кўра берилган тенгламанинг ечими

$$\Phi\left(\frac{y-c}{x}\right)=0,$$

яъни

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^6-3\left(\frac{y-c}{x}\right)^3+\left(\frac{y-c}{x}\right)^2+\frac{y-c}{x}-7=0$$

бўлади.

2°. (34) тенгламада y қатнашмасин. Бундай ҳолда (34) тенглама қуйидаги

$$\Phi(x,\ y')=0$$

кўринишга эга бўлади. Бу тенгламани t параметр киритиш билан

$$x=\varphi\ (t),\ y'=\psi\ (t)$$

иккита тенгламага алмаштирилади. Бунда $dy=y'dx$ эканини эътиборга олиб топамиз:

$$dy=y'\cdot dx\Rightarrow dy=\psi(t)\cdot d(\varphi(t))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy=\psi(t)\cdot\varphi'(t)\cdot dt\Rightarrow y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt+C.$$

Натижада,

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt+C\end{cases}$$

системага келамиз. Бу берилган дифференциал тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(y')^3-y'-x-1=0 \qquad (35)$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада y ўзгарувчи қатнашмайди. Агар параметр t сифатида y' олинса,

$$t=y',$$

унда бир томондан (35) тенгламага кўра

$$x=t^3-t-1,$$

иккинчи томондан эса

$$dy=y'dx\Rightarrow dy=t\cdot d(t^3-t-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy=t(3t^2-1)\,dt\Rightarrow y=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+C$$

бўлишини топамиз. Натижада

$$\begin{cases}x=t^3-t-1,\\ y=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+C\end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу берилган тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечимидир.

3°. (34) тенгламада x қатнашмасин. Бундай ҳолда (34) тенглама қуйидаги

$$\Phi(y, y')=0$$

кўринишга эга бўлади. Юқоридаги 2°- ҳолга ўхшаш, бу тенгламани t параметр киритиш билан

$$y=\varphi(t),\ y'=\psi(t)$$

иккита тенгламага айлантирилади. Бу ҳолда ҳам

$$dy=y'dx$$

эканини эътиборга олиб топамиз:

$$dy=y'dx\Rightarrow dx=\frac{dy}{y'}\Rightarrow dx=\frac{d\varphi(t)}{\psi(t)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow dx=\frac{\varphi'(t)\cdot dt}{\psi(t)}\Rightarrow x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+C.$$

Натижада,

$$\begin{cases} x=\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+C, \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

системага келамиз. Бу берилган дифференциал тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечими бўлади.

Мисол. Ушбу

$$(y')^5+(y')^3+y'-y+5=0$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу тенгламада x ўзгарувчи қатнашмайди. Агар параметр t сифатида y' олинса:

$$t=y',$$

$$y=t^5+t^3+t+5$$

бўлиб,

$$dy=y'dx \Rightarrow dx=\frac{dy}{y'} \Rightarrow dx=\frac{d(t^5+t^3+t+5)}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx=\left(5t^3+3t+\frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+\ln|t|+C$$

бўлиши топилади. Натижада

$$\begin{cases} x=\frac{5}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+\ln|t|+C, \\ y=t^5+t^3+t+5 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу берилган тенгламанинг параметрик кўринишдаги ечимидир.

9-БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича

$$\Phi(x, y, y', y'')=0 \tag{1}$$

бўлади. Бунда x — эркли ўзгарувчи, $y=y(x)$ — номаълум функция, y' ва y'' лар эса номаълум функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари.

Масалан, ушбу

1) $y\cdot y''-y'^2=0$,

2) $y''=\frac{\ln x}{x^2}$,

3) $x^2\cdot y\cdot y''=(y-xy')^2$,

4) $y''-3y'-2y=4x^2$

тенгламалар иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардир.

(1) тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. Фараз қилайлик, (1) тенгламада y қатнашмасин:

$$\Phi(x, y', y'')=0. \tag{2}$$

Бу ҳолда $y'=p$ алмаштириш натижасида $y''=p'$ бўлиб, (2) тенглама $\Phi(x, p, p')=0$ — биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y''-\frac{1}{x}y'=0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y'=p$ деб оламиз. Унда $y''=p'$ бўлиб, берилган тенглама қуйидаги $p'-\frac{1}{x}p=0$, яъни $\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p=0$ тенгламага келади. Уни ечамиз:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|p|=\ln|x|+\ln C_1\Rightarrow p=C_1\cdot x.$$

Демак, $p=y'=C_1\cdot x$. Кейинги тенгламанинг ечими $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$ бўлади.

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2.$$

2°. Фараз қилайлик, (1) тенгламада x ўзгарувчи қатнашмасин:

$$\Phi(y, y', y'')=0.$$

Бу ҳолда $y'=p$ алмаштириш бажариб, p ни y нинг функцияси сифатида қаралса, унда

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot y'=p\cdot\frac{dp}{dy}$$

бўлиб, берилган дифференциал тенглама қуйидаги

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)=0$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y\cdot y''-y'^2=0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y'=\frac{dy}{dx}=p$ дейилса, унда $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$ бўлиб, берилган тенглама қуйидаги $y\cdot p\frac{dp}{dy}-p^2=0$ кўринишга келади. Кейинги тенгламани ечамиз:

$$y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}-p^2=0, \xrightarrow[(p\neq 0)]{} \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|p|=\ln|y|+\ln C_1\Rightarrow p=C_1\cdot y.$$

Энди $p=y'$ эканини эътиборга олсак, унда

$$y'=C_1\cdot y$$

тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз:

$$y'=C_1\cdot y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=C_1\cdot y\Rightarrow\frac{dy}{y}=C_1\cdot dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|y|=C_1\cdot x+\ln C_2\Rightarrow\ln\left|\frac{y}{C_2}\right|=C_1\cdot x\Rightarrow y=C_2\cdot e^{C_1x}.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими

$$y=C_2\cdot e^{C_1x}$$

бўлади.

2-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛГАН ТЕНГЛАМАЛАР

Айрим ҳолларда

$$\Phi(x, y, y', y'')=0$$

тенгламани y'' га нисбатан ечиш мумкин бўлади:

$$y''=f(x, y, y'). \tag{3}$$

Одатда (3) тенглама *иккинчи тартибли ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама* дейилади.

(1), (3) дифференциал тенгламаларнинг ечими тушунчалари аввалдагидек киритилади.

Фараз қилайлик, (3) тенгламадаги $f(x, y, y')$ функция (учта ўзгарувчининг функцияси сифатида) R^3 фазодаги бирор D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас мусбат N сони мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(x, \bar{y}, \bar{y}') \in D$, $(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}') \in D$ нуқталар учун*

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{y}}')| \leqslant N(|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| + |\bar{y}' - \bar{\bar{y}}'|)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x, y, y')$ функция D соҳада y ва y' ўзгарувчилари бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.

(3) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

1-теорема. ***Агар***

$$y'' = f(x, y, y')$$

тенгламада $f(x, y, y')$ функция

$$D = \{(x, y, y') \in R^3 : |x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b, \ |y' - y_0'| \leqslant b\}$$

да узлуксиз бўлиб, y ва y' аргументлари бўйича Липшиц шартини бажарса, у ҳолда (3) дифференциал тенгламанинг $[x_0 - h, x_0 + h]$ да ($h = \min\left(a, \frac{b}{m}, \frac{1}{N}\right)$ $M = \max f(x, y, y')$) бошланғич

$$y|_{x=x_0} = y_0, \ y'|_{x=x_0} = y_0'$$

шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд бўлиб, у ягона бўлади.

Энди (3) дифференциал тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат x га боғлиқ бўлсин:

$$y'' = f(x). \tag{4}$$

Агар $y'' = \frac{dy'}{dx}$ эканини эътиборга олсак, унда (4) тенглама y' га нисбатан биринчи тартибли ушбу

$$\frac{dy'}{dx} = f(x)$$

тенгламага келади. Равшанки, бу тенгламанинг ечими

$$y' = \int f(x)\, dx + C_1$$

бўлади.

Кейинги тенгламадан топамиз:

$$dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx \Rightarrow y = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx +$$
$$+ C_2 \Rightarrow y = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1\int dx + C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2,$$

бу ерда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Шундай қилиб, $y''=f(x)$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx+C_1x+C_2.$$

Мисол. Ушбу

$$y''=xe^x$$

тенгламани ечинг. Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$y''=xe^x\Rightarrow\frac{dy'}{dx}=x\cdot e^x\Rightarrow dy'=xe^x dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\int xe^x dx+C\Rightarrow y'=xe^x-e^x+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=xe^x-e^x+C\Rightarrow dy=(xe^x-e^x+C_1)\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\int(xe^x-e^x+C_1)\,dx+C_2\Rightarrow y=(x-2)\,e^x+C_1x+C_2.$$

2°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат y га боғлиқ бўлсин:

$$y''=f(y). \tag{3'}$$

Бу тенгламани ечиш учун унинг ҳар икки томонини $2y'dx$ га кўпайтирамиз:

$$2y'\cdot y''dx=2y'\cdot f(y)\,dx.$$

Агар $2y'\cdot y''dx=d(y')^2$, $y'dx=dy$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик ушбу

$$d\,(y'^2)=2f(y)\,dy$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб

$$y'^2=2\int f(y)\,dy+C_1,$$

яъни

$$y'=\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}$$

бўлишини топамиз. Натижада, ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Уни ечамиз:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}\Rightarrow dy=\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}}=dx\Rightarrow\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}}=x+C_2.$$

Демак, (3′) тенгламанинг ечими

$$\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}}=x+C_2$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y''=y$$

дифференциал тенгламанинг

$$y_0|_{x_0=0}=1,\ y_0'|_{x_0=0}=0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини $2y'dx$ га кўпайтирамиз:

$$2y'y''dx=2yy'dx.$$

Равшанки,

$$2y'\cdot y''dx=d(y'^2),\ y'dx=dy.$$

Унда кейинги тенглама $d(y'^2)=2ydy$ кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини интеграллаб топамиз:

$$y'^2=2\frac{y^2}{2}+C_1=y^2+C_1.$$

Бошланғич шартга биноан $0=1+C_1$, яъни $C_1=-1$ бўлади. Демак,

$$y'^2=y^2-1. \tag{5}$$

Энди (5) дифференциал тенгламани ечамиз:

$$y'^2=y^2-1\Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^2-1}\Rightarrow\frac{dy}{\pm\sqrt{y^2-1}}=dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|y+\sqrt{y^2-1}|=\pm x+C_2.$$

Яна бошланғич шартга кўра $\ln|1+\sqrt{1-1}|=0+C_2$, яъни $C_2=0$ бўлади. Демак, $\ln|y+\sqrt{y^2-1}|=\pm x$. Бу тенгликдан $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$ ва ундан $\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}=e^{\mp x}$ бўлиши келиб чиқади. Махражда иррационалликдан қутулиш натижасида $y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x}$ ҳосил бўлади. Натижада $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$, $y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x}$ бўлиб, улардан $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

бўлади.

3°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат y' га боғлиқ бўлсин:

$$y''=f(y'). \tag{6}$$

Бу ҳолда $y'=z$ деб белгиласак, унда $y''=z'$ бўлиб, $z'=f(z)$ бўлади.

Равшанки,

$$\frac{dz}{dx}=f(z)\Rightarrow\frac{dz}{f(z)}=dx\Rightarrow\int\frac{dz}{f(z)}=x+C_1.$$

Фараз қилайлик, кейинги тенгликдан z ни топиш мумкин бўлсин, яъни

$$z=\varphi(x,\ C_1).$$

Унда

$$z=y'\neq\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)\Rightarrow dy=\varphi(x,C_1)\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\int\varphi(x,C_1)\,dx+C_2$$

бўлади. Бу эса (6) дифференциал тенгламанинг ечимидир.

Мисол. Ушбу

$$y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$y'=z$$

деб оламиз. Унда

$$y''=z'$$

бўлиб,

$$z'=(1+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

бўлади. Кейинги тенгламани ечамиз:

$$\frac{dz}{dx}=(1+z^2)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=x+C_1\Rightarrow\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=x+C_1.$$

Демак,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x+C_1.$$

Бу тенгликдан эса

$$y'=\frac{x+C_1}{\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}} \tag{7}$$

бўлиши келиб чиқади. (7) тенглама қуйидагича ечилади:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+C_1}{\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}}\Rightarrow dy=\frac{x+C_1}{\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}}\,dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+C_2=\pm\sqrt{1-(x+C_1)^2}\Rightarrow(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=1.$$

Бу берилган тенгламанинг ечимидир.

4°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция y ҳамда y' ларга боғлиқ бўлсин:

$$y''=f(y,\ y'). \qquad (8)$$

Бу тенгламада $y'=p$ алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$$

бўлиб, (8) тенглама қуйидаги

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y''=-\frac{1+y'^2}{y}$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y'=p$ алмаштириш бажарамиз. Унда $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$ бўлиб, берилган тенглама $y\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}+p^2+1=0$, яъни $\frac{p}{p^2+1}dp=-\frac{dy}{y}$ тенгламага келади. Уни интеграллаб топамиз:

$$\int\frac{p}{p^2+1}dp=-\int\frac{dy}{y}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=-\ln|y|+\ln C_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(p^2+1)\cdot y^2=C_1^2.$$

Демак, $(y'^2+1)\cdot y^2=C_1^2$. Кейинги тенгликдан $y'=\pm\frac{\sqrt{C_1^2-y^2}}{y}$ бўлиши келиб чиқади. Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уни ечамиз:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{C_1^2-y^2}}{y}\Rightarrow\pm\frac{y}{\sqrt{C_1^2-y^2}}dy=dx\Rightarrow\pm\int\frac{ydy}{\sqrt{C_1^2-y^2}}=$$

$$=\int dx\Rightarrow\pm\sqrt{C_1^2-y^2}=x+C_2\Rightarrow(x+C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг ечими:

$$(x+C_2)^2+y^2=C_1^2.$$

5°. Айтайлик, (3) тенгламанинг ўнг томонидаги функция x ҳамда y' ларга боғлиқ бўлсин:

$$y''=f(x,\ y').$$

Бу тенгламада $y'=p$ алмаштириш бажарамиз. Унда $y''=\frac{dp}{dx}$ бўлиб, берилган тенглама қуйидаги

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

биринчи тартибли дифференциал тенгламага келади.

Мисол. Ушбу

$$y''=\frac{1-2x^3y'}{x^4}$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада $y'=p$ алмаштириш бажарамиз. Унда $y''=\frac{dp}{dx}$ бўлиб, берилган тенглама қуйидаги $\frac{dp}{dx}=\frac{1-2x^3p}{x^4}$, яъни $\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=\frac{1}{x^4}$ чизиқли тенгламага келади. 8-боб, 3-§ да келтирилган (18′) формулага кўра

$$p=e^{\int -\frac{2}{x}dx}\left[C_1+\int\frac{1}{x^4}\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right]$$

бўлади. Бундан

$$p=e^{-2\ln|x|}\left[C_1+\int\frac{1}{x^4}e^{2\ln|x|}dx\right]=\frac{C_1}{x^2}-\frac{1}{x^3},$$

демак, $p=\frac{C_1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$. Бу тенгламанинг ечими $y=\frac{2}{x^2}-\frac{C_1}{x}+C_2$ бўлади.

3-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Чизиқли дифференциал тенглама тушунчаси. Номаълум функция $y=y(x)$ ва унинг y', y'' ҳосилалари биринчи даражада қатнашган

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=q(x) \tag{9}$$

тенглама *иккинчи тартибли чизиқли тенглама* дейилади. Бу ерда $p_1(x)$, $p_2(x)$ тенгламанинг *коэффициентлари,* $q(x)$ эса *озод ҳад* дейилиб, улар бирор (a, b) оралиқда аниқланган функциялардир.

(9) тенглама иккинчи тартибли чизиқли бир жинссиз дифференциал тенглама ҳам деб юритилади.

Агар (9) тенгламада $q(x)\equiv 0$ бўлса, яъни тенглама ушбу

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \tag{10}$$

кўринишга эга бўлса, уни *иккинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама* дейилади.

Масалан,

$$y''+xy'+(x^2+1)y=\cos x,$$
$$y''-4xy'+(4x^2-1)y=-3\cdot e^{x^2}$$

тенгламалар бир жинссиз дифференциал тенгламалар,

$$y''-\frac{1}{x}\cdot y'-xy=0,$$

$$y''-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot y'+(x+\sqrt{x})\cdot y=0$$

тенгламалар эса бир жинсли дифференциал тенгламалар бўлади.

Энди чизиқли дифференциал тенгламаларнинг иккита хоссасини келтирамиз.

1°. (9) тенгламада

$$x=\varphi(t)$$

($\varphi(t)$ икки марта дифференциалланувчи функция) алмаштириш бажарилса у яна чизиқли тенгламага айланади.

Исбот. (9) тенгламада $x=\varphi(t)$ алмаштириш бажарамиз. Равшанки,

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},\qquad (\varphi'(t)\neq 0)$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi'^2(t)}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

Натижада (9) тенглама ушбу

$$\frac{1}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}\cdot\frac{dy}{dt}+p_1(\varphi(t))\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}+p_2(\varphi(t))\cdot y=q(\varphi(t)),$$

яъни

$$y''-\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}-p(\varphi(t))\varphi'(t)\right)\cdot y'+p_2(\varphi(t))\cdot y=q(\varphi(t))$$

тенгламага келади. Бу иккинчи тартибли чизиқли тенгламадир.

