ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Гулмирза Худойберганов, Азизжон Кенжабаевич Ворисов, Ҳожакбар Туробович Мансуров, Боҳодир Аллабердиевич Шоимқулов

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МАЪРУЗАЛАР

I

5460100-Математика,
5440200-Механика бакалавр йўналишлари учун мўлжалланган.

Тошкент-2010

Сўз боши

Республикамизда Таълим тўғрисидаги қонуннинг қабул қилиниши, кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури замон талабларига жавоб берадиган мутахассисларни тайёрловчи олий ўқув юртларига, айниқса университетларга катта маъ-сулият юклади. Давлат таълим стандартлари, ўқув дастурлари асосида дарсликлар, ўқув қўлланмаларни яратиш масаласи юзага келди.

Давлат таълим стандартлари барча фанлардан, жумладан математик анализ бўйича мавжуд дарслик ва қўлланмаларга янгича нуқтаи назардан қарашни тақозо этади.

Математик анализ олий математиканинг фундаментал бўлимларидан бўлиб, математиканинг пойдевори ҳисобла-нади.

Маълумки, математик анализ курси давомида кўпгина тушунча ва тасдиқлар, шунингдек уларнинг татбиқлари келтирилади.

Кўп олий ўқув юртлари талабаларининг ўқиш давомида дуч келадиган жиддий фанлардан бири ҳам математик анализдир.

Математик анализ фанининг асосий вазифаси шу фаннинг тушунча, тасдиқлар ва бошқа математик маълумот-лар мажмуаси билан таништиришгина бўлмасдан, балки талабаларни мантиқий фикрлашга, математик усулларни амалий масалаларни ечишга қўллашни ўрганишдан иборат.

Мазкур ўқув қўлланма, муаллифларнинг кўп йиллик тажрибалари асосида, замонавий талабаларни ҳисобга олган ҳолда ёзилган бўлиб, у маърузалар шаклида баён этилган. Мавзуларни маърузалар бўйича баён этилиши талабаларни мавзу мазмуни ва моҳиятини чуқурроқ англашга ёрдам беради деб ўйлаймиз.

Муаллифлар ҳар бир маърузанинг мазмуни равон, математик қатъий, ўз навбатида талаба томонидан тушунарли бўлишига харакат қилдилар.

Ўқув қўлланма икки қисмдан иборат. Мазкур биринчи қисм 11-бобдан иборат бўлиб, 54 та маърузага ажратилган. Унда ҳақиқий сонлар назарияси, функция лимити ва узлуксизлиги, функциянинг дифференциал ва интеграл ҳисоби ҳамда сонли қаторлар мавзулари баён этилган.

Маърузаларнинг мантиқий кетма-кетликда, бир-бирига узвий боғлиқликда, тушунчаларни равон айтилишига, тасдиқлар исботларини аниқ, илмийликка асосланган бўлишига эътибор қаратилаган. Ҳар бир маъруза сўнгида назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлган машқлар келтирил-ган. Ўйлаймизки, бундай машқлар талабаларни мустақил ишлашга, мантиқий фикрлашга ўргатади.

«Математик анализдан маърузалар» математика ва механика йўналишлари бўйича бакалаврлар тайёрлаш ўқув режасига мослаштириб ёзилган бўлсада, ундан математика кенгроқ ўқитиладиган олий ўқув юртлари талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Китоб муаллифлари, шу соҳа мутахассислари, Ўзбекистон Миллий университетида кўп йиллар мобайнида мазкур курс бўйича ўқиган маърузалардан фойдаландилар.

Китобда математик белгилардан кенг фойдаланиш билан бир қаторда тасдиқлар исботининг бошланганлигини «◄» белги, тугаганлиги эса «►» белги орқали ифодаланган.

Китоб қўлёзмасини синчиклаб ўқиб чиқиб, уни илмий ва методик жиҳатдан яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшган-лари учун профессорлар Р.Ашуров, Р.Ғанихўжаевларга муал-лифлар миннатдорчилик билдирадилар.

Шунингдек китобни нашрга тайёрлашда қатнашган Шоимқулов Б.Б га ўз ташаккуримизни исхор этамиз.

1-БОБ
ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАР

1-маъруза
Тўпламлар. Тўпламлар устида амаллар

1^0. Тўплам тушунчаси. Тўплам математиканинг бошлан-ғич, айни пайтда муҳим тушунчаларидан бири. Уни ихтиёрий табиатли нарсаларнинг (предметларнинг) маълум белгилар бўйича бирлашмаси (мажмуаси) сифатида тушунилади. Масалан, жавондаги китоблар тўплами, бир нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тўплами, $x^2-5x+6=0$ тенгламанинг илдизлари тўплами дейилиши мумкин.

Тўпламни ташкил этган нарсалар **унинг элементлари** дейилади.

Математикада тўпламлар бош харфлар билан, уларнинг элементлари эса кичик харфлар билан белгиланади. Масалан, A, B, C - тўпламлар, a, b, c - тўпламнинг элементлари.

Баъзан тўпламлар уларнинг элементларини кўрсатиш билан ёзилади:

$$\mathrm{A}=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\},$$
$$\mathrm{N}=\{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}, \ldots\},$$
$$\mathrm{Z}=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Агар a бирор A тўпламнинг элементи бўлса, $a\in A$ каби ёзилади ва « a элемент A тўпламга тегишли » деб ўқилади. Агар a шу тўпламга тегишли бўлмаса, уни $a\notin A$ каби ёзилади ва « a элемент A тўпламга тегишли эмас » деб ўқилади. Масалан, юқоридаги A тўпламда $10\in A$, $15\notin A$.

Агар A чекли сондаги элементлардан ташкил топган бўлса, у **чекли тўплам**, акс ҳолда **чексиз тўплам** дейилади. Масалан, $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ чекли тўплам, бир нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами эса чексиз тўплам бўлади.

1-таъриф. A ва B тўпламлари берилган бўлиб, A тўпламнинг барча элементлари B тўпламга тегишли бўлса, A **тўплам** B **нинг қисми** (**қисмий тўплам**) дейилади ва

$$A\subset B \text{ (ёки } B\supset A)$$

каби ёзилади.

A тўпламнинг элементлари орасида бирор хусусиятга (бу хусусиятни P билан белгилаймиз) эга бўладиганлари бўлиши мумкин. Бундай хусусиятли элементлардан тузилган тўплам қуйидагича

$$\{x\in A \mid P\}$$

белгиланади. Равшанки,

$$\{x\in A \mid P\}\subset A$$

бўлади.

Агар A тўплам элементлари орасида P хусусиятли элементлар бўлмаса, у ҳолда

$$\{x\in A \mid P\}$$

битта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўлиб, уни **бўш тўплам** дейилади. Бўш тўплам $\varnothing$ каби белгиланади. Масалан, $x^2+x+1=0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан иборат A бўш тўплам бўлади:

$$\varnothing=\left\{x\in A\middle|\, x^2+x+1=0\right\}.$$

Ҳар қандай А тўплам учун

$$A\subset A\,,\ \varnothing\subset A$$

деб қаралади.

Одатда, A тўпламнинг барча қисмий тўпламларидан иборат тўплам $F(A)$ каби белгиланади. Масалан, $A=\{a,b,c\}$ тўплам учун

$$F(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$$

бўлади.

2-таъриф. A ва B тўпламлари берилган бўлиб,

$$A\subset B\ ,\ B\subset A$$

бўлса, A ва B бир бирига **тенг тўпламлар** дейилади ва

$$A=B$$

каби ёзилади.

Демак, $A=B$ тенглик A ва B тўпламларнинг бир хил элементлардан ташкил топганлигини билдиради.

2^0. Тўпламлар устида амаллар. Икки A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

3-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган E тўплам A ва B **тўпламлар йиғиндиси** (**бирлашмаси**) дейилади ва $A\cup B$ каби белгиланади:

$$E=A\cup B\,.$$

Демак, бу ҳолда $a\in A\cup B$ дан $a\in A$, ёки $a\in B$, ёки бир вақтда $a\in A$, $a\in B$ бўлиши келиб чиқади.

4-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча умумий элементларидан ташкил топган F тўплам A ва B **тўпламлар кўпайтмаси** (**кесишмаси**) дейилади ва $A\cap B$ каби белгиланади:

$$F=A\cap B\,.$$

Демак, бу ҳолда $a\in A\cap B$ дан бир вақтда $a\in A$, $a\in B$ бўлиши келиб чиқади.

5-таъриф. A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган барча элементларидан ташкил топган G тўплам A **тўпламдан** B **тўпламнинг айирмаси** дейилади ва $A\setminus B$ каби белгиланади:

$$G=A\setminus B\,.$$

Демак, $a\in A\setminus B$ дан $a\in A$, $a\notin B$ бўлиши келиб чиқади.

6-таъриф. A тўпламнинг B га тегишли бўлмаган барча элементларидан ва В тўпламнинг A га тегишли бўлмаган барча элементларидан тузилган тўплам A ва B **тўпламлар-нинг симметрик айирмаси** дейилади ва $A\Delta B$ каби белгила-нади:

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Демак, $a\in A\Delta B$ бўлишидан $a\in A$, $a\notin B$ ёки $a\in B$, $a\notin A$ бўлиши келиб чиқади.

7-таъриф. Айтайлик, $a\in A$, $a\in B$ бўлсин. Барча тартибланган (a,b) кўринишидаги жуфтликлардан тузилган тўплам A ва B **тўпламларнинг декарт кўпайтмаси** дейилади ва $A\times B$ каби белгиланади. Демак,

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}.$$

Хусусан, $A=B$ бўлганда $A\times A=A^2$ деб қаралади.

8-таъриф. Айтайлик, S ва A тўпламлар берилган бўлиб, $A\subset S$ бўлсин. Ушбу

$$S\setminus A$$

тўплам A тўпламни S га **тўлдирувчи тўплам** дейилади ва CA ёки $C_S A$ каби белгиланади:

$$CA=S\setminus A.$$

Тўпламлар устида бажариладиган амалларнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

A, B ва D тўпламлари берилган бўлсин.

1) $A\subset B$, $B\subset D$ бўлса, $A\subset D$ бўлади;

2) $A\cup A=A,\ A\cap A=A$ бўлади;

3) $A\subset B$ бўлса, $A\cup B=B,\ A\cap B=A$ бўлади;

4) $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$ бўлади;

5) $(A\cup B)\cup D=A\cup(B\cup D)$, $(A\cap B)\cap D=A\cap(B\cap D)$ бўлади;

6) $A\subset S$ бўлса, $A\cap CA=\varnothing$;

7) $C(A\cup B)=CA\cap CB$, бунда $A\subset S$, $B\subset S$;

8) $C(A\cap B)=CA\cup CB$, бунда $A\subset S$, $B\subset S$.

Бу хоссаларнинг исботи юқорида келтирилган таъриф-лардан келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B) \tag{1}$$

тенглик исботлансин.

◄ $a\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ бўлсин. У ҳолда

$$a\in(A\setminus B):\ a\in A,\ a\notin B$$

ёки

$$a\in(B\setminus A):\ a\in B,\ a\notin A$$

бўлади. Бундан эса

$$a\in(A\cup B),\ a\notin(A\cap B)$$

бўлиб,

$$a\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\subset(A\cup B)\setminus(A\cap B). \tag{2}$$

Айтайлик, $a\in(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ бўлсин.

У ҳолда

$$a\in(A\cup B):\ a\in A \text{ ёки } a\in B,$$

$$a\notin(A\cap B):\ a\notin A, a\notin B \text{ ёки } a\in A, a\notin B \text{ ёки } a\notin A, a\in B$$

бўлади.

Бундан эса

$$a\in A\setminus B \text{ ёки } a\in B\setminus A$$

бўлиб,

$$a\in(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)\subset(A\setminus B)\cup(B\setminus A). \tag{3}$$

(2) ва (3) муносабатлардан (1) тенгликнинг ўринли бўлиши топилади. ►

Тўпламлар устида бажариладиган амалларни баён этишда тўпламларнинг қандай табиатли элементлардан тузил-ганлигига эътибор қилинмади.

Аслида, келтирилган амаллар бирор универсал тўплам деб аталувчи тўпламнинг қисмий тўпламлари устида бажари-лади деб қаралади. Масалан, натурал сонлар тўпламлари устида амаллар бажариладиган бўлса, универсал тўплам сифатида барча натурал сонлардан иборат N тўпламни олиш мумкин.

3^0. Математик белгилар. Математикада тез-тез учрайди-ган сўз ва сўз бирикмалари ўрнида махсус белгилар ишлати-лади. Улардан мухимларини келтирамиз:

1) «агар ... бўлса, у ҳолда ... бўлади» ибораси «$\Rightarrow$» белги орқали ёзилади;

2) икки иборанинг эквивалентлиги ушбу «$\Leftrightarrow$» белги орқали ёзилади;

3) «ҳар қандай», «ихтиёрий», «барчаси учун» сўзлари ўрнига «$\forall$» белги ишлатилади;

4) «мавжудки», «топиладики» сўзлари ўрнига «$\exists$» мавжудлик белгиси ишлатилади.

Машқлар

1. Ушбу

$$(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$$

тенглик исботлансин.

2. Агар A ва B чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда $n(A)$, $n(B)$ бўлса,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

бўлиши исботлансин.

3. Агар A чекли тўплам бўлиб, унинг элементларининг сони n га тенг бўлса, бу тўпламнинг барча қисмий тўпламлари тўплами $F(A)$ нинг элементлари сони 2^n га тенг экани исботлансин.

2-маъруза
Акслантиришлар ва уларнинг турлари

1^0. Акслантириш тушунчаси. E ва F тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар E тўпламдан олинган ҳар бир x элемент-га бирор f қоида ёки қонунга кўра F тўпламнинг битта y элементи $(y \in F)$ мос қўйилган бўлса, E **тўпламни** F **тўпламга акслантириш берилган** дейилади ва

$$f{:}E \to F \text{ ёки } x \xrightarrow{f} y, \quad (x \in E,\, y \in F)$$

каби белгиланади. Бунда E тўплам f акслантиришнинг **аниқланиш тўплами** дейилади.

1-мисол. Ушбу $N = \{1,2,3,...\}$ ва $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ тўпламлар берилган бўлсин.

1) ҳар бир натурал n $(n \in N)$ сонга $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n} \in N'\right)$ сонни мос қўйсак, унда

$$f : N \to N', \; n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$$

акслантириш ҳосил бўлади. Уни $f(n) = \frac{1}{n}$ каби ҳам ёзилади.

2) ҳар бир натурал сон n $(n \in N)$ сонга $\frac{1}{n^2}$ $\left(\frac{1}{n^2} \in N'\right)$ сонни мос қўйсак, унда

$$\varphi : N \to N', \quad n \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{n^2}$$

акслантиришга эга бўламиз: $\varphi(n) = \frac{1}{n^2}$.

3) ҳар бир натурал n $(n \in N)$ сонга 1 $(1 \in N')$ сонини мос қўйиш натижасида

$$g : N \to N', \; n \xrightarrow{g} 1$$

акслантириш ҳосил бўлади: $g(n) = 1$.

Айтайлик,

$$f : E \to F$$

акслантириш берилган бўлсин. $x \in E$ элементга мос қўйилган $y \in F$ элемент x **нинг акси (образи)** дейилади ва $y = f(x)$ каби белгиланади.

Энди $y \in F$ элементни олайлик. E тўпламнинг шундай x элементларини қараймизки, $f(x) = y$ бўлсин. Бундай $x \in E$ элементлар $y \in E$ нинг **асли** (**прообрази**) дейилади ва $f^{-1}(y)$ каби белгиланади:

$$f^{-1}(y)=\{x\in E \mid f(x)=y\}.$$

Агар $A\subset E$ бўлса, ушбу

$$\{f(x) \mid x\in A\}$$

тўплам A **тўпламнинг** F даги **акси** дейилади ва $f(A)$ каби белгиланади:

$$f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}.$$

Агар $B\subset F$ бўлса, ушбу

$$\{x\in E \mid f(x)\in B\}$$

тўплам B **тўпламнинг** E даги **асли** дейилади ва $f^{-1}(B)$ каби белгиланади:

$$f^{-1}(B)=\{x\in E \mid f(x)\in B\}.$$

2-мисол. Фараз қилайлик, $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ ва $M\{-1,+1\}$ тўпламлар берилган бўлиб, ушбу

$$f: N\to M$$

акслантириш қуйидаги

$$f(n)=(-1)^n$$

кўринишда бўлсин.

Равшанки, $5\in N$ нинг акси $f(5)=-1$; $1\in M$ нинг асли эса $f^{-1}(1)=\{2,4,6,\ldots\}$ бўлади. Шунингдек, $A=\{3,4\}\subset N$ тўпламнинг акси $f(A)=\{-1,1\}=M$, $B=\{-1\}\subset M$ тўпламнинг асли эса

$$f^{-1}(B)=\{1,3,5,\ldots\}$$

бўлади.

Фараз қилайлик, A ва B тўпламлари F тўпламнинг қисмий тўпламлари бўлсин: $A\subset F$, $B\subset F$. Унда

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(\mathrm{A})\cap f^{-1}(\mathrm{B}) \qquad (1)$$

бўлади.

◄ Айтайлик, $x\in f^{-1}(A\cap B)$ бўлсин. Унда $f(x)\in A\cap B$ бўлиб, $f(x)\in A$ ва $f(x)\in B$ бўлади. Кейинги муносабатлардан $x\in f^{-1}(A)$, $x\in f^{-1}(B)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. Бундан эса

$$f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) \qquad (2)$$

бўлишини топамиз.

Айтайлик, $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$ бўлсин. Унда $x\in f^{-1}(A)$ ва $x\in f^{-1}(B)$ бўлиб, $f(x)\in A$, $f(x)\in B$ бўлади. Натижаси $f(x)\in A\cap B$ бўлиб, ундан $x\in f^{-1}(A\cap B)$ бўлишини топамиз. Бу эса

$$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cap B) \qquad (3)$$

бўлишини билдиради.

(2) ва (3) муносабатлардан (1) тенгликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади. ►

Юқоридагидек,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
тенгликларнинг ўринли бўлиши исботланади.

2^0. Акслантиришнинг турлари. Айтайлик,
$$f : E \to F \qquad (4)$$
акслантириш берилган бўлиб, $f(E)$ эса E тўпламнинг акси бўлсин:
$$f(E) = \{ f(x) | x \in E \}.$$

2-таъриф. Агар (4) акслантиришда
$$f(E) \subset F$$
бўлса, (4) акслантириш E тўпламни F тўпламнинг **ичига акслантириш** дейилади.

Масалан,
$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}, \; N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$
тўпламлари учун ушбу
$$f : N \to N', \; n \xrightarrow{f} \frac{1}{3n}$$
акслантириш N тўпламни N' тўпламнинг ичига акслантириш бўлади.

3-таъриф. Агар (4) акслантиришда
$$f(E) = F$$
бўлса, (4) акслантириш Е тўпламни F тўпламнинг **устига акслантириш** (**сюръектив акслантириш**) дейилади.

Масалан,
$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}, \; M = \{-1, 1\}$$
тўпламлари учун
$$n \xrightarrow{f} (-1)^n$$
акслантириш N тўпламни M тўпламнинг устига акслантириш бўлади.

4-таъриф. Агар (4) устига акслантириш бўлиб, бу акслантириш E тўпламнинг турли элементларини F тўплам-нинг турли элементларига акслантирса, (4) **инъектив акслан-тириш** дейилади.

5-таъриф. Агар (4) устига акслантириш бўлиб, у инъектив акслантирш ҳам бўлса, (4) **ўзаро бир қийматли акслантириш (мослик)** дейилади.

Масалан,
$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}, \; N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$
тўпламлар учун ушбу
$$f : N \to N', \; n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$$
акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади.

6-таъриф. $f: E \to F$ акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш бўлсин. F тўпламнинг ҳар бир y, $(y \in F)$ элементига E тўпламнинг битта x элементини $(x \in E)$ мос қўядиган ва

$$g(y) = g(f(x)) = x$$

муносабат билан аниқланадиган

$$g: F \to E$$

акслантириш $f: E \to F$ га нисбатан **тескари акслантириш** дейилади ва f^{-1} каби белгиланади:

$$f^{-1}: F \to E.$$

Демак, $f: E \to F$ га тескари акслантириш мавжуд бўлиши учун:

а) f устига акслантириш,

б) F тўпламдан олинган ҳар бир у элементнинг E тўп-ламдаги асли

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

ягона бўлиши керак.

3^0. Эквивалент тўпламлар. Саноқли тўпламлар. Кўп ҳолда тўпламларни уларнинг ташкил этган элементлари сони бўйича ўзаро солиштиришга тўғри келади. Чекли тўпламлар солиштирилганда бир тўпламнинг элементлари сони иккинчисидан кўп, ёки кам, ёки уларнинг элементларининг сони бир-бирига тенг деган ҳулосага келинади. Бу ҳолда элементлари сони кўп бўлган тўпламни «қуввати» кўпроқ дейиш мумкин.

Чексиз тўпламларни солиштиришда вазият бошқачароқ бўлади. Чексиз тўпламлар эквивалентлик тушунчаси ёрдами-да солиштирилади.

7-таъриф. Агар $f: E \to F$ ўзаро бир қийматли акслaнти-риш (мослик) бўлса, E ва F **эквивалент тўпламлар** дейилади ва $E \sim F$ каби белгиланади.

Демак, E ва F тўпламларнинг эквивалентлиги $E \sim F$ уларнинг элементлари ўзаро бир қийматли мосликда эканлигини билдиради.

Масалан,

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}, \quad N_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

тўпламлар учун

$$n \xrightarrow{f} 2n, \quad (n \in N, \ 2n \in N_1)$$

акслантириш ўзаро бир қийматли. Бинобарин,

$$N \sim N_1$$

бўлади. (Бу ҳолда $n \leftrightarrow 2n$ каби ёзилади).

Айтайлик A, B, D тўпламлар берилган бўлсин. Унда

1) $A \sim A,$
2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A,$
3) $A \sim B$, $B \sim D \Rightarrow A \sim D$

бўлади. Бу хоссаларнинг исботи юқорида келтирилган таърифдан келиб чиқади.

Икки A ва B тўпламлари ўзаро эквивалент бўлса, уларни бир хил қувватли тўпламлар деб қаралади.

Демак, қувватни эквивалент тўпламларнинг миқдорий характеристикаси сифатида тушуниш мумкин.

Чекли тўпламларнинг ўзаро эквивалентлиги уларнинг ташкил этган элементларининг сонини бир-бирига тенглигини билдиради.

Умуман, A ва B чекли тўпламларнинг ўзаро эквивалент бўлиши учун уларнинг элементлари сони бир хил бўлиши зарур ва етарли:

$$A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B),$$

бунда $n(G) - G$ тўпламнинг элементлари сони.

8-таъриф. Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган ҳар қандай тўплам **саноқли тўплам** дейилади.

Масалан, ушбу

$$N_1 = \{2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\},$$

$$N_2 = \{1, 8, 27, 64, ..., n^3, ...\},$$

$$N_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$$

тўпламлар саноқли тўпламлар бўлади, чунки

$$n \leftrightarrow 2n, \ N \sim N_1;$$

$$n \leftrightarrow n^3, \ N \sim N_2;$$

$$n \leftrightarrow \frac{1}{n}, \ N \sim N_3.$$

Натурал сонлар тўплами N га эквивалент бўлган барча тўпламлар саноқли тўпламлар синфини ташкил этади. Бу синф тўпламларининг қуввати бир хил бўлади.

Равшанки,

$$N_1 \subset N, N_2 \subset N, N_3 \subset N$$

бўлади. Айни пайтда, юқорида кўрдикки,

$$N \sim N_1, \ N \sim N_2, \ N \sim N_3.$$

Бундай вазият (тўпламнинг қисми ўзига эквивалент бўлиши) фақат чексиз тўпламлардагина содир бўлади.

Математик анализ курсида тайин E ва F тўпламлар учун $f: E \to F$ акслантиришлар ва уларнинг хоссалари ўрганилади.

Даставвал юқоридаги тўпламлар сифатида ҳақиқий сонлар тўпламини оламиз ва унинг хоссаларини ўрганамиз.

Машқлар

1. Агар $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ бўлса, А тўпламнинг B тўпламга акслантиришлари сони 9 га тенг бўлиши исботлансин.

2. Айтайлик, A саноқли тўплам бўлиб, $x \notin A$ бўлсин. У ҳолда $A \cup \{x\} \sim A$ бўлиши исботлансин.

3-маъруза
Ҳақиқий сонлар

Сон тушунчаси узоқ ўтмишдан маълум. Одамлар санаш тақозоси билан дастлаб 1, 2, 3, ... - натурал сонларни қўлла-ганлар. Сўнгра манфий сон, рационал сон ва ниҳоят, ҳақиқий сон тушунчаси киритилган ва ўрганилган.

Биз ўқувчига ўрта мактаб, коллеж ва лицейларда математика курсидан натурал, бутун, рационал сонларни, улар устида бажариладиган амалларни, амалларнинг хоссаларини, шунингдек тўғри чизиқда (сонлар ўқида) геометрик ифодаланишини маълум деб ҳисоблаймиз.

Ҳақиқий сонларнинг математик анализ курсида муҳимлигини эътиборга олиб, улар ҳақидаги маълумотларни талаб даражасида баён этамиз.

1^0. Рационал сонлар ва чексиз даврий ўнли касрлар.

Фараз қилайлик, $\frac{p}{q}$ бирор мусбат рационал сон бўлсин. Бўлиш қоидасидан фойдаланиб p бутун сонни q га бўламиз. Агар p ни q га бўлиш жараёнида бирор қадамдан кейин қолдиқ нолга тенг бўлса, у ҳолда бўлиш жараён тўхтаб, $\frac{p}{q}$ каср ўнли касрга айланади. Одатда, бундай ўнли каср чекли ўнли каср дейилади. Масалан, $\frac{59}{40}$ касрда 59 ни 40 га бўлиб, уни 1,475 бўлишини топамиз:

$$\frac{59}{40} = 1{,}475.$$

Агар p ни q га бўлиш жараёни чексиз давом этса, маълум қадамдан кейин юқорида айтилган қолдиқлардан бири яна бир марта учрайди, сўнг ундан олдинги рақамлар мос тартибда такрорланади.

Одатда бундай каср чексиз даврий ўнли каср дейилади. Такрорланадиган рақамлар (рақамлар бирлашмаси) ўнли касрнинг даври бўлади.

Масалан, $\frac{1}{3}$ касрда 1 ни 3 га бўлиб, 0,333... бўлишини топамиз;

$$\frac{1}{3} = 0{,}333...$$

Ушбу

$$0{,}333...\,,\ \ 1{,}4777...\,,\ \ 2{,}131313...$$

касрлар чексиз даврий ўнли касрлардир. Уларнинг даври мос равишда 3, 7, 13 бўлади ва бу чексиз даврий ўнли касрлар қуйидагича

$$0{,}(3),\ \ 1{,}4(7),\ \ 2{,}(13)$$

ёзилади;

$$0{,}(3) = 0{,}333...$$

$$1{,}4(7)=1{,}4777...$$
$$2,(13)=2{,}131313...\ .$$

Шуни таъкидлаймизки, даври 9 га тенг бўлган чексиз даврий ўнли касрни чекли ўнли каср қилиб ёзилади.

Масалан,

$$0{,}4999...=0{,}4(9)=0{,}5\,,$$
$$2{,}71999...=2{,}71(9)=2{,}72\,.$$

Ҳар қандай чекли ўнли касрни ноллар билан давом эттириб чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин.

Масалан,

$$1{,}4=1{,}4000...=1{,}4(0)$$
$$0{,}75=0{,}75000...=0{,}75(0)\,.$$

Демак, ҳар қандай $\dfrac{p}{q}$ рационал сон чексиз даврий ўнли каср кўринишида ифодаланади. Аксинча, ҳар қандай чексиз даврий ўнли касрни $\dfrac{p}{q}$ кўринишида ёзиш мумкин.

Масалан, ушбу

$$0,(3)=0{,}333...\ ,\ 7{,}31(06)=7{,}31060606...$$

чексиз даврий ўнли касрларни қарайлик. Аввало уларни

$$0,(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...\ ,$$
$$7{,}31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+...$$

кўринишда ёзиб, сўнг чексиз камаювчи геометрик прогрес-сия йиғиндиси формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$0,(3)=0{,}333...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}\ ,$$

$$7{,}31(06)=7{,}31060606...=\frac{731}{100}+\frac{\frac{1}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$
$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{965}{132}.$$

Демак, ихтиёрий рационал сон чексиз даврий ўнли каср орқали ва аксинча, ихтиёрий чексиз даврий ўнли каср рационал сон орқали ифодаланади.

2^0. Ҳақиқий сон тушунчаси. Чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар ҳам бўлади. Бу кесмаларни ўлчаш жараёнида юзага келишини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, бирор J кесма ҳамда ўлчов бирлиги, масалан метр берилган бўлсин. J кесманинг узунлигини ҳисоблаш талаб этилсин.

Айтайлик, 1 метр J кесмада 5 марта бутун жойлашиб, кесманинг J_1 қисми ортиб қолсин. Равшанки J_1 нинг узунлиги 1 метрдан кам бўлади. Бу ҳолда J кесманинг узунлигини тахминан 5 м. га тенг деб олиш мумкин:

$$J \text{ узунлиги } \approx 5 \text{ м.}$$

Агар бу аниқлик етарли бўлмаса, ўлчов бирлигининг $\frac{1}{10}$ қисмини, яъни 1 дм. ни олиб, уни J_1 кесмага жойлаш-тирамиз. Айтайлик, 1 дм. J_1 кесмада 7 марта бутунлай жойлашиб, J_1 кесманинг J_2 қисми ортиб қолсин. Бунда J_2 нинг узунлиги 1 дм. дан кичик бўлади. Бу ҳолда J кесманинг узунлиги тахминан 5,7 м га тенг деб олиниши мумкин:

$$J \text{ узунлиги } \approx 5{,}7 \text{ м.}$$

Бу жараённи давом эттира бориш натижасида икки ҳолга дуч келамиз:

1) бирор қадамдан кейин, масалан $n+1$ қадамдан кейин ўлчов бирлигининг $\frac{1}{10^n}$ қисми J_n кесмага α_n марта бутунлай жойлашади. Бу ҳолда ўлчов жараёни тўхтатилиб,

$$J \text{ узунлиги } = 5,\underbrace{7\ldots\alpha_n}_{n \text{ та ракам}}$$

бўлиши топилади.

2) ўлчам жараёни тўхтовсиз давом (чексиз давом) этади. Бу ҳолда J кесманинг узунлигининг аниқ қиймати деб ушбу

$$5{,}7\ldots\alpha_n\ldots$$

чексиз ўнли каср олинади:

$$J \text{ узунлиги } = 5{,}7\ldots\alpha_n\ldots$$

Айтайлик, тўғри чизиқда бирор O нуқта (координата боши) ҳамда ўлчов бирлиги тайинланган бўлсин. У ҳолда O нуқтадан ўнгда жойлашган ҳар бир P нуқтага, OP кесмани ўлчаш натижасида ҳосил бўлган ушбу $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ чексиз ўнли касрни мос қўйиш мумкин. Бунда

$$\alpha_0 \in N \cup \{0\},\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n \geq 1.$$

Бу мослик ўзаро бир қийматли мослик бўлади. Равшанки, юқоридаги чексиз ўнли касрлар орасида чексиз даврий ўнли касрлар бўлиб, улар манфий бўлмаган рационал сонлар бўлади. Қолган касрлар эса рационал сонлар бўлмайди.

1-таъриф. Ушбу

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots,$$

кўринишидаги чексиз ўнли каср **манфий бўлмаган ҳақиқий сон** дейилади, бунда $\alpha_0 \in N \cup \{0\},\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n \geq 1$.

Агар $\exists\, n \geq 0; \alpha_n > 0$ бўлса, у **мусбат ҳақиқий сон** дейилади.

Манфий ҳақиқий соннинг «–» ишора билан олингани мусбат ҳақиқий сон сифатида таърифланади.

Барча ҳақиқий сонлардан иборат тўплам R ҳарфи билан белгиланади.

Барча натурал сонлар тўплами N, рационал сонлар тўплами Q, ҳақиқий сонлар тўплами R учун $N \subset Q \subset R$ бўлади.

2-таъриф. Ушбу

$$R \setminus Q$$

тўплам элементи (сон) **иррационал сон** дейилади.

Биз юқорида, даври «9» га тенг бўлган чексиз даврий ўнли касрни чекли ўнли каср қилиб олинишини айтган эдик. Бунинг оқибатида битта сон икки кўринишга, масалан, $\frac{1}{2}$ сони

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000...$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}4999...$$

кўринишларга эга бўлиб қолади.

Умуман, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n \ \ (\alpha_n \neq 0)$ рационал сон ушбу,

1) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_{n-1} \ \ (\alpha_n - 1)999...$,

2) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n 000...$, икки кўринишда ёзилиши мумкин. Ҳақиқий сонларни солиштиришда рационал соннинг 1)- кўринишидан фойдаланамиз.

Иккита манфий бўлмаган

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ....,$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 ... \beta_n ....$$

ҳақиқий сонлар берилган бўлсин.

3-таъриф. Агар $\forall n \geq 0$ да $\alpha_n = \beta_n$,яъни

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

бўлса, a **ва** b **сонлар тенг** дейилади ва $a = b$ каби ёзилади.

4-таъриф. Агар

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

тенгликларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси бажарилмаса ва биринчи бажарилмаган тенглик $n = k$ да содир бўлса, у ҳолда:

$\alpha_k > \beta_k$ бўлганда a **сони** b **сонидан катта** дейилади ва $a > b$ каби белгиланади.

$\alpha_k < \beta_k$ бўлганда a **сони** b **сонидан кичик** дейилади ва $a < b$ каби белгиланади.

Айтайлик, тўғри чизиқ, унда тайин олинган O нуқта (координата боши) ва ўлчов бирлиги берилган бўлсин.

Ҳақиқий сонлар тўплами R билан тўғри чизиқ нуқталари орасидаги бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин:

O нуқтадан ўнгда жойлашган P нуқтага OP кесманинг узунлигига тенг x сони мос қўйилади (x сон P **нуқтанинг координатаси** дейилади);

O нуқтадан чапда жойлашган Q нуқтага QO кесманинг узунлигига тенг x сонининг минус ишораси билан олинган $-x$ сони мос қўйилади;

O нуқтага нол сони мос қўйилади.

Архимед аксиомаси. Ихтиёрий чекли ҳақиқий а сони учун шундай натурал m сони топиладики,

$$m > a$$

бўлади.

◄ Айтайлик,

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ... > 0,$$

бўлсин. $m = \alpha_0 + 1,\ m \in N$ деб олинса, унда **3-таъриф** биноан $a < m$ бўлади ►

Курс давомида тез-тез учраб турадиган ҳақиқий сонлар тўпламларини келтирамиз.

Айтайлик, $a \in R, b \in R, a < b$ бўлсин:

$[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – сегмент дейилади,

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ – интервал дейилади,

$[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ – ярим интервал дейилади,

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ – ярим интервал. дейилади.

Бунда a ва b сонлар $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ ларнинг чегаралари дейилади.

Шунингдек,

$$[a,+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\},$$
$$(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\},$$
$$(-\infty, \infty) = R$$

деб қараймиз.

Фараз қилайлик, a ва b ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлиб, $a < b$ бўлсин. У ҳолда

$$(a,b) \ne \varnothing$$

бўлади.

◄ Ҳақиқатдан ҳам,

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n ... \ge 0$$
$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2 ... \beta_n ....$$

бўлиб, $m \ge 0$ учун

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, ... \alpha_{m-1} = \beta_{m-1} \text{ ва } \alpha_m < \beta_m$$

бўлсин. Агар к натурал сон m дан катта сонлар ичида энг кичиги бўлса, $(\alpha_k < 9)$ унда

$$r = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_m\alpha_{m+1} ... (\alpha_k + 1)$$

рационал сон учун $a < r < b$ бўлади. Демак, $(a,b) \ne \varnothing$ ►

Машқлар

1. Ушбу $x^2 = 3$ тенгликни қаноатлантирувчи рационал соннинг мавжуд эмаслиги исботлансин.

2. Агар $r \in Q, \alpha \in R \setminus Q$ бўлса, $\alpha + r \in R \setminus Q$ бўлиши кўрсатил-син.

3. $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R$ сонлари учун

$$a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

бўлиши исботлансин.

4-маъруза
Ҳақиқий сонлар тўпламининг чегаралари

Ҳақиқий сонлар тўпламининг чегараланганлиги, тўплам-нинг аниқ чегаралари тушунчалари математик анализ курси-да муҳим рол ўйнайди.

1^0. Сонлар тўпламининг аниқ чегаралари. Бирор $E \subset R$ тўплам берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар E тўпламнинг шундай x_0 элементи $(x_0 \in E)$ топилсаки, E тўпламнинг ихтиёрий x элементлари учун

$$x \le x_0$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists x_0 \in E, \quad \forall x \in E: \quad x \le x_0$$

бўлса, x_0 сони E тўпламнинг **энг катта элементи** дейилади ва

$$x_0 = \max E$$

каби белгиланади.

2-таъриф. Агар E тўпламнинг шундай x_0 элементи $(x_0 \in E)$ топилсаки, E тўпламнинг ихтиёрий x элементлари учун

$$x \ge x_0$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists x_0 \in E, \ \forall x \in E: \quad x \ge x_0$$

бўлса, x_0 сони E тўпламнинг **энг кичик элементи** дейилади ва

$$x_0 = \min E$$

каби белгиланади.

Масалан,

$$\max\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = 1$$

$$\min \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = 1$$

бўлади.

3-таъриф. Агар шундай M сони $(M \in R)$ топилсаки, E тўпламнинг ихтиёрий x элементлари учун

$$x \le M$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists M \in R, \ \forall x \in E: \ x \le M$$

бўлса, E тўплам **юқоридан чегараланган** дейилади, M сони тўпламнинг **юқори чегараси** дейилади.

4-таъриф. Агар шундай m сони $(m \in R)$ топилсаки, E тўпламнинг ихтиёрий x элементлари учун

$$x \ge m$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists m \in R, \ \forall x \in E: \ x \ge m$$

бўлса, E тўплам **қуйидан чегараланган дейилади,** m сони тўпламнинг **қуйи чегараси** дейилади.

Равшанки, тўплам юқоридан чегараланган бўлса, унинг юқори чегаралари чексиз кўп, шунингдек қуйидан чегаралан-ган бўлса, унинг қуйи чегаралари чексиз кўп бўлади.

5-таъриф. Агар $E \subset R$ тўплам ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, E **чегараланган тўплам** дейилади.

6-таъриф. Агар ихтиёрий M сони $(M \in R)$ олинганда ҳам шундай x_0 элементи $(x_0 \in E)$ топилсаки,

$$x_0 > M$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\forall M \in R, \ \exists x_0 \in E: \ x_0 > M$$

бўлса, E тўплам **юқоридан чегараланмаган** дейилади.

7-таъриф. Агар ихтиёрий m сони $(m \in R)$ олинганда ҳам шундай x_0 элементи $(x_0 \in E)$ топилсаки,

$$x_0 < m$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\forall m \in R, \quad \exists x_0 \in E: \ x_0 < m$$

бўлса, E тўплам **қуйидан чегараланмаган** дейилади.

Масалан,

1) $E_1 = \{..., -2, -1, 0\}$ тўплам юқоридан чегараланган;

2) $E_2 = \{1, 2, 3, ...\}$ тўплам қуйидан чегараланган;

3) $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ тўплам чегараланган;

4) $E_4 = \left\{x \in R \mid x > 0\right\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган;

5) $E_5 = \left\{x \in R \mid x < 0\right\}$ тўплам қуйидан чегараланмаган бўлади.

Энди сонлар тўпламининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари тушунчаларини келтирамиз.

Айтайлик, $E \subset R$ тўплам ва $a \in R$ сони берилган бўлсин.

8-таъриф. Агар

1) a сони E тўпламнинг юқори чегараси бўлса,

2) E тўпламнинг ихтиёрий юқори чегараси M учун $a \le M$ тенгсизлик бажарилса, a сони E тўпламнинг аниқ юқори чегараси дейилади ва $\sup E$ каби белгиланади:

$$a = \sup E .$$

Демак, E тўпламнинг аниқ юқори чегараси, унинг юқори чегаралари орасида энг кичиги бўлади.

9-таъриф. Фараз қилайлик, $E \subset R$ тўплам ва $b \in R$ сони берилган бўлсин. Агар

1) b сон E тўпламнинг қуйи чегараси бўлса,

2) E тўпламнинг ихтиёрий қуйи чегараси m учун $b \ge m$ тенгсизлик бажарилса, b сони E тўпламнинг **аниқ қуйи чегараси** дейилади ва $\inf E$ каби белгиланади:

$$b = \inf E .$$

Демак, E тўпламнинг аниқ қуйи чегараси, унинг қуйи чегаралари орасида энг каттаси бўлади.

“sup” ва “inf” лар лотинча “supremum” ва “infimum” сўзларидан олинган бўлиб, улар мос равишда энг юқори, энг қуйи деган маъноларни англатади.

1-теорема. Фараз қилайлик, $E \subset R$ тўплам ва $a \in R$ сони берилган бўлсин. a сони E тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлиши учун

1) a сони E тўпламнинг юқори чегараси,

2) a сонидан кичик бўлган ихтиёрий α $(\alpha < a)$ учун E тўпламда $x > \alpha$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонининг топилиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** Айтайлик,

$$a = \sup E$$

бўлсин. 8-таърифга биноан:

1) $\forall x \in E$ учун $x \le a$, яъни a сони E тўпламнинг юқори чегараси;

2) a сони юқори чегаралар орасида энг кичиги. Бинобарин, a дан кичик α сони учун $x > \alpha$ бўлган $x \in E$ сони топилади.

Етарлилиги. Теореманинг иккала шарти бажарилсин. Бу ҳолда, равшанки, $\alpha < a$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай α сони E тўпламнинг юқори чегараси бўлолмайди. Демак, a- тўпламнинг юқори чегаралари орасида энг кичиги. Унда таърифга кўра

$$a = \sup E$$

бўлади. ►

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

2-теорема. Фараз қилайлик, $E \subset R$ тўплам ва $b \in R$ сони берилган бўлсин. b сони E тўпламнинг аниқ қуйи чегараси бўлиши учун

1) b сони E тўпламнинг қуйи чегараси,

2) b сонидан катта бўлган ихтиёрий β $(\beta > b)$ учун E тўпламда $x < \beta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x сонининг топилиши зарур ва етарли.

Эслатма. Агар $E \subset R$ тўплам юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда

$$\sup E = +\infty \quad ,$$

қуйидан чегараланмаган бўлса, у ҳолда

$$\inf E = -\infty$$

деб олинади.

2^0. Аниқ чегараларнинг мавжудлиги.

Айтайлик,

$$\alpha = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

мусбат ҳақиқий сон бўлсин, бунда

$$\alpha_0 \in N \cup \{0\}, \quad \alpha_n \in N_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}, \quad n \geq 1.$$

Ушбу

$$a_n = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

$$b_n = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

рационал сонлар учун

$$a_n \leq \alpha < b_n$$

бўлади.

Демак, ихтиёрий ҳақиқий сон олинганда шундай иккита рационал сон топиладики, улардан бири шу ҳақиқий сондан кичик ёки тенг, иккинчиси эса катта бўлади.

Энди сонлар тўпламининг аниқ чегараларининг мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

3-теорема. Агар бўш бўлмаган тўплам юқоридан чегараланган бўлса, унинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади.

Бу теоремани

$$E \subset [0, +\infty), \quad E \neq \varnothing$$

тўплам учун исботлаймиз.

◀ E тўплам юқоридан чегараланган бўлсин:

$$\exists M \in R,\ \forall x \in E: \quad x \leq M.$$

Архимед аксиомасини эътиборга олиб, $M \in N$ дейиш мумкин.

Энди E тўплам

$$\alpha = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots \qquad (\alpha \in E)$$

элементларининг бутун қисмларидан, яъни α_0 ларидан иборат тўпламни F_0 дейлик:

$$F_0 = \left\{ \alpha_0 \in N \cup \{0\} \mid,\ \alpha = \alpha_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots \in E \right\}.$$

Бу тўплам ҳам юқоридан М сони билан чегараланган ва $F_0 \neq \varnothing$. Равшанки, $F_0 \subset N \cup \{0\}$. Бундан F_0 тўпламнинг чекли эканлигини топамиз. Демак, F_0 тўпламнинг энг катта элементи мавжуд. Уни c_0 дейлик:

$$\max F_0 = c_0 \tag{1}$$

E тўпламнинг

$$c_0 , \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

кўринишдаги барча элементларидан иборат тўпламни E_0 деб оламиз:

$$E_0 = \{c_0, \alpha_1\alpha_2 ... \in E\}.$$

Равшанки, $E_0 \subset E$, $E_0 \neq \varnothing$.

Энди E_0 тўплам

$$c_0, \alpha_1\alpha_2 ...$$

элементларининг α_1 ларидан иборат тўпламни олиб, уни F_1 дейлик:

$$F_1 = \{\alpha_1 \in \{0,1,2,...,9\} \mid c_0, \alpha_1\alpha_{2.} ... \in E_0\}.$$

Бу чекли тўплам бўлиб, $F_1 \neq \varnothing$ бўлади. Шунинг учун унинг энг катта элементи мавжуд. Уни c_1 деб оламиз:

$$\max F_1 = c_1 \tag{2}$$

E_0 тўпламнинг

$$c_0, c_1\alpha_2\alpha_3 ...$$

кўринишдаги барча элементларидан иборат тўпламни E_1 деб оламиз:

$$E_1 = \{c_0, c_1\alpha_{2.}\alpha_3 ... \in E_0\}.$$

Равшанки, $E_1 \subset E_0$, $E_1 \neq \varnothing$.

Энди E_1 тўплам

$$c_0, c_1\alpha_2\alpha_3 ...$$

элементларининг α_2 ларидан иборат тўпламни олиб, уни F_2 дейлик:

$$F_2 = \{\alpha_1 \in \{0,1,2,...,9\} \mid c_0, c_1, \alpha_{2.} ... \in E_1\}.$$

Бу тўплам ҳам чекли ва $F_2 \neq \varnothing$ бўлиб, унинг энг катта элементи мавжуд:

$$\max F_2 = c_2 \tag{3}$$

E_1 тўпламнинг

$$c_0, c_1c_2\alpha_3 ...$$

кўринишдаги барча элементларидан иборат тўпламни E_2 деб оламиз:

$$E_2 = \{c_0, c_1c_2\alpha_3 ... \in E_1\}$$

Бу жараённи давом эттира бориш натижасида

$$a = c_0, c_1c_2 ... c_n ...$$

ҳақиқий сон ҳосил бўлади.

Энди E тўплам ва бу a сон учун 1-теореманинг иккала шартларини бажарилишини кўрсатамиз:

1) Юқоридаги (1) муносабатга кўра $\forall\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 ... \in E$ учун $\alpha_0 \leq c_0$ бўлади.

Агар $\alpha_0 < c_0$ бўлса, у ҳолда $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... < a$ бўлади.

Агар $\alpha_0 = c_0$ бўлса, у ҳолда $c_0, \alpha_1\alpha_2 ... \in E_0$ бўлиб, (2) муноса-батга кўра $\alpha_1 \leq c_1$ бўлади.

Агар $\alpha_1 < c_1$ бўлса у ҳолда $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... < a$ бўлади.

Агар $\alpha_1 = c_1$ бўлса, у ҳолда $c_0, c_1\alpha_2 ... \in E_1$ бўлиб, (3) муносабатга кўра $\alpha_2 \le c_2$ бўлади.

Бу жараённи давом эттириш натижасида икки ҳолга дуч келамиз:

а) шундай $n \ge 0$ топиладики,

$$\alpha_0 = c_0, \quad \alpha_1 = c_1, \; ... \; \alpha_{n-1} = c_{n-1}, \quad \alpha_n < c_n$$

бўлиб, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... < a$ бўлади.

б) ихтиёрий $n \ge 0$ да $\alpha_n = c_n$ бўлиб, $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... = a$ бўлади.

Демак, ҳар доим $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 ... \le a$ муносабат ўринли бўлади;

2) a сондан кичик бўлган ихтиёрий

$$\beta = \beta_0, \beta_1\beta_2 ... \beta_n ...$$

ҳақиқий сонни олайлик:

$$\beta_0, \beta_1\beta_2 ... \beta_n ... < c_0, c_1c_2 ... c_n ...$$

Унда шундай $n \ge 0$ топиладики,

$$\beta_0 = c_0, \quad \beta_1 = c_1, \; ... \; \beta_{n-1} = c_{n-1}, \quad \beta_n < c_n$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб, $\forall x \in E_n \subset E$ учун

$$x > \beta_0, \beta_1\beta_2 ... \beta_n ...$$

бўлишини топамиз.

Шундай қилиб теоремада келтирилган E тўплам ва a сони учун 1-теореманинг иккала шартининг бажарилиши кўрсатилди. Унда 1-теоремага мувофиқ E тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд ва

$$a = \sup E$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

4-теорема. Агар бўш бўлмаган тўплам қуйидан чегараланган бўлса, унинг аниқ қуйи чегараси мавжуд бўлади.

Эслатма. Тўпламнинг аниқ қуйи ҳамда аниқ юқори чегаралари шу тўпламга тегишли бўлиши ҳам мумкин, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин.

Машқлар

1. Агар A ва B тўпламлари $(A \subset R, \; B \subset R)$ чегараланган бўлиб, $A \subset B$ бўлса,

$$\sup A \le \sup B, \qquad \inf A \ge \inf B$$

бўлиши исботлансин.

2. Агар $\forall x \in A \quad (A \subset R)$ учун $x \le \alpha \quad (\alpha \in R)$ бўлса, $\sup A \le \alpha$ бўлиши исботлансин.

5-маъруза
Ҳақиқий сонлар устида амаллар

1^0. Икки ҳақиқий сонлар йиғиндиси, айирмаси, кўпайт-маси ва нисбати. Аввал айтганимиздек, рационал сонлар устида, хусусан чекли ўнли касрлар устида бажариладиган амаллар ва уларнинг хоссалари маълум деб ҳисоблаймиз.

Айтайлик, иккита мусбат

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$
$$b=\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Унда $n\geq 0$ бўлганда ушбу

$$a_n^{'}=a_0,a_1a_2...a_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+...+\frac{a_n}{10^n},$$

$$a_n^{''}=a_0,a_1a_2...(a_n+1)=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+...+\frac{a_n+1}{10^n}$$

рационал сонлар учун

$$a_n^{'}\leq a\leq a_n^{''}, \tag{1}$$

шунингдек,

$$b_n^{'}=\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n=\beta_0+\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+...+\frac{\beta_n}{10^n},$$

$$b_n^{''}=\beta_0,\beta_1\beta_2...(\beta_n+1)=\beta_0+\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+...+\frac{\beta_n+1}{10^n}$$

рационал сонлар учун

$$b_n^{'}\leq b\leq b_n^{''} \tag{2}$$

бўлади.

Энди (1) ва (2) тенгсизликларни қаноатлантирувчи рационал сонларнинг йиғиндиси $a_n^{'}+b_n^{'}$ лардан иборат $\{a_n^{'}+b_n^{'}\}$ тўпламни қараймиз.

Равшанки, бу тўплам юқоридан чегараланган. Унда 4-маърузадаги 3-теоремага кўра $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади.

1-таъриф. $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси a ва b **ҳақиқий сонлар йиғиндиси** дейилади ва $a+b$ каби белгиланади:

$$a+b=\sup_{n\geq 0}\{a_n^{'}+b_n^{'}\}.$$

(1) ва (2) тенгсизликларни қаноатлантирувчи рационал сонларнинг кўпайтмаси $a_n^{'}\cdot b_n^{'}$ лардан иборат $\{a_n^{'}\cdot b_n^{'}\}$ тўпламни қараймиз. Бу тўплам юқоридан чегараланган бўлади. Шунинг учун унинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади.

2-таъриф. $\{a_n^{'}\cdot b_n^{'}\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси a ва b **ҳақиқий сонлар кўпайтмаси** дейилади ва $a\cdot b$ каби белгиланади.

$$a\cdot b=\sup_{n\geq 0}\{a_n^{'}\cdot b_n^{'}\}.$$

(1) ва (2) тенгсизликларни қаноатлантирувчи рационал сонларнинг нисбати $\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}$ лардан иборат $\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}$ тўплам юқоридан чегараланган бўлади.

3-таъриф. $\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси a **сонининг** b **сонига нисбати** дейилади ва $\frac{a}{b}$ каби белгиланади.

$$\frac{a}{b}=\sup_{n\geq 0}\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}.$$

Айтайлик a ва b мусбат ҳақиқий сонлар бўлиб, $a>b$ бўлсин.

4-таъриф. $\{a_n^{'} - b_n^{''}\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси a **сонидан** b **сонининг айирмаси** дейилади ва $a-b$ каби белгиланади.

$$a-b=\sup_{n\geq 0}\{a_n^{'}-b_n^{''}\}.$$

Эслатма. 1) Ҳақиқий сонлар устида бажариладиган қўшиш, кўпайтириш, айириш ва бўлиш амалларини тўплам-нинг аниқ қуйи чегараси орқали ҳам таърифлаш мумкин.

Масалан, a ва b ҳақиқий сонлар йиғиндиси қуйидагича таърифланади:

$$a+b=\inf_{n\geq 0}\{a_n^{''}+b_n^{''}\}.$$

Ҳақиқий сонларда, юқорида киритилган амаллар ўрта мактаб математика курсида ўрганилган амалларнинг барча хоссаларга эга.

2^0. Ҳақиқий соннинг даражаси. Аввал ҳақиқий соннинг 0-ҳамда n-даражалари ($n\in N$) қуйидагича

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ та}}, \quad (n \in N)$$

аниқланишини таъкидлаймиз.

Теорема (исботсиз). Фараз қилайлик, $a > 0$ ва $n \in N$ бўлсин. У ҳолда шундай ягона мусбат x сони топиладики,

$$x^n = a$$

бўлади.

5-таъриф. Мусбат ҳақиқий a сонининг n даражали илдизи деб ушбу

$$x^n = a$$

тенгликни қаноатлантирувчи ягона x сонига айтилади ва

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

каби белгиланади.

Айтайлик, a мусбат ҳақиқий сон, r эса мусбат рационал сон бўлсин:

$$a > 0, \quad r = \frac{m}{n}, \quad m, n \in N .$$

Бу ҳолда a сонининг r - даражаси қуйидагича

$$a^r = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

аниқланади.

6-таъриф. Фараз қилайлик, $a > 1,\ b > 0$ ҳақиқий сонлари берилган бўлсин, a сонининг $b-$даражаси деб ушбу $\left\{a^{b_n'}\right\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегарасига айтилади:

$$a^b = \sup_{n \geq 0}\left\{a^{b_n'}\right\} \text{ бунда } b_n' = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \quad b = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$$

3⁰. Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати. Айтайлик $x \in R$ сон берилган бўлсин. Ушбу

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

миқдор x **сонининг абсолют қиймати** дейилади.

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қуйидаги хоссаларга эга:

1) $x \in R$ сон учун

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

муносабатлар ўринли,

2) $|x| < a \iff -a < x < a$,

$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, $\qquad (a > 0)$

3) $x \in R,\ y \in R$ сонлар учун

$$|x+y| \le |x| + |y|,$$
$$|x-y| \ge |x| - |y|,$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \ne 0)$$

бўлади.

Бу хоссаларнинг исботи бевосита соннинг абсолют қиймати таърифидан келиб чиқади. Улардан бирини, масалан $|x+y| \le |x| + |y|$ бўлишини исботлаймиз.

◄ Айтайлик, $x + y > 0$ бўлсин. Унда $|x+y| = x+y$ бўлади. $x \le |x|, \quad y \le |y|$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$|x+y| = x+y \le |x| + |y|.$$

Энди $x + y < 0$ бўлсин.

Унда $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y)$ бўлади. $-x \le |x|, \quad -y \le |y|$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$|x+y| = (-x) + (-y) \le |x| + |y|. \text{ ►}$$

1-мисол. Ушбу

$$|3x-1| \le |2x-1| + |x| \tag{3}$$

тенгсизлик x нинг қандай қийматларида ўринли бўлади?

◄ Соннинг абсолют қиймати хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$|3x-1| = |(2x-1) + x| \le |2x-1| + |x|.$$

Демак, (3) тенгсизлик ихтиёрий $x \in R$ учун ўринли бўлади. ►

Барча манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламини R_+ билан белгилайлик. Равшанки, $R_+ \subset R$.

Ҳар бир $x \in R$ ҳақиқий сонга унинг абсолют қиймати $|x|$ ни мос қўйиш билан ушбу

$$f : x \to |x| \qquad (f : R \to R_+)$$

акслантиришга эга бўламиз.

Демак ҳақиқий соннинг абсолют қиймати R тўпламни R_+ тўпламга акслантириш деб қаралиши мумкин.

Ихтиёрий $x \in R, \ y \in R$ сонларни олайлик. Ушбу

$$|x-y|$$

миқдор x ва y **нуқталар орасидаги масофа** дейилади ва $d(x, y)$ каби белгиланади:

$$d(x, y) = |x-y|.$$

Масофа қуйидаги хоссаларга эга:

1) $d(x, y) \ge 0$ ва $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2) $d(x, y) = d(y, x),$

3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z), \qquad (z \in R).$

4⁰. Бернулли тенгсизлиги. Ньютон биноми формуласи. Ихтиёрий $x \ge -1$ ($x \in R$) ҳамда ихтиёрий $n \in N$ учун ушбу

$$(1+x)^n \ge 1 + nx \tag{4}$$

тенгсизлик ўринли.

◀ Бу тенгсизликни математик индукция усули ёрдамида исботлаймиз.

Равшанки, $n = 1$ да (4) тенгсизлик (тасдиқ) ўринли бўлади

$$1 + x = 1 + x.$$

Энди $n \in N$ да (4) муносабат ўринли деб, уни $n+1$ учун ҳам ўринли бўлишини кўрсатамиз. (4) тенгсизликнинг ҳар икки томонини $1+x$ га кўпайтириб топамиз:

$$(1+x)^{n+1} \ge (1+nx)\cdot(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x.$$

Математик индукция усулига биноан (4) муносабат ихтиёрий $n \in N$ учун ўринли бўлади.▶

(4) тенгсизлик **Бернулли тенгсизлиги** дейилади.

Энди Ньютон биноми формуласини келтирамиз.

Маълумки, $a \in R, \quad b \in R$ да

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

бўлади. Умуман, ихтиёрий $n \in N$ да

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \ldots + \\ &+ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\end{aligned} \tag{5}$$

бўлади, бунда

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \quad k! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots k, \quad k = 1, 2\ldots, n$$

(5) тенглик ҳам математик индукция усули ёрдамида исботланади.

◀ Равшанки, $n = 1$ да $C_1^0 \cdot a + C_1^1 \cdot b = a + b.$ Демак, бу ҳолда (5) тенглик ўринли. Энди (5) тенглик n учун ўринли бўлсин деб, уни $n+1$ учун ҳам ўринли бўлишини кўрсатамиз. (5) тенгликнинг ҳар икки томонини $a+b$ га кўпайтириб топамиз:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1}.$$

Равшанки,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k) =$$

$$= \frac{n(n+1)((n+1)-1)\ldots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k$$

Демак,

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^{k}\cdot a^{n+1-k}\cdot b^{k}+b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^{k}\cdot a^{n+1-k}\cdot b^{k}$$

бўлади. Бу эса (5) тенглик $n+1$ бўлганда ҳам бажарилишини кўрсатади. ►

Одатда (5) тенглик **Ньютон биноми формуласи** дейи-лади.

5^0. Ичма-ич жойлашган сегментлар принципи. Маълум-ки, ушбу

$$\{x\in R:\ a\le x\le b\}=[a,\ b]$$

тўплам сегмент деб аталади.

Айтайлик, $[a_1,\ b_1]$ ва $[a_2,\ b_2]$ сегментлар берилган бўлсин. Агар

$$[a_1,\ b_1]\subset[a_2,\ b_2]$$

бўлса, $[a_1,\ b_1]$ **сегмент** $[a_2,\ b_2]$ **сегментнинг ичига жойлашган** дейилади. Бу ҳолда $a_1\le a_2<b_2\le b_1$ бўлади.

7-таъриф. Агар

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],....,\ [a_n,\ b_n],... \qquad (6)$$

сегментлар кетма-кетлиги қуйидаги

$$[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset...\supset[a_n,\ b_n]\supset...$$

муносабатда, яъни $\forall n\in N$ да

$$[a_n,\ b_n]\supset[a_{n+1},\ b_{n+1}]$$

бўлса, (6) **ичма-ич жойлашган сегментлар кетма-кетлиги** дейилади.

Теорема. Айтайлик,

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],....,\ [a_n,\ b_n],...$$

сегментлар кетма-кетлиги қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\forall n\in N:\quad [a_n,\ b_n]\supset[a_{n+1},\ b_{n+1}]$,

2) $\forall\varepsilon>0,\ \ \exists n_0\in N,\ \ n>n_0:\quad b_n-a_n<\varepsilon$ бўлсин.

У ҳолда шундай $c\in R$ мавжуд бўладики, $c\in[a_n,\ b_n],\ \ (n=1,2,3,...)$ бўлиб, бундай с ягона бўлади.

◄ Теоремада қаралаётган сегментлар кетма-кетлиги ичма-ич жойлашган сегментлар кетма-кетлиги бўлади. Равшанки, бу ҳолда ушбу

$$a_1\le a_2\le a_3\le...\le a_n<b_n\le b_{n-1}\le...\le b_2\le b_1$$

муносабат бажарилади.

Энди $a_1,\ a_2,...,a_n$ сонларидан ташкил топган

$$E=\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$$

тўпламни қараймиз. Бу тўпламнинг юқоридан чегараланган-лигини кўрсатамиз.

Ихтиёрий натурал m сонини олиб, уни тайинлаймиз.

Агар $n\le m$ бўлса, $[a_m,\ b_m]\subset[a_n,\ b_n]$ бўлиб, $a_n\le a_m<b_m\le b_n$, яъни $a_n<b_m$ бўлади.

Агар $n>m$ бўлса, $[a_n,\ b_n]\subset[a_m,\ b_m]$ бўлиб, $a_m\le a_n<b_n\le b_m$, яъни $a_n<b_m$ бўлади.

Аниқ юқори чегара ҳақидаги теоремага кўра

$$\sup E=c \qquad (c\in R)$$

мавжуд бўлади.