2°. (9) тенгламада номаълум функция

$$y=u(x)\cdot z+v(x)\qquad (z=z(x))$$

чизиқли алмаштириш натижасида ($u(x)$, $v(x)$ икки марта дифференциалланувчи функциялар) яна чизиқли тенгламага айланади.

Исбот. (9) тенгламада

$$y=u(x)\cdot z+v(x)$$

алмаштириш бажарамиз. Равшанки,

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[u(x)\cdot z+v(x)]=u(x)\cdot z'+u'(x)\cdot z+v'(x),$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx}=\frac{d}{dx}[u(x)\cdot z'+u'(x)\cdot z+v'(x)]=$$
$$=u\cdot z''+2u'\cdot z'+u''\cdot z+v''.$$

Натижада (9) тенглама ушбу

$$u\cdot z''+2u'z'+u''z+v''+p_1(x)[u\cdot z'+u'z+$$
$$+v']+p_2(x)[u\cdot z+v]=q(x),$$

яъни

$$z''+\frac{1}{u}(2u'+p_1(x)\cdot u)\cdot z'+\frac{1}{u}(u''+p_1(x)\cdot u'+p_2(x)\cdot u)\cdot z=$$
$$=\frac{1}{u}\left[q(x)-v''-p_1(x)\cdot v'-p_2(x)\cdot v\right]$$

тенгламага келади. Бу иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир.

Эслатма. (10) бир жинсли тенгламада $y=u(x)\cdot z$ алмаштириш бажарилса, тенглама яна бир жинсли тенгламага айланади.

Энди (9) дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

2-теорема. *Агар*

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=q(x) \tag{9}$$

тенгламада $p_1(x)$, $p_2(x)$ *ҳамда* $q(x)$ *функциялар* X *тўпламда* $(X\subset R)$ *узлуксиз бўлса, у ҳолда* X *да* (9) *тенгламанинг*

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_0'$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва у ягона бўлади.

4-§. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1°. Ушбу параграфда

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \tag{10}$$

бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама ва унинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз.

Аввало баъзи тасдиқлар ва тушунчаларни келтирамиз.

3-теорема. *Агар* $y_1=y_1(x)$ *функция* (10) *тенгламанинг ечими бўлса,* $C\cdot y_1$ *ҳам* (C — *ихтиёрий ўзгармас сон) шу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Шартга кўра y_1 функция (10) тенгламанинг ечими. Демак,

$$y_1''+p_1(x)\cdot y_1'+p_2(x)y_1\equiv 0. \tag{11}$$

Энди

$$(C\cdot y_1)''+p_1(x)\cdot(C\cdot y_1)'+p_2(x)\cdot C\cdot y_1$$

ифодани қараймиз. Равшанки,

$$(C\cdot y_1)''=C\cdot y_1'',$$
$$(C\cdot y_1)'=C\cdot y_1'.$$

Шу тенгликларни ҳамда (11) муносабатни эътиборга олиб, топамиз:

$$(C\cdot y_1)''+p_1(x)\cdot(C\cdot y_1)'+p_2(x)\cdot C\cdot y_1=C\cdot y_1''+p_1(x)\cdot C\cdot y_1'+$$
$$+p_2(x)\cdot C\cdot y_1=C(y_1''+p_1(x)\cdot y_1'+p_2(x)\cdot y_1)=C\cdot 0=0.$$

Бу эса $C \cdot y_1$ функция берилган (10) дифференциал тенгламанинг ечими эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

4-теорема. ***Агар $y_1 = y_1(x)$ ҳамда $y_2 = y_2(x)$ функцияларнинг ҳар бири (10) тенгламанинг ечимлари бўлса, $y_1 + y_2$ функция ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.***

Исбот. Шартга кўра y_1 ҳамда y_2 функциялар (10) тенгламанинг ечимлари. Демак,

$$\begin{aligned} &y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1 \equiv 0, \\ &y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_2 \equiv 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Энди

$$(y_1 + y_2)'' + p_1(x)(y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2)$$

ифодани қараймиз. Равшанки,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' &= y_1'' + y_2'', \\ (y_1 + y_2)' &= y_1' + y_2'. \end{aligned}$$

Шу тенгликларни ҳамда (12) муносабатларни эътиборга олиб, топамиз:

$$\begin{aligned} &(y_1 + y_2)'' + p_1(x)(y_1 + y_2)' + p_2(x)(y_1 + y_2) = \\ &= y_1'' + y_2'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_1 + p_2(x) \cdot y_2 = \\ &= (y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1) + (y_2'' + p_1(x) \cdot y_2' + p_2(x) \cdot y_2) = 0. \end{aligned}$$

Бу эса $y_1 + y_2$ функция берилган (10) дифференциал тенгламанинг ечими эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

1-натижа. *Агар y_1 ҳамда y_2 функциялар* (10) *тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда $C_1 y_1 + C_2 y_2$ функция ҳам* (C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар) *шу тенгламанинг ечими бўлади.*

Бу натижанинг исботи юқорида келтирилган теоремалардан келиб чиқади.

2°. Шундай қилиб, $y_1 = y_1(x)$ ҳамда $y_2 = y_2(x)$ функциялар (10) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

функция ҳам (10) тенгламанинг ечими бўлар экан.

Табиий равишда, бу ечим берилган (10) дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўладими деган савол туғилади. Бу саволни ҳал қилиш функцияларнинг чизиқли эркли ҳамда чизиқли боғлиқ бўлиши тушунчаларини киритишни тақозо қилади.

Фараз қилайлик, (a, b) интервалда $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар берилган бўлсин.

2-таъриф. *Агар шундай α_1 ҳамда α_2 сонлар топилсаки, уларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиб, ушбу*

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) = 0$$

тенглик бажарилса, $\varphi_1(x)$ ҳамда $\varphi_2(x)$ функциялар (a, b) да чизиқли боғлиқ дейилади.

3-таъриф. *Агар $\varphi_1(x)$ ҳамда $\varphi_2(x)$ функциялар учун*

$$\alpha_1 \cdot \varphi_1(x) + \alpha_2 \cdot \varphi_2(x) = 0$$

тенглик фақат $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ *бўлгандагина бажарилса,* $\varphi_1(x)$ *ва* $\varphi_2(x)$ *лар* (a, b) *да чизиқли эркли функциялар* дейилади.

3°. Фараз қилайлик, $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ функциялар

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0$$

дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлсин.

Ушбу

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

функционал детерминант Вронский детерминанти дейилади.

5-теорема. ***Агар (10) тенгламанинг*** $y_1(x)$ ***ҳамда*** $y_2(x)$ ***ечимлари*** (a, b) ***да чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда*** $\forall x\in(a, b)$ ***да***

$$W(x)=0$$

бўлади.

Исбот. $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар (a, b) да чизиқли боғлиқ бўлсин. Унда

$$\alpha_1\cdot y_1(x)+\alpha_2\cdot y_2(x)=0$$

бўлиб, α_1 ҳамда α_2 сонларнинг камида биттаси нолдан фарқли. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб, α_1 ҳамда α_2 ларга нисбатан ушбу

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0, \\ \alpha_1\cdot y_1'(x)+\alpha_2\cdot y_2'(x)=0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ лар чизиқли боғлиқ бўлганлиги сабабли бу система тривиал бўлмаган ечимга эга. Бинобарин, системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=0 \quad (\forall x\in(a, b))$$

бўлади (1-том, 7-боб, 3-§). Демак, (a, b) да

$$W(x)=0.$$

Теорема исбот бўлди.

4°. Энди $W(x)=0$ бўлишидан $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимларнинг чизиқли боғлиқ бўлишини ифодалайдиган, шунингдек Вронский детерминантини тенгламанинг коэффициенти орқали ёзилишини кўрсатадиган теоремаларни исботсиз келтирамиз.

6-теорема. ***Агар бирор*** $x_0\in(a, b)$ ***нуқтада*** $W(x_0)=0$ ***бўлса, у ҳолда*** $y_1(x)$ ***ҳамда*** $y_2(x)$ ***ечимлар чизиқли боғлиқ бўлади.***

7-теорема. ***Ушбу***

$$W(x)=W(x_0)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt} \qquad (13)$$

формула ўринлидир, бунда $x_0\in(a, b)$.

Одатда (13) *Лиувилл (Остроградский — Лиувилл) формуласи* дейилади.

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1) Лиувилл формуласи $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимларнинг Вронский детерминанти (a, b) да айнан нолга тенг ёки (a, b) нинг бирор нуқтасида нолга айланмаслигини кўрсатади.

2) Агар Вронский детерминанти $W(x)=0$ бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар чизиқли боғлиқ бўлади ва аксинча.

3) Агар Вронский детерминанти $W(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлар чизиқли эркли бўлади.

5°. 4-таъриф. *Иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламанинг $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ечимлари чизиқли эркли бўлса, улар тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси дейилади.*

8-теорема. ***Иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама фундаментал ечимлар системасига эга.***

Исбот. Маълумки,

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0$$

тенглама (бунда $p_1(x)$ ва $p_2(x)$ лар (a, b) да узлуксиз функциялар), бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга.

Иккита турли бошланғич шартларни қараймиз:

$$y_1|_{x=x_0}=1,\ y_1'|_{x=x_0}=0,$$

$$y_2|_{x=x_0}=0,\ y_2'|_{x=x_0}=1.$$

Бу шартларни қаноатлантирувчи $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ ечимлар мавжуд. Дифференциал тенглама ечимларининг x_0 нуқтадаги Вронский детерминанти

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

бўлади. Бинобарин, $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ лар берилган тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари, ягона фундаментал ечимлар системаси бўлади. Теорема исбот бўлди.

9-теорема. ***Агар $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ лар (a, b)да***

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \qquad (10)$$

тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлса, бу тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$$

кўринишда бўлади, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Исбот. $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ лар (a, b) да (10) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлсин. Унда 8-теоремага кўра

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (x\in(a, b))$$

бўлади. 1- натижага кўра $y=C_1\cdot y_1(x)+C_2y_2(x)$ ҳам (10) тенгламанинг ечими бўлади.

(a, b) да ихтиёрий x_0 нуқта олиб, бошланғич шартларни қуйидагича

$$y_1|_{x=x_0}=y_1(x_0),\ y_1'|_{x=x_0}=y_1'(x_0),$$
$$y_2|_{x=x_0}=y_2(x_0),\ y_2'|_{x=x_0}=y_2'(x_0),$$

аниқлаймиз. Равшанки,

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)=y_0, \\ C_1\cdot y_1'(x_0)+C_2\cdot y_2'(x_0)=y_0' \end{cases}$$

система, $W(x_0)\neq 0$ бўлганлиги сабабли ягона $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ ечимга эга. Демак, $\bar{C}_1\cdot y_1(x)+\bar{C}_2\cdot y_2(x)$ ечим ихтиёрий бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечим бўлганлигидан

$$y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$$

нинг берилган (10) тенгламанинг умумий ечими эканлиги келиб чиқади. Теорема исбот бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y''-\frac{x}{x-1}\cdot y'+\frac{1}{x-1}\cdot y=0 \qquad (x\neq 1)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=x$ функциялар берилган тенгламанинг ечимлари бўлишини кўрсатамиз:

$$y_1(x)=e^x,\ y_1'(x)=e^x,\ y_1''(x)=e^x;$$
$$y_2(x)=x,\ y_2'(x)=1,\ y_2''(x)=0,$$
$$e^x-\frac{x\cdot e^x}{x-1}+\frac{1}{x-1}\cdot e^x=e^x\left(1-\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)\equiv 0,$$
$$0-\frac{x}{x-1}\cdot 1+\frac{1}{x-1}\cdot x\equiv 0.$$

Бу $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=x$ ечимлар берилган тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади, чунки

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix}=e^x(1-x)$$

бўлиб, $W(0)=1\neq 0$. Демак, 9- теоремага кўра берилган теореманинг умумий ечими

$$y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot x$$

бўлади, бунда C_1, C_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

6°. Агар

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \tag{10}$$

тенгламанинг битта ечими маълум бўлса, унда (10) тенгламани биринчи тартибли дифференциал тенгламага келтириш, шунингдек бу ечим билан чизиқли боғлиқ бўлмаган иккинчи ечимни ҳам топиш мумкинлиги ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

10-теорема. ***Агар $y_2(x)$ функция (10) дифференциал тенгламанинг битта ечими бўлса, у ҳолда (10) тенгламани ечиш биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламани ечишга келади.***

Исбот. Шартга кўра $y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими. Бинобарин,

$$y_1''+p_1(x)\cdot y_1'+p_2(x)\cdot y_1\equiv0.$$

Қуйидаги

$$y=y_1\cdot z \qquad (z=z(x))$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$y'=y_1'\cdot z+y_1\cdot z',$$
$$y''=y_1''\cdot z+2y_1'\cdot z'+y_1\cdot z''$$

бўлади. Бу y, y', y'' ларнинг қийматларини (10) тенгламадаги y, y', y'' лар ўрнига қўйиб, y_1 функция (10) тенгламанинг ечими эканини эътиборга олиб топамиз:

$$y_1''\cdot z+2y_1'\cdot z'+y_1\cdot z''+p_1(x)\cdot(y_1'\cdot z+y_1\cdot z')+p_2(x)\cdot y_1\cdot z=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(y_1''+p_1(x)y_1'+p_2(x)\cdot y_1)\cdot z+(2y_1'+p_1(x)\cdot y_1)\cdot z'+y_1\cdot z''=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1\cdot z''+(2y_1'+p_1(x)\cdot y_1)\cdot z'=0,$$

кейинги тенгламада $z'=u$ $(u=u(x))$ деб олинса, натижада ушбу

$$y_1\cdot u'+(2y_1'+p_1(x)\cdot y_1)\cdot u=0 \qquad (14)$$

биринчи тартибли дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, (10) тенгламани ечиш (14) тенгламани ечишга келди. Теорема исбот бўлди.

7°. Агар

$$y=y_1\cdot z \text{ ва } z'=u \quad (u=u(x))$$

муносабатлардан

$$y=y_1\cdot\int u(x)\,dx \qquad (15)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (10) тенгламада (15) муносабат билан алмаштириш бажарилса, (10) тенглама биринчи тартибли дифференциал тенгламага келишини кўрамиз.

11-теорема. ***Агар $y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда шу ечим билан чизиқли эркли бўлган иккинчи ечим ушбу***

$$y_2=y_2(x)=y_1\cdot\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

формула билан топилади.

Исбот. Айтайлик, $y_1=y_1(x)$ функция (10) тенгламанинг ечими бўлсин:

$$y_1''+p_1(x)\,y_1'+p_2(x)\cdot y_1=0.$$

(10) тенгламада

$$y=y_1\int u\,dx \qquad (16)$$

алмаштириш бажарамиз:

$$y'=y_1'\cdot\int udx+y_1\cdot u,$$

$$y''=y_1''\int udx+2y_1'u+y_1\cdot u'.$$

Бу y, y', y'' ларнинг қийматларини (10) тенгламадаги y, y', y'' лар ўрнига қўйиб топамиз:

$$y_1''\cdot\int udx+2y_1'u+y_1\cdot u'+p_1(x)\,[y_1'\cdot\int udx+y_1\cdot u]+p_2(x)\cdot y_1\int udx=$$

$$=0\Rightarrow(y_1''+p_1(x)y_1'+p_2(x)y_1)\cdot\int udx+y_1u'+[2y_1'+p_1(x)y_1]u=$$

$$=0\Rightarrow y_1u'+(2y_1'+p_1(x)\cdot y_1)\,u=0.$$

Кейинги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни ечамиз:

$$y_1\cdot u'+(2y_1'+p_1(x)\cdot y_1)\,u=0\Rightarrow y_1\cdot\frac{du}{dx}=-(2y_1'+p_1(x)\cdot y_1)\,u\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{du}{u}=-\frac{2y_1'+p_1(x)\cdot y_1}{y_1}dx\Rightarrow\ln|u|=-\int\frac{2y_1'+p_1(x)y_1}{y_1}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|u|=-2\int\frac{dy_1}{y_1}-\int p_1(x)dx\Rightarrow\ln|u|=$$

$$=-2\ln|y_1|-\int p_1(x)dx\Rightarrow u=\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}.$$

(15) муносабатдан фойдаланиб

$$y=y_1\cdot\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

бўлишини топамиз. Бу эса теоремани исботлайди. Келтирилган теоремадан мисоллар ечишда кўп фойдаланилади.

Мисол. Агар

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

тенгламанинг битта ечими

$$y_1=\frac{\sin x}{x}$$

бўлса, унинг умумий ечимини топинг.

Берилган тенгламада

$$y=y_1\int u(x)dx$$

алмаштиришни бажарамиз, бунда u — номаълум функция. Равшанки,

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\int udx+\frac{\sin x}{x}u,$$

$$y''=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}\int udx+2\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}u+\frac{\sin x}{x}u'.$$

Бу қийматларни берилган тенгламадаги y, y', y'' ларнинг ўрнига қўйиб топамиз:

$$-\frac{\sin x}{x}\int u dx-2\frac{\cos x}{x^2}\int u dx+2\cdot\frac{\sin x}{x^3}\int u dx+2\frac{\cos x}{x}u-2\frac{\sin x}{x^2}u+$$

$$+\frac{\sin x}{x}u'+2\frac{\cos x}{x^2}\int u dx+2\frac{\sin x}{x^2}u-2\frac{\sin x}{x^3}\int u dx+\frac{\sin x}{x}\int u dx=0.$$

Бундан эса

$$2\frac{\cos x}{x}u+\frac{\sin x}{x}u'=0$$

тенглама ҳосил бўлади. Тенгламани ечамиз:

$$\frac{du}{u}=-2\frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow \int\frac{du}{u}=-2\int\frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u|=-2\ln|\sin x|+\ln c_1 \Rightarrow u=\frac{C_1}{\sin^2 x}$$

Энди $y=\frac{\sin x}{x}\int u dx$ эканлигини эътиборга олсак,

$$y=\frac{\sin x}{x}\int\frac{C_1}{\sin^2 x}dx=C_1\frac{\sin x}{x}(-\mathrm{ctg}x+\tilde{C}_2)=-C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}$$

бўлади.

Демак,

$$y=-C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}.$$

5-§. БИР ЖИНССИЗ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1°. Ушбу параграфда иккинчи тартибли бир жинссиз чизиқли

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=q(x) \tag{9}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунда (9) тенгламага мос бўлган

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

бир жинсли чизиқли тенглама ҳақидаги маълумотлардан фойдаланамиз.

Маълумки, (9) тенгламадаги $p_1(x)$, $p_2(x)$ ва $q(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) да узлуксиз бўлса, у ҳолда (9) тенгламанинг

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y'_0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва бу ечим ягона бўлади.

12-теорема. ***Бир жинссиз чизиқли дифференциал тенглама***

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=q(x)$$

нинг умумий ечими шу тенгламанинг бирор хусусий ечими ва бир жинсли чизиқли тенглама

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \tag{10}$$

нинг умумий ечими йиғиндисидан иборат бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функция (a, b) да (9) тенгламанинг хусусий ечими, $u(x)$ функция эса (10) тенгламанинг умумий ечими бўлсин. Унда

$$\begin{gathered}\varphi''(x)+p_1(x)\cdot\varphi'(x)+p_2(x)\cdot\varphi(x)\equiv q(x),\\ u''(x)+p_1(x)\cdot u'(x)+p_2(x)\cdot u(x)\equiv 0\end{gathered}$$

бўлади. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$\begin{gathered}u''(x)+\varphi''(x)+p_1(x)\cdot u'(x)+p_1(x)\cdot\psi'(x)+\\ +p_2(x)\cdot u(x)+p_2(x)\cdot\varphi(x)\equiv q(x)\Rightarrow(U(x)+\varphi(x))''+\\ +p_1(x)\,(U(x)+\varphi(x))'+p_2(x)\,(u(x)+\varphi(x))\equiv q(x).\end{gathered}$$

Демак,

$$y=u(x)+\varphi(x)$$

функция (9) тенгламанинг ечими бўлар экан.

Маълумки, бир жинсли (10) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)$$

кўринишда бўлиб, бунда $y_1(x)$, $y_2(x)$ фундаментал ечимлар системаси, c_1 ва c_2 лар эса ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлади. Демак,

$$y=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)+\varphi(x). \tag{17}$$

Энди (17) тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб топамиз:

$$y'=c_1\cdot y_1'(x)+c_2\cdot y_2'(x)+\varphi'(x).$$

Натижада, ушбу

$$\begin{cases}c_1y_1+c_2y_2=y-\varphi(x),\\ c_1y_1'+c_2y_2'=y'-\varphi'(x)\end{cases} \tag{18}$$

система ҳосил бўлади. Бу системада $y_1(x)$, $y_2(x)$ лар (10) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси. Бинобарин, $\forall x\in(a, b)$ да

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Демак, $\forall x_0 \in (a, b)$ да ҳамда $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$ ва $\varphi_0=\varphi(x_0)$ ларнинг ҳар қандай қийматларида (18) система c_1 ҳамда c_2 ларга нисбатан ечимга эга. Бу ҳол

$$y=u(x)+\varphi(x)=c_1\cdot y_1(x)+c_2\cdot y_2(x)+\varphi(x)$$

нинг (9) бир жинссиз дифференциал тенглама умумий ечим эканини билдиради. Теорема исбот бўлди.

2⁰. Энди (9) бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечимини топиш усулларидан бирини келтирамиз.

Фараз қилайлик,

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)y=q(x)$$

бир жинссиз тенглама берилган бўлсин. Бу тенгламада $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ лар (a, b) да берилган узлуксиз функциялар.

Тенгламага мос бир жинсли

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

тенгламани қараймиз. Айтайлик, $y_1=y_1(x)$ ва $y_2=y_2(x)$ бу тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлсин. Унда (10) тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

бўлади. Бу ерда c_1, c_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар. Албатта, $y=c_1y_1+c_2y_2$ функция бир жинссиз (9) тенгламанинг ечими бўлмайди.

$y=c_1y_1+c_2y_2$ даги c_1 ва c_2 ларни x ўзгарувчининг шундай функцияси бўлсин деб қараймизки,

$$y=c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)\cdot y_2 \qquad (18')$$

функция (9) бир жинссиз тенгламанинг ечими бўлсин. Масала шундай $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларни топишдан иборат. Шу мақсадни кўзлаб (18′) тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y'=c_1(x)\cdot y_1'+c_2(x)\cdot y_2'+c_1'(x)\cdot y_1+c_2'(x)\cdot y_2.$$

Қаралаётган $c_1(x)$, $c_2(x)$ лар учун

$$y_1c_1'(x)+y_2c_2'(x)=0$$

бўлсин деб қараймиз. Натижада

$$y'=c_1(x)\cdot y_1'+c_2(x)\cdot y_2' \qquad (19)$$

бўлади.

(19) тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y''=c_1(x)\cdot y_1''+c_2(x)\cdot y_2''+c_1'(x)\cdot y_1'+c_2'(x)\cdot y_2'. \tag{20}$$

Энди (18), (19) ва (20) муносабатларда ифодаланган y, y', y'' ларни (9) тенгламадаги y, y', y'' лар ўрнига қўйиб топамиз:

$$c_1(x)\cdot y_1''+c_2(x)\cdot y_2''+y_1'c_1'(x)+y_2'\cdot c_2'(x)+$$

$$p_1(x)\cdot(c_1(x)\cdot y_1'+c_2(x)\cdot y_2')+p_2(x)\cdot(c_1(x)\cdot y_1+c_2(x)y_2)=q(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(x)\,(y_1''+y_1'\cdot p_1(x)+p_2(x)\,y)+c_2(x)\,(y_2''+p_1(x)\cdot y_2'+$$

$$+p_2(x)y_2)+y_1'\cdot c_1'(x)+y_2'\cdot c_2'(x)=q(x).$$

Агар

$$y_1''+p_1(x)\cdot y_1'+p_2(x)\cdot y_1\equiv 0,$$

$$y_2''+p_1(x)\cdot y_2'+p_2(x)\cdot y_2\equiv 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглама ушбу

$$y_1'\cdot c_1'(x)+y_2'\cdot c_2'(x)=q(x)$$

кўринишга келади.

Натижада $c_1'(x)$ ҳамда $c_2'(x)$ ларни топиш учун қуйидаги

$$\begin{cases} y_1\cdot c_1'(x)+y_2\cdot c_2'(x)=0, \\ y_1'\cdot c_1'(x)+y_2'\cdot c_2'(x)=q(x) \end{cases} \tag{21}$$

системага келамиз. Бу система коэффициентларидан тузилган Вронский детерминанти

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$\forall x\in(a,\ b)$ да нолдан фарқлидир. Демак, система ягона ечимга эга. (21) системани ечишда 1-том, 7-боб, 3-§ да келтирилган формуладан фойдаланамиз:

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ q(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)}=\frac{-y_2 q(x)}{W(x)},$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & q(x) \end{vmatrix}}{W(x)}=\frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}.$$

Шундай қилиб $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларни топиш учун ушбу

$$c_1'(x)=-\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)},\quad c_2'(x)=\frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}$$

ўзгарувчиларн ажраладиган дифференциал тенгламалар ҳосил бўлди. Уларни ечамиз:

$$c_1'(x) = -\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow \frac{dc_1(x)}{dx} = -\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dc_1(x) = \frac{-y_2\cdot q(x)}{W(x)}dx \Rightarrow c_1(x) = -\int\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)}dx + \bar{c}_1.$$

$$c_2'(x) = \frac{y_1 q(x)}{W(x)} \Rightarrow \frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dc_2(x) = \frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}dx \Rightarrow c_2(x) = \int\frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}dx + \bar{c}_2.$$

Топилган $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларнинг бу қийматларини (18) ифодадаги $c_1(x)$ ҳамда $c_2(x)$ ларнинг ўрнига қўямиз:

$$y = \left[-\int\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)}dx + \bar{c}_1\right]y_1 + \left(\int\frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}dx + \bar{c}_2\right)y_2 =$$

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1$$

Бу (9) бир жинссиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади. Кейинги тенгликдан кўринадики, (9) бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x) = y_2\int\frac{y_1 q(x)}{W(x)}dx - y_1\int\frac{y_2 q(x)}{W(x)}dx \qquad (22)$$

бўлади.

Хусусий ечимни топишдаги бу усул Лагранж усули деб аталади.

Мисол. Ушбу

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1$$

бир жинссиз тенглама берилган. Агар бу тенгламага мос бир жинсли

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

тенгламанинг битта ечими $y_1 = x^2$ бўлса, берилган бир жинссиз тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бир жинсли

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

тенгламаниг умумий ечимини топамиз. Шартга кўра бу тенгламанинг битта $y_1 = x^2$ ечими берилган. Унинг иккинчи ечимини ушбу бобнинг 3-§ да келитирилган

$$y_2 = y_1\cdot\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

формуладан фойдаланиб топамиз.

Равшанки, $p_1(x)=-\frac{4}{x}$. Унда $-\int p(x)dx=\int\frac{4}{x}dx=4\ln|x|=\ln x^4$ бўлиб, $e^{-\int p_1(x)dx}=e^{\ln x^4}=x^4$ бўлади. Натижада:

$$y_2=x^2\int\frac{x^4}{x^4}dx=x^2x=x^3.$$

Бу $y_1=x^2$, $y_2=x^3$ лар бир жинсли тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Унда тенгламанинг умумий ечими

$$\bar{y}=c_1\cdot x^2+c_2\cdot x^3$$

бўлади.

Энди берилган бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими $\varphi(x)$ ни топамиз. Хусусий ечимни топишда (22) формула

$$\varphi(x)=y_2\cdot\int\frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}dx-y_1\int\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)}dx$$

дан фойдаланамиз.

Агар

$$y_1=x^2;\ y_2=x^3;\ q(x)=x^2-1,$$

хамда

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix}=3x^4-2x^4=x^4$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\varphi(x)=x^3\int\frac{x^2(x^2-1)}{x^4}dx-x^2\int\frac{x^3(x^2-1)}{x^4}dx=$$

$$=x^3\int(1-x^{-2})dx-x^2\int\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=x^3\left(x-\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)-x^2\left(\frac{x^2}{2}-\ln|x|\right)=$$

$$=x^4+x^2-\frac{1}{2}x^4+x^2\ln|x|=\frac{1}{2}x^4+x^2+x^2\ln|x|$$

эканини топамиз. Демак, берилган бир жинссиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=\bar{y}+\varphi(x)=c_1x^2+c_2x^3+\frac{1}{2}x^4+x^2+x^2\ \ln|x|=$$

$$=(c_1+1+\ln|x|)x^2+c_2x^3+\frac{1}{2}x^4$$

бўлади.

10-БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу бобда қуйидаги

$$y''+a_1y'+a_2y=q(x), \tag{1}$$

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \tag{2}$$

иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларни ўрганамиз. Бу ерда a_1, a_2 — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $q(x)$ эса узлуксиз функция.

Одатда, (1) тенглама *бир жинссиз чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама,* (2) тенглама эса *бир жинсли чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама* дейилади. Масалан:

$$y''-3y'+2y=\sin x,$$

$$y''+2y'-3y=x^2e^x$$

тенгламалар бир жинссиз ўзгармас коэффициентли тенгламалар,

$$y''+y'-2y=0,$$

$$y''-2y'+y=0$$

тенгламалар эса бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар бўлади.

1-§. БИР ЖИНСЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Маълумки, иккинчи тартибли бир жинсли

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \tag{2}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг фундаментал ечимлар системаси $y_1(x)$ ҳамда $y_2(x)$ ларни топиш етарлидир. Шуни эътиборга олиб, аввало (2) тенгламанинг хусусий ечимларини топамиз. (2) тенгламанинг хусусий ечимларини

$$y=e^{kx}$$

кўринишда излаймиз, бунда k — ўзгармас номаълум сон.

Равшанки,

$$y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

бўлади. Бу y, y' ҳамда y'' ларнинг қийматларини (2) тенгламадаги y, y', y'' ларнинг ўрнига қўйиб топамиз:

$$k^2 e^{kx} + k \cdot a_1 e^{kx} + a_2 \cdot e^{kx} = 0,$$

яъни

$$e^{kx} \cdot (k^2 + a_1 \cdot k + a_2) = 0.$$

Ҳар доим $e^{kx} > 0$ бўлганлиги сабабли

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \tag{3}$$

бўлади.

Шундай қилиб, (2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими бўладиган

$$y = e^{kx}$$

ифодадаги k (3) квадрат тенгламанинг илдизи бўлиши керак экан.

Одатда

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

тенглама (2) дифференциал тенгламанинг ***характеристик тенгламаси*** дейилади.

Демак, характеристик тенгламанинг илдизларига кўра (2) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари топилар экан.

Маълумки, (3) квадрат тенглама иккита турли ҳақиқий илдизларга, ёки бир-бирига тенг бўлган битта каррали ҳақиқий илдизга ёки комплекс илдизларга эга бўлиши мумкин. Бу ҳолларга қараб дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари турлича бўлади. Бу ҳолларни алоҳида қараймиз.

1°. (3) характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлсин:

Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

функциялар берилган (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар (2) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Чунки, бу системанинг Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2) x} \cdot (k_2 - k_1)$$

бўлиб, $k_1 \neq k_2$ бўлганлиги сабабли $W(x) \neq 0$ бўлади.

Демак,

$$y_1=e^{k_1x},\ y_2=e^{k_2x}$$

функциялар фундаментал ечимлар системаси.

Унда (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_2x}$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y''-3y'+2=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз. У

$$k^2-3k+2=0$$

бўлади. Равшанки, бу квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1=1$, $k_2=2$ бўлади. Демак, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

бўлади.

2°. (3) характеристик тенглама бир-бирига тенг бўлган каррали илдизга эга бўлсин: $k_1=k_2=k$ $(k_1=-\frac{a_1}{2})$. Бу ҳолда

$$y_1=e^{kx}$$

функция (2) дифференциал тенгламанинг битта хусусий ечими бўлади.

Берилган дифференциал тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини 9- бобнинг 3-§ ида келтирилган

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}dx$$

формуладан фойдаланиб топамиз.

Агар

$$y_1=e^{kx},\ p_1(x)=a_1=-2k\ (k=-\frac{a_1}{2})$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$y_2=e^{kx}\cdot\int\frac{e^{-\int(-2k)dx}}{e^{2kx}}dx=e^{kx}\cdot\int\frac{e^{2kx}}{e^{2kx}}dx=e^{kx}\int dx=e^{kx}\cdot x$$

бўлишини топамиз.

Демак, (2) тенгламанинг иккинчи хусусий ечими

$$y_2 = x \cdot e^{kx}$$

бўлади.

Бу $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$ ечимлар (2) дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Чунки, бу системанинг Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (1+kx)e^{kx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{kx} \cdot e^{kx} \begin{vmatrix} 1 & x \\ k & (1+kx) \end{vmatrix} = e^{2kx} \cdot (1 + kx - kx) = e^{2kx}$$

бўлиб, ҳар доим $e^{2kx} > 0$ бўлганлиги сабабли $W(x) \neq 0$ бўлади.

Демак,

$$y_1 = e^{kx} \quad y_2 = e^{kx} \cdot x$$

функциялар фундаментал ечимлар системаси.

Унда (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}$$

бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y'' - 2y' + y = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

бўлади. Квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1 = k_2 = 1$. Унда берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1 = e^x, \; y_2 = xe^x$$

бўлиб, умумий ечими эса

$$y = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

дифференциал тенгламанинг

$$y_0 = y \,|_{x_0=2} = 4 \qquad y'_0 = y' \,|_{x_0=2} = 0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$k^2+4k+4=0.$$

Бу квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1=k_2=-2$ бўлади. Демак, дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1=e^{-2x},\ y_2=x\cdot e^{-2x}$$

бўлиб, умумий ечими эса

$$y=c_1e^{-2x}+c_2\cdot x\cdot e^{-2x} \tag{4}$$

га тенг.

Энди бошлангич шартлардан фойдаланиб, c_1 ҳамда c_2 ларни топамиз.