Тўпламнинг аниқ юқори чегараси таърифига биноан

$$\forall n \in N \text{ да } a_n \le c \text{ ва } \forall m \in N \text{ да } c \le b_m \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\forall n \in N \text{ да } c \in [a_n\ ,\ b_n].$$

Агар шу нуқтадан фарқли ва барча сегментларга тегишли c' $(c' \in [a_n, b_n],\ \forall n \in N)$ мавжуд деб қараладиган бўлса, унда

$$b_n - a_n \ge |c - c'| > 0$$

бўлиб, бу теореманинг 2-шартига зид бўлади.
Демак, $c = c'$ ►.

Одатда бу теорема ичма-ич жойлашган сегментлар принципи дейилиб, у ҳақиқий сонлар тўпламининг узлуксизлик (тўлиқлик) хоссасини ифодалайди.

Машқлар

1. Ихтиёрий $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ ҳақиқий сонлар учун

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

бўлиши исботлансин.

2. Икки ҳақиқий сон йиғиндиси таърифидан фойдала-ниб ушбу

$$a + b = b + a, \qquad a + a = 2a$$

тенгликлар исботлансин.

2-БОБ
СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ УЧУН ЛИМИТЛАР НАЗАРИЯСИ

6-маъруза
Сонлар кетма-кетлиги ва уларнинг лимити

1^0. Сонлар кетма-кетлиги тушунчаси. Биз биринчи бобда ихтиёрий E тўпламни F тўпламга акслантириш:

$$f : E \to F$$

тушунчаси билан танишган эдик.

Энди $E = N,\ F = R$ деб, ҳар бир натурал n сонга бирор ҳақиқий x_n сонини мос қўювчи

$$f : n \to x_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{1}$$

акслантиришни қараймиз.

1-таъриф. 1- акслантиришнинг аксларидан иборат ушбу

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n, ... \tag{2}$$

тўплам **сонлар кетма-кетлиги** дейилади. Уни $\{x_n\}$ ёки x_n каби белгиланади.

$x_n\ (n=1,2,3,\ldots)$ сонлар (2) **кетма-кетликнинг ҳадлари** дейилади. Масалан,

1) $x_n=\dfrac{1}{n}:\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n},\ldots,$

2) $x_n=(-1)^n:\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ldots$

3) $x_n=\sqrt[n]{n}:\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n},\ \ldots$

4) $x_n=1:\ 1,1,1,\ \ldots,\ 1,\ldots$

5) $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ldots;\ 0{,}\underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{та}};\ \ldots$

лар сонлар кетма-кетликларидир.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сони мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x_n\ (n=1,2,3,\ldots)$ учун $x_n\le M$ тенгсизлик бажарилса (яъни $\exists M,\ \forall n\in N:\ x_n\le M$ бўлса), $\{x_n\}$ кетма-кетлик **юқоридан чегараланган** дейилади.

3-таъриф. Агар шундай ўзгармас m сони мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x_n\ (n=1,2,3,\ldots)$ учун $x_n\ge m$ тенгсизлик бажарилса (яъни, $\exists m,\ \forall n\in N: x_n\ge m$ бўлса), $\{x_n\}$ кетма-кетлик **қуйидан чегараланган** дейилади.

4-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса (яъни $\exists m, M,\ \forall n\in N:\ m\le x_n\le M$ бўлса), $\{x_n\}$ кетма-кетлик **чегараланган** дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$x_n=\frac{n}{4+n^2}\qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

кетма-кетликнинг чегараланганлиги исботлансин.

◄ Равшанки, $\forall n\in N$ учун

$$x_n=\frac{n}{4+n^2}>0$$

бўлади. Демак, қаралаётган кетма-кетлик қуйидан чегаралан-ган.

Маълумки,

$$0\le(n-2)^2=n^2-4n+4$$

бўлиб, ундан $4n\le 4+n^2$ яъни,

$$\frac{n}{4+n^2}\le\frac{1}{4}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини билдиради. Демак, кетма-кет-лик чегараланган ►

5-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\forall M \in R,\ \exists n_0 \in N:\ x_{n_0} > M$$

бўлса, **кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган** дейилади.

2^0. Сонлар кетма-кетлигининг лимити. Айтайлик, $a \in R$ сон ҳамда ихтиёрий мусбат ε сон берилган бўлсин.

6-таъриф. Ушбу

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$$

тўплам a **нуқтанинг ε - атрофи** дейилади.

Фараз қилайлик $\{x_n\}$ кетма-кетлик ва $a \in R$ сони берил-ган бўлсин.

7-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай n_0 натурал сони мавжуд бўлсаки, $n > n_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча натурал сонлар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{3}$$

тенгсизлик бажарилса, (яъни

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$$

бўлса), a сон $\{x_n\}$ **кетма-кетликнинг лимити** дейилади ва

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ ёки } n \to \infty \text{ да } x_n \to a$$

каби белгиланади.

Равшанки, юқоридаги (3) тенгсизлик учун

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

яъни, $x_n \in U_\varepsilon(a)$, $(n > n_0)$ бўлади. Шуни эътиборга олиб, кетма-кетликнинг лимитини қуйидагича таърифласа бўлади.

8-таъриф. Агар a нуқтанинг ихтиёрий $U_\varepsilon(a)$ атрофи олинганда ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг бирор ҳадидан кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

Юқорида келтирилган таърифлардан кўринадики ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, натурал n_0 сони эса ε га ва қаралаётган кетма-кетликка боғлиқ равишда топилади.

2-мисол. Ушбу

$$x_n = c \quad (c \in R,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

кетма-кетликнинг лимити с га тенг бўлади.

◄Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $\forall\ \varepsilon > 0$ га кўра $n_0 = 1$ дейилса, унда $\forall n > n_0$ учун $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ бўлади. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$ ►

3-мисол. Ушбу

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots.)$$

кетма-кетликнинг лимити 0 га тенг бўлиши исботлансин:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

◄ Равшанки,

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$$

бўлиб, $\frac{1}{n}<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ тенгсизлик барча $n>\frac{1}{\varepsilon}$ бўлганда ўрин-ли. Бу ҳолда

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

дейилса, ($[a]-a$ сонидан катта бўлмаган унинг бутун қисми), унда $\forall n>n_0$ учун

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

бўлади. Таърифга биноан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \ \blacktriangleright$$

4-мисол. Айтайлик, $a\in R$, $|a|>1$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$$

бўлиши исботлансин.

◀ $|a|=1+\delta$ дейлик. Унда $\delta=|a|-1>0$ ва Бернулли тенгсиз-лигига кўра

$$(1+\delta)^n\geq 1+n\delta>n\delta$$

бўлиб, $\forall n\in N$ да

$$\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{n\delta}$$

бўлади. Демак,

$$\left|\frac{1}{a^n}-0\right|=\frac{1}{a^n}<\varepsilon \qquad (\varepsilon>0)$$

тенгсизлик барча

$$n>\frac{1}{\varepsilon\delta}$$

бўлганда ўринли. Агар

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right]+1$$

дейилса, равшанки, $\forall n>n_0$ учун

$$\left|\frac{1}{a^n}-0\right|<\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0 \ ►$$

5-мисол. Ушбу $x_n=\dfrac{n}{n+1} \quad (n=1,2,3,...)$
кетма-кетликнинг лимити 1 га тенг бўлиши исботлансин.

◄ Ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон оламиз. Сўнг ушбу

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

тенгсизликни қараймиз. Равшанки,

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{n}{n+1}$$

Унда юқоридаги тенгсизлик

$$\frac{n}{n+1}<\varepsilon$$

кўринишга келади. Кейинги тенгсизликдан

$$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, лимит таърифидаги $n_0\in N$ сифатида $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ олинса ($\varepsilon>0$ га кўра $n_0\in N$ топилиб), $\forall n>n_0$ учун $|x_n-1|<\varepsilon$ бўлади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

бўлишини билдиради.►

6-мисол. Фараз қилайлик, $a\in R$, $|a|>1$ ва $\alpha\in R$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0$$

бўлиши исботлансин.

◄ Шундай натурал k сонни оламизки $k\geq\alpha+1$ бўлсин. Энди $|a|^{\frac{1}{k}}>1$ бўлишини эътиборга олиб, $|a|^{\frac{1}{k}}=1+\delta$, яъни $\delta=|a|^{\frac{1}{k}}-1>0$ деймиз. Унда Бернулли тенгсизлигига кўра

$$|a|^{\frac{n}{k}}=(1+\delta)^n\geq 1+n\delta>n\delta$$

бўлиб, $\forall\ n\in N$ да

$$\frac{n^{k-1}}{a^n}<\frac{1}{n\delta^k}$$

бўлади. Бу ҳолда

$$n_0=\left[\frac{1}{\delta^k\cdot\varepsilon}\right]+1 \quad (\varepsilon>0)$$

дейилса, $\forall\ n>n_0$ учун

$$\left|\frac{n^\alpha}{a^n}-0\right|=\frac{n^\alpha}{|a|^n}\le\frac{n^{k-1}}{|n|^n}<\varepsilon$$

бўлади. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0$. ►

7-мисол. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$$

тенглик исботлансин.

◄ Равшанки, $\forall\ \varepsilon>0$ ва $\forall\ n\in N$ учун

$$0\le\frac{\lg n}{n}<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \lg n<n\varepsilon\ \Leftrightarrow\ n<10^{n\varepsilon}\ \Leftrightarrow\ \frac{n}{(10^\varepsilon)^n}<1$$

бўлади. Агар $10^\varepsilon>1$ бўлишини эътиборга олсак, 6-мисолга кўра

$$n\to\infty \quad \text{да} \quad \frac{n}{(10^\varepsilon)^n}\to 0$$

эканини топамиз. Унда таърифга кўра 1 сони учун

$$\exists\ n_0\in N,\ \forall\ n>n_0:\ \frac{n}{(10^\varepsilon)^n}<1$$

бўлади. Шундай қилиб, $\forall\ n>n_0$ учун $\frac{\lg n}{n}<\varepsilon$ бўлади. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$. ►

8-мисол. Ушбу

$$x_n=(-1)^n \qquad (n=1,2,3,...)$$

кетма-кетликнинг лимити мавжуд эмаслиги исботлансин.

◄ Тескарисини фараз қилайлик. Бу кетма-кетлик a лимитга эга бўлсин. Унда таърифга биноан,

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists n_0\in N,\ \ \forall n>n_0:\ |(-1)^n-a|<\varepsilon$$

бўлади.

Равшанки, n жуфт бўлганда $|1-a|<\varepsilon$, n тоқ бўлганда $|(-1)-a|<\varepsilon$, яъни $|1+a|<\varepsilon$ бўлади. Бу тенгсизликлардан фойда-ланиб топамиз:

$$2=|(1-a)+(1+a)|\le|1-a|+|1-a|<2\varepsilon.$$

Бу тенгсизлик $\varepsilon>1$ бўлгандагина ўринли. Бундай вазият $\varepsilon>0$ сонининг ихтиёрий бўлишига зид. Демак, кетма-кетлик лимитга эга эмас. ►

Теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у ягона бўлади.

◄ Тескарисини фараз қилайлик. $\{x_n\}$ кетма-кетлик иккита a ва b $(a\ne b)$ лимитларга эга бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b \qquad (a \neq b)$$

Лимитнинг таърифига кўра

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 : \ | x_n - a | < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0^{'} \in N, \quad \forall n > n_0^{'} : \ | x_n - b | < \varepsilon$$

бўлади.

Агар n_0 ва $n_0^{'}$ сонларининг каттасини $\overline{n}$ десак, унда $\forall n > \overline{n}$ да

$$| x_n - a | < \varepsilon, \quad | x_n - b | < \varepsilon$$

бўлиб

$$| x_n - a | + | x_n - b | < 2\varepsilon$$

бўлади.

Равшанки, $| a - b | = | a - x_n + x_n - b | \leq | x_n - a | + | x_n - b |$.

Демак, $\forall \ \varepsilon > 0$ да $| a - b | < 2\varepsilon$ бўлиб, ундан $a = b$ бўлиши келиб чиқади. ►

Машқлар

1. Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб ушбу

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

кетма-кетликнинг лимити топилсин.

2. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ бўлса, у ҳолда ушбу

$$x_1, \ y_1, \ x_2, \ y_2, \ldots, x_n, \ y_n, \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити ҳам a га тенг бўлиши исботлансин.

3. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$$

бўлиши исботлансин.

7-маъруза
Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссалари

$\{x_n\}$ сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у **яқинлашувчи кетма-кетлик** дейилади.

1^0. Яқинлашувчи кетма-кетликнинг чегараланганлиги. Тенгсизликларда лимитга ўтиш.

1-теорема. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

◀ Айтайлик,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (a\in R)$$

бўлсин. Лимит таърифига кўра

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in N,\quad \forall n>n_0;\ \ |x_n-a|<\varepsilon$$

бўлади. Демак, $n>n_0$ учун

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

бўлади. Агар

$$\max\left\{|a-\varepsilon|,\quad |a+\varepsilon|\ ,\ |x_1|,\ \ |x_2|,\ ...,\ |x_{n_0}|\ \right\}=M$$

дейилса, у ҳолда, $\forall n\in N$ учун

$$|x_n|\le M$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини билдиради. ▶

2-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

бўлиб, $a>p$ $(a<q)$ бўлса, у ҳолда шундай $n_0\in N$ топиладики, $\forall n>n_0$ бўлганда

$$x_n>p\ \ (x_n<q)$$

бўлади.

◀ Айтайлик,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad a>p\quad (p\in R)$$

бўлсин. ε > 0 сонининг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, $\varepsilon<a-p$ деб қараймиз.

Кетма-кетлик лимити таърифига биноан, $\forall\,\varepsilon>0$ учун, жумладан, $0<\varepsilon<a-p$ учун, шундай $n_0\in N$ топиладики, $\forall n>n_0$ бўлганда

$$|x_n-a|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad -\varepsilon<x_n-a<\varepsilon$$

бўлади. Равшанки,

$$0 < \varepsilon < a - p \Rightarrow p < a - \varepsilon,$$
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n.$$

Бу тенгсизликлардан $\forall n > n_0$ бўлганда

$$x_n > p$$

бўлиши келиб чиқади. ►

($a < q$ ҳол учун ҳам теорема юқоридагидек исбот этилади).

3-теорема. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

2) $\forall n \in N$ учун $x_n \le y_n \quad (x_n \ge y_n)$

бўлса, у ҳолда $a \le b \quad (a \ge b)$ бўлади.

◄ Шартга кўра

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Кетма-кетлик лимити таърифига биноан:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0' \in N,\ \forall n > n_0':\ |x_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0'' \in N,\ \forall n > n_0''\quad |y_n - b| < \varepsilon$$

бўлади.

Агар $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ дейилса, унда $\forall n > n_0$ учун бир йўла

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади.

Равшанки,

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\ ,$$
$$|y_n - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Бу тенгсизликлардан ҳамда теореманинг 2-шартидан фойдаланиб топамиз:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon.$$

Кейинги тенгсизликлардан

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon, \qquad a - b < 2\varepsilon$$

ва $\forall \varepsilon > 0$ бўлгани учун $a - b \le 0$, яъни $a \le b$ бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ ҳамда $\forall n \in N$ учун $x_n \ge y_n$ бўлишидан $a \ge b$ тенгсизлик келиб чиқиши кўрсатилади. ►

4-теорема. Агар $\{x_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

2) $\forall n \in N$ учун $x_n \le y_n \le z_n$

бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

бўлади.

◄ Шартга кўра

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Лимит таърифига биноан:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{'} \in N,\ \ \forall n > n_0^{'}:\ \ |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{''} \in N,\ \ \forall n > n_0^{''}\ \ \ |z_n - a| < \varepsilon$$

бўлади. Агар $n_0 = \max\{n_0^{'},\ n_0^{''}\}$ дейилса, унда $\forall n > n_0$ учун

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади. Теореманинг 1-шартидан фойда-ланиб топамиз:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

Кейинги тенгсизликлардан

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad \text{яъни} \quad |y_n - a| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди. ►

1-мисол. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

лимит топилсин.

◄ Равшанки, барча $n \ge 2$ бўлганда

$$\sqrt[2n]{n} > 1$$

бўлади. Айтайлик,

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + \alpha_n$$

бўлсин. Унда

$$\sqrt[n]{n} = (1 + \alpha_n)^2 \qquad (1)$$

ва $\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^2$ бўлади.

Бернулли тенгсизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^n \ge 1 + n \cdot \alpha_n > n \cdot \alpha_n. \qquad (2)$$

(1) ва (2) муносабатлардан

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ва

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Агар

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$$

эканини эътиборга олсак, унда 4-теоремага кўра

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

бўлишини топамиз. ►

2-мисол. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

лимит топилсин.

◄Равшанки,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=n\cdot\frac{1}{n}=1,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<1+1+1+\ldots+1=n.$$

Демак,

$$1<\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}\,.$$

4-теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}=1.\ ►$$

2^0. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида амаллар. Фараз қилайлик, $\{x_n\}$ ҳамда $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин:

$$\{x_n\}:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ldots$$

$$\{y_n\}:\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,y_n,\ldots$$

Қуйидаги

$$x_1+y_1,\quad x_2+y_2,\quad x_3+y_3,\ \ldots,\quad x_n+y_n,\ldots$$

$$x_1-y_1,\quad x_2-y_2,\quad x_3-y_3,\ \ldots,\quad x_n-y_n,\ldots$$

$$x_1\cdot y_1,\quad x_2\cdot y_2,\ x_3\cdot y_3,\ldots,x_n\cdot y_n,\ldots$$

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots\qquad (y_n\neq 0,\quad n=1,2,3,\ \ldots)$$

кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ **кетма-кетлик-ларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ҳамда нисбати** дейилади ва улар

$$\{x_n+y_n\},\ \{x_n-y_n\},\ \{x_n\cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

каби белгиланади.

5-теорема. Айтайлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлари берилган бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\qquad \lim_{n\to\infty}y_n=b,\qquad (a\in R,\quad b\in R)$$

бўлсин. У ҳолда $n\to\infty$ да $(c\cdot x_n)\to c\cdot a$;

$$x_n + y_n \to a+b; \qquad x_n \cdot y_n \to ab; \qquad \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b} \ (b=0), \text{ яъни}$$

а) $\forall c \in R$ да $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot x_n) = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, $\quad (b \neq 0)$

бўлади.

Теореманинг тасдиқларидан бирини, масалан в)-нинг исботини келтирамиз.

◄ Теореманинг шартига кўра,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Равшанки,

$$\begin{aligned} |x_n\cdot y_n - ab| &= |x_n\cdot y_n - a\cdot y_n + a\cdot y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a|\cdot|y_n| + |a|\cdot|y_n - b|. \end{aligned} \tag{3}$$

$\{y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлганлиги сабабли у 1-теоремага кўра чегараланган бўлади:

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in N: \quad |y_n| \leq M.$$

Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб топамиз:

$\forall \varepsilon > 0$ берилган ҳамда $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ га кўра шундай $n_0^{'} \in N$ топиладики, $\forall n > n_0^{'}$ учун

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

бўлади.

Шунингдек, $\dfrac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$ га кўра шундай $n_0^{''} \in N$ топиладики, $\forall n > n_0^{''}$ учун

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$$

бўлади.

Агар $n_0 = \max\{n_0^{'}, n_0^{''}\}$ дейилса, унда $\forall n > n_0$ учун бир йўла

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \tag{4}$$

бўлади.

(3) ва (4) муносабатлардан

$$\left|x_n \cdot y_n - ab\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = ab$$

бўлишини билдиради. ►

3^0. Чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар. Фараз қилайлик, $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар $\{\alpha_n\}$ кетма-кетликнинг лимити нолга тенг, яъни

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

бўлса, $\{\alpha_n\}$ - **чексиз кичик миқдор** дейилади.

Масалан,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{ва} \quad \alpha_n = q^n, \ \ (|q| < 1)$$

кетма-кетликлар чексиз кичик миқдорлар бўлади.

Айтайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити а га тенг бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

У ҳолда $\alpha_n = x_n - a$ чексиз кичик миқдор бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз: $x_n = a + \alpha_n$. Бундан эса қуйидаги муҳим хулоса келиб чиқади:

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг a $(a \in R)$ лимитга эга бўлиши учун $\alpha_n = x_n - a$ нинг чексиз кичик миқдор бўлиши зарур ва етарли.

Кетма-кетликнинг лимити таърифидан фойдаланиб қуйидаги иккита леммани исботлаш қийин эмас.

1-лемма. Чекли сондаги чексиз кичик миқдорлар йиғиндиси чексиз кичик миқдор бўлади.

2-лемма. Чегараланган миқдор билан чексиз кичик миқдор кўпайтмаси чексиз кичик миқдор бўлади.

3-таъриф. Агар ҳар қандай M сони олинганда ҳам шундай натурал n_0 сони топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$|x_n| > M$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг **лимити чексиз** дейилади ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

каби белгиланади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса, $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор дейилади.

Масалан,

$$x_n = (-1)^n \cdot n$$

кетма-кетлик чексиз катта миқдор бўлади.

Энди чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар орасидаги боғланишни ифодаловчи тасдиқларни келтирамиз:

1) Агар $\{x_n\}$ чексиз кичик миқдор $(x_n \neq 0)$ бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ чексиз катта миқдор бўлади.

2) Агар $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор бўлса, у ҳолда $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ чексиз кичик миқдор бўлади.

Машқлар

1. Агар

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad a > 0$$

бўлса, у ҳолда

$$\exists n_0 \in N, \ \ \forall n > n_0 : \ \ x_n > 0$$

бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^2 - 1} \cos\frac{n+1}{2n-1}$$

лимит ҳисоблансин.

3. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n!} = 0, \qquad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)$$

лимит муносабат исботлансин.

4. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

2) $\forall n \in N$ учун $x_n < y_n$

бўлса, у ҳолда $a < b$ бўладими? Мисоллар келтирлсин.

8-маъруза
Монотон кетма-кетликлар ва уларнинг лимити

1^0. Монотон кетма-кетлик тушунчаси. Айтайлик, $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2, ...,\ x_n,\ ... \qquad (1)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар (1) кетма-кетликда $\forall n \in N$ учун $x_n \le x_{n+1}$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ **ўсувчи кетма-кетлик** дейилади. Агар (1) кетма-кетликда $\forall n \in N$ учун $x_n < x_{n+1}$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ **қатъий ўсувчи кетма-кетлик** дейилади.

2-таъриф. Агар (1) кетма-кетликда $\forall n \in N$ учун $x_n \ge x_{n+1}$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ **камаювчи кетма-кетлик** дейила-ди. Агар (1) кетма-кетликда $\forall n \in N$ учун $x_n > x_{n+1}$ тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ **қатъий камаювчи кетма-кетлик** дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$x_n = \frac{n+1}{n}:\quad \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ ...$$

кетма-кетлик қатъий камаювчи кетма-кетлик бўлади.

◄ Ҳақиқатдан ҳам, берилган кетма-кетлик учун

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

бўлиб, $\forall n \in N$ учун

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

бўлади. Унда $x_{n+1} < x_n$ бўлиши келиб чиқади. ►

Юқоридаги таърифлардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1) агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлса, у қуйидан чегараланган бўлади:

2) агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлса, у юқоридан чегараланган бўлади.

Ўсувчи ҳамда камаювчи кетма-кетликлар умумий ном билан монотон кетма-кетликлар дейилади.

2-мисол. Ушбу

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

кетма-кетликнинг қатъий ўсувчи эканлиги исботлансин.

◄ Бу кетма-кетликнинг $n-$ҳамда $(n+1)-$ҳадлари учун

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

бўлади. Равшанки,

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \ .$$

Шу тенгсизликни эътиборга олиб, топамиз:

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1} > 1 - \frac{1}{n^2+1} = x_n.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун $x_n < x_{n+1}$. Бу эса қаралаётган кетма-кетликнинг қатъий ўсувчи бўлишини билдиради. ►

2^0. Монотон кетма-кетликниншг лимити. Қуйида моно-тон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги теоремаларни келтирамиз.

1-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик

1) ўсувчи,

2) юқоридан чегараланган бўлса, у чекли лимитга эга бўлади.

◄ Айтайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетлик теореманинг иккала шартларини бажарсин. Бу кетма-кетликнинг барча ҳадлари-дан иборат тўпламни E билан белгилаймиз:

$$E = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}.$$

Равшанки, E юқоридан чегараланган тўплам бўлиб, $E \neq \varnothing$. Унда тўпламнинг аниқ чегарасининг мавжудлиги ҳақидаги теоремага мувофиқ, $\sup E$ мавжуд бўлади. Уни a билан белгилайлик:

$$\sup E = a.$$

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонини олайлик. Тўпламнинг аниқ юқори чегараси таърифига биноан:

1) $\forall n \in N$ учун $x_n \le a$

2) $\exists x_{n_0} \in E, \quad x_{n_0} > a - \varepsilon$

бўлади. Айни пайтда $\forall n > n_0$ учун $x_n \ge x_{n_0}$ тенгсизлик бажари-либ, $x_n > a - \varepsilon$ бўлади.

Натижада $\forall n > n_0$ учун $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ яъни $|a - x_n| < \varepsilon$ бўли-шини топамиз.

Демак $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup E. \blacktriangleright$$

2-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик

1) камаювчи,

2) қуйидан чегараланган бўлса, у чекли лимитга эга бўлади.

Бу теорема юқорида келтирилган теореманинг исботи каби исботланади.

3-мисол. Ушбу

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

кетма-кетликнинг лимити топилсин.

◀ Равшанки, $\forall n \ge 1$ учун $x_n > 0$ бўлади. Бу кетма-кетликнинг x_{n+1} ва x_n ҳадларининг нисбатини қараймиз:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Демак, $x_{n+1} < x_n$. Бундан эса берилган кетма-кетликнинг камаювчи эканлиги келиб чиқади.

Айни пайтда $\forall n \ge 1$ да

$$0 < x_n \le x_1$$

муносабат ўринли бўлади. Демак берилган кетма-кетлик чегараланган. 1-теоремага кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга. Уни a билан белгилаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = a. \qquad (a \ge 0)$$

Энди ушбу $x_n - x_{n+1}$ айирмани қараймиз. Бу айирма учун

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \geq$$
$$\geq x_n \cdot \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

бўлиб, ундан
$$x_n \geq 2x_{n+1}$$
бўлиши келиб чиқади. Кейинги муносабатлардан топамиз:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 2\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, $\quad a \geq 2a$. Равшанки, бу ҳолда $a = 0$ бўлади.
Демак,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \blacktriangleright$$

3^0. e сони. Ушбу
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$
кетма-кетликни қараймиз.

Тасдиқ. (1) кетма-кетлик ўсувчи бўлади.

◀ Берилган кетма-кетликнинг x_{n+1} ҳамда x_n ҳадларининг нисбатини топамиз:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^n} =$$
$$= \left[\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Бернулли тенгсизлигига кўра:

$$\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \text{ бўлади.}$$

Натижада $\forall n \in N$ учун

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

яъни, $x_{n+1} > x_n$ бўлиши келиб чиқади. ▶

Тасдиқ. (1) кетма-кетлик чегараланган бўлади.

◀ Равшанки, $k \geq 1$ учун

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{k-1}$$

бўлади.

Энди Ньютон биноми формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^k} C_n^k =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Демак, $\forall n \in N$ учун $0 < x_n < 3$ бўлади.

Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

кетма-кетлик чекли лимитга эга. ►

3-таъриф. (1) кетма-кетликнинг лимити е сони дейилади:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Бу e сони иррационал сон бўлиб,

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

бўлади.

Машқлар

1. Ушбу

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

кетма-кетликнинг камаювчи эканлиги исботлансин.

2. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

лимит ҳисоблансин.

3. Ушбу

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2+\sqrt{2}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчанлиги исботлансин ва лимити топилсин.

9-маъруза
Фундаментал кетма-кетликлар. Коши теоремаси

1^0. Қисмий кетма-кетликлар. Больцано- Вейерштрасс теоремаси. Айтайлик,

$$\{x_n\}:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ldots \qquad (1)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу (1) кетма-кетликнинг бирор n_1 номерли x_{n_1} ҳадини оламиз. Сўнгра номери n_1 дан катта бўлган n_2 номерли x_{n_2} ҳадини оламиз. Шу усул билан x_{n_3}, x_{n_4} ва ҳ.к. ҳадларни танлаб оламиз. Натижада номерлари

$$n_1 < n_2 < n_3 < .. < n_k < \ldots$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи (1) кетма-кетликнинг ҳадлари ушбу

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \qquad (2)$$

кетма-кетликни ҳосил қилади.

(2) кетма-кетлик (1) кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги дейилади ва $\{x_{n_k}\}$ каби белгиланади.

Масалан,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,$$

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

кетма-кетликлар $1,\ 2,\ 3,\ 4,..,n,\ \ldots$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари,

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots,$$

$$-1,\ -1,\ \ldots,\ -1,\ \ldots$$

кетма-кетликлар $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари бўлади.

Келтирилган тушунча ва мисоллардан битта кетма-кетликнинг турли қисмий кетма-кетликлари бўлиши мумкин-лиги кўринади.

1-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, унинг ҳар қандай қисмий кетма-кетлиги ҳам шу лимитга эга бўлади.

◄ Бу теореманинг исботи кетма-кетлик лимити таъри-фидан келиб чиқади. ►

Эслатма. Кетма-кетлик қисмий кетма-кетликларининг лимити мавжуд бўлишидан берилган кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан, $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots,$$

$$-1, -1, \dots, -1, \dots$$

ларнинг лимити бўлган ҳолда кетма-кетликнинг ўзининг лимити мавжуд эмас.

2-теорема (Больцано-Вейерштрасс теоремаси). Ҳар қан-дай чегараланган кетма-кетликдан чекли сонга интилувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

◀ $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, у чегараланган бўлсин: Бу ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадлари $[a,b]$ да жойлашган деб қараш мумкин: $x_n \in [a, b], \quad n = 1, 2, 3, \dots$

$[a, b]$ сегментни

$$\left[a, \ \frac{a+b}{2}\right] \ , \quad \left[\frac{a+b}{2}, \ \ b\right]$$

сегментларга ажратамиз. $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чексиз кўп ҳадлари жойлашганини $[a_1, b_1]$ деймиз. Равшанки, $[a_1, b_1]$ нинг узунлиги $\dfrac{b-a}{2}$ га тенг бўлади. Юқоридагига ўхшаш $[a_1, b_1]$ сегментни

$$\left[a_1, \ \frac{a_1+b_1}{2}\right] , \ \left[\frac{a_1+b_1}{2}, \ b_1\right]$$

сегментларга ажратамиз. Берилган кетма-кетликнинг чексиз кўп сондаги ҳадлари бўлганини $[a_2, b_2]$ деймиз. Бунда $[a_2, b_2]$ нинг узунлиги $\dfrac{b-a}{2^2}$ га тенг бўлади.

Бу жараённи давом эттириш натижасида ушбу

$$[a_1, b_1], \ [a_2, b_2], \ \dots, \ [a_k, b_k], \dots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Бу сегментлар кетма-кетлиги учун

$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$ бўлиб, $k \to \infty$ да

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$$

бўлади.

Ичма-ич жойлашган сегментлар принципига кўра

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = C \qquad (C \in R)$$

бўлади.

Энди $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг $[a_1, b_1]$ даги бирорта x_{n_1} ҳадини, $[a_2, b_2]$ даги бирорта x_{n_2} ҳадини ва ҳ.к. $[a_k, b_k]$ даги бирорта x_{n_k} ҳадини ва ҳ.к.

ҳадларини оламиз. Натижада $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадларидан ташкил топган ушбу

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ ...,\ x_{n_k},\ ... \qquad (n_1 < n_2 < ... < n_k < ...)$$

қисмий кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетлик учун

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \qquad (k = 1,\ 2,\ ...)$$

бўлиб, ундан $k \to \infty$ да $x_{n_k} \to C$ яъни $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = C$ бўлиши келиб чиқади. ►

2^0. Фундаментал кетма-кетликлар. Коши теоремаси. $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай натурал n_0 сони топилсаки, барча $n > n_0$ ва $m > n_0$ учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса (яъни $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall m > n_0:\ |x_n - x_m| < \varepsilon$ бўлса), $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик дейилади.

Масалан,

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1,2,...)$$

фундаментал кетма-кетлик бўлади.

◄Ҳақиқатдан ҳам, берилган кетма-кетлик учун

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

бўлиб, $\forall\varepsilon > 0$ га кўра $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ дейилса, $\forall n > n_0$, $\forall m > m_0$ бўлганда

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

бўлади. ►

3-теорема. (Коши теоремаси). Кетма-кетликнинг яқинла-шувчи бўлиши учун унинг фундаментал бўлиши зарур ва етарли.

◄**Зарурлиги.** $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ бўлсин. Лимит таърифига биноан

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Шунингдек, $\forall m > n_0 : |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Натижада $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ учун

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик.

Етарлилиги. $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик бўлсин:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall m > n_0:\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Агар $m > n_0$ шартни қаноатлантирувчи m тайинланса, унда

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

бўлиб, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлиги келиб чиқади.

Больцано-Вейершрасс теоремасига биноан бу кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликни ажратиш мумкин: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$

Демак,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in N,\ \forall k > k_0 : |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

бўлади.

Агар $m = n_k$ дейилса, унда

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

бўлади. Кейинги икки тенгсизликлардан

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ ►

3^0. Кетма-кетликнинг қуйи ҳамда юқори лимитлари. $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлигининг лимити $\{x_n\}$ нинг қисмий лимити дейилади.

2-таъриф. $\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси берилган **кетма-кетликнинг юқори лимити** дейилади ва

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг кичиги берилган **кетма-кетликнинг қуйи лимити** дейилади ва

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

каби белгиланади.

Масалан, ушбу $\{x_n\}: 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ кетма-кетликнинг юқори лимити

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 3,$$

қуйи лимити эса

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1$$

бўлади. Умуман, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қуйи ҳамда юқори лимитлари қуйидагича ҳам киритилиши мумкин.

Айтайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, A бу кетма-кетликнинг қисмий лимитларидан иборат тўплам бўлсин. Унда бу кетма-кетликнинг қуйи лимитини

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n =$$

$$= \begin{cases} -\infty; & \{x_n\} \text{ куйидан чегараланмаган бўлса },\\ \inf A; & \{x_n\} \text{ куйидан чегараланган ва } A \neq \{+\infty\},\\ +\infty; & A = \{+\infty\} \text{ бўлса} \end{cases}$$

деб олиш мумкин.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимитини эса

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n =$$

$$= \begin{cases} +\infty; & \{x_n\} \text{ юкоридан чегараланмаган бўлса },\\ \sup A; & \{x_n\} \text{юкоридан чегараланган ва } A \neq \{-\infty\} \text{бўлса },\\ -\infty; & A = \{-\infty\} \text{ бўлса} \end{cases}$$

деб қараш мумкин.

Энди қуйи ҳамда юқори лимитларнинг хоссаларини келтирамиз.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$ бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам:

1) шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $x_n < a + \varepsilon$

2) $\forall n_1 \in N$ учун ε ва n_1 ларга боғлиқ шундай $n' > n_1$ топиладики, $x_{n'} > a - \varepsilon$ бўлади.

Бу хоссалар қуйидагиларни англатади: $\forall \varepsilon > 0$ тайин олганда, биринчи хосса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг фақатгина чекли сондаги ҳадларигина

$$x_n < a + \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантиришини, иккинчи хосса эса бу кетма-кетликнинг

$$x_n > a - \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳадларининг сони чексиз кўп бўлишини ифодалайди.

◀Агар $\{x_n\}$ нинг чексиз кўп сондаги ҳадлари $a + \varepsilon$ дан катта бўлса, у ҳолда $a + \varepsilon$ сонидан кичик бўлмаган b $(b \geq a + \varepsilon)$ га интилувчи $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги мавжуд ва бу $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$ га зид.

Демак, $a + \varepsilon$ дан ўнгда кетма-кетликнинг кўпи билан чекли сондаги ҳадлари ётади.

Модомики,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a$$

экан, унда $\{x_n\}$ нинг қисмий лимитларидан бири a га тенг:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

Лимит таърифига кўра бу $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг, демак, $\{x_n\}$ нинг ҳам чексиз кўп сондаги ҳадлари $a-\varepsilon$ дан катта бўлади. ►

Эслатма. Бирор a сони юқоридаги икки шартни қаноат-лантирса, у $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг юқори лимити бўлади.

Фараз қилайлик, бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = b$$

бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам:

1′) шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да $x_n > b-\varepsilon$

2′) $\forall n_1 \in N$ учун ε ва n_1 ларга боғлиқ шундай $n' > n_1$ топиладики, $x_{n'} < b+\varepsilon$ бўлади.

Қуйи лимитнинг бу хоссаси юқоридагидек исботланади.

Кетма-кетликнинг қуйи ҳамда юқори лимитлари хосса-ларидан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаш қийин эмас:

4-теорема. $\{x_n\}$ кетма-кетлик C лимитга эга бўлиши учун

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = C$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Машқлар

1. Ҳар қандай монотон кетма-кетлик фақат битта қисмий лимитга эга бўлиши исботлансин.

2. Коши теоремасидан фойдаланиб, ушбу

$$x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

кетма-кетликнинг $(a_k \in R,\ |a_k| \le q^k;\ \ 0<q<1;\ \ k=1, 2, ...)$ лимитга эга бўлиши исботлансин.

3. Ушбу

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

тенгсизлик исботлансин.

3-БОБ
ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

10-маъруза
Функция тушунчаси

1^0. Функция таърифи, берилиш усуллари. Биз 2-маърузада E тўпламни F тўпламга акслантириш

$$f:\ E \to F$$

ни ўрганган эдик.

Энди $E = F$, $F = R$ деб оламиз. Унда ҳар бир ҳақиқий x сонга бирор ҳақиқий у сонни мос қўювчи

$$f:\ F \to R \quad (x \xrightarrow{f} y)$$

акслантиришга келамиз. Бу эса функция тушунчасига олиб келади.

Функция тушунчаси ўқувчига ўрта мактаб математика курсидан маълум. Шуни эътиборга олиб функция ҳақидаги дастлабки маълумотларни қисқароқ баён этишни лозим топдик.

Айтайлик, $X \subset R, Y \subset R$ тўпламлар берилган бўлиб, x ва y ўзгарувчилар мос равишда шу тўпламларда ўзгарсин: $x \in X$, $y \in Y$.

1-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор f қоидага кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда **функция берилган (аниқланган)** дейилади ва

$$f: x \to y \text{ ёки } y = f(x)$$

каби белгиланади. Бунда X - **функциянинг аниқланиш тўплами (соҳаси)**, Y - **функциянинг ўзгариш тўплами (соҳаси) дейилади.** x- **эркли ўзгарувчи** ёки **функция аргументи**, у эса **эрксиз ўзгарувчи** ёки **функция** дейилади.

Мисоллар. 1. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ бўлиб, f қоида

$$f: x \to y = x^2 + 1$$

бўлсин. Бу ҳолда ҳар бир $x \in X$ га битта $x^2 + 1 \in Y$ мос қўйилиб,

$$y = x^2 + 1$$

функцияга эга бўламиз.

2. Ҳар бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида функция ҳосил бўлади. Одатда, бу **Дирихле функцияси** дейилиб, у $D(x)$ каби белгиланади:

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ , агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0 \text{ , агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Шундай қилиб, $y = f(x)$ функция учта: X тўплам, Y тўплам ва ҳар бир $x \in X$ га битта $y \in Y$ ни мос қўювчи f қоиданинг берилиши билан аниқланар экан.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин. $x_0 \in X$ нуқтага мос келувчи y_0 миқдор $y = f(x)$ **функциянинг** $x = x_0$ **нуқтадаги хусусий қиймати** дейилади ва $f(x_0) = y_0$ каби белгиланади.

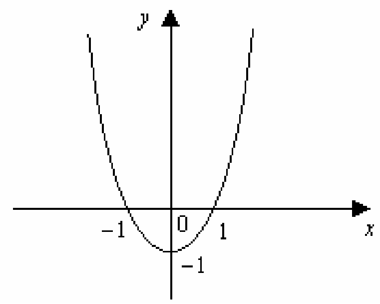
Текисликда декарт координаталар системасини оламиз. Текисликдаги $(x, f(x))$ нуқталардан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) |\, x \in X, f(x) \in Y\}$$

тўплам $y = f(x)$ функциянинг графиги дейилади. Масалан,

$$y = x^2 - 1 \quad (x \in X = [-2, 2])$$

функциянинг графиги 1-чизмада тасвирланган.



1-чизма.

Функция таърифидаги f қоида турлича бўлиши мумкин.

а) Кўпинча x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар ёрдамида ифодаланади. Бу **функциянинг анали-тик усулда берилиши** дейилади. Масалан,

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

функция аналитик усулда берилган бўлиб, унинг аниқланиш тўплами

$$X=\{x\in R \mid -1\le x\le 1\}=[-1,1]$$

бўлади.

x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш қуйидаги формулалар ёрдамида берилган бўлсин:

$$y=f(x)=\begin{cases} 1, \text{ агар } x>0 \text{ бўлса,} \\ -1, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

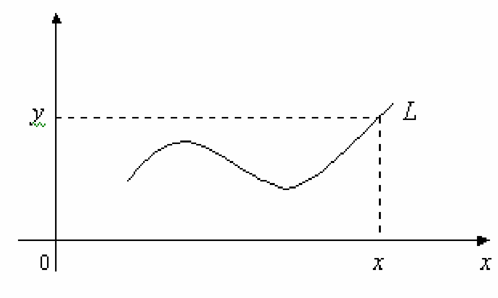
Бу функциянинг аниқланиш тўплами $X=R\setminus\{0\}$ бўлиб, қийматлар тўплами эса $Y=\{-1,1\}$ бўлади. Одатда бу функция $y=\mathrm{sign}x$ каби белгиланади.

б) Баъзи ҳолларда $x\in X$, $y\in Y$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш жадвал орқали бўлиши мумкин. Масалан, кун давомида ҳаво ҳароратини кузатганимизда, t_1 вақтда ҳаво ҳарорати T_1, t_2 вақтда ҳаво ҳарорати T_2 ва ҳ.к. бўлсин. Натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади.

$t-$ вақт	t_1	t_2	t_3	...	t_n
$T-$ ҳарорат	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Бу жадвал t вақт билан ҳаво ҳарорати T орасидаги боғланиш-ни ифодалайди, бунда t-аргумент, T эса t нинг функцияси бўлади.

в) x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликда бирор эгри чизиқ орқали ҳам ифодаланиши мумкин (2-чизма).



2-чизма.

Масалан, 2-чизмада тасвирланган L эгри чизиқ берил-ган бўлсин. Айтайлик, $[a,b]$ сегментдаги ҳар бир нуқтадан ўтказилган перпендикуляр L чизиқни фақат битта нуқтада кессин. $\forall x\in[a,b]$ нуқтадан перпендикуляр чиқариб, унинг L чизиқ билан кесишиш нуқтасини топамиз. Олинган x нуқта-га кесишиш нуқтасининг ординатаси y ни мос қўямиз. Натижада ҳар бир $x \in [a,b]$ га битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x билан y орасидаги боғланишни берил-ган L эгри чизиқ бажаради.

Айтайлик, $f_1(x)$ функция $X_1 \subset R$ тўпламда, $f_2(x)$ функция эса $X_2 \subset R$ тўпламда аниқланган бўлсин.

Агар

1) $X_1 = X_2$
2) $\forall x \in X_1$ да $f_1(x) = f_2(x)$

бўлса, $f_1(x)$ ҳамда $f_2(x)$ функциялар ўзаро тенг дейилади ва $f_1(x) = f_2(x)$ каби белгиланади.

2^0. Функциянинг чегараланганлиги. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \le M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда юқоридан чегараланган** дейилади. Агар шундай ўзгармас m сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \ge m$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда қуйидан чегаралан-ган** дейилади.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда чегараланган** дейилади.

1-мисол. Ушбу $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ функцияни қарайлик. Бу функция R да чегараланган бўлади.

◀ Равшанки, $\forall x \in R$ да $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4} > 0$.

Демак, берилган функция R да қуйидан чегараланган.

Айни пайтда, $f(x)$ функция учун

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \le 1 + \frac{x^2}{1+x^4}$$

бўлади. Энди

$$0 \le (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \; 2x^2 \le x^4 + 1 \; \Rightarrow \; \frac{x^2}{x^4+1} \le \frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз: $f(x) \le 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Бу эса $f(x)$ функциянинг юқоридан чегараланганлигини билдиради. Демак, берилган функция R да чегараланган. ▶

4-таъриф. Агар ҳар қандай $M > 0$ сон олинганда ҳам шундай $x_0 \in X$ нуқта топилсаки,

$$f(x_0) > M$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда юқоридан чегараланмаган** дейилади.

3^0. Даврий функциялар. Жуфт ва тоқ функциялар. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар шундай ўзгармас $T\ (T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in X$ учун

1) $x - T \in X$, $x + T \in X$
2) $f(x+T) = f(x)$

бўлса, $f(x)$ **даврий функция** дейилади, T сон эса $f(x)$ **функциянинг даври** дейилади.

Масалан, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ функциялар даврий функциялар бўлиб, уларнинг даври 2π га, $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$ функцияларнинг даври эса π га тенг.

Даврий функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

а) Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, унинг даври $T\ (T \neq 0)$ бўлса, у ҳолда

$$T_n = nT \quad (n = \pm 1, \pm 2,)$$

сонлар ҳам шу функциянинг даври бўлади.

б) Агар T_1 ва T_2 сонлар $f(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $T_1 + T_2 \neq 0$ ҳамда $T_1 - T_2\ (T_1 \neq T_2)$ сонлар ҳам $f(x)$ функция-нинг даври бўлади.

в) Агар $f(x)$ ҳамда $g(x)$ лар даврий функциялар бўлиб, уларнинг ҳар бирининг даври $T\ (T \neq 0)$ бўлса, у ҳолда

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар ҳам даврий функциялар бўлиб, T сон уларнинг ҳам даври бўлади.

2-мисол. Ихтиёрий $T\ (T \neq 0)$ рационал сон Дирихле функцияси

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

нинг даври бўлиши кўрсатилсин.

◄ Айтайлик, $T\ (T \neq 0)$ рационал сон бўлсин. Равшанки, $\forall x \in R$ иррационал сон учун $x + T -$ иррационал сон, $\forall x \in R$ рационал сон учун $x + T$ рационал сон бўлади. Демак,

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Шундай қилиб, $\forall x \in R$, T - рационал сон бўлганда

$$D(x+T) = D(x)$$

бўлади. ►

Маълумки, $\forall\, x\in X$ $(X\subset R)$ учун $-x\in X$ бўлса, X тўплам O нуқтага нисбатан **симметрик тўплам** дейилади.

Айтайлик, O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлсин.

6-таъриф. Агар $\forall\, x\in X$ учун $f(-x)=f(x)$ тенглик бажарил-са, $f(x)$ **жуфт функция** дейилади. Агар $\forall\, x\in X$ учун $f(-x)=-f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ **тоқ функция** дейилади.

Масалан, $f(x)=x^2+1$ жуфт функция, $f(x)=x^3+x$ эса тоқ функция бўлади. Ушбу $f(x)=x^2-x$ функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ жуфт функциялар бўлса, у ҳолда

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

функциялар ҳам жуфт бўлади.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ тоқ функциялар бўлса, у ҳолда

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x)$$

функциялар тоқ бўлади,

$$f(x)\cdot g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

функциялар эса жуфт бўлади.

Жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нис-батан, тоқ функциянинг графиги эса кординаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

4^0. Монотон функциялар. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

7-таъриф. Агар $\forall\, x_1, x_2\in X$ учун $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)\leq f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда ўсувчи** дейилади. Агар $\forall\, x_1, x_2\in X$ учун $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)<f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда қатъий ўсувчи** дейилади.

8-таъриф. Агар $\forall\, x_1, x_2\in X$ учун $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)\geq f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда камаювчи** дейилади. Агар $\forall\, x_1, x_2\in X$ учун $x_1<x_2$ бўлганда $f(x_1)>f(x_2)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда қатъий камаювчи** дейилади.

Ўсувчи ҳамда камаювчи функциялар умумий ном билан **монотон функциялар** дейилади.

3-мисол. Ушбу $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ функциянинг $X=[1,+\infty)$ тўп-ламда камаювчи эканлиги исботлансин.

◀ $[1,+\infty)$ да ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарни олиб, $x_1<x_2$ бўлсин дейлик. Унда

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$

$$=\frac{x_1-x_2+x_1\cdot x_2(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

бўлади. Кейинги тенгликда

$$x_1-x_2<0, \qquad 1-x_1\cdot x_2<0$$

бўлишини эътиборга олиб,

$$f(x_1)-f(x_2)>0$$

яъни, $f(x_1)>f(x_2)$ эканини топамиз. Демак,

$$x_1<x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)>f(x_2).\blacktriangleright$$

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X\subset R$ тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, $C=const$ бўлсин. У ҳолда

а) $f(x)+C$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

б) $C>0$ бўлганда $C\cdot f(x)$ ўсувчи, $C<0$ бўлганда $C\cdot f(x)$ камаювчи бўлади.

в) $f(x)+g(x)$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

5^0. Тескари функция. Мураккаб функциялар. $y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, бу функциянинг қийматларидан иборат тўплам

$$Y_f=\{\, f(x)\mid x\in X\,\}$$

бўлсин.

Фараз қилайлик, бирор қоидага кўра Y_f, тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламдаги битта x мос қўйилган бўлсин. Бундай мослик натижасида функция ҳосил бўлади. Одатда, бу функция $y=f(x)$ га нисбатан **тескари функция** дейилади ва $x=f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

Масалан, $y=\frac{1}{2}x+1$ функцияга нисбатан тескари функция $x=2y-1$ бўлади.

Юқорида айтилганлардан $y=f(x)$ да x аргумент, y эса x нинг функцияси, тескари $x=f^{-1}(y)$ функцияда y аргумент, x эса y нинг функцияси бўлиши кўринади.

Қулайлик учун тескари функция аргументи ҳам x, унинг функцияси y билан белгиланади: $y=g(x)$.

$y=f(x)$ га нисбатан тескари $g(x)$ функция графиги $f(x)$ функция графигини I ва III чораклар биссектрисаси атрофии-да 180^0 га айлантириш натижасида ҳосил бўлади.

Айтайлик, Y_f тўпламда $u=F(y)$ функция берилган бўлсин. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га Y_f тўпламда битта y:

$$f: x \to y \quad (y = f(x)),$$

ва Y_f тўпламдаги бундай y сонга битта u:

$$F: y \to u \quad (u = F(y))$$

сон мос қўйилади. Демак, X тўпламдан олинган ҳар бир x сонга битта u сон мос қўйилиб, янги функция ҳосил бўлади: $u = F(f(x))$. Одатда бундай функциялар **мураккаб функция** дейилади.

Машқлар

1. $f(x)$ функциянинг $X \subset R$ тўпламда қуйидан чегаралан-маганлиги таърифи келтирилсин.

2. O нуқтага нисбатан симметрик бўлган $X \subset R$ тўпламда берилган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланиши исботлансин.

3. Ушбу $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ функциянинг $X = [0, +\infty)$ тўпламда камаювчи экани исботлансин.

4. Агар $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ бўлса, $f(f(f(x)))$ топилсин.

11-маъруза
Элементар функциялар

Элементар функциялар китобхонга ўрта мактаб математика курсидан маълум. Биз қуйида элементар функциялар ҳақидаги асосий маълумотларни баён этамиз.

1^0. Бутун рационал функциялар.

Ушбу

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

кўринишдаги функция бутун рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, ..., a_n$– ўзгармас сонлар, $n \in N$. Бу функция $R = (-\infty, \ +\infty)$ да аниқланган.

Бутун рационал функциянинг баъзи хусусий ҳоллари:

а) Чизиқли функция. Бу функция

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

кўринишга эга, бунда a , b ўзгармас сонлар.

Чизиқли функция $(-\infty, +\infty)$ да аниқланган $a > 0$ бўлганда ўсувчи, $a < 0$ бўлганда камаювчи: графиги текисликдаги тўғри чизиқдан иборат.

б) Квадрат функция. Бу функция

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

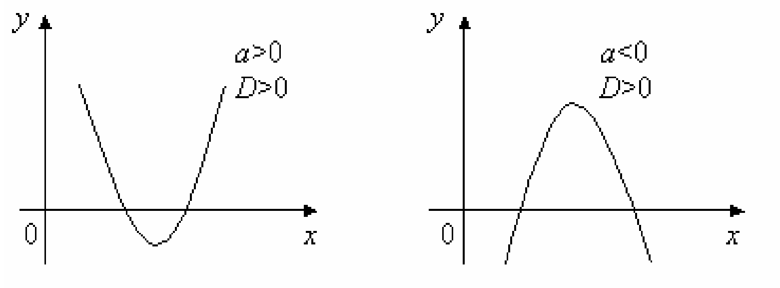
кўринишга эга, бунда a , b , c – ўзгармас сонлар.

Квадрат функция R да аниқланган бўлиб, унинг графиги параболани ифодалайди.

Равшанки,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Параболанинг текисликда жойлашиши a ҳамда $D = b^2 - 4ac$ ларнинг ишорасига боғлиқ бўлади. Масалан, $a > 0$, $D > 0$ ва $a < 0$, $D < 0$ бўлганда унинг графиги 3-чизмада тасвирланган параболалар кўринишида бўлади.



3-чизма.

2⁰. Каср рационал функциялар. Ушбу

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}$$

кўринишдаги функция каср рационал функция дейилади. Бунда a_0, a_1,..., a_n ва b_0, b_1, ..., b_m лар ўзгармас сонлар $n \in N$, $m \in N$. Бу функция

$$X = (-\infty, +\infty) \ \backslash \ \{x | b_0 + b_1x + ... + b_mx^m = 0\}$$

тўпламда аниқланган.

Каср рационал функциянинг баъзи хусусий ҳоллари:

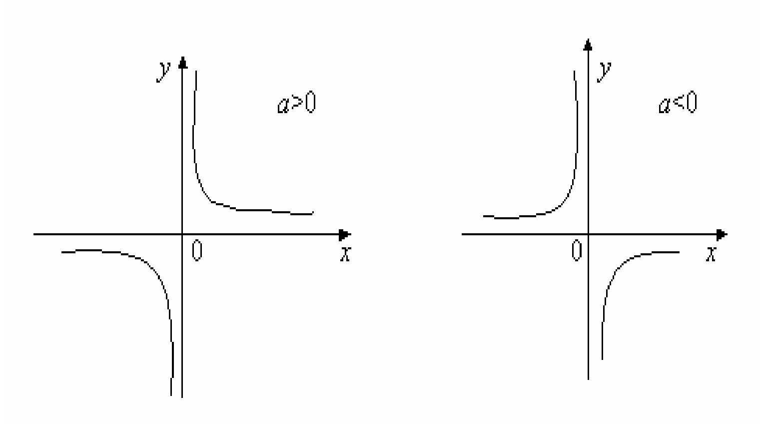
а) Тескари пропорционал боғланиш. У

$$y = \frac{a}{x} \qquad (x \neq 0 \quad a = const)$$

кўринишга эга. Бу функция

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R \setminus \{0\}$$

тўпламда аниқланган, тоқ функция, a нинг ишорасига қараб функция $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида камаюв-чи ёки ўсувчи бўлади (4-чизма).



4-чизма

б) Каср чизиқли функция. У ушбу

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

кўринишга эга. Бу функция

$$X = R \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \qquad (c \neq 0)$$

тўпламда аниқланган:

Равшанки,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Демак,

$$y = \frac{\alpha}{x+\beta} + \gamma, \quad \left(\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}, \quad \beta = \frac{d}{c}, \quad \gamma = \frac{a}{c}\right).$$

Унинг графигини $y = \frac{a}{x}$ функция графиги ёрдамида чизиш мумкин.

3⁰. Даражали функция. Ушбу

$$y = x^a, \quad (x \geq 0)$$

кўринишдаги функция даражали функция дейилади.

Бу функциянинг аниқланиш тўплами a га боғлиқ. Даражали функция $a > 0$, бўлганда $(0, +\infty)$ да ўсувчи, $a < 0$ бўлганда камаювчи бўлади. $y = x^a$ функция графиги текислик-нинг $(0,0)$ ва $(1,1)$ нуқталаридан ўтади.

4⁰. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y = a^x$$

кўринишдаги функция кўрсаткичли функция дейилади. Бунда $a \in R$, $a>0$, $a \neq 1$. Кўрсаткичли функция $(-\infty, +\infty)$ аниқ-ланган, $\forall x \in R$ да $a^x > 0$; $a>1$ бўлганда ўсувчи; $0<a<1$ бўлганда камаювчи бўлади.

Хусусан, $a=e$ бўлса, математикада муҳим рол ўйнайди-ган $y=e^x$ функция ҳосил бўлади.

Кўрсаткичли функциянинг графиги Ox ўқидан юқорида жойлашган ва текисликнинг $(0,1)$ нуқтасидан ўтади.

5⁰. Логарифмик функция. Ушбу

$$y=\log_a x$$

кўринишдаги функция логарифмик функция дейилади. Бунда $a>0$, $a \neq 1$.

Логарифмик функция $(0, +\infty)$ да аниқланган, $y=a^x$ функ-цияга нисбатан тескари; $a>1$ бўлганда ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда камаювчи бўлади.

Логарифмик функциянинг графиги Oy ўқининг ўнг томонида жойлашган ва текисликнинг $(0,1)$ нуқтасидан ўтади.

6⁰. Тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=tgx, \quad y=ctgx,$$

$$y=\sec x, \quad y=\operatorname{cosec} x$$

функциялар тригонометрик функциялар дейилади.

$y=\sin x$, $y=\cos x$ функциялар $R=(-\infty, +\infty)$ да аниқланган, 2π даврли функциялар $\forall x \in R$ да

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

бўлади. Ушбу

$$y=tgx,$$

функция

$$X = R \setminus \left\{ x \in R \mid x=(2k+1)\frac{\pi}{2}; \;\; k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

тўпламда аниқланган π даврли функция, $\mathrm{ctg}x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$ лар орқали қуйидагича ифодала-нади:

$$ctgx=\frac{1}{tgx}, \quad \sec x=\frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}.$$

7⁰. Гиперболик функциялар. Кўрсаткичли $y=e^x$ функ-ция ёрдамида тузилган ушбу

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

функциялар **гиперболик** (мос равишда **гиперболик синус, гиперболик косинус, гиперболик тангенс, гиперболик катангенс**) функциялар дейилади ва улар қуйидагича

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

белгиланади.

8^0. Тескари тригонометрик функциялар. Маълумки, $y=\sin x$ функция R да аниқланган ва унинг қийматлари тўплами

$$Y_f=[-1,\ 1]$$

бўлади.

Агар $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ бўлса, у ҳолда $X=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ ва $Y_f=[-1,\ 1]$ тўпламларнинг элементлари ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.

$y=\sin x$ функцияга нисбатан тескари функция

$$y=arc\sin x$$

каби белгиланади.

Шунга ўхшаш $y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx$ функцияларга нис-батан тескари функциялар мос равишда

$$y=\arccos x,\ \ y=arctgx,\ \ y=arcctgx,$$

каби белгиланади.

Ушбу $y=arc\sin x$, $y=arc\cos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ функция-лар тескари тригонометрик функциялар дейилади.

Машқлар

1. $y=x^2$ функция графигига кўра $y=ax^2+bx+c$ функция-нинг графиги чизилсин.

2. $y=\frac{1}{x}$ функция графигига кўра

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

функциянинг графиги чизилсин.

12-маъруза
Функция лимити

1^0. Тўпламнинг лимит нуқтаси. Айтайлик, бирор $X \subset R$ тўплам ва $x_0 \in R$ нуқта берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг ихтиёрий

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, \ \ x_0 + \varepsilon) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

атрофида X тўпламнинг x_0 нуқтадан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, яъни

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in X, \ \ x \neq x_0 : \ |x - x_0| < \varepsilon$$

бўлса, x_0 нуқта X тўпламнинг **лимит нуқтаси** дейилади.

Мисоллар. 1. $X = [0, 1]$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

2. $X = (0, 1)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси ва $x = 0, \quad x = 1$ нуқталар шу тўпламнинг лимит нуқталари бўлади.

3. $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси $x_0 = 0$ бўлади.

4. $X = N = \{1, 2, 3, ...\}$ тўплам лимит нуқтага эга эмас.

2-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг ихтиёрий

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0, \ \ x_0 + \varepsilon) \qquad (U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, \ \ x_0)) \ \ (\forall \varepsilon > 0)$$

ўнг атрофида (чап атрофида) X тўпламнинг камида битта нуқтаси бўлса, x_0 нуқта X тўпламнинг **ўнг (чап) лимит нуқтаси** дейилади.

3-таъриф. Агар ихтиёрий $c \in R$ учун

$$U_c(+\infty) = \{x \in R \mid \ x > c\}$$

тўпламда X тўпламнинг камида битта нуқтаси бўлса, $"+\infty"$ X тўпламнинг лимит «нуқта»си дейилади.

Агар ихтиёрий $c\in R$ учун

$$U_c(-\infty)=\{x\in R\mid \ x<c\}$$

тўпламда X тўпламнинг камида битта нуқтаси бўлса, "$-\infty$" X тўпламнинг лимит «нуқта»си дейилади.

Келтирилган таъриф ва мисоллардан кўринадики, тўпламнинг лимит нуқтаси шу тўпламга тегишли бўлиши ҳам, бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

1-теорема. Агар $x_0\in R$ нуқта $X\subset R$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг ҳар қандай

$$U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ \ x_0+\varepsilon)\quad (\forall\varepsilon>0)$$

атрофида X тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бўлади.

◀Айтайлик, x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Теорема тасдиғининг тескарисини фараз қилайлик: x_0 нуқтанинг бирор $U_{\delta_0}(x_0)$ атрофида X тўпламнинг чекли сондаги $x_1,\ x_2,...,\ x_n$ нуқталаригина бўлсин. У ҳолда

$$\min\{|x_0-x_1|,\ \ |x_0-x_2|,\ ...,\ |x_0-x_n|,\ \ \delta_0\}=\delta$$

деб олинса, x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида X тўпламнинг x_0 дан фарқли битта ҳам нуқтаси бўлмайди. Бу эса x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлишига зиддир. ►

2-теорема. Агар x_0 нуқта $X\subset R$ тўпламнинг лимит нуқта-си бўлса, у ҳолда шундай сонлар кетма-кетлиги $\{x_n\}$ топила-дики,

1) $\forall n\in N$ да $x_n\in X$, $x_n\neq x_0$;

2) $n\to\infty$ да $x_n\to x_0$

бўлади.