$x_0=2$ да $y_0=4$ бўлишидан

$$c_1\cdot e^{-2\cdot 2}+c_2\cdot e^{-2\cdot 2}\cdot 2=4,$$

$x_0=2$ да $y'_0=0$ бўлишидан

$$(c_1e^{-2x}+c_2\cdot x\cdot e^{-2x})'_{x=2}=$$
$$=c_1\cdot e^{-2x}\cdot(-2)+c_2\cdot e^{-2x}-c_2x\cdot e^{-2x}\cdot(-2))_{x=2}=$$
$$=-2c_1\cdot e^{-4}+c_2e^{-4}+c_2\cdot 2\cdot(-2)\cdot e^{-4}=e^{-4}(-2c_1-3c_2)=0$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада c_1 ҳамда c_2 ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} c_1\cdot e^{-4}+2c_2\cdot e^{-4}=4, \\ (-2c_1-3c_2)e^{-4}=0, \end{cases}$$

яъни

$$\begin{cases} c_1+2c_2=4e^4, \\ 2c_1+3c_2=0 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб

$$c_1=-12e^4,\ c_2=8e^4$$

бўлишини топамиз. c_1 ва c_2 ларнинг қийматини (4) муносабатдаги c_1 ва c_2 лар ўрнига қўямиз:

$$y=-12e^4\cdot e^{-2x}+8e^4\cdot x\cdot e^{-2x}=$$
$$=-12e^{4-2x}+8x\cdot e^{4-2x}=e^{4-2x}(8x-12).$$

Демак, берилган дифференциал тенгламанинг изланаётган ечими

$$y=4e^{4-2x}(2x-3)$$

бўлади.

3°. (3) характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар бўлсин: $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, $\beta\neq0$.

Характеристик тенгламанинг бу илдизларига (2) дифференциал тенгламанинг ушбу

$$\varphi_1(x)=e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad \varphi_2(x)=e^{(\alpha-i\beta)x}$$

хусусий ечимлари тўғри келади.

9-бобнинг 3-§ ида келтирилган теоремаларга кўра

$$y_1=\frac{1}{2}[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)],$$

$$y_2=\frac{1}{2i}[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]$$

функциялар ҳам (2) дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлади.

Энди қуйидаги

$$e^{i\gamma}=\cos\gamma+i\sin\gamma$$

Эйлер формуласидан (қаралсин, [1]) фойдаланиб топамиз:

$$y_1=\frac{1}{2}(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))=\frac{1}{2}(e^{(\alpha+i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x})=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}+e^{\alpha x}\cdot e^{-ix\beta})=\frac{1}{2}e^{\alpha x}(e^{i\beta x}+e^{-i\beta x})=$$

$$=\frac{1}{2}e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x+\cos\beta x-i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,$$

$$=\frac{1}{2i}(e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}-e^{\alpha x}\cdot e^{-ix\beta})=\frac{1}{2i}e^{\alpha x}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})=$$

$$=\frac{1}{2i}(e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}-e^{\alpha x}\cdot e^{-ix\beta})=\frac{1}{2i}e^{\alpha x}(e^{i\beta x}-e^{-i\beta x})=$$

$$=\frac{1}{2i}e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x-\cos\beta x+i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\ .$$

Шундай қилиб, берилган (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$$

кўринишда бўлар экан.

Бу y_1 ҳамда y_2 ечимлар (2) дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Чунки, бу системанинг Вронский детерминанти

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x+e^{\alpha x}(-\sin\beta x)\beta & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x \end{vmatrix}=$$

$$=e^{2\alpha x}[\cos\beta x(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)-\sin\beta x(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x)]=$$

$$=e^{2\alpha x}\beta\cdot(\cos^2\beta x+\sin^2\beta x)=\beta\cdot e^{2\alpha x}$$

бўлиб, ҳар доим $e^{2\alpha x}>0$ ва $\beta\neq 0$ бўлганлиги сабабли $W(x)\neq 0$ бўлади.

Демак,

$$y_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$$

функциялар фундаментал ечимлар системаси.

Унда (2) бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x=e^{\alpha x}(c_1\cdot\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y''+y'+y=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Берилган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$k^2+k+1=0,$$

Бу квадрат тенгламанинг илдизлари

$$k_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad k_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

бўлади. Демак, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Берилган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\quad y_2=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

бўлиб, умумий ечими

$$y=c_1\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x=$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

бўлади.

2-§. БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ЎЗГАРМАС ҚОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Мазкур китобнинг 9- боб, 5- § да *иккинчи тартибли бир жинсли бўлмаган* чизиқли дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш батафсил баён этилди. У ерда дифференциал тенгламанинг коэффициентлари $p_1(x)$ ва $p_2(x)$ лар x ўзгарувчининг функциялари эди.

Ушбу параграфда, хусусий ҳол — $p_1(x)$ ҳамда $p_2(x)$ лар ўзгармас сонлар бўлган ҳолни қараймиз.

Фараз қилайлик,

$$y'' + a_1y' + a_2y = q(x) \tag{1}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин, бунда a_1, a_2 — ўзгармас ҳақиқий сонлар, $q(x)$ эса узлуксиз функция.

Албатта, ўқувчи бундай тенгламани ечиш масаласини 9- боб, 5- § да келтирилган усул билан, яъни:

1) (1) дифференциал тенгламага мос

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{2}$$

бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини (бундай тенгламанинг умумий ечимини топиш 1- § да ўрганилди) топиш,

2) Лагранж усули билан (1) тенгламанинг битта хусусий ечимини топиш,

3) (2) тенгламанинг умумий ечими билан (1) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисини топиш билан ҳал қила олиши мумкин. Бироқ, бунда (1) тенгламанинг хусусий ечимини топишда анча қийинчиликлар содир бўлади.

Айрим ҳолларда, яъни (1) тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция маълум кўринишга эга бўлган ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечими бирмунча соддароқ йўл билан топилиши мумкин. Қуйида шу масалалар билан шуғулланамиз.

1°. Айтайлик,

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = q(x) \tag{1}$$

тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция n-даражали кўпҳад бўлсин:

$$q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n.$$

Икки ҳолни алоҳида-алоҳида қараймиз.

а) (1) тенгламада $a_2 \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечимини қуйидаги

$$v(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2 \cdot x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n \tag{4}$$

кўринишда излаймиз. Бунда A_0, A_1, A_2, ..., A_n номаълум ўзгармас сонлар.

$v(x)$ функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$v'(x) = n \cdot A_0 \cdot x^{n-1} + (n-1) \cdot A_1 \cdot x^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}x + A_{n-1},$$

$$v''(x) = n(n-1)A_0 \cdot x^{n-2} + (n-1)(n-2) \cdot A_1 \cdot x^{n-3} + \dots + 2 \cdot 1 \cdot A_{n-2}.$$

Бу $v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$ ҳамда $q(x)$ ларнинг ифодаларини мос равишда (1) тенгламадаги y, y', y'' ҳамда $q(x)$ ларнинг ўрнига қўямиз:

$$n(n-1)A_0x^{n-2}+(n-1)\ (n-2)A_1x^{n-3}+\ldots+2A_{n-2}+a_1(n\cdot A_0x^{n-1}+$$
$$+(n-1)A_1\cdot x^{n-2}+\ldots+2A_{n-2}x+A_{n-1})+a_2(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+$$
$$+A_{n-1}x+A_n)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n.$$

Кейинги тенгликда x нинг мос даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирилса, унда $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ларни топиш учун ушбу

$$a_2A_0=b_0,$$
$$a_1nA_0+a_2\cdot A_1=b_1.$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$2A_{n-2}+a_1\cdot A_{n-1}+a_2A_n=b_n$$

системага келамиз.

Бу системани ечиб, топилган $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ ларни (4) ифодадаги $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ лар ўрнига қўйиб, берилган (1) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Мисол. Ушбу

$$y''-7y'+12y=x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бир жинсли

$$y''-7y'+12y=0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Равшанки, бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^2-7k+12=0$$

бўлади. Бу квадрат тенгламанинг илдизлари $k_1=3$, $k_2=4$ бўлганлиги учун бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$$

бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=x$ — биринчи даражали кўпҳад ҳамда $a_2=12\neq0$ бўлганлиги учун хусусий ечимни

$$V(x)=A_0x+A_1$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари

$$V'(x)=A_0,$$
$$V''(x)=0$$

ни берилган тенгламага қўйиб топамиз:

$$-7\cdot A_0+12\,(A_0x+A_1)=x.$$

Бу тенгликдан

$$\begin{cases} 12A_0=1, \\ -7A_0+12A_1=0 \end{cases}$$

бўлиши келиб чиқади. Бундан

$$A_0=\frac{1}{12}, \quad A_1=\frac{7}{144}$$

бўлишини топамиз. Шундай қилиб, хусусий ечим

$$V(x)=\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}$$

бўлади. Унда берилган бир жинссиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{x}{12}+\frac{7}{144}$$

бўлади.

б) (1) тенгламада $a_2=0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенгламага мос бир жинсли тенглама қуйидагича

$$y''+a_1\cdot y'=0$$

бўлиб, унинг характеристик тенгламаси

$$k^2+a_1k=0$$

бўлади. Равшанки, бў квадрат тенгламанинг битта илдизи нолга тенг: $k_1=0$.

Бу ҳолда (1) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини

$$V(x)=x(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n) \tag{5}$$

кўринишда излаймиз.

Юқорида келтирилган а) ҳолдагидек, бу $V(x)$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари топилади, сўнг уларни (1) тенгламага қўйилади. Ҳосил бўлган тенгликда x нинг мос даражалари олдидаги коэффициентлар тенглаштирилиб, A_0, A_1, ..., A_n лар, демак, берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими (5) топилади.

Мисол. Ушбу

$$y''+y'=x-2$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y''+y'=0$$

бўлиб, характеристик тенглама эса

$$k^2+k=0$$

кўринишда бўлади. Равшанки, $k_1=0$, $k_2=-1$. Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$C_1+C_2e^{-x}$$

бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=x-2$ — биринчи даражали кўпҳад ҳамда $a_2=0$ бўлганлиги учун хусусий ечимни

$$V(x) = x(A_0x + A_1)$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари

$$V'(x) = 2A_0x + A_1,$$
$$V''(x) = 2A_0$$

ни берилган тенгламага қўйиб топамиз:

$$2A_0 + 2A_0x + A_1 = x-2.$$

Кейинги тенгликдан эса

$$\begin{cases} 2A_0=1, \\ 2A_0+A_1=-2 \end{cases}$$

бўлиб, ундан $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_1 = -3$ бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, хусусий ечим $V(x) = x\left(\frac{1}{2}x-3\right)$ бўлади. Унда берилган бир жинссиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1+C_2e^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x-3\right)$$

бўлади.

2°. Айтайлик,

$$y''+a_1y'+a_2y=q(x) \tag{1}$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция ушбу

$$q(x) = e^{\alpha x}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n)$$

кўринишга эга бўлсин:

$$y''+a_1y'+a_2y=e^{\alpha x}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n). \tag{6}$$

(6) тенгламада

$$y=e^{\alpha x}u \qquad (u=u(x))$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$y'=\alpha\cdot e^{\alpha x}u + e^{\alpha x}\cdot u'=e^{\alpha x}(\alpha u+u'),$$
$$y''=\alpha e^{\alpha x}(\alpha u+u')+e^{\alpha x}(\alpha\cdot u'+u'')=e^{\alpha x}(\alpha^2u+2\alpha u'+u'')$$

бўлиб,

$$e^{\alpha x}(\alpha^2u+2\alpha u'+u'')+a_1\cdot e^{\alpha x}(\alpha u+u')+$$
$$+a_2\cdot e^{\alpha x}\cdot u = e^{\alpha x}(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n),$$

яъни

$$u''+(2\alpha+a_1)u'+(\alpha^2+a_1\alpha+a_2)u=$$
$$=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$$

бўлади.

Агар $2\cdot\alpha+a_1=d_1$, $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=d_2$ дейилса, кейинги тенглама 1^0 пунктда ўрганилган

$$u''+d_1u'+d_2u=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n \qquad (7)$$

кўринишдаги тенгламага келади. Равшанки, бундай тенгламада

а) $d_2\neq0$ бўлганда, (7) тенгламанинг хусусий ечими

$$V_1(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

кўринишда,

б) $d_2=0$ бўлганда, (7) тенгламанинг хусусий ечими

$$V_1(x)=x(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)$$

кўринишда изланиларди ва топиларди.

Агар $d_2\neq0$ бўлганда, $k=\alpha$ сон

$$k^2+a_1k+a_2=0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаслигини, $d_2=0$ бўлганда эса, $k=\alpha$ сон шу характеристик тенгламанинг илдизи бўлишини ҳамда $y=e^{\alpha x}u$ эканини эътиборга олсак, унда (6) дифференциал тенглама учун:

а) $k=\alpha$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда хусусий ечим

$$V(x)=e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)$$

кўринишда,

б) $k=\alpha$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда хусусий ечим

$$V(x)=xe^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)$$

кўринишда изланади ва 1° даги каби топилади.

Эслатма. Агар $k=\alpha$ сон характеристик тенгламанинг каррали илдизи бўлса, хусусий ечим

$$V(x)=x^2e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)$$

кўринишда изланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y''-2y'+4y=e^{3x}(x+2)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бу тенгламага мос бир жинсли

$$y''-2y'+4y=0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Характеристик тенглама

$$k^2-2k+4=0$$

нинг илдизлари $k_1=1+\sqrt{3}i$, $k_2=1-\sqrt{3}i$ бўлади. Унда бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$c_1e^x\cos\sqrt{3}x+c_2e^x\cdot\sin\sqrt{3}x$$

бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=$ $=e^{3x}(x+2)$ ҳамда $\alpha=3$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун хусусий ечимни

$$V(x)=e^{3x}(A_0x+A_1)$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$V'(x)=e^{3x}(3A_0x+A_0+3A_1),$$

$$V''(x)=e^{3x}(9A_0x+6A_0+9A_1).$$

Бу қийматларни берилган тенгламага қўйиб

$$e^{3x}(9A_0x+6A_0+9A_1)-2\cdot e^{3x}(3A_0x+A_0+3A_1)+$$
$$+4e^{3x}(A_0x+A_1)=e^{3x}(x+2),$$

яъни

$$7A_0x+4A_0+7A_1=x+2$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан эса

$$A_0=\frac{1}{7},\ A_1=\frac{10}{49}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, хусусий ечим

$$V(x)=e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right)$$

бўлиб, берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1e^x\cos\sqrt{3}x+c_2e^x\cdot\sin\sqrt{3}x+e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right)$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y''-y=e^x(x^2-1)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Берилган тенгламага мос бир жинсли тенглама $y''-y=0$, характеристик тенглама эса $k^2-1=0$ бўлади. Характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1=1$, $k_2=-1$ бўлганлиги сабабли бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$c_1e^x+c_2e^{-x}$$

бўлади.

Энди бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=e^x(x^2-1)$ ҳамда $\alpha=1$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун хусусий ечимни

$$V(x)=xe^x(A_0x^2+A_1x+A_2)$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$V'(x) = e^x(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x) + e^x(3A_0x' + 2A_1x + A_2) =$$
$$= e^x(A_0x^3 + (3A_0 + A_1)x^2 + (2A_1 + A_2)x + A_2),$$
$$V''(x) = e^x[A_0x^3 + (3A_0 + A_1)x^2 + (2A_1 + A_2)x + A_2] +$$
$$+ e^x[3A_0x^2 + 2(3A_0 + A_1)x + 2A_1 + A_2] =$$
$$= e^x[A_0x^3 + (6A_0 + A_1)x^2 + (6A_0 + 4A_1 + A_2)x + 2A_1 + 2A_2].$$

Бу қийматларни берилган тенгламага қўйиб

$$e^x[A_0x^3 + (6A_0 + A_1)x^2 + (6A_0 + 4A_1 + A_2)x + 2A_1 + 2A_2] -$$
$$- e^x(A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x) = e^x(x^2 - 1),$$

яъни

$$6A_1x^2 + (6A_0 + 4A_1)x + 2(A_1 + A_2) = x^2 - 1$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\begin{cases} 6A_0 = 1, \\ 6A_0 + 4A_1 = 0, \\ 2A_1 + 2A_2 = -1. \end{cases}$$

Бу системадан

$$A_0 = \frac{1}{6},\ A_1 = -\frac{1}{4},\ A_2 = -\frac{1}{4}$$

эканини топамиз.

Шундай килиб, хусусий ечим

$$V(x) = x \cdot e^x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)$$

бўлиб, берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + x \cdot e^x\left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)$$

бўлади.

3°. Айтайлик,

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2y = q(x) \qquad (1)$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функция

$$q(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)$$

ёки

$$q(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)$$

кўринишда бўлсин. Бу ҳолда:

а) агар $k = \alpha + i\beta$ сон

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, у ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x)=e^{\alpha x}[\cos\beta x(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)+$$
$$+\sin\beta x(A'_0x^n+A'_1x^{n-1}+\ldots+A'_{n-1}x+A'_n)]$$

кўринишда,

б) агар $k=\alpha+i\beta$ сон

$$k^2+a_1k+a_2=0$$

характеристик тенгламанинг илдизи бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x)=x\cdot e^{\alpha x}[\cos\beta x(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)+$$
$$+\sin\beta x(A'_0x^n+A'_1x^{n-1}+\ldots+A'_{n-1}x+A'_n)]$$

кўринишда изланади ва аввалги ҳоллардагидек топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y''-4y'+3y=2e^x\cos3x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бир жинсли

$$y''-4y'+3y=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^2-4k+3=0$$

бўлиб, унинг илдизлари $k_1=1$, $k_2=3$ бўлади.

Демак, бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $c_1e^x+c_2e^{3x}$ бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=2e^x\cos3x$ ҳамда $\alpha+i\beta=1+3i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги сабабли хусусий ечимни

$$V(x)=e^x(A_0\cos3x+A'_0\sin3x)$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$V'(x)=e^x(A_0\cos3x+A'_0\sin3x)+e^x(-A_0\sin3x\cdot3+$$
$$+A'_0\cos3x\cdot3=e^x[(A_0+3A'_0)\cos3x+$$
$$+(A'_0-3A_0)\cdot\sin3x],$$
$$V''(x)=e^x[(A_0+3A'_0)\cos3x+(A'_0-3A_0)\sin3x]+$$
$$+e^x[-3(A_0+3A'_0)\sin3x+3(A'_0-3A_0)\cos3x]=$$
$$=e^x[(6A'_0-8A_0)\cos3x-(6A_0+8A'_0)\sin3x].$$

$V(x)$, $V'(x)$, $V''(x)$ нинг ифодаларини берилган тенгламага қўйсак,

$$e^x[(A'_06-8A_0)\cos3x-(6A_0+8A'_0)\sin3x]-$$
$$-4e^x[(A_0+3A'_0)\cos3x+(A'_0-3A_0)\sin3x]+$$
$$+3e^x(A_0\cos3x+A'_0\sin3x)=2e^x\cos3x,$$

яъни

$$(-9A_0-6A'_0)\cos3x+(6A_0-9A'_0)\sin3x=2\cos3x$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликдан

$$\begin{cases} -9A_0-6A_0'=2, \\ 6A_0-9A_0'=0 \end{cases}$$

келиб чиқади. Бу системанинг ечими

$$A_0 = -\frac{2}{13},\ A_0' = -\frac{4}{39}$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x) = e^x\left(-\frac{2}{13}\cos 3x - \frac{4}{39}\sin 3x\right)$$

бўлиб, унинг умумий ечими

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + e^x\left(-\frac{2}{13}\cos 3x - \frac{4}{39}\sin 3x\right)$$

бўлади.

2. Ушбу

$$y'' + y = 3\sin x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y''+y=0$ нинг характеристик тенгламаси $k^2+1=0$ бўлиб, унинг илдизлари $k_1=i$, $k_2=-i$ бўлади.

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$c_1\cos x + c_2\sin x$$

бўлади.

Берилган бир жисли бўлмаган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=3\sin x$ ҳамда $\alpha+i\beta=i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги сабабли хусусий ечимни

$$V(x) = x\ (A_0\cos x + A_0'\sin x)$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$V'(x) = A_0\cos x + A_0'\sin x + x(-A_0\sin x + A_0'\cos x),$$

$$V''(x) = -A_0\sin x + A_0'\cos x + (-A_0\sin x + A_0'\cos x) + \\ + x\ (-A_0\cos x - A_0'\sin x).$$

Бу $V(x)$, $V'(x)$, $V''(x)$ нинг қийматларини берилган тенгламага қўйиб

$$-2A_0\sin x + 2A_0'\cos x + x(-A_0\cos x - A_0'\sin x) + \\ + x(A_0\cos x + A_0'\sin x) = 3\sin x,$$

яъни $-2A_0\sin x + 2A_0'\cos x = 3\sin x$ тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан эса $A_0=-\frac{3}{2}$, $A_0'=0$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$V(x) = -\frac{3}{2}x\cos x$$

бўлиб, унинг умумий ечими

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{3}{2}x\cos x$$

бўлади.

4°. Қуйида келтириладиган теоремадан бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топишда фойдаланилади.

1-теорема. ***Агар*** $V_1(x)$ ***ва*** $V_2(x)$ ***функциялар мос равишда***

$$y''+a_1y'+a_2y=q_1(x), \tag{8}$$

$$y''+a_1y'+a_2y=q_2(x) \tag{9}$$

тенгламаларнинг хусусий ечимлари бўлса, у ҳолда

$$V_1(x)+V_2(x)$$

функция

$$y''+a_1y'+a_2y=q_1(x)+q_2(x) \tag{10}$$

тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Исбот. Шартга кўра $V_1=V_1(x)$ функция (8) тенгламанинг, $V_2=V_2(x)$ функция (9) тенгламанинг ечими. Демак,

$$V_1''+a_1V_1'+a_2V_1 \equiv q_1(x) \ ,$$
$$V_2''+a_1V_2'+a_2V_2 \equiv q_2(x) \ .$$

Бу тенгликлардан

$$V_1''+V_2''+a_1(V_1'+V_2')+a_2(V_1+V_2) \equiv q_1(x)+q_2(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Агар

$$(V_1+V_2)'=V_1'+V_2',$$
$$(V_1+V_2)''=V_1''+V_2''$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглик ушбу

$$(V_1+V_2)''+a_1(V_1+V_2)'+a_2(V_1+V_2) \equiv q_1(x)+q_2(x)$$

кўринишга келади. Бу эса V_1+V_2 функция (10) тенгламанинг ечими эканини кўрсатади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$y''-2y'=2x+e^{3x} \tag{11}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг. Бу тенгламага мос бир жинсли $y''-2y'=0$ тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2-2k=0$ бўлиб, унинг илдизлари $k_1=0$, $k_2=2$ бўлади.

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $c_1+c_2e^{2x}$ бўлади.

Энди берилган бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

Бунинг учун қуйидаги иккита

$$y''-2y'=2x, \tag{12}$$

$$y''-2y'=e^{3x} \tag{13}$$

бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламаларнинг хар бирининг хусусий ечимларини топамиз.

(12) тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x)=2x$ ҳамда $k=0$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун (12) тенгламанинг хусусий ечимини

$$V_1(x) = x(A_0x + A_1)$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$V_1'(x) = 2A_0x + A_1,$$
$$V_1''(x) = 2A_0.$$

Бу қийматларни (12) тенгламага қўйиб

$$2A_0 - 2(2A_0x + A_1) = 2x,$$

яъни

$$-4A_0x + (2A_0 - 2A_1) = 2x$$

тенгликка келамиз. Кейинги тенгликдан

$$A_0 = \frac{-1}{2}, \ A_1 = -\frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, (12) тенгламанинг хусусий ечими

$$V_1(x) = x\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}(x^2 + x)$$

бўлади.

Энди (13) тенгламанинг хусусий ечимини топамиз.

(13) тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = e^{3x}$ ҳамда 3 сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги сабабли хусусий ечимни

$$V_2(x) = e^{3x} \cdot A_0$$

кўринишда излаймиз. Бу функциянинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари

$$V_2'(x) = 3A_0e^{3x},$$
$$V_2''(x) = 9A_0 \cdot e^{3x}$$

ни (13) тенгламага қўйиб

$$9A_0e^{3x} - 2 \cdot 3A_0 \cdot e^{3x} = e^{3x},$$

яъни $3A_0e^{3x} = e^{3x}$ тенгликка келамиз. Бунда $A_0 = \frac{1}{3}$ бўлиши келиб чиқади. Демак, (13) тенгламанинг хусусий ечими $V_2(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ бўлади.

Юқорида 1-теоремага кўра

$$V_1(x) + V_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + x) + \frac{1}{3}e^{3x}$$

функция (11) дифференциал тенгламанинг хусусий ечими бўлади.

Шундай қилиб берилган (11) бир жинссиз тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + x) + \frac{1}{3}e^{3x}$$

бўлади.

11- БОБ

n- ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Мазкур китобнинг 1—3- бобларида биринчи ва иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар батафсил ўрганилди.

Фаннинг турли тармоқларида, айниқса техникада тартиби иккидан юқори бўлган дифференциал тенгламалар билан боғлиқ масалаларга дуч келамиз. Бинобарин, уларни — n- тартибли ($n>2$) дифференциал тенгламаларни ўрганиш вазифаси юзага келади.

n- тартибли тенгламалар назариясида ҳам, биринчи ва иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардагидек, дифференциал тенгламалар ечимининг мавжудлиги, тенгламаларни ечиш усуллари қаралади. Келтириладиган тасдиқларнинг исботланиши деярли аввалдагидек мулоҳаза юритиш асосида олиб борилишини эътиборга олиб, қуйида тасдиқларни исботсиз келтирамиз.

1- §. n- ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ

n- тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича

$$\Phi\,(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{1}$$

бўлади. Бунда x — эркли ўзгарувчи, $y=y(x)$ — номаълум функция, y', y'', ..., $y^{(n)}$ лар эса номаълум функциянинг биринчи, иккинчи ва ҳ. к., n- тартибли ҳосилалари.

(1) дифференциал тенгламанинг баъзи муҳим хусусий ҳолларини қараймиз.

1°. (1) дифференциал тенглама ушбу

$$y^{(n)}=f(x) \tag{2}$$

кўринишга эга бўлсин. Бу ҳолда $y^{(n)}$ ни кетма-кет n марта интеграллаб, (2) тенгламанинг умумий ечими топилади.

Мисол. Ушбу

$$y'''=\frac{1}{x}$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

y''' функцияни кетма-кет уч марта интеграллаб топамиз:

$$\int y'''dx = \int \frac{1}{x}dx = \int d\ln x = \ln|x| + C_1,$$
$$y'' = \ln|x| + C_1,$$
$$\int y''dx = \int(\ln|x| + C_1)dx = \int\ln|x|dx + C_1x = x\ln|x| - x + C_1x + C_2,$$
$$y' = x\ln|x| - x + C_1x + C_2,$$
$$\int y'dx = \int(x\ln|x| - x + C_1x + C_2)\,dx =$$
$$= \int x\ln|x|\,dx - \frac{x^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}x^2 -$$
$$-\frac{1}{2}x^2 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$
$$y = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{3}{4}x^2 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

2°. (1) дифференциал тенгламада номаълум функция ва унинг дастлабки бир нечта тартибдаги ҳосилалари қатнашмасин:

$$\Phi\,(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (3)$$

Бу ҳолда $y^{(k)} = p = p\,(x)$ алмаштириш натижасида (3) дифференциал тенгламанинг тартиби пасайиб ушбу

$$\Phi\,(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$$

кўринишга келади.

Мисол. Ушбу

$$xy^{(V)} - y^{(IV)} = 0$$

дифференциал тенгламани ечинг.

Бу тенгламада

$$y^{IV} = p = p\,(x)$$

алмаштириш бажарамиз. Унда $y^{(V)} = p'(x) = \frac{dp}{dx}$ бўлиб, берилган тенглама $x\frac{dp}{dx} - p = 0$ кўринишга келади.

Равшанки,

$$x\frac{dp}{dx} - p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow p = C_1x.$$

Энди

$$p = y^{(IV)} = C_1x$$

тенгламанинг ечимини кетма-кет интеграллаш билан топамиз:

$$y''' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$y'' = C_1\cdot\frac{x^3}{6} + C_2x + C_3,$$

$$y' = C_1 \cdot \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1 \cdot \frac{x^5}{120} + C_2 \cdot \frac{x^3}{6} + C_3 \cdot \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

3°. (1) дифференциал тенгламада эркли ўзгарувчи x қатнашмасин:

$$\Phi\,(y,\ y',\ y'', \ldots,\ y^{(n)}) = 0.$$

Бу ҳолда $y' = p = p(x)$ алмаштириш билан дифференциал тенгламанинг тартиби бир бирликка пасаяди. Бунда

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p \cdot \frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p \cdot \frac{dp}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

. . . .

бўлиши эътиборга олинади.

Мисол. Ушбу

$$y' \cdot y''' - 3y'^2 = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламада

$$y' = p = p(x)$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy},\ y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2p}{dy^2}$$

бўлиб, берилган дифференциал тенглама қуйидаги

$$p\left[p \cdot \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2 \frac{d^2p}{dy^2}\right] - 3p^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0,$$

яъни

$$p\,\frac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

кўринишга келади.

Шундай қилиб, берилган учинчи тартибли дифференциал тенглама $y' = p(x)$ алмаштириш натижасида иккинчи тартибли дифференциал тенгламага келди. (4) тенгламани ечиш учун

$$\frac{dp}{dy} = z$$

алмаштириш қиламиз. Унда $\frac{d^2p}{dy^2}=z\cdot\frac{dz}{dp}$ бўлиб, $p\cdot z\frac{dz}{dp}-2z^2=0$, яъни $\frac{dz}{z}-\frac{2dp}{p}=0$ бўлади. Равшанки,

$$\ln|z|-\ln p^2=\ln|C_1|\Rightarrow z=C_1p^2$$

Натижада,

$$\frac{dp}{dy}=C_1p^2\Rightarrow\frac{dp}{p^2}=C_1dy\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{p}=C_1y+C_2\Rightarrow -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=C_1y+C_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{dy}=C_1y+C_2\Rightarrow x=-C_1\cdot\frac{y^2}{2}-C_2y+C_3$$

бўлади.

4°. (1) дифференциал тенгламада $\Phi(x, y, y', y'',\dots, y^{(n)})$ функция y, y', y'',..., $y^{(n)}$ ларга нисбатан k-тартибли бир жинсли функция, яъни

$$\Phi(x, ty, ty', ty'',\dots, ty^{(n)})=t^k\Phi(x, y, y', y'',\dots, y^{(n)})$$

бўлсин.

Бу ҳолда

$$y=e^{\int zdx},\qquad (z=z\ (x))$$

алмаштириш билан (1) дифференциал тенгламани тартиби бир бирликка камайган дифференциал тенгламага келтирилади.

Мисол. Ушбу

$$x^2y\cdot y''=(y-x\cdot y')^2$$

дифференциал тенгламани ечинг. Бу тенгламада

$$\Phi(x, y, y', y'')=x^2\cdot y\cdot y''-(y-xy')^2$$

функция учун

$$\Phi\ (x, ty, ty', ty'')=x^2(ty)\cdot(ty'')-(ty-x(ty'))^2=$$

$$=t^2x^2y\cdot y''-t^2(y-xy')^2=t^2[x^2yy''-(y-xy')^2]=t^2\Phi\ (x, y, y', y'')$$

бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламада:

$$y=e^{\int zdx}\qquad (z=z\ (x)).$$

Унда

$$y'=e^{\int zdx}\cdot z,\quad y''=(e^{\int zdx}\cdot z')'=e^{\int zdx}\cdot z^2+e^{\int zdx}\cdot z'=(z'+z^2)\,e^{\int zdx}$$

бўлиб, берилган тенглама қуйидаги

$$x^2(z'+z^2)\,e^{2\int zdx}=(e^{\int zdx}-x\cdot ze^{\int zdx})^2$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $e^{2\int zdx}$ га бўлиб, $x^2(z'+z^2)=(1-zx)^2$, яъни $x^2z'^1+2xz=1$ бўлишини топамиз. Агар $x^2z'+2xz=(x^2\cdot z)'$ эканини эътиборга олсак, унда

$$(x^2\cdot z)'=1\Rightarrow\frac{d(x^2z)}{dx}=1$$

тенглама ҳосил бўлади. Равшанки, $x^2z=x+C_1$. Бу тенгликдан $z=\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}$ бўлиши келиб чиқади. Натижада,

$$y=e^{\int zdx}=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx}=e^{\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln|C_2|}=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$$

бўлади. Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

2-§. *n*-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ

Айтайлик, бирор n-тартибли дифференциал тенглама

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n)})=0$$

берилган бўлсин. Баъзан бу тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлади:

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,\ y^{(n-1)}).\tag{5}$$

Одатда (5) тенглама *n-тартибли ҳосилага нисбатан ечилган дифференциал тенглама* дейилади.

Фараз қилайлик, (5) тенгламадаги $f(x,\ y,\ y',\dots,\ y^{(n-1)})$ функция ($n+1$ та ўзгарувчининг функцияси сифатида) R^{n+1} фазодаги бирор D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин.

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас мусбат N сони мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $(x,\ \bar{y},\ \bar{y}',\dots,\ \bar{y}^{(n-1)})\in D$, $(x,\ \bar{\bar{y}},\ \bar{\bar{y}}',\dots,\ \bar{\bar{y}}^{(n-1)})\in D$* нуқталар учун $|f(x,\ \bar{y},\ \bar{y}',\dots,\ \bar{y}^{(n+1)})-f(x,\ \bar{\bar{y}},\ \bar{\bar{y}}',\dots,\ \bar{\bar{y}}^{(n-1)})|\leqslant N(|\bar{y}-\bar{\bar{y}}|+|\bar{y}'-\bar{\bar{y}}''|+\dots+|\bar{y}^{(n-1)}-\bar{\bar{y}}^{(n-1)}|)$ *тенгсизлик* *бажарилса, у ҳолда $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция D соҳада $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ўзгарувчилари бўйича Липщиц шартини бажаради дейилади.*

1-теорема. ***Агар***

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

тенгламада $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ функция

$$D=\{(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\in R^{n+1}: |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b,$$

$|y'-y_0'|\leqslant b, \dots, |y^{n-1}-y_0^{(n-1)}|\leqslant b$, да узлуксиз бўлиб, y_0, y_1 ,..., $y^{(n-1)}$ аргументлари бўйича Липшиц шартини бажарса, у ҳолда (5) дифференциал тенгламанинг $[x-h, x_0+h]$ да

$$\left(h\leqslant\min\left(a, \frac{b}{N}\right)\right)$$

$$y\,\Big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\,\Big|_{x=x_0}=y_0', \dots, y^{(n-1)}\,\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва у ягона бўлади.