◀Айтайлик, $x_0\in R$ нуқта $X\subset R$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. Унда 1-таърифга биноан

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists x_n\in X,\ \ x_n\neq x_0:\ |x_n-x_0|<\varepsilon$$

бўлади. Жумладан,

$$\varepsilon=1 \ \text{ учун }\ \exists x_1\in X,\ \ x_1\neq x_0:\ |x_1-x_0|<1,$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2} \ \text{ учун }\ \exists x_2\in X,\ \ x_2\neq x_0:\ |x_2-x_0|<\frac{1}{2},$$

$$\varepsilon=\frac{1}{3} \ \text{ учун }\ \exists x_3\in X,\ \ x_3\neq x_0:\ |x_3-x_0|<\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon=\frac{1}{n} \ \text{ учун }\ \exists x_n\in X,\ \ x_n\neq x_0:\ |x_n-x_0|<\frac{1}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

бўлади.

Натижада қаралаётган теореманинг 1) шартини қаноат-лантирувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳосил бўлиб, унинг учун $\forall n\in N$ да $|x_n-x_0|<1/n$

тенгсизлик ўринли бўлади. Кейинги муноса-батдан эса $n \to \infty$ да $x_n \to x_0$ келиб чиқади. ►

Шуни таъкидлаш лозимки, 2-теореманинг шартларини қаноатлантирувчи кетма-кетликлар кўплаб топилади.

2^0. Функция лимити таърифлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, x_0 нуқта X тўплам-нинг лимит нуқтаси бўлсин. x_0 нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad (x_n \in X,\ x_n \neq x_0)$$

кетма-кетликни олиб, функция қийматларидан иборат $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1),\quad f(x_2), ...,\ f(x_n), ...$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз.

3-таъриф. (Гейне). Агар $n \to \infty$ да $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \neq x_0)$ бўладиган ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $n \to \infty$ да $f(x_n) \to b$ бўлса, b га $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги лимити** дейилади ва $x \to x_0$ да $f(x) \to b$ ёки

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

каби белгиланади.

Эслатма. Агар $n \to \infty$ да

$$x_n \to x_0 \quad (x_n \in X,\ x_n \neq x_0) \text{ ва } y_n \to x_0 \quad (y_n \in X,\ y_n \neq x_0)$$

бўладиган турли $\{x_n\}, \{y_n\}$ кетма-кетликлар учун $n \to \infty$ да $f(x_n) \to b_1, f(y_n) \to b_2$ бўлиб, $b_1 \neq b_2$ бўлса $f(x)$ функция $x \to x_0$ да лимитга эга эмас дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

функциянинг $x_0 = 4$ нуқтадаги лимити топилсин.

◄ Қуйидаги $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 4 \quad (x_n \neq 4, \quad n = 1,\ 2,\ ...)$$

кетма-кетликни олайлик. Унда

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$$

бўлиб, $n \to \infty$ да $f(x_n) \to 2$ бўлади. Демак,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2. ►$$

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

функциянинг $x \to 0$ даги лимити мавжуд бўлмаслиги кўрса-тилсин.

◄ Равшанки, $n \to \infty$ да

$$x_n' = \frac{2}{(4n-1)\pi} \to 0, \quad x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to 0$$

бўлади.

Бу кетма-кетликлар учун

$$f(x_n') = \frac{4n-1}{2}\pi = -1, \qquad f(x_n'') = \frac{4n+1}{2}\pi = 1$$

бўлиб, $n \to \infty$ да

$$f(x_n') \to -1, \quad f(x_n'') \to 1$$

бўлади. Демак, берилган функция $x_0 = 0$ нуқтада лимитга эга эмас. ►

4-таъриф. (Коши). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ учун

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқта-даги лимити** дейилади:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Бу таърифни қисқача қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлса, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

3-мисол. $f(x) = C = \text{const} \quad (C \in R)$ бўлсин. Бу функция учун

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = C$$

бўлади.

4-мисол. Ушбу $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги лимити 2 га тенг экани кўрсатилсин.

◄ $\forall \varepsilon > 0$ сонига кўра $\delta = \varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $|x - 1| < \delta \quad (x \neq 1)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x да

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$ ►

5-мисол. Фараз қилайлик, $X = R \setminus \{0\}$ да $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ бўлсин. Бу функция учун

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

бўлади.

◀Маълумки, $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ учун

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан, функцияларнинг жуфтлигини ҳисобга олиб, $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ да

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгсизликлардан эса

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $\forall\varepsilon>0$ ни олиб, $\delta=\min\{\varepsilon;\ 1\}$ дейилса, унда $\forall x,\ |x|<\delta,\ \ x\neq0$ учун

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.\ ▶$$

6-мисол. Ушбу

$$f(x)=a^x,\quad a>0,\quad x\in R,\quad x_0=0$$

функция учун

$$\lim_{x\to0}a^x=1$$

бўлиши исботлансин.

◀ $a>1$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда $f(x)$ функция қатъий ўсувчи бўлади:

$$\forall x_1,\ x_2\in R,\ \ x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2):\ \ a^{x_1}<a^{x_2}.$$

$\forall\varepsilon>0$ сонни олайлик. Маълумки, $n\to\infty$ да

$$a^{\frac{1}{n}}\to1,\quad a^{-\frac{1}{n}}\to1$$

бўлиб, кетма-кетлик лимити таърифига биноан

$$\exists n_1\in N,\ \ \forall n>n_1:\quad a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon,$$

$$\exists n_2\in N,\ \ \forall n>n_2:\quad a^{-\frac{1}{n}}>1-\varepsilon$$

бўлади. Энди $n_0=\max\{n_1,\ n_2\},\quad \delta=\frac{1}{n_0}$ дейилса, унда

$$\forall x,\ |x-0|<\delta\quad\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n_0}$$

бўлганда

$$a^{\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad 1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a^x - 1| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

$0 < a < 1$ бўлганда $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ бўлишини исботлаш ўқувчига ҳавола этилади. ►

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ учун $f(x) > \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити $+\infty$ деб аталади ва

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

каби белгиланади.

Масалан,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (x \neq 0)$$

функция учун

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 = +\infty$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

6-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ топилсаки, $\forall x \in X$, $x > \delta$ учун

$$| f(x) - b | < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ **функциянинг** $x_0 = +\infty$ **даги лимити** дейилади ва

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

каби белгиланади.

7-мисол. Айтайлик, $X = (0, +\infty)$, $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

бўлади.

◄Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ соннни олайлик. Равшанки, $\forall x > 0$ учун

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Демак, $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$ дейилса, унда $\forall x > \delta$ учун

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

бўлади. ►

8-мисол. Фараз қилайлик,

$$f(x)=\frac{x^m}{a^x},\quad a>1,\quad m\in N,\quad X=R$$

бўлсин. Унда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0$$

бўлишини исботлаймиз.

◀ $\varepsilon>0$ сонни олайлик. Маълумки, $n\to\infty$ да

$$\frac{(n+1)^m}{a^n}\to 0$$

бўлади. Унда

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\quad \forall n>n_0:\quad \frac{(n+1)^m}{a^n}<\varepsilon$$

бўлади.

Агар $C=n_0$ дейилса, унда $\forall x>C$ учун

$$\left|\frac{x^m}{a^x}-0\right|=\frac{x^m}{a^x}<\frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}}<\varepsilon$$

бўлади $([x]\geq n_0=C)$. Демак, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0$. ▶

9-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

муносабат исботлансин.

◀ $\forall\varepsilon>0$ сонни оламиз. Маълумки, $n\to\infty$ да

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\to e.$$

Лимит таърифига биноан,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in N,\ \ \forall n>n_0:$$

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon$$

бўлади.

Энди $C=n_0$ десак, унда $\forall x>C$ учун

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<e+\varepsilon$$

бўлиб,

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \blacktriangleright$$

3^0. Функция лимити таърифларининг эквивалентлиги.

3-теорема. Функция лимитининг Коши ҳамда Гейне таърифлари эквивалент таърифлардир.

◀Коши таърифига кўра b сони $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити бўлсин:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$$

Унда

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X,\ |x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0$$

бўлганда

$$|f(x)-b|<\varepsilon \tag{1}$$

бўлади. x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси. Унда 2-теоремага кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик топиладики, $n\to\infty$ да $x_n\to x_0$ $\left(x_n\neq x_0,\ n=1,2,\ldots\right)$ бўлади. Кетма-кетлик лимити таърифига биноан

$$\delta>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall n>n_0: |x_n-x_0|<\delta, \tag{2}$$

бўлади. (1) ва (2) муносабатлардан $\forall n>n_0$ учун

$$\left|f(x_n)-b\right|<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса b сонини Гейне таърифи бўйича $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити эканини билдиради.

Энди b сони Гейне таърифи бўйича $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити бўлсин.

Тескарисини фараз қиламиз, яъни $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити Гейне таърифи бўйича b га тенг бўлса ҳам, Коши таърифи бўйича лимити бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon_0>0$ учун ихтиёрий $\delta>0$ сон олинганда ҳам $0<|x-x_0|<\delta$ ни қаноатлантирувчи бирор x' да

$$|f(x')-b|\geq\varepsilon_0$$

бўлади.

Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги $\{\delta_n\}$ ни олайлик:

$$n\to\infty \text{ да } \delta_n\to 0 \quad \left(\delta_n>0,\ n=1,2,\ldots\right).$$

У ҳолда

$$0<|x_n-x_0|<\delta_n \quad\Rightarrow\quad |f(x_n)-b|\geq\varepsilon_0 \tag{3}$$

бўлади. Аммо $\delta_n\to 0$, да $x_n\to x_0$, демак, Гейне таърифига асосан

$$f(x_n)\to b$$

бўлади. Бу (3) га зиддир. Демак, b сони Коши таърифи бўйича ҳам, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити бўлади. ►

4^0. Функциянинг ўнг ва чап лимитлари. Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган, x_0 нуқта X нинг чап лимит нуқтаси бўлиб,

$$(x_0-\gamma,\ x_0)\subset X \quad (\gamma>0)$$

бўлсин.

7-таъриф. Агар

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0): \ |\ f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлса, b сон $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги чап лимити** дейилади ва

$$b = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

каби белгиланади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган, x_0 нуқта X нинг ўнг лимит нуқтаси бўлиб,

$$(x_0, x_0 + \gamma) \subset X \qquad (\gamma > 0)$$

бўлсин.

8-таъриф. Агар

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta): \ |\ f(x) - b| < \varepsilon$$

бўлса, b сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг лимити дейилади ва

$$b = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

каби белгиланади.

Масалан,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг 0 нуқтадаги ўнг лимити 1, чап лимити -1 бўлади.

Машқлар

1. Ушбу

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

лимитларнинг таърифлари келтирилсин.

2. Ушбу $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ функция $x_0 = 0$ нуқтада лимитга эга эмаслиги исботлансин.

3. Лимит таърифидан фойдаланиб, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$ бўлиши исботлансин.

4. $f(x)$ функция a нуқтада b лимитга эга бўлиши учун унинг шу нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари мавжуд бўлиб,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

тенгликлар ўринли бўлиши зарур ва етарли бўлиши исботлансин.

13-маъруза
Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари. Лимитнинг мавжудлиги

1^0. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари. Чекли лимитга эга бўлган функциялар ҳам яқинлашувчи кетма-кетлик сингари қатор хоссаларга эга.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-хосса. Агар $x \to x_0$ да $f(x)$ функция лимитга эга бўлса, у ягона бўлади.

◀Бу хоссанинг исботи лимит таърифларининг эквивалентлиги ҳамда кетма-кетлик лимитининг ягоналигидан келиб чиқади.▶

2-хосса. Агар

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b, \quad (b - \text{чекли сон})$$

бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0)$ $(\delta > 0)$ атрофи топиладики, бу атрофда $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

◀Айтайлик,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

бўлсин. Функция лимити таърифга биноан

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\ \mathrm{I}\ (U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})\ \text{да}\ \ |f(x)-b|<\varepsilon$$

яъни $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ бўлади. Кейинги тенгсизликлардан $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида чегараланган-лиги келиб чиқади. ►

3-хосса. Агар

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

бўлиб, $b<p$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтанинг шундай $U_\delta(x_0)$ атрофи топиладики, бу атрофда

$$f(x)<p$$

бўлади.

◄Шартга кўра

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Функциянинг лимити таърифига кўра $\varepsilon=p-b>0$ учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, $\forall\ x\in X$, $|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0$ учун

$$|f(x)-b|<\varepsilon\ \Rightarrow\ f(x)<b+\varepsilon=p$$

бўлади. Бу эса $\forall\ x\in U_\delta(x_0)$ да $f(x)<p$ бўлишини билдиради. ►

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X\subset R$ тўплам-да берилган бўлиб, $x_0\in R$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

4-хосса. Агар

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b_1,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=b_2$$

бўлиб, $\forall x\in X$ да $f(x)\le g(x)$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $b_1\le b_2$, яъни

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

бўлади.

◄ Айтайлик,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b_1,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=b_2$$

бўлсин.

Функция лимитининг Гейне таърифига кўра x_0 га интилувчи ихтиёрий

$$x_n\to x_0\qquad (x_n\in X,\quad x_n\neq x_0)$$

кетма-кетлик учун

$$n\to\infty\ \text{да}\quad f(x_n)\to b_1,\quad g(x_n)\to b_2 \tag{1}$$

бўлади.

Равшанки, $\forall\ n\in N$ да

$$f(x_n)\le g(x_n) \tag{2}$$

Яқинлашувчи кетма-кетликнинг хоссаларидан фойдаланиб, (1) ва (2) муносабатлардан $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)\ \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x_n)$, яъни $b_1\le b_2$ бўлишини топамиз. ►

5-хосса. Фараз қилайлик,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=b_2, \quad (b_1, b_2\in R)$$

лимитлар мавжуд бўлсин. У ҳолда

а) $\forall c\in R$ да $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

в) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

г) Агар $b_2\neq 0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

бўлади.

Бу тасдиқларнинг исботи сонлар кетма-кетликлари устида арифметик амаллар бажарилиши ҳақидаги маълумот-лардан келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$$

лимит ҳисоблансин.

◀ Бу лимитни юқоридаги хоссалардан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1)]}{x-1}$$

$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ .\blacktriangleright$$

2-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

лимит ҳисоблансин.

◀ Маълумки, $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Шуни ҳисобга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{2}.\ \blacktriangleright$$

2^0. Функция лимитининг мавжудлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0-\gamma,\ x_0) \subset X$ бўлсин $(\gamma>0)$. Равшанки, $x_0 \in R$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

1-теорема. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи бўлиб, у юқоридан чегараланган бўлса, функция x_0 нуқтада

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

лимитга эга бўлади.

◀ $f(x)$ функция қийматларидан иборат бўлган ушбу

$$F = \{ f(x) \mid x \in X \cap \{x < x_0\} \}$$

тўпламни қараймиз. Теореманинг шартига кўра бу тўплам юқоридан чегараланган бўлади. У ҳолда тўпламнинг аниқ чегарасининг мавжудлиги ҳақидаги теоремага кўра F туплам аниқ юқори чегарага эга. Уни b билан белгилаймиз:

$$\sup F = b.$$

Энди, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ бўлишини исботлаймиз. Аниқ юқори чегара таърифига кўра:

1) $\forall x \in X \cap \{x < x_0\}$ учун $f(x) \le b$;

2) $\exists\, x^* \in X \cap \{x < x_0\}$, $x^* < x_0$: $f(x^*) > b - \varepsilon$, $(\forall\, \varepsilon > 0)$бўлади.

Агар $\delta = x_0 - x^* > 0$ дейилса, унда $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \cap (x_0 - \gamma,\ x_0)$ учун

$$b - \varepsilon < f(x^*) \le f(x) \le b < b + \varepsilon$$

бўлиб,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$$

эканини билдиради. ▶

Худди шунга ўхшаш қуйида келтириладиган теорема исботланади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0, x_0 + \gamma) \subset X$ бўлсин $(\gamma > 0)$. Равшанки, $x_0 \in R$ нуқта X тўплам-нинг лимит нуқтаси бўлади.

2-теорема. Агар $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи бўлиб, у қуйидан чегараланган бўлса, функция x_0 нуқтада

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

лимитга эга бўлади.

Энди функция лимитининг мавжудлиги ҳақидаги уму-мий теоремани келтирамиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}), \quad \forall y \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

лар учун

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ учун x_0 нуқтада **Коши шарти бажарилади** дейилади.

3-мисол. Ушбу $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ функция учун $x_0 = 0$ нуқтада Коши шарти бажарилади.

◄Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ дейилса, у ҳолда

$$\forall x \in X \cap (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \setminus \{0\}), \quad \forall y \in X \cap (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \setminus \{0\})$$

лар учун (яъни $|x| < \delta,\ |y| < \delta$ учун)

$$|f(x) - f(y)| = |x\sin\frac{1}{x} - y\sin\frac{1}{y}| \le |x\sin\frac{1}{x}| + |y\sin\frac{1}{y}| \le$$

$$\le |x| + |y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлади.

3-теорема (Коши). $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли лимит-га эга бўлиши учун бу функция x_0 нуқтада Коши шартининг бажариши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Лимит таърифига биноан:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \text{ учун}$$

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

бўлади. Шунингдек, $\forall y \in X \cap (U_\delta(x_o) \setminus \{x_o\})$ учун ҳам

$$|f(y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

бўлади. (2) ва (3) муносабатлардан

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - b| + |b - f(y)| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик $f(x)$ функция учун (1) шарт бажарилсин. x_0 нуқтага интилувчи иккита

$$x_n \to x_0 \ (x_n \ne x_0,\ n = 1, 2, \ldots),\ x_n \in X,$$

$$y_n \to x_0 \ (y_n \ne x_0,\ n = 1, 2, \ldots),\ y_n \in X,$$

кетма-кетликларни оламиз. Бу кетма-кетликлардан фойдаланиб, ушбу

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ \ldots$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Уни z_n билан белгилаймиз. Равшанки, z_n кетма-кетлик учун

$$z_n \to x_0 \ \left(z_n \neq x_0,\ n=1,2,\ldots \right),\ z_n \in X$$

бўлади. Теорема шартига биноан $\forall \varepsilon > 0$ сонига кўра $\delta > 0$ сонни оламиз. Модомики, $n \to \infty$ да $z_n \to x_0$ экан, унда лимит таърифига кўра:

$$\delta > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall\, n > n_0 : \left| z_n - x_0 \right| < \varepsilon$$

бўлади. Унда $\forall m > n_0$, $\forall n > n_0$ учун

$$\left| f(z_m) - f(z_n) \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан $f(z_n)$ кетма-кетликнинг фундаментал эканлиги келиб чиқади. Демак $f(z_n)$ кетма-кетлик яқинлашувчи:

$$n \to \infty \text{ да } \ f(z_n) \to b.$$

Унда

$$f(x_n) \to b, \quad f(y_n) \to b$$

бўлиб, функция лимитининг Гейне таърифига биноан

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

бўлади. ►

3^0. Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар. Айтайлик, $\alpha(x)$ ҳамда $\beta(x)$ функциялар $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

2-таъриф. Агар

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

бўлса, $\alpha(x)$ функция $x \to x_0$ да **чексиз кичик функция** дейи-лади.

Масалан, $x \to 0$ да $\alpha(x) = \sin x$ функция чексиз кичик функция бўлади.

3-таъриф. Агар

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$$

бўлса, $\beta(x)$ функция $x \to x_0$ да **чексиз катта функция** дейи-лади.

Масалан, $x \to 0$ да $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$ функция чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик ҳамда чексиз катта функциялар чексиз кичик ҳамда чексиз катта миқдорлар каби хоссаларга эга бўлади:

1) Чекли сондаги чексиз кичик функциялар йиғиндиси чексиз кичик функция бўлади;

2) Чегараланган функциянинг чексиз кичик функция билан кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади;

3) Агар $\alpha(x)$ $\left(\alpha(x) \neq 0 \right)$ чексиз кичик функция бўлса, $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

4) Агар $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\dfrac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

Машқлар

1. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

лимит билан аниқланадиган функция топилсин.

2. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

лимит хисоблансин.

14-маъруза
Функцияларни таққослаш

1^0. «O» ва «o» **белгилар, уларнинг хоссалари.** Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай ўзгармас $C>0$ сони ва шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $\forall x\in X \cap (U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ учун

$$|f(x)|\le C|g(x)|$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists C \in R_+,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X\ \mathrm{I}\ (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) : |\ f(x)| \leq C\,|\ g(x)|$$

бўлса, $x \to x_0$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан **чегараланган** дейилади ва $f(x) = O(\ g(x))$ каби белгиланади.

Агар

$$\exists C \in R,\ \exists d \in R_+,\ \forall x,\ |\ x| > d:\ |\ f(x)| \leq C\,|\ g(x)|$$

бўлса, $x \to x_0 = \infty$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан **чегараланган** дейилади ва юқоридагидек $f(x) = O(\ g(x))$ каби белгиланади.

Масалан, $x \to 0$ да $x^2 = O(x)$ бўлади, чунки $x \in (-1,1)$ да $\left|x^2\right| \leq |x|$.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқта атрофида чегараланган бўлса, $x \to x_0$ да $f(x) = O(1)$ каби ёзилади.

«O» нинг хоссалари:

1) Агар

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$

бўлса, $x \to x_0$ да $f(x) = O(\ g(x))$ бўлади.

2) Агар $x \to x_0$ да $f(x) = O(\ g(x))$ ва $g(x) = O(\ h(x))$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f(x) = O(\ h(x))$ бўлади. Демак, $x \to x_0$ да $O(\ O(\ h(x)\ )) = O(\ h(x)\ )$.

3) Агар $x \to x_0$ да $f(x) = O(\ g(x))$ ва $h(x) = O(\ g(x))$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f(x) + h(x) = O(\ g(x))$ бўлади.

4) Агар $x \to x_0$ да $f_1(x) = O(\ g_1(x))$ ва $f_2(x) = O(\ g_2(x))$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(\ g_1(x) \cdot g_2(x))$ бўлади.

2-таъриф. Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,

$$\forall x \in X\ \mathrm{I}\ (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

учун

$$|\ f(x)| \leq \varepsilon\,|\ g(x)|$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X\ \mathrm{I}\ (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) : |\ f(x)| \leq \varepsilon\,|\ g(x)|$$ бўлса,

$x \to x_0$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан **юқори тартибли чексиз кичик функция** дейилади ва $f(x) = o(\ g(x))$ ёки $f = o(g)$ каби белгиланади.

«o» нинг хоссалари:

1) Агар $x \to x_0$ да $f = o(g)$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f = O(g)$ бўлади.

2) Агар $x \to x_0$ да $f = o(g)$, $g = o(h)$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f = o(h)$ бўлади. Демак, $o(\ o(h)\ ) = o(h)$.

3) Агар $x \to x_0$ да $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f_1 + f_2 = o(g)$ бўлади.

4) Агар $x \to x_0$ да $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ бўлса, у ҳолда $x \to x_0$ да $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$ бўлади. Демак, $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$.

2^0. Функцияларнинг эквивалентлиги. Айтайлик, $f(x)$ ва g(x) функциялари $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

3-таъриф. $x \to x_0$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ($x \neq x_0$ да $g(x) \neq 0$) учун

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

бўлса, $x \to x_0$ да $f(x)$ ва $g(x)$ **эквивалент функциялар** дейи-лади ва $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ каби белгиланади.

Масалан, $x \to 0$ да $f(x) = \sin x$ ва $g(x) = x$ функциялар эквивалент функциялар бўлади: $\sin x \sim x \quad (x \to 0)$.

1-теорема. $x \to x_0$ да $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар ($x \neq x_0$ да $g(x) \neq 0$) эквивалент бўлиши учун

$$g(x) - f(x) = o(g(x))$$

тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

◀**Зарурлиги.** $x \to x_0$ да $f(x) \sim g(x)$ бўлсин. Таърифга биноан

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{x \to x_0} \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $g(x) - f(x) = o(g(x))$.

Етарлилиги. $x \to x_0$ да $g(x) - f(x) = o(g(x))$ бўлсин. У ҳолда $x \to x_0$ да

$$1 - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{x \to x_0} \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

яъни $f(x) \sim g(x)$ эканини билдиради. ▶

« $\sim$ » нинг хоссалари:

1) $x \to x_0$ да $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$,

2) Ҳар қандай функция учун $x \to x_0$ да $f(x) \sim f(x)$ бўлади.

3) Агар $x \to x_0$ да $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ бўлса, $x \to x_0$ да $f(x) \sim h(x)$ бўлади.

4) Агар $x \to x_0$ да $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ бўлса, $x \to x_0$ да $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ бўлади.

3^0. Функциянинг асимптотик ёйилмаси. Айтайлик,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = c_1 = const \neq 0$$

бўлсин. Унда $x \to x_0$ да $f(x) \sim c\, g_1(x)$ бўлиб,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + o(\, g_1(x))$$

бўлади. Бу ҳолда $c_1 g_1(x)$ функция $x \to x_0$ да $f(x)$ функциянинг **бош қисми** дейилади.

Фараз қилайлик, $x \to x_0$ да $c_2 g_2(x)$ $(c_2 = const \neq 0)$ функция $f(x) - c_1 g_1(x)$ нинг бош қисми бўлсин. У ҳолда $x \to x_0$ да

$$f(x) - c_1 g_1(x) \sim c_2 g_2(x)$$

бўлиб,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + o(\, g_2(x))$$

бўлади.

Бу жараённи n марта такрорлаб, $x \to x_0$ да $f(x)$ функ-цияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \Lambda + c_n g_n(x) + o(\, g_n(x)) \qquad (1)$$

бунда $c_i \neq 0$ ва

$$g_{i+1}(x) = o(\, g_i(x)) \qquad (i = 1, 2, \mathrm{K}\, , n\,).$$

Одатда, (1) формула $x \to x_0$ да $f(x)$ функциянинг **асимп-тотик ёйилмаси** дейилади.

4^0. Эквивалентликдан фойдаланиб, функцияларнинг лимитини топиш. Энди функцияларнинг эквивалентлигига асосланган ҳолда функцияларнинг лимитини ҳисоблашда фойдаланиладиган теоремани келтирамиз.

2-теорема. Агар $x \to x_0$ да $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ бўлиб, ушбу

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

лимит мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

лимит ҳам мавжуд ва

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

бўлади.

◀ Айтайлик, $x \to x_0$ да $f_1(x) \sim f_2(x)$, $g_1(x) \sim g_2(x)$ бўлсин. Унда равшанки, $x \to x_0$ да

$$f_2(x) = f_1(x) + o(f_1(x)),$$
$$g_2(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

бўлади. Бу муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \ \blacktriangleright$$

Мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

лимит ҳисоблансин.

◀ Равшанки,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

Энди $\sin\frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} + o(x)$ ва $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$ бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right)\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin 2x}{x^2} = \frac{3}{2}. \ \blacktriangleright$$

Машқлар

1. Айтайлик, $n \in N$: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ бўлсин. У ҳолда $x \to +\infty$ да

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n = O\left(x^n\right)$$

бўлиши исботлансин.

2. Агар $x \to x_0$ да

$$f(x) - g(x) = o(f(x))$$

бўлса, $x \to x_0$ да

$$f(x) - g(x) = o(g(x))$$

бўлиши исботлансин.

3. Агар $x \to x_0$ да

$$f_1(x) \sim g_1(x), \quad f_2(x) \sim g_2(x)$$

бўлса, $x \to x_0$ да

$$f_1(x)+f_2(x)\sim g_1(x)+g_2(x),$$
$$f_1(x)-f_2(x)\sim g_1(x)-g_2(x),$$

муносабатлар ўринли бўладими?

4-БОБ
ФУНКЦИЯНИНГ УЗЛУКСИЗЛИГИ ВА ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

15-маъруза
Функциянинг узлуксизлиги тушунчаси

1^0. Функциянинг узлуксизлиги таърифлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

1-таъриф. Агар

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

бўлса, $f(x)$ **функция** x_0 **нуқтада узлуксиз** дейилади.

Демак, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлиги ушбу

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ нинг мавжудлиги,

2) $b = f(x_0)$ бўлиши

шартларининг бажарилиши билан ифодаланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

функция $\forall x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз бўлади, чунки

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

2. Ушбу

$$f(x) = (\text{sign}x)^2 = \begin{cases} 1, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

функцияни қарайлик. Равшанки, $\forall x_0 \in R$ нуқтада $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ бўлади. Демак, қаралаётган функция $\forall x_0 \in R$, $x_0 \neq 0$ нуқтада узлуксиз бўлади. Аммо $f(0) = 0$ бўлганлиги сабабли

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функция $x_0 = 0$ нуқтада узлуксиз бўл-майди.

Функция лимитининг Гейне ва Коши таърифларига биноан функциянинг x_0 нуқтадаги узлуксизлигини қуйидагича таърифлаш мумкин.

2-таъриф. Агар

$$n \to \infty \quad \text{да} \quad x_n \to x_0 \qquad (x_n \in X, \quad n = 1, 2, ...)$$

бўладиган ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$n \to \infty \quad \text{да} \quad f(x_n) \to f(x_0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

3-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки,

$$\forall x \in X \text{ I } U_\delta(x_0)$$

учун

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Одатда, $x - x_0$ айирма **аргумент орттирмаси**, $f(x) - f(x_0)$ эса **функция орттирмаси** дейилиб, улар мос равишда Δx ва Δf каби белгиланади:

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Унда функция узлуксизлигининг 1-таърифидаги (1) муносабат ушбу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \tag{2}$$

кўринишга келади.

Демак, (2) муносабатни функциянинг x_0 нуқтада узлуксизлиги таърифи сифатида қараш мумкин.

Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқта X тўпламнинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин.

4-таъриф. Агар

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

бўлса, $f(x)$ **функция** x_0 **нуқтада ўнгдан (чапдан) узлуксиз** дейилади.

Демак, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнгдан (чапдан) узлук-сиз бўлганда функциянинг ўнг (чап) лимити унинг x_0 нуқта-даги қийматига тенг бўлади:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0) \qquad (f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

Келтирилган таърифлардан, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳам ўнгдан, ҳам чапдан бир вақтда узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада узлуксиз бўлишини топамиз.

Умуман, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши, $\forall\varepsilon>0$ берилганда ҳам унга кўра шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топилиб,

$$\forall x\in U_\delta(x_0)\subset X \quad \Rightarrow \quad f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0))$$

бўлишини билдиради.

5-таъриф. Агар $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда узлуксиз дейилади.

6-таъриф. $X\subset R$ тўпламда узлуксиз бўлган функциялар-дан иборат тўплам узлуксиз функциялар тўплами дейилади ва $C(X)$ каби белгиланади.

Масалан, $f(x)\in C[a,\, b]$ бўлиши, $f(x)$ функциянинг $[a,\, b]$ сегментининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз, яъни $f(x)$ функция (a,b) интервалнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз, a нуқтада ўнгдан, b нуқтада эса чапдан узлуксиз бўлишини билдиради.

2^0. Узлуксиз функциялар устида амаллар. Мисоллар. Узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисба-тининг узлуксиз функция бўлиши ҳақидаги тасдиқларини келтирамиз.

1-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0\in X$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

а) $\forall c\in R$ да $c\cdot f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади;

б) $f(x)+g(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади;

в) $f(x)\cdot g(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади;

г) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◄Теореманинг тасдиқлари узлуксизлик таърифи ҳамда лимитга эга бўлган функциялар устида арифметик амаллар ҳақидаги теоремадан келиб чиқади. Масалан, теореманинг в) тасдиғи қуйидагича исботланади:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0).$$ ►

1-мисол. $f(x)=c,\ c\in R$ бўлсин. Унда $f(x)\in C(R)$ бўлади.

◄ Ҳақиқатан ҳам, $\forall\varepsilon>0$ га кўра $\delta=\varepsilon$ дейилса, у ҳолда

$$\forall x,\ |x-x_0|<\delta:\quad |f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$$

бўлади. ►

2-мисол. $f(x)=x,\ x\in R$ бўлса, у ҳолда $f(x)\in C(R)$ бўлади.

◄ Ҳақиқатан ҳам, $\forall\varepsilon>0$ га кўра $\delta=\varepsilon$ дейилса, у ҳолда

$$\forall x,\ |x-x_0|<\delta:\quad |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

бўлади. ►

3-мисол. $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m;\ m\in N,\ a_0,a_1,...,a_m\in R$ бўлсин. У ҳолда $f(x)\in C(R)$ бўлади.

◀ Бу тасдиқнинг исботи 1- ва 2-мисоллар ҳамда 1-теоремадан келиб чиқади.▶

Шунга ўхшаш ушбу

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n}$$

функцияни, (бунда $m,\ n\in N;\ a_0,\ a_1,...,a_m,\ b_0,b_1,...,b_n\in R$)

$$\{x\in R\setminus b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n=0\}$$

тўпламда узлуксиз бўлиши кўрсатилади.

4-мисол. $f(x)=\sin x$ бўлсин. У ҳолда $f(x)\in C(R)$ бўлади.

◀ $x_0\in R$ нуқтани олиб, $\forall\varepsilon>0$ га кўра $\delta=\varepsilon$ деймиз.

Унда $\forall x,\ |x-x_0|<\delta$:

$$|\sin x-\sin x_0|=2|\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

бўлади. ▶

Худди шунга ўхшаш $f(x)=\cos x$ функция R да, $f(x)=tgx$ ва $f(x)=ctgx$ функцияларнинг эса ўз аниқланиш тўпламлари-да узлуксиз бўлиши кўрсатилади.

5-мисол. $f(x)=a^x,\quad a>0$ бўлсин. У ҳолда $f(x)\in C(R)$ бўлади.

◀ Равшанки,

$$\lim_{x-x_0\to0}(a^{x-x_0}-1)=0.$$

Унда

$$0=\lim_{x-x_0\to0}(a^{x-x_0}-1)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x-x_0\to0}a^{x_0}(a^{x-x_0}-a^{x_0})=0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$$

бўлади. ▶

6-мисол. Айтайлик,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлсин. Бу функция учун

$$f(+0)=1,\qquad f(-0)=-1$$

бўлиб, берилган функция $X=R\setminus\{0\}$ тўпламда узлуксиз бўлади.

3⁰. Функциянинг узилиши. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да $(-\infty\le a<b\le+\infty)$ берилган бўлиб, $x_0\in(a,\ b)$ бўлсин.

Маълумки, $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари

$$f(x_0+0),\qquad f(x_0-0)\tag{3}$$

мавжуд бўлиб,

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0) \qquad (4)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлар эди.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлмаса, унда x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **узилиш нуқтаси** дейилади.

7-таъриф. Агар (3) лимитлар мавжуд ва чекли бўлиб, (4) тенгликларнинг бирортаси ўринли бўлмаса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **биринчи тур узилиш нуқтаси** дейилади.

Бунда

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

айирма **функциянинг** x_0 **нуқтадаги сакраши** дейилади.

Масалан, $f(x)=[x]$ функция $x=p$ $(p\in Z)$ нуқтада биринчи тур узилишга эга, чунки

$$f(p+0)=p, \quad f(p_0-0)=p-1$$

бўлиб,

$$f(p+0)\neq f(p_0-0)$$

бўлади.

Агар ҳеч бўлмаганда (3) лимитларнинг бирортаси мавжуд бўлмаса ёки чексиз бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функция-нинг **иккинчи тур узилиш нуқтаси** дейилади.

Масалан, ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция $x=0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлади, чунки бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари мавжуд эмас.

4⁰. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги. Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда, $u=F(y)$ функция эса Y_f тўпламда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $u=F(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

2-теорема. Агар $y=f(x)$ функция $x_0\in X$ нуқтада, $u=F(y)$ функция эса $y_0\in Y_f$ нуқтада $(y_0=f(x_0))$ узлуксиз бўлса, $F(f(x))$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◄ $u=F(y)$ функция $y_0\in Y_f$ нуқтада $(y_0=f(x_0))$ узлуксиз бўлгани учун

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma>0,\ \forall y,\ |y-y_0|<\sigma:\ |F(y)-F(y_0)|<\varepsilon \qquad (5)$$

яъни, $|F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$ бўлади.

Шартга кўра $y=f(x)$ функция $x_0\in X$ нуқтада узлуксиз. У ҳолда юқоридаги $\sigma>0$ га кўра

$$\exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta:\ |f(x)-f(x_0)|<\sigma$$

яъни,

$$|y-y_0|<\sigma \qquad (6)$$

бўлади.

(5) ва (6) муносабатлардан

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta:\ |F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $F(f(x))$ функция x_0 нуқтада узлуксиз. ►

5^0. Монотон функция узилиш нуқтасининг характери.

3-теорема. $[a,b]\subset R$ да монотон бўлган $f(x)$ функция шу $[a,b]$нинг исталган нуқтасида ёки узлуксиз бўлади, ёки бирин-чи тур узилишга эга бўлади.

◄ $f(x)$ функция $[a,b]$ да ўсувчи бўлсин. Айтайлик,

$$x_0\in[a,b],\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset[a,b]\quad(\delta>0)$$

бўлсин. Монотон функциянинг лимити ҳакидаги теоремага кўра

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)\le f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)\ge f(x_0)$$

бўлади. Агар

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз, агар

$$f(x_0-0)<f(x_0+0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада биринчи тур узилишига эга бўлади. Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функция $[a,b]$ да камаювчи бўлганда ҳам тасдиқ исботланади. ►

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\sin x\text{ , агар } x-\text{рационал сон бўлса,}\\ \ 0\ \text{ , агар } x-\text{иррационал сон бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $x_k=k\pi\ (k\in Z)$ нуқталарида узлуксиз бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$D(x)=\begin{cases}1\text{ , агар } x-\text{рационал сон бўлса,}\\ 0\text{ , агар } x-\text{иррационал сон бўлса}\end{cases}$$

Дирихле функцияси R нинг ҳар бир нуқтасида узилишга эга эканлиги исботлансин.

3. Ушбу

$$f(x)=[x]\cdot\sin\pi x\quad(x\in R)$$

функция учун $f(x)\in C(R)$ бўлиши кўрсатилсин.

16-маъруза
Узлуксиз функцияларнинг хоссалари

1^0. Нуқтада узлуксиз бўлган функциянинг хоссалари (локал хоссалари). Мисоллар. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ бўлсин.

1. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $\delta > 0$ ва $M > 0$ сонлари топиладики, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ да $|f(x)| < M$ бўлади, яъни $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида чегараланган бўлади.

2. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ да $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$ бўлади, яъни $f(x)$ функ-циянинг $U_\delta(x_0)$ даги ишораси $f(x_0)$ нинг ишораси каби бўлади.

Бу тасдиқларнинг исботи лимитга эга бўлган функ-циянинг хоссаларидан келиб чиқади.

3. Айтайлик, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \qquad (b\in R) \tag{1}$$

га эга бўлиб, $g(y)$ функция Y тўпламда берилган $\{f(x)|x\in X\}\cup\{b\}\subset Y$ ва $y=b$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(b),$$

яъни

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \tag{2}$$

бўлади.

◀ $n\to\infty$ да $x_n \to x_0$ $(x_n\in X,\ x_n\neq x_0,\ n=1,2,...)$ бўладиган ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма- кетликни олайлик. Унда (1) муносабатга кўра

$$n\to\infty \text{ да } \ f(x_n)\to b$$

бўлади. Шартга кўра $g(f(x))$ функция b нуқтада узлуксиз. Демак,

$$n\to\infty \text{ да } \ g(f(x_n))\to g(b)$$

бўлади. Кейинги муносабатдан (2) тенгликниг ўринли бўлиши келиб чиқади. ▶

1-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a>0,\quad a\neq 1) \tag{3}$$

муносабат исботлансин.

◀ (2) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e.$$

Хусусан, $a=e$ бўлганда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ бўлади. ▶

2-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a>0)$$

муносабат исботлансин.

◀ Келтирилган тенгликни исботлаш учун $a^x-1=t$ деб оламиз. Унда $x\to 0$ да $t\to 0$ бўлади. Шуни ҳамда (3) муносабатни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \ ▶$$

3-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad (\alpha\in R)$$

муносабат исботлансин

◀ Равшанки,

$$(1+x)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(1+x)}$$

ва $x\to 0$ да $\ln(1+x)\to 0$ бўлади. Унда

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\frac{(e^{\alpha\ln(1+x)}-1)\cdot\ln(1+x)\cdot\alpha}{\alpha\cdot\ln(1+x)\qquad x}$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\alpha=\alpha$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

2⁰. Сегментда узлуксиз бўлган функцияларнинг хосса-лари (глобал хоссалар). Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,\, b]$ сегментда берилган бўлсин.

Маълумки, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да узлуксиз, a нуқтада ўнгдан, b нуқтада чапдан узлуксиз бўлса, $f(x)$ функция $[a,\, b]$ сегментда узлуксиз бўлади.

Энди сегментда узлуксиз бўлган функцияларнинг хосса-ларини келтирамиз. Улар теоремалар орқали ифодаланади.

1-теорема. (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $f(x)$ функция $[a,\, b]$ сегментда узлуксиз, яъни $f(x)\in C[a,\, b]$ бўлса, функция $[a,\, b]$ да чегараланган бўлади.

◀ Маълумки, $f(x)$ функциянинг $[a,\, b]$ да чегараланган-лиги қуйидагини

$$\exists M\in(0,+\infty),\quad \forall x\in[a,\, b]:\ \ |f(x)|\le M$$

англатади.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)\in C[a,\, b]$ бўлса ҳам функция $[a,\, b]$ да чегараланмаган бўлсин. У ҳолда

$$\forall n\in N,\ \exists x_n\in[a,\, b]:\ |f(x_n)|>n\ \ (n=1,2,...) \tag{4}$$

бўлади. Айни пайтда, ҳосил бўладиган $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n\in[a,\, b]$ $(n=1,2,...)$ бўлганлиги сабабли у чегараланган бўлади. Унда Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра бу $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин:

$$k\to\infty \text{ да } x_{n_k}\to x_0 \qquad (x_0\in[a,\, b]).$$

Шартга кўра $f(x)$ функция $[a,\, b]$ да узлуксиз. Бинобарин,

$$k\to\infty \text{ да } f(x_{n_k})\to f(x_0) \tag{5}$$

бўлади. Бу (5) муносабат юқорида қилинган фаразга зиддир (чунки, фараз бўйича

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=+\infty$$

бўлиши лозим эди). Демак, $f(x)$ функция $[a,\, b]$ да чегаралан-ган бўлади. ▶

Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўл-син.

Таъриф. Агар X тўпламда шундай $x_0 \in X$ нуқта топил-саки, $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** x_0 **нуқтада энг катта** (**энг кичик**) **қийматга эришади** дейилади ва

$$f(x_0) = \max_X f(x) \qquad (f(x_0) = \min_X f(x))$$

каби белгиланади.

2-теорема. (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). Агар $f(x) \in C[a,\, b]$ бўлса, бу функция $[a,\, b]$ сегментда энг катта ҳамда энг кичик қийматларга эришади, яъни

$$\exists c_1 \in [a,\, b], \quad \forall x \in [a,\, b]: \qquad f(x) \le f(c_1),$$
$$\exists c_2 \in [a,\, b], \quad \forall x \in [a,\, b]: \qquad f(x) \ge f(c_2)$$

бўлади.

◄ Айтайлик, $f(x) \in C[a,\, b]$ бўлсин. Вейерштрасснинг 1-теоремасига кўра $f(x)$ функция $[a,\, b]$ сегментда чегараланган, яъни ушбу

$$\{f(x) \mid x \in [a,\, b]\}$$

тўплам чегараланган бўлади. Унда тўпламнинг аниқ чегараси ҳақидаги теоремага кўра

$$\sup_{x \in [a,\, b]} f(x) = M \qquad (M \in R)$$

мавжуд бўлади.

Тўпламнинг аниқ юқори чегараси таърифига мувофиқ:

$$\forall x \in [a,\, b]: \quad f(x) \le M,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x(\varepsilon) \in [a,\, b]: \quad f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon$$

бўлади. Кейинги тенгсизликда

$$\varepsilon = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

деб олинадиган бўлса,

$$x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in [a,\, b]$$

кетма-кетлик ҳосил бўлиб, унинг учун

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

тенгсизлик бажарилади. Демак, $\forall n \in N$ да

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

бўлади. Бу муносабатдан

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M \tag{6}$$

бўлиши келиб чиқади.

Юқорида ҳосил қилинган $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегаралан-ган. Ундан яқинлашувчи қисмий кетма-кетликни ажратиш мумкин. Уни $\{x_{n_k}\}$ дейлик:

$$k \to \infty \text{ да } x_{n_k} \to c_1 \qquad (c_1 \in [a,\, b]).$$

Берилган $f(x)$ функциянинг узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$k \to \infty \text{ да } f(x_{n_k}) \to f(c_1).$$

Равшанки, $\{f(x_{n_k})\}$ кетма-кетлик $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик-нинг қисмий кетма-кетлиги.

Демак (6) муносабатга кўра

$$k \to \infty \text{ да } f(x_{n_k}) \to M$$

бўлиб, $f(c_1) = M$ бўлиши келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш, $f(x)$ функциянинг энг кичик қийматга эришиши кўрсати-лади. ►

3-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,\, b]$ сегментда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x) \in C[a,\, b]$;

2) сегментнинг четки нуқталари a ва b ларда ҳар хил ишорали қийматларга эга, яъни

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ ёки } f(a) > 0 > f(b)$$

бўлсин.

У ҳолда $(a,\, b)$ да шундай x_0 нуқта $(a < x_0 < b)$ топиладики, $f(x_0) = 0$ бўлади.

◄ Айтайлик, $f(x) \in C[a,\, b]$ бўлиб, $f(a) < 0 < f(b)$ бўлсин. $[a,\, b]$ сегментнинг $f(x)$ функцияга манфий қийматлар берадиган нуқталаридан иборат тўпламини E дейлик:

$$E = \{\, x \in [a,\, b] \mid f(x) < 0\,\}.$$

Равшанки, $a \in E$, $E \subset [a,\, b]$. Демак, E тўплам чегараланган ва $E \neq \varnothing$.

Тўпламнинг аниқ юқори чегараси ҳақидаги теоремага кўра

$$\sup E = x_0 \qquad (x_0 \in (a,\, b))$$

мавжуд бўлади.

Аниқ юқори чегара таърифига биноан,

$$\forall n \in N,\ \ \exists x_n \in E: \quad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0$$

бўлади. Демак,

$$f(x_n) < 0. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$f(x)$ функциянинг $[a,\, b]$ да узлуксиз бўлганлигини эътиборга олиб топамиз:

$$n \to \infty \text{ да } x_n \to x_0 \text{ бўлиб, } f(x_n) \to f(x_0).$$

Бир томондан

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \le 0,$$

иккинчи томондан

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

бўлишидан

$$f(x_0) \le 0 \tag{7}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, $x > x_0$ да $x \notin E$. Бинобарин, $f(x) \ge 0$. Шунинг учун

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \ge 0$$

бўлиб,

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \ge 0 \tag{8}$$

бўлади. (7) ва (8) муносабатлардан $f(x_0) = 0$ бўлиши келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш, $f(x) \in C[a, b]$ ва $f(a) > 0 > f(b)$ бўлган ҳолда теорема исботланади. ►

4-теорема. Агар $f(x) \in C[a, b]$ бўлса, у ҳолда чегаралари $f(a)$ ва $f(b)$ бўлган сегментга тегишли ихтиёрий l сони олин-ганда $[a, b]$ да шундай x_0 нуқта топиладики, $f(x_0) = l$ бўлади.

◄ $f(a) < f(b)$ деб, $f(a) \le l \le f(b)$ни олайлик. Равшанки, $f(a) = l$ ёки $f(b) = l$ бўлган ҳолда теорема исботланган ҳисоб-ланади.

Энди $f(a) < l < f(b)$ бўлсин. Ушбу

$$g(x) = f(x) - l \qquad (x \in [a, b])$$

функцияни олайлик. Бу функция учун:

1) $g(x) \in C[a, b]$;
2) $g(a) < 0 < g(b)$

бўлади. Унда 3-теоремага кўра шундай $x_0 \in (a, b)$ топиладики,

$$g(x_0) = 0,$$

яъни,

$$f(x_0) = l$$

бўлади. ►

Ушбу маърузанинг пировардида берилган функцияга тескари бўлган функциянинг мавжудлиги ҳақидаги тоерема-ни исботсиз келтирамиз.

5-теорема (тескари функциянинг мавжудлиги). Агар $f(x)$ функция $X \subset R$ орлиқда узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлса, у ҳолда $Y_f = \{ f(x) | x \in X \}$ оралиқда тескари $f^{-1}(y)$ функция мавжуд бўлиб, у узлуксиз қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлади.

Машқлар

1. Ушбу

$$x \cdot e^x = 1$$

тенглама $(0, 1)$ да ҳеч бўлмаганда битта илдизга эга эканлиги исботлансин.

2. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & \text{агар } -1\le x<0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,} \\ x^2-1, & \text{агар } 0<x\le 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $[-1, 1]$ да энг катта ва энг кичик қийматларига эришадими?

3. Ушбу

$$f(x)=x^3-x \qquad (x\in R)$$

функция қийматлари тўплами R бўлиши исботлансин.

4. Айтайлик, $f(x)$ функция текисликдаги бирор айланада берилган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда айланада диаметраль- қарама-қарши жойлашган a ва b нуқталар топилиб, $f(a)=f(b)$ бўлиши исботлансин.

17-маъруза
Функциянинг текис узлуксизлиги. Кантор теоремаси

1^0. Функциянинг текис узлуксизлиги тушунчаси. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки,

$$|x' - x''| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x',\ x'' \in X$ учун

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x',\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta :$$
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда **текис узлуксиз** дейилади.

Келтирилган таърифдан:

1) $\delta > 0$ соннинг фақат $\varepsilon > 0$ га боғлиқлиги,

2) $f(x)$ функция X да текис узлуксиз бўлса, у шу X тўпламда узлуксиз бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. $f(x) = x,\ \ x \in R$ бўлсин. Бу функция R да текис узлуксиз бўлади.

◀ Агар $\forall \varepsilon > 0$ га кўра $\delta = \varepsilon$ деб олинса, унда $\forall x',\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta$ да

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$

бўлади. ▶

2-мисол. $f(x) = \sin x,\ \ x \in R$ бўлсин. Бу функция R да текис узлуксиз бўлади.

◀ Агар $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, $\delta = \varepsilon$ дейилса, унда $\forall x',\ x'' \in R,\ |x' - x''| < \delta$ да

$$\left|\sin x' - \sin x''\right| = 2\left|\cos \frac{x' + x''}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x' - x''}{2}\right| \le \left|x' - x''\right| < \delta = \varepsilon$$

бўлади. ▶

3-мисол. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \ x \in X = (0,\ 1]$ бўлсин. Бу функция $X = (0,\ 1]$ да текис узлуксиз бўлмайди.

◀$\forall \varepsilon > 0$ сонни, масалан, $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ деб олиб, x' ва x'' нуқталар сифатида

$$x' = \frac{1}{n},\ \ x'' = \frac{1}{n+1} \quad (n \in N)$$

деб олинса, у ҳолда $|x' - x''|$ айирма қуйидагича

$$|x' - x''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

бўлади. Бундан $(|x' - x''| < \delta)$ δ ни ҳар қанча кичик қилиб олиш мумкин бўлса ҳам

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x)=\frac{1}{x}$ функция $X=(0,\,1]$ да текис узлуксиз эмас. ►

2^0. 1-теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(x)\in C[a,\,b]$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a,\,b]$ да текис узлуксиз бўлади.

◄ Айтайлик, $f(x)\in C[a,\,b]$ бўлса ҳам функция $[a,\,b]$ да текис узлуксиз бўлмасин. Унда бирор $\varepsilon>0$ ва ихтиёрий $\delta>0$ учун $[a,\,b]$ да шундай x' ва x'' нуқталар топиладики,

$$|x'-x''|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$$

бўлади. $n\to+\infty$ да $\delta_n\to 0$ $(\delta_n>0,\; n=1,\,2,\,...)$ бўладиган ихтиёрий $\{\delta_n\}$ кетма-кетликни оламиз. Унда

$$|x_1'-x_1''|<\delta_1\Rightarrow|f(x_1')-f(x_1'')|\geq\varepsilon,$$
$$|x_2'-x_2''|<\delta_2\Rightarrow|f(x_2')-f(x_2'')|\geq\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_n'-x_n''|<\delta_n\Rightarrow|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

бўлади.

Равшанки, $\{x_n'\}$ учун $x_n'\in[a,\,b]$ $(n=1,\,2,\,3,\,...)$ бўлиб, ундан

$$k\to+\infty \text{ да } x_{n_k}'\to x_0 \qquad (x_0\in[a,\,b])$$

бўладиган қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин. Айни пайтда, x_{n_k}'' учун ҳам

$$k\to+\infty \text{ да } x_{n_k}''\to x_0$$

бўлади. $f(x)\in C[a,\,b]$ бўлишидан

$k\to+\infty$ да $f(x_{n_k}')\to f(x_0)$, $\quad f(x_{n_k}'')\to f(x_0)$ бўлиб, улардан $k\to+\infty$ да $f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')\to 0$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\forall n\in N$ учун

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$$

деб олинган фаразга зид. Демак $f(x)$ функция $[a,\,b]$ да текис узлуксиз. ►

2-таъриф. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлсин. Ушбу

$$\sup_{x\in X} f(x)-\inf_{x\in X} f(x)$$

айирма $f(x)$ **функциянинг X тўпламдаги тебраниши** дейила-ди ва у ω орқали белгиланади:

$$\omega=\omega(f;\,X)=\sup_{x\in X} f(x)-\inf_{x\in X} f(x).$$

$f(x)$ функциянинг X тўпламдаги тебраниши қуйидагича

$$\omega=\sup_{x',\,x''\in X}\{|f(x')-f(x'')|\}$$

ҳам таърифланиши мумкин.

Натижа. Агар $f(x)\in C[a,\ b]$ бўлса, у ҳолда $\forall\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, $[a,b]$ сегмент узунликлари δ дан кичик бўлакларга ажратилганда ҳар бир бўлакдаги функция-нинг тебраниши ε дан кичик бўлади.

◄ Шартга кўра $f(x)\in C[a,\ b]$. Демак, Кантор теоремасига кўра у $[a,\ b]$ да текис узлуксиз. Унда таърифга биноан

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x',\ x''\in[a,\ b],\ \ |x'-x''|<\delta:\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

бўлади.

Энди $[a,\ b]$ сегментни узунлиги δ дан кичик бўлган

$$[x_k,\ x_{k+1}]\quad (x_0<x_1<x_2<...<x_n,\ x_0=a,\ x_n=b)$$

бўлакларга ажаратамиз. Унда

$$\forall x',\ x''\in[x_k,\ x_{k+1}],\ \ |x'-x''|<\delta:\ \ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\omega=\sup_{x',\ x''\in[x_k,\ x_{k+1}]}\{|f(x')-f(x'')|\}\le\varepsilon$$

бўлади.►

3^0. Функциянинг узлуксизлик модули. $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, у шу тўпламда узлуксиз бўлсин. Энди

$$\forall\delta>0,\ \forall x',\ x''\in X,\ \ |x'-x''|<\delta$$

учун

$$|f(x')-f(x'')| \tag{1}$$

айирмани қараймиз.

3-таъриф. (1) айирманинг аниқ юқори чегараси

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|\}$$

$f(x)$ **функциянинг** $X\subset R$ **тўпламдаги узлуксизлик модули** дейилади ва $\omega(\delta)$ каби белгиланади:

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|\le\delta}\{|f(x')-f(x'')|\}.$$

Демак, $f(x)$ функциянинг X тўпламдаги узлуксизлик модули δ нинг манфий бўлмаган функцияси бўлади.

Энди узлуксизлик модулининг баъзи хоссаларини келтирамиз:

1) Функциянинг узлуксизлик модули δ нинг ўсувчи функцияси бўлади.

◄ Айтайлик, $\delta_1>0,\ \ \delta_2>0$ ва $\delta_1>\delta_2$ бўлсин. У ҳолда

$$\{x',\ x''\in X:\ |x'-x''|\le\delta_1\},\qquad \{x',\ x''\in X:\ |x'-x''|\le\delta_2\}$$

тўпламлар учун

$$\{x',\ x''\in X:\ |x'-x''|\le\delta_2\}\subset\{x',\ x''\in X:\ |x'-x''|\le\delta_1\}$$

бўлиб, ундан

$$\omega(\delta_2)\le\omega(\delta_1)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\delta_1>\delta_2\ \ \Rightarrow\ \ \omega(\delta_1)\ge\omega(\delta_2)$.►

Узлуксизлик модулининг кейинги хоссасини исботсиз келтирамиз.

2) Функциянинг узлуксизлик модули учун ушбу

$$\omega(\lambda\delta) \le (1+\lambda)\cdot\omega(\delta)$$

муносабат ўринли бўлади, бунда $\lambda -$мусбат сон.

4-мисол. Ушбу $f(x) = ax + b \ \ (a,b \in R)$ функциянинг $X = [\alpha,\ \beta]$ даги узлуксизлик модули топилсин.

◄ Таърифга биноан,

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} \left|(ax'+b)-(ax''+b)\right| = \sup_{|x'-x''|\le\delta} \left|a(x'-x'')\right| = |a|\cdot\delta$$

бўлади. Демак, $\omega(\delta) = |a|\cdot\delta.$ ►

2-теорема. $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta) = 0$$

тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлсин:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon > 0,\ \forall x',\ x'' \in X,\ \ |x'-x''| < \delta_\varepsilon :\ |f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

У ҳолда $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий δ учун

$$\sup_{|x'-x''|\le\delta}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\} \le \sup_{|x'-x''|\le\delta_\varepsilon}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\} \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

бўлиб, унда $\omega(\delta) < \varepsilon$, яъни

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta) = 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta) = 0$$

муносабат ўринли бўлсин. Демак, $\delta \to +0$ да

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\} \to 0.$$

У ҳолда

$$\forall x',\ x'' \in X,\ \ |x'-x''| \le \delta < \delta_\varepsilon :\ \left|f(x')-f(x'')\right| < \varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлади. ►

Функциянинг узлуксизлик модули функцияларни синфларга ажратиш имконини беради. Масалан, узлуксиз-лик модули ушбу

$$\omega(\delta) \le M\cdot\delta^\alpha$$

(бунда $M = const,\quad 0 < \alpha \le 1$) тенгсизликни қаноатлантирувчи функциялар тўплами α тартибли Липшиц синфи дейилади ва $Lip_M\alpha$ каби белгиланади.

Машқлар

1. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]\subset R$ да текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)$ функция ҳам $[a, b]\subset R$ да текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

2. $f(x)=x$ функциянинг $[0, +\infty)$ да текис узлуксиз эмас-лиги кўрсатилсин.

3. Ушбу

$$f(x)=x^2+1$$

функциянинг $X=[0, 1]$ сегментдаги узлуксизлик модули топилсин.

4. Агар $f(x)$ функция (0,1) да текис узлуксиз бўлса, ушбу

$$\lim_{x\to+0} f(x)$$

лимит мавжуд бўладими?

18-маъруза
Компакт тўплам. Компакт тўпламда узлуксиз функциялар

1^0. Компакт тўплам тушунчаси. Аввало очиқ ва ёпиқ тўпламлар тушунчаларини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $X\subset R$ тўплам берилган бўлиб, $x_0\in X$ бўлсин.

1-таъриф. Агар x_0 нуқтанинг шундай

$$U_\delta(x_0)=\{x\in R:\quad x_0-\delta<x<x_0+\delta\}\quad (\delta>0)$$

атрофи мавжуд бўлсаки, унинг учун $U_\delta(x_0)\subset X$ бўлса, x_0 нуқта X **тўпламнинг ички нуқтаси** дейилади.

Масалан, $x_0=\dfrac{1}{2}$ нуқта $X=[0, 1]$ тўпламнинг ички нуқтаси бўлади. Чунки, бу нуқтанинг $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ атрофи учун $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\subset[0, 1]$ бўлади. $x=0$, $x=1$ нуқталар шу тўпламнинг ички нуқталари бўлмайди, чунки, масалан, $x=0$ нуқтанинг ҳеч қандай $(-\delta;\ \delta)$ атрофи $X=[0, 1]$ сегментга тегишли бўлмайди. (Бу атрофнинг $(-\delta, 0)$ қисми $[0, 1]$ сегментнинг ташқарисида жойлашган).

2-таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир нуқтаси унинг ички нуқтаси бўлса, X **очиқ тўплам** дейилади.

Масалан, $X=(0, 1)$, $X=(0, 1)\cup(2, 4)$ тўпламлар очиқ тўплам-лар бўлади.

3-таъриф. Агар X тўпламнинг барча лимит нуқталари шу тўпламга тегишли бўлса, X **ёпиқ тўплам** дейилади.

Масалан, $X=[0,\,1]$ сегмент ёпиқ тўпламдир.

Эслатма. Лимит нуқтага эга бўлмаган тўплам таърифга кўра ёпиқ тўплам деб ҳисобланади. Масалан, $E=\{1,2,3,4,5\}$ тўплам ёпиқ тўплам бўлади.

4-таъриф. Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетликдан шу тўпламнинг нуқтасига яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, X **компакт тўплам** дейилади.

Мисоллар. 1. $X=[a,\,b]$ сегментнинг компакт тўплам бўлиши Больцано- Вейерштрасс теоремасидан келиб чиқади.

2. $X=[a_1,\,b_1]\cup[a_2,\,b_2]\cup\ldots\cup[a_n,\,b_n]$ тўплам компакт тўплам бўлади.

3. $X=(0,\,1)$ интервал компакт тўплам бўлмайди, чунки

$$x_n=\frac{1}{n+1}\in(0,\,1)\ \text{бўлиб},\quad n\to\infty\ \text{ да }\ x_n\to 0\notin X.$$

Теорема. X компакт тўплам бўлиши учун унинг чегара-ланган ва ёпиқ тўплам бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** X компакт тўплам бўлсин. Унинг чегара-ланганлигини кўрсатамиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $X-$ компакт тўплам бўлса ҳам у чегараланмаган бўлсин. У ҳолда

$$\exists x_n,\ x_n\in X,\ n=1,2,3,\ldots:\ |x_n|>n$$

бўлади. Равшанки бу $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиб бўлмайди. Бу эса X нинг компакт тўпламлигига зид. Демак, $X-$ чегараланган тўплам.