Одатда

$$y\,\Big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\,\Big|_{x=x_0}=y_0', \dots, y^{(n-1)}\,\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

шартлар бошланғич шартлар дейилади.

(5) дифференциал тенгламанинг бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласига Коши масаласи дейилади.

Мисол. Ушбу

$$y'''=\frac{\ln x}{x^2}$$

дифференциал тенгламанинг қуйидаги

$$y\,\Big|_{x=1}=0,\ y'\,\Big|_{x=1}=1,\ y''\,\Big|_{x=1}=2$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Аввало берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бунинг учун y''' функцияни кетма-кет уч марта интеграллаймиз.

$$\int y'''dx=\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1.$$

Демак,

$$y''=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1.$$

Иккинчи марта интеграллаймиз:

$$\int y''dx=\int\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C_1\right)dx=-\frac{1}{2}\ln^2x-\ln|x|+C_1x+C_2$$

Демак,

$$y' = -\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln|x| + C_1 x + C_2.$$

Учинчи марта интеграллаймиз:

$$\int y' dx = \int\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x - \ln|x| + C_1 x + C_2\right)dx =$$

$$= -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \qquad (6)$$

бўлади.

Энди $y\big|_{x=1} = 0$ шартдан фойдаланиб $\frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0$ бўлишини, $y'\big|_{x=1} = 1$ шартдан фойдаланиб $C_1 + C_2 = 1$ бўлишини, $y''\big|_{x=1} = 2$ шартдан фойдаланиб $-1 + C_1 = 2$ бўлишини топамиз. Натижада C_1, C_2, C_3 ларни аниқлаш учун

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 = 1, \\ -1 + C_1 = 2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Уни ечиб топамиз:

$$C_1 = 3,\ C_2 = -2,\ C_3 = \frac{1}{2}.$$

Буларнинг қийматини (6) муносабатдаги C_1, C_2, C_3 ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада, изланаётган ечим

$$y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади.

3-§. *n*-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум функция $y = y(x)$ ва унинг $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ҳосилалари биринчи даражада қатнашган

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = q(x) \quad (7)$$

тенглама *n- тартибли чизиқли дифференциал тенглама* дейилади. Бу ерда $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ — тенгламанинг *коэффициентлари*, $q(x)$ эса *озод ҳад* дейилади. Улар бирор (a, b) оралиқда берилган функциялардир.

(7) тенглама n- тартибли чизиқли бир жинссиз дифференциал тенглама ҳам деб юритилади.

Хусусан, (7) да $q=0$ бўлса, яъни тенглама ушбу

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (8)$$

кўринишга эга бўлса, уни n- тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама дейилади.

2- теорема. ***Агар (7) тенгламадаги $p_1(x)$, $p_2(x)$,..., $p_n(x)$ ҳамда $q(x)$ функциялар X тўпламда ($X\subset R$) узлуксиз бўлса, у ҳолда X да (7) тенгламанинг***

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ y''\big|_{x=x_0}=y_0'',\ldots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими мавжуд ва у ягона бўлади.

1°. n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар.

Энди

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (8)$$

дифференциал тенглама тўғрисидаги маълумотларни келтирамиз.

3- теорема. ***Агар $y_1=y_1(x)$ функция (8) тенгламанинг ечими бўлса, $c\cdot y_1$ функция ҳам (C — ихтиёрий ўзгармас сон) шу тенгламанинг ечими бўлади.***

4- теорема. ***Агар y_1 ҳамда y_2 функциялар (8) тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда $c_1y_1+c_2y_2$ функция ҳам (c_1, c_2 — ихтиёрий ўзгармас сонлар) шу тенгламанинг ечими бўлади.***

(7) дифференциал тенгламанинг умумий ечимини аниқлашда функцияларнинг чизиқли эркли ҳамда чизиқли боғлиқлик тушунчалари муҳимдир. Қуйида уларни келтирамиз.

Фараз қилайлик, (a, b) интервалда $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$,..., $\varphi_n(x)$ функциялар берилган бўлсин.

2- таъриф. *Агар шундай α_1, α_2,..., α_n сонлар топилсаки, уларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиб, ушбу*

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=0$$

тенглик бажарилса, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ функциялар (a, b) да чизиқли боғлиқ дейилади.

3- таъриф. *Агар $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ функциялар учун*

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)=0$$

тенглик фақат $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$,..., $\alpha_n=0$ бўлгандагина бажарилса, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ функциялар (a, b) да чизиқли эркли функциялар дейилади.

Фараз қилайлик, $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ функциялар

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$$

дифференциал тенгламанинг ечимлари бўлсин.

Ушбу

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

функционал детерминант *Вронский детерминанти* деб аталади.

5-теорема. ***Агар (8) тенгламанинг $y_1(x),\dots, y_n(x)$ ечимлари (a, b) да чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда $\forall x\in(a, b)$ да***

$$W(x)\equiv 0$$

бўлади.

6-теорема. ***Агар бирор $x_0\in(a, b)$ нуқтада***

$$W(x_0)=0$$

бўлса, у ҳолда $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ ечимлар чизиқли боғлиқ бўлади.

7-теорема. ***Ушбу***

$$W(x)=W(x_0)\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx} \qquad (9)$$

формула ўринлидир, бунда $x_0\in(a, b)$.

(9) формула *Лиувилл (Остроградский-Лиувилл) формуласи* дейилади.

4-таъриф. *Агар $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ функциялар* (8) *тенгламанинг ечимлари бўлиб, чизиқли эркли функциялар бўлса, улар* (8) *тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси дейилади.*

8-теорема. ***Агар $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ лар (a, b) да $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси бўлса, бу тенгламанинг умумий ечими***

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\dots+c_ny_n(x)$$

бўлади, бунда $c_1, c_2,\dots, c_n$ — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Мисол. Ушбу

$$y_1(x)=x,\ y_2(x)=x^2,\ y_3(x)=e^x$$

функциялар бирор учинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этишини кўрсатинг ва шу дифференциал тенгламани тузинг.

Берилган $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=e^x$ функцияларнинг Вронский детерминантини топамиз:

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix}=x\cdot 2\cdot x\cdot e^x+x^2\cdot e^x\cdot 0+1\cdot 2\cdot e^x-$$

$$-0\cdot 2x\cdot e^x-x\cdot 2\cdot e^x-1\cdot x^2\cdot e^x=e^x(x^2-2x+2)=e^x\ [(x-1)^2+1]$$

Равшанки, $\forall x \in R$ учун

$$W(x) \neq 0.$$

Демак, $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$, $y_3(x)=e^x$ функциялар бирор учинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тengламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этар экан. Айтайлик, бундай дифференциал тенглама

$$y'''+\alpha_1(x)y''+\alpha_2(x)y'+\alpha_3(x)y=0 \qquad (10)$$

бўлсин.

Энди бу тенгламадаги номаълум $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ ҳамда $\alpha_3(x)$ функцияларни топамиз. Бунинг учун $y_1(x)=x$, $y_2(x)=x^2$ ҳамда $y_3(x)=e^x$ ларни (10) тенгламага қўямиз:

$$y_1'''+\alpha_1(x)y_1''+\alpha_2(x)y_1'+\alpha_3(x)y_1=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0+\alpha_1(x)\cdot 0+\alpha_2(x)\cdot 1+\alpha_3(x)\cdot x=0,$$
$$y_2'''+\alpha_1(x)y_2''+\alpha_2(x)y_2'+\alpha_3(x)y_2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0+\alpha_1(x)\cdot 2+\alpha_2(x)\cdot 2x+\alpha_3(x)\cdot x^2=0,$$
$$y_3'''+\alpha_1(x)y_3''+\alpha_2(x)y_3'+\alpha_3(x)y_3=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x+\alpha_1(x)e^x+\alpha_2(x)e^x+\alpha_3(x)e^x=0.$$

Натижада, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ ларни топиш учун ушбу

$$0\cdot\alpha_1(x)+1\alpha_2(x)+x\alpha_3(x)=0,$$
$$2\cdot\alpha_1(x)+2x\alpha_2(x)+x^2\alpha_3(x)=0,$$
$$e^x\alpha_1(x)+e^x\alpha_2(x)+e^x\alpha_3(x)=-e^x$$

системага келамиз. Бу системани Крамер қоидасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ e^x & e^x & e^x \end{vmatrix}=-e^x(x^2-2x+2)=-e^x[(x-1)^2+1],$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 2x & x^2 \\ -e^x & e^x & e^x \end{vmatrix}=x^2e^x,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 2 & 0 & x^2 \\ e^x & -e^x & e^x \end{vmatrix}=-2xe^x,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2x & 0 \\ e^x & e^x & -e^x \end{vmatrix}=2e^x,$$

$$\alpha_1(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\frac{e^x x^2}{e^x(x^2-2x+2)}=-\frac{x^2}{x^2-2x+2},$$

$$\alpha_2(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2xe^x}{-e^x(x^2-2x+2)}=\frac{2x}{x^2-2x+2},$$

$$\alpha_3(x)=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{2e^x}{-e^x(x^2-2x+2)}=-\frac{2}{x^2-2x+2}.$$

Бу топилган $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ ларни (10) га қўйсак, унда

$$(x^2-2x+2)\cdot y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$$

дифференциал тенгламага келамиз. Бу изланаётган учинчи тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламадир.

2°. n-тартибли чизиқли бир жинссиз дифференциал тенгламалар.

Ушбу пунктда n-тартибли чизиқли бир жинссиз дифференциал тенглама

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=q(x) \quad (7)$$

нинг умумий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунда (7) тенгламага мос бўлган

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \qquad (8)$$

бир жинсли тенглама ҳақидаги маълумотлардан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, (7) тенгламада $p_1(x)$, $p_2(x)$,..., $p_n(x)$ ҳамда $q(x)$ функцияларнинг ҳар бири $(a,\ b)$ да узлуксиз бўлсин. Унда (7) тенгламанинг ечими мавжуд бўлади.

9-теорема. ***n-тартибли чизиқли бир жинссиз дифференциал тенглама (7) нинг умумий ечими $y(x)$ шу тенгламанинг бирор хусусий ечими $\varphi(x)$ ва мос бир жинсли дифференциал тенглама (8) нинг умумий ечими $u(x)$ ларнинг йиғиндиси***

$$y(x)=u(x)+\varphi(x)$$

дан иборат бўлади.

Энди (7) бир жинссиз дифференциал тенгламанинг хусусий ечимини топиш усулларидан бирини келтирамиз.

Айтайлик, $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ лар (8) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этсин. Унда (8) тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$$

бўлади. Бу ерда c_1, c_2,..., c_n — ихтиёрий ўзгармас сонлар. Равшанки, $y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$ функция бир жинссиз (7) тенгламанинг ечими бўлмайди.

Энди $y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$ даги c_1, c_2,..., c_n ларни x ўзгарувчининг шундай функцияси деб қараймизки, натижада

$$y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\ldots+c_n(x)y_n \qquad (11)$$

функция (7) бир жинссиз дифференциал тенгламанинг ечими бўлсин.

Бундай c_1 (x), c_2 (x),..., c_n (x) ларни топиш учун аввало

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2+\ldots+c_n'(x)y_n=0, \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'+\ldots+c_n'(x)y_n'=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)}+c_2'(x)y_2^{(n-2)}+\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-2)}=0, \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}+c_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}=q(x) \end{cases} \qquad (12)$$

системадан $c_1'(x)$, $c_2'(x)$,..., $c_n'(x)$ ларни топиб оламиз. (Бу система коэффициентларидан тузилган детерминант Вронский детерминанти бўлиб, у нолдан фарқлидир, чунки y_1, y_2,..., y_n (7) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.)

Айтайлик,

$$c_i'(x)=\alpha_i(x) \qquad (i=1,2,3,\ldots,\ n)$$

бўлсин. Унда

$$\begin{gathered} c_1(x)=\int\alpha_1(x)\ dx+c_1^*, \\ c_2(x)=\int\alpha_2(x)\ dx+c_2^*, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n(x)=\int\alpha_n(x)\ dx+c_n^* \end{gathered}$$

бўлади. Бу ерда c_1^*, c_2^*,..., c_n^* — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Бу $c_1(x)$, $c_2(x)$,..., $c_n(x)$ нинг қийматларини (11) тенгликдаги c_1, c_2,..., c_n ларнинг ўрнига қўйиб, (7) бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими

$$\begin{gathered} \varphi(x)=[\int\alpha_1(x)dx+c_1^*]y_1+[\int\alpha_2(x)dx+c_2^x]y_2+\ldots+ \\ +[\int\alpha_n(x)dx+c_n^*]y_n=c_1^*y_1+c_2^*y_2+\ldots+c_n^*y_n+y_1\int\alpha_1(x)dx+ \\ +y_2\int\alpha_2(x)dx+\ldots+y_n\alpha_n(x)dx \end{gathered}$$

бўлишини топамиз.

Унда 9-теоремага кўра (7) бир жинссиз тенгламанинг умумий ечими:

$$\begin{gathered} y=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n+c_1^*y_1+c_2^*y_2+\ldots+c_n^*y_n+\sum_{i=1}^{n}y_i\int\alpha_i(x)dx= \\ =\bar{c}_1y_1+\bar{c}_2y_2+\ldots+\bar{c}_ny_n+\sum_{i=1}^{n}y_i\int\alpha_i(x)dx \end{gathered}$$

$$(\bar{c}_i=c_i+c_i^*,\ i=1,2,3,\ldots,\ n).$$

Мисол. Ушбу

$$y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=\frac{x}{\sqrt{x}+1} \qquad (x\neq0)$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0$$

кўринишда бўлади. Бевосита текшириб кўриш мумкинки,

$$y_1 = x, \ y_2 = x^2, \ y_3 = x^3$$

функциялар шу бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлардан тузилган Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0$$

бўлганлиги сабабли y_1, y_2, y_3 лар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Демак, бир жинсли

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими:

$$u\ (x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3.$$

Энди бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечимини топамиз. Хусусий ечимни

$$\varphi\ (x) = c_1\ (x) y_1 + c_2\ (x)\ y_2 + c_3\ (x)\ y_3$$

кўринишда излаймиз.

Бу ҳолда (12) система қуйидаги

$$\begin{cases} c_1'(x)\, x + c_2'(x)\, x^2 + c_3'(x)\, x^3 = 0 \\ c_1'(x) \cdot 1 + c_2'(x) \cdot 2x + c_3'(x) \cdot 3x^2 = 0 \\ c_1'(x) \cdot 0 + c_2'(x) \cdot 2 + c_3'(x) \cdot 6x = \dfrac{x}{\sqrt{x} + 1} \end{cases}$$

кўринишга эга бўлади. Уни ечиб топамиз:

$$c_1'\ (x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sqrt{x} + 1},$$

$$c_2'\ (x) = -\frac{x}{\sqrt{x} + 1},$$

$$c_3'\ (x) = \frac{1}{2(\sqrt{x} + 1)}\ .$$

Натижада:

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} + 1} + c_1^* = \frac{\sqrt{x^5}}{5} - \frac{x^2}{4} + \frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + \sqrt{x} -$$

$$-\ln(\sqrt{x}-1)+c_1^*,\ c_2(x)=-\int\frac{xdx}{\sqrt{x}+1}+c_2^*=-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-2\sqrt{x}+$$

$$+2\ln(\sqrt{x}+1)+c_2^*,\ c_3(x)=\int\frac{dx}{2(\sqrt{x}+1)}+c_3^*=\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)+c_3^*,$$

бунда, c_1^*, c_2^*, c_3^* — ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Демак, бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими:

$$\varphi(x)=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+c_3(x)y_3=$$

$$=\left[\frac{1}{5}\sqrt{x^5}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]\cdot x+$$

$$+\left[-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)\right]\cdot x^2+$$

$$+[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]x^3+c_1^*x+c_2^*x^2+c_3^*x^3.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=u(x)+\varphi(x)=\bar{c}_1x+\bar{c}_2x^2+\bar{c}_3x^3+$$

$$+\left[\frac{1}{5}\sqrt{x^5}-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]x+$$

$$+\left[-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)\right]x^2+$$

$$+[\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)]x^3,\ \bar{c}_i=c_i+c_i^*,\ i=1,2,3.$$

4-§. *n*-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу параграфда қуйидаги

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=q(x), \tag{13}$$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{14}$$

n-тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларни ўрганамиз. Бу ерда дифференциал тенгламаларнинг коэффициентлари a_1, a_2, $a_3,\ldots,$ a_n ўзгармас ҳақиқий сонлар, $q(x)$ эса узлуксиз функция.

Одатда, (13) тенглама *чизиқли бир жинссиз, ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама,* (14) тенглама эса *чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенглама* дейилади.

1°. *n*-тартибли чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар

Фараз қилайлик,

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{14}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. Унинг хусусий ечимларини

$$y = e^{kx}$$

кўринишда излаймиз, бунда k — номаълум ўзгармас сон. Равшанки,

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{n-1}e^{kx},\ y^{(n)} = k^ne^{kx}$$

бўлади. Бу $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ларнинг қийматларни (14) тенгламадаги $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ лар ўрнига қўйиб топамиз:

$$k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (15)$$

Бу (14) дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси дейилади.

Демак, характеристик тенгламанинг илдизларига кўра (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари топилар экан.

1) (15) характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ҳақиқий бўлиб, улар турлича бўлсин. Бу ҳолда

$$y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x}, \ldots, y_{n-1} = e^{k_{n-1}x},\ y_n = e^{k_nx}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} + \ldots + c_{n-1}e^{k_{n-1}x} + c_ne^{k_nx}.$$

Мисол. Ушбу

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k+1)(k-3) = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 3.$$

Демак, характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва турлича. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1e^{0\cdot x} + c_2e^{-x} + c_3e^{3x} = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}$$

бўлади.

2) (15) характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ҳақиқий бўлиб, улар орасида карралилари бўлсин. Масалан, $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = \bar{k}$, яъни $\bar{k}$ — (15) тенгламанинг m каррали илдизи, қолган $n - m$ та $k_{m+1}, k_{m+2}, \ldots, k_n$ илдизи турлича бўлсин. Бу ҳолда

$$y_1=e^{\bar{k}x},\ y_2=xe^{\bar{k}x},\dots,y_m=x^{m-1}e^{\bar{k}x},\ y_{m+1}=e^{k_{m+1}x},\dots,y_n=e^{k_nx}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=c_1e^{\bar{k}x}+c_2xe^{\bar{k}x}+c_3x^2e^{kx}+\dots+c_mx^{m-1}e^{kx}+c_{m+1}e^{k_{m+1}x}+\dots+c_ne^{k_nx}.$$

Мисол. Ушбу

$$y'''+2y''+y^{\mathrm{I}}=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^3+2k^2+k=0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз: $k^3+2k^2+k=0\Rightarrow k_1=k_2=-1$, $k_3=0$. Демак, характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва —1— икки каррали илдиз. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3e^{0\cdot x}=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+c_3.$$

3) (15) характеристик тенгламанинг илдизлари орасида комплекс илдизлар бўлсин. Масалан, $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, $k_3=\gamma+i\delta$, $k_4=\gamma-i\delta$ бўлиб, қолган барча $k_5, k_6,\dots, k_n$ илдизлар ҳақиқий ва турлича бўлсин. Бу ҳолда

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3=e^{\gamma x}\cos\delta x,$$

$$y_4=e^{\gamma x}\sin\delta x,\ y_5=e^{k_5x},y_6=e^{k_6x},\dots,y_n=e^{k_nx}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x+c_3e^{\gamma x}\cos\delta x+$$

$$+c_4e^{\gamma x}\sin\delta x+c_5e^{k_5x}+c_6e^{k_6x}+\dots+c_ne^{k_nx}.$$

Мисол. Ушбу

$$y'''+4y''+13y'=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^3+4k^2+13k=0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^3+4k^2+13k=0\Rightarrow k(k^2+4k+13)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1=0,\ k^2+4k+13=0\Rightarrow k_1=0,\ k_2=-2-3i,\ k_3=-2+3i.$$

Демак, характеристик тенглама битта ҳақиқий, иккита комплекс илдизларга эга экан. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1+c_2e^{-2x}\cos 3x+c_3e^{-2x}\sin 3x$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y^{(\mathrm{IV})}-4y'''+5y''-4y'+y=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^4-4k^3+5k^2-4k+1=0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^4-4k^3+5k^2-4k+1=0\Rightarrow k^2+\frac{1}{k^2}-4\left(k+\frac{1}{k}\right)+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)-1\right]\left[\left(k+\frac{1}{k}\right)-3\right]=0\Rightarrow k+\frac{1}{k}=1,\ k+\frac{1}{k}=3;$$

$$k+\frac{1}{k}=1\Rightarrow k^2-k+1=0\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ k_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k+\frac{1}{k}=3\Rightarrow k^2-3k+1=0\Rightarrow k_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\ k_4=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Демак, характеристик тенглама иккита комплекс ҳамда иккита турли ҳақиқий илдизларга эга. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=c_1e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+c_2e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}+c_3e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}+c_4e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}.$$

4) (15) характеристик тенгламанинг илдизлари орасида комплекс илдизлар бўлиб, улар каррали илдизлар бўлсин. Масалан, $k_1=\alpha+i\beta$ илдиз m каррали бўлсин. Унда $k_2=\alpha-i\beta$ илдиз ҳам m каррали бўлади $\left(m\leqslant\frac{n}{2}\right)$ Қолган $k_{2m+1}, k_{2m+2},\dots, k_n$ илдизлар ҳақиқий бўлсин.

Бу ҳолда

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_5=x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_6=x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,$$

$$y_{2m-1}=x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_{2m}=x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_{2m+1}=e^{k_{2m+1}x},\ y_{2m+2}=e^{k_{2m+2}x},\dots,y_n=e^{k_nx}$$

функциялар (14) дифференциал тенгламанинг хусусий ечимлари бўлади. Улар фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Демак, бу ҳолда (14) дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x+c_3xe^{\alpha x}\cos\beta x+c_4xe^{\alpha x}\sin\beta x+\ldots+$$

$$+c_{2m-1}x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x+c_{2m}x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x+c_{2m+1}e^{k_{2m+1}x}+\ldots+c_ne^{k_nx}.$$

Мисол. Ушбу

$$y^{(\mathrm{V})}-y^{(\mathrm{IV})}+y'''+y''-y'+y=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$k^5-k^4+k^3+k^2-k+1=0$$

бўлади. Унинг илдизларини топамиз:

$$k^5-k^4+k^3+k^2-k+1=0\Rightarrow(k^5+k^2)-(k^4+k)+$$

$$+(k^3+1)=0\Rightarrow(k^3+1)(k^2-k+1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(k+1)(k^2-k+1)^2=0;\ k+1=0\Rightarrow k_1=-1,$$

$$(k^2-k+1)^2=0\Rightarrow k_2=k_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,$$

$$k_4=k_5=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Демак, характеристик тенглама битта ҳақиқий ҳамда иккита икки каррали комплекс илдизларга эга экан. Унда берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими:

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_4xe^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_5xe^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

2°. n-тартибли чизиқли бир жинссиз ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.

Фараз қилайлик,

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=q(x) \qquad (16)$$

тенглама берилган бўлсин.

Маълумки, бу бир жинссиз дифференциал тенгламанинг умумий ечими унга мос бир жинсли

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (16')$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечими билан қаралаётган (16) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисидан иборат бўлади.

Ушбу параграфнинг 1°-бандида бир жинсли дифференциал тенглама (16′) нинг умумий ечимини характеристик тенглама

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0 \qquad (16'')$$

нинг илдизларига қараб топилишини кўрдик. Демак, (16) тенгламанинг умумий ечимини топиш масаласи унинг хусусий ечимини топишга келади.

Умуман, бир жинссиз дифференциал тенглама (16) нинг хусусий ечимини 3- § да келтирилган усул билан топиш мумкин.

Қуйида (16) тенгламанинг хусусий ечимини топишнинг амалий жиҳатдан қулай бўлган усулини келтирамиз.

Бу усул берилган (16) тенгламанинг ўнг томонидаги $q(x)$ функциянинг кўринишига қараб хусусий ечимни маълум кўринишда изланишига асослангандир.

1) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция m-даражали кўпҳад бўлсин:

$$q(x)=\tilde{P}_m(x),$$

Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k=0$ сон (16″) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда

$$\varphi(x)=\tilde{P}_m(x),$$

б) $k=0$ сон (16″) характеристик тенгламанинг s каррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x)=x^s\cdot\tilde{P}_m(x)$$

кўринишида изланади. Бунда $\tilde{P}_m(x)$—m- даражали кўпҳад.

Мисол. Ушбу

$$y'''-y''+y'-y=x^2+x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Аввало бу тенгламага мос бир жинсли

$$y'''-y''+y'-y=0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Равшанки, унинг характеристик тенгламаси $k^3-k^2+k-1=0$ бўлади. Бу тенгламанинг илдизларини топамиз:

$$k^3-k^2+k-1=0\Rightarrow(k-1)(k^2+1)=0\Rightarrow k_1=1,\ k_2=-i,\ k_3=i.$$

Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y=c_1e^x+c_2\cos x+$ $+c_3\sin x$ бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция 2- даражали кўпҳад ҳамда $k=0$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги учун бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечимини ушбу

$$\varphi(x)=A_1x^2+A_2x+A_3$$

кўринишда излаймиз. Номаълум A_1, A_2, A_3 сонларни топиш учун

$$\varphi(x)=A_1x^2+A_2x+A_3,$$
$$\varphi'(x)=2A_1x+A_2,$$
$$\varphi''(x)=2A_1,$$
$$\varphi'''(x)=0$$

ларни берилган тенгламадаги y, y', y'', y''' ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада

$$-A_1x^2+(2A_1-A_2)x+(A_2-2A_1-A_3)=x^2+x$$

бўлади. Бундан эса

$$\begin{cases} A_1=-1, \\ 2A_1-A_2=1, \\ A_2-2A_1-A_3=0 \end{cases}$$

бўлади. Бу системада $A_1=-1$, $A_2=-3$, $A_3=-1$ бўлиши келиб чиқади. Демак, бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими $\varphi(x)=-x^2-3x-1$ бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y_{\text{умумий}}=c_1e^x+c_2\cos x+c_3\sin x-x^2-3x-1.$$

Мисол. Ушбу

$$y'''-y''=12x^2+6x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y'''-y''=0$$

бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^3-k^2=0$ бўлади. Равшанки,

$$k^3-k^2=0\Rightarrow k^2(k-1)=0\Rightarrow k_1=k_2=0,\ k_3=1.$$

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1+c_2x+c_3e^x$$

бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция 2-даражали кўпҳад ҳамда $k=0$ сон характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлганлиги учун бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечимини ушбу

$$\varphi(x)=x^2(A_1x^2+A_2x+A_3)$$

кўринишда излаймиз.

Номаълум A_1, A_2, A_3 сонларни топиш учун

$$\varphi(x)=x^2(A_1x^2+A_2x+A_3)$$
$$\varphi'(x)=4A_1x^3+3A_2x^2+2A_3x,$$
$$\varphi''(x)=12A_1x^2+6A_2x+2A_3$$
$$\varphi'''(x)=24A_1x+6A_2$$

лардан $\varphi'''(x)$ ҳамда $\varphi''(x)$ ларнинг қийматларини берилган тенгламадаги y''', y'' ларнинг ўрнига қўямиз. Натижада,

$$-12A_1x^2+(24A_1-6A_2)x+(6A_2-2A_3)=12x^2+6x$$

бўлиб, ундан

$$\begin{cases} -12A_1=12, \\ 24A_1-6A_2=6, \\ 6A_2-2A_3=0 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системанинг ечими

$$A_1=-1, A_2=-5, A_3=-15$$

бўлади. Демак, бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x)=-x^4-5x^3-15x^2$$

бўлади.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y_{\text{умумий}}=c_1+c_2x+c_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$$

бўлади.

2) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция ушбу

$$q(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$$

кўринишда бўлсин. Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k=\alpha$ сон (16″) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда

$$\varphi(x)=\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x},$$

б) $k=\alpha$ сон (16″) характеристик тенгламанинг s каррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x)=x^s\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$$

кўринишда изланади.

Мисол. Ушбу

$$y'''+y''=3xe^x$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама

$$y'''+y''=0$$

бўлиб, унинг характеристик тенгламаси

$$k^3+k^2=0$$

бўлади. Равшанки,

$$k^3+k^2=0\Rightarrow k^2(k+1)=0\Leftrightarrow k_1=k_2=0,\ k_3=-1.$$

Унда бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}$$

бўлади.

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x)=3xe^x$$

кўринишда ҳамда $\alpha=1$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги учун бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечимини

$$\varphi(x)=(A_1x+A_2)e^x$$

кўринишда излаймиз. Равшанки,

$$\varphi'(x)=e^x(A_1+A_2+A_1x),$$

$$\varphi''(x)=e^x(2A_1+A_2+A_1x),$$

$$\varphi'''(x)=e^x(2A_1+2A_2+A_1x).$$

Буларни берилган тенгламага қўйиб

$$e^x(4A_1+3A_2)+2A_1xe^x=3xe^x,$$

яъни

$$4A_1+3A_2+2A_1x=3x$$

бўлишини топамиз. Бундан эса

$$\begin{cases}4A_1+3A_2=0,\\ 2A_1=3\end{cases}$$

бўлиб,

$$A_1=\frac{3}{2},\quad A_2=-2$$

келиб чиқади. Демак, бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечими:

$$\varphi(x)=(\frac{3}{2}x-2)e^x.$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y_{\text{умумий}}=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+(\frac{3}{2}x-2)e^x$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{2x}$$

дифференциал тенгламанинг хусусий ечими қандай кўринишда изланади?

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ бўлади. Равшанки,

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2, \ k_3 = 1.$$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция $q(x) = e^{2x}$ кўринишда ҳамда $\alpha = 2$ сон характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлганлиги учун бир жинссиз тенгламанинг хусусий ечимини

$$\varphi(x) = Ax^2e^{2x}$$

кўринишда изланади.

3) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$$

кўринишда бўлсин, бунда $\bar{P}_m(x)$ ҳамда $Q_n(x)$ лар мос равишда m ва n- даражали кўпҳад.

Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k = \pm i\beta$ сон (16″) характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда

$$\varphi(x) = \tilde{P}_\lambda(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_\lambda(x)\sin\beta x,$$

б) $k = \pm i\beta$ сон (16″) характеристик тенгламанинг s каррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x) = x^s(\tilde{P}_\lambda(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_\lambda(x)\sin\beta x)$$

кўринишда изланади, бунда $\lambda = \max\{m, n\}$.

Мисол. Ушбу

$$y^{(IV)} + 4y'' + 4y = x\sin 2x$$

дифференциал тенгламанинг хусусий ечими қандай кўринишда изланади?

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y^{(IV)} + 4y'' + 4y = 0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^4 + 4k^2 + 4 = 0$ бўлади. Равшанки,

$$k^4 + 4k^2 + 4 = 0 \Rightarrow (k^2+2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = i\sqrt{2},$$

$$k_3 = k_4 = -i\sqrt{2}.$$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x) = x \cdot \sin 2x$$

кўринишда ҳамда $k=\pm 2i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун бир жинссиз дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x)=(A_1x+A_2)\sin 2x+(A_3x+A_4)\cos 2x$$

кўринишда изланади.

4) (16) тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x]$$

кўринишда бўлсин.

Бу ҳолда (16) тенгламанинг хусусий ечими:

а) $k=\alpha\pm i\beta$ сон (16″) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганда

$$\varphi(x)=e^{\alpha x}[\tilde{P}_\lambda(x)\cos\beta x+\bar{Q}_\lambda(x)\sin\beta x],$$

б) $k=\alpha\pm i\beta$ сон (16″) характеристик тенгламанинг s каррали илдизи бўлганда

$$\varphi(x)=x^s\cdot e^{\alpha x}[\bar{P}_\lambda(x)\cos\beta x+\bar{Q}_\lambda(x)\sin\beta x]$$

кўринишда изланади.

Мисол. Ушбу

$$y'''+y'=e^x(\cos 2x+\sin 2x)$$

дифференциал тенгламанинг хусусий ечими қандай кўринишда изланади?

Бу тенгламага мос бир жинсли тенглама $y'''+y'=0$ бўлиб, унинг характеристик тенгламаси $k^3+k=0$ бўлади. Равшанки,

$$k^3+k=0\Rightarrow k(k^2+1)=0\Rightarrow k_1=0,\ k_2=i,\ k_3=-i\,.$$

Қаралаётган дифференциал тенгламанинг ўнг томонидаги функция

$$q(x)=e^x(\cos 2x+\sin 2x)$$

кўринишда ҳамда $k=1\pm 2i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаганлиги учун бир жинссиз дифференциал тенгламанинг хусусий ечими

$$\varphi(x)=A\cdot e^x(\cos 2x+\sin 2x)$$

кўринишда изланади.

12- Б О Б

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

1- §. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

Фараз қилайлик, $y'_1=f_1(x, y_1, y_2,...,y_n)$, $y'_2=f_2(x, y_1, y_2,...,y_n)$, ..., $y'_n=f_n(x, y_1, y_2,...,y_n)$ n та дифференциал тенгламалар берилган бўлиб, улардан ташкил топган

$$\left.\begin{array}{l} y'_1=f_1(x, y_1, y_2,..., y_n) \\ y'_2=f_2(x, y_1, y_2,..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_n=f_n(x, y_1, y_2,..., y_n) \end{array}\right| \qquad (1)$$

системани қарайлик. Бунда x — эркли ўзгарувчи, $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$,...,$y_n=y_n(x)$ — номаълум функциялар, y'_1, y'_2,...,y'_n лар эса шу функцияларнинг ҳосилалари.

Одатда (1) система *дифференциал тенгламалар системаси* дейилади.