Энди X нинг ёпиқ тўплам бўлишини кўрсатамиз. Фараз қилайлик x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда

$$\exists x_n,\ x_n\in X,\ n=1,2,3,\ldots:\ n\to+\infty\ \text{ да }\ x_n\to x_0$$

бўлади. Бу $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар қандай $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлиги учун

$$\lim_{k\to+\infty}x_{n_k}=x_0$$

бўлади. X компакт тўплам бўлганлиги сабабли $x_0\in X$ бўлади. Демак, X ёпиқ тўплам.

Етарлилиги. $X-$чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлсин. Больцано-Вейерштрасс теоремасига кўра ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетликдан x_0 га яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин: $k\to+\infty$ да $x_{n_k}\to x_0$.

Равшанки, x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўла-ди. Айни пайтда, X ёпиқ тўплам бўлгани учун $x_0\in X$ бўлади. Демак $X-$компакт тўплам. ►

Энди компакт тўпламнинг муҳим хоссаларини келти-рамиз.

Фараз қилайлик, X тўплам ва ҳар бир элементи интервалдан иборат $S=\{\sigma\}$ интерваллар системаси берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир x нуқтаси учун S системада шу нуқтани ўз ичига олувчи σ интервал топилса, у ҳолда $S=\{\sigma\}$ **система** X **тўпламни қоплайди** дейилади.

Масалан, $X=(0,1)$ бўлсин. Қуйидаги

$$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\ldots,\left(\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n}\right),\ldots$$

интерваллар ситемасини олайлик.

Равшанки, $X=(0,1)$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси бу интерваллар системасининг камида битта интервалига тегиш-ли бўлади. Демак,

$$S=\left\{\left(\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n}\right);\quad n=1,2,\ldots\right\}$$

система $X=(0,1)$ тўпламни қоплайди.

Энди битта тасдиқни исботсиз келтирамиз.

Гейне-Борель леммаси. Агар чегараланган ёпиқ X тўплам чексиз интерваллар системаси $\{\sigma\}$ билан қопланган бўлса, у ҳолда $\{\sigma\}$ системадан X тўпламни қопловчи чекли $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}$ системани ажратиш мумкин.

2^0. Компакт тўпламда берилган узлуксиз функциялар-нинг хоссалари. Фараз қилайлик $f(x)$ функция X компакт тўпламда $(X\subset R)$ берилган бўлсин. Бу тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлса, у қатор хоссаларга эга бўлади:

1. Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, у чегараланган бўлади.

2. Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда ўзининг аниқ чегараларига эришади. Яъни шундай $x_1\in X$, $x_2\in X$ нуқталар топиладики,

$$f(x_1)=\sup_{x\in X}f(x),\qquad f(x_2)=\inf_{x\in X}f(x)$$

бўлади.

3. Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, функция X да текис узлуксиз бўлади.

4. Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, шу X тўпламнинг акси $\{f(x)\}$ компакт тўплам бўлади.

Бу хоссаларнинг бирини, масалан, 1-хоссанинг исботини келтирамиз.

◄ Айтайлик, $X\subset R$ компакт тўплам бўлиб, бу тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлсин. Унда $\forall x\in X$ нуқтанинг шундай кичик атрофи $U(x)$ топиладики, бу атрофда $f(x)$ функция чегараланган бўлади. Бундай нуқта атрофлари $U(x)$ интерваллардан S системани ҳосил қиламиз:

$$S = \{U(x):\ x \in X\}.$$

Равшанки, S система X тўпламни қоплайди. X компакт тўплам бўлганлиги сабабли, Гейне-Борель леммасига асосан бу системадан X тўпламни қопловчи чекли

$$S^* = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$$

системани ажратиш мумкин.

Ҳар бир U_k $(k = 1, 2, ..., n)$ атрофда $f(x)$ функция чегара-ланган, яъни шундай m_k, M_k $(m_k = const,\ M_k = const,\ k = 1, 2, ..., n)$ сонлар топиладики, $\forall x \in U_k$ да

$$m_k < f(x) < M_k \quad (k = 1, 2, 3, ..., n)$$

бўлади.

Агар $m_1, m_2, ..., m_n$ сонларининг энг кичигини m, $M_1, M_2, ..., M_n$ сонларнинг энг каттасини M десак, у ҳолда $\forall x \in X$ да $m < f(x) < M$ бўлади.

Демак, $f(x)$ функция X тўпламда чегараланган. ►

Машқлар

1. Чекли сондаги очиқ тўпламлар йиғиндиси очиқ тўплам бўлиши исботлансин.

2. Агар $f(x)$ функция X компакт тўпламда узлуксиз бўлса, функция X да текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

5-БОБ
ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

19-маъруза
Функциянинг ҳосиласи

1^0. Функция ҳосиласининг таърифи. Мисоллар. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,b)\subset R$ да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$, $x_0+\Delta x\in(a,b)$ бўлсин.

Маълумки ушбу

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади.

1-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ҳосиласи** дейилади ва $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, ёки $f'(x_0)$, ёки $(f(x))'_{x_0}$ каби белгиланади. Демак,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Агар $x_0+\Delta x=x$ дейилса, унда $\Delta x=x-x_0$ ва $\Delta x\to 0$ да $x\to x_0$ бўлиб, (1) муносабат қуйидаги

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

кўринишга келади.

1-мисол. $f(x)=x$, $x_0\in R$ бўлсин. Бу функция учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

бўлади. Демак, $f'(x)=(x)'=1.$

2-мисол. $f(x)=|x|$, $x\in R$ бўлсин.

Агар $x>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)=x$ бўлиб, $f'(x)=1$ бўлади.

Агар $x<0$ бўлса, у ҳолда $f(x)=-x$ бўлиб, $f'(x)=-1$ бўлади.

Агар $x_0=0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$ бўлиб, $x\to 0$ да бу нисбатларнинг лимити мавжуд бўлмайди. Демак, берилган функция $x_0=0$ нуқтада ҳосилага эга бўлмайди.

3-мисол. $f(x)=x|x|$, $x\in R$, $x_0\in R$ бўлсин.

а) $x_0>0$, $x>0$, $x\neq x_0$ учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x|x|-x_0|x_0|}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2x_0=2|x_0|$$

бўлади.

б) $x_0<0, x<0$, $x\neq x_0$ учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{-x^2+x_0^2}{x-x_0}=-x-x_0$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-2x_0=2|x_0|$$

бўлади.

в) $x_0=0$, $x\neq x_0$ учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\frac{x|x|}{x}=|x|$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

бўлади. Демак, $\forall x\in R$ да $f'(x)=(x|x|)'=2|x|$.

4-мисол. Айтайлик,

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлиб, $x_0=0$ бўлсин. Унда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$$

бўлиб, унинг $x\to 0$ даги лимити мавжуд эмас. Демак, берил-ган функция $x_0=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

2^0. Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0-\delta,\ x_0)\subset X$ $(\delta>0)$ бўлсин.

2-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги чап ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0-0)$ каби белгиланади:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,\ \ x_0+\delta)\subset X\ \ (\delta>0)$ бўлсин.

3-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ўнг ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0+0)$ каби белгиланади:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

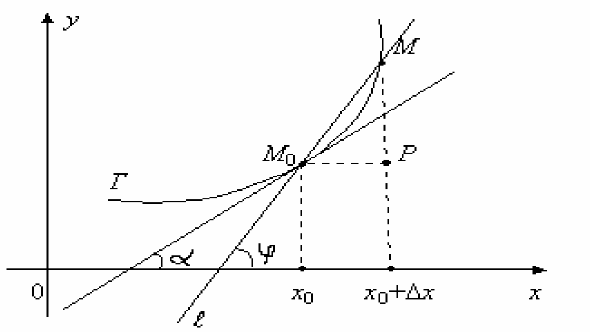
Масалан, $f(x)=|x|$ функциянинг $x_0=0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+0)=1,$ чап ҳосиласи $f'(-0)=-1$ бўлади.

Юқорида келтирилган таърифлардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга ва $f'x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

2. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

3^0. Ҳосиланинг геометрик ҳамда механик маънолари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f(x)$ функция-нинг графиги 5-чизмада тасвирланган Γ эгри чизиқни ифодаласин:



5-чизма.

Бу Γ чизиқда $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ нуқталарни олиб, улар орқали ўтувчи l кесувчини қараймиз.

$M_0(x_0,f(x_0))\in\Gamma$, $M(x,f(x))\in\Gamma$, $M\to M_0$ да l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада **ўтказилган уринма** дейилади.

Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ функциянинг графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

нинг мавжуд бўлиши лозим. Бунда α–уринманинг OX ўқи-нинг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчак.

M_0MP учбурчакдан:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиб, ундан

$$\varphi(\Delta x) = arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctgf'(x_0).$$

Демак, $\Delta x \to 0$ да $\varphi(\Delta x)$ нинг лимити мавжуд ва

$$\alpha = arctgf'(x_0).$$

Кейинги тенгликдан

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, функциянинг x_0 нуқтадаги $f'(x_0)$ ҳосиласи урин-манинг бурчак коэффицентини ифодалайди. Бунда уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишда бўлади.

Айтайлик, P нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $s = s(t)$ қонун билан ҳаракат қилсин, бунда $t -$вақт, $s -$ўтилган йўл. Агар вақтнинг t_1 ва t_2 $(t_1 < t_2)$ қийматларидаги ўтилган йўл $s(t_1)$, $s(t_2)$ бўлса, унда ушбу нисбат

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ вақт оралиғидаги ўртача тезликни ифодалайди.

Қуйидаги

$$\lim_{t_2 \to t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

лимит ҳаракатдаги нуқтанинг t_1 вақтдаги оний тезлигини билдиради.

Демак, ҳаракатдаги P нуқтанинг t вақтдаги оний тезлиги $v(t)$, ўтилган $s(t)$ йўлнинг ҳосиласидан иборат бўлади:

$$v(t) = s'(t).$$

4^0. Ҳосилага эга бўлган функциянинг узлуксизлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\, b) \subset R$ да берилган бўлсин.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a,\, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◀ Айтайлик, $f(x)$ функция $x_0 \in (a,\, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Таърифга биноан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

яъни

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

бўлади.

Энди

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

деб белгилаймиз.

Равшанки,

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \alpha \to 0.$$

Кейинги тенгликлардан топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Одатда, бу тенглик функция орттирмасининг формуласи дейилади. Ундан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради. ►

Эслатма. Функциянинг бирор нуқтада узлуксиз бўлиши-дан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x) = |x|$ функция $x = 0$ нуқтада узлуксиз, аммо у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

Машқлар

1. Функция ҳосиласи таърифидан фойдаланиб, қуйидаги

$$f(x) = x\sqrt{x}, \qquad f(x) = 3^x \sin x$$

функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

2. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } x - \text{рационал сон бўлса,} \\ -x^2, \text{ агар } x - \text{иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функциянинг $x = 0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд бўлиши исботлансин.

20-маъруза
Ҳосилани ҳисоблаш қоидалари

1⁰. Икки функция йиђиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг ҳосиласи. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $(a,b)\subset R$ да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ва $g'(x_0)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Ҳосила таърифига кўра

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0) \tag{2}$$

бўлади.

1) $f(x)\pm g(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$(f(x)\pm g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

бўлади.

◄ $F(x)=f(x)\pm g(x)$ деб топамиз:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Бу тенгликда $x\to x_0$ да лимитга ўтиб, юқоридаги (1) ва (2) муносабатларни эътиборга олсак, унда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}\pm$$

$$\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$F'(x_0)=(f(x)\pm g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0).$$ ►

2) $f(x)\cdot g(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$(f(x)\cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0)\cdot g(x_0) \pm f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

бўлади.

◀ $\Phi(x) = f(x)\cdot g(x)$ деб

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}$$

нисбатни қуйидагича

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)$$

ёзиб оламиз. Сўнг $x \to x_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x) =$$

$$= f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Демак,

$$\Phi'(x_0) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)'_{x_0} = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$ ▶

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функция $(g(x_0)\neq 0)$ x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

бўлади.

◀ Модомики, $g(x_0)\neq 0$ экан, унда x_0 нуқтанинг бирор атрофидаги x ларда $g(x)\neq 0$ бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Бу тенгликда $x \to x_0$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

тенгликка келамиз. ▶

1-натижа. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, $c\cdot f(x)$ функция $(c = const)$ x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$(c\cdot f(x))'_{x_0} = c\cdot f'(x_0)$$

бўлади, яъни ўзгармас сонни ҳосила ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин.

2-натижа. Агар $f_1(x),\ f_2(x), ..., f_n(x)$ функциялар x_0 нуқтада ҳосилаларга эга булиб, $c_1,\ c_2, ..., c_n$ ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда

$$\left(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+...+c_n f_n(x)\right)'_{x_0}=c_1 f_1'(x_0)+c_2 f_2'(x_0)+...+c_n f_n'(x_0)$$

бўлади.

2^0. Мураккаб функциянинг ҳосиласи. Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда, $g(y)$ функция $\{f(x)\,|\,x\in X\}$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0\in X$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага, $y_0\in\{f(x)\,|\,x\in X\}$ нуқтада $(y_0=f(x_0))$ $g'(y_0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $g(f(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

бўлади.

◀ $g(y)$ функциянинг y_0 нуқтада $g'(y_0)$ ҳосилага эга бўлганлигидан

$$g(y)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\alpha\cdot(y-y_0)$$

бўлиши келиб чиқади, бунда

$$y=f(x),\ y_0=f(x_0) \text{ ва } y\to y_0 \text{ да } \alpha\to 0.$$

Кейинги тенгликнинг ҳар икки томонини $x-x_0$ га бўлиб топамиз:

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Бундан $x\to x_0$ да лимитга ўтиб,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

тенгликка келамиз. ▶

3^0. Тескари функциянинг ҳосиласи. Айтайлик, $y=f(x)$ функция (a,b) да берилган, узлуксиз ва қатъий ўсувчи (қатъий камаювчи) бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $x=f^{-1}(y)$ функция y_0 $(y_0=f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга ва

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

бўлади.

◀Равшанки,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)$$

бўлиб, $x\to x_0$ да $\alpha\to 0$ бўлади. Бу тенгликдан

$$\begin{aligned}y-y_0&=f'(x_0)\left[f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right]-\alpha\left[f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right]=\\&=\left[f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right]\cdot\left[f'(x_0)+\alpha\right]\end{aligned}$$

ифодага келамиз. Бундан эса

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{f'(x_0)+\alpha}$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенгликда $y \to y_0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}. \ \blacktriangleright$$

4⁰. Мисоллар. 1-мисол. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ бўлади, $\alpha \in R$, $x > 0$.

◀ Айтайлик, $x > 0$ бўлсин. Унда $f(x) = x^{\alpha}$ функция учун

$$\frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

бўлиб, $\Delta x \to 0$ да $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ бўлади. ▶

2-мисол. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$ бўлади, $a > 0$, $x \in R$.

◀ $f(x) = a^{x}$ функция учун

$$\frac{a^{x+\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} = a^{x} \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

бўлиб, $\Delta x \to 0$ да $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$ бўлади. ▶

3-мисол. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ бўлади, $x \in R$.

◀ $f(x) = \sin x$ функция учун

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

бўлиб, $\Delta x \to 0$ да $(\sin x)' = \cos x$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $(\cos x)' = -\sin x$ бўлиши топилади▶

4-мисол. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ бўлади, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

◀ $f(x) = \log_a x$ функция учун

$$\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

бўлиб, $\Delta x \to 0$ да

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

бўлади. Хусусан, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ бўлади. ▶

5-мисол. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ бўлади.

◀Тескари функция ҳосиласини ҳисоблаш формуласига асосан $(y = arctgx, \ \ x = tgy)$

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1,\ 1)),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (x \in (-1,\ 1)),$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

бўлади.▶

6-мисол. Фараз қилайлик,

$$y = [u(x)]^{v(x)} \qquad (u(x) > 0)$$

бўлиб, $u'(x)$ ва $v'(x)$ лар мавжуд бўлсин. У ҳолда

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]$$

бўлади.

◀ Ушбу $y = [u(x)]^{V(x)}$ ни логарифмлаб,

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

сўнг мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{1}{y}y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x),$$

$$y' = y\left[v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x)\right] =$$

$$= [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]. \ ▶$$

Бу,

$$\left(u^v\right)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \qquad (3)$$

тенгликдан, $y = u^v$ функция ҳосиласини ҳисоблашнинг қуйидаги қоидаси келиб чиқади: $y = u^v$функциянинг ҳосиласи икки қўшилувчидан иборат бўлиб, биринчи қўшилувчи u^v ни кўрсаткичли функция деб олинган ҳосиласига (бунда асос $u(x)$ ўзгармас деб қаралади) иккинчи қўшилувчи эса u^v ни даражали функция деб олинган ҳосиласига (бунда даража кўрсаткич $v(x)$ ўзгармас деб қаралади) тенг бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^x, \quad g(x)=x^{x^x}$$

функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

◀ (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f'(x)=\left(x^x\right)'=x^x\cdot\ln x+x\cdot x^{x-1}=x^x(\ln x+1),$$

$$g'(x)=\left(x^{x^x}\right)'=\left(x^{f(x)}\right)'=x^{f(x)}\cdot\ln x\cdot f'(x)+f(x)\cdot x^{f(x)-1}=$$

$$=x^{x^x}\cdot\ln x\cdot(x^x(\ln x+1))+x^{x^x}\cdot x^{x^x-1}=$$

$$=x^{x^x+x-1}(x^x\ln x(\ln x+1)+1).\ \blacktriangleright$$

5^0. Ҳосилалар жадвали. Қуйида содда функцияларнинг ҳосилаларини ифодаловчи формулаларни келтирамиз:

1. $(C)'=0, \quad C=const.$
2. $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha\in R, \quad x>0.$

   $(x^n)'=nx^{n-1}, \quad n\in N, \quad x\in R.$
3. $(a^x)'=a^x\ln a, \ a>0, \ a\neq 1, \ x\in R$

   $(e^x)'=e^x, \quad x\in R.$
4. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \quad a\neq 1, \ x>0.$

   $\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \quad a\neq 1, \ x\neq 0.$

   $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}, \quad x>0.$

   $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}, \quad x\neq 0.$
5. $(\sin x)'=\cos x, \quad x\in R.$
6. $(\cos x)'=-\sin x, \quad x\in R.$
7. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in Z.$
8. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq n\pi, \quad n\in Z.$
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$
11. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in R.$

12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$

13. $(shx)' = chx, \quad x \in R.$

14. $(chx)' = shx, \quad x \in R.$

15. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R.$

16. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

Машқлар

1. Айтайлик, $f(x)$ функция $(-a,\, a) \subset R$ да берилган ва $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f(x)$ жуфт функция бўлса, $f'(x)$ ҳам жуфт функция бўлиши исботлансин.

2. $f(x)$ функция R да берилган бўлиб, $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Қандай нуқталарда $|\,f(x)\,|$ функция ҳосилага эга бўлади?

3. Ушбу

$$\phi(g(f))$$

мураккаб функция ҳосиласини ҳисоблаш қоидаси топилсин.

21-маъруза
Асосий теоремалар

1⁰. Ҳосилага эга бўлган функциялар ҳақидаги теоремалар. Бу теоремлар функцияларни текширишда муҳим рол ўйнайди.

1-теорема (Ферма теоремаси). $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган. $x_0 \in X$ нуқтанинг атрофи учун $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x) \le f(x_0)$ $\quad (f(x) \ge f(x_0))$,

2) $f'(x_0)$ мавжуд ва чекли бўлсин.

У ҳолда $f'(x_0) = 0$ бўлади.

◀ Айтайлик, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ да $f(x) \le f(x_0)$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда

$$f(x) - f(x_0) \le 0$$

бўлади.

Шартга кўра $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга. Шунинг учун

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

бўлади. Айни пайтда, $x > x_0$ бўлганда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \le 0,$$

$x < x_0$ бўлганда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \ge 0$$

бўлишидан $f'(x_0) = 0$ экани келиб чиқади. ▶

2-теорема (Ролль теоремаси). Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x)$ мавжуд ва чекли,

3) $f(a) = f(b)$ бўлсин.

У ҳолда шундай $x_0 \in (a, b)$ нуқта топиладики, $f'(x_0) = 0$ бўлади.

◀ Шартга кўра $f(x) \in C[a, b]$. Унда Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ да ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларга эришади, яъни шундай $c_1,\ c_2$ нуқталар $(c_1, c_2 \in [a, b])$ топиладики,

$$f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$
$$f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

бўлади.

Агар $f(c_1) = f(c_2)$ бўлса, унда $[a, b]$ да $f(x) = const$ бўлиб, $\forall x_0 \in (a, b)$ да $f'(x_0) = 0$ бўлади.

Агар $f(c_1) > f(c_2)$ бўлса, унда $f(a) = f(b)$ бўлганлиги сабабли $f(x)$ функция $f(c_1)$ ҳамда $f(c_2)$ қийматларнинг камида биттасига $[a, b]$ сегментнинг ички x_0 $(a < x_0 < b)$ нуқтасида эришади. Ферма теоремасига биноан $f'(x_0) = 0$ бўлади. ►

3-теорема (Лагранж теоремаси). Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, b]$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x)$ ҳосила мавжуд ва чекли бўлсин.

У ҳолда шундай $c \in (a, b)$ нуқта топиладики,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

бўлади.

◄ Ушбу

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1)$$

функцияни қараймиз. Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Айни пайтда, унинг ҳосиласи

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

бўлади.

Ролль теоремасига биноан, шундай c $(c \in (a, b))$ нуқта топиладики,

$$F'(c) = 0 \qquad (2)$$

бўлади.

(1) ва (2) муносабатлардан

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

яъни

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

1-натижа. Айтайлик, $f(x)$ функция (a, b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x) = 0$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (a, b)$ да $f(x) = const$ бўлади.

◄ $x,\ x_0 \in (a, b)$ ни олиб, четкалари x ва x_0 бўлган сегментда $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўллаб $f(x) = f(x_0) = const$ бўлишини топамиз. ►

2-натижа. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари (a, b) да $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x) = g'(x)$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (a, b)$ да $f(x) = g(x) + const$ бўлади.

◄ Бу натижанинг исботи $f(x) - g(x)$ функцияга нисбатан 1-натижани қўллаш билан келиб чиқади. ►

4-теорема (Коши теоремаси). Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин.

1) $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва чекли;

3) $\forall x \in (a, b)$ да $g'(x) \neq 0$ бўлсин.

У ҳолда шундай $c \in (a, b)$ нуқта топиладики,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

◀ Аввало $g(b) \neq g(a)$ бўлишини таъкидлаб ўтамиз, чунки $g(b) = g(a)$ бўладиган бўлса, унда Ролль теоремасига кўра шундай $c \in (a, b)$ нуқта топилар эдики, $g'(c) = 0$ бўлар эди. Бу 3)-шартга зид.

Қуйидаги

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)] \quad (x \in [a, b])$$

функцияни қараймиз. Бу функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига биноан шундай $c \in (a, b)$ нуқта топиладики,

$$\Phi'(c) = 0 \tag{3}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \tag{4}$$

(3) ва (4) муносабатлардан

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

яъни

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

1-мисол. $\forall x', x'' \in R$ учун $|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''|$ тенгсизлик исботлансин.

◀ Айтайлик, $x' < x''$ бўлсин. $f(x) = \sin x$ га $[x', x'']$ да Лагранж теоремасини қўллаймиз. Унда шундай $c \in (x', x'')$ нуқта топиладики,

$$|\sin x' - \sin x''| = |\cos c| \cdot (x'' - x')$$

бўлади. Агар $\forall t \in R$ да $|\cos t| \leq 1$ эканини эътиборга олсак, унда юқоридаги муносабатдан

$$|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''| \qquad (\forall x', x'' \in R)$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

2-мисол. Ушбу

$$e^x \geq 1 + x$$

тенгсизлик исботлансин.

◀ Айтайлик, $x>0$ бўлсин. Унда $f(t)=e^t$ функцияга $[0,\,x]$ да Лагранж теоремасини қўллаб топамиз:

$$e^x-e^0=e^c(x-0). \qquad c\in(0,\,x)$$

Агар $c>0$ да $e^c>1$ бўлишини эътиборга олсак, унда кейинги муносабатдан $e^x\geq 1+x$ бўлиши келиб чиқади.

Агар $x<0$ бўлса, унда $f(t)=e^t$ функцияга $[x,\,0]$ да Лагранж теоремасини қўллаб,

$$e^x-e^0=e^c(0-x)$$

ни ва $-x>0,$ $e^c<1$ бўлишини эътиборга олиб, $e^x\geq 1+x$ эканлигини топамиз.

Равшанки, $x=0$ да $e^0=1$. Демак, $\forall x\in R$ да $e^x\geq 1+x$. ▶

3-мисол. Ушбу

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} \qquad (0<b<a)$$

тенгсизлик исботлансин.

◀ $[b,\,a]$ сегментда $f(x)=\ln(x)$ функцияни қараймиз. Бу функция шу сегментда узлуксиз ва $(b,\,a)$ да $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига кўра шундай c $(b<c<a)$ нуқта топиладики,

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{c} \tag{5}$$

бўлади.

Равшанки,

$$b<c<a \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}. \tag{6}$$

(5) ва (6) муносабатлардан

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

2^0. Функция ҳосиласиниг узилиши ҳақида. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\,b)$ нинг x_0 нуқтасидан бошқа барча нуқталарида $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин.

Агар $\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)=b$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада чап ҳосила $f'(x_0-0)$ га эга бўлиб, $f'(x_0-0)=b$ бўлади.

Агар $\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)=d$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг ҳосила $f'(x_0+0)$ га эга бўлиб, $f'(x_0+0)=d$ бўлади.

◀ Айтайлик, $\Delta x\neq 0$ ва $x_0+\Delta x\in(a,\,b)$ бўлсин. Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\cdot\Delta x),\quad (0<\theta<1).$$

Энди

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=b$$

мавжуд бўлсин дейлик. Унда

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=\lim_{x-x_0\to -0} f'(x)=\lim_{\Delta x\to -0} f'(x_0+\Delta x)=b$$

бўлиб,

$$\Delta x\to -0 \text{ да } \ f'(x_0+\theta\cdot\Delta x)\to b,$$

яъни

$$\Delta x\to -0 \text{ да } \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to b$$

бўлади. Демак, $f'(x_0-0)=b$. Шунга ўхшаш, $f'(x_0+0)=d$ бўлиши кўрсатилади. ►

Айтайлик, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлсин. Унда, равшанки,

$$f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$$

бўлади. Айни пайтда,

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x),\quad \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

лимитларниг мавжуд ва чекли бўлишидан

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: агар $f(x)$ функция $(a,\,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу $f'(x)$ ҳосила биринчи тур узилишга эга бўлолмайди.

Бошқача айтганда ҳар бир $x_0\in(a,\,b)$ нуқтада $f'(x)$ функция ёки узлуксиз бўлади, ёки иккинчи тур узилишга эга бўлади. ►

4-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик.

◄ $x\neq 0$ бўлганда

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

бўлади.

$x=0$ бўлганда, ҳосила таърифига кўра

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$$

бўлади.
Демак, $f'(x)$ функция R да аниқланган ва $x \neq 0$ да узлуксиз бўлади. $f'(x)$ ҳосила $x = 0$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлади, чунки $x \to 0$ да

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

функция лимитга эга эмас. ►

Машқлар

1. Агар $f(x)$ функция (a, b) да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, унинг шу (a, b) да текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

2. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \geq x_0$ да чекли ҳосилалар: $f'(x),\ g'(x)$ га эга бўлиб,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad x > x_0 \quad \text{да} \quad f'(x) > g'(x)$$

бўлса, у ҳолда $x > x_0$ да $f(x) > g(x)$ бўлиши исботлансин.

3. $\forall x > -1$ учун

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

тенгсизликларнинг ўринли бўлиши исботлансин.

22-маъруза
Функциянинг дифференциали

1^0. Функция дифференциали тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\,b)$ да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b),\ \ x_0+\Delta x \in (a,b)$ бўлсин.

Маълумки, $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ айирма $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади.

1-таъриф. Агар $\Delta f(x_0)$ ни ушбу

$$\Delta f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқта-да дифференциалланувчи дейилади, бунда $A=const,\ \ \Delta x\to 0$, да $\alpha\to 0.$

Теорема. $f(x)$ функция $x\in(a,\,b)$ нуқтада дифференциал-ланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$ функция $x\in(a,\,b)$ нуқтада дифферен-циалланувчи бўлсин. Таърифга биноан,

$$\Delta f(x) = A\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$$

бўлади, бунда $A=const$, $\Delta x\to 0$, да $\alpha\to 0.$

Бу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A+\alpha,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha) = A.$$

Демак, $f'(x)$ мавжуд ва $f'(x) = A.$

Етарлилиги. $f(x)$ функция $x\in(a,\,b)$ да чекли $f'(x)$ ҳосила-га эга бўлсин. Таърифга кўра

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

дейилса, ундан

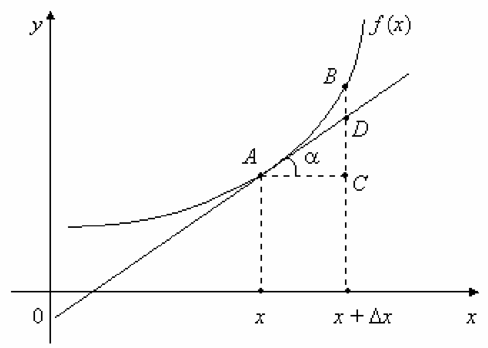
$$\Delta f(x) = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha\Delta x$$

бўлиши келиб чиқади, бунда $\Delta x \to 0$ да $\alpha \to 0$. Демак, $f(x)$ функция дифференциалланувчи.▶

2-таъриф. Функция орттирмасидаги $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ифода $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги дифференциали дейилади ва $df(x_0)$ каби белгиланади:

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot \Delta x\,.$$

Айтайлик, $x \in (a,\, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг графиги 6-чизмада тасвирланган эгри чизиқни ифодаласин:



6-чизма.

Келтирилган чизмадан кўринадики,

$$\frac{DC}{AC} = tg\alpha$$

бўлиб, $DC = tg\alpha \cdot AC = f'(x)\cdot\Delta x$ бўлади.

Демак, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги дифференциали функция графигига $(x,\, f(x))$ нуқтада ўтказилган уринма орттирмаси DC ни ифодалар экан.

Фараз қилайлик, $f(x) = x,\ x \in R$ бўлсин. Бу функция дифференциалланувчи бўлиб, $df(x) = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x$, яъни $dx = \Delta x$ бўлади. Демак, $(a,\, b)$ да дифференциалланувчи $f(x)$ функция-нинг дифференциалини

$$df(x) = f'(x)\cdot dx$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

Энди содда функцияларнинг дифференциалларини келтирамиз:

1. $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \quad (x > 0);$
2. $d(a^{x}) = a^{x}\cdot \ln a \cdot dx, \quad (a > 0, \quad a \neq 1);$

3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e dx, \quad (x > 0, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1);$

4. $d(\sin x) = \cos x dx;$

5. $d(\cos x) = -\sin x dx;$

6. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; k = 0, \pm 1, ...);$

7. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx, \quad (x \neq k\pi, \;\; k = 0, \pm 1, ...);$

8. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1 < x < 1);$

9. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1 < x < 1);$

10. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx;$

11. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx;$

12. $d(shx) = chxdx;$

13. $d(chx) = shxdx;$

14. $d(thx) = \frac{1}{ch^2 x}dx;$

15. $d(cthx) = -\frac{1}{sh^2 x}dx \quad (x \neq 0)$

2^0. Функция дифференциалининг содда қоидалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари (a, b) да берилган бўлиб, $x \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $x \in (a, b)$ да

1) $d(c \cdot f(x)) = cdf(x), \quad c = const;$

2) $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x);$

3) $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x);$

4) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$

бўлади.

Бу тасдиқлардан бирини, масалан 3)-сини исботлаймиз.

◀Маълумки,

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))'dx.$$

Агар

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда қуйидаги тенгликка келамиз:

$$d(f(x)g(x) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx =$$
$$= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x). ▶$$

Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда, $g(y)$ функция $Y\supset\{f(x): x\in X\}$ тўпламда берилган бўлиб, $f'(x)$ ва $g'(y)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$d(g(f(x)))=g'(f(x))\cdot df(x)$$

бўлади.

◄ Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$d(g(f(x)))=[g(f(x))]'dx=g'(f(x))\cdot f'(x)dx=g'(f(x))\cdot df(x).►$$

1-мисол. Таърифдан фойдаланиб, ушбу $f(x)=x-3x^2$ функциянинг $x_0=2$ нуқтадаги дифференциали топилсин.

◄ Бу функциянинг $x_0=2$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=2+\Delta x-3(2+\Delta x)^2-2+12=$$
$$=-11\cdot\Delta x-3\Delta x^2=-11\cdot\Delta x+(-3\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Демак, $d\,f(2)=-11\cdot dx$. ►

3^0. Функция дифференциали ва тақрибий формулалар. Функция дифференциали ёрдамида тақрибий формулалар юзага келади.

Айтайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага $(f'(x_0)\neq 0)$ эга бўлсин. У ҳолда $\Delta x\to 0$ да

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

бўлади.

Айни пайтда, $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциал-ланувчи бўлиб, унинг дифференциали

$$d\,f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

бўлади.

Равшанки,

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)=o(\Delta x)$$

бўлиб, $\Delta x\to 0$ да

$$\frac{\Delta f(x_0)-df(x_0)}{\Delta x}\to 0$$

бўлади. Натижада

$$\Delta f(x_0)\approx df(x_0),$$

яъни

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

тақрибий формула ҳосил бўлади. (1) формула $x_0\in(a,b)$ нуқта-да дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(x_0)$ ни унинг шу нуқтадаги дифференциали $df(x_0)$ билан алмаштириш мумкинлигини кўрсатади. Бу алмаштиришнинг моҳияти функция орттирмаси аргумент орттирмасининг, умуман айтганда мураккаб функцияси бўлган ҳолда, функция дифференциали эса аргумент орттирмасининг чизиқли функцияси бўлишидадир.

(1) формулада $\Delta x = x - x_0$ дейилса, унда

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу $\sin 29^0$ миқдор тақрибий ҳисоблансин.

◄ Агар $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 30^0$ дейилса, унда (2) формулага кўра

$$\sin 29^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 \cdot (29^0 - 30^0) \cdot \frac{2\pi}{360^0} = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^0} \approx 0{,}4848$$

бўлади. ►

Маълумки, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функция графигига $(x_0, \ f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма-нинг тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Демак, (2) тақрибий формула геометрик нуқтаи назардан, $f(x)$ функция ифодалаган эгри чизиқни x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида шу функция графигига $(x_0, \ f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма билан алмаштирилиши мумкинлигини билдиради.

(2) формулада $x_0 = 0$ дейилса, у ушбу

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$$

кўринишга келади.

$f(x)$ функция сифатида $(1+x)^\alpha$, $\sqrt{1+x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, tgx функцияларни олиб, уларга (3) формулани қўллаш натижасида қуйидаги тақрибий формулалар ҳосил бўлади:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$tgx \approx x.$$

Машқлар

1. Айтайлик, u ва vлар дифференциалланувчи функция-лар бўлиб, уларнинг дифференциаллари du ва dv бўлсин. Унда ушбу

$$y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v} + \ln\sqrt{u^2 + v^2}$$

функциянинг дифференциали топилсин.

2. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция $x_0 = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

3. Ушбу

$$\sqrt{1{,}2},\ \sqrt{1{,}02},\ \sqrt{1{,}002}$$

миқдорларнинг тақрибий қиймати топилсин.

23-маъруза
Функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари

1⁰. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\,b)$ да берилган бўлиб, $\forall x\in(a,\,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f'(x)$ функцияни $g(x)$ орқали белгилаймиз:

$$g(x)=f'(x) \qquad (x\in(a,\,b)).$$

1-таъриф. Агар $x_0\in(a,\,b)$ нуқтада $g(x)$ функция $g'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, бу ҳосила $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва $f''(x_0)$ ёки $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ каби белгиланади.

Худди шунга ўхшаш, $f(x)$ нинг 3-тартибли $f'''(x)$, 4-тартибли $f^{IV}(x)$ ва ҳ.к. тартибли ҳосилалари таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи $f^{(n)}(x)$ нинг ҳосиласи $f(x)$ функциянинг $(n+1)-$тартибли ҳосиласи дейилади:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Одатда, $f(x)$ функциянинг $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ҳосилалари унинг юқори тартибли ҳосилалари дейилади. Шуни таъкидлаш лозимки, $f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ да $n-$тартибли ҳосиласининг мавжудлиги бу функциянинг шу нуқта атрофида 1–, 2–, ..., $(n-1)-$тартибли ҳосилалари мавжудлигини тақоза этади. Аммо бу ҳосилаларнинг мавжудлигидан $n-$тартибли ҳосила мавжудлиги, умуман айтганда, келиб чиқавермайди.

Масалан,

$$f(x) = \frac{x|x|}{2}$$

функциянинг ҳосиласи $f'(x) = |x|$ бўлиб, бу функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас, яъни берилган функциянинг $x = 0$ да биринчи тартибли ҳосиласи мавжуд, иккинчи тартибли ҳосиласи эса мавжуд эмас.

1-мисол. $f(x) = a^x$ бўлсин, $a > 0$, $x \in R$. Бу функция учун

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(a^x)'' = (a^x \ln a)' = a^x (\ln a)^2,$$

умуман

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n \tag{1}$$

бўлади. (1) муносабатнинг ўринли бўлиши математик индукция усули билан исботланади.

2-мисол. $f(x) = \sin x$ бўлсин. Бу функция учун

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

Умуман,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади.

Шунга ўхшаш,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

бўлади.

3-мисол. $f(x)=x^{\alpha}$ бўлсин, $x>0$, $\alpha\in R$. Бу функция учун

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^{\alpha})''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

умуман,

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

бўлади.

Хусусан, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(x>0)$ функция учун

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

бўлиб, ундан

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

бўлишини топамиз.

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a,b) да берилган бўлиб, $\forall x\in(a,b)$ да $f^{(n)}(x)$ ва $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\quad c=const$;

2) $(f(x)\pm g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$;

3) $(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$ (2)

$$\left(C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\right),\quad f^{(0)}(x)=f(x)$$

бўлади.

◀ Бу тасдиқлардан 3)-сининг исботини келтирамиз. Равшанки, $n=1$ да (2) муносабат ўринли бўлади. Айтайлик, (2) муносабат $n-1$ да ўринли бўлсин:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x).$$

Кейинги тенгликни ҳамда

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=C_n^k$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\left((f(x)\cdot g(x))^{(n-1)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x)\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(f^{(k+1)}(x)g^{(n-1-k)}(x)+f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x))=C_{n-1}^0 f(x)g^{(n)}(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(C_{n-1}^k+C_{n-1}^k)f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)+C_{n-1}^{k-1}f^{(n)}(x)g(x)=$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \blacktriangleright$$

Одатда, (2) **Лейбниц формуласи** дейилади.

4-мисол. Ушбу

$$y = x^2 \cos 2x$$

функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи топилсин.

◀Лейбниц формуласида $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = x^2$ деб оламиз. Унда бу формулага кўра, айни пайтда $g(x) = x^2$ функция учун $k > 2$ бўлганда

$$g^{(k)}(x) = (x^2)^{(k)} = 0, \qquad (k > 2)$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2 (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' \cdot (\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Равшанки,

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n-1} \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) = -2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Демак,

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = 2^n \left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2^n nx \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right). \quad \blacktriangleright$$

2⁰. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $\forall x \in (a, b)$ нуқтада $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Равшанки, $f(x)$ функциянинг дифференциали

$$df(x) = f'(x)dx \tag{3}$$

бўлиб, бунда $dx = \Delta x$ функция аргументнинг ихтиёрий орттирмаси.

2-таъриф. $f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтадаги диф-ференциали $df(x)$ нинг дифференциали $f(x)$ функциянинг $x \in (a, b)$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциали дейи-лади ва $d^2 f(x)$ каби белгиланади:

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Худди шунга ўхшаш, $f(x)$ функциянинг учинчи $d^3 f(x)$, тўртинчи $d^4 f(x)$ ва ҳ.к. тартибдаги дифференциаллари таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг $n-$тартибли дифференциали $d^n f(x)$ нинг дифференциали $f(x)$ функциянинг $(n+1)-$тартибли дифференциали дейилади:

$$d^{n+1} f(x) = d(d^n f(x)).$$

5-мисол. Ушбу

$$f(x)=xe^{-x}$$
функциянинг иккинчи тартибли дифференциали топилсин.

◄ Берилган функциянинг иккинчи тартибли дифферен-циалини таърифига кўра топамиз:

$$d^2f(x)=d(df(x))=d(d(xe^{-x}))=d(xde^{-x}+e^{-x}dx)==d(-xe^{-x}dx+e^{-x}dx)=$$
$$=-d(xe^{-x})dx+(de^{-x})dx=-(xde^{-x}+e^{-x}dx)dx-e^{-x}(dx)^2=xe^{-x}(dx)^2-$$
$$=x\cdot e^{-x}(dx)^2-e^{-x}(dx)^2-e^{-x}(dx)^2=(x-2)e^{-x}(dx)^2. \quad ►$$

Дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$d^2f(x)=d(df(x))=d(f'(x)dx)=dx\cdot d(f'(x))=dx\cdot f''(x)dx=f''(x)(dx)^2, \qquad (4)$$
$$d^3f(x)=d(d^2f(x))=f'''(x)(dx)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Масалан, юқорида келтирилган мисол учун

$$d^2(xe^{-x})=(xe^{-x})''(dx)^2=(e^{-x}-xe^{-x})'(dx)^2=$$
$$=(e^{-x}-e^{-x}-xe^{-x})(dx)^2=(x-2)e^{-x}(dx)^2$$

бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a,b) да берилган бўлиб, $\forall x\in(a,b)$ нуқтада $n-$тартибли дифференциалларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $d^n(c\cdot f(x))=c\cdot d^nf(x), \quad c=const;$

2) $d^n(f(x)\pm g(x))=d^nf(x)\pm d^ng(x);$

3) $d^n(f(x)\cdot g(x))=d^nf(x)\cdot g(x)+C_n^1d^{n-1}f(x)\cdot dg(x)+$
$+\ldots+C_n^kd^{n-k}f(x)\cdot d^kg(x)+\ldots+f(x)\cdot d^ng(x)$

бўлади.

Бу муносабатларнинг 1), 2) – ларнинг исботи равшан. 3) – муносабатни исботлашда (2) формуладан фойдаланилади.

3^0. Дифференциал шаклининг инвариантлиги. Айтайлик, $y=f(x)$ функция (a,b) да дифференциалланувчи бўлиб, x ўзгарувчи ўз навбатида бирор t ўзгарувчининг $[\alpha,\beta]$ да дифференциалланувчи функцияси бўлсин:

$$x=\varphi(t) \quad (t\in[\alpha,\beta],\ x=\varphi(t)\in[a,b]).$$

Натижада

$$y=f(x)=f(\varphi(t))$$

бўлади. Бу функциянинг дифференциали

$$dy=(f(\varphi(t)))'dt=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=f'(\varphi(t))\cdot d\varphi(t)=f'(x)dx$$

бўлиб, у (3) кўринишга эга бўлади. Шундай қилиб, $y=f(x)$ функцияда x ўзгарувчи эркли бўлган ҳолда ҳам, у бирор t ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолда ҳам $y=f(x)$ функция дифференциалининг кўриниши бир хил бўлади. Одатда бу хусусият дифференциал шаклининг **инвариантлиги** дейилади.

$y = f(\varphi(t))$ функциянинг иккинчи тартибли дифферен-циали қуйидагича бўлади:

$$d^2 y = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$
$$= f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) d^2 x.$$

Бу муносабатни (4) муносабат билан солиштириб иккин-чи тартибли дифференциалларда дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссаси ўринли эмаслигини топамиз.

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x) = |x|^3$$

функция $x = 0$ нуқтада учинчи тартибдаги ҳосилага эга бўладими?

2. Ушбу

$$f(x) = (x-1)^2 \sin x \sin(x-1)$$

функциянинг $n-$тартибли ҳосиласи топилсин $(n > 2)$.

3. Агар $y = f(x)$ функция $n-$тартибли ҳосилага эга бўлса,

$$d^n f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b) \cdot (dx)^n$$

бўлиши исботлансин.

24-маъруза
Тейлор формуласи

1^0. Кўпҳад учун Тейлор формуласи. Ушбу

$$P(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+...+b_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

функцияни (n - даражали кўпҳадни) қарайлик, бунда $x_0 \in R$ ва $b_0, b_1, ..., b_n$ - ҳақиқий сонлар. Бу $b_0, b_1, ..., b_n$ лар қуйидагича ҳам аниқланиши мумкин:

(1) тенгликда $x = x_0$ дейилса,

$$b_0 = P(x_0)$$

бўлади;

$P(x)$ функцияни дифференциаллаб,

$$P'(x) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot (x-x_0) + ... + n \cdot b_n (x-x_0)^{n-1}$$

ва бу тенгликда $x = x_0$ деб

$$b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}$$

бўлишини топамиз.

$P(x)$ функцияни икки марта дифференциаллаб

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 + ... + n(n-1) \cdot b_n (x-x_0)^{n-2}$$

ва бу тенгликда $x = x_0$ деб топамиз:

$$b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Бу жараённи давом эттира бориб, $\forall k \geq 0$ да

$$b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$$

бўлишини топамиз.

Натижада $P(x)$ кўпҳад қуйидаги кўринишга келади:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (2)$$

Демак, $P(x)$ кўпҳад ўзининг ҳамда ҳосилаларининг бирор нуқтасидаги қиймати билан тўлиқ аниқланар экан. (2) формула $P(x)$ кўпҳад учун Тейлор формуласи дейилади.

2^0. Ихтиёрий функциянинг Тейлор формуласи ва унинг қолдиқ ҳадлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b)$ бўлсин. Бу функция x_0 нуқтанинг

$$\text{Y}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset (a,b) \quad \delta > 0$$

атрофида $f'(x),\ f''(x), ..., f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Функция ҳосилаларидан фойдаланиб, ушбу

$$P_n(f;x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

кўпҳадни тузамиз.

Агар $f(x)$ функция $n-$даражали кўпҳад бўлса, равшанки,

$$f(x)=P_n(f;x)$$

бўлади.

Агар $f(x)$ функция кўпҳад бўлмаса,

$$f(x)\neq P_n(f;x)$$

бўлиб, улар орасидаги фарқ юзага келади. Уни $R_n(x)$ орқали белгилаймиз:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(f;x).$$

Натижада ушбу

$$f(x)=P_n(f;x)+R_n(x)$$

яъни,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (3)$$

формулага келамиз. Бу (3) формула $f(x)$ функциянинг Тейлор формуласи дейилади. (3) формуладаги $R_n(x)$ эса Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади дейилади.

Энди қолдиқ ҳад $R_n(x)$ ни аниқлаймиз. x_0 нуқтанинг $\Upsilon_\delta(x_0)$ атрофидаги x ни тайинлаб, ушбу

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+...+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

функцияни $[x_0,x]\subset\Upsilon_\delta(x_0)$ (ёки $[x,x_0]\subset\Upsilon_\delta(x_0)$) да қараймиз.

Бу функция $[x_0,x]$ сегментда узлуксиз бўлиб, (x_0,x) да ҳосилага эга бўлади:

$$F'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)\right]-...-$$

$$-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Демак,

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Энди $[x_0,x]$ да узлуксиз, (x_0,x) да чекли (нолга тенг бўлмаган) ҳосилага эга $\phi(x)$ функцияни олиб, $F(x)$ ва $\phi(x)$ функцияларга $[x_0,x]$ да Коши теоремасини қўллаймиз. Натижада қуйидаги

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\phi'(c)} \qquad (4)$$

тенгликка келамиз, бунда $c=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$.

Равшанки,

$$F(x)=0, \quad F(x_0)=R_n(x), \quad F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Унда (4) тенгликдан

$$R_n(x)=\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{5}$$

бўлишини топамиз.

а) Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи.

Айтайлик, $\phi(t)=x-t$ бўлсин. Унда

$$\phi(x)=0, \quad \phi(x_0)=x-x_0, \quad \phi'(c)=-1$$

бўлиб, (5) тенглик қуйидаги

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{-(x-x_0)}{-(n+1)(x-c)^n}(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x-x_0-\theta(x-x_0)]^n\cdot(x-x_0)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

кўринишга келади. Бу ҳолда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

формула ҳосил бўлиб, уни функциянинг Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи дейилади.

б) Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи.

Айтайлик, $\phi(t)=(x-t)^{n+1}$ бўлсин. Унда

$$\phi(x)=0, \quad \phi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},$$

$$\phi'(c)=-(n+1)(x-c)^n \quad (c=x_0+\theta(x-x_0))$$

бўлиб, (5) тенглик қуйидаги

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n}\cdot(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

кўринишга келади. Бу ҳолда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{6}$$

$$(c=x_0+\theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1)$$

формула ҳосил бўлиб, уни $f(x)$ функциянинг Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи дейилади.

в) Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи.

Юқоридаги (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}++\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$(c=x_0+\theta(x-x_0),\quad 0<\theta<1).$$

$f^{(n)}(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз. Демак, $x\to x_0$ да $c\to x_0$ бўлиб,

$$f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0).$$

Шуни эътиборга олиб, $x\to x_0$ да

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

бўлишини топамиз.

Натижада ушбу

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\qquad (x\to x_0)$$

формула ҳосил бўлади. Бу формула $f(x)$ функциянинг Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи дейилади.

3^0. Баъзи функцияларнинг Тейлор формулалари. $f(x)$ функциянинг Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласини оламиз:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\qquad (x\to x_0)$$

Бу тенгликда $x_0=0$ деб, ушбу

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad (x\to 0) \tag{7}$$

формулага келамиз. (7) формула $f(x)$ функциянинг Маклорен формуласи дейилади.

1) $f(x)=e^x$ бўлсин. Бу функция учун $f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=1$ бўлиб,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$$

бўлади.

2) $f(x)=(1+x)^\alpha,\ \ \alpha\in R$ бўлсин. Бу функция учун

$$f(0)=1,\quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

бўлиб,

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^{k}+o(x^{n}),\qquad x\to 0$$

бўлади.

Хусусан,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^{k}+o(x^{n}),\quad x\to 0$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}x^{k}+o(x^{n}),\quad x\to 0$$

бўлади.

3) $f(x)=\ln(1+x)$ бўлсин. Бу функция учун

$$f(0)=0,\qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

бўлиб,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}x^{k}}{k}+o(x^{n}),\quad x\to 0$$

бўлади.

Шунингдек,

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k}}{k}+o(x^{n}),\quad x\to 0$$

бўлади.

4) $f(x)=\sin x$ бўлсин. Бу функция учун $f(0)=0,\quad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^{k}$ бўлиб,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),\quad x\to 0$$

бўлади.

5) $f(x)=\cos x$ бўлсин. Бу функция учун $f(0)=1,\quad f^{(2k)}(0)=(-1)^{k}$ бўлиб,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}),\quad x\to 0$$

бўлади.

Мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{1}{3x+2}$$

функциянинг Тейлор (Маклорен) формуласи ёзилсин.

◄ Бу функцияни қуйидагича

$$f(x)=\frac{1}{3x+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$$

ёзиб, сўнг

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n),\quad x\to 0$$
бўлишидан фойдаланиб топамиз:
$$\frac{1}{3x+2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}x^k+o(x^n),\quad x\to 0. ►$$

Машқлар

1. Асимптотик формулалардан фойдаланиб, ушбу
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$$
лимит ҳисоблансин.

2. Ушбу
$$f(x)=e^{x^2}$$
функциянинг Тейлор (Маклорен) формуласи ёзилсин.

6-БОБ
ФУНКЦИЯ ҲОСИЛАЛАРИНИНГ БАЪЗИ БИР ТАТБИҚЛАРИ

25-маъруза
Функциянинг монотонлиги. Функциянинг экстремумлари

1^0. Функциянинг монотонлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да $(-\infty\le a<b\le+\infty)$ берилган бўлсин.

Маълумки,

$\forall x_1,\,x_2\in(a,b)$, учун $x_1<x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1)\le f(x_2)$ $\ (f(x_1)<f(x_2))$ бўлса, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да ўсувчи (қатъий ўсувчи), $\forall x_1,\,x_2\in(a,b)$ учун $x_1<x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1)\ge f(x_2)$ $\ (f(x_1)>f(x_2))$ бўлса, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да камаювчи (қатъий камаювчи) дейилади.

1-теорема. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,\ b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ да ўсувчи бўлиши учун $\forall x \in (a,\ b)$ да

$$f'(x) \geq 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да ўсувчи бўлсин. Унда $\Delta x > 0$ бўлганда

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$$

бўлади. Ҳосила таърифидан фойдалниб топамиз:

$$f'(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 .$$

Етарлилиги. Айтайлик, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ мавжуд бўлиб, $f'(x) \geq 0$ бўлсин. $[x_1,\ x_2]$ да $(x_1,\ x_2 \in (a,\ b),\ x_1 < x_2)$ $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўллаб топамиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Демак, $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x)$ ўсувчи. ▶

Худди шунга ўхшаш, қуйидаги теорема исботланади.

2-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да камаювчи бўлиши учун $\forall x \in (a,b)$ да

$$f'(x) \leq 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

Шунингдек қуйидаги теоремаларни исботлаш қийин эмас.

3-теорема. $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ да қатъий ўсувчи бўлиши учун

1) $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x) \geq 0$.

2) $\forall x \in (\alpha,\beta)$ да $f'(x) = 0$ тенглик бажариладиган $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ интервалнинг мавжуд бўлмаслик шартларининг бажарилиши зарур ва етарли.

4-теорема. $f(x)$ функция $(a,\ b)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг $(a,\ b)$ да қатъий камаювчи бўлиши учун

1) $\forall x \in (a,b)$ да $f'(x) \leq 0$,

2) $\forall x \in (\alpha,\beta)$ да $f'(x) = 0$

тенглик бажариладиган $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ интервалнинг мавжуд бўлмаслиги шартларининг бажарилиши зарур ва етарли.

Демак, $(a,\ b)$ да

$f'(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ ўсувчи $\;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0,$

$f'(x) \leq 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ камаювчи $\;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0,$

$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ қатъий ўсувчи $\;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0,$

$$f'(x) < 0 \ \Rightarrow \ f(x) \text{ қатъий камаювчи } \Rightarrow \ f'(x) \leq 0$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

функциянинг ўсувчи, камаювчи бўлиш оралиқлари топилсин.

◀Равшанки,

$$f'(x) = x \cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2)$$

бўлади.

Ушбу $f'(x) > 0$, $x \cdot 2^{-x}(2 - x\ln 2) > 0$ тенгсизлик $x \in \left(0, \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ да ўринли бўлади. Демак, $f(x)$ функция $x \in \left(0, \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ да ўсувчи, $(-\infty, \ 0) \cup (\dfrac{2}{\ln 2}, \ +\infty)$ да камаювчи бўлади. ▶

2^0. Функциянинг экстремумлари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ бўлсин.

1-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \subset X$ нуқталарда

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \left(f(x) \geq f(x_0)\right)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришади дейилади, x_0 нуқтага эса $f(x)$ функция-нинг максимум (минимум) нуқтаси дейилади.

2-таъриф. Агар шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\left(U_\delta(x_0) \subset X\right)$ нуқталарда

$$f(x) < f(x_0) \qquad \left(f(x) > f(x_0)\right)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада қатъий максимумга (қатъий минимумга) эришади дейилади,

Функциянинг максимум ҳамда минимуми умумий ном билан унинг экстремумлари, максимум ҳамда минимум нуқталари эса унинг экстремум нуқталари дейилади.

5-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада экстремумга эришсин.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f'(x_0) = 0$$

бўлади.

◀Айтайлик, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришиб, шу нуқтада ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \text{ да } \ f(x) \leq f(x_0)$$

бўлади.

$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалда $f(x)$ функцияга Ферма теоремасини қўллаб топамиз:

$$f'(x_0)=0\,.►$$

3-таъриф. Функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқта унинг станционар (критик) нуқтаси дейилади.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция бирор нуқтада экстре-мумга эришса, у шу нуқтада ҳосилага эга бўлиши шарт эмас.

Масалан, $f(x)=|x|$ функция $x_0=0$ нуқтада минимумга эришади, бироқ у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

Демак, $f(x)$ функциянинг экстремум нуқталари унинг стационар ҳамда ҳосиласи мавжуд бўлмаган нуқталари бўлиши мумкин.

4-таъриф. Агар шундай $\delta>0$ сон топилсаки,

$$\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0)\ \text{ да }\ g(x)>0\ \text{ ёки}$$

$$\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0)\ \text{ да }\ g(x)<0$$

бўлса, $g(x)$ функция x_0 нуқтанинг чап томонида ишора сақлайди дейилади.

Агар шундай $\delta>0$ сон топилсаки,

$$\forall x\in(x_0,\ x_0+\delta)\ \text{ да }\ g(x)>0\ \text{ ёки}$$

$$\forall x\in(x_0,\ x_0+\delta)\ \text{ да }\ g(x)<0$$

бўлса, $g(x)$ функция x_0 нуқтанинг ўнг томонида ишора сақлайди дейилади.

6-теорема. Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\exists\delta>0,\ \forall x\in U_\delta(x_0)\subset X$ да $f'(x)$ ҳосила мавжуд;

2) $f'(x_0)=0$;

3) $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтанинг ўнг ва чап томонларида ишора сақласин.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгартирса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгартирмаса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эриш-майди.

◄ Айтайлик,

$$\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0)\ \text{ да }\ f'(x)>0,$$

$$\forall x\in(x_0,\ x_0+\delta)\ \text{ да }\ f'(x)<0$$

бўлсин. У ҳолда $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0)$, $f'(x)>0\ \Rightarrow f(x)$ ўсувчи, яъни $f(x)<f(x_0)$, $\forall x\in(x_0,\ x_0+\delta)$, $f'(x)<0\ \Rightarrow\ f(x)$ камаювчи, яъни $f(x)<f(x_0)$ бўлиб, $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ да $f(x)<f(x_0)$ бўлади. Демак, бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

Айтайлик,

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \quad \text{да} \quad f'(x) < 0,$$
$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \quad \text{да} \quad f'(x) > 0$$
бўлсин. У ҳолда $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ камаювчи, яъни $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ўсувчи, яъни $f(x) > f(x_0)$ бўлиб, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ да $f(x) > f(x_0)$ бўлади.

Демак, бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

Агар $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ да $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ да $f'(x) > 0$ ёки $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ да $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ да $f'(x) < 0$ бўлса, унда $f(x)$ функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да ўсувчи ёки $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ да камаювчи бўлиб $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди. ►

7-теорема. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x) \in C(X)$;

2) $\exists \delta > 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да $f'(x)$ ҳосила мавжуд ва чекли;

3) $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтанинг ўнг ва чап томонларида ишора сақлансин.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгартирса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади.

Агар $f'(x)$ ҳосила x_0 нуқтани ўтишда ишорасини ўзгар-тирмаса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

Бу теорема юқоридаги 6-теорема каби исботланади.

8-теорема. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган ва $m \in N$, $m \geq 2$, $x_0 \in X$ бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\exists \delta > 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f^{(m-1)}(x)$ ҳосила мавжуд;

2) $f^{(m)}(x_0)$ ҳосила мавжуд;

3) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

У ҳолда $m = 2k$, $k \in N$ бўлганда $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришиб, $f^{(m)}(x_0) < 0$ бўлганда x_0 нуқтада максимумга, $f^{(m)}(x_0) > 0$ да минимумга эришади.

Агар $m = 2k + 1$, $k \in N$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

◄ $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги Тейлор формуласи
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big), \quad x \to x_0$$
ни оламиз. Бу формула теореманинг шартида ушбу
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + 0\big((x - x_0)^m\big), \ x \to x_0$$

кўринишга келади. Бундан эса $x \neq x_0$ да

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o\left((x - x_0)^m\right)}{(x - x_0)^m} \right], \quad x \to x_0$$

бўлиши келиб чиқади.

«o» нинг таърифига кўра $\frac{1}{m!} | f^{(m)}(x_0) | > 0$ сон учун $\exists \delta > 0$, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ нуқталарда

$$\left| \frac{o\left((x - x_0)^m\right)}{(x - x_0)^m} \right| < \frac{1}{m!} \left| f^{(m)}(x_0) \right|$$

бўлади. Демак, $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ учун

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o\left((x - x_0)^m\right)}{(x - x_0)^m} \quad \text{ва} \quad \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

миқдорлар бир хил ишорали бўлади. Бундан эса $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$$

нинг ишораси $f(x) - f(x_0)$ айирманинг ишораси билан бир хил бўлиши келиб чиқади.

Агар $m = 2k$, $k \in N$ бўлиб, $f^{(m)}(x_0) > 0$ бўлса, унда $f(x) - f(x_0) > 0$, яъни $f(x) > f(x_0)$ бўлади. $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

Агар $m = 2k$, $k \in N$ бўлиб, $f^{(m)}(x_0) < 0$ бўлса, унда $f(x) - f(x_0) < 0$, яъни $f(x) < f(x_0)$ бўлади. $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

Агар $m = 2k + 1$, $k \in N$ бўлса, $f(x) - f(x_0)$ айирма ишора сақламайди. Бу ҳолда функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди. ►

Хусусан, агар x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлиб, $f(x)$ функция x_0 нуқтада чекли $f''(x_0) \neq 0$ ҳосилага эга бўлса, шу нуқтада $f(x)$ функция $f''(x_0) < 0$ бўлганда максимумга, $f''(x_0) > 0$ минимумга эга бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$$

функция экстремумга текширилсин.

◄ Бу функция $R = (-\infty; +\infty)$ аниқланган бўлиб, у шу тўпламда узлуксиз. Унинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} - 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10(x - 1)}{3\sqrt[3]{x}} \tag{1}$$

Равшанки, функциянинг ҳосиласи $x_1 = 1$ нуқтада нолга аланади: $f'(1) = 0$; $x_2 = 0$ нуқтада эса функциянинг ҳосиласи мавжуд эмас.

Ҳосила ифодаси (1) дан кўрнадики, $x=1$ нуқтанинг чап томонидаги нуқталарда $f'(x)<0$ ўнг томонидаги нуқталарда $f'(x)>0$ бўлади. Демак, берилган функция $x=1$ нуқтада минимумга эришади ва $\min f(x)=f(1)=-2$ бўлади.

Яна ҳосила ифодаси (1) дан кўринадики, $x=0$ нуқтанинг чап томонидаги нуқталарда $f'(x)>0$, ўнг томонидаги нуқталарда $f'(x)<0$ бўлади.

Демак, $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада максимумга эришади ва $\max f(x)=f(0)=1$ бўлади. ►

Машқлар

1. $f(x)$ функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўлган нуқтада функция экстремумга эришиши шарт эмаслиги исботлансин.

2. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция экстремумга текширилсин.

3. Айтайлик, $f(x)\in C[a,b]$ бўлсин. Бу функциянинг $[a,b]$ даги энг катта ва энг кичик қийматлари қандай топилади?

26-маъруза

Функциянинг қавариқлиги, эгилиш нуқталари ва асимптоталари

1^0. **Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлиги.** Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $x_1, x_2 \in (a, b)$ учун $x_1 < x_2$ бўлсин.

$f(x)$ функция графигининг $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ нуқта-ларидан ўтувчи тўғри чизиқни $y = l(x)$ десак, у қуйидагича

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

бўлади.

1-таъриф. Агар ҳар қандай оралиқ $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ да жойлашган $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \leq l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

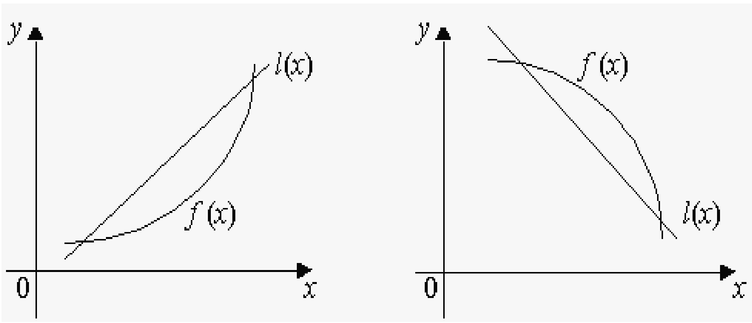
бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да ботиқ (қатъий ботиқ) функция дейилади.

2-таъриф. Агар ҳар қандай оралиқ $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ да жойлашган $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \geq l(x) \qquad \left(f(x) > l(x)\right)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да қавариқ (қатъий қавариқ) функция дейилади.

Ботиқ ҳамда қавариқ функцияларнинг графиклари 7-чизмада тасвирланган:



7-чизма.

Айтайлик, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_1 = 1$ бўлиб, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ бўлсин. Функциянинг ботиқлиги ҳамда қавариқлигини қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин.

3-таъриф. Агар

$$f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да ботиқ (қатъий ботиқ) дейилади.

4-таъриф. Агар

$$f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

бўлса, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да қаварик (қатъий қаварик) дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^2$$

функция R да қатъий ботиқ функция бўлади.

◄ 3-таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)^2=(\alpha_1x_1)^2+2\alpha_1\alpha_2x_1x_2+(\alpha_2x_2)^2<$$
$$<\alpha_1^2x_1^2+\alpha_1\alpha_2(x_1+x_2)^2+\alpha_2^2x_2^2=\alpha_1x_1^2(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2x_2^2(\alpha_1+\alpha_2)=$$
$$=\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)$$ ►

1-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,\, b)$ да берилган бўлиб, унда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг $(a,\, b)$ да ботиқ (қатъий ботиқ) бўлиши учун $f'(x)$нинг $(a,\, b)$ да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** $f(x)$функция $(a,\, b)$ да ботиқ бўлсин. У ҳолда $\forall x_1,\, x_2\in(a,\, b)$, $x_1<x_2$, $\forall x\in(x_1,\, x_2)$ учун

$$f(x)\le\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

бўлиб, ундан

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

бўлиши келиб чиқади. ($\left(x_2-x_1\right)=(x_2-x)+(x-x_1)$ дейилди). Кейинги тенгсизликда $x\to x_1$ сўнг $x\to x_2$ да лимитга ўтиб,

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$
$$f'(x_2)\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

бўлишини топамиз. Ундан $f'(x_1)\le f'(x_2)$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $f'(x)$ функция (a,b) да ўсувчи.

$f(x)$ функция $(a,\, b)$ да қатъий ботиқ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

бўлади. Лагранж теоремасига мувофиқ

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(c_1),\quad x_1<c_1<x;$$
$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(c_2),\quad x<c_2<x_2$$

бўлиб, ундан $f'(x_1)<f'(x_2)$ бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. $f'(x)$ функция (a, b) да ўсувчи (қатъий ўсувчи) бўлсин: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ да

$$f'(x_1) \le f'(x_2) \quad (f'(x_1) < f'(x_2)).$$

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2.$$

Равшанки, $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2$. Демак, $f'(c_1) \le f'(c_2)$ $(f'(c_1) < f'(c_2))$ бўлиб, юқоридаги муносабатлардан

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad \left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \right)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) да ботиқ (қатъий ботиқ) эканини билдиради. ►

Худди шунга ўхшаш, қуйидаги теорема ҳам исботланади.

2-теорема. $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, унда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$f(x)$ функциянинг (a, b) да қаварик (қатъий қаварик) бўлиши учун $f'(x)$ нинг (a, b) да камаювчи (қатъий камаювчи) бўлиши зарур ва етарли.

Айтайлик, $f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, у шу интервалда $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бундан ташқари (a, b) интервалнинг ҳар қандай (α, β) $((\alpha, \beta) \subset (a, b))$ қисмида $f''(x)$ айнан нолга тенг бўлмасин.

3-теорема. $f(x)$ функция (a, b) интервалда ботиқ (қаварик) бўлиши учун (a, b) да

$$f''(x) \ge 0 \quad (f''(x) \le 0)$$

бўлиши зарур ва етарли.

Бу теореманинг исботи юқоридаги ҳамда функциянинг монотонлиги ҳақидаги теоремалардан келиб чиқади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln x \quad (x > 0)$$

функция қаварик бўлади.

◄Бу функция учун

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

бўлади. 2-теоремага кўра берилган $f(x) = \ln x$ функция $(0, +\infty)$ да қатъий қаварик бўлади. ►

2⁰. Функциянинг эгилиш нуқталари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$, $(x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \subset X$, $\delta > 0$ бўлсин.

5-таъриф. Агар $f(x)$ функция $(x_0-\delta,\ x_0)$ да ботиқ (қаварик), $(x_0,\ \ x_0+\delta)$ да қаварик (ботиқ) бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **эгилиш нуқтаси** дейилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ да $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $\forall\, x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ да $f''(x)\ge 0\quad(f''(x)\le 0)$,

$\forall\, x\in(x_0,\ x_0+\delta,)$ да $f''(x)\le 0\quad(f''(x)\ge 0)$,

бўлса, $f'(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришади ва демак, $f''(x_0)=0$ бўлади. Демак, $f(x)$ функция эгилиш нуқтаси-да $f''(x)=0$ бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^3$$

функция $x_0=0$ нуқтада эгилади.

◀Бу функция учун

$$f''(x)=6x$$

бўлиб,

$$\forall\, x\in(-\delta,0)\ \text{да}\ f''(x)<0$$

$$\forall\, x\in(0,\ \delta,)\ \text{да}\ f''(x)>0\qquad(\delta>0)$$

бўлади. ▶

3⁰. Функция графигининг асимптоталари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, x_0 нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

6-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x),\qquad \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи хам чексиз бўлса, $x=x_0$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг вертикал асимп-тотаси дейилади.

Масалан, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функция графиги учун $x=0$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $(x_0,+\infty)$ да аниқланган бўлсин.

7-таъриф. Агар шундай k ва b сонлари топилсаки,

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)\qquad(x\to+\infty\ \text{ да }\ \alpha(x)\to 0)$$

бўлса, $y=kx+b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси дейилади.

4-теорема. $f(x)$ функция графиги $y=kx+b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$$

бўлиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** $y=kx+b$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг оғма асимптотаси бўлсин. Унда

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

бўлиб, $x \to +\infty$ да $\alpha(x) \to 0$ бўлади. Бу тенгликни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx+b+\alpha x}{x} = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty} (b+\alpha(x)) = b.$$

Етарлилиги. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx) = b$$

муносабатлар ўринли бўлсин. Бу муносабатлардан

$$(f(x)-kx)-b = \alpha(x) \to 0 \;\Rightarrow\; f(x) = kx+b+\alpha(x)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

4-мисол. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ функциянинг оғма асимптотаси топилсин.

◄ Бу функция учун

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2$$

бўлади. Демак, $y = x+2$ тўғри чизиқ берилган функция графигининг оғма асимптотаси бўлади.►

Машқлар

1. Ушбу

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$$

функциянинг ботиқ ҳамда қаварик бўладиган оралиқлари топилсин.

2. Ушбу

$$f(x) = \frac{2x^2+x-2}{x-1}$$

функция графигининг оғма асимптотаси топилсин.

3. Ушбу

а) $f(x) = x^2 \sqrt[x]{e}$,

б) $f(x) = x + 2\operatorname{arcctg} x$,

в) $f(x) = \left| e^x - 1 \right|$ функцияларни ҳосилалар ёрдамида тўлиқ текширилсин, графиклари чизилсин.

27-маъруза
Лопиталь қоидалари

Маълум шартларда функция лимитини ҳисоблаш қоидалари ўрганилган эди. Кўп ҳолларда бундай шартлар бажарилмаганда, яъни

$x \to x_0$ да $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0:\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ нинг лимити $\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

$x \to x_0$ да $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty:\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ нинг лимити $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$,

$x \to x_0$ да $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty:\ f(x) - g(x)$ нинг лимити $(\infty - \infty)$,

$x \to x_0$ да $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0:\ (f(x))^{g(x)}$ нинг лимити $\left(0^0\right)$,

$x \to x_0$ да $f(x) \to 1,\ g(x) \to +\infty:\ (f(x))^{g(x)}$ нинг лимити $\left(1^\infty\right)$

$x \to x_0$ да $f(x) \to \infty, g(x) \to 0:$ $f(x)\ g(x)$ ни лимити ∞^0ни топишда функциянинг ҳосилаларига асосланган қоидага кўра ҳисоблаш қулай бўлади. Бундай усул билан функция лимитини топиш **Лопиталь қоидалари** дейилади.

1^0. $\dfrac{0}{0}$ ва $\dfrac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги ҳоллар.

1-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a, b) да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0,\ \ \lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a,\,b)$ да $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x\in(a,\,b)$ да $g'(x)\neq 0;$

4) Ушбу $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda,\ (\lambda\in R)$ мавжуд. У ҳолда $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ бўлади.

◀ $f(b)=0,\ \ g(b)=0$ деб оламиз. Унда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(b-\delta,\ b]$ да $(\delta>0)$ узлуксиз бўлиб қолади. Теореманинг 4-шартига кўра:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ \forall x\in(b-\delta,\ b):\ \ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\lambda\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Энди $(b-\delta,\ b]$ да Коши теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|=\left|\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}-\lambda\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\lambda\right|<\varepsilon$$

$$(c\in(x,\,b)\subset[b-\delta,\ b]).$$

Демак,

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda\,.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди. ►

1-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}$$

муносабат исботлансин.

◀ $f(x)=(\ln x)^{\alpha}-\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta},\quad g(x)=x-e$ функциялари учун $(1,\ e)$ да 1-теореманинг барча шартлари бажарилади:

1) $\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}\Big[\ ((\ln x)^{\alpha}-\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta}\ )\Big]=0,$

$\lim\limits_{x\to e} g(x)=\lim\limits_{x\to e}(x-e)=0;$

2) $f'(x)=\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{\beta}{e}\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta-1},\quad g'(x)=1;$

3) $g'(x)=1\neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{\beta}{e}\cdot\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta-1}}{1}=\dfrac{\alpha-\beta}{e}.$

Демак,

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}.\blacktriangleright$$

2-теорема. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,+\infty)$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a,\ +\infty)$ да $f'(x),\ g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x\in(a,+\infty)$ да $g'(x)\neq 0;$

4) Ушбу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda$$

мавжуд $(\lambda\in R)$. У ҳолда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$$

бўлади.

◀ $a>0$ деб, $t=\frac{1}{x}$ деймиз. Унда $t\in(0,\ \frac{1}{a})$ бўлиб, $x\to+\infty$ да $t\to+0$. Энди $F(t)$ ва $G(t)$ функцияларни қуйидагича

$$F(t)=f(\tfrac{1}{t}),\qquad G(t)=g(\tfrac{1}{t})$$

аниқлаймиз. Унда

$$t\to+0 \text{ да } F(t)\to 0,\quad G(t)\to 0;$$

$$F'(t)=f'(\tfrac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2}),\quad G'(t)=g'(\tfrac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2});$$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)}=\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}\to\lambda,\quad (t\to+0)$$

бўлиб, 1-теоремага кўра, $t\to+0$ да

$$\frac{F(t)}{G(t)}\to\lambda$$

бўлади. Кейинги муносабатдан эса

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$$

бўлиши келиб чиқади ▶

2-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\mathrm{arctg}x^2-\pi}$$

лимитни ҳисобланг.

◀Агар $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}-1,\ g(x)=2\mathrm{arctg}x^2-\pi$ дейилса, улар учун 2-теореманинг барча шартлари бажарилади, жумладан

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}, \qquad g'(x)=\frac{4x}{1+x^4}$$

бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^4}{2x^4}=-\frac{1}{2}$$

бўлади. 2-теоремага кўра

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\mathrm{arctg}x^2-\pi}=-\frac{1}{2}$$

бўлади. ►

Қуйидаги теоремалар ҳам юқорида келтирилган теоремаларга ўхшаш исботланади.

3-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар (a,b) да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty, \quad \lim\limits_{x\to b-0} g(x)=\infty;$

2) $\forall x\in(a,b)$ да $f'(x),\ g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x\in(a,b)$ да $g'(x)\neq 0;$

4) Ушбу $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda,\ (\lambda\in R)$ мавжуд. У ҳолда

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$$

бўлади.

4-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $(a,+\infty)$ да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty;$

2) $\forall x\in(a,+\infty)$ да $f'(x),\ g'(x)$ ҳосилалар мавжуд;

3) $\forall x\in(a,+\infty)$ да $g'(x)\neq 0;$

4) Ушбу $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda,\ (\lambda\in R)$ мавжуд. У ҳолда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ бўлади.

2^0. $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0$ **кўринишидаги ҳоллар.** Бу кўриниш-даги аниқмасликлар $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$ ҳолларга келтирилиб, сўнг юқоридаги теоремалар қўлланилади.

1) $x\to x_0$ да $f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$ бўлганда $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг лимитини топиш учун уни

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

деб, сўнг 1- ёки 2-теоремалар қўлланилади.

2) $x\to x_0$ да $f(x)\to+\infty,\ \ g(x)\to+\infty$ бўлганда $f(x)-g(x)$ функциянинг лимитини топиш учун уни

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

деб, сўнг 1-теорема қўлланилади.

3) $x\to x_0$ да $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$ ҳамда $x\to x_0$ да $f(x)\to 1,\ g(x)\to+\infty$ бўлганда $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ функциянинг лимитини топиш учун аввало

$$y=(f(x))^{g(x)}$$

функция логарифмланади, сўнг юқоридаги теоремалар қўлланилади.

3-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

лимит ҳисоблансин.

◀Аввало $y=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ деб оламиз. Равшанки, $x\to 0$ да

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\to 1,\qquad g(x)=\frac{1}{x^2}\to+\infty.$$

Содда ҳисоблашлар ёрдамида топамиз:

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

Демак, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$ ►

Машқлар

1. Ихтиёрий $\alpha \in R$да ушбу

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x)^{\alpha}-1}{\ln x}=\frac{2\alpha}{\pi}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)$$

лимит ҳисоблансин.

7-БОБ
АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

28-маъруза
Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчалари

1^0.Бошланғич функция тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)$ва $F(x)$ функциялари $(a,b)\subset R$ интервалда (бу интеграл чекли ёки чексиз бўлиши мумкин) берилган бўлиб, $F(x)$ функция шу $(a,b)\subset R$ да дифференциалланувчи бўлсин.

1-таъриф. Агар (a,b) интервалда $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ бўлса, (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

Масалан, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ функциянинг $(0,+\infty)$ да бошланғич функцияси $F(x)=\ln x$ бўлади, чунки $(0,+\infty)$ да $F'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=f(x)$.

Айтайлик, $f(x)$ ва $F(x)$ функциялари $[a,b]$ сегментда берилган бўлиб, $F(x)$ функция шу $[a,b]$ да дифференциал-ланувчи бўлсин.

2-таъриф. Агар (a,b) интервалда $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ бўлиб, a ва b нуқталарда эса

$F'(a+0)=f(a),\ \ F'(b-0)=f(b)$

тенгликлар ўринли бўлса, $[a,b]$ сегментда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси дейилади.

1-теорема. Агар (a,b) интервалда $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функция-ларнинг ҳар бири $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар (a,b) да бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади:

$\Phi(x)-F(x)=C.\ (C=const)$

◄ Шартга кўра (a,b) да $\Phi'(x)=f(x)$, $F'(x)=f(x)$.

Демак, (a,b) да $\Phi'(x)=F'(x)$. У ҳолда 21- маърузада келтирилиган 2-натижага кўра

$\Phi(x)=F(x)+C.\ (C=const)$

бўлади. ►

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$функциянинг (a,b) даги ихтиёрий бошланғич функцияси $\Phi(x)$ учун

$$\Phi(x)=F(x)+C.\ \ (C=const)$$

бўлади.

1-Эслатма. (a,b) да берилган ҳар қандай функция ҳам бошланғич функцияга эга бўлавермайди.

1-мисол. $(-1,1)$ интервалда ушбу

$$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ агар } -1<x<0 \text{ бўлса},\\ 0, \text{ агар } x=0 \text{ бўлса},\\ 1, \text{ агар } 0<x<1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Бу функциянинг $(-1,1)$ интервалда бошланғич функцияга эга бўлмалиги исботлансин.

◄Тескарисини фараз қилайлик, яъни берилган функция $(-1,1)$ да бошланғич функция $F(x)$ га эга бўлсин: $F'(x)=f(x)$ $(x\in(-1,1))$.

Равшанки,

$$F'(0)=f(0)=0 \qquad (1)$$

бўлади.

Бу $F(x)$ функцияга $[0,x]$ сегментда $(0<x<1)$ Лагранж теорема-сини қўллаб топамиз:

$$F(x)-F(0)=F'(c)\cdot x=f(c)\cdot x=x \quad (c\in(0,x)).$$

Кейинги тенгликдан

$$\frac{F(x)-F(0)}{x}=1, \quad \lim_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$$

бўлиб, $F'(+0)=1$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса (1) муносабатга зиддир.

Демак, қаралаётган $f(x)$ функция $(-1,1)$ да бошланғия функцияга эга бўлмайди. ►

2-Теорема. Агар $f(x)\in C(a,b)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция (a,b) да бошланғич функцияга эга бўлади.

Бу теореманинг исботи 34- маърузада келтирилади.

2^0. Функциянинг аниқмас интеграли. Интегралнинг хоссалари. Айтайлик, (a,b) да $f(x)$ функция берилган бўлиб, $F(x)$ функция унинг бирор бошланғич функцияси бўлсин:

$F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$.

У ҳолда берилган $f(x)$ функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси

$F(x)+C \qquad (C=const)$

кўринишда ифодаланади.

3-таъриф. Ушбу

$F(x)+C \qquad (x\in(a,b))$

ифода $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли дейилади ва

$\int f(x)dx$

каби белгиланади. Бунда $\int$ - интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ интеграл остидаги ифода дейилади.

Демак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)$$

Шундай қилиб, (a,b) интервалда $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли (a,b) да ҳосиласи шу $f(x)$ га тенг бўлган функция-нинг умумий кўринишини ифодалар экан.

2-мисол. Ушбу

$$\int x^3 dx$$

интеграл топилсин.

◄ Аниқмас интеграл таърифига кўра, шундай $F(x)$ функция топилиши керакки, $F'(x) = x^3$ бўлсин. Агар

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

дейилса, равшанки, $F'(x) = x^3$ бўлади. Демак,

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C = const). \ ►$$

3-мисол. Ушбу

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

аниқмас интеграл топилсин.

◄ Равшанки,

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}$$

функция учун

$$F'(x) = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

бўлади. Демак,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C. \ ►$$

Энди аниқмас интегралнинг хоссаларини келтирамиз. Бундан буён аниқмас интеграл ҳақида гап борганда уни қаралаётган оралиқда мавжуд деб, яъни интеграл остидаги функция қаралаётган оралиқда бошланғич функцияга эга деб қараймиз ва оралиқни кўрсатиб ўтирмаймиз.

1) Ушбу

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

муносабат ўринли.

◄ Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x).$$

У ҳолда,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)$$

бўлади. Бу тенгликка дифференциал амалини қўллаб топамиз.

$d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ ►

Бу хосса аввал дифференциал белгиси d, сўнгра интеграл белгиси $\int$ келиб, улар ёнма-ён турганда ўзаро бир-бирини йўқотишини ифодалайди.

2) Ушбу

$$\int dF(x) = F(x)+C \qquad (C = const)$$

муносабат ўринли.

◄ Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$F'(x) = f(x)$.

У ҳолда,

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (C = const)$$

бўлади. Айни пайтда,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$

бўлиб, бу тенгликлардан

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Бу хосса аввал интеграл белгиси $\int$, сўнгра дифферен-циал белгиси d келиб, улар ёнма-ён турганда ўзаро бир- бирини йўқотишини англатади ва $F(x)$ га ўзгармас C ни қўшиб қўйиш кераклигини кўрсатади.

3) Ушбу

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (2)$$

тенглик ўринли бўлади.

◄ Айтайлик, $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг бошланғич функциялари бўлсин

$F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = g(x)$.

У ҳолда

$$\int f(x)dx = F(x)+C_1, \quad \int g(x)dx = \Phi(x)+C_2$$

бўлиб,

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+\Phi(x)+C_1+C_2 \qquad (3)$$

бўлади.

Айни пайтда,

$$[F(x)+\Phi(x)]' = f(x)+g(x)$$

бўлганлиги сабабли

$$\int [f(x)+g(x)]dx = F(x)+\Phi(x)+C_3 \qquad (4)$$

бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан, улардаги C_1, C_2 ва C_3 ларнинг ихтиёрий ўзгармас эканлигини эътиборга олиб топамиз:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \text{►}$$

Бу хосса аниқмас интегралнинг аддитивлик хоссаси дейилади.

4) Ушбу

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (5)$$

тенглик ўринли бўлади, бунда *k* ўзгармас сон ва $k\neq 0$.

Бу хосса юқоридаги 3)- хосса каби исботланади.

2-Эслатма. (2) ва (5) тенгликларни ўнг ва чап томонларидаги ифодалар орасидаги айирма ўзгармас сонга баробарлиги маъносидаги (ўзгармас сон аниқлигиги) тенглик-лар деб қаралади.

4-мисол. Ушбу

$$J = \int \left(\frac{5}{1+x^2} - 3\sin x\right)dx$$

интеграл топилсин .

◀Аниқ интегралнинг 3)- ва 4)- хоссаларидан фойдалан-сак, унда

$$\int \left(\frac{5}{1+x^2} - 3\sin x\right)dx = 5\int \frac{1}{1+x^2}dx - 3\int \sin x dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди

$$(-\cos x)' = \sin x, \quad (\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$5\int \frac{1}{1+x^2}dx - 3\int \sin x dx = 5\text{arctg}x + 3\cos x + C\ .$$

Демак,

$J = 5\text{arctg}x + 3\cos x + C$.▶

3^0. Асосий аниқмас интеграллар жадвали.

Элементар функцияларнинг ҳосилалари жадвали ҳамда аниқмас интеграл таърифидан фойдаланиб, содда функция-ларнинг аниқмас интеграллари топилади. Уларни жамлаб, жадвал кўринишига келтирамиз:

1) $\int 0 \cdot dx = C, \qquad C = const.$

2) $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad (\alpha \neq -1).$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad (x \neq 0).$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (a > 0,\ a \neq 1).$

$\int e^x dx = e^x + C.$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C, \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z).$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C, \qquad (x \neq \pi n,\ n \in Z).$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases} \qquad (-1 < x < 1).$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C, \\ -\mathrm{arcctg}x + C. \end{cases}$

12) $\int shxdx = chx + C.$

13) $\int chxdx = shx + C.$

14) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -chx + C, \qquad (x \neq 0).$

15) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

4^0. Дифференциаллаш ва интеграллаш амаллари ҳақида. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,b) \subset R$ да берилган бўлсин.

Одатда, $f(x)$ функциянинг ҳосиласини топиш уни диф-ференциаллаш ($f(x)$ функцияга дифференциаллаш амалини қўллаш) дейилади. $f(x)$ функциянинг (a,b) даги бошланғич функциясини топиш, яъни $f(x)$ нинг аниқмас интегралини топиш уни интеграллаш ($f(x)$функцияга интеграл амалини қўллаш) дейилади.

Дифференциаллаш ва интеграллаш тушунчалари матема-тика ва унинг татбиқларида муҳим роль ўйнайди.

Математик анализнинг дифференциаллаш тушунча-сидан бир қанча масалаларни, жумладан ҳаракат қонунига кўра нуқта ҳаракатининг оний тезлигини топишда, эгри чизиқ маълум бўлган ҳолда унга уринма ўтказиш масала-ларини ҳал этишда фойдаланилади.

Кўп ҳолларда ҳаракатдаги нуқтанинг ҳар бир вақт моментдаги тезлиги маълум бўлганда ҳаракат қонунини топиш, эгри чизиқнинг уринмасига кўра ўзини аниқлаш масалалари юзага келади. Бу ҳолда функциянинг ҳосиласига кўра ўзини топиш лозим бўлади. Бу юқорида эслаб ўтилган масалаларга тескари бўлиб, улар функцияларни интеграллаш амали ёрдамида ечилади.

Демак, функцияларни дифференциаллаш ва интеграл-лаш амаллари ўзаро тескари амаллар бўлади.

Маълумки, элементар функцияларнинг (бунда, рационал функциялар; даражали, кўрсаткичли ва логарифмик функ-циялар; тригонометрик ва тескари тригонометрик функция-лар, уларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси, нисбати ҳам чекли марта суперпозициялардан тузилган функциялар туши-нилади) ҳосилалари яна элементар функциялар бўлади.

Аммо ҳамма элементар функцияларнинг интеграллари элементар функциялар бўлавермайди.
Масалан, ушбу

$$f(x)=\sin x^2,\quad f(x)=\cos x^2,\quad f(x)=e^{x^2}\qquad (x\in R),\quad f(x)=\frac{\sin x}{x}\qquad (x>0).$$

функцияларнинг аниқмас интеграллари мавжуд бўлса ҳам улар элементар функциялар бўлмайди.

Машқлар

1. $f(x)=|x|$ функциянинг бошланғич функцияси топилсин.
2. Айтайлик, $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да берилган тоқ функция бўлиб, $F(x)$ функция эса унинг бошланғич функцияси бўлсин. $F(x)$ жуфт функция бўлиши исботлансин.
3. Ушбу,

$$\Im=\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

29-маъруза
Интеграллаш усуллари. Содда касрларни интеграллаш

1^0. Ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш усули.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграли

$$\int f(x)dx \tag{1}$$

берилган бўлиб,уни ҳисоблаш талаб этилсин.

Кўпинча, ўзгарувчи x ни маълум қоидага кўра бошқа ўзгарувчига алмаштириш натижасида берилган интеграл содда интегралга келади ва уни ҳисоблаш осон бўлади.

Айтайлик, (1) интегралдаги ўзгарувчи x янги ўзгарувчи t билан ушбу

$$t = \varphi(x)$$

муносабатда бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

1) $\varphi(x)$ функция дифференциалланувчи бўлсин;

2) $g(t)$ функция бошланғич функция $G(t)$ га эга, яъни

$$G'(t) = g(t), \qquad \int g(t)dt = G(t) + C; \tag{2}$$

3) $f(x)$ функция қуйидагича

$$f(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'((x) \tag{3}$$

ифодалансин.

У ҳолда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

бўлади.

◄Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоида-сидан фойдаланиб, (2) ва (3) муносабатларни эътиборга олиб топамиз:

$$[G(\varphi(x)) + C]' = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(x).$$

Бундан

$$\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Шу йўл билан (1) интегрални ҳисоблаш ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш усули дейилади.

Бу усулда, ўзгарувчини жуда кўп муносабат билан алмаштириш имконияти бўлган ҳолда улар орасидан қаралаётган интегрални содда, ҳисоблаш учун қулай ҳолга келтирадиганини танлаб олиш муҳимдир.

1-мисол. Ушбу

$$\int \sin 5x dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Бу интегрални ўзгарувчисини алмаштириб ҳисоблаймиз:

$$\int \sin 5x dx = \left| \begin{matrix} 5x = t \\ 5dx = dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + C. \ ▶$$

2-мисол. Ушбу

$$J = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Аввало берилган интегрални қуйидагича

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

ёзиб оламиз. Бу интегрални ўзгарувчини алмаштириш усули-дан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$J = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1 + t^2} = arctgt + C = arctge^x + C \ ▶$$

3-мисол. Ушбу

$$J = \int \frac{dx}{\cos x}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Равшанки,

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}.$$

Унда

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1 - t^2}$$

бўлиб,

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{(1 - t)(1 + t)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 + t)} + \frac{1}{(1 - t)} \right]$$

бўлганлиги сабабли

$$J = \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{(1 + t)} + \int \frac{dt}{(1 - t)} \right) = \frac{1}{2} \left(\int \frac{d(1 + t)}{(1 + t)} - \int \frac{d(1 - t)}{(1 - t)} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C$$

бўлади.

Агар

$$\frac{1 + t}{1 - t} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C$$

эканини топамиз. ▶

4-мисол. Ушбу

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad (a\neq 0,\ a\in R)$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интегралда ўзгарувчини қуйидагича алмаштирамиз:

$$x+\sqrt{x^2+a}=t.$$

Унда

$$dt=d(x+\sqrt{x^2+a})=(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}})dx=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

бўлиб, ундан

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$$

бўлиши келиб чиқади.

Натижада

$$J=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C \tag{4}$$

бўлишини топамиз.▶

2^0. Бўлаклаб интеграллаш усули. Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар узлуксиз $u'(x)$, $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Равшанки,

$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

бўлади. Демак,

$$F(x)=u(x)\cdot v(x)$$

функция

$$f(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Бундан

$$\int\left[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right]dx=u(x)\cdot v(x)+C$$

бўлиши келиб чиқади.

Аниқмас интегралнинг 3)- ва 4)- хоссалардан фойда-ланиб

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx \tag{5}$$

бўлишини топамиз.

(5) формулани қуйидагича

$$\int u(x)\cdot dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x) \qquad (5‰)$$

ҳам ёзиш мумкин.

Бу (5‰) формула бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади. Унинг ёрдамида

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

интегрални ҳисоблаш

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

интегрални ҳисоблашга келтирилади.

5-мисол.

$$\int x\cos x dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ \cos x dx = dv & v=\sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C. \ ▶$$

6-мисол. Ушбу

$$J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Қаралаётган интегралда

$$u = \sqrt{x^2+a}\ , \quad dv = dx$$

дейилса, унда

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx\ , \quad v = x$$

бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$J = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\ .$$

Демак,

$$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\ ,$$

$$J = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right].$$

Маълумки, (1^0 даги 4-мисол)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C\ .$$

Натижада

$$J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

7-мисол. Ушбу

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\qquad (n\in N,\, a\in R,\, a\neq 0)$$

интеграл топилсин.

◄ Бу интегралда

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\quad ,\, dv=dx$$

деб олсак, унда

$$du=-\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,,\quad v=x$$

бўлади. (5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\left[\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right].$$

Натижада

$$J_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\cdot J_n-2na^2\cdot J_{n+1}$$

бўлади. Бу тенгликдан

$$J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}\cdot J_n \tag{6}$$

бўлиши келиб чиқади. ►

Одатда, (6) муносабат реккурент формула дейилади.

Равшанки, $n=1$ бўлганда

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$

бўлади.

$n\geq 2$ бўлганда мос J_n интеграллар (6) реккурент формула ёрдамида топилади.

Масалан,

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\cdot J_1=\frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

бўлади. ►

3⁰. Содда касрларни интеграллаш. Ушбу

$$\frac{A}{(x-a)^m}\ \ (x\neq a)\,,\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$$

кўринишдаги функциялар содда касрлар дейилади, бунда $m\in N$; A,B,C,a,p,q – ҳақиқий сонлар бўлиб, x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас, яъни $q-\frac{p^2}{4}>0$.

$m=1$ бўлганда содда касрларнинг интеграллари

$$\int\frac{A}{x-a}dx\ ,\quad \int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

лар қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C\ ;$$

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t, & x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt, & q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{matrix}\right|=$$

$$=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(C-\frac{Bp}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C^*=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C^*.$$

Айтайлик, $m\in N$, $m>1$ бўлсин. Бу ҳолда содда асрларнинг интеграллари

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx\ ,\quad \int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx$$

лар қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=-\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C,$$

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\left|\begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t, & x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt, & q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m}+(C-\frac{p}{2}B)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=$$

$$= -\frac{B}{2}\frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + (C-\frac{p}{2}B)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Кейинги муносабатдаги

$$\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

интеграл (6) рекуррент формула ёрдамида топилади.

Машқлар

1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

2. Ушбу

$$\int e^{ax}\cos bxdx$$

интеграл ҳисоблансин.

3. Қуйидаги $\int\frac{dx}{x}$ интегрални бўлаклаб интеграллаш натижасида:

$$\int\frac{dx}{x} = \begin{bmatrix} du = dx, & v = \frac{1}{x} \\ u = x, & dv = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \int\frac{dx}{x}$$

бўлиши келиб чиқади. Ҳатолик топилсин.

30-маъруза
Рационал ҳамда тригонометрик функцияларни интеграллаш

1^0. Алгебранинг баъзи маълумотлари ва тасдиқлари.

Биз қуйида алгебра курсида ўрганиладиган баъзи тушунча-ларни ҳамда тасдиқларни (исботсиз) келтирамиз. Улардан рационал функцияларни интеграллашда фойдаланилади.

Айтайлик,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (1)$$

кўпҳад берилган бўлсин, бунда $a_k \in R$, $k = 0,1,2,\ldots,n$, $n \in N$ эса кўпҳаднинг даражаси.

Агар $\alpha \in R$ учун $P_n(\alpha)=0$ бўлса, α сон $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи дейилади. Бу ҳолда $P_n(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлиниб, у қуйидагича

$$P_n(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

кўринишда ифодаланади, бунда $Q(x)-(n-1)-$даражали кўпҳад.

Агар $P_n(x)$ кўпҳад $(x-\alpha)^k$ $(k\in N)$ га бўлинса, α сон $P_n(x)$ нинг $k-$каррали илдизи бўлади. Бу ҳолда $P_n(x)$ ушбу

$$P_n(x)=(x-\alpha)^k R(x)$$

кўринишда ифодаланади,бунда $R(x)-(n-k)$ даражали кўпҳад.

Агар $z=\alpha+i\beta$ комплекс сон $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи бўлса, $\bar{z}=\alpha-i\beta$ ҳам $P_n(x)$ нинг илдизи бўлади. Шунингдек, $z=\alpha+i\beta$ сон $P_n(x)$ нинг k каррали илдизи бўлса, $\bar{z}=\alpha-i\beta$ сон ҳам шу $P_n(x)$ кўпҳаднинг k каррали илдизи бўлади. У ҳолда $P_n(x)$ кўпҳаднинг ифодасида қуйидаги

$$(x-z)(x-\bar{z})=\left[x-(\alpha+i\beta)\right]\left[x-(\alpha-i\beta)\right]=$$
$$=x^2+px+q \quad (p=-2\alpha, \quad q=\alpha^2+\beta^2)$$

квадрат учҳад кўпайтувчи бўлиб қатнашади.

Фараз қилайлик,

$$Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \tag{2}$$

кўпҳад берилган бўлиб, $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ ҳақиқий сонлар $Q_n(x)$ нинг мос равишда $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ каррали илдизлари, $z_1,z_2,...,z_s$ комплекс сонлар эса $Q_n(x)$ нинг мос равишда $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s$ каррали илдизлари бўлсин.

1-теорема. Ҳар қандай $n-$даражали

$$Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

кўпҳад $(a_m\in R\,,\, m=0,1,2,...,n, \quad a_n\neq 0)$ ушбу

$$\begin{aligned}Q_n(x)=(x-\alpha_1)^{\lambda_1}(x-\alpha_2)^{\lambda_2}...(x-\alpha_k)x^{\lambda_k}\cdot(x^2+p_1x+\\+q_1)^{\gamma_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\gamma_2}...(x^2+p_sx+q_s)^{\gamma_s}\end{aligned} \tag{3}$$

кўринишда ифодаланади, бунда

$$\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_k+2(\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_s)=n,$$

бўлиб, $x^2+p_ix+q_i \quad (i=1,2,...,s)$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас.

Маълумки,

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n, \qquad (n\in N)$$
$$Q_s(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_sx^s, \qquad (s\in N)$$

кўпҳадлар $(a_i\in R,\ b_j\in R;\ i=0,1,2,...,n;\ j=0,1,2,\dots,s)$ нисбати

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_sx^s}$$

каср рационал функция дейилиб, $n<s$ бўлганда у тўғри каср дейилар эди.

2-теорема. Агар $\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$ тўғри каср махражидаги $Q_s(x)$ кўпҳад ушбу

$$Q_s(x) = (x-\alpha)^m\, Q(x) \qquad (m \in N)$$

кўринишда бўлиб, $Q(x)$ кўпҳад $x-\alpha$ га бўлинмаса, у ҳолда

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлади, бунда $A_i \in R, i = 1, 2, \ldots, m$; $P(x)$ - кўпҳад.

3-теорема. Агар $\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$ тўғри каср махражидаги $Q_s(x)$ кўпҳад ушбу

$$Q_s(x) = (x^2 + px + q)^m\, Q(x) \qquad (m \in N)$$

кўринишда бўлиб, ($x^2 + px + q$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас),

$Q(x)$ кўпҳад $x^2 + px + q$ га бўлинмаса, у ҳолда

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{B_m x + C_m}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{B_{m-1} x + C_{m-1}}{(x_2 + px + q)^{m-1}} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

бўлади, бунда $B_i \in R,\quad C_i \in R,\ i = 1,2,\ldots,m;\quad P(x)$ -кўпҳад.

Юқорида келтирилган 2- 3- теоремалар ихтиёрий тўғри каср ҳар бири ҳади ушбу

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \qquad (a \in R,\ \ A \in R, \quad m \in N);$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}, \quad (B \in R,\ C \in R,\ \ p \in R, q \in R,$$

$$p^2 - 4q < 0,\ m \in N)$$

кўринишдаги касрлардан, яъни содда касрлардан иборат бўлган йиғинди орқали ифодаланишини кўрсатади. Бундай ҳолда тўғри каср содда касрларга ёйилади дейилади.

Айтайлик,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} \qquad (n \in N,\ \ s \in N),\ n < s)$$

тўғри каср берилган бўлсин. Амалиётда бу каср содда каср-ларга қуйидагича ёйилади:

1) Касрнинг махражи $Q_s(x)$ кўпҳад (3) кўринишда ёзила-ди,

2) 2- 3- теоремалардан фойдаланиб,

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)}$$

ни содда касрларга ёйилади,

3) Бу ёйилманинг ўнг томонидаги содда касрлар йиғин-диси умумий махражга келтирилади,

4) Натижада ҳосил бўлган

$$\frac{P_n(x)}{Q_s(x)} = \frac{R_n(x)}{Q_s(x)},$$

яъни,

$$P_n(x) = R_n(x)$$

тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даража-лари олдидаги коэффицентларни тенглаштириб, номаълум коэффицентларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил қилинади.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$$

тўғри каср содда касрларга ёйилсин.

◀ Бу касрнинг махражи

$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2$$

бўлгани учун 2–теоремага кўра

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

бўлади. Уни

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A(x+2)^2 + x(x+2)B + Cx}{x(x+2)^2}$$

кўринишда ёзиб, ушбу

$$3x^2+8 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx =$$

$$= (A+B)x^2 + (4A+2B+C)x + 4A$$

тенгликка келамиз. Икки кўпҳаднинг тенглигидан фойдала-ниб, ушбу

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 4A+2B+C=0 \\ 4A=8 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз ва уни ечиб

$$A=2, \quad B=1, \quad C=-10$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{-10}{(x+2)^2}. \blacktriangleright$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}$$

тўғри каср содда касрларга ёйилсин.

◀Равшанки,

$$x^4+x = x(x+1)(x^2-x+1).$$

Унда

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

бўлади.

Кейинги тенгликдан

$$x^3+4x^2-2x+1=A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x)=$$

$$=(A+B+C)x^3+(C+D-B)x^2+(B+D)x+A$$

бўлиши келиб чиқади. У тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенг-лаштириб, A,B,C,D ларни топиш учун қуйидаги

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ C+D-B=4, \\ B+D=-2 \\ A=1 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Уни ечиб топамиз:

$$A=1, \quad B=-2, \quad C=2, \quad D=0.$$

Демак,

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}. \ \blacktriangleright$$

2^0. Рационал функцияларни интеграллаш. Фараз қилай-лик, $f(x)$ рационал функция бўлиб, унинг интегралини ҳисоб-лаш талаб этилсин.

Айтайлик, $f(x)$ бутун рационал функция

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

бўлсин. Унда

$$\int f(x)dx=\int(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n)dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+...+a_n\frac{x^n}{n}+C$$

бўлади.

Айтайлик, $f(x)$ каср рационал функция

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$(n\in N, \quad m\in N)$$

бўлсин. Агар $n\geq m$ бўлса, унда $P_n(x)$ кўпҳадни $Q_m(x)$ кўпҳадга бўлиш билан $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ нинг бутун қисмини ажратиб, бутун рационал функция ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишида ифодалаб олинади:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{\bar{P}_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Равшанки,

$$\int f(x)dx = \int R(x)dx + \int \frac{\bar{P}_n(x)}{Q_m(x)}dx\,.$$

Демак,

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \qquad (n > m)$$

рационал функцияни интеграллаш тўғри касрни интеграл-лашга келади. Тўғри касрларни интеграллаш учун аввало уни 1^0. да келтирилган усул билан содда касрларга ёйилади. Содда касрларни интеграллаш эса 29-маърузада батафсил баён этилган.

3-мисол. Ушбу

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Интеграл остидаги рационал функцияни содда каср-ларга ёямиз:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{10}{(x+2)^2}\,.$$

Демак,

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+2} - 10\int \frac{dx}{(x+2)^2} =$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x+2| + \frac{10}{x+2} + C.$$ ►

4-мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Интеграл остидаги функция-рационал функция бўлиб, у нотўғри касрдир. Бу касрнинг сурати $x^6+2x^4+2x^2-1$ кўп-ҳадни махражи $x(x^2+1)^2$ кўпҳадга бўлиб, унинг бутун қисми-ни ажратамиз:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^6+2x^4+2x^2-1 & x^5+2x^3+x \\ \cline{2-2} x^6+2x^4+x^2 & x \\ \cline{1-1} x^2-1 & \end{array}$$

Демак,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}\,.$$

Энди

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

тўғри касрни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)\,x(x^2+1)+(Dx+E)\,x=$$

$$=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Кейинги тенгликдан

$$A=-1,\ B=1,\quad C=0,\quad D=2,\quad E=0$$

бўлишини топамиз.

Демак,

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Натижада,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}=x-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

бўлиб,

$$\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\int xdx-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$$

бўлади. ►

3^0.Икки ўзгарувчининг рационал функцияси ҳақида. Икки u ва v ўзгарувчилар берилган бўлиб, бу ўзгарувчилар ёрдамида ушбу

$$u^n\,v^m\qquad (n=0,1,2\,,...\,;\quad m=0,1,2,\,...)$$

кўпайтмани тузамиз. Қуйидаги

$$P(u,v)=a_{00}+a_{10}u+a_{01}v+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2+...$$

$$+a_{n0}u^n+a_{(n-1)1}u^{n-1}v+...++a_{1(n-1)}uv^{n-1}+a_{0n}v^n$$

функция u ва v ўзгарувчиларнинг кўпҳади дейилади, бунда $a_{00},a_{10},a_{01},...,a_{0n}$ – ҳақиқий сонлар.

Айтайлик, $P(u,v)$ ҳамда $Q(u,v)$ лар u ва v ўзгарувчи-ларнинг кўпҳадлари бўлсин. Ушбу

$$\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}\qquad\qquad (Q(u,v)\neq 0)$$

нисбат u ва v ўзгарувчиларнинг рационал функцияси дейи-лади ва $R(u,v)$ каби белгиланади:

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}\ . \qquad (Q(u,v)\neq 0).$$

Фараз қилайлик, u ва v ўзгарувчиларнинг ҳар бири ўз навбатида x ўзгарувчининг

$$u=\varphi(x),$$
$$v=\psi(x)$$

функциялари бўлсин. У ҳолда $R(u,v)$ функция $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функцияларнинг рационал функцияси бўлади.

Масалан,

$$f(x)=\frac{x-2\sqrt[3]{x^2-1}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-1}}$$

функция

$$u=\sqrt{x}\ , \quad v=\sqrt[3]{x^2-1}$$

ларнинг рационал функцияси бўлади, чунки

$$R(u,v)=\frac{u^2-2v+1}{u+v}.$$

Хусусан, $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ ларнинг ҳар бири x ўзгарувчининг рационал функциялари бўлса, у ҳолда

$$R(u,v)=R(\varphi(x),\psi(x))$$

функция шу x ўзгарувчини рационал функцияси бўлади.

Энди $R(u,v)$ рационал функциянинг содда хоссаларини келтирамиз:

1) Агар

$$R(-u,v)=R(u,v)$$

бўлса, у ҳолда бу рационал функция ушбу

$$R(u,v)=R_1(u^2,v)$$

кўринишга келади, бунда R_1 ҳам рационал функция.

2) Агар

$$R(-u,v)=-R(u,v)$$

бўлса, у ҳолда бу рационал функция ушбу

$$R(u,v)=R_2(u^2,v)u$$

кўринишга келади, бунда R_2 рационал функция.

3) Агар

$$R(-u,-v)=R(u,v)$$

бўлса, у ҳолда бу рационал функция ушбу

$$R(u,v)=R_2(\frac{u}{v},v^2)$$

кўринишга келади, бунда R_2 рационал функция.

4^0. Тригонометрик функцияларни интеграллаш.

Айтайлик, $R(u,v)$ икки ўзгарувчининг рационал функция-си бўлсин. Ушбу

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \tag{4}$$

интегрални қараймиз. Бу интегралда

$$t = tg\frac{x}{2}$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

бўлиб,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

бўлади.

Равшанки,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}$$

ифода t нинг рационал функциясидир.
Демак, (4) интегрални ҳисоблаш

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$$

алмаштириш билан рационал функцияни интеграллашга келади.

5-мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}$$

интеграл хисоблансин.

◄ Бу интегралда

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$$

алмаштириш бажариб топамиз:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + C. \blacktriangleright$$

Айрим ҳолларда $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \mathrm{tg}x$ алмаштиришлар қулай бўлади.

Айтайлик, $R(u,v)$ рационал функция учун

$$R(-u,v) = -R(u,v)$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int R_2(1-t^2, t)\,dt$$

бўлади.

Айтайлик, $R(u,v)$ рационал функция учун

$$R(u,-v) = -R(u,v)$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_3(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int R_3(t, 1-t^2)\,dt$$

бўлади.

Айтайлик, $R(u,v)$ рационал функция учун

$$R(-u,-v) = R(u,v)$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_2(tgx, \cos^2 x)\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt \end{matrix} \right| = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

бўлади.

6-мисол. Ушбу

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Интеграл остидаги функция учун $R(-u,v) = -R(u,v)$ бўлади. Шунинг учун $\cos x = t$ дейилса, унда $-\sin x dx = dt$ бўлиб,

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int (t^2-1)t^4 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

бўлади. ►

Машқлар

1. Ушбу

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}$$

тўғри каср содда касрларга ажратилсин.

2. Ушбу

$$\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

31-маъруза

Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

1⁰. $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ **кўринишидаги интегралларни ҳисоб-лаш.** Фараз қилайлик, $R(u,v)$ икки ўзгарувчининг рационал функцияси бўлиб, a,b,c,d лар ҳақиқий сонлар, $n\in N$ бўлсин.

Ушбу

$$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx \quad , \quad ad-bc\neq 0,$$

кўринишидаги интегралларни қараймиз. Бу интеграл ўзгарув-чини алмаштириш ёрдамида рационал функциянинг интегралига келади:

$$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,x=\frac{b-t^n d}{ct^n-a}\\ dx=\frac{(ad-bc)n}{(a-ct^n)^2}t^{n-1}dt\end{array}\right|=$$

$$=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},\, t\right)\cdot\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt\,.$$

1-мисол. Ушбу

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Бу интегралда

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad , \quad dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$$

бўлиб,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=t-\mathrm{arctg}t+C\,.$$

Демак,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C \text{ ▶}$$

2^0. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.

Бу интегралда a,b,c-ҳақиқий сонлар бўлиб, ax^2+bx+c квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас.

Қаралаётган

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \tag{1}$$

интеграл қуйидаги учта алмаштириш ёрдамида рационал функция интегралига келади.

а) $a>0$ бўлсин.

(1) интегралда ушбу

$$t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (\text{ёки } \; t=-\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c}\,)$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,xt+ax^2,$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} \quad , \quad dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$$

бўлади.

Натижада

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\,,\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Бу интегралда

$$t=x+\sqrt{x^2+x+1}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t} \quad , \quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2t}dt$$

бўлади.

Агар

$$\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}=\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}\right)dt=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}+C=$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| +$$

$$+\frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})}+C$$

бўлиши келиб чиқади. ►

б) $c>0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) интегралда ушбу

$$t=\frac{1}{x}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c})$$

ёки

$$t=\frac{1}{x}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}\right)$$

алмаштиришини бажарамиз. Унда

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2} \quad , \qquad dx=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a+t)^2}dt \ ,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}\ t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}$$

бўлиб, (1) интеграл рационал функциянинг интегралига келади:

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},\ \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\left(\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a+t)^2}\right)dt$$

в) ax^2+bx+c квадрат учҳад турли x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизга эга бўлсин:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\,.$$

Бу ҳолда (1) интегралда ушбу

$$t=\frac{1}{x-x_1}\sqrt{ax^2+bx+c}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a} \quad , \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t$$

$$dx=\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

бўлиб,

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}\quad ,\quad \frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t\right)\cdot\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Равшанки,

$$x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2).$$

Шуни эътиборга олиб берилган интегралда

$$t=\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+3x+2}$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1}\qquad,\qquad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

бўлиб,

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}dt$$

бўлади.

Энди

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}=\frac{\frac{3}{4}}{t-1}-\frac{\frac{16}{27}}{t-2}-\frac{\frac{17}{108}}{t+1}+\frac{\frac{5}{18}}{(t+1)^2}+\frac{\frac{1}{3}}{(t+1)^3}$$

бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$I=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}dt=\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2}-$$

$$-\frac{17}{108}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3}=\frac{3}{4}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}+C.\ ►$$

3^0. Биномиал дифференциални интеграллаш. Ушбу

$$x^m(a+bx^n)^P\,dx$$

ифода биномиал дифференциал дейилади, бунда $a\in R$, $b\in R$, m,n,p - рационал сонлар.

Биномиал дифференциалнинг интеграли

$$\int x^m(a+bx^n)^P\,dx \qquad (2)$$

ни қараймиз. Бу интеграл қуйидаги ҳолларда рационал функциянинг интегралига келади:

1) p-бутун сон. Бу ҳолда m ва n рационал сонлар махражларининг энг кичик умумий карралисини δ орқали белгилаб, (2) интегралда

$$x=t^\delta$$

алмаштириш бажарилса, (2) интеграл рационал функция-нинг интегралига келади.

4-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Бу интегрални қуйидагича

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}dx$$

ёзиб, бунда $p=-2$ бўлишини аниқлаймиз.

Интегралда

$$x=t^6$$

алмаштириш бажариб

$$I=6\int\frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt$$

бўлишини топамиз.

Равшанки,

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2}=t^4-2t^2+3-\frac{4}{t^2+1}+\frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

Демак,

$$\int\frac{t^8}{(1+t^2)^2}dt=\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+3t-4\mathrm{arctg}\,t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t+C$$

бўлиб,

$$I=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}-21\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}+C$$

бўлади. ►

2) $\boldsymbol{\frac{m+1}{n}}$ **- бутун сон.** Бу ҳолда (2) интегралда

$$x=t^{\frac{1}{n}}$$

алмаштиришни бажариб

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int(a+bt)^p\cdot t^q\,dt$$

бўлишини топамиз, бунда

$$q=\frac{m+1}{n}-1.$$

Сўнг p нинг махражини s деб

$$z=(a+bt)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштиришни бажарамиз. Натижада (2) интеграл рационал функциянинг интегралига келади.

5-мисол. Ушбу

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Бу интегралда

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$m=1, \quad n=\frac{2}{3}, \quad p=-\frac{1}{2}$$

бўлиб,

$$\frac{m+1}{n}=3$$

бўлади.

Шуни эътиборга олиб, берилган интегралда,

$$t=(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

алмаштиришни бажарамиз. Унда

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^2 \ , \ x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}} \ , \quad dx=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2tdt$$

бўлиб,

$$\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx=3\int(t^2-1)^2t^2dt=3\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+t^3+C, \quad t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}$$

бўлади. ▶

3) $p+q$ - бутун сон. Маълумки, (2) интеграл $x=t^{\frac{1}{n}}$ алмаш-тириш билан ушбу

$$\frac{1}{n}\int(a+bt)^p\cdot t^{\frac{m+1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\int(a+bt)^p\cdot t^q dt=\frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p\cdot t^{p+q}dt$$

кўринишга келади.

Агар кейинги интегралда

$$z=\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

алмаштириш бажарилса (s сони p нинг махражи), у рационал функциянинг интегралига келади.

6-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Равшанки,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2+3x^2}} = \int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Демак**,**

$$m=-2,\ n=2\ ,\ p=-\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{m+1}{n}+p=-1$$

бўлиб, $p+q$-бутун сон бўлади.

Берилган интегралда

$$t=\left(\frac{2+3x^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}$$

алмаштириш бажариб,

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-3}}\quad ,\quad dx=-\frac{\sqrt{2}tdt}{\sqrt{(t^2-3)^3}}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{2+3x^2}} = \int x^{-2}(2+3x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$=\int(-\frac{dt}{2}) = -\frac{t}{2}+C = -\frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+3}}{2}+C$$

бўлишини топамиз. ▶

Машқлар

1. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$$

интеграл ҳисоблансин.

2. Ушбу

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}$$

интеграл ҳисоблансин.

8-БОБ
АНИҚ ИНТЕГРАЛ

32-маъруза
Аниқ интеграл тушунчаси

1^0. Сегментни бўлаклаш. Бирор $[a,b]\subset R$ сегмент берил-ган бўлсин. Бу сегментнинг қуйидаги

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\ x_n \qquad (1)$$

нуқталари тўпламини олайлик.

Равшанки, (1) тўплам $[a,b]$ сегментни

$$B_1 = [x_0, x_1],\ B_2 = [x_1,\ x_2],\ \ldots,\ B_n = [x_{n-1}, x_n]$$

бўлакларга ажратади.

1-таъриф. Ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\ x_n$$

нуқталар тўплами $[a,b]$ сегментни бўлаклаш дейилади ва

$$P = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\ x_n\}$$

каби белгиланади.

Бунда ҳар бир x_k $(k=0,1,2,\ldots,n)$ нуқта $[a,b]$ сегментнинг бўлувчи нуқтаси, $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ сегмент эса P бўлаклашнинг оралиғи дейилади.

Қуйидаги

$$\lambda_p = \max\{\Delta x_k\} \quad , \qquad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

миқдор P бўлаклашнинг диаметри дейилади.

Масалан, $[a,b]=[0,1]$ бўлганда қуйидаги

$$0, \ \frac{2}{10}, \ \frac{4}{10}, \ \frac{6}{10}, \ \frac{8}{10}, \ \frac{10}{10}=1 \ ;$$

$$0, \ \frac{1}{10}, \ \frac{4}{10}, \ \frac{5}{10}, \ \frac{6}{10}, \ \frac{10}{10}=1$$

нуқталар системаси $[0,1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{0, \ \frac{2}{10}, \ \frac{4}{10}, \ \frac{6}{10}, \ \frac{8}{10}, 1\right\},$$

$$P_2 = \left\{0, \ \frac{1}{10}, \ \frac{4}{10}, \ \frac{5}{10}, \ \frac{6}{10}, \ 1\right\}$$

бўлаклашларини ҳосил қилади. Уларнинг диаметрлари мос равишда

$$\lambda_{p_1} = \frac{1}{5} \quad , \qquad \lambda_{p_2} = \frac{2}{5}$$

бўлади.

Юқоридаги келтирилган таъриф ва мисоллардан кўрина-дики, $[a,b]$ сегментнинг турли усулар билан исталган сондаги бўлаклашларини тузиш мумкин. Бу бўлаклашлардан иборат тўпламни $\wp$ билан белгилаймиз:

$$\wp = \{P\}.$$

2^0. Дарбу ҳамда интеграл йиғиндилар. $f(x)$ функция $[a,b]$ да аниқланган ва чегараланган бўлсин. Унда

$$\exists m \in R \ , \quad \exists M \in R \ , \quad \forall x \in [a,b] \quad : \quad m \le f(x) \le M$$

бўлади.

Айтайлик,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

$[a,b]$ сегментнинг бирор бўлаклаши бўлсин. У ҳолда бу бўлак-лашнинг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$ оралиғида

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k \ x_{k+1}] \ , \\ M_k &= \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k \ x_{k+1}] \end{aligned} \qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

мавжуд бўлиб

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \le m_k \le M_k \le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \qquad (2)$$

бўлади.

2-таъриф. Ушбу

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан Дарбунинг қуйи йиғиндиси дейилади.

Равшанки, бу йиғинди $f(x)$ функцияга ҳамда $[a,b]$ нинг P бўлаклашига боғлиқ бўлади:

$$s = s(f;P) \quad .$$

3-таъриф. Ушбу

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан Дарбунинг юқори йиғиндиси дейилади.

Бу йиғинди $f(x)$ функцияга ҳамда $[a,b]$ нинг P бўлак-лашига боғлиқ бўлади:

$$S = S(f;P) \quad .$$

Энди ҳар бир $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ нинг қийматида $[x_k, x_{k+1}]$ сегментда ихтиёрий ξ_k нуқтани тайинлаймиз: $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$. Натижада $[a,b]$ нинг P бўлаклашига нисбатан

$$\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}\}$$

нуқталар тўплами ҳосил бўлади. Бу нуқталардаги $f(x)$ функциянинг

$$f(\xi_k) \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

қийматлари ёрдамида ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

йиғиндини тузамиз.

4-таъриф. Қуйидаги

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

йиғинди $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментнинг P бўлаклашига нисбатан интеграл йиғиндиси дейилади.

Интеграл йиғинди, $f(x)$ функцияга, P бўлаклашга ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да олинган ξ_k нуқталарга боғлиқ бўлади:

$$\sigma = \sigma(f;P;\xi_k).$$

Равшанки, $\xi_k \in [x_k \ , \ x_{k+1}]$ учун

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k$$

бўлиб, айни пайтда

$$s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi_k) \le S(f;P) \tag{3}$$

тенгсизликлар бажарилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = |x|$$

функциянинг $[-1, \ \ 1]$ сегментда қуйидаги

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ 1\right\}$$

бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари ҳамда

$$\xi_k = x_k \qquad (k = 0,1,2,\ldots,7)$$

деб, интеграл йиғинди топилсин.

◀ Берилган $f(x) = |x|$ функция учун $[-1,\ 1]$ сегментнинг

$$P = \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

бўлаклашида

$$m_0 = \frac{3}{4},\quad m_1 = \frac{1}{2},\quad m_2 = \frac{1}{4},\quad m_3 = 0,$$

$$m_4 = 0,\quad m_5 = \frac{1}{4},\quad m_6 = \frac{1}{2},\quad m_7 = \frac{3}{4}$$

$$M_0 = 1,\ M_1 = \frac{3}{4},\ M_2 = \frac{1}{2},\ M_3 = \frac{1}{4},$$

$$M_4 = \frac{1}{4},\ M_5 = \frac{1}{2},\ M_6 = \frac{3}{4},\ M_7 = 1$$

ҳамда

$$\xi_0 = -1,\ \xi_1 = -\frac{3}{4},\ \xi_2 = -\frac{1}{2}, \xi_3 = -\frac{1}{4},$$

$$\xi_4 = 0,\ \xi_5 = \frac{1}{4},\ \xi_6 = \frac{1}{2},\ \xi_7 = \frac{3}{4},$$

$$f(\xi_0) = 1,\ f(\xi_1) = \frac{3}{4},\ f(\xi_2) = \frac{1}{2},\ f(\xi_3) = \frac{1}{4},$$

$$f(\xi_4) = 0,\ f(\xi_5) = \frac{1}{4},\ f(\xi_6) = \frac{1}{2}, f(\xi_7) = \frac{3}{4}$$

бўлади.

Энди $\Delta x_k = \dfrac{1}{4} \quad (k = 0,1,2,\ldots,7)$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$s(f;P) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$S(f;P) = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\right)\cdot\frac{1}{4} = 5,$$

$$\sigma(f;P;\xi_k) = \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = 1. \blacktriangleright$$

3^0. Аниқ интеграл таърифи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ да берилган ва чегараланган бўлсин. Унда $[a,b]$ оралиқнинг ҳар қандай P бўлаклаши ҳамда ҳар қандай ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ ларда юқоридаги (2) ва (3) муносабатлар ўринли бўлиб,

$$\begin{aligned}(b-a)\cdot\inf_{[a,b]}\{f(x)\} \le s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \\ \le S(f;P) \le (b-a)\cdot\sup_{[a,b]}\{f(x)\}\end{aligned} \tag{4}$$

бўлади.

Энди $[a,b]$ сегментнинг бўлаклашлар тўплами $\mathcal{P}=\{P\}$ нинг ҳар бир $P\in\mathcal{P}$ бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари $s(f,P)$ ва $S(f;P)$ ни тузиб , ушбу

$$\{s(f;P)\}\ ,\ \{S(f;P)\}$$

тўпламларни қараймиз. Бу тўпламлар (4) муносабатга кўра чегараланган бўлади.

5-таъриф. $\{s(f;P)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги қуйи интеграли дейилади ва

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_P\{s(f;P)\}.$$

6-таъриф. $\{S(f;P)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги юқори интеграли дейилади ва

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_P\{S(f;P)\}.$$

7-таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг қуйи ҳамда юқори интеграллари бир-бирига тенг

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлса, $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқ бўйича интегралланувчи (Риман маъносида интегралланувчи) дейилади.