Масалан,

$$\left.\begin{array}{l} y'_1=y_2+1, \\ y'_2=y_1+1 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y'_1=y_1+y_2-y_1\cdot y_1^2, \\ y'_2=-y_1-y_2+y_1^2\cdot y_2 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y'_1=y_2\sin x, \\ y'_2=y_1e^{\cos x} \end{array}\right\}$$

дифференциал тенгламалар системаларидир.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ функцияларнинг ҳар бири (a, b) интервалда аниқланган, узлуксиз ҳамда узлуксиз $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_2(x)$,..., $\varphi'_n(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар (1) системадаги y_1, y_2,..., y_n ларнинг ўрнига $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ лар, y'_1, y'_2 ,..., y'_n ларнинг ўрнига эса $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_2(x)$,..., $\varphi'_n(x)$ лар қўйилганда ундаги тенгламалар айниятга айланса:

$$\begin{array}{l} \varphi'_1\equiv f_1(x,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n), \\ \varphi'_2\equiv f_1(x,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi'_n\equiv f_1(x,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n), \end{array}$$

у ҳолда $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ функциялар (1) дифференциал тенгламалар системасининг ечими дейилади.

Масалан,

$$\left.\begin{array}{l} y'_1=y_2, \\ y'_2=-y_1 \end{array}\right\}$$

системанинг ечими

$$\begin{gathered} \varphi_1(x)=C_1\cos(x-C_2), \\ (C_1\ C_2=\text{const}) \\ \varphi_2(x)=-C_1\sin(x-C_2), \end{gathered}$$

бўлади, чунки

$$\varphi_1=\varphi_1(x)=C_1\cos(x-C_2),\ \varphi'_1=\varphi'_1(x)=-C_1\sin(x-C_2),$$
$$\varphi_2=\varphi_2(x)=-C_1\sin(x-C_2),\ \varphi'_2=\varphi'_2(x)=-C_1\cos(x-C_2)$$

лар учун

$$\begin{gathered} \varphi'_1(x)\equiv\varphi_2(x), \\ \varphi'_2(x)\equiv-\varphi_1(x) \end{gathered}$$

бўлади.

Дифференциал тенгламалар системасини ечиш усулларини баён этишдан аввал (1) система ечимининг мавжудлиги ҳамда ягоналиги ҳақидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Айтайлик, $f_1(x, y_1, y_2,\ldots, y_n)$, $f_2(x; y_1,y_2,\ldots, y_n),\ldots, f_n(x, y_1,y_2,\ldots, y_n)$ функцияларнинг ҳар бири $n+1$ ўзгарувчининг функцияси сифатида R^{n+1} фазодаги

$$\begin{gathered} D=\{(x, y_1, y_2,\ldots, y_n)\in R^{n+1}: |x-x^\circ|\leqslant a, \\ |y_1-y_1^0|\leqslant b_1,\ |y_2-y_2^0|\leqslant b_2\ \ldots,\ |y_n-y_n^0|\leqslant b_n\} \end{gathered}$$

ёпиқ «тўғри тўртбурчак»да берилган бўлсин. (a, b, $b_2,\ldots$, b_n) — ўзгармас мусбат сонлар, x_0, y_1°, $y_2^\circ,\ldots$, $y_n^\circ)\in R^{n+1}$.)

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас мусбат k сон мавжуд бўлсаки, $f_i(x, y_1, y_2,\ldots, y_n)$ функция ($i=1,2,\ldots, n$) x аргументнинг $|x-x^\circ|\leqslant a$ тенгсизликни қаноатлантирадиган ихтиёрий қийматларида, y_1, $y_2,\ldots$, y_n аргументларнинг*

$$|y_1-y_1^\circ|\leqslant b_1,\ |y_2-y_2^\circ|\leqslant b_2,\ldots,|y_n-y_n^\circ|\leqslant b_n$$

тенгсизликларни қаноатлантирадиган ихтиёрий $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ..., $\bar{y}_n$ ҳамда $\bar{\bar{y}}_1$, $\bar{\bar{y}}_2$, ..., $\bar{\bar{y}}_n$ қийматлари учун

$$\begin{gathered} |f_i(x,\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ldots,\ \bar{y}_n)-f_i(x,\bar{\bar{y}}_1,\ \bar{\bar{y}}_2,\ldots,\bar{\bar{y}}_n)|\leqslant \\ \leqslant k(|\bar{y}-\bar{\bar{y}}_1|+|\bar{y}_2-\bar{\bar{y}}_2|+\ldots+|\bar{y}_n-\bar{\bar{y}}_n|) \end{gathered}$$

($i=1,2,3,\ldots, n$) *тенгсизлик ўринли бўлса,* $f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *функциялар* y_1, $y_2, \ldots, y_n$ *лар бўйича Липшиц шартини бажаради дейилади.*

1-теорема. *Агар*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

дифференциал тенгламалар системасида $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ *функцияларнинг ҳар бири* D *да узлуксиз бўлиб,* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *аргументлари бўйича Липшиц шартини бажарса, у ҳолда (1) дифференциал тенгламалар системасининг* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *сегментда* $(h \leqslant min(a, \frac{b_i}{M}, \dots, \frac{b_n}{M})_I |f_i| \leqslant M, i = \overline{1, n})$ *бошланғич*

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^0, \; y_2|_{x=x_0} = y_2^0, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0$$

шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд ва у ягона бўлади.

2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ

1°. Дифференциал тенгламалар системасини битта юқори тартибли дифференциал тенгламага келтириб ечиш.

Дифференциал тенгламалар системасини ечишнинг турли усуллари мавжуд. Шулардан бири маълум шартлар бажарилганда дифференциал тенгламалар системасини битта юқори тартибли дифференциал тенгламага келтириб ечиш усулидир. Бу усулда (1) системага кирган тенгламалар билан бирга, шу системага кирган тенгламаларни дифференциаллашдан ҳосил бўлган тенгламалар бирга қаралади. Сўнг топилган функция ҳосилаларнинг ўрнига қўйиш йўли билан битта номаълум функцияга нисбатан юқори тартибли дифференциал тенглама ҳосил қилинади.

Соддалик учун икки номаълум функция ва уларнинг ҳосилалари қатнашган иккита дифференциал тенгламадан иборат

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

системани қараймиз. Бу системанинг биринчи тенгламаси

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \qquad (3)$$

ни дифференциаллаб топамиз:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2'.$$

Бу тенгликдаги y_1', y_2' ларнинг ўрнига (2) системадаги унинг қийматларини қўйсак, унда

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1(x, y_1, y_2) + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot f_2(x, y_1, y_2) \qquad (4)$$

бўлади.

(3) тенгламадан y_2 ни топиб (бу y_2 функция x, y_1, y_1' лар орқали ифодаланади) уни (4) тенгликдаги y_2 нинг ўрнига қўйсак, натижада

$$y_1''=\Phi(x, y_1, y_1')$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y_1'=y_2, \\ y_2'=-y_1 \end{array}\right\}$$

системани ечинг.

Бу системанинг биринчи тенгламасининг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y_1''=y_2'.$$

Сўнг y_2' нинг ўрнига (берилган системанинг иккинчи тенгламасига кўра) $-y_1$ ни қўйиб қуйидаги

$$y_1''+y_1=0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$y_1=C_1\cos x+C_2\sin x$$

бўлади.

Берилган системанинг биринчи тенгламасидан фойдаланиб

$$y_2=y_1'=(C_1\cos x+C_2\sin x)'=-C_1\sin x+C_2\cos x$$

бўлишини топамиз.

Демак, системанинг ечими

$$y_1=C_1\cos x+C_2\sin x,$$
$$y_2=-C_1\sin x+C_2\cos x$$

бўлади.

2. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y_1'=y_2^2+\sin x, \\ y_2'=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_1}{y_2} \end{array}\right\}$$

системани ечинг.

Бу системанинг биринчи тенгламасининг ҳар икки томонини дифференциаллаймиз:

$$y_1''=2y_2\cdot y_2'+\cos x.$$

Берилган системанинг иккинчи тенгламасидан

$$2y_2\cdot y_2'=y_1$$

бўлишини топамиз. Кейинги икки тенгликдан

$$y_1'' - y_1 = \cos x$$

бўлиши келиб чиқади. Бу чизиқли бир жинссиз тенгламанинг умумий ечими

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$$

бўлади.

Сўнг

$$y_1' = y_2^2 + \sin x,$$
$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$$

тенгликлардан

$$y_2^2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган системанинг ечими

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x\,,$$

$$y_2 = \left(C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x\right)^{\frac{1}{2}}$$

бўлади.

2°. Дифференциал тенгламалар системасини интегралланувчи комбинацияларни топиш билан ечиш.

Дифференциал тенгламалар системасини ечишнинг бу усулида, системага кирган тенгламалар устида арифметик амаллар бажариш натижасида интегралланувчи комбинация ҳосил қилинади, яъни амаллар натижасида x, y_1, $y_2, \ldots$, y_n ларга боғлиқ шундай номаълум

$$u = u(x,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_n)$$

функция ва унинг ҳосилалари боғланган тенглама топиладики, у енгил интегралланувчи бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = -\dfrac{y_2}{x}, \\[2mm] y_2' = -\dfrac{y_1}{x} \end{array}\right|$$

системани ечинг.

Аввало системага кирган тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$y_1' + y_2' = -\frac{1}{x}(y_1 + y_2) \Rightarrow (y_1 + y_2)' = -\frac{1}{x}(y_1 + y_2)\,.$$

Равшанки,

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dx} = -\frac{1}{x}(y_1+y_2) \Rightarrow \frac{d(y_1+y_2)}{y_1+y_2} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y_1+y_2| = -\ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow y_1+y_2 = \frac{C_1}{x}.$$

Сўнг системага кирган тенгламаларни ҳадлаб айирамиз:

$$y_1' - y_2' = \frac{1}{x}(y_1-y_2) \Rightarrow (y_1-y_2)' = \frac{1}{x}(y_1-y_2).$$

Равшанки,

$$\frac{d(y_1-y_2)}{dx} = \frac{1}{x}(y_1-y_2) \Rightarrow \frac{d(y_1-y_2)}{y_1-y_2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y_1-y_2| = \ln|x| + \ln|C_2| \Rightarrow y_1-y_2 = C_2x.$$

Натижада

$$\left.\begin{aligned} y_1+y_2 &= \frac{C_1}{x}, \\ y_1-y_2 &= C_2x \end{aligned}\right\}$$

система ҳосил бўлади. Бу системадан

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x} + C_2x\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{x} - C_2x\right)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу берилган дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади.

2. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 \cdot y_2, \\ y_2' &= \frac{y_2}{x} - y_1 \cdot y_2^2 \end{aligned}\right\}$$

системани ечинг.

Берилган системадаги биринчи тенгламани y_2 га, иккинчи тенгламани эса y_1 га кўпайтириб ҳосил бўлган тенгламаларни ҳадлаб қўшамиз:

$$y_1' \cdot y_2 + y_2' \cdot y_1 = y_1^2 \cdot y_2^2 + \frac{y_1 \cdot y_2}{x} - y_1^2 \cdot y_2^2 \Rightarrow y_2 \cdot y_1' + y_1 \cdot y_2' = \frac{y_1 \cdot y_2}{x}.$$

Агар

$$y_2 \cdot y_1' + y_1 \cdot y_2' = (y_1 \cdot y_2)'$$

бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги тенглама қуйидаги

$$(y_1 \cdot y_2)' = \frac{1}{x}(y_1 \cdot y_2)$$

кўринишга келади.

Равшанки,

$$\frac{d(y_1\cdot y_2)}{dx}=\frac{1}{x}(y_1\cdot y_2)\Rightarrow\frac{d(y_1\cdot y_2)}{y_1\cdot y_2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|y_1\cdot y_2|=\ln|x|+\ln|C_1|\Rightarrow y_1\cdot y_2=x\cdot C_1. \qquad (5)$$

Бу тенгликни эътиборга олиб, берилган системанинг биринчи тенгламаси $y_1'=y_1^2\cdot y_2$ ни ушбу

$$y_1'=y_1\cdot C_1\cdot x \qquad (6)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Энди (6) тенгламани ечамиз:

$$\frac{dy_1}{dx}=C_1\cdot x\cdot y_1\Rightarrow\frac{dy_1}{y_1}=C_1\cdot x\cdot dx\Rightarrow\ln|y_1|=$$

$$=C_1\cdot\frac{x^2}{2}+\ln|C_2|\Rightarrow y_1=C_2\cdot e^{C_1\cdot\frac{x^2}{2}}.$$

(5) тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$y_1\cdot y_2=C_1x\Rightarrow y_2\cdot C_2\cdot e^{C_1\cdot\frac{x^2}{2}}=C_1x\Rightarrow y_2=\frac{C_1}{C_2}x\cdot e^{-C_1\cdot\frac{x^2}{2}}\ (C_2\neq 0).$$

Шундай қилиб,

$$y_1=C_2\cdot e^{C_1\cdot\frac{x^2}{2}}$$

$$y_2=\frac{C_1}{C_2}\cdot x\cdot e^{-C_1\cdot\frac{x^2}{2}}$$

берилган дифференциал тенгламалар системасининг ечими бўлади.

3. Ушбу

$$\left.\begin{aligned}y_1'&=3y_1+5y_2,\\ y_2'&=-2y_1-8y_2\end{aligned}\right\}$$

дифференциал тенгламалар системасининг

$$y_1|_{x=0}=2,\ y_2|_{x=0}=5$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Системадаги биринчи тенгламани 2 га кўпайтириб, уни иккинчи тенглама билан ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$2y_1'+y_2'=2(3y_1+5y_2)+(-2y_1-8y_2)\Rightarrow(2y_1+y_2)'=2(2y_1+y_2).$$

Кейинги тенгламани ечамиз:

$$\frac{d(2y_1+y_2)}{dx}=2(2y_1+y_2)\Rightarrow\frac{d(2y_1+y_2)}{2y_1+y_2}=2dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln|2y_1+y_2|=2x+\ln|C_1|\Rightarrow 2y_1+y_2=C_1e^{2x}\Rightarrow y_2=C_1e^{2x}-2y_1. \qquad (7)$$

Агар y_2 нинг бу ифодасини берилган системадаги биринчи тенгламада қатнашган y_2 нинг ўрнига қўйсак, унда

$$y_1'=3y_1+5(C_1e^{2x}-2y_1),$$

яъни

$$y_1'=-7y_1+5C_1\cdot e^{2x}$$

чизиқли дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Бу чизиқли дифференциал тенгламани 8- боб, 3- § да ўрганилган усул билан ечиб, унинг ечими

$$y_1=C_2e^{-7x}+\frac{5}{9}C_1\cdot e^{2x}$$

бўлишини топамиз.

Юқоридаги (7) тенгликдан фойдаланиб,

яъни
$$y_2=C_1\cdot e^{2x}-2(C_2e^{-7x}+\frac{5}{9}C_1e^{2x}),$$

$$y_2=-\frac{1}{9}C_1e^{2x}-2C_2\cdot e^{-7x}$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламалар системасининг ечими:

$$y_1=C_2e^{-7x}+\frac{5}{9}C_1\cdot e^{2x},$$

$$y_2=-\frac{1}{9}C_1e^{2x}-2C_2e^{-7x}. \qquad (8)$$

Энди
$$y_1|_{x=0}=2,\ y_2|_{x=0}=5$$

шартларни эътиборга олиб, (8) тенгликлардаги x нинг ўрнига 0 ни, y_1 ҳамда y_2 ларнинг ўрнига эса мос равишда 2 ва 5 ларни қўямиз. Натижада

$$\left.\begin{array}{l}2=C_2+\frac{5}{9}C_1,\\ 5=-\frac{1}{9}C_1-2C_2\end{array}\right| \qquad (9)$$

бўлади. (9) системани ечиб

$$C_1=9,\quad C_2=-3$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган дифференциал тенгламалар системасининг бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечими

$$y_1=(-3)\cdot e^{-7x}+\frac{5}{9}e^{2x}\cdot 9=5e^{2x}-3e^{-7x},$$

$$y_2=-\frac{1}{9}9e^{2x}-2(-3)e^{-7x}=-e^{2x}+6e^{-7x}$$

бўлади.

АДАБИЁТЛАР

1. Т. Жўраев, А. Саъдуллаев, Г. Худойберганов, Х. Мансуров, А. Ворисов. Олий математика асослари. 1- том. Тошкент, «Ўзбекистон», 1995.
2. В. С. Шипачев. Высшая математика. М., «Высшая школа», 1990.
3. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, М., 1958.
4. Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.
5. Л. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, Л. Г. Свешников. Дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1980.
6. М. С. Салохитдинов., Ғ. Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Т., «Ўзбекистон», 1994.
7. Т. Азларов, Х. Мансуров. Математик анализ, I—II том. Тошкент, 1994, 1995.
8. Ё. У. Соатов. Олий математика. I—II том. Тошкент, «Ўқитувчи», 1993, 1994.
9. В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. Краткий курс высшей математики. М., 1986.
10. А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Ворисов, Р. Ғуломов. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. I—II томлар. Тошкент, «Ўзбекистон», 1994, 1995.

МУНДАРИЖА

Тўхтамурат Жўраев, Азимбой Саъдуллаев,
Гулмирза Худойберганов, Хожиакбар Мансуров,
Азизжон Ворисов

Издательство «Ўзбекистон»—1999,
700129, Ташкент, Навои, 30.

Кичик муҳаррир *Ш. Соибназарова*
Бадиий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Техник муҳаррир *А. Горшкова*
Мусаҳҳиҳ *М. Мажитхўжаева*

Теришга берилди 9.10.95. Босишга руҳсат этилди 12.02.99. Бичими $60 \times 90^1/_{16}$. Офсет босма усулида босилди. Шартли босма т. 19,0. Нашр т. 18,53. Нусхаси 3000.
Буюртма № 690. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 135—95.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.