Бунда қуйи ҳамда юқори интегралларнинг умумий қиймати $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли (Риман интеграли) дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx.$$

a сон интегралнинг қуйи чегараси, b сон эса интегралнинг юқори чегараси, $[a,b]$ сегмент интеграллаш оралиғи дейилади.

Эслатма. Юқорида келтирилган $f(x)$ функциянинг интеграли таърифига биноан интеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

ўзгармас сонни ифодалайди. Бинобарин, интеграл остида ўзгарувчининг қандай ёзилишига боғлиқ бўлмайди:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt \ .$$

2-мисол. $f(x) = C$, $C \in R$, $x \in [a,b]$ бўлсин.

Бу функциянинг интегралланувчанлиги аниқлансин.

◄ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

бўлаклашини олиб, унга нисбатан Дарбу йиғиндиларини топамиз:

$$s(C;P) = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x = C \cdot (b-a) \ ,$$

$$S(C;P) = \sum_{k=0}^{n-1} C \cdot \Delta x_k = C \cdot (b-a) \ .$$

Бундан

$$\operatorname*{Sup}_{P}\{s(C;P)\} = C \cdot (b-a) \ ,$$

$$\inf_{P}\{S(C;P)\} = C \cdot (b-a)$$

бўлиб,

$$\int_{\underline{a}}^{b} C \cdot dx = \int_{a}^{\overline{b}} C \cdot dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $f(x) = C$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи ва

$$\int_{a}^{b} C \cdot dx = C \cdot (b-a).$$

Хусусан , $f(x) = 1$ бўлганда

$$\int_{a}^{b} dx = b - a$$

бўлади. ►

3-мисол. $f(x)=D(x)$, $x\in[0,1]$ бўлсин. Бу Дирихле функ-циясини [0,1] да интегралланувчиликка текширилсин.

◀ [0,1] сегментнинг ихтиёрий P бўлаклашига нисбатан Дирихле функциясининг Дарбу йиғиндилари

$$s(D;P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k=0\ ,$$

$$S(D;P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k=b-a$$

бўлиб,

$$\sup_P\{s(D;P)\}=0\ ,\quad \inf_P\{S(D;P)\}=b-a$$

бўлади . Демак,

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx=0,\qquad \overline{\int_0^1} D(x)dx=b-a\ ,$$

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx\neq\overline{\int_0^1} D(x)dx.$$

Дирихле функцияси интегралланувчи эмас. ▶

4^0. Интеграл йиғиндининг лимити. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган бўлиб, у шу сегментда чегараланган бўлсин.

$[a,b]$ сегментни бирор

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\}$$

бўлаклашини оламиз.

Маълумки, $f(x)$ функциянинг бу бўлаклашга нисбатан интеграл йиғиндиси

$$\sigma(f;P;\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлади.

8-таъриф. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилсаки, $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклаши учун тузилган $\sigma(f;P;\xi_k)$ йиғинди ихтиё-рий ξ_k нуқталарда

$$|\sigma(f;P;\xi_k)-J|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k-J\right|<\varepsilon$$

тенгсизликни бажарса, J сон $\sigma(f;P;\xi_k)$ йиғиндининг $\lambda_P\to0$ даги лимити дейилади ва

$$\lim_{\lambda_P\to0}\sigma(f;P;\xi_k)=J$$

каби белгиланади.

Бу таърифни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\forall\varepsilon>0\ \ ,\ \exists\delta>0\ \ ,\ \forall P\in\rho\ \ \ ,\ \lambda_P<\delta\ ,\ \forall\xi_k$$

учун

$$\left|\sigma(f;P;\xi_k)-J\right|<\varepsilon$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma(f;P;\xi_k)=J$$

дейилади.

9-таъриф. Агар $\lambda_P\to 0$ да $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндиси $\sigma(f;P;\xi_k)$ чекли J лимитга эга бўлса, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда интегралланувчи (Риман маъносида интеграл-ланувчи) дейилади, J сонига эса $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегмент бўйича аниқ интеграли дейилади. Уни

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\quad .$$

4-мисол. $f(x)=x$, $x\in[a,b]$ бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли топилсин.

◄ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\}$$

бўлаклашини олиб унга нисбатан $f(x)=x$ функциянинг интег-рал йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma(f;P;\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cdot\Delta x_k\ \ ,$$

бунда

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k\quad ,\quad x_k\le\xi_k\le x_{k+1}\quad (k=0,1,,2,...,n-1).$$

Энди

$$x_k\le\xi_k\le x_{k+1}$$

тенгсизликларни $\Delta x_k>0$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган

$$x_k\cdot\Delta x_k\le\xi_k\cdot\Delta x_k\le x_{k+1}\cdot\Delta x_k$$

тенгсизликларни k нинг $0,1,2\ ,\dots,n-1$ қийматлари бўйича ҳад-лаб қўшиб

$$\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\cdot\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\cdot\Delta x_k\quad ,$$

яъни

$$\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot\Delta x_k\le\sigma(f;P;\xi_k)\le\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\cdot\Delta x_k\qquad (3)$$

бўлишини топамиз.

Бу тенгсизликлардаги

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k \quad , \qquad \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k$$

йиғиндиларни Δx_k лар орқали ифодалаймиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k{}^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_n{}^2 - x_0{}^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 \quad ,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(x_k + \Delta x_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 .$$

Натижада (3) тенгсизликлар ушбу

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2$$

кўринишга келади. Бу муносабатдан

$$\left|\sigma(f;P;\xi_k) - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 .$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k{}^2 \le \lambda_P \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{b-a}{2}\lambda_P \ .$$

Демак, $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{b-a}$ дейилса, у ҳолда $\lambda_p < \delta$ бўлган ихтиёрий P бўлаклаш ва ихтиёрий ξ_k ларда

$$\left|\sigma(x;P;\xi_k) - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k \cdot \Delta x_k - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| < \varepsilon$$

бўлади. Бу эса

$$\lim_{\lambda_p \to 0}\sigma(x;P;\xi_k) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \lim_{\lambda_p \to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k \cdot \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

бўлишини билдиради. Демак,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} . \blacktriangleright$$

Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг аниқ интеграли икки хил таърифланади. Бу таърифлар эквивалент таърифлар бўлади. (Қаралсин, [1] 9-боб)

Одатда, $[a,b]$ сегмент бўйича интегралланувчи функция-лар тўплами $R([a,b])$ каби белгиланади:

$f(x) \in R([a,b]) \Leftrightarrow f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи.

Машқлар

1. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ да чегараланганлиги унинг $[a,b]$ да интегралланувчи бўлишининг зарурий шарти экани исбот-лансин.

2. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ да берилган ва чегараланган бўлиб, P эса $[a,b]$ нинг ихтиёрий бўлаклаши бўлсин. Агар $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \leq g(x)$ бўлса,

$$s(f,p) \leq s(g,p)$$
$$S(f,p) \leq S(g,p)$$

бўлиши исботлансин.

33-маъруза
Функциянинг интегралланувчилик мезони (критерийси)

1^0. Дарбу йиғиндиларининг хоссалари. $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган ва чегараланган бўлиб,

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\}$$

$[a,b]$ нинг бирор бўлаклаши бўлсин. Равшанки, бу ҳолда $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари

$$s(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k \quad ,$$

$$S(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k$$

мавжуд бўлади, бунда

$$m_k=\inf\{f(x)\}\ ,\qquad x\in[x_k,x_{k+1}]\quad ,$$

$$M_k=\sup\{f(x)\}\ ,\quad x\in[x_k,x_{k+1}]\quad ,$$

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k\quad ,\qquad k=0,1,2,\ ...\ ,n-1.$$

1) $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлаклашига нисбатан тузилган $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари учун

$$(b-a)\cdot\inf_{[a,b]}\{f(x)\}\le s(f;P)\le S(f;P)\le(b-a)\cdot\sup_{[a,b]}\{f(x)\}$$

бўлади.

◀ Бу муносабат 32-маърузадаги (3) тенгсизликлардан келиб чиқади. ▶

Айтайлик,

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\}$$

$[a,b]$ сегментнинг бирор бўлаклаши бўлсин. Бу бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари x_k $(k=0,1,2,\ ...\ ,n)$ қаторига янги бўлувчи нуқталарни қўшиб, $[a,b]$ сегментнинг бошқа P' бўлаклашини ҳосил қиламиз. Уни $P\subset P'$ каби белгилаймиз.

2) $[a,b]$ сегментининг ихтиёрий P ва P' бўлаклашлари $(P\subset P')$ учун

$$s(f;P)\le s(f;P')\ ,$$

$$S(f;P)\ge S(f;P')$$

муносабатлар ўринли бўлади.

◀ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n\}$$

бўлаклашини олайлик. Соддалик учун P' бўлаклаш P нинг барча бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта x' нуқтадан юзага келган бўлсин. Бу x' нуқта x_k ҳамда x_{k+1} нуқталар орасида жойлашсин:

$$x_k<x'<x_{k+1}.$$

Демак,

$$P'=\{x_0,x_1,x_2,...,x_k,x',x_{k+1},\ ...\ ,x_{n-1},x_n\}.$$

Бу бўлаклашларга нисбатан Дарбунинг қуйи йиғиндиларини ёзамиз:

$$s(f;P)=m_0\Delta x_0+m_1\Delta x_1+...+m_k\Delta x_k+...+m_{n-1}\Delta x_{n-1}$$

$$s(f;P') = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \ldots$$
$$\ldots + \left[m_k^1 \cdot (x^1 - x_k) + m_k^{11} \cdot (x_{k+1} - x^1)\right] + \ldots + m_{n-1} \cdot \Delta x_{n-1} \ ,$$

бунда,

$$m_k^1 = \inf\{f(x)\} \ , \ \ x \in [x_k, x'] \ ,$$
$$m_k^{11} = \inf\{f(x)\} \ , \ \ x \in [x', x_{k+1}] .$$

Энди $m_k^1 \geq m_k$, $m_k^{11} \geq m_k$ бўлишини эътиборга олиб топамиз:

$$s(f;P') - s(f;P) = m_k^1 (x' - x_k) + m_k^{11} (x_{k+1} - x') -$$
$$- m_k \Delta x_k \geq m_k (x' - x_k) + m_k (x_{k+1} - x') - m_k \Delta x_k = 0 .$$

Кейинги муносабатдан

$$s(f;P) \leq s(f;P')$$

бўлиши келиб чиқади.

Худди шунга ўхшаш,

$$S(f;P) \geq S(f;P')$$

бўлиши исботланади. ►

3) $[a,b]$ нинг ихтиёрий P_1 ва P_2 ($P_1 \in \mathfrak{P}$, $P_2 \in \mathfrak{P}$) бўлаклаш-ларга нисбатан Дарбу йиғиндилари учун

$$s(f;P_1) \leq S(f;P_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

◄ P_1 ва P_2 бўлаклашларнинг барча бўлувчи нуқталари ёрдамида $[a,b]$ нинг P' бўлаклашини ҳосил қиламиз. Равшанки,

$$P_1 \subset P', \ P_2 \subset P'$$

бўлади.

Юқорида келтирилган 1) ва 2) хоссалардан фойдаланиб топамиз:

$$s(f;P_1) \leq s(f;P') \leq S(f;P') \leq S(f;P_2) . \ ►$$

Натижа. $[a,b]$ сегментда чегараланган ихтиёрий $f(x)$ функция учун

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлади.

◄ Шартга кўра $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган. Демак,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P \{ s(f;P) \},$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \{ S(f;P) \}$$

интеграллар мавжуд.

Юқоридаги 3) хосса ҳамда аниқ чегара таърифларидан

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. ►

2^0. Интегралланувчилик мезони (критерийси). Энди $[a,b]$ сегментда берилган ва чегараланган $f(x)$ функциянинг аниқ интегралининг мавжудлиги масаласини қараймиз.

1-теорема. $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўли-ши учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топилиб, унга нисбатан

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Бу теорема қуйидагича ҳам ифодаланиши мумкин:

$$f(x)\in R([a,b])\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ ,\ \exists P\in\{P\}:\ S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon\,.$$

◀ **Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. Таърифга биноан

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олайлик. Унда қуйи ва юқори интегралларнинг таърифларига кўра

$$\exists P_1\in\{P\}\ :\qquad \underline{\int_a^b} f(x)dx-s(f;P_1)<\frac{\varepsilon}{2}\quad ;$$

$$\exists P_2\in\{P\}\ :\quad S(f;P_2)-\overline{\int_a^b} f(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади.

Энди $[a,b]$ сегментнинг P_1 ва P_2 бўлаклашларнинг барча бўлувчи нуқталаридан $[a,b]$ нинг P бўлаклашини ҳосил қиламиз.

Равшанки, $P_1\subset P$, $P_2\subset P$ бўлади. Дарбу йиғиндиларининг 1) ва 2) хоссаларидан фойдаланиб P бўлаклаш учун

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx-\frac{\varepsilon}{2}<s(f;P_1)\le s(f;P)\le S(f;P)\le S(f;P_2)<$$

$$<\overline{\int_a^b} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлишини топамиз.

Кейинги муносабатлардан

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик,

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists P\in\{P\}:\ \ S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

бўлсин. Унда юқорида келтирилган натижага кўра

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx\le\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлиб,

$$s(f;P)\le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f;P)$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$0\le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f;P)-s(f;P)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\forall\varepsilon>0\ :\ 0\le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

Кейинги тенгсизликдан топамиз:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx .$$

Демак, $f(x)\in R([a,b])$ ►

(Аниқ интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани қуйида-гича ҳам айтса бўлади:

$f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топилиб, $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_p<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашга нисбатан

$$S(f;p)-s(f;p)<\varepsilon$$

тенгсизликни бажарилиши зарур ва етарли)

Аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ ора-лиқдаги тебранишини ω_k орқали белгилаймиз.

У ҳолда

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k$$

бўлиб, 1-теорема қуйидагича ифодаланади:

$f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топилиб, унга нисбатан

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Демак,

$$f(x)\in R([a,b])\Leftrightarrow \forall\varepsilon\in 0\ ,\ \exists P\in\{P\}:\ \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$$

Машқлар

1. $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий бўлаклаши учун

$$s(\alpha\, f(x)+\beta;P)=\alpha\ s(f;P)+\beta(b-a)\ ,$$
$$S(\alpha\, f(x)+\beta;P)=\alpha\ S(f;P)+\beta(b-a)$$

бўлиши исботлансин, бунда $\alpha,\beta\in R$

2. Агар $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда $[a,b]$ нинг ихтиёрий бўлаклаши учун Дарбунинг қуйи ва юқори йиғиндилари $f(x)$ функциянинг интеграл йиғиндилари бўлиши исботлансин.

34-маъруза
Интегралланувчи функциялар синфи

1^0. Узлуксиз функцияларнинг интегралланувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ фукция $[a,b]$ оралиқда аниқланган бўлсин.

1-теорема. Агар $f(x)$ фукция $[a,b]$ да узлуксиз бўлса, у шу $[a,b]$ да интегралланувчи, яъни

$$C[a,b]\subset R([a,b])$$

бўлади.

◄ Модомики, $f(x)\in C[a,b]$ экан, у Кантор теоремасига кўра $[a,b]$ оралиқда текис узлуксиз бўлади. Кантор теоремасининг натижасига кўра, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta>0$ сон топиладики, $[a,b]$ оралиқни узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажралганда ҳар бир бўлакдаги фукциянинг тебраниши

$$\omega_к<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

бўлади. Унда $[a,b]$ оралиқни диаметри $\lambda_P<\delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклашда

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x)\in R([a,b])$. ►

2^0. Монотон фукцияларнинг интегралланувчилиги.

2-теорема. Агар $f(x)$ фукция $[a,b]$ сегметда чегаралан-ган ва монотон бўлса, у шу сегментда интегралланувчи бўлади.

◀ Айтайлик, $f(x)$ фукция $[a,b]$ сегментда ўсувчи бўлиб, $f(a) < f(b)$ бўлсин.

$\forall\varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра $\delta > 0$ ни

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

деймиз.

У холда $[a,b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_P < \delta$ бўлган ихтиёрий P бўлаклаш учун

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]\cdot\Delta x_k \le$$

$$\le \lambda_P \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right] = \lambda_P\cdot\left[f(b) - f(a)\right] < \frac{\varepsilon}{f(b - f(a)}\cdot\left[f(b) - f(a)\right] = \varepsilon$$

бўлади. Демак, $f(x) \in R([a,b])$. ▶

3⁰. Узиладиган фукцияларнинг интегралланувчилиги.

3-теорема. Агар $f(x)$ фукция $[a,b]$ сегментда чегаралан-ган ва шу сегментнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлса, фукция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлади.

◀ $f(x)$ фукция $[a,b]$ да чегараланган бўлсин. Демак,

$$\exists C \in R,\ \ \forall x \in [a,b]:\ \ |f(x)| \le C \qquad (C > 0)$$

бўлади.

Соддалик учун, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментнинг фақат битта x^* $(x^* \in [a,b])$ нуқтасида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарда узлуксиз бўлсин. $\forall\varepsilon > 0$ сонни олиб, унга кўра $\delta > 0$ сонни

$$\delta = \frac{\varepsilon}{16C}$$

деймиз.

x^* нуқтанинг δ атрофи $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ ни олиб, ушбу

$$[a,b] \setminus (x^* - \delta, x^* + \delta)$$

тўпламни қараймиз. Бу тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб, Кантор теоремасига биноан у текис узлуксиз бўлади. У ҳолда шундай $\gamma > 0$ сон топиладики,

$$\forall x', x'' \in \left[a, x^* - \delta\right], \qquad \left(\forall x', x'' \in \left[x^* + \delta, b\right]\right)$$

лар учун $|x' - x''| < \gamma$ бўлишидан

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $[a,b]$ сегментни диаметри $\lambda_P < \min(\delta,\gamma)$ бўлган ихтиёрий P бўлаклашини олиб, унга нисбатан

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k \tag{1}$$

йиғиндини тузамиз.

Бу йиғиндининг ҳар бир ҳадида $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ оралиқларнинг узунликлари Δx_k лар қатнашади.

(1) йиғиндининг ушбу

$$[x_k, x_{k+1}] \cap (x^* - \delta, x^* + \delta) = \emptyset$$

муносабат бажариладиган $[x_k, x_{k+1}]$ га мос ҳадларидан тузилган йиғиндини

$$\sum_k{}' \ \omega_k \cdot \Delta x_k$$

билан, қолган барча ҳадлардан (бундай ҳадлар учун

$$[x_k, x_{k+1}] \cap (x^* - \delta, x^* + \delta) \neq \emptyset$$

ёки

$$[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* - \delta\} \neq \emptyset$$

ёки

$$[x_k, x_{k+1}] \cap \{x^* + \delta\} \neq \emptyset$$

бўлади) ташкил топган йиғиндини

$$\sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

билан белгилаймиз.

Натижада

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k = \sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k + \sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, тенгликнинг ўнг томондаги қўшилувчилар учун

$$\sum_k{}' \omega_k \cdot \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_k{}' \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_k{}'' \omega_k \cdot \Delta x_k \le 2C \cdot \sum_k{}'' \Delta x_k \le 2 \cdot C \cdot 4\delta = 8C \cdot \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Демак,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Бу эса $f(x)$ фукциянинг $[a,b]$ да интегралланувчи экани-ни билдиради. ►

Машқлар

1. Айтайлик,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар } \ 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{агар } \ x = 0 \end{cases}$$

бўлсин. $f(x)\in R([0,1])$ бўлиши исботлансин.

2. $y=f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиб, унинг қийматлари $[c,d]$ га тегишли бўлсин. Агар $\Phi(y)$ функция $[c,d]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда мураккаб функция $\varphi(f(x))$ нинг $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиши исботлансин.

35-маъруза
Аниқ интегралларнинг хоссалари

1^0. Интегралнинг чизиқлилик ҳамда аддитивлик хоссалари.

1-хосса. Агар $f(x)\in R([a,b])$ ва $C\in R$ бўлса, у ҳолда $(C\cdot f(x))\in R([a,b])$ бўлиб,

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx=C\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

◄ $f(x)\in R([a,b])$ ва $C\in R$ бўлсин. Аниқ интеграл таърифига кўра

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma(f,P,\xi_k)=\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sigma(C\cdot f(x;P;\xi_k))=C\sigma(f;P;\xi_k),$$

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma(C\cdot f(x;P;\xi_k))=C\cdot\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma(f,P,\xi_k).$$

Демак,

$$(C\cdot f(x))\in R([a,b])$$

ва

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx=C\int_a^b f(x)dx. ►$$

2-хосса. Агар

$$f(x)\in R([a,b]),\ g(x)\in R([a,b])$$

бўлса, у ҳолда

$$(f(x)+g(x))\in R([a,b])$$

бўлиб,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

бўлади (аддитивлик ҳоссаси)

◄ Аниқ интеграл таърифига кўра

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma(f, P, \xi_k) = \int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sigma(f + g, P, \xi_k) = \sigma(f, P, \xi_k) + \sigma(g, P, \xi_k).$$

Лимитга эга бўлган фукциялар ҳақида теоремадан фойдаланиб, $\left(f(x) + g(x)\right) \in R([a,b])$ ва

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

бўлишини топамиз. ►

3-хосса. Агар

$$f(x) \in R([a,c]), \; f(x) \in R([c,b])$$

бўлса, у ҳолда

$$f(x) \in R([a,b])$$

бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

бўлади.

◄ Айтайлик, $a < c < b$ бўлиб, $f(x) \in R([a,c])$ ва $f(x) \in R([c,b])$ бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $[a,c]$ оралиқнинг $\lambda_{P_1} < \delta_1$ бўлган P_1 бўлаклаши топиладики

$$S(f; P_1) - s(f; P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

шунингдек $[c,b]$ оралиқнинг $\lambda_{P_2} < \delta_2$ бўлган P_2 бўлаклаши топиладики,

$$S(f; P_2) - s(f; P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади.

Энди $[a,b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_{P_3} < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ бўлган ихтиёрий P_3 бўлаклашини оламиз. Бу P_3 бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари қаторига c нуқтани қўшиб $[a,b]$ нинг янги P бўлаклашини ҳосил қиламиз. Унга нисбатан $f(x)$ фукция-нинг Дарбу йиғиндилари

$$S(f; P), \qquad s(f; P)$$

бўлсин.

P бўлаклашнинг $[a,c]$ ва $[c,b]$ даги бўлувчи нуқталари мос равишда уларнинг P_1' ҳамда P_2' бўлаклашларини юзага келтиради. Равшанки, бу P_1' ва P_2' бўлаклашларга нисбатан қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$S(f;P_1') - s(f;P_1') < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(f;P_2') - s(f;P_2') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Айни пайтда,

$$S(f;P) = S(f;P_1') + S(f;P_2'),$$

$$s(f;P) = s(f;P_1') + s(f;P_2')$$

бўлади. Бу муносабатлардан

$$S(f;P) - s(f;P) = \left(S(f;P_1') - s(f;P_1')\right) +$$

$$+\left(S(f;P_2') - s(f;P_2')\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $f(x) \in R([a,b])$.

$f(x)$ фукциянинг $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$ оралиқлар бўйича P бўлаклашга нисбатан интеграл йиғиндилари

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,, \qquad \sum_{[a,c]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,, \qquad \sum_{[c,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлиб,

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{[a,c]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \sum_{[c,b]} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлади. Интеграл таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Шунга ўхшаш $c < a < b$, $a < b < c$ бўлган ҳолларда ҳам хоссанинг ўринли бўлиши исботланади.►

4-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x) \in R([a,b])$ бўлади.

◄ Модомики, $f(x)$ ва $g(x)$ фукциялар $[a,b]$ да интеграл-ланувчи экан, унда

$$S(f;P) - s(f;P) < \frac{\varepsilon}{2M'} \quad (M' = \sup\ f(x), x \in [a,b])$$

$$S(g;P) - s(g;P) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad (M = \sup\ g(x),\ x \in [a,b])$$

бўлади.

Айтайлик, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \ge 0$, $q(x) \ge 0$ бўлсин. У ҳолда $\forall x \in [x_k; x_{k+1}]$ учун

$$0 \le m_k \le f(x) \le M_k',\ m_k = \inf\ f(x),\ M_k' = \sup f(x);$$

$$0 \le m'_k \le g(x) \le M_k\,, \quad m'_k = \inf g(x),\ M_k = \sup g(x)$$

бўлиб, улардан

$$0 \le m_k \cdot m'_k \le f(x) \cdot g(x) \le M_k \cdot M'_k\,,$$

бўлиши келиб чиқади. Айни пайтда,

$$m_k^0 = \inf\{f(x) \cdot g(x)\}, \quad M_k^0 = \sup\{f(x) \cdot g(x)\}$$

лар учун

$$m_k \cdot m'_k \le m_k^0 \le M_k^0 \le M_k \cdot M'_k$$

бўлиб,

$$M_k^0 - m_k^0 \le M_k \cdot M'_k - m_k \cdot m'_k =$$
$$= M'_k (M_k - m_k) + m_k (M'_k - m'_k)$$

бўлади.

Энди $M \ge M_k$, $M' \ge M'_k$ эканини этиборга олиб, топамиз;

$$S(f \cdot g; P) - s(f \cdot g; P) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(M_k^0 - m_k^0\right) \le$$
$$\le M' \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(M_k - m_k\right) \cdot \Delta x_k + M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(M'_k - m'_k\right) =$$
$$= M'\left(S(f;P) - s(f;P)\right) + M'\left(S(g;P) - s(g;P)\right) <$$
$$< M' \frac{\varepsilon}{2M'} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon.$$

Демак, бу ҳолда $f(x) \cdot g(x) \in R([a,b])$.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ фукциялар $[a,b]$ да ихтиёрий интегралланувчи фукциялар бўлсин.

Равшанки, $\forall x \in [a,b]$ да

$$f(x) - \inf f(x) = f(x) - m \ge 0\,,$$
$$g(x) - \inf g(x) = g(x) - m' \ge 0$$

бўлади.

Энди $f(x) \cdot g(x)$ фукцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$f(x) \cdot g(x) = \left(f(x) - m\right)\left(g(x) - m'\right) + mg(x) + m'f(x) - mm'.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи $[a,b]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли $f(x) \cdot g(x)$ ҳам $[a,b]$ да интегралланувчи бўлади. ►

Натижа. Агар $f(x) \in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда $[f(x)]^n \in R([a,b])$ бўлади, бунда $n \in N$.

2^0. Интегралнинг тенгсизликлар билан боғланган хоссалари.

1-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b])$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \ge 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

бўлади.

◀ Интегралнинг таърифига кўра

$$\lambda_P \to 0 \text{ да } \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \to \int_a^b f(x)dx$$

бўлади. У ҳолда, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \ge 0$ бўлишидан

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \ge 0$$

бўлиб, ундан

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

1-натижа. Агар $f(x)\in R([a,b])$, $g(x)\in R([a,b])$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \le g(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

◀ Равшанки,

$$f(x)\in R([a,b])\ , g(x)\in R([a,b]) \Rightarrow (g(x)-f(x))\in R([a,b])$$

бўлиб,

$$g(x)-f(x)\ge 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x)-f(x))dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge$$

$$\ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

бўлади. ▶

2-натижа. Агар $f(x)\in R([a,b])$, $g(x)\in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (2)$$

бўлади.

◀ Ихтиёрий $\alpha \in R$ учун

$$\int_a^b \left(f(x)-\alpha\cdot g(x)\right)^2 dx \ge 0$$

бўлиб,

$$\alpha^2\int_a^b g^2(x)dx - 2\alpha\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0$$

бўлади. Квадрат учҳаднинг дискриминанти мусбат бўлмаган-лиги сабабли

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx \le 0,$$

яъни,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

бўлади. ►

(2) тенгсизлик Коши-Буняковский тенгсизлиги дейи-лади.

2-хосса. Агар $f(x)\in R([a,b])$ бўлса, $|f(x)|\in R([a,b])$ бўлиб,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

бўлади.

◄ $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. Интегралланувчилик мезонига кўра, $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топиладики, унга нисбатан

$$S(f;P)-s(f;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$$

бўлади, бунда $\omega_k - f(x)$ функциянинг $[x_k,x_{k+1}]$ даги тебраниши.

Равшанки, $\forall x', x''\in[a,b]$ учун

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \le |f(x')-f(x'')|$$

бўлиб, ундан

$$\sup\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \le \sup|f(x')-f(x'')|$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\omega_k^{'} \le \omega_k$$

бўлади, бунда $\omega_k^{'} - |f(x)|$ функциянинг $[x_k,x_{k+1}]$ даги тебраниши. Шуларни эътиборга олиб,

$$S(|f|;P)-s(|f|;P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^{'}\cdot\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\cdot\Delta x_k<\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, $|f(x)|\in R([a,b])$.

$f(x)$ ва $|f(x)|$ функцияларнинг интеграл йиғиндилари учун

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\cdot\Delta x_k,$$

бўлиб, $\lambda_p\to 0$ да лимитга ўтиш натижасида

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

бўлиши келиб чиқади.►

3^0. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ да берилган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $m=\inf\{f(x)\}$, $M=\sup\{f(x)\}$ $(x\in[a,b])$ мавжуд ва $\forall x\in[a,b]$ учун

$$m \le f(x) \le M$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

1-теорема. Агар $f(x) \in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu(m \le \mu \le M)$ сон мавжудки,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)$$

бўлади.

◀ Равшанки,

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Кейинги тенгсизликлардан

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

дейилса, ундан

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)$$

бўлишини топамиз. ▶

3-натижа. Агар $f(x) \in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда шундай $\theta \in [a,b]$ топиладики,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\theta) \cdot (b-a)$$

бўлади.

◀ Бу тасдиқ юқоридаги теорема ва узлуксиз функция-нинг хоссасидан келиб чиқади.▶

2-теорема. Агар $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ бўлиб, $[a,b]$ да $g(x)$ функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu(m \le \mu \le M)$ сон мавжудки,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \qquad (3)$$

бўлади.

◀ Айтайлик, $\forall x \in [a,b]$ да $g(x) \geq 0$ бўлсин. Унда равшанки,

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow mg(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq Mg(x)$$

бўлади.

Бу муносабатдан ҳамда аниқ интеграл хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx .$$

а) $\int_a^b g(x)dx = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

бўлиб, ихтиёрий $\mu(m \leq \mu \leq M)$ да (3) ўринли бўлади.

б) $\int_a^b g(x)dx > 0$ бўлсин. У ҳолда

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

бўлиб,

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

дейилса, ундан

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. ►

4-натижа. Агар $f(x) \in C[a,b]$ бўлиб, $g(x) \in R([a,b])$ ва $g(x)$ функция $[a,b]$ да ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай $\theta \in [a,b]$ топиладики,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta)\int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

Машқлар

1. Ушбу

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}dx \le \frac{\pi \cdot \sqrt{6}}{8}$$

тенгсизлик исботлансин.

2. Ушбу

$$\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = |b| - |a|$$

тенглик исботлансин.

3. $f(x) \in C((-\infty, +\infty))$ бўлиб, у T $(T \neq 0)$ даврли функция бўлсин. У ҳолда $\forall\ a \in R$ учун

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

бўлиши исботлансин.

36-маъруза
Чегаралари ўзгарувчи бўлган аниқ интеграллар

1^0. Баъзи маълумотлар. Қуйидагиларни таъриф ҳамда келишув сифатида қараймиз:

1) Ихтиёрий $f(x)$ функция учун

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2) $f(x) \in R([a,b])$ ва $a < b$ бўлганда

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

1-теорема. Агар $f(x)\in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ учун $f(x)\in R([\alpha,\beta])$ бўлади.

◀ $f(x)\in R([a,b])$ бўлиб, $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ бўлсин. Интегралланув-чилик мезонига кўра, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $[a,b]$ оралиқ-нинг шундай P бўлаклаши топиладики, унга нисбатан

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

бўлади.

P бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$ қатори- га α ва β нуқталарни қўшиб, $[a,b]$ оралиқнинг янги P' бўлаклашини ҳосил қиламиз. Равшанки, $P\subset P'$ бўлади.

Дарбу йиғиндиларининг хоссасига кўра

$$s(f;P)\le s(f;P'),$$
$$S(f;P)\ge S(f;P')$$

бўлиб,

$$S(f;P')-s(f;P')<\varepsilon$$

бўлади.

P' бўлаклашнинг $[\alpha,\beta]$ даги бўлувчи нуқталарини шу оралиқнинг бўлувчи нуқталари сифатида қараб, $[\alpha,\beta]$ оралиқ-нинг P_1 бўлаклашни ҳосил қиламиз. Бу бўлаклашга нисбатан $f(x)$ функциянинг Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$S(f;P_1)\quad,\qquad s(f;P_1)$$

Натижада

$$S\left(f;p'\right)-s\left(f;p'\right)=\sum_{[a,b]}(M_k-m_k)\Delta x_k,$$

$$S\left(f;p_1\right)-s\left(f;p_1\right)=\sum_{[\alpha,\beta]}(M_k-m_k)\Delta x_k$$

бўлиб, улардан

$$S(f;P_1)-s(f;P_1)\le S(f;P')-s(f;P')$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$S(f;P_1)-s(f;P_1)<\varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x)\in R([\alpha,\beta])$ эканини билдиради. ▶

2^0. Чегаралари ўзгарувчи аниқ интеграллар. Айтайлик, $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. У ҳолда юқорида келтирилган теоремага кўра $f(x)\in R([a,x])$, $a\le x\le b$ бўлиб, функциянинг $[a,x]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли x га боғлиқ бўлади:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\qquad (x\in[a,b]\quad,\quad F(a)=0)$$

2-теорема. Агар $f(x)\in R([a,b])$ бўлса, $F(x)\in C[a,b]$ бўлади.

◀ $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. $[a,b]$ оралиқдан ихтиёрий x',x'' нуқталарни олиб,

$$F(x')-F(x'')$$
айирмани қараймиз. Равшанки,
$$F(x')-F(x'')=\int_a^{x'} f(t)dt-\int_a^{x''} f(t)dt=\int_{x''}^{x'} f(t)dt\,.$$
Бу тенгликдан топамиз:
$$\left|F(x')-F(x'')\right|=\left|\int_{x''}^{x'} f(t)dt\right|\le\int_{x''}^{x'}\left|f(t)\right|dt\le$$
$$\le\sup_{[a,b]}\left|f(t)\right|\cdot\left|\int_{x''}^{x'} dt\right|=\sup_{[a,b]}\left|f(t)\right|\cdot\left|x'-x''\right|.$$
Демак, $\forall\varepsilon>0$ га кўра, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\sup\limits_{[a,b]}\left|f(t)\right|}$ дейилса, у ҳолда $\left|x'-x''\right|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall x'$, $x''\in[a,b]$ учун
$$\left|F(x')-F(x'')\right|=\sup_{[a,b]}\left|f(t)\right|\cdot\left|x'-x''\right|<\sup_{[a,b]}\left|f(t)\right|\cdot\delta=$$
$$=\sup_{[a,b]}\left|f(t)\right|\cdot\frac{\varepsilon}{\sup\limits_{[a,b]}\left|f(t)\right|}=\varepsilon$$
бўлади. Бу эса $F(x)$ функциянинг $[a,b]$ да узлуксиз бўлишини билдиради. Демак, $F(x)\in C[a,b]$. ►

3-теорема. Агар $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $[a,b]$ да ҳосилага эга бўлиб,
$$F'(x)=f(x)$$
бўлади.

◄ Айтайлик, $f(x)\in C[a,b]$ бўлиб, $x\in[a,b]$, $x+\Delta x\in[a,b]$ бўл-син. Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:
$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right]=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\,.$$
Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, ушбу
$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x+\theta\cdot\Delta x)\qquad(0<\theta<1)$$
тенгликка келамиз.

Кейинги тенгликда, $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтиб
$$F'(x)=f(x)$$
бўлишини топамиз. ►

Натижа. Агар $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция бошланғич функцияга эга бўлади.

◄ Бу тасдиқ юқоридаги 3-теоремадан келиб чиқади. Бунда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

бўлади. ►

Фараз қилайлик, $f(x)\in R([a,b])$ бўлсин. У ҳолда $f(x)\in R([x,b])$, $a\le x\le b$ бўлиб, функциянинг $[x,b]$ оралиқ бўйича аниқ интеграли x га боғлиқ бўлади:

$$\Phi(x)=\int_x^b f(t)dt \quad (x\in[a,b]\ ,\ \Phi(b)=0).$$

Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+\int_x^b f(t)dt=F(x)+\Phi(x)\ \ (x\in[a,b]).$$

Бу тенгликдан

$$\Phi(x)=\int_a^b f(x)dx-F(x)$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенглик, $\Phi(x)$ функциянинг хоссаларини $f(x)$ ҳамда $F(x)$ функцияларнинг хоссалари орқали ўрганиш мумкинлигини кўрсатади.

Жумладан, $f(x)\in C[a,b]$ бўлса, у ҳолда

$$\Phi'(x)=-f(x)$$

бўлади.

◄ Ҳақиқатан ҳам

$$\Phi'(x)=\left(\int_x^b f(t)dt\right)'=\left(\int_a^b f(t)dt-F(x)\right)'=-F'(x)=-f(x)\ ►$$

Машқлар

1. Агар

$$F(x)=\int_{-1}^x \sin\ x\,dx\ ,\qquad x\in[-1,1]$$

бўлса, у ҳолда $F(x)$ функциянинг $x=0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд эмаслиги исботлансин.

2. Ушбу лимит

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t\,\mathrm{arctg}\,t}{1+t}dt$$

ҳисоблансин.

(Кўрсатма, Лопиталь қоидасидан фойдаланинг)

37-маъруза
Аниқ интегралларни ҳисоблаш

1^0. Аниқ интегралларни таърифга кўра ҳисоблаш. Айтайлик, $f(x) \in R([a,b])$ бўлсин. Унда интеграл таърифига кўра

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

1-Мисол. Ушбу

$$\int_a^b \sin x\, dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Равшанки, $f(x) = \sin x \in C[a,b]$. Демак, $f(x) \in R([a,b])$. $[a,b]$ оралиқни ушбу

$$a, a+\alpha_n, a+2\alpha_n, ..., a+k\alpha_n, ..., a+n\alpha_n = b$$

нуқталар ёрдамида, бунда $\alpha_n = \dfrac{b-a}{n}$, n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир

$$[a+k\alpha_n, a+(k+1)\alpha_n] \ (k = 0,1,2,...,n-1)$$

бўлакда ξ_k нуқтани қуйидагича

$$\xi_k = a + (k+1)\alpha_n \quad (k = 0,1,2,\dots, n-1)$$

танлаймиз. У ҳолда $f(x) = \sin x$ функциянинг интеграл йиғиндиси қуйидагича

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + (k+1)\alpha_n) \cdot \alpha_n = \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + (k+1)\alpha_n)$$

кўринишга эга бўлади.

Маълумки,

$$\sin(a + (k+1)\alpha_n) = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}} 2\sin\frac{\alpha_n}{2} \sin(a + (k+1)\alpha_n) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}} \left[\cos(a + (k+\frac{1}{2})\alpha_n) - \cos(a + (k+\frac{3}{2})\alpha_n) \right]$$

бўлади.

Натижада интеграл йиғинди учун ушбу

$$\sigma = \frac{\alpha_n}{2\sin\frac{\alpha_n}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\cos(a + (k+\frac{1}{2})\alpha_n) - \cos(a + (k+\frac{3}{2})\alpha_n) \right] =$$

$$= \frac{\frac{\alpha_n}{2}}{\sin\frac{\alpha_n}{2}} (\cos(a + \frac{1}{2}\alpha_n) - \cos(b + \frac{1}{2}\alpha_n))$$

тенгликка келамиз.

Кейинги тенгликда $\lambda_P = \Delta x_k = \alpha_n \to 0$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b. \ ►$$

2⁰. Ньютон-Лейбниц формуласи. Айтайлик, $f(x)$ функ-ция $[a,b]$ сегментда берилган ва шу сегментда узлуксиз бўлсин. У ҳолда $f(x)$ бошланғич функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

га эга бўлади.

Равшанки, $\Phi(x)$ функция $f(x)$ нинг ихтиёрий бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad (C = const)$$

бўлади.

Бу тенгликда, аввал $x = a$ деб

$$\Phi(a) = C,$$

сўнгра $x = b$ деб

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)dx+C$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a). \qquad (1)$$

(1) формула Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.

Одатда, $\Phi(b)-\Phi(a)$ айирма $\Phi(x)\Big|_a^b$ каби ёзилади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Масалан,

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}. \qquad (a>0, b>0)$$

3⁰. Ўзгарувчиларини алмаштириш формуласи. Фараз қилайлик, $f(x)\in C[a,b]$ бўлсин. Равшанки, бу ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx$$

интеграл мавжуд бўлади.

Айни пайтда, бу функция $[a,b]$ да бошланғич $\Phi(x)$ функцияга эга бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$$

бўлади.

Айтайлик, аниқ интегралда x ўзгарувчи ушбу

$$x=\varphi(t)$$

формула билан алмаштирилган бўлиб, бунда $\varphi(t)$ функция қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\varphi(t)\in C[\alpha,\beta]$ бўлиб, $\varphi(t)$ функциянинг барча қиймат-лари $[a,b]$ га тегишли;

2) $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b$;

3) $\varphi(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга бўлсин.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

бўлади.

◄ Равшанки, $\Phi(\varphi(t))$ мураккаб функция $[\alpha,\beta]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$(\Phi(\varphi(t)))'=\Phi'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

бўлади.

Агар $\Phi'(x) = f(x)$ эканини эътиборга олсак, унда

$$(\Phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

бўлишини топамиз. Бу эса $\Phi(\varphi(t))$ функция $[\alpha, \beta]$ да $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини билдиради. Ньютон-Лейбниц формуласига кўра

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad (3\ )$$

бўлади.

(2) ва (3) муносабатлардан

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi^{/}(t)dt \qquad (4)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

(4) формула аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш формуласи дейилади.

2-мисол. Ушбу

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Берилган интегралда $x = \sin t$ алмаштиришни бажара-миз. Унда

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t)dt = (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

бўлади. ►

4⁰. Бўлаклаб интеграллаш формуласи. Айтайлик , $u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a,b]$ сегментда узлуксиз $u^{/}(x)$ ва $v^{/}(x)$ ҳосилаларга эга булсин. У ҳолда

$$\int_{a}^{b} u(x)dv(x) = (u(x) \cdot v(x))\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)du(x) \qquad (5)$$

бўлади.

◄ Ҳосилани ҳисоблаш қоидасига кўра

$$(u(x) \cdot v(x))' = u^{/}(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v^{/}(x)$$

бўлади. Демак, $u(x) \cdot v(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда $u^{/}(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v^{/}(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b (u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x))'dx=(u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b .$$

Кейинги тенгликдан

$$\int_a^b u(x)dv(x)=(u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$$

бўлиши келиб чиқади. ►

(5) формула аниқ интегралларда бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$\int_1^2 x\ln xdx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Бу интервалда $u(x)=\ln x, dv(x)=x$ деб $du(x)=\frac{1}{x}dx, v(x)=\frac{x^2}{2}$ бўлишини топамиз. Унда (5) формулага кўра:

$$\int_1^2 x\ln xdx=(\frac{x^2}{2}\ln x)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\frac{1}{2}\int_1^2 xdx=2\ln 2-\frac{3}{4}$$ бўлади. ►

4-мисол. Ушбу

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx \qquad (n=0,1,2,...)$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Равшанки,

$$J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2} \quad , \quad J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

$n\geq 2$ бўлганда берилган интегрални

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$

кўринишида ёзиб, унга бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз. Натижада

$$J_n=(-\sin^{n-1}x\cdot\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=$$

$$=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n$$

бўлиб, ундан ушбу

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

рекуррент формула келиб чикади.

Бу формула ёрдамида берилган интегрални $n=1,2,3,........$ бўлганда кетма-кет ҳисоблаш мумкин.

Айтайлик, $n=2m$- жуфт сон бўлсин. Унда

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}......\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot J_0=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

бўлади.

Айтайлик, $n=2m+1$- тоқ сон бўлсин. Унда

$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}......\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot J_1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

бўлади. ($m!!$ символ m дан катта бўлмаган ва у билан бир хил жуфтликка эга бўлган натурал сонларнинг кўпайтмасини билдиради.) ►

5⁰. Валлис формуласи. Маълумки, $0<x<\frac{\pi}{2}$ бўлганда

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x \qquad (n=1,2,3,...)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликларни $[0,\frac{\pi}{2}]$ оралиқ бўйича интеграллаб,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}xdx,$$

сўнгра 4^0 да келтирилган формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Бу тенгсизликлардан

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}<\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги тенгсизликлардан топамиз:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2. \qquad (6)$$

(6) формула Валлис формуласи дейилади.

Машқлар

1. Агар $f(x)\in R([0,1])$ бўлса,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

тенглик исботлансин.

2. Ушбу интеграл

$$\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$$

ҳисоблансин.

3. Ушбу тенглик

$$\int_x^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1+x^2} \qquad (x>0)$$

исботлансин.

38-маъруза
Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш

Одатда, аниқ интеграллар Ньютон-Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисобланади. Бу формула бошланғич функцияга асосланади. Аммо бошланғич функцияни топиш масаласи доим осонгина ҳал бўлавермайди. Агар интеграл остидаги функция мураккаб бўлса, тегишли аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашга тўғри келади.

1^0. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўлсин. Демак, $f(x) \in R([a,b])$.

Масала $\int_a^b f(x)dx$ интегрални тақрибий ҳисоблашдан иборат.

$[a,b]$ оралиқни $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ нуқталар $(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n)$ ёрдамида n та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,...,n-1)$ бўйича интегрални қуйидагича

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\cdot(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

тақрибий ҳисоблаймиз, бунда

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (k+\frac{1}{2})\frac{b-a}{n}, \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0,1,2,...,n-1).$$

Аниқ интеграл хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx + ...$$

$$... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} f(x_{\frac{1}{2}}) + \frac{b-a}{n} f(x_{1+\frac{1}{2}}) + \frac{b-a}{n} f(x_{2+\frac{1}{2}}) + ...$$

$$... + \frac{b-a}{n} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + ... + \frac{b-a}{n} f(x_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{b-a}{n}[f(x_{\frac{1}{2}}) +$$

$$+ f(x_{1+\frac{1}{2}}) + ... + f(x_{k+\frac{1}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})].$$

Натижада

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегрални тақрибий ҳисоблаш учун қуйидаги

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \tag{1}$$

формулага келамиз.

(1) формула тўғри тўртбурчаклар формуласи дейилади.

Энди (1) тақрибий формуланинг хатолигини аниқлай-миз.

(1) формуланинг хатолигини

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \tag{2}$$

дейлик.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Аввало R_n ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+\frac{1}{2}})dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int [f(x) - f(x_{k+\frac{1}{2}})]dx.$$

Тейлор формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$f(x) - f(x_{k+\frac{1}{2}}) = f'(x_{k+\frac{1}{2}})\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2$$

(бунда ξ_k сон x ва $x_{k+\frac{1}{2}}$ сонлар орасида). Натижада

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(x_{k+\frac{1}{2}})\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(f'(x_{k+\frac{1}{2}})\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x - x_{k+\frac{1}{2}})dx + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2)dx$$

бўлади.

Равшанки, $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)dx = 0$.

Демак, $$R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot\left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)dx.$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага биноан

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x-x_{k+\frac{1}{2}})^2 dx = f''(\xi_k^*)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_{k+\frac{1}{2}})^2 dx =$$

$$=\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{12} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k^*) \ \ (\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}])$$

бўлади.

Шундай қилиб, R_n учун ушбу

$$R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

ифодага келамиз.

Равшанки,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) = \frac{f''(\xi_0^*) + (\xi_1^*) + ... + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

миқдор ($\xi_k^* \in [a,b],\ \ k = 0,1,2,...,n-1$) $f''(x)$ нинг $[a,b]$ оралиқдаги энг кичик m'' ҳамда энг катта M'' қийматлар орасида,

$$m'' \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \le M$$

бўлади.

Шартга кўра $f''(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз. Узлуксиз функциянинг хоссасига мувофиқ (a,b) да шундай ζ нуқта топиладики,

$$f''(\zeta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

бўлади.

Натижада R_n учун қуйидаги

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

тенгликка келамиз.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

бўлади.

Шундай қилиб, $[a,b]$ оралиқда иккинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функциянинг

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралини (1) туғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланса, бу тақрибий ҳисоблаш хатолиги қуйидаги

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta) \qquad (\zeta \in (a,b))$$

формула билан ифодаланади.

2⁰. Трапециялар формуласи. $f(x)$ функциянинг

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралини тақрибий ҳисоблаш учун, аввало $[a,b]$ сегментни

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$$

нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўлинади. Сўнг ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,...,n-1)$ бўйича интегрални қуйидагича

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot (x_{k+1} - x_k) \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

тақрибий ҳисобланади. Натижада ушбу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + ...$$

$$... + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{2}\Big[\ \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} +$$

$$+ f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\ \Big]$$

формулага келамиз. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\Big[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \qquad (3)$$

$$+ f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\Big].$$

(3) формула трапециялар формуласи дейилади.

Бу тақрибий формуланинг ҳатолиги $R_n', f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлиши шартида ,

$$R_n' = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\zeta) \qquad (\zeta \in (a,b))$$

бўлади.

Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\Big[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) +$$

$$+ f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\Big] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\zeta).$$

3⁰. Симпсон формуласи. Бу ҳолда $f(x)$ функциянинг

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралини тақрибий ҳисоблаш учун $[a,b]$ сегментни $a = x_0,\ x_1,\dots, x_{2k},\ x_{2k+1},\quad x_{2k+2},\dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ нуқталар ёрдамида $2n$ та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир $[x_{2k}, x_{2k+2}]\quad (k = 0,1,2,\dots, n-1)$ бўйича интегрални қуйидагича

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] \qquad (k = 0,1,\dots, n-1)$$

тақрибий ҳисобланади. Натижада

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+ f(x_4)) + \dots + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots$$

$$\dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))].$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots$$

$$\dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))]. \tag{4}$$

(4) формула Симпсон формуласи дейилади.

Бу тақрибий формуланинг ҳатолиги R_n'', $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз $f^{(iv)}(x)$ ҳосилага эга бўлиши шартида,

$$R_n'' = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(iv)}(\zeta) \qquad (\zeta \in (a,b))$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) +$$

$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))] - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(iv)}(\zeta).$$

Мисол. Ушбу

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

интеграл тўғри тўртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисоблансин.

◀ [0,1] сегментни 5 та тенг бўлакка бўламиз. Бунда бўлиниш нуқталари

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}2,\ x_2 = 0{,}4,\ x_3 = 0{,}6,\ x_4 = 0{,}8,\ x_5 = 1{,}0$$

бўлиб, бу нуқталарда $f(x) = e^{-x^2}$ функциянинг қийматлари қуйидагича бўлади:

$$f(x_0) = 1{,}00000 \quad ,$$
$$f(x_1) = 0{,}96079 \quad ,$$
$$f(x_2) = 0{,}85214 \quad ,$$
$$f(x_3) = 0{,}69768 \quad ,$$
$$f(x_4) = 0{,}52729 \quad ,$$
$$f(x_5) = 0{,}36788 \quad .$$

Ҳар бир бўлакнинг ўртасини ифодаловчи нуқталар

$$x_{\frac{1}{2}} = 0{,}1\,,\quad x_{\frac{3}{2}} = 0{,}3\,,\quad x_{\frac{5}{2}} = 0{,}5\,,\quad x_{\frac{7}{2}} = 0{,}7\,,\quad x_{\frac{9}{2}} = 0{,}9$$

бўлиб, бу нуқталардаги функциянинг қийматлари қуйидагича бўлади:

$$f(x_{\frac{1}{2}}) = 0{,}99005 \quad ,$$
$$f(x_{\frac{3}{2}}) = 0{,}91393 \quad ,$$
$$f(x_{\frac{5}{2}}) = 0{,}77680 \quad ,$$
$$f(x_{\frac{7}{5}}) = 0{,}61263 \quad ,$$
$$f(x_{\frac{9}{5}}) = 0{,}44486 \quad .$$

а) Тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}(0{,}99005 + 0{,}91393 + 0{,}77680 +$$
$$+ 0{,}61263 + 0{,}44486) = \frac{1}{5}\cdot 3{,}74027 \approx 0{,}74805$$

бўлиб,

$$|R_n| \le \frac{1}{12\cdot 25} = \frac{1}{300} \approx 0{,}003$$

бўлади.

б) Трапециялар формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}(\frac{1{,}00000+0{,}36788}{2}+0{,}96079+0{,}85214+$$

$$+0{,}69768+0{,}52729)=\frac{1}{5}(0{,}68394+3{,}03790)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3{,}72184\approx 0{,}74437$$

бўлиб,

$$\left|R_n'\right|\le\frac{1}{6\cdot 25}=\frac{1}{150}\approx 0{,}006$$

бўлади.

в) Симпсон формуласи бўйича

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{30}[(1{,}00000+0{,}36788)+4(0{,}99005+$$

$$+0{,}91393+0{,}77680+0{,}61263+0{,}44486)+2(0{,}96079+$$

$$+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729)]=\frac{1}{30}(1{,}36788+4\cdot 3{,}74027)+$$

$$+2\cdot 3{,}03790)=\frac{1}{30}(1{,}36788+6{,}07580+14{,}96108)\approx 0{,}74682$$

бўлиб,

$$\left|R_n''\right|\le\frac{12}{2880\cdot 5^4}=0{,}7\cdot 10^{-5}$$

бўлади.

Машқлар

1. Трапециялар формуласини хатолиги

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$$

бўлиши исботлансин.

2. Симпсон формуласини хатолиги

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{IV}(\xi)$$

бўлиши исботлансин.

3. Ушбу интеграл

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\qquad (n=10)$$

тақрибий ҳисоблансин.

9-БОБ
АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

39-маъруза
Текис шаклнинг юзи ва уни ҳисоблаш

1^0. Текис шаклнинг юзи тушунчаси. Маълумки, (x, y) жуфтлик, $(x \in R, y \in R)$, текисликда нуқтани ифодалайди.

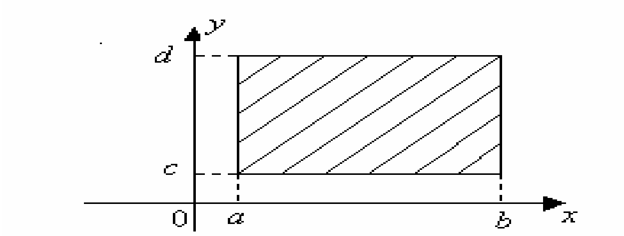
Координаталари ушбу

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d \qquad (a \in R, b \in R, c \in R, d \in R)$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи текислик нуқталаридан ҳосил бўлган D_0 тўплам :

$$D_0 = \{(x, y); x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

тўғри тўртбурчак дейилади (8-чизма)



8-чизма

Бу тўғри тўртбурчакнинг томонлари (чегаралари) мос равишда координаталар ўқига параллел бўлади.

D_0 тўғри тўртбурчакнинг юзи деб (унинг чегарасининг, яъни

$$x = a \quad , \quad x = b \qquad\qquad (c \le y \le d),$$

$$y = c \quad , \quad y = d \qquad\qquad (a \le x \le b)$$

тўғри чизиқ кесмаларининг D_0 га тегишли бўлиши ёки тегишли бўлмаслигидан қатъий назар) ушбу

$$\mu(D_0) = (b - a)\cdot(d - c)$$

миқдорга айтилади.

Айтайлик, текислик нуқталаридан иборат бирор Q тўплам берилган бўлсин.

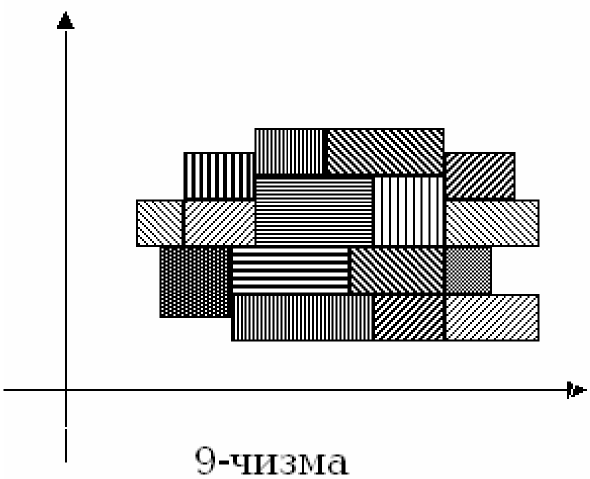
Агар шундай D_0 тўғри тўртбурчак топилсаки,

$$Q \subset D_0$$

бўлса, Q чегараланган тўплам дейилади.

Ҳар қандай чегараланган текислик нуқталаридан иборат тўплам текис шакл дейилади.

Агар текис шакл чекли сондаги кесишмайдиган тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмаси сифатида ифодаланса, уни тўғри кўпбурчак деймиз.(9-чизма)


9-чизма

Бундай тўғри кўпбурчакнинг юзи деб, уни ташкил этган тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндисига айтилади.

Тўғри кўпбурчак юзи қуйидаги хоссаларга эга:

1) Тўғри кўпбурчак юзи ҳар доим манфий бўлмайди: $\mu(D) \geq 0$;

2) Кесишмайдиган икки D_1 ва D_2 тўғри кўпбурчаклар-дан ташкил топган тўғри кўпбурчак юзи D_1 ва D_2 ларнинг юзалари йиғиндисига тенг:

$$\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2) \quad ;$$

3) Агар D_1 ва D_2 тўғри кўпбурчаклар учун

$$D_1 \subset D_2$$

бўлса, у ҳолда

$$\mu(D_1) \leq \mu(D_2)$$

бўлади.

Текисликда бирор чегараланган Q шакл берилган бўлсин. Бу шаклнинг ичига A тўғри кўпбурчак $(A \subset Q)$, сўнгра Q шаклни ўз ичига олган B тўғри кўпбурчак $(Q \subset B)$ лар чизамиз. Уларнинг юзлари мос равишда $\mu(A)$ ва $\mu(B)$ бўлсин.

Равшанки, бундай тўғри кўпбурчаклар кўп бўлиб, уларнинг юзаларидан иборат $\{\mu(A)\}$ ва $\{\mu(B)\}$ тўпламлар ҳосил бўлади.
Айни пайтда, бу сонли тўпламлар чегараланган бўлади. Бинобарин, уларнинг аниқ чегаралари

$$\sup\{\mu(A)\}, \quad \inf\{\mu(B)\}$$

лар мавжуд.

1-таъриф. Агар

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

бўлса, Q шакл юзага эга дейилади. Уларнинг умумий қиймати Q шаклнинг юзи дейилади ва $\mu(Q)$ каби белгиланади:

$$\mu(Q) = \sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

1-теорема. Текис шакл Q юзага эга бўлиш учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай A $(A \subset Q)$ ва B $(Q \subset B)$ тўғри кўпбурчаклар топилиб, улар учун

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** Айтайлик, Q шакл юзага эга бўлсин. Унда таърифга биноан

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\} = \mu(Q)$$

бўлади.

Модомики,

$$\sup\{\mu(A)\} = \mu(Q),$$

$$\inf\{\mu(B)\} = \mu(Q)$$

экан, унда $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай тўғри кўпбурчак $A(A \subset Q)$ ҳамда шундай тўғри кўпбурчак $B(Q \subset B)$ топиладики,

$$\mu(Q)-\mu(A)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(B)-\mu(Q)<\frac{\varepsilon}{2}$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан

$$\mu(B)-\mu(A)<\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Етарлилиги. Айтайлик, A $(A\subset Q)$ ва B $(Q\subset B)$ тўғри кўпбурчаклар учун $\mu(B)-\mu(A)<\varepsilon$ тенгсизлиги бажарилсин.

Равшанки,

$$\mu(A)\le\sup\{\mu(A)\},$$

$$\mu(B)\ge\inf\{\mu(B)\}.$$

Бу муносабатлардан

$$\inf\{\mu(B)\}-\sup\{\mu(A)\}\le\mu(B)-\mu(A)<\varepsilon$$

бўлишини топамиз.

ε-ихтиёрий мусбат сон бўлганлигидан

$$\sup\{\mu(A)\}=\inf\{\mu(B)\}$$

бўлиши келиб чикади. Демак, Q шакл юзага эга. ►

Шунга ўхшаш қуйидаги теорема исботланади.

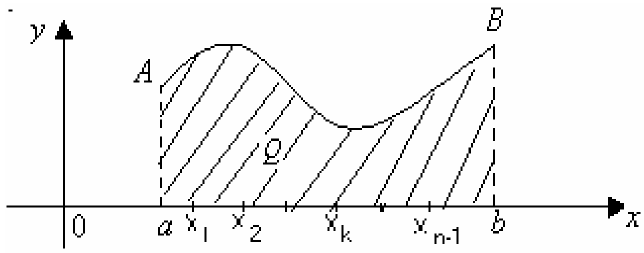
2-теорема. Текис шакл Q юзага эга бўлиши учун $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам шундай юзага эга текис шакллар P ва S лар $(P\subset Q$, $Q\subset S)$ топилиб, улар учун

$$\mu(S)-\mu(P)<\varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

2^0.Эгри чизикли трапециянинг юзини ҳисоблаш. Фараз қилайлик, $f(x)\in C[a,b]$ бўлиб, $\forall x\in[a,b]$ да $f(x)\ge 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x=a$, $x=b$ вертикал чизиқлар ҳамда пастдан абцисса ўқи билан чегараланган Q шаклни қарайлик. (10-чизма)



10-чизма

Одатда, бу шакл эгри чизиқли трапеция дейилади. $[a,b]$ сегментни ихтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}\quad(a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b)$$

бўлаклашни оламиз. Бу бўлаклашнинг ҳар бир $[x_k,x_{k+1}]$ оралиғида

$$\inf\{f(x)\}=m_k,\ \ \sup\{f(x)\}=M_k\quad(k=0,1,2,...,n-1)$$

мавжуд бўлади.

Энди асоси $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, баландлиги m_k бўлган $(k = 0,1,2,...,n-1)$ тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмасидан таш-кил топган тўғри кўпбурчакни A дейлик.

Шунингдек, асоси $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, баландлиги M_k бўлган $(k = 0,1,2,...,n-1)$ тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмасидан ташкил топган тўғри кўпбурчакни B дейлик. Равшанки,

$$A \subset Q \ , \ \ Q \subset B$$

бўлиб, уларнинг юзалари

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, \ \ \mu(B) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

бўлади.

Бу йиғиндиларни $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментининг P бўлаклашига нисбатан Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари эканини пайқаш қийин эмас:

$$\mu(A) = s(f;P) \quad , \quad \mu(B) = S(f;P).$$

$f(x) \in C[a,b]$ бўлгани учун $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралла-нувчи бўлади. Унда интегралланувчилик мезонига кўра, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам $[a,b]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топиладики,

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

бўлади. Биробарин, ушбу

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса, 1-теоремага мувофиқ, қаралаётган эгри чизиқли трапециянинг юзага эга бўлишини билдиради. Унда таърифга кўра

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

бўлади.

Айни пайтда,

$$\sup\{\mu(A)\} = \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

$$\inf\{\mu(B)\} = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлганлиги сабабли Q эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$\mu(Q) = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

га тенг бўлади.

1-мисол. Текисликда ушбу

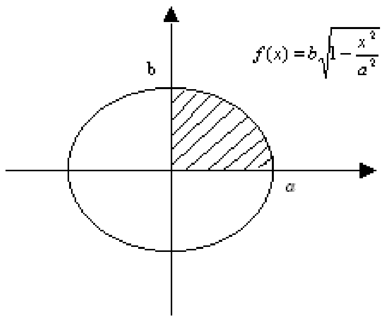
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

эллипс билан чегараланган Q шаклнинг юзи топилсин.

◀Эллипс билан чегараланган Q шаклнинг юзи OX ва OY координата ўқлари ҳамда

$$f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad , \qquad 0 \le x \le a$$

чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзи-нинг 4 тасига тенг бўлади. (11-чизма).



11-чизма

Унда (1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\mu(Q) = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = a\sin t\ , \\ \qquad\qquad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ dx = a\cos t dt\ , \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4b}{a} \cdot a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = ab\pi. \blacktriangleright$$

Айтайлик, $f_1(x) \in C[a,b]$, $f_2(x) \in C[a,b]$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да

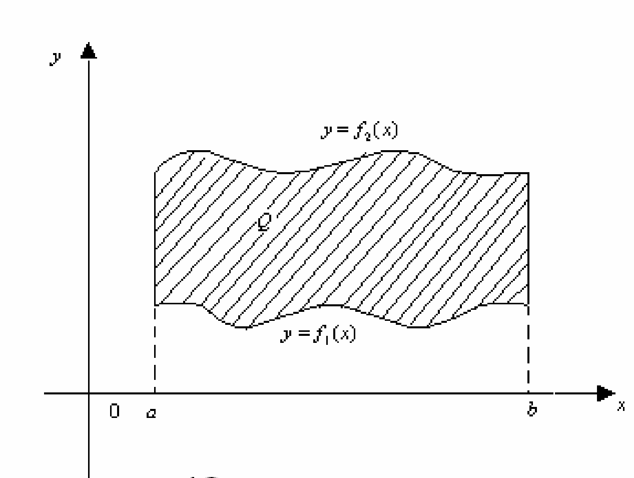
$$0 \le f_1(x) \le f_2(x)$$

бўлсин.

Текисликдаги Q шакл қуйидаги

$$y = f_1(x) \quad , \quad y = f_2(x) \qquad , \qquad x = a \quad , \quad x = b$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни ифодаласин (12-чизма)



12-чизма

Бу шаклнинг юзи

$$\mu(Q)=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx \qquad (2)$$

бўлади.

2-мисол. Текисликда ушбу

$$y=4-x^2 \quad , \qquad y=x^2-2x$$

чизиқлар (параболалар) билан чегараланган Q шаклнинг юзи топилсин.

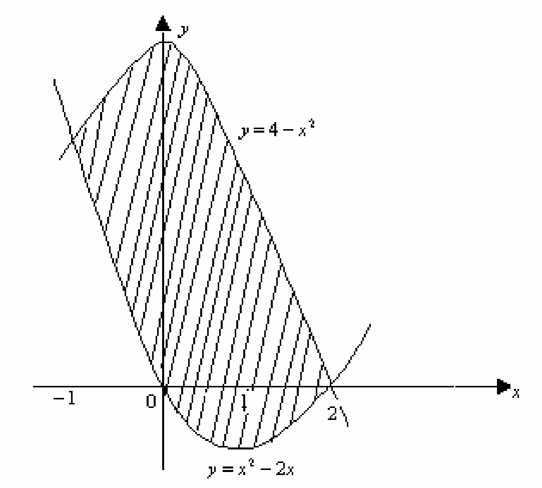
◀ Параболаларнинг тенгламалари

$$y=4-x^2 \quad ,$$
$$y=x^2-2x$$

ни биргаликда ечиб, уларнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$4-x^2=x^2-2x \ ,$$
$$x_1=-1\,,\ x_2=2\,;\ y_1=3\,,\ y_2=0:\ \ A(-1;3)\,,\ B(2;0).$$

(13 -чизма).



13-чизма

Бу шаклнинг юзини (2) формуладан фойдаланиб ҳисоб-лаймиз:

$$\mu(Q)=\int_{-1}^{2}\left[(4-x^2)-(x^2-2x)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx=(4x+x^2-\frac{2}{3}x^3)\Big|_{-1}^{2}=9. \blacktriangleright$$

Эслатма. Агар $f(x)\in C[a,b]$ функция $[a,b]$ да ишора сақламаса, (1) интеграл эгри чизиқли трапециялар юзалари-нинг йиғиндисидан иборат бўлади. Бунда OX ўқининг юқори-сидаги юза мусбат ишора билан, OX ўқининг пастдаги юза манфий ишора билан олинади.

Масалан, OX ўқи ҳамда $f(x)=\sin x$, $0\le x\le 2\pi$ функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзи

$$\mu(Q)=\int_{0}^{\pi}\sin x+(-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx)=(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}-(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}=4$$

бўлади.

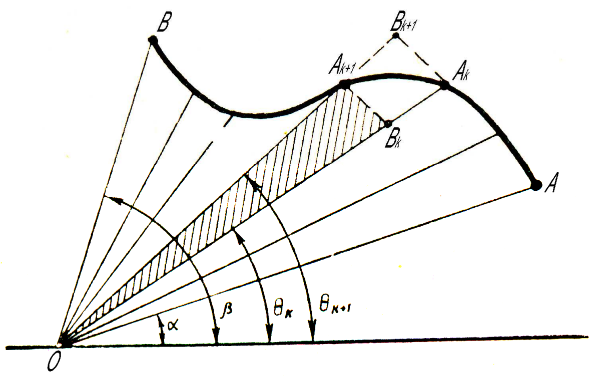
3^0. Эгри чизиқли секторнинг юзини ҳисоблаш. Айтайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ қутб координаталар системасида ушбу

$$\rho=\rho(\theta)\ \ ,\quad \alpha\le\theta\le\beta\quad (\alpha\in R,\beta\in R)$$

тенглама билан берилган бўлсин. Бунда

$$\rho(\theta)\in C[\alpha,\beta]\ ,\quad \forall\theta\in[\alpha,\beta]\quad \text{да}\qquad \rho(\theta)\ge 0\ .$$

Текисликда $\breve{AB}$ эгри чизиқ ҳамда OA ва OB радиус-векторлар билан чегараланган Q шаклни қараймиз. (14 -чизма).



14- чизма

$[\alpha,\beta]$ сегментни ихтиёрий

$$P=\{\theta_0,\theta_1,...,\theta_n\}\qquad (\alpha=\theta_0<\theta_1<...<\theta_n=\beta)$$

бўлаклашини оламиз. O нуқтадан ҳар бир қутб бурчаги θ_k га мос OA_k радиус-вектор ўтказамиз. Натижада OAB-эгри чизиқ-ли сектор

$$OA_kA_{k+1}\ \left(k=0,1,2,...,n-1\quad ;\ A_0=A\ ,\ A_n=B\right)$$

эгри чизиқли секторчаларга ажралади.

Равшанки, $\rho=\rho(\theta)\in C[\alpha,\beta]$

бўлганлиги учун $[\theta_k\ ,\theta_{k+1}]$ да $(k=0,1,2,...,n-1)$

$$m_k=\inf\{\rho(\theta)\}\ \ ,\quad M_k=\sup\{\rho(\theta)\}$$

лар мавжуд.

Энди ҳар бир $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ сегмент учун радиус-векторлари мос равишда m_k ҳамда M_k бўлган доиравий секторларни ҳосил қиламиз. Бундай доиравий секторлар юзага эга бўлиб, уларнинг юзи мос равишда

$$\frac{1}{2}m_k^2 \cdot \Delta\theta_k \quad , \ \frac{1}{2}M_k^2 \cdot \Delta\theta_k \qquad (\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

бўлади.

Радиус-векторлари m_k $(k = 0,1,2,...,n-1)$ бўлган барча доиравий секторлар бирлашмасидан ҳосил бўлган шаклни Q_1 десак, унда $Q_1 \subset Q$ бўлиб, унинг юзи

$$\mu(Q_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \cdot \Delta\theta_k \tag{3}$$

бўлади.

Шунингдек, радиус-векторлари M_k $(k = 0,1,2,...,n-1)$ бўл-ган барча доиравий секторлар бирлашмасидан ҳосил бўлган шаклни Q_2 десак, унда $Q \subset Q_2$ бўлиб, унинг юзи

$$\mu(Q_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \cdot \Delta\theta_k \tag{4}$$

бўлади.

(3) ва (4) йиғиндилар $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функциянинг Дарбу йиғиндилари бўлади. Айни пайтда, $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз бўлгани учун у интегралланувчидир. Демак, $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам $[\alpha, \beta]$ сегментнинг шундай P бўлаклаши топиладики,

$$S(\frac{1}{2}\rho^2(\theta); P) - s(\frac{1}{2}\rho^2(\theta); P) < \varepsilon$$

бўлади. Бинобарин, ушбу

$$\mu(Q_2) - \mu(Q_1) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса, 2-теоремага мувофиқ, қаралаётган эгри чизиқли секторнинг юзага эга бўлишини билдиради. Унда таърифга кўра

$$\sup\{\mu(Q_1)\} = \inf\{\mu(Q_2)\}$$

бўлади.

Айни пайтда,

$$\sup\{\mu(Q_1)\} = \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta,$$

$$\inf\{\mu(Q_2)\} = \int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$$

бўлгани сабабли Q эгри чизиқли секторнинг юзи

$$\mu(Q)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}(\theta)d\theta$$

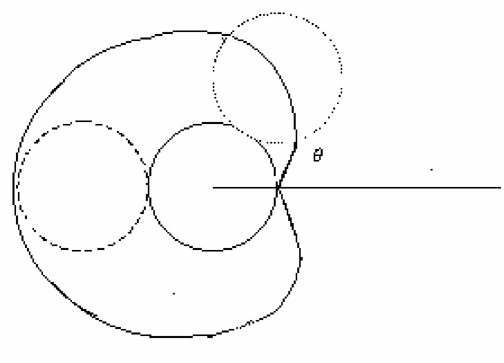
га тенг бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\rho=\rho(\theta)=a(1-\cos\theta)\quad(a\in R,\ 0\le\theta\le 2\pi)$$

функция графиги билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

◄ Бу функция графиги кардиоидани ифодалайди. Маълумки, кардиоида радиуси r га тенг бўлган айлананинг шу радиусли иккинчи қўзғалмас айлана бўйлаб ҳаракати (сирпанмасдан думалаши) натижасида биринчи айлана ихтиёрий нуқтасининг чизган чизиғидир. (15-чизма).



15-чизма

Кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик бўлганлиги сабабли юқори ярим текисликдаги шаклнинг юзини топиб, сўнгра уни 2 га кўпайтирсак, изланаётган юза келиб чиқади.

θ ўзгарувчи $[0,\pi]$ да ўзгарганда ρ радиус-вектор кардиоиданинг юқори ярим текисликдаги қисмини чизади. Шунинг учун

$$\mu(Q)=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\rho^{2}(\theta)d\theta=\int_{0}^{\pi}a^{2}(1-\cos\theta)^{2}d\theta=$$

$$=a^{2}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]d\theta=$$

$$=a^{2}\left(\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^{2}$$

бўлади. ►

Машқлар

1. Айтайлик, текисликда $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\le t\le\beta)$ тенгламалар билан параметрик ҳолда берилган бўлсин, бунда $x=\varphi(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга, $\varphi'(x)\ge 0$ ва

$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,\ y=\psi(t)$ функция $[a,b]$ да узлук-сиз ва $\psi(t)\geq 0$. У ҳолда юқоридан $\breve{AB}$ эгри чизиқ, ён томон-ларидаги $x=a,\ x=b$ вертикал чизиқлар, пастдан $[a,b]$ кесма билан чегараланган шаклнинг юзи

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$$

бўлишини исботлансин.

2. Ушбу

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

40-маъруза
Ёй узунлиги ва уни ҳисоблаш

1⁰. Ёй узунлиги тушунчаси. Маълумки, текисликдаги икки $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси l_0 узунликка эга ва унинг узунлиги

$$\mu(l_0)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

га тенг бўлади.

Айтайлик, текисликдаги l чизиқ $A_0(x_0,y_0), A_1(x_1,y_1),\ldots,$ $A_n(x_n,y_n)$ нуқталарни $(n\in N)$ бирин-кетин тўғри чизиқ кесмалари билан бирлаштиришидан ҳосил бўлган бўлсин. Одатда, бундай чизиқ синиқ чизиқ дейилади.

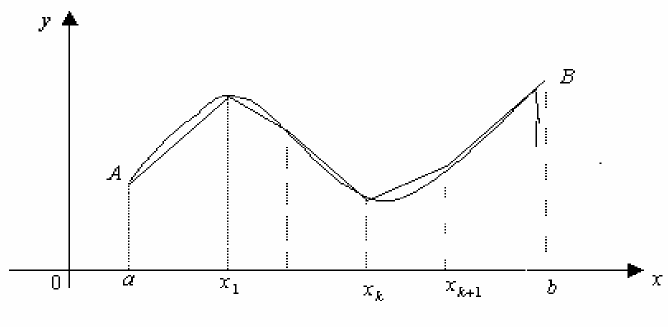
Синиқ чизиқ узунлиги (периметри) деб, уни ташкил этган тўғри чизиқ кесмалари узунликларининг йиғиндисига айтилади:

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}.$$

Фараз қилайлик, текисликдаги $\breve{AB}$ эгри чизиғи (уни $\breve{AB}$ ёйи деб ҳам атаймиз) ушбу

$$y=f(x) \qquad (a\le x\le b)$$

тенглама билан берилган бўлсин, бунда $f(x)\in C[a,b]$.



16-чизма

$[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,...,x_n\} \qquad (a=x_0<x_1<...<x_n=b$$

бўлаклашни олиб, бўлувчи x_k $(k=0,1,2,...,n)$ нуқталар орқали OY ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг $\breve{AB}$ ёйи билан кесишган нуқталари

$$A_k(x_k,f(x_k)) \qquad (k=0,1,2,...,n\ ;\ \ A_0=A\ ,\ A_n=B)$$

бўлади.

$\breve{AB}$ ёйидаги бу $A_k(x_k,f(x_k))$ нуқталарни бир-бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб, l синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. (16-чизма)

Одатда, l синиқ чизиқ $\breve{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ дейилади. У узунликка эга бўлиб, узунлигини (периметрини) $\mu(l)$ дейлик.

Агар P_1 ва P_2 лар $[a,b]$ сегментнинг иккита бўлаклаши бўлиб, $P_1\subset P_2$ бўлса, у ҳолда бу бўлаклашларга мос $\breve{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ l_1 , l_2 ларнинг периметрлари учун

$$\mu(l_1)\le\mu(l_2)$$

бўлади.

◄$[a,b]$ сегментнинг P_1 бўлаклаши қуйидаги

$$P_1=\{x_0,x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n\}$$

$$(a=x_0<x_1<...<x_k<x_{k+1}<...<x_n=b)$$

кўринишда бўлиб, P_2 бўлаклаш эса P_1 бўлаклашнинг барча бўлувчи нуқталари ҳамда қўшимча битта $x^* \in [a,b]$ нуқтани қўшиш натижасида ҳосил бўлган бўлаклаш бўлсин. Бу x^* нуқта x_k ҳамда x_{k+1} нуқталар орасида жойлашсин: $x_k < x^* < x_{k+1}$. Демак,

$$P_2 = \{x_0, x_1, ..., x_k, x^*, x_{k+1}, ..., x_n \}$$

$$(a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x* < x_{k+1} < ... < x_n = b)$$

Равшанки, $P_1 \subset P_2$ бўлади.

$\overset{\frown}{AB}$ ёйига чизилган P_1 бўлаклашга мос синиқ чизиқ l_1, шу ёйга чизилган P_2 бўлаклашга мос синиқ чизиқ l_2 дан фақатгина битта бўлаги билангина фарқ қилади: l_1 да $A_k A_{k+1}$ бўлак бўлган ҳолда l_2 да иккита $A_k A^*$ ҳамда $A^* A_{k+1}$ бўлаклар бўлади.

Аммо $A_k A_{k+1}$ тўғри чизиқ кесмасининг узунлиги $\mu(A_k A_{k+1})$, $A_k A^*$ ҳамда $A^* A_{k+1}$ кесмалар узунликлари $\mu(A_k A^*)$, $\mu(A^* A_{k+1})$ йиғиндисидан ҳар доим катта бўлмаганлиги, яъни

$$\mu(A_k A_{k+1}) \le \mu(A_k A^*) + \mu(A^* A_{k+1})$$

учун

$$\mu(l_1) \le \mu(l_2)$$

бўлади. ►

Демак, P бўлаклашнинг бўлувчи нуқталари сонини орттира борилса, $\overset{\frown}{AB}$ ёйига чизилган уларга мос синиқ чизиқлар периметрлари ҳам ортиб боради.

1-таъриф. Агар $\lambda_p \to 0$ да $\overset{\frown}{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ периметри

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + \left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]^2}$$

чекли лимитга эга бўлса, $\overset{\frown}{AB}$ ёй узунликка эга дейилади.

Ушбу

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \mu(l) = \mu(\overset{\frown}{AB})$$

лимит $\overset{\frown}{AB}$ ёйининг узунлиги дейилади.

Масалан, агар

$$f(x) = kx + C \qquad (a \le x \le b)$$

бўлса, унда $\overset{\frown}{AB}$ нинг узунлиги

$$\mu(\breve{AB}) = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + k^2 (x_{r+1} - x_k)^2} =$$

$$= \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+k^2} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sqrt{1+k^2} \cdot (b-a)$$

бўлади.

Айтайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

тенгламалар системаси билан берилган бўлсин.

(Бу ҳолда эгри чизиқ параметрик кўринишда берилган дейилади). Бунда:

1) $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$, $\psi(t) \in C[\alpha, \beta]$;

2) $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \ne t_2$ учун (1)

$$A_1(x_1, y_1) = A_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)) ,$$

$$A_2(x_2, y_2) = A_2(\varphi(t_2), \psi(t_2))$$

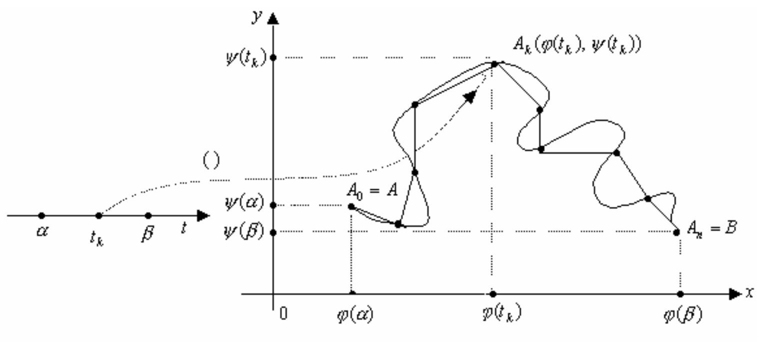
нукталар турлича ;

3) $t = \alpha$ га A нуқта, $t = \beta$ га B нуқта мос келсин.

$[\alpha, \beta]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \qquad (\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$$

бўлаклашни олиб, бу бўлаклашнинг бўлувчи t_k $(k = 0,1,2,...,n)$ нуқталарига мос келган $\breve{AB}$ ёйдаги $A_k = A_k(x_k, y_k)$ $(x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$; $k = 0,...,n)$ нуқталарни бир-бири билан тўғри чизиқ кесмалари ёрдамида бирлаштириб, $\breve{AB}$ ёйга чизилган синиқ чизиқ l ни ҳосил қиламиз. (17-чизма).



17-чизма

Бу синиқ чизиқ периметри

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}$$

бўлади.

2-таъриф. Агар $\lambda_p \to 0$ да $\breve{AB}$ ёйига чизилган синиқ чизиқ периметри $\mu(l)$ чекли лимитга эга бўлса, $\breve{AB}$ ёй узунликка эга дейилади.

Ушбу

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \mu(l) = \mu(\breve{AB})$$

лимит $\breve{AB}$ ёйининг узунлиги дейилади.

Юқорида келтирилган таърифлардан ёй узунлигининг (агар у мавжуд бўлса) мусбат бўлиши келиб чиқади.

Энди ёй узунлигининг иккита хоссасини исботсиз келтирамиз:

1) Агар $\breve{AB}$ ёйи узунликка эга бўлиб, у $\breve{AB}$ ёйдаги нуқталар ёрдамида n та $\breve{A_k A_{k+1}}$ ёйларга $(k = 0,1,2,...,n\ ;\ A_0 = A, B = A_{n+1})$ ажралган бўлса, у ҳолда ҳар бир $\breve{A_k A_{k+1}}$ ёй узунликка эга ва

$$\mu(\breve{AB}) = \sum_{k=0}^{n} \mu(\breve{A_k A_{k+1}})$$

бўлади.

2) Агар $\breve{AB}$ ёйи n та $\breve{A_k A_{k+1}}$ ёйларга ажралган бўлиб, ҳар бир $\breve{A_k A_{k+1}}$ ёй узунликка эга бўлса, у ҳолда $\breve{AB}$ ёйи ҳам узунликка эга бўлади.

2^0. $y = f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизиқ узунлигини ҳисоблаш. Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$y = f(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга.

$[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

бўлаклашини олиб, унга мос $\breve{AB}$ ёйига чизилган l синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

бўлади.

Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ сегментда $f(x)$ функцияга Лагранж теоремасини қўллаб топамиз:

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f'(\tau_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)]^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\tau_k)}\, \Delta x_k \quad ,$$

бунда $\tau_k \in [x_k, x_{r+1}]$.

Бу тенгликдаги йиғиндининг $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ функциянинг интеграл йиғиндисидан фарқи шуки, интеграл йиғиндида $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ нуқта ихтиёрий бўлган ҳолда юқоридаги йиғиндида эса τ_k нуқта Лагранж теоремасига мувофиқ олинган тайин нуқта бўлишидадир. Аммо $\sqrt{1+f'^2(x)}$ функция интегралланувчи бўлганлиги сабабли $\xi_k = \tau_k$ деб олиниши мумкин. Натижада

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

бўлиб, ундан

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \mu(l) = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $\breve{AB}$ ёйининг узунлиги

$$\mu(\breve{AB}) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (2)$$

бўлади. Бу формула ёрдамида ёй узунлиги ҳисобланади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \qquad (a > 0 \;\;, \quad -a \le x \le a)$$

тенглама билан берилган $\breve{AB}$ эгри чизиғининг узунлиги топилсин.

Бу тенглама билан аниқланадиган чизиқ занжир чизиғи дейилади.

◀ Равшанки,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) \;\;,$$

$$1+f'^2(x) = \frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 \;\;,$$

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$$

бўлади. (2) формуладан фойдаланиб, занжир чизиғининг узунлигини топамиз:

$$\mu(\breve{AB}) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})dx = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})\Big|_{-a}^{a} = a(e - \frac{1}{e}). \;\; ▶$$

3^0. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ узун-лигини ҳисоблаш.

Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

тенгламалар системаси билан берилган бўлиб, (1) шартлар-нинг бажарилиши билан бирга $\varphi(t), \psi(t)$ функциялари $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳамда $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

$[\alpha, \beta]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \qquad (\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta)$$

бўлаклашини олиб, уларга мос $\breve{AB}$ ёйинииг $A_k = A_k(x_k, y_k)$ $(x_k = \varphi(t_k)\ ,\ \ y_k = \varphi(t_k))$ нуқталарини бир-бири билан тўғри чизиқ кесмаси ёрдамида бирлаштиришдан ҳосил бўлган l синиқ чизиқ периметри

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))]^2}$$

ни қараймиз.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб топамиз:

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)^2 + \psi'^2(\theta_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} \cdot \Delta t_k \qquad (\Delta t_k = t_{k+1} - t_k)$$

бунда

$$\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]. \qquad \theta_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\mu(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \cdot \Delta t_k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} [\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\theta_k)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)}] \cdot \Delta t_k \qquad (*)$$

бунда,

$$\xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Модомики,

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \in C[\alpha, \beta]$$

экан унда

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \in R[\alpha, \beta]$$

бўлиб,

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\xi_k) + \psi'^2(\xi_k)} \cdot \Delta t_k = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \qquad (3)$$

бўлади.

Ихтиёрий a, b, c, d ҳақиқий сонлар учун ушбу

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \right| \le |a - c| + |b - d|$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

◄ Ҳақиқатан ҳам,

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| = \left|\frac{(a^2-c^2)+(b^2-d^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}\right| \le |a-c|\cdot$$

$$\cdot\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} + |b-d|\cdot\frac{|b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \le$$

$$\le |a-c|+|b-d|. \ \blacktriangleright$$

Бу тенгсизликдан фойдаланиб топамиз:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\Delta t_k\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}|\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\xi_k)|\Delta t_k + \sum_{k=0}^{n-1}|\psi'(\theta_k)-\psi'(\xi_k)|\Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\varphi')\cdot\Delta t + \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\psi')\cdot\Delta t.$$

$$\varphi'(t)\in R[\alpha,\beta], \qquad \psi'(t)\in R[\alpha,\beta]$$

бўлганлиги сабабли

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}- \\ -\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\Delta t_k = 0 \tag{4}$$

бўлади.

(3) ва (4) муносабатларни эътиборга олиб, $\lambda_p \to 0$ да (*) тенгликда лимитга ўтсак, у ҳолда $\breve{AB}$ ёйининг узунлиги учун

$$\mu(\breve{AB}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \tag{5}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу формула ёрдамида ёй узунлиги ҳисобланади.

2-мисол. Ушбу

$$x = a(t-\sin t)$$

$$y = a(1-\cos t) \qquad\qquad (0\le t\le\pi)$$

тенгламалар системаси билан берилган $\breve{AB}$ эгри чизиқнинг (циклоиданинг) узунлиги топилсин.

◄ Равшанки,

$$x'(t) = a(1-\cos t) \quad , \qquad y'(t) = a\sin t \quad ,$$

$$x'^2(t)+y'^2(t) = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2 2(1-\cos t) \ ,$$

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = a\sqrt{2(1-\cos t)}$$

бўлади. (5) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$\mu(\breve{AB}) = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cdot(\cos\frac{t}{2})_0^{2\pi} = 8a$$

бўлади. ►

4^0. Қутб координаталар системасида берилган эгри чизиқнинг узунлигини ҳисоблаш.

Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ қутб координаталар системасида қуйидаги

$$r = \rho(\theta), \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

тенглама билан берилган бўлсин. Бунда $\rho(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ бўлиб, у узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга бўлсин.

Қутб координаталари (ρ, θ) дан Декарт координаталари (x, y) га ўтиш формуласига биноан

$$x = \rho(\theta) \cdot \cos\theta,$$
$$y = \rho(\theta) \cdot \sin\theta \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

бўлади. Натижада $\breve{AB}$ параметрик кўринишда

$$\varphi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \cos\theta,$$
$$\psi(\theta) = \rho(\theta) \cdot \sin\theta \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

берилган эгри чизиқ сифатида ифодаланади, бунда $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$ функциялари 3^0 да келтирилган шартларни бажарадиган функциялар бўлади.

(5) формуладан фойдаланиб $\breve{AB}$ эгри чизиқнинг узунли-гини топамиз:

$$\mu(\breve{AB}) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta) \cdot \cos\theta)'^2 + (\rho(\theta) \cdot \sin\theta)'^2}\, d\theta =$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta.$$

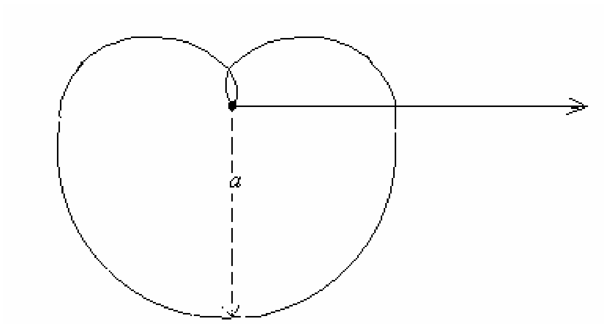
Бу формула ёрдамида эгри чизиқнинг узунлиги ҳисоб-ланади.

3-мисол. Ушбу

$$\rho = a \cdot Sin^3 \frac{\theta}{3}$$

тенглама билан берилган эгри чизиқнинг узунлиги топилсин.

◄ θ ўзгарувчи 0 дан 3π гача ўзгаргандан (ρ, θ) нуқта 18-чизмада тасвирланган l эгри чизиқни чизиб чиқади:



18-чизма

(2) формуладан фойдаланиб l чизиқнинг узунлигини топамиз:

$$\mu(l)=\int_0^{3\pi}\sqrt{(a\sin^3\frac{\theta}{3})'^2+(a\sin^3\frac{\theta}{3})'^2}\,d\theta=$$

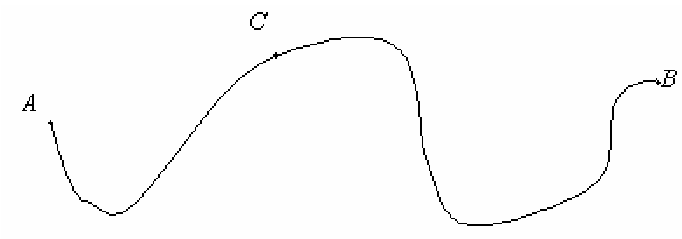
$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\cdot\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}+a^2\sin^6\frac{\theta}{3}}d\theta=$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=\frac{3\pi a}{2}.\blacktriangleright$$

5⁰. Ёй дифференциали. Айтайлик, текисликдаги $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\ , \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

тенгламалар системаси билан берилган бўлиб, бунда $\varphi(t)$ ҳамда $\psi(t)$ функциялари $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳамда $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин (19-чизма)



19-чизма

Маълумки, t ўзгарувчининг $t=\alpha$ қийматига $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқда A нуқта мос келади.

Энди ихтиёрий $t\in[\alpha,\beta]$ ни олиб, унга мос $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқдаги нуқтани C билан белгилайлик:

$$C(\varphi(t)\ ,\psi(t))\quad ,\alpha\le t\le\beta.$$

Равшанки, $\overset{\smile}{AC}$ ёйининг узунлиги C нуқтанинг $\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқдаги ҳолатига қараб ўзгаради ва айни пайтда t нинг ҳар бир тайин қийматида ягона $\overset{\smile}{AC}$ ёйининг узунлигига эга бўламиз. Бинобарин $\overset{\smile}{AC}$ ёйининг узунлиги $\mu(\overset{\smile}{AC})$ t ўзгарув-чининг функцияси бўлади:

$$\mu_t(\overset{\smile}{AC})\qquad(\alpha\le t\le\beta)$$

(5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\mu_t(\overset{\smile}{AC})=\int_\alpha^t\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Модомики, $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\in C[\alpha,\beta]$ экан, унда $\mu_t(\overset{\smile}{AC})$ функция ҳосилага эга бўлиб,

$$(\mu_t(\overset{\smile}{AC}))'=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

бўлади.

Кейинги тенгликнинг квадратини dt^2 га кўпайтириб, ушбу

$$(\mu_t(\overset{\smile}{AC}))'^2 \cdot dt^2 = \varphi'^2(t)dt^2 + \psi'^2(t)dt^2 \ ,$$

яъни

$$d(\mu_t(\overset{\smile}{AC}))'^2 = dx^2 + dy^2$$

муносабатга келамиз. Бу муносабат ёй дифференциалининг квадратини ифодалайди. Демак, ёй дифференциали $d\mu_t(\overset{\smile}{AC})$ юқоридаги $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ функцияларнинг дифференциал-лари dx ҳамда dy лар орқали ифодаланади. Бинобарин, (5) формула, узлуксиз ҳосилага эга бўлган $x(t)$, $y(t)$ функциялар ёрдамида эгри чизиқ ёйининг турли усулларда параметрлаш-тиришда ўз кўринишини сақлайди.

Машқлар

1. Ушбу

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z} dz, \qquad y = \int_1^t \frac{\sin z}{z} dz$$

$\left(1 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$ тенгламалар билан берилган эгри чизиқнинг узунлиги топилсин.

2. Ушбу

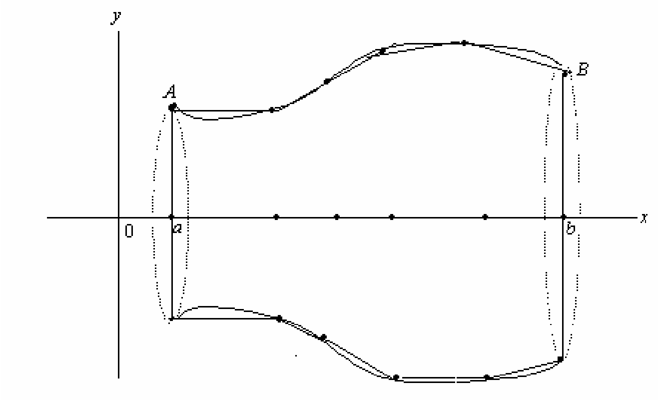
$$x^2 + y^2 = 2, \qquad y = \sqrt{|x|}$$

чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли учбурчакнинг периметри топилсин.

41-маъруза
Айланма сиртнинг юзи ва уни ҳисоблаш

1⁰. Айланма сирт ва унинг юзи тушунчаси. Маълумки, тўғри чизиқ кесмасини бирор ўқ атрофида айлантиришдан цилиндрик, конус (кесик конус) сиртлар ҳосил бўлади. Бу сиртлар юзага эга ва улар маълум формулалар ёрдамида топилади.

Айтайлик, $f(x) \in C[a,b]$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу функция графиги $\overset{\smile}{AB}$ ёйини тасвирласин (20-чизма)



20-чизма

$\overset{\smile}{AB}$ ёйни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт айланма сирт дейилади. Уни Π дейлик. $[a,b]$ сегментни ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \qquad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

бўлаклашни олайлик. Бу бўлаклашнинг ҳар бир

$$x_k \, (k = 0,1,2,...,n)$$

бўлувчи нуқталари орқали Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказиб, уларнинг $\overset{\smile}{AB}$ ёйи билан кесишиш нуқталарини $A_k = A_k(x_k, f(x_k))$ билан белгилайлик. $(A_0 = A,\ A_n = B;\quad k = 0,1,2,...,n)$ Бу нуқталарни ўзаро тўғри чизиқ кесмалари билан бирлаш-тириб, $\overset{\smile}{AB}$ ёйига L синиқ чизиқ чизамиз.

$\overset{\smile}{AB}$ ёйини Ox ўқи атрофида айлантириш билан бирга L синиқ чизиқни ҳам шу ўқ атрофида айлантирамиз. Натижада кесик конус сиртларининг бирлашмасидан ташкил топган K сирт ҳосил бўлади. Бу K сирт юзага эга ва унинг юзи

$$\mu(K) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

га тенг. (Бунда кесик конуснинг ён сиртининг юзини топиш формуласидан фойдаланилди).

Равшанки, K сирт, бинобарин унинг юзи $\mu(K)$ $[a,b]$ сегментнинг бўлаклашларига боғлиқ бўлади.

1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, $[a,b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ихтиёрий P бўлаклаши учун

$$|\mu(K) - S| < \varepsilon \quad (S \in R)$$

тенгсизлик бажарилса, S сон $\mu(K)$ нинг $\lambda_p \to 0$ даги лимити дейилади:

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \mu(K) = S \, .$$

2-таъриф. Агар $\lambda_p \to 0$ да $\mu(K)$ йиғинди чекли S лимитга эга бўлса, Π айланма сирт юзага эга дейилади.

Бунда S сон Π айланма сиртнинг юзи дейилади:

$$S=\mu(\Pi).$$

Демак,

$$\mu(\Pi)=\lim_{\lambda_p\to 0}2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}.$$

2⁰. Айланма сирт юзини ҳисоблаш. Фараз қилайлик, $f(x)\in C[a,b]$ бўлиб, у $[a,b]$ сегментда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Бу функция графиги $\breve{AB}$ ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган Π айланма сиртнинг юзини топамиз.

◄ $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий P бўлаклашини олиб, юқоридагидек

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

йиғиндини тузамиз.

Лагранж теоремасига кўра

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=f'(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлади, бунда $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$. Натижада

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

бўлади.

Кейинги тенгликни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\mu(K)=2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k+\pi\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-\right.$$
$$\left.-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\right\}. \qquad (1)$$

$f'(x)\in C[a,b]$ бўлганлиги сабабли

$$f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\in R[a,b]$$

бўлади. Демак, $\lambda_p\to 0$ да

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\to 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (2)$$

Равшанки,

$$\sqrt{1+f'^2(x)}\in C[a,b].$$

Демак, бу функция $[a,b]$ да ўзининг максимум қийматига эга бўлади. Уни M дейлик:

$$M=\max_{a\le x\le b}\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

$f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда текис узлуксиз. Унда $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ га кўра шундай $\delta>0$ сон топиладики, $\lambda_p<\delta$ бўлганда

$$|f(x_k)-f(\xi_k)|<\frac{\varepsilon}{2M(b-a)},\quad |f(x_{k+1})-f(\xi_k)|<\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

бўлади. Шуларни эътиборга олиб топамиз:

$$\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k\right\}\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n-1}\left[|f(x_k)-f(\xi_k)|+|f(x_{k+1})-f(\xi_k)|\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k<$$

$$<M\left[\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}+\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k<\varepsilon\ .$$

Бундан $\lambda_p\to 0$ да

$$\sum_{k=0}^{n-1}[(f(x_k)-f(\xi_k))+(f(x_{k+1})-f(\xi_k))]\cdot\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k\to 0 \qquad (3)$$

бўлиши келиб чиқади.

$\lambda_p\to 0$ да (1) тенгликда лимитга ўтиб, (бунда (2) ва (3) муносабатларни эътиборга олиб) айланма сиртнинг юзи учун

$$\mu(\Pi)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (4)$$

бўлишини топамиз. ►

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{-x}{a}}),\quad a>0,\ 0\le x\le a$$

занжир чизиғини Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи топилсин.

◄ Равшанки,

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{-x}{a}})$$

(4) формуладан фойдаланиб, изланаётган айланма сиртнинг юзини топамиз:

$$\mu(\Pi)=2\pi\int_0^a\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})^2dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}})dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right]\Bigg|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)\ ►$$

Айтайлик, $\overset{\frown}{AB}$ эгри чизиқ юқори ярим текисликда жойлашган бўлиб, у ушбу

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\ (\alpha\le t\le\beta)$$

параметрик тенгламалар системаси билан берилган бўлсин. Бунда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялари $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $\varphi'(t),\psi'(t)$ ҳосилаларга эга. Бу эгри чизиқни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи

$$\mu(\Pi)=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (5)$$

бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$x^2+(y-2)^2=1$$

айланани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг (торнинг) юзи топилсин.

◄ Айлананинг тенгламасини қуйидагича

$$\begin{aligned} x&=\varphi(t)=\cos t \\ y&=\psi(t)=2+\sin t \end{aligned} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

параметрик кўринишда ёзамиз.

Изланаётган айланма сиртнинг юзи, (5) формулага кўра

$$\mu(\Pi)=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\sqrt{(\cos t)'^2+(2+\sin t)'^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)dt=8\pi^2$$

бўлади. ►

Машқлар

1. Айтайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t)\ \ (\alpha\le t\le\beta)$ тенгламалар билан берилган бўлиб, $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $\varphi'(t)$ ва $\psi'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу эгри чизиқни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айлана сиртининг юзи

$$P=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (\psi(t)\ge 0)$$

бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$2ay=x^2-a^2 \qquad \left(0\le x\le 2\sqrt{2}a\right)$$

параболани OY ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айлана сиртининг юзи топилсин.

42-маъруза
Аниқ интегралнинг механика ва физикага татбиқлари

1^0. Инерция моменти. Механикада моддий нуқта ҳаракати муҳим тушунчалардан бири ҳисобланади.

Одатда, ўлчами етарли даражада кичик ва массага эга бўлган жисм моддий нуқта деб қаралади.

Айтайлик, текисликда m массага эга бўлган A моддий нуқта берилган бўлиб, бу нуқтадан бирор l ўққача (ёки O нуқтагача) бўлган масофа r га тенг бўлсин.

Ушбу

$$J = mr^2$$

миқдор A моддий нуқтанинг l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моменти дейилади.

Масалан, $A = A(x, y)$ моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$J_x = my^2 \ , \ J_y = mx^2 \ , \ J_0 = m\sqrt{x^2 + y^2}$$

бўлади.

Текисликда, ҳар бири мос равишда

$$m_0 , m_1 , m_2 ,...., m_{n-1}$$

массага эга бўлган моддий нуқталар системаси

$$\{A_0 , A_1 , A_2 ,...., A_{n-1}\}$$

нинг бирор l ўққа (O нуқтага) нисбатан инерция моменти ушбу

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k{}^2$$

йиғинди билан таърифланади, бунда $r_k - A_k$ нуқтадан l ўққача (O нуқтагача) бўлган масофа $(k = 0,1, 2,..., n-1)$.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ эгри чизиқ ёйи $\breve{AB}$ бўйича зичлиги $\rho = 1$ га тенг масса тарқатилган бўлиб, бунда $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

Равшанки, бу ҳолда масса ёй узунлигига тенг бўлади:

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

$[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

бўлаклашини оламиз. Бу бўлаклаш $\breve{AB}$ ёйни

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

нуқталар билан n та $A_k\breve{A}_{k+1}$ $(A_0 = A,\ A_{n-1} = B)$ бўлакка ажратади. Бунда $A_k\breve{A}_{k+1}$ бўлакнинг массаси

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

бўлади. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб топамиз:

$$m_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

бунда,

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Маълумки,

$$(\xi_k, f(\xi_k)) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

моддий нуқтанинг координата ўқларига ҳамда кордината бошига нисбатан инерция моментлари мос равишда

$$J'_{x_k} = m_k \cdot f^2(\xi_k) = f^2(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J'_{y_k} = m_k \cdot \xi_k^2 = \xi_k^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J'_0 = m_k(\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) = (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

бўлади. Унда ушбу

$$\{(\xi_0, f(\xi_0)),\ (\xi_1, f(\xi_1), ..., (\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))\}$$

моддий нуқталар системасининг инерция моментлари мос равишда

$$J_x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J_y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

тенгликлар билан ифодаланади.

Агар P бўлаклашнинг диаметри λ_p нолга интила борса, унда ҳар бир $A_k\breve{A}_{k+1}$ ёйнинг узунлиги ҳам нолга интила бориб, юқоридаги

$$J_x^{(n)},\ J_y^{(n)},\quad J_0^{(n)},$$

йиғиндиларнинг лимитини массага эга бўлган $\breve{AB}$ эгри чизиқнинг мос равишда координата боши ҳамда координата ўқларига нисбатан инерция моментларини ифодалайди деб қараш мумкин.

Айни пайтда,

$$\lim_{\lambda_p \to 0} J_x^{(n)} = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$\lim_{\lambda_p \to 0} J_y^{(n)} = \int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$\lim_{\lambda_p \to 0} J_0^{(n)} = \int_a^b (x^2+f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

бўлади.

Демак, массага эга бўлган $\breve{AB}$ эгри чизиқнинг координата ўқларига ҳамда координата бошига нисбатан инерция моментлари аниқ интеграллар ёрдамида топилади:

$$J_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$J_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2+f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

2^0. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши. Бирор жисмни Ox ўқи бўйлаб, шу ўқ йўналишида бўлган $F = F(x)$ куч таъсири остида a нуқтадан b нуқтага $(a<b)$ ўтказиш учун бажарил-ган ишни топиш лозим бўлсин.

Равшанки, жисмга таъсир этувчи куч ўзгармас, яъни

$$F(x) = C - const$$

бўлса, унда жисмни a нуқтадан b нуқтага ўтказиш учун бажарилган иш

$$A = C\cdot(b-a)$$

га тенг бўлади.

Айтайлик, жисмга таъсир этувчи куч x га $(x\in[a,b])$ боғлиқ бўлиб, у $[a,b]$ да узлуксиз бўлсин:

$$F = F(x) \in C[a,b].$$

$[a,b]$ сегментнинг ихтёрий

$$P = \{x_0\ ,\ x_1,\dots,\ x_n\}\quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

бўлаклашини олиб, бу бўлаклашнинг ҳар бир

$$[x_k\,,x_{k+1}]\qquad\qquad (k = 0,1,2,\dots,n-1)$$

бўлакчасида ихтёрий ξ_k $\quad \xi_k \in [x_k\,,x_{k+1}];\ \ (k = 0,1,2\dots,n-1)$ нуқта оламиз.

Агар ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да жисмга таъсир этувчи кучни ўзгармас ва у $F(\xi_k)$ га тенг дейилса, у ҳолда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқда бажарилган иш (куч таъсирида жисмни x_k нуқтадан x_{k+1} нуқтага ўтказиш учун бажарилган иш) тахминан

$$F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$$

формула билан, $[a,b]$ оралиқда бажарилган иш эса , тахминан

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k \qquad (1)$$

формула билан ифодаланади.

P бўлаклашнинг диаметри λ_p нолга интила борганда юқоридаги йиғиндининг қиймати изланаётган иш миқдорини тобора аниқроқ ифодалайди. Бу ҳол $\lambda_p \to 0$ да (1) йиғинди-нинг чекли лимитини бажарилган иш дейилиши мумкинли-гини кўрсатади.

Демак,

$$A = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k .$$

Модомики, $F(x) \in C[a,b]$ экан,

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

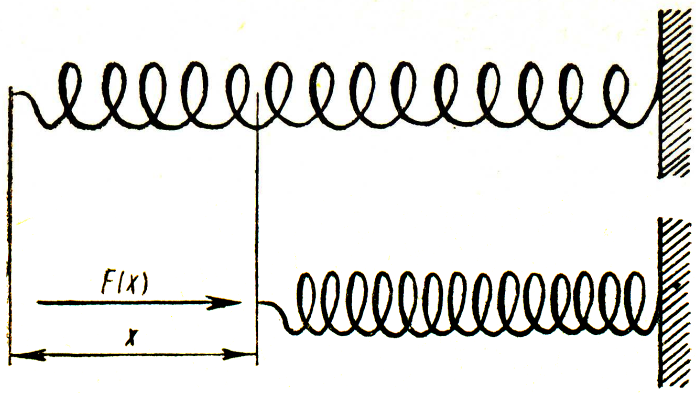
бўлади.

Шундай қилиб, ўзгарувчи $F(x)$ кучнинг $[a,b]$ даги бажарган иши

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (2)$$

формула билан ифодаланади.

Мисол. Винтсимон пружинанинг бир учи мустаҳкамлан-ган, иккинчи учига эса $F = F(x)$ куч таъсир этиб, пружина қисилган (21-чизма)



21-чизма

Агар пружинанинг қисилиши унга таъсир этаётган $F(x)$ кучга пропорционал бўлса, пружинани a бирликка қисиш учун $F(x)$ кучнинг бажарган иши топилсин.

◀ Агар $F(x)$ куч таъсирида пружинанинг қисилиш миқдорини x орқали белгиласак, у ҳолда

$$F(x) = kx$$

бўлади, бунда k-пропорционаллик коэффициенти (қисилиш коэффициенти). (2) формулага кўра бажарилган иш

$$A = \int_0^a kxdx = \frac{ka^2}{2}$$

бўлади. ▶

Машқлар

1. Учбурчак асосига нисбатан инерция моментини топилсин.
2. Асосининг радиуси R, баландлиги H бўлган парабо-лоид шаклидаги қозондан, ундаги сувни чиқаришга сарфлан-ган иш ҳисоблансин.

10-БОБ
ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР

43-маъруза
Чегаралари чексиз хосмас интеграллар

Функциянинг аниқ интеграли (Риман интеграли) тушун-часини киритишда интеграллаш оралиғининг чекли булиши талаб этилган эди.

Энди чексиз ораликда ($[a,+\infty)$; $(-\infty, a]$; $(-\infty,+\infty)$ оралиқлар-да) берилган функциянинг шу оралиқ бўйича интеграл тушунчасини келтирамиз ва ўрганамиз.

1⁰.Чегаралари чексиз хосмас интеграл тушунчаси. $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ ораликда ($a \in R$) берилган бўлиб, ихтиёрий $[a,t]$ да ($a \le t < +\infty$) интегралланувчи бўлсин: $f(x) \in R([a,t])$.

Ушбу

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

белгилашни киритамиз.

1-таъриф. Агар $t \to +\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимити $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграли дейилади ва

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) интегрални чегараси чексиз хосмас интеграл ҳам деб юритилади.

Қулайлик учун, бундан кейин “чегараси чексиз хосмас интеграл” дейиш ўрнига “интеграл” деймиз.

2-таъриф. Агар $t \to +\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, (1) интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $t \to +\infty$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (1) интеграл узоқлашувчи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

интегрални қарайлик. Бу ҳолда

$$F(t) = \int_0^t e^{-x}dx = -e^{-t} + 1$$

бўлиб,

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$$

бўлади.

Демак, берилган интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

2-мисол. Ушбу

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad (a>0,\ \ \alpha>0)$$

интеграл учун

$$F(t)=\int_a^t\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\ln t-\ln a, \ \text{агар} \ \ \alpha=1 \ \text{бўлса} \\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, \ \text{агар} \ \alpha\neq 1\ \text{бўлса}\end{cases},$$

бўлиб, $t\to+\infty$ да

$$F(t)\to\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} \qquad (\alpha>1),$$

$$F(t)\to+\infty \qquad (\alpha\le 1)$$

бўлади.

Демак,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$$

интеграл $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\le 1$ бўлганда узоқла-шувчи бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty}\cos x dx$$

интеграл узоқлашувчи бўлади, чунки $t\to+\infty$ да

$$F(t)=\int_0^t\cos x dx=\sin t$$

функциянинг лимити мавжуд эмас.

Юқоридагидек,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx\ , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги, узоқла-шувчилиги таърифланади:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}}\int_v^u f(x)dx \ .$$

2^0. Яқинлашувчи хосмас интегралнинг содда хоссалари. Хосмас интегралнинг турли хоссаларини $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ оралиқ бўйича олинган

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интеграли учун баён этамиз. Бу хоссаларни

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

интеграллар учун келтиришни ўқувчига ҳавола этамиз.

1-хосса. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx \quad (a<b)$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча . Бунда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx \tag{2}$$

тенглик бажарилади.

◄ Равшанки,

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^t f(x)dx \ . \quad (a<b<t)$$

Айтайлик, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин.

Демак,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$$

мавжуд ва чекли бўлади:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx\,,$$

(2) тенгликдан фойдаланиб, $t \to +\infty$ да

$$\lim_{t\to+\infty} \int_b^t f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

бўлишини топамиз. Демак, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

бўлади.

Айтайлик, $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлсин,

Демак,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_b^t f(x)dx = \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

чекли бўлади.

(2) тенгликдан, $t \to +\infty$ да

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty} f(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^{+\infty} f(x)dx$$

бўлади. ►

2-хосса. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} C\cdot f(x)dx$ ҳам $(C=const)$ яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} C\cdot f(x)dx=C\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

бўлади.

3-хосса. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\forall x\in[a,+\infty)$ да $f(x)\ge 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ge 0$$

бўлади.

4-хосса. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинла-шувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty}(f(x)\pm g(x))dx$ интеграл ҳам яқинла-шувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty}(f(x)\pm g(x))dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx\pm\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

5-хосса. Агар $\forall x\in[a,+\infty)$ да $f(x)\le g(x)$ бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\le\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

2)- 5)- хоссаларнинг исботи хосмас интеграл ва унинг яқинлашувчилиги таърифларидан бевосита келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ да берилган бўлиб, $f(x)$ функция чегараланган ($m \le f(x) \le M$, $x \in [a,+\infty)$), $g(x)$ функция эса ўз ишорасини ўзгартирмасин ($\forall x \in [a,+\infty)$ да ҳар доим $g(x) \ge 0$ ёки $g(x) \le 0$).

6-хосса. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар яқин-лашувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас $\mu (m \le \mu \le M)$ топиладики,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{3}$$

бўлади.

◀ Айтайлик, $\forall x \in [a,+\infty)$ да $g(x) \ge 0$ бўлсин. Унда

$$m\cdot g(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

бўлиб,

$$m\int_a^t g(x)dx \le \int_a^t f(x)g(x)dx \le M\int_a^t g(x)dx$$

бўлади. Бу тенгсизликлардан, $t \to +\infty$ да лимитга ўтсак унда

$$m\int_a^{+\infty} g(x)dx \le \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \le M\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx = 0$$

бўлганда (3) тенглик бажарилади.

Айтайлик,

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx > 0$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$m \le \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx} \le M$$

бўлади. Агар

$$\mu = \frac{\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx}{\int_a^{+\infty} g(x)dx}$$

деб олинса, унда $m \le \mu \le M$ бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx = \mu\cdot \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

бўлади.

$\forall x \in [a,+\infty)$ да $g(x) \leq 0$ бўлганда (3) тенгликнинг бажари-лиши юқоридагидек исботланади. ►

Одатда, бу хосса ўрта қиймат ҳақидаги теорема дейилади.

3^0. Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

Маълумки,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги ушбу

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \qquad (t > a)$$

функциянинг $t \to +\infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан иборат.

13-маърузада функциянинг чекли лимитига эга бўлиши ҳақидаги Коши теоремаси, яъни $F(t)$ функциянинг $t \to +\infty$ да чекли лимитга эга бўлиши учун

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists t_0 > a, \quad \forall t' > t_0, \qquad \forall t'' > t_0 :$$

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли экани келтирилган эди.

Бу тушунча ва тасдиқдан

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{4}$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчилигини ифодалайдиган қуйидаги теоремага келамиз.

Теорема (Коши теоремаси). (4) интегралнинг яқинла-шувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $t_0 \in R$ $(t_0 > a)$ топилиб, ихтиёрий $t' > t_0$, $t'' > t_0$ бўлганда

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Машқлар

1. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} x \sin x dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўладими?

2. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{\left(1+x^2\right)^3} dx = -\frac{1}{8}$$

тенглик исботлансин.

44-маъруза

Манфий бўлмаган функциянинг хосмас интеграллари.
Интегралнинг абсолют яқинлашувчилилиги

1^0. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a,+\infty)$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу функцияни $[a, t]$ да $(a < t < +\infty)$ интегралланувчи дейлик: $f(x) \in R([a, t])$. Бу ҳолда

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

функция $(a,+\infty)$ оралиқда ўсувчи бўлади.

◄ Ҳақиқатдан ҳам, $a < t_1 < t_2 < +\infty$ да

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

бўлиб,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$$

бўлганлиги сабабли

$$F(t_2) \geq F(t_1)$$

бўлади. Демак, $\forall\ t_1, t_2 \in (a,+\infty)$ учун

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2).$$ ►

1-теорема. Манфий бўлмаган $f(x)$ функция хосмас интеграли

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x) \geq 0,\ x > a) \tag{1}$$

нинг яқинлашувчи бўлиши учун $F(t)$ функциянинг юқоридан чегараланган, яъни

$$\exists C \in R\ ,\ \forall t > a:\ F(t) \leq C$$

бўлиши зарур ва етарли.

◀**Зарурлиги.** Айтайлик, (1) интеграл яқинлашувчи бўлсин. Таърифга биноан

$$\lim_{t \to +\infty} F(t)$$

мавжуд ва чекли бўлади. Унда, $\exists\, C \in R$, $\forall t > a$ да $F(t) \leq C$ бўлади.

Етарлилиги. Айтайлик, $F(t)$ функция $(a,+\infty)$ да юқорида-ги чегараланган бўлсин. Айни пайтда, $F(t)$ ўсувчи функция. Демак, $t \to +\infty$ да $F(t)$ функция чекли лимитга эга. Бу эса (1) интегрални яқинлашувчи бўлишини билдиради.▶

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Агар $F(t)$ функция $(t \in (a,+\infty))$ юқоридан чегара-ланмаган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

интеграл узоқлашувчи бўлади.

2^0. Таққослаш теоремалари. Иккита функция маълум муносабатда бўлганда бирининг хосмас интегралининг яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлишидан иккинчисининг ҳам яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлишини ифодаловчи теорема-ларни келтирамиз. Одатда, улар таққослаш теоремалари дейилади.

2-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, $\forall x \in [a,+\infty)$ да

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \tag{2}$$

бўлсин.

Агар $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

◀ Айтайлик, (2) муносабат ўринли бўлиб, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлсин. Унда 1-теоремага кўра

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx \le C$$

бўлади. Айни пайтда,

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \le G(t)$$

бўлганлиги сабабли яъни 1-теоремага биноан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинла-шувчи бўлади.

Айтайлик, (2) муносабат ўринли бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ узоқла-шувчи бўлсин. Унда юқорида келтирилган натижа ва

$$F(t) \le G(t)$$

тенгсизликдан $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчилиги келиб чиқади.▶

3-теорема. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ да $f(x) \ge 0$ $g(x) \ge 0$ бўлиб,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad (0 \le k \le +\infty)$$

бўлсин.

Агар $k < +\infty$ бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади.

Агар $k > 0$ бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

◀ Айтайлик,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k < +\infty$$

бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлсин. Лимит таърифига биноан

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_0 > a,\ \forall t > t_0$$

да

$$f(x) < (k+\varepsilon)g(x) \qquad (3)$$

бўлади. Яқинлашувчи интегралнинг хоссасига кўра

$$\int_a^{+\infty} (k+\varepsilon)g(x)dx$$

яқинлашувчи бўлади.

(3) муносабат ва 2-теоремадан фойдаланиб, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

Айтайлик,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k>0$$

бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ узоқлашувчи бўлсин. Бу ҳолда k_1 сон $(k>k_1>0)$ учун шундай $t_0'>a$ топиладики, $\forall x>t_0'$ да

$$\frac{f(x)}{g(x)}>k_1\ ,$$

яъни

$$g(x)<\frac{1}{k_1}f(x) \qquad (4)$$

бўлади.

(4) муносабат ва 2-теоремадан фойдаланиб $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз. ►

Натижа. Агар

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

бўлиб, $0<k<+\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ва $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

Кўп ҳолларда бирор хосмас интегралнинг яқинлашувчи-лигини ёки узоқлашувчилигини аниқлашда аввалдан яқинла-шувчилиги ёки узоқлашувчилиги маълум бўлган интеграл билан таққослаб (юқорида келтирилган теоремалардан фойдаланиб) қаралаётган интегралнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши топилади.

Масалан,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интегрални

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \qquad (a>0\ ,\alpha>0)$$

интеграл билан таққослаб, қуйидаги натижага келамиз:

Натижа. Айтайлик, бирор C $(0<C<+\infty)$ ва $\alpha>0$ сонлар учун $x\to+\infty$ да

$$f(x) \sim \frac{C}{x^{\alpha}},$$

яъни

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\cdot f(x) = C$$

бўлсин. Унда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интеграл $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \le 1$ бўлганда узоқла-шувчи бўлади.

3^0. 1-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Агар

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\ ,\quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

дейилса, унда $\forall x \in [0,+\infty)$

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

интеграл яқинлашувчи. 2-теоремага кўра берилган хосмас интеграл яқинлашувчи бўлади.►

2-мисол. Ушбу

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ $\forall x \ge 1$ да

$$f(x) = e^{-x^2}\ ,\quad g(x) = e^{-x}$$

функциялари учун

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

бўлади. Қуйидаги

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$$

интегралнинг яқинлашувчилиги равшан. Демак,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.▶

3-мисол. Ушбу

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ $\forall x > 1$ да

$$\ln x < x$$

бўлиб, $f(x) = e^{-x} \ln x, \quad g(x) = xe^{-x}$ функциялар учун

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

бўлади. Энди

$$\int_{1}^{+\infty} g(x) dx = \int_{1}^{+\infty} xe^{-x} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, 2-теорема-дан фойдаланиб, берилган

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз.▶

4-мисол. Ушбу

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Интеграл остидаги

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}$$

функция учун

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \cdot \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$$

интеграл яқинлашувчи. Демак, берилган интеграл яқинла-шувчи бўлади.▶

4⁰. Хосмас интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. Бунда, $\forall x \in [a,+\infty)$ учун $f(x) \geq 0$ бўлиши шарт эмас

Таъриф. Агар

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл абсолют яқинлашувчи дейилади.

Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ шартли яқинлашувчи интеграл дейилади.

4-теорема. Агар интеграл абсолют яқинлашувчи бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

◀ Айтайлик,

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлсин. Берилган $f(x)$ ва $|f(x)|$ функ-циялар ёрдамида ушбу

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) \quad ,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$$

функцияларни тузамиз.

Бу функциялар учун, $\forall x \in [a,+\infty)$ да

1) $\varphi(x) \geq 0$, $\psi(x) \geq 0$
2) $\varphi(x) \leq |f(x)|$, $\psi(x) \leq |f(x)|$
3) $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$

бўлади. Юқорида келтирилган 2-теоремадан фойдаланиб, қуйидаги

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} \psi(x)dx$$

интеграл яқинлашувчилигини топамиз.

Унда

$$\int_a^{+\infty} (\varphi(x) - \psi(x))dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

яқинлашувчи бўлади.▶

Машқлар

1. Ушбу интеграл

$$\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}}-e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

2. k нинг қандай қийматларида

$$\int_{1}^{+\infty} x^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx \qquad (k<1)$$

интеграл яқинлашувчи бўлади?

45-маъруза

Интегралнинг яқинлашувчилиги аломатлари. Интегралнинг бош қиймати

1^0. Дирихле аломати. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

1-теорема (Дирихле аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ да узлуксиз ва унинг шу оралиқдаги бошланғич $F(x)$ $(F'(x) = f(x))$ функцияси чегара-ланган;

2) $g(x)$ функция $[a,+\infty)$ да узлуксиз $g'(x)$ ҳосилага эга ;

3) $g(x)$ функция $[a,+\infty)$ да камаювчи;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

◄ Равшанки,

$$f(x)\in C([a,+\infty))\,,\ g(x)\in C([a,+\infty)) \Rightarrow f(x)g(x)\in C([a,+\infty))$$

бўлади. Бинобарин, $f(x)\cdot g(x)$ функция $[a,t]$ $(a < t < +\infty)$ оралиқда интегралланувчи бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласи-дан ҳамда теореманинг 1)- ва 2)- шартларидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^t f(x)g(x)dx = \int_a^t g(x)\,dF(x) = g(x)\,F(x)\Big|_a^t - \int_a^t f(x)g'(x)dx. \qquad (1)$$

Энди

$$|g(t)\,F(t)| \le Mg(t) \qquad (M = \sup|F(t)| < +\infty)$$

бўлишини эътиборга олсак, ундан $t \to +\infty$ да

$$g(t)\,F(t) \to 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Берилишига кўра, $g(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда узлук-сиз дифференциалланувчи ҳамда шу оралиқда камаювчи функция. Демак, $\forall x \in [a,+\infty)$ да

$$g'(x) \le 0$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\int_a^t |F(x)\,g'(x)|dx \le M\int_a^t |g'(x)|dx = -M\int_a^t g'(x)dx =$$

$$= M(g(a) - g(t)) \le M\,g(a) \quad (g(t) \ge 0).$$

Унда 44 - маърузадаги 2 -теоремадан фойдаланиб

$$\int_a^{+\infty} F(x)\,g'(x)\,dx$$

хосмас интегралнинг яқинлашувчи эканлигини аниқлаймиз.

(1) тенгликда $t \to +\infty$ да лимитга ўтиб, ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)g(x)\,dx$$

лимитнинг мавжуд ва чекли бўлишини топамиз. Бу эса $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўлишини билдиради.►

Мисол. Ушбу

$$J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \qquad (\alpha > 0)$$

интегрални яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Берилган интегрални қуйидагича

$$J = \int\limits_1^{+\infty} \sin x \frac{1}{x^\alpha} dx \qquad (\alpha > 0)$$

ёзиб, $f(x) = \sin x,\ g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ деймиз. Бу функциялар юқорида келтирилган теореманинг барча шартларини қаноатланти-ради.

1) $f(x) = \sin x$ функция $[1,+\infty)$ оралиқда узлуксиз ва унинг бошланғич функцияси $F(x) = -\cos x$ функция $[1,+\infty)$ да чегара-ланган;

2) $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ $\quad (\alpha > 0)$ функция $[1,+\infty)$ да

$$g'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

ҳосилага эга ва у узлуксиз;

3) $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ $\quad (\alpha > 0)$ функция $[1,+\infty)$ да камаювчи;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$. $\quad (\alpha > 0)$

Унда Дирихле аломатига кўра

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \qquad (\alpha > 0)$$

интеграл яқинлашувчи бўлади. ►

2^0. Абель аломати. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин.

2-теорема (Абель аломати). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ да узлуксиз бўлиб, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграл яқинлашувчи;

2) $g(x)$ функция $[a,+\infty)$ да узлуксиз $g'(x)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила $[a,+\infty)$ да ўз ишорасини сақласин;

3) $g(x)$ функция $[a,+\infty)$ да чегараланган.

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

◀ Равшанки, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралнинг яқинлашувчи бўли-шидан $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ оралиқда чегараланган $F(x)$ бошланғич функцияга эга бўлиши келиб чиқади.

Теореманинг 2)- ва 3)- шартларидан ҳамда монотон функциянинг лимити ҳақидаги теоремадан фойдаланиб ушбу

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)$$

лимитнинг мавжуд ва чекли бўлишини топамиз:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = b\,.$$

Унда

$$g_1(x) = g(x) - b$$

функция $x \to +\infty$ да монотон равишда нолга интилади:

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x) = 0\,.$$

Шундай қилиб $f(x)$ ва $g_1(x)$ функциялари Дирихле аломати келтирилган барча шартларни қаноатлантиради. Дирихле аломатига кўра

$$\int_a^{+\infty} f(x)g_1(x)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Айни пайтда,

$$f(x)\,g(x) = f(x)b + f(x)\,g_1(x)$$

бўлганлиги сабабли,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. ▶

3^0.Хосмас интегралнинг бош қиймати.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да берилган бўлиб, бу оралиқнинг исталган $[t',t]$ $(-\infty < t' < t < +\infty)$ қисмида интегралланувчи бўлсин:

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} f(x)\,dx.$$

Маълумки, ушбу

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty,\\ t\to+\infty}} F(t',t) = \lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)\,dx$$

лимит $f(x)$ функциянинг $(-\infty,+\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интеграли дейилиб, у чекли бўлса,

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty \\ t\to+\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи дейилар эди.

Бунда t' ва t ўзгарувчиларнинг ихтиёрий равишда

$$t' \to -\infty, \quad t \to +\infty$$

га интилиши кўзда тутилади.

Хусусан, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

бўлади.

Бироқ

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} f(x)dx$$

функция, $t' = -t$ бўлиб, $t \to +\infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқавермайди.

Масалан, ушбу

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} \sin x\,dx$$

интегрел учун $t' = -t$ бўлса,

$$\int_{-t}^{t} \sin x\,dx = 0 \qquad (\forall t > 0)$$

бўлиб,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} \sin x\,dx = 0$$

бўлади. Бироқ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи эмас.

Таъриф. Агар $t' = -t$ бўлиб, $t \to +\infty$ да

$$F(t',t) = \int_{-t'}^{t} f(x)dx$$

функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

лимит эса $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати деб аталади. Одатда, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx.$$

Бунда $v.p$ белги французча "*valeur principiale*"- "бош қиймат" сўзларининг дастлабки ҳарфларини ифодалайди.

Шундай қилиб, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у бош қиймат маъносида ҳам яқинлашувчи бўлади. Бироқ, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ хосмас интегралнинг бош қиймат маъносида яқинлашувчи бўлишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Машқлар

1. Дирихле аломатидан фойдаланиб

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\left(x+x^2\right)}{x^{\alpha}}dx \qquad (\alpha>0)$$

интегрални яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

2. Ушбу интеграл

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}arctgxdx \qquad (\alpha>0)$$

яқинлашувчиликка текширилсин.

46-маъруза
Хосмас интегралларни ҳисоблаш

1^0. Ньютон-Лейбниц формуласи. Ушбу

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлиб, уни ҳисоблаш талаб этилсин.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда бошланғич $F(x)$ функцияга эга ва $x \to +\infty$ да $F(x)$ функция чекли лимити мавжуд бўлсин:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Унда

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \\ &= \lim_{t\to+\infty}(F(t)-F(a)) = F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}\end{aligned} \tag{1}$$

бўлади.

(1) формула Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.

1-мисол. Ушбу,

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Равшанки, $F(x) = \cos\frac{1}{x}$ функция $[\frac{2}{\pi},+\infty)$ оралиқда $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

(1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1. \blacktriangleright$$

2^0. Бўлаклаб интеграллаш. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,+\infty)$ ораликда узлуксиз ва узлуксиз, $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар

1) $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g'(x)dx$ $\left(\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$ интеграл яқинлашувчи;

2) ушбу $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$ лимит мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx \qquad \left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx\right)$$

интеграл яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \qquad (2)$$

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$$

бўлади.

◀ Равшанки,

$$\int_a^t f'(x)g(x)dx = \int_a^t g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^t - \int_a^t f(x)dg(x) =$$

$$= f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^t f(x)g'(x)dx.$$

Кейинги тенгликда, $t\to+\infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(t)g(t)) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx. \blacktriangleright$$

(2) формула бўлаклаб интеграллаш формуласи дейи-лади.

2-мисол . Ушбу

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Агар $g(x) = x, \quad f'(x) = e^{-x}$ деб олсак, унда

$$g'(x) = 1, \quad f(x) = -e^{-x}$$

бўлиб, (2) формулага кўра $(a = 0)$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t+\infty}(-te^{-t}) - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

бўлади. ►

3⁰. Ўзгарувчиларни алмаштириб интеграллаш.

Ушбу

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

хосмас интегрални қараймиз. Бу интегралда $x = \varphi(z)$ алмаш-тиришни бажарамиз. Бунда $x = \varphi(z)$ функция қуйидаги шарт-ларни қаноатлантирсин:

1) $\varphi(z)$ функция $[\alpha,+\infty)$ оралиқда узлуксиз ва узлуксиз $\varphi'(z)$ ҳосилага эга;

2) $\varphi(z)$ функция $[\alpha,+\infty)$ да қатъий ўсувчи;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(+\infty) = \lim\limits_{z\to+\infty} \varphi(z) = +\infty$.

Агар

$$\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

бўлади.

◄ Ихтиёрий $z(\alpha < z < +\infty)$ ни олиб, унга мос $\varphi(z) = t$ нуқта-ни топамиз.

Равшанки, юқоридаги шартларда $[a,t)$ да 37-маърузадаги (2) формулага кўра

$$\int_a^t f(x)dx = \int_\alpha^z f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$$

бўлади.

Кейинги тенгликда $t\to+\infty$ да (бунда $z = \varphi^{-1}(t)\to+\infty$) лимит-га ўтиб топамиз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

Бу эса келтирилган тасдиқни исботлайди. ►

3-мисол. Ушбу

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Бу интегралда $x=\frac{1}{t}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$J=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_{0}^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}$$

бўлиб,

$$J=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

бўлиши келиб чиқади.

Кейинги интегралда $x-\frac{1}{x}=z$ деб, топамиз:

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{2+z^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Демак,

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\ ▶$$

4^0.Хосмас интегралларни тақрибий ҳисоблаш.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда узлуксиз бўлиб, ушбу

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлсин. Таърифга биноан

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t}f(x)dx\ ,$$

яъни

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists t_0>a\ ,\ \forall t>t_0\ :$$

$$\left|\int_{a}^{+\infty}f(x)dx-\int_{a}^{t}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

бўлади.

Равшанки,

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx-\int_{a}^{t}f(x)=\int_{t}^{+\infty}f(x)dx\ .$$

Демак,

$$\left|\int_{t}^{+\infty}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Натижада ушбу

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \approx \int_a^t f(x)dx \qquad (5)$$

тақрибий формулага келамиз. Унинг хатолиги

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

хосмас интеграл тақрибий ҳисоблансин.

◄ (5) формулага кўра, берилган интегрални тақрибий ҳисоблаш учун ушбу

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^a e^{-x^2} dx \qquad (a > 0)$$

формулани ҳосил қиламиз. Унинг ҳатолиги

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

га тенг бўлади. Бу ҳатоликни юқоридан баҳолаймиз:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx \le \frac{1}{a}\int_a^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2a}\int_a^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = \frac{1}{2a}(-e^{-x^2})_a^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a^2}.$$

Айтайлик, $a = 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги учун

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx \le 0{,}1839$$

бўлади.

Айтайлик, $a = 2$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги учун

$$\int_2^{+\infty} e^{-x^2} dx \le 0{,}00458$$

бўлади.

Айтайлик, $a = 3$ бўлсин . Бу ҳолда

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx \int_0^3 e^{-x^2} dx$$

бўлиб, бу тақрибий формуланинг хатолиги учун

$$\int_{3}^{+\infty} e^{-x^2} dx \le 0{,}00002$$

бўлади. ►

Машқлар

1. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

2. Ушбу

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}} \quad (a > 0)$$

тенглик исботлансин.

47-маъруза
Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграллари

1^0. Махсус нуқта. Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўплам-да берилган бўлсин. $x_0 \in R$ нуқтанинг ушбу

$$\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = \{x \in R;\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;\ x \neq x_0\}$$

атрофида қараймиз, бунда δ ихтиёрий мусбат сон.

1-таъриф. Агар $f(x)$ функция

$$X \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing$$

тўпламда чегараланмаган бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг махсус нуқтаси дейилади.

Масалан, $[a,b)$ да берилган $f(x) = \dfrac{1}{b-x}$ функция учун $x_0 = b$ махсус нуқта; $R \setminus \{-1;0;1\}$ тўпламда берилган $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ функция учун $x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$ нуқталар махсус нуқталар бўлади.

2^0.Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. Бу функция ихтиёрий $[a,t]$ да $(a < t < b)$ интегралланувчи бўлсин. Равшанки, бу интеграл t га боғлиқ бўлади:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \qquad (a < t < b).$$

2-таъриф. Агар $t \to b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган $f(x)$ функциянинг $[a,b)$ бўйича хосмас интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} F(x) = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

3-таъриф. Агар $t \to b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, (1) хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади.

Агар $t \to b-0$ да $F(t)$ функциянинг лимити чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (1) хосмас интеграл узоқлашувчи дейилади.

$f(x)$ функция $(a,b]$ да берилган бўлиб, $x_0 = a$ нуқта унинг махсус нуқтаси; $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0 = a$, $x_1 = b$ нуқталар унинг махсус нуқталари бўлган ҳолда шу функциянинг $(a,b]$ ҳамда (a,b) бўйича хосмас интеграллари, уларнинг яқинлашувчилиги ҳамда узоқлашувчилиги юқорида-гидек таърифланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0} F(t) = \lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t'\to a+0 \\ t\to b-0}} F(t',t) = \lim_{\substack{t'\to a+0 \\ t\to b-0}} \int_{t'}^{t} f(x)dx\,.$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,b)\setminus\{c\}$ тўпламда $(a<c<b)$ берилган бўлиб, $x_0 = a$, $x_1 = b, x_2 = c$ нуқталар унинг махсус нуқталари бўлсин. Бу функциянинг қуйидаги

$$\int_{t'}^{t} f(x)dx = \varphi(t',t)\ , \qquad (a<t'<t<c)$$

$$\int_{u'}^{u} f(x)dx = \psi(u',u)\ , \qquad (c<u'<u<b)$$

интеграллари мавжуд бўлсин.

4-таъриф. Агар $t'\to a+0$, $t\to c-0$ ҳамда $u'\to c+0$, $u\to b-0$ да $\varphi(t',t)+\psi(u',u)$ функциянинг лимити

$$\lim_{\substack{t'\to a+0 \\ t\to c-0 \\ u'\to c+0 \\ u\to b-0}} [\varphi(t',t)+\psi(u',u)] = \lim_{\substack{t'\to a+0 \\ t\to c-0 \\ u'\to c+0 \\ u\to b-0}} [\int_{t'}^{t} f(x)dx + \int_{u'}^{u} f(x)dx]$$

мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган $f(x)$ функциянинг (a,b) бўйича хосмас интеграли дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t'\to a+0 \\ t\to c-0 \\ u'\to c+0 \\ u\to b-0}} [\int_{t'}^{t} f(x)dx + \int_{u'}^{u} f(x)dx] \qquad (2)$$

5-таъриф. Агар $t'\to a+0$, $t\to c-0$ ҳамда $u'\to c+0$, $u\to b-0$ да $\varphi(t',t)+\psi(u',u)$ функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, (2) интеграл яқинлашувчи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Равшанки, $x_0 = 0$ нуқта $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ функциянинг махсус нуқтаси. Демак, қаралаётган интеграл чегараланмаган функ-циянинг хосмас интеграли бўлади.

Таърифга биноан

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to+0} 2(1-\sqrt{t}) = 2$$

бўлади. Демак, берилган хосмас интеграл яқинлашувчи ва у 2 га тенг. ►

2-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади, чунки

$$\lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+0}(\ln x)_t^1 = +\infty.$$

3-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Интеграл остидаги

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

функция учун $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ нуқталар махсус нуқталар бўлади. Хосмас интеграл таърифидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} == \lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}\int_{t'}^{t} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2x-1)]_{t'}^{t} =$$

$$= \lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2t-1)-\arcsin(2t'-1)] = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi \ .$$

Демак, интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi. \ ►$$

4-мисол. Ушбу

$$J_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad , \quad J_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

интеграллар яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{t\to a+0}\left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_t^b =$$

$$= \lim_{t\to a+0}\frac{1}{1-\alpha}[(b-a)^{1-\alpha}-(t-a)^{1-\alpha}], \quad (\alpha \neq 1) \ .$$

Бу лимит α га боғлиқ бўлиб, $\alpha<1$ бўлганда чекли, демак J_1 хосмас интеграл яқинлашувчи, $\alpha>1$ бўлганда эса чексиз бўлиб, J_1 хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

$\alpha=1$ бўлганда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}\int_t^b \frac{dx}{x-a}=\lim_{t\to a+0}(\ln(x-a))_t^b$$

бўлиб, J_1 интеграл узоқлашувчи.

Демак,

$$J_1=\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

интеграл $\alpha<1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\geq 1$ бўлганда узоқла-шувчи бўлади.

Худди шунга ўхшаш кўрсатиш мумкин,

$$J_2=\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

интеграл $\alpha<1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\geq 1$ бўлганда узоқла-шувчи бўлади. ►

Юқорида келтирилган таъриф ва мисоллардан чегара-ланмаган функциянинг хосмас интеграли ҳам 43-46- маъру-заларда батафсил ўрганилган чегаралари чексиз (чексиз оралиқ бўйича) хосмас интеграл каби эканлигини кўрамиз.

Шуни эътиборга олиб, чегараланмаган фукциянинг хос-мас интеграллари ҳақидаги тушунча ва тасдиқларни келти-риш билангина кифояланамиз. Бунда $[a,b)$ да берилган ва $x=b$ унинг махсус нуқтаси бўлган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграли $\int_a^b f(x)dx$ ни қараймиз.

3⁰. Яқинлашувчи хосмас интегралнинг содда хоссалари.

1) Агар $\int_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_c^b f(x)dx \quad (a<c<b)$$

интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча. Бунда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

тенглик ўринли бўлади.

2) Агар $\int_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b cf(x)dx$ ҳам $(c-const)$ ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^b f(x)dx \qquad (c-const)$$

бўлади.

3) Агар $\int_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи бўлиб, $\forall x\in[a,b)$ да $f(x)\geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

бўлади.

4) Агар $\int_a^b f(x)dx$ ва $\int_a^b g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

5) Агар $\int_a^b f(x)dx$ ва $\int_a^b g(x)dx$ интеграллар яқинлашувчи бўлиб, $\forall x\in[a,b)$ да $f(x)\leq g(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

4^0. Хосмас интегралнинг яқинлашувчилиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

1-теорема (Коши теоремаси). Ушбу

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta>0$ сон топилиб, $b-\delta<t'<b$, $b-\delta<t''<b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий t' *ва* t'' лар учун

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарли.

5^0. Манфий бўлмаган функциянинг хосмас интеграл-лари. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган (b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси) бўлиб, $\forall x\in[a,b)$ да $f(x)\geq 0$ бўлсин.

2-теорема. Ушбу

$$\int_a^b f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўлиши учун $\forall t \in (a,b)$ да

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \le C \qquad (C=const)$$

тенгсизликнинг бажарилиши, яъни $F(t)$ функциянинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Натижа. Агар $F(t)=\int_a^t f(x)dx \quad (\forall t \in (a,b))$ юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

6^0. Таққослаш теоремалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функцияларнинг махсус нуқталари бўлсин.

3-теорема. Агар $\forall x \in [a,b)$ да $0 \le f(x) \le g(x)$ бўлиб, $\int_a^b g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, $\int_a^b f(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b g(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

4-теорема. Айтайлик, $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0)$ $x\in[a,b)$ функциялари учун

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k$$

бўлсин.

Агар $k<+\infty$ бўлиб $\int_a^b g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади,

Агар $k>0$ бўлиб $\int_a^b g(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

Натижа. Юқоридаги 4-теореманинг шартида $0<k<+\infty$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ ва $\int_a^b g(x)dx$ интеграллар бир вақтда ёки яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлади.

Натижа. Агар x ўзгарувчининг b га етарлича яқин қийматларида

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

бўлса, у ҳолда:

1) $\varphi(x) \le C < +\infty$ ва $\alpha < 1$ бўлганда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл яқинлашувчи,

2) $\varphi(x) \ge C > 0$ ва $\alpha \ge 1$ бўлганда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл узоқлашувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Интеграл остидаги функция

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$$

бўлиб, $\forall x \in [0,1)$ учун

$$\varphi(x) = \cos^2 x \le 1 \ , \qquad \alpha = \frac{1}{4} < 1$$

бўлади. Юқоридаги натижадан фойдаланиб берилган интегралнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз. ►

6-мисол. Ушбу

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Равшанки, қуйидаги

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

хосмас интеграл яқинлашувчидир.

Энди ушбу

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

лимитни ҳисоблаймиз:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x \to 1-0} x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Унда юқоридаги натижага кўра берилган хосмас интегралнинг яқинлашувчи эканини топамиз. ►

7^0. Хосмас интегралнинг абсолют яқинлашувчилиги. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b)$ да берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин. (Бунда $\forall x\in[a,b)$ да $f(x)\ge 0$ бўлиши шарт эмас)

Равшанки, ушбу

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

интеграл манфий бўлмаган функциянинг хосмас интеграли бўлади.

5-теорема. Агар $\int_a^b |f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади.

6-таъриф. Агар $\int_a^b |f(x)|dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ абсолют яқинлашувчи интеграл дейилади.

Агар $\int_a^b |f(x)|dx$ интеграл узоқлашувчи бўлиб, $\int_a^b f(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^b f(x)dx$ шартли яқинлашувчи интеграл дейилади.

8^0. Хосмас интегралларни ҳисоблаш. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b)$ да узлуксиз бўлиб, унинг бошланғич функцияси $F(x)$ $x\to b-0$ да чекли лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{x\to b-0} F(x) = F(b).$$

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-0}\int_a^t f(x)dx = \lim_{x\to b-0}[F(t)-F(a)] =$$

$$= F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

бўлади.

Бу Ньютон-Лейбниц формуласи дейилади.

Айтайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялари $[a,b)$ да берилган ва шу оралиқда узлуксиз $u'(x)$ ва $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, b нуқта $v(x)\cdot u'(x)$ ҳамда $u(x)\cdot v'(x)$ функцияларнинг махсус нуқталари бўлсин.

Агар:

1) $\int_a^b v(x)du(x)$ интеграл яқинлашувчи ;

2) Ушбу

$$\lim_{x\to b-0} u(t)\cdot v(t)$$

лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int_a^b u(x)dv(x)$ интеграл яқинлашувчи ва

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (3)$$

бўлади, бунда

$$u(b)\cdot v(b) = \lim_{x\to b-0} u(t)\cdot v(t).$$

7-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀ Бу интегралда

$$u(x) = x+1,\ dv(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$$

деб олинса, унда $du(x) = dx,\quad v(x) = 3(x-1)^{\frac{1}{3}}$ ва

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_0^1 = (x+1)\cdot 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1 = 3,$$

$$\int_0^1 v(x)du(x) = \int_0^1 3(x-1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{9}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = -\frac{9}{4}$$

бўлиб, (3) формулага кўра

$$\int_0^1 u(x)\cdot dv(x) = \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3-(-\frac{9}{4}) = \frac{21}{4}$$

бўлади. Демак,

$$\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{21}{4}.\ ▶$$

Қуйидаги

$$\int_a^b f(x)dx$$

хосмас интегралда (b-махсус нуқта) $x=\varphi(z)$ алмаштириш бажарамиз, бунда $\varphi(z)$ функция $[\alpha,\beta)$ ораликда узлуксиз $\varphi'(z)>0$ ҳосилага эга ҳамда

$$\varphi(\alpha) = a\ ,\quad \varphi(\beta) = \lim_{z\to\beta-0}\varphi(z) = b.$$

Агар

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл ҳам яқинлашувчи бўлиб,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

бўлади.

8-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄ Бу интегралда $x = \varphi(z) = z^2$ алмаштириш бажарамиз. Равшанки, бу $x = z^2$ функция (0,1] оралиқда $x' = 2z > 0$ ҳосилага эга ва у узлуксиз бўлиб, $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ бўлади.

Унда

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{2dz}{1+z^2} = 2arctgz\Big|_0^1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

бўлади. ►

9^0. Чегараланмаган функция хосмас интегралининг бош қиймати.

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]\setminus\{c\}$ да берилган бўлиб, c нуқта $(a < c < b)$ шу функциянинг махсус нуқтаси бўлсин.

Маълумки, ушбу

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha'\to 0}}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^b f(x)dx\right]$$

лимит чегараланмаган $f(x)$ функциянинг хосмас интеграли дейилиб, у чекли бўлса

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha'\to 0}}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^b f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи дейилар эди. Бунда α ва α' ўзгарувчилар ихтиёрий равишда нолга интилади деб қаралади.

Хусусан, $\int_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha}^b f(x)dx\right] = \int_a^b f(x)dx$$

бироқ,

$$F(\alpha,\alpha') = \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \int_{c+\alpha'}^b f(x)dx$$

функция, $\alpha=\alpha'$ бўлиб, $\alpha\to 0$ да чекли лимитга эга бўлишдан $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқавермайди.

Масалан,

$$F(\alpha,\alpha')=\int\limits_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c}+\int\limits_{c+\alpha'}^{b}\frac{dx}{x-c}\qquad (a<c<b)$$

учун $\alpha=\alpha'$ бўлса,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c}+\int\limits_{c+\alpha}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\frac{b-c}{c-a}$$

бўлади. Бироқ,

$$F(\alpha,\alpha')=\int\limits_a^{c-\alpha}\frac{dx}{x-c}+\int\limits_{c+\alpha'}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\alpha}{\alpha'}$$

бўлиб, $\alpha\to 0,\ \alpha'\to 0$ да унинг лимити мавжуд эмас, яъни

$$\int\limits_a^b\frac{dx}{x-c}\qquad (a<c<b)$$

хосмас интеграл яқинлашувчи эмас.

7-таъриф. Агар $\alpha=\alpha'$ бўлиб, $\alpha\to 0$ да

$$F(\alpha,\alpha')=\int\limits_a^{c-\alpha}f(x)dx+\int\limits_{c+\alpha'}^{b}f(x)dx$$

функциянинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интеграл бош қиймат маъносида яқинлашувчи дейилиб,

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\alpha}f(x)dx+\int\limits_{c+\alpha}^{b}f(x)dx\right]$$

лимит эса $\int\limits_a^b f(x)dx$ хосмас интегралнинг бош қиймати дейи-лади. Уни

$$V.P.\int\limits_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$V.P.\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to 0}\left[\int\limits_a^{c-\alpha}f(x)dx+\int\limits_{c+\alpha}^{b}f(x)dx\right].$$

Машқлар

1. Ушбу

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

интеграл ҳисоблансин.

2. Ушбу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

интегралнинг яқинлашувчилиги исботлансин, қиймати топилсин.

3. Ушбу интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + arctgx}$$

яқинлашувчиликка текширилсин.

48-маъруза

Хосмас интегралларнинг умумий ҳоли

1^0. Чегараланмаган функциянинг чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграли тушунчаси. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлиб, a нуқта унинг махсус нуқта-си бўлсин.

Айни пайтда, бу функция исталган чекли $[t,\tau]$ $(a<t<\tau<+\infty)$ оралиқда интегралланувчи, яъни

$$\int_t^{\tau} f(x)dx = F(t,\tau)$$

интеграл мавжуд бўлсин.

Маълумки, $t \to a+0$ да $F(t,\tau)$ функиянинг лимити мавжуд бўлса, уни чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли дейилиб,

$$\int_a^{\tau} f(x)dx$$

каби белгиланар эди:

$$\int_a^{\tau} f(x)dx = \lim_{t\to a+0} F(t,\tau) = \lim_{t\to a+0}\int_t^{\tau} f(x)dx. \tag{1}$$

Айтайлик, $f(x)$ функциянинг $(a,\tau]$ оралиқ бўйича хосмас интеграли $\int_a^{\tau} f(x)dx$ мавжуд бўлсин. Равшанки, бу интеграл τ га боғлиқ бўлади.

Агар $\tau \to +\infty$ да $\int_a^{\tau} f(x)dx$ нинг лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $(a,+\infty)$ оралиқ бўйича хосмас интег-рали дейилиб, уни $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ каби белгиланар эди:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\tau\to+\infty}\int_a^{\tau} f(x)dx. \tag{2}$$

(1) ва (2) муносабатлардан топамиз:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\tau\to+\infty}\lim_{t\to a+0}\int_t^{\tau} f(x)dx. \tag{3}$$

Бу (3) муносабат чегараланмаган функциянинг чексиз оралиқ бўйича хосмас интегралини ифодалайди.

2^0. $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ интеграл ва унинг яқинлашувчанлиги. Равшанки, бу интеграл a га боғлиқ. $a<1$ бўлганда, $x=0$ нуқта интеграл остидаги функциянинг махсус нуқтаси бўлади. Демак,

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

интеграл чегараланмаган функциянинг чексиз оралиқ бўйича хосмас интеграли.

Қаралаётган интегрални қуйидагича

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^{1} x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

ёзиб, тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида яқинлашувчиликка текширамиз.

Ушбу

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

интегралда, интеграл остидаги функция учун

$$\frac{1}{e}\frac{1}{x^{1-a}} \le x^{a-1}e^{-x} \le \frac{1}{x^{1-a}} \qquad (0 < x \le 1)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Маълумки,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

интеграл $1-a<1$, яъни $a>0$ бўлганда яқинлашувчи, $1-a \ge 1$, яъни $a \le 0$ бўлганда узоқлашувчи.

Демак,

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx \quad \text{ва} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

интегралларда

$$x^{a-1}e^{-x} \le \frac{1}{x^{1-a}}$$

бўлиб, $a>0$ бўлганда $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$ интеграл яқинлашувчи. Унда таққослаш ҳақидаги теоремага кўра $a>0$ бўлганда

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.
Энди

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

интегрални яқинлашувчиликка текширамиз.

Ушбу

$$\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \quad \text{ва} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

интегралларни қарайлик. Равшанки, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ интеграл яқинла-шувчи. Айни пайтда,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0$$

бўлганлиги сабабли, 44-маърузада келтирилган тасдиққа кўра

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

интеграл a нинг ихтиёрий қийматларида яқинлашувчи бўлади.

Демак, берилган интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

$a>0$ бўлганда якинлашувчи бўлади.

3^0. $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ интеграл ва унинг яқинлашувчилиги.

Бу интегралдаги интеграл остидаги функция учун:

а) $a<1, \quad b\geq 1$ бўлганда $x=0$ махсус нуқта,

б) $a\geq 1, \quad b<1$ бўлганда $x=1$ махсус нуқта,

в) $a<1, \quad b<1$ бўлганда $x=0, \quad x=1$ нуқталар махсус нуқталар бўлади.

Берилган интегрални қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Равшанки,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{x^{a-1}}=1,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(1-x)^{a-1}}=1.$$

Унда 47- маърузада келтирилган тасдиқга кўра

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad \text{билан} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad \text{билан} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{b-1}dx$$

интеграллар бир ва□тда ёки я□инлашади, ёки узо□лашади.

Маълумки, $a>0$ бўлганда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}dx$$

интеграл яқинлашувчи, $b>0$ бўлганда

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{b-1}dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Демак, $a>0$ бўлганда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади, $b>0$ бўлганда

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб берилган

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

хосмас интеграл $a>0$ ва $b>0$ бўлганда яқинлашувчи бўлади.

Машқлар

1. Ушбу интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$$

яқинлашувчиликка текширилсин.

2. Ушбу интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

яқинлашувчиликка текширилсин.

11-БОБ
СОНЛИ ҚАТОРЛАР

49-маъруза
Сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги. Яқинлашувчи қаторнинг хоссалари. Коши теоремаси

1^0. Сонли қатор тушунчаси. Фараз қилайлик,

$$\{a_n\}:\ a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Улар ёрда-мида ушбу

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

ифодани ҳосил қиламиз. (1) ифода сонли қатор, қисқача қатор дейилади ва у $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ каби белгиланади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Бунда $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ сонлар қаторнинг ҳадлари, a_n эса қаторнинг умумий ҳади (ёки n-ҳади) дейилади.

Қуйидаги

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (n = 1,2,3,...)$$

йиғинди (1) қаторнинг n-қисмий йиғиндиси дейилади.

Демак, (1) қатор берилганда ҳар доим бу қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат ушбу $\{S_n\}$:

$$S_1 \;\; ,S_2 \;\; ,S_3 \;,...,S_n \;,...$$

кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

Масалан,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

қаторнинг $n-$қисмий йиғиндиси

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

бўлиб, улардан тузилган $\{S_n\}$ кетма-кетлик

$$\frac{1}{2}\;,\;\;\frac{2}{3}\;,\;\;\frac{3}{4}\;,...,\frac{n}{n+1}\;\;\;,...$$

бўлади.

1-таъриф. Агар $n\to\infty$ да $\{S_n\}$ кетма-кетлик S га $(S\in R)$ яқинлашса, (1) қатор яқинлашувчи дейилади, S унинг йиғин-диси дейилади:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\;,\;\;S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\;\mathbf{.}$$

Агар $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлмаса (лимит мавжуд бўлмаса ёки чексиз бўлса), (1) қатор узоқлашувчи дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

қатор учун $S_n=1-\dfrac{1}{1+n}$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

бўлади. Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғин-диси 1 га тенг:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

2-мисол. Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+...+n+...$$

қатор узоқлашувчи бўлади, чунки

$$S_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \ .$$

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$$

қатор учун

$$S_n = 1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1} = \begin{cases} 0\,, & \text{агар } \ n - \text{жуфт сон} \\ 1\,, & \text{агар } \ n - \text{ток сон} \end{cases}$$

бўлиб у $n\to\infty$ да лимитга эга эмас.
Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \qquad (a\in R \ , \ q\in R)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Одатда, бу геометрик қатор деб юритилади.
Берилган қатор учун

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q} \qquad (q\neq 1)$$

бўлиб, $|q|<1$ бўлганда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{q-1}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда геометрик қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{a}{1-q}$ га тенг .

Агар $q>1$ бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ ,$$

$q=1$ бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

бўлиб, бу ҳолларда берилган қатор узоқлашувчи бўлади.
$q\le -1$ бўлганда эса $\{S_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга эмас. Демак, бу ҳолда ҳам қатор узоқлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, геометрик қатор $|q|<1$ бўлганда яқинла-шувчи, $|q|\ge 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. ▶

2^0. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари. Айтайлик, бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Ушбу

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots \qquad (2)$$

қатор (бунда $m-$тайинланган натурал сон) (1) қаторнинг қолдиғи дейилади.

1-хосса. Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, (2) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча; (2) қаторнинг яқинла-шувчи бўлишидан (1) қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади.

◀ (1) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad ,$$

(2) қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$M_k^{(m)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$$

лар учун

$$S_{m+n} = S_m + M_k^{(m)}, \qquad (3)$$

бўлади.

Айтайлик, (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $k \to \infty$ да S_{m+n} чекли лимитга эга бўлиб, (3) муносабатга кўра $k \to \infty$ да $M_k^{(m)}$ ҳам чекли лимитга эга бўлади. Демак, (2) қатор яқинлашувчи.

Айтайлик, (2) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $k \to \infty$ да $M_k^{(m)}$ чекли лимитга эга бўлади. Яна (3) муносабатга кўра $k \to \infty$ да S_{m+n} ҳам чекли лимитга эга бўлади. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ▶

2-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot S$ га тенг бўлади, бунда $c \neq 0$ бўлган ўзгармас сон.

3-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда S_1 ва S_2 га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S_1 + S_2$ га тенг бўлади.

2) ва 3)- хоссаларнинг исботи сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашувчилиги таърифидан бевосита келиб чиқади.

4-хосса. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, $n \to \infty$ да a_n нолга интилади:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

◀ Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин: Таърифга биноан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = S \ .$$

Равшанки,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \ . \ ▶$$

Эслатма. Қаторнинг умумий ҳади a_n нинг $n \to \infty$ да нолга интилишидан унинг яқинлашувчи бўлиши ҳар доим келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

қаторнинг умумий ҳади $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ бўлиб, у $n \to \infty$ да нолга интилади. Аммо бу қатор узоқлашувчи , чунки

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

кетма-кетлик $n \to \infty$ да $+\infty$ га интилади:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \ .$$

Юқорида келтирилган 4)- хосса қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.

5-хосса. Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг ҳадларини гурухлаб қуйидаги

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots \qquad (4)$$

қаторни ҳосил қиламиз, бунда

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

бўлиб, $\{n_k\}$ кетма-кетлик натурал сонлар кетма-кетлиги $\{n\}$ нинг қисмий кетма-кетлиги.

Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда (4) қатор ҳам яқинлашувчи ва йиғиндиси S бўлади.

◀ (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, йигиндиси S га тенг бўлсин. У ҳолда

$$n \to \infty \quad \text{да} \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \to S$$

бўлади.

Айтайлик, (4) қаторнинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик $\{S_{n_k}\}$ бўлсин $(\kappa = 1,2,3,...)$. Равшанки, бу кетма-кетлик $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги бўлади. Маълум теоремага кўра

$$k \to \infty \text{ да } S_{n_k} \to S$$

бўлади. Демак, (4) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси S га тенг. ►

3^0. Қаторнинг яқинлашувчилиги. Коши теоремаси.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

қатор берилган бўлсин. Маълумки, бу қаторнинг яқинлашув-чилиги ушбу

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (n = 1,2,3,...)$$

кетма-кетликнинг $n \to \infty$ да чекли лимитга эга бўлишидан иборат.

9-маърузада сонлар кетма-кетлигининг чекли лимитга эга бўлиши ҳақида Коши теоремаси, яъни $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг $n \to \infty$ да чекли лимитга эга бўлиши учун

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists n_0 \in N \ , \forall n > n_0 , \ \forall m \in N \text{ да } \ |S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли экани келти-рилган эди.

Бу тушунча ва тасдиқдан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчилигини ифодалайдиган қуйидаги теорема келиб чиқади.

Теорема (Коши теоремаси). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилиб, $\forall n > n_0$ ва $m = 1,2,3,...$ бўлганда

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (5)$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Эслатма. Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор учун (5) шарт бажарилмаса, яъни

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad , \forall k \in N \ , \ \exists n \geq k \ , \ \exists m \in N$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}| \geq \varepsilon_0 \qquad (6)$$

бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n} + ...$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Бу қатор учун Коши теоремасидаги (5) шартнинг бажарилишини текширамиз :

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+...+\frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+...+\frac{1}{2^{n+m}}\le\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n}}$$

Агар $\forall\varepsilon>0$ сонга кўра $n_0=[-\log_2\varepsilon]+1$ деб олинса, у ҳолда $\forall n>n_0$ ва $m=1,2,3,...$ лар учун

$$\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+...+\frac{\sin(n+m)}{2^{n+m}}\right|<\varepsilon$$

бўлади. Демак, берилган қатор яқинлашувчи. ►

6-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... \tag{7}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ ва ихтиёрий $k\in N$ учун $n=k,\quad m=k$ бўлганда

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+m}\right|=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...$$

$$...+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2k}\cdot k=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

бўлади.

(6) шартга кўра (7) қатор узоқлашувчи бўлади. ►

Одатда, (7) қатор гармоник қатор дейилади. Демак, гармоник қатор узоқлашувчи қатор.

Машқлар

1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^{n}}}\qquad(x\ne\pm1)$$

қаторнинг яқинлашувчилиги исботлансин, йиғиндиси топилсин.

2. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\qquad(a_n\ge0,\ n=1,2,3,...)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$$

қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

50-маъруза
Мусбат ҳадли қаторлар

1^0. Мусбат ҳадли қаторлар ва уларнинг яқинлашув-чилиги.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар бу қаторда $a_n \geq 0$ $(\forall n \in N)$ бўлса, (1) мусбат ҳадли қатор дейилади.

Мусбат ҳадли қаторларда, уларнинг қисмий йиғинди-ларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи кетма-кетлик бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n .$$

1-теорема. Мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

◄ **Зарурлиги.** (1) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда $n \to \infty$ да $\{S_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. Яқинлашувчи кетма-кетликнинг хоссасига кўра $\{S_n\}$ чегараланган, жумладан юқоридан чегараланган бўлади.

Етарлилиги. $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлсин. Унда монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра $\{S_n\}$ кетма-кетлик $n \to \infty$ да чекли лимитга эга бўлади. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ►

Эслатма. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

мусбат ҳадли қаторда, унинг қисмий йиғиндиларидан иборат $\{S_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланмаган бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

2⁰.Мусбат ҳадли қаторларда таққослаш теоремалари.

Иккита

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

мусбат ҳадли қаторлар берилган бўлсин.

2-теорема. Фараз қилайлик $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар учун $\forall n \in N$ да

$$a_n \le b_n \qquad (2)$$

тенгсизлик бажарилсин.

У ҳолда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинла-шувчи бўлади,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқла-шувчи бўлади.

◄ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторларнинг қисмий йиғиндилари мос равишда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

бўлсин. У ҳолда (2) муносабатга кўра

$$S_n \le S_n' \qquad (3)$$
бўлади.

Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда 1-теоремага биноан $\{S'_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади. Айни пайтда, (3) муносабатни эътиборга олиб, $\{S_n\}$ кетма-кетликнинг ҳам юқоридан чегараланган бўлишини топамиз. Яна 1-теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин. Унда (3) муно-сабат ва эслатмадан фойдаланиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашув-чи бўлишини топамиз. ►

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2^2} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2^n} + \ldots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Равшанки, бу қатор ҳадлари учун

$$0 < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Натижада берилган қаторнинг ҳар бир ҳади яқинла-шувчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ қаторнинг (геометрик қаторнинг) мос ҳадидан кичик. 2-теоремага мувофиқ берилган қатор яқинлашувчи бўлади. ►

3-теорема. Фараз қилайлик, мусбат ҳадли $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторларнинг умумий ҳадлари учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \qquad (b_n > 0, \quad n = 1,2,\ldots)$$

бўлсин. У ҳолда:

1) $K < +\infty$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

2) $K > 0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

◄ Айтайлик, $K < +\infty$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин.

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K \Rightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in N, \quad \forall n>n_0:$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-K\right|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad (K-\varepsilon)b_n<a_n<(K+\varepsilon)b_n.$$

Бундан эса, $\sum_{n=1}^{\infty}(K+\varepsilon)b_n$ қатор яқинлашувчи бўлгани учун 2-теоремага кўра $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқишини топмаиз.

Айтайлик, $K>0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатор узоқлашувчи бўлсин.

Равшанки, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$ ва $0<K_1<K$ бўлишидан $\forall n>n_0\in N$ учун $\frac{a_n}{b_n}>K_1$ яъни $b_n<\frac{1}{K_1}a_n$ бўлиши келиб чиқади. 2-теоремадан фойдаланиб $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўли-шини топамиз. ►

Натижа. Мусбат ҳадли $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қаторлар учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K \quad , \qquad (0<K<+\infty)$$

бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қаторлар бир вақтда ёки яқинлашувчи бўлади ёки узоқлашувчи бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Берилган қатор билан бирга узоқлашувчилиги маълум бўлган $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоник қаторни қараймиз. Бу қаторларниг умумий ҳадлари учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$$

бўлади. Демак, берилган қатор узоқлашувчи. ►

4-теорема. Айтайлик, мусбат ҳадли $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатор-лар учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

бўлсин $(a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad n = 1,2,3,...)$

У ҳолда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

◄ Фараз қилайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар $(a_n > 0, b_n > 0, \quad n = 1,2,3,...)$ учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (n = 1,2,3,....)$$

тенгсизликлар бажарилсин. Бу шартдан қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot ... \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} .$$

Кейинги тенгсизликдан топамиз:

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n . \qquad (n = 1,2,3,...)$$

Айтайлик, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатор яқинлашувчи бўлсин. Равшанки, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. 2-теоремадан фойдала-ниб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз. Худди шунга ўхшаш $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлиши келиб чиқиши кўрса-тилади. ►

Юқорида келтирилган теорема ва мисоллардан кўрина-дики, мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқла-шувчилигини билган ҳолда, ҳадлари бу қатор ҳадлари билан маълум муносабатда бўлган (таққосланган) иккинчи мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилигини аниқлаш мумкин бўлар экан.

Изоҳ. Юқорида келтирилган теоремалар n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб бажарилганда ҳам ўринли бўлади.

Машқлар

1. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^3 n}{n^2}$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

2. Ушбу

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln)^{\ln\ln n}}$$

қаторнинг яқинлашувчи экани исботлансин.

3. Гармоник қатор $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ нинг қисмий йиқиндиси S_n учун ушбу

$$0 < S_n - \ln(n+1) < 1 \quad (n \geq 2)$$

тенгсизлар ўринли экани кўрсатилсин.

51-маъруза
Мусбат ҳадли қаторларда яқинлашиш аломатлари

Мусбат ҳадли қаторлар мавзусида баён этилган таққос-лаш теоремаларидан фойдаланиб, яқинлашиш аломатларини келтирамиз.

1^0. Коши аломати. Агар мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

қаторда барча $n \geq 1$ учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \tag{2}$$

бўлса, (1) қатор яқинлашувчи бўлади;

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \tag{3}$$

бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

◀ Айтайлик, (1) қатор ҳадлари учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

бўлсин. Равшанки, бу тенгсизликдан

$$a_n \leq q^n$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган қаторнинг ҳар бир ҳади яқинлашувчи геометрик қаторнинг мос ҳадидан катта эмас. Унда 50-маърузадаги 2-теоремага кўра (1) қатор яқинлашувчи бўлади.

Айтайлик, (1) қатор ҳадлари учун

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \text{ яъни } a_n \geq 1$$

бўлсин. Бу муносабат берилган қаторнинг ҳар бир ҳадини узоқлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

қаторнинг мос ҳадидан кичик эмаслигини кўрсатади. Бу ҳолда яна ўша 2-теоремага кўра (1) қатор узоқлашувчи бўлади. ▶

Кўпинча Коши аломатининг қуйида келтирилган лимит кўринишидаги тасдиғидан фойдаланилади.

Фараз қилайлик, мусбат ҳадли (1) қаторда

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

мавжуд бўлсин. У ҳолда :

1) $k < 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи бўлади,
2) $k > 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀ Бу қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$$

бўлиб, унинг учун

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n}=\frac{1}{e}.$$

Демак, $k=\frac{1}{e}<1$, берилган қатор яқинлашувчи. ►

1-эслатма. Коши аломатидаги (2) ва (3) тенгсизликлар n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб бажарилганда ҳам тасдиқ ўринли бўлади.

2-эслатма. Коши аломатининг лимит кўринишидаги ифодасида $k=1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

2^0. Даламбер аломати. Агар мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... \qquad (1)$$

қаторда барча $n\geq 1$ учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1 \qquad (a_n>0\,,\ n=1,2...) \qquad (4)$$

бўлса, (1) қатор яқинлашувчи бўлади;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1 \qquad (a_n>0\,,\ n=1,2...) \qquad (5)$$

бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

◄ Айтайлик, (1) қатор ҳадлари учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$$

бўлсин. Бу тенгсизликни қуйидагича

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{q^{n+1}}{q^n} \qquad (q<1)$$

ёзиш мумкин.

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n \qquad (0<q<1)$$

қатор (геометрик қатор) яқинлашувчи. 50-маърузада келти-рилган 3-теоремадан фойдаланиб, берилган қаторнинг яқин-лашувчи бўлишини топамиз.

(1) қатор ҳадлари учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

бўлганда (1) қаторнинг узоқлашувчи бўлишини аниқлаш қийин эмас. ►

Даламбер аломатининг қуйидаги лимит кўринишидаги тасдиқидан фойдаланилади.

Фараз қилайлик, мусбат ҳадли (1) қаторда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда :

1) $d < 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи бўлади,
2) $d > 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Берилган қатор учун

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \quad , \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

Демак, $d = \frac{1}{e} < 1$, берилган қатор яқинлашувчи. ►

3-эслатма. Даламбер аломатидаги (4) ва (5) тенгсизлик-лар n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб бажарилганда ҳам тасдиқ ўринли бўлади.

4-эслатма. Даламбер аломатининг лимит кўринишидаги ифодасида $d = 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин.

3^0. Интеграл аломат. Фараз қилайлик, мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

қатор берилган бўлсин. Айни пайтда, $[1,+\infty)$ оралиқда берил-ган $f(x)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(x)$ функция $[1,+\infty)$ да узлуксиз,
2) $f(x)$ функция $[1,+\infty)$ да камаювчи,
3) $\forall x \in [1,+\infty)$ да $f(x) \geq 0$,

4) $f(n) = a_n \qquad (n = 1,2,3,...)$.

Бунда берилган қатор ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

кўринишга келади.

Юқоридаги шартлардан фойдаланиб, $n < x < n+1$ $(n \in N)$ бўлганда

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1), \text{ яъни } a_n \geq f(x) \geq a_{n+1}$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгсизликни $[n, n+1]$ оралиқ бўйича интеграллаш натижасида

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n \qquad (6)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди берилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

қатор билан бирга ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx \qquad (7)$$

қаторни қараймиз. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx$$

бўлади.

Айтайлик, $F(x)$ функция $[1,+\infty]$ оралиқда $f(x)$ функция-нинг бошланғич функцияси бўлсин: $F'(x) = f(x)$.

Уни қуйидагича

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \quad , \qquad F(1) = 0$$

ифодалаш мумкин. Натижада

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = F(n+1)$$

бўлади.

Агар $n \to \infty$ да $F(n+1)$ чекли сонга интилса, (бу ҳолда (7) қаторнинг қисмий йиғиндиси чекли лимитга эга бўлади) унда (7) қатор яқинлашувчи.

Бинобарин, $\int_1^n f(x)dx \quad (n = 1,2,3,...)$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлади. (6) муносабатга кўра берилган қатор-нинг қисмий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлиб, мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашув-чилиги ҳақидаги теоремага мувофиқ берилган $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Агар $n \to \infty$ да $F(n+1) \to \infty$ бўлса, берилган қатор узоқла-шувчи бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги интеграл аломатга келамиз.

Интеграл аломат. Агар

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = b$$

бўлиб, b чекли сон бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлади, $b = \infty$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \qquad (\alpha > 0)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Агар $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ дейилса, унда бу функция $[1, +\infty)$ оралиқда интеграл аломатда келтирилган барча шартларни қаноатлантиради. Бу функциянинг бошланғич функцияси

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{dt}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \qquad (\alpha \neq 1)$$

бўлади.

Равшанки,

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & , \text{ агар } \alpha > 1 \text{ бўлса,} \\ \infty & , \text{ агар } \alpha < 1 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бўлиб, $\alpha = 1$ бўлганда

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \infty$$

бўлади.

Демак, интеграл аломатга кўра

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

қатор $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha \leq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади. ►

Одатда, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатор умумлашган гармоник қатор дейи-лади.

4^0. Раабе аломати. Агар мусбат ҳадли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geq 1)$ қийматидан бошлаб, $n > n_0$ учун

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \geq r > 1$$

бўлса, (1) қатор яқинлашувчи бўлади,

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \leq 1$$

бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

◀Айтайлик, (1) қатор ҳадлари учун

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \geq r > 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликдан

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \qquad (8)$$

бўлиши келиб чиқади.

Энди $r > \alpha > 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи α сонини олиб, уни

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}}$$

каби ифодалаймиз. Лимит хоссасига кўра, шундай $n_0' \in N$ топиладики, барча $n > n_0'$ лар учун

$$\frac{(1 - \frac{1}{n})^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} \leq r,$$

яъни

$$(1 - \frac{1}{n})^{\alpha} \geq 1 - \frac{r}{n} \qquad (9)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(8) ва (9) муносабатлардан барча $n > \overline{n}_0 \quad (\overline{n}_0 = \max\{n_0, n_0'\})$ лар учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq (1 - \frac{1}{n})^{\alpha} = \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

бўлиши келиб чиқади.

Бу тенгсизликни ва $\alpha > 1$ бўлганда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ қаторнинг яқинлашувчилигини эътиборга олиб, сўнг 50-маърузадаги 4-теоремадан фойдаланиб, берилган $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг яқинла-шувчи бўлишини топамиз.

Энди (1) қаторнинг ҳадлари учун $n > n_0$ бўлганда

$$n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) \le 1$$

бўлсин. Бу тенгсизликни қуйидагича:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

ёзиш мумкин.

Бу тенгсизликни ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатронинг узоқлашувчилиги эътиборга олиб, яна 50-маърузадаги 4-теоремадан фойдала-ниб, берилган $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишини топамиз. ►

Кўп ҳолларда Раабе аломатининг қуйидаги лимит кўри-нишидан фойдаланилади:

Фараз қилайлик, мусбат ҳадли (1) қатор ҳадлари учун

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \rho$$

мавжуд бўлсин. У ҳолда:

1) $\rho > 1$ бўлганида (1) қатор яқинлашувчи бўлади,
2) $\rho < 1$ бўлганида (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1})} \qquad (a>0)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄ Бу қатор учун

$$n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \left(1-\frac{a^{-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})}}{a^{-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1})}}\right) = n\left(1-a^{-\frac{1}{n}}\right)$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-\frac{1}{n}}-1}{-\frac{1}{n}} = \ln a$$

бўлади.

Агар $\ln a > 1$, яъни $a > e$ бўлса, берилган қатор яқинла-шувчи бўлади.

Агар $\ln a < 1$, яъни $a < e$ бўлса, берилган қатор узоқла-шувчи бўлади

Агар $a = e$ бўлса, Раабе аломати берилган қаторнинг яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги ҳақида хулоса қилолмайди.►

Машқлар

1. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a_n}\right)^n \qquad (x > 0)$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин, бунда $\{a_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади мусбат бўлиб, $\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (a \in R)$.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

52-маъруза
Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар

1⁰. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар тушунчаси.

Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг ҳар бир ҳади ихтиёрий ишорали ҳақиқий сонлардан иборат. (Одатда, бундай қатор ихтиёрий ҳадли қатор дейилади.)

(1) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_n| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (2)$$

қаторни тузамиз.

1-теоема. Агар (2) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

◄ Айтайлик, (2) қатор яқинлашувчи бўлсин. Унда қатор яқинлашувчилиги ҳақидаги Коши теоремасига кўра

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0 \quad m = 1,2,3... \text{ да}$$

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \varepsilon$$

бўлади. Равшанки,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots. + |a_{n+m}|.$$

Кейинги икки муносабатдан

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, \quad m = 1,2,3,... \text{ да}$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. Коши теоремасига мувофиқ (1) қатор яқинлашувчи бўлади. ►

1-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи қатор дейилади.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(-1)^{n-1}=1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}+\ldots$$

қатор $\alpha>1$ бўлганда абсолют яқинлашувчи қатор бўлади, чунки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{\alpha}}(-1)^{n-1}\right|=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots$$

умумлашган гармоник қатор $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи.

2-таъриф. Агар $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

Мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

қатор шартли яқинлашувчи қатор бўлади.

◄ Равшанки, берилган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{3}$$

бўлади.

Маълумки, $\ln(1+x)$ функциянинг Маклорен формуласига кўра ёйилмаси

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+R_{n+1}(x),$$

бўлиб, $0\le x\le 1$ бўлганда

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{1}{n+1}$$

бўлар эди. (қаралсин [1], 6-боб, 7-§)

Хусусан, $x=1$ бўлганда

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+R_{n+1}(1)$$

$$|R_{n+1}(1)|<\frac{1}{n+1} \tag{4}$$

бўлади.

(3) ва (4) муносабатлардан

$$\ln 2=S_n+R_{n+1}(1)$$

ва ундан

$$|S_n-\ln 2|<\frac{1}{n+1}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $n \to \infty$ да $\mathrm{S_n} \to \ln 2$. Бу эса қаралаётган қаторнинг яқинлашувчи эканини билдиради.

Айни пайтда, берилган қатор ҳадларининг абсолют қиймат-ларидан тузилган қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

гармоник қатор бўлиб, унинг узоқлашувчилиги маълум. Демак, берилган қатор шартли яқинлашувчи қатор.►

Энди

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

қаторнинг мусбат ҳадли қатор эканини эътиборга олиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини ифодаловчи аломат-ларни келтирамиз. Уларнинг исботи 51-маърузада баён этилган аломатлардан келиб чиқади.

Даламбер аломати. Фараз қилайлик ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (a_n \neq 0, \quad n = 1,2,\ldots)$$

қатор ҳадлари учун

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = d$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда:

1) $d < 1$ бўлганда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи бўлади,

2) $d > 1$ бўлганда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

Коши аломати. Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

қатор ҳадлари учун

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = K$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда:

1) $K < 1$ бўлганда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

2) $K > 1$ бўлганда, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлади.

2^0. Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари.

Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларини келтирамиз.

1) Агар қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор яқинлашувчи бўлади.

◀ Бу хоссанинг исботи 1-теоремадан келиб чиқади.▶

2) Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб, $\{b_n\}$ сонлар кетма-кетлиги чегараланган бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots \qquad (5)$$

қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

◀ Шартга кўра $\{b_n\}$ сонлар кетма-кетлиги чегараланган.Демак,

$$\exists\, M > 0, \ \forall n \in N \text{ да } |b_n| \le M \qquad (6)$$

бўлади.

(1) қатор абсолют яқинлашувчи. Унда Коши теоремасига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\frac{\varepsilon}{M}$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ ва $m = 1,2,3,\ldots$ бўлганда

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (7)$$

бўлади.

(6) ва (7) муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$|a_{n+1}b_{n+1}| + |a_{n+2}b_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}b_{n+m}| \le$$
$$\le M\left(|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|\right) < \varepsilon.$$

Яна Коши теоремасидан фойдаланиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ қаторнинг абсолют яқинлашувчи эканини топамиз. ▶

3) Фараз қилайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор ҳадларининг ўринларини алмаштириш натижасида ушбу

$$\sum_{j=1}^{\infty} a'_j = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_j + \ldots \qquad (8)$$

қатор ҳосил қилинган бўлсин.

Равшанки, (8) қаторнинг ҳар бир a'_j ҳади $(j = 1,2,\ldots)$ (1) қаторнинг тайин бир a_{k_j} ҳадининг айнан ўзидир, яъни $\forall j \in N,\ \exists k_j \in N, a_{k_j} = a'_j$ бўлади.

Агар (1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб,унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда бу қатор ҳадларининг ўринларини ихтиёрий равишда алмаштиришдан ҳосил бўлган (8) қатор абсолют яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси ҳам S га тенг бўлади.

◄ Айтайлик, (1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин.

(8) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $\sum_{j=1}^{\infty}|a'_j|$ қаторнинг қисмий йиғиндисини σ'_n билан белгилайлик:

$$\sigma'_n = \sum_{j=1}^{n}|a'_j|. \qquad (a'_j = a_{k_j})$$

Агар $n' = \max_{1\le j\le n} k_j$ дейилса, унда $n' \ge n$ ва $\forall n \in N$ бўлганда

$$\sigma'_n \le \sum_{k=1}^{n'}|a_k|$$

бўлади.

(1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлгани сабабли унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги юқоридан чегаралан-гандир. Бинобарин, σ'_n йиғинди ҳам юқоридан чегараланган бўлади. Унда мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашувчилиги ҳақидаги теоремага кўра $\sum_{j=1}^{\infty}|a'_j|$ қатор ва айни пайтда $\sum_{j=1}^{\infty}a'_j$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади. Демак, $\sum_{j=1}^{\infty}a'_j$ қатор абсолют яқинлашувчи. Унинг йиғиндисини S' дейлик.

Энди берилган $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор ҳадларининг ўринларини ихтиёрий равишда алмаштиришдан ҳосил бўлган

$$\sum_{n=1}^{\infty}a'_k = a'_1 + a'_2 + ... + a'_k + ...$$

қатор йиғиндисини S га тенг эканини исботлаймиз. Бунинг учун $\forall\varepsilon > 0$ га кўра шундай $\overline{n} \in N$ топилиб, $\forall n > \overline{n}$ да

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a'_k - S\right| < \varepsilon \tag{9}$$

бўлишини кўрсатиш етарли бўлади.

Ихтиёрий мусбат ε сонни тайинлаб оламиз. Модомики, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ қатор абсолют яқинлашувчи экан, унда Коши теорема-сига биноан олинган $\varepsilon > 0$ сонга кўра шундай n_0 номер топиладики,

$$\sum_{k-n_0+1}^{n_0+m}|a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m = 1,2,3,...) \tag{10}$$

шунингдек, қаторнинг яқинлашиш таърифига кўра

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0}a_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

бўлади.

Юқоридаги натурал сон $\bar{n}$ ни шундай катта қилиб оламизки, $\sum_{л=1}^{\infty} a'_k$ қаторнинг $\bar{n}$ дан катта бўлган n номерли ихтиёрий қисмий йиғиндиси

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k \text{ да } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

қаторнинг барча дастлабки n_0 та ҳади қатнашсин.

Равшанки,

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k - S = \left(\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n_0} a_k - S \right).$$

Кейинги муносабатдан ва (11) тенгсизликни эътиборга олиб топамиз.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a'_k - S \right| \le \left| \sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_0} a_k - S \right| < \left| \sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (12)$$

Маълумки, $n > \bar{n}$ бўлганда $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ қаторда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қаторнинг барча дастлабки n_0 та ҳади қатнашади. Бинобарин,

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{n_0} a_k$$

айирма $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қаторнинг, ҳар бир ҳадининг номери n_0 дан катта бўлган $n - n_0$ та ҳадининг йиғиндисидан иборат.

Энди натурал m сонни шундай катта қилиб оламизки, бунда $n_0 + m$ сон юқорида айтилган барча $n - n_0$ та ҳадларнинг номерларидан катта бўлсин.

Унда

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a'_k - \sum_{k=1}^{n_0} a_k \right| \le \sum_{k=n_0+1}^{n_0+m} |a_k| \qquad (13)$$

бўлади.

(12), (13) ва (10) муносабатлардан фойдаланиб, (9) тенгсизликнинг, яъни

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a'_k - S \right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилишини топамиз. ►

Машқлар

Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

ихтиёрий ҳадли қатор бўлиб,

$$u_n = \begin{cases} a_n, a_n \geq 0, \\ 0, \ \ a_n < 0 \end{cases} \qquad v_n = \begin{cases} -a_n, a_n < 0, \\ 0, \quad a_n \geq 0 \end{cases}$$

бўлсин.

1. Агар (*) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қаторлар яқинлашувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

бўлиши исботлансин.

2. Агар (*) қатор шартли яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қаторларнинг узоқлашувчи бўлиши исботлансин.

53-маъруза
Ихтиёрий ҳадли қаторларда яқинлашиш аломатлари

1⁰. Лейбниц аломати. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots \qquad (1)$$

қаторни қараймиз, бунда $c_n > 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Одатда, бундай қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор дейилади.

Равшанки, (1) қатор ихтиёрий ҳадли қаторнинг битта ҳолидир.

Масалан, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келади-ган қатор бўлади.

1-теорема (Лейбниц аломати). Агар ҳадларининг ишора-лари навбат билан ўзгариб келадиган (1) қаторда:

1) $c_{n+1} < c_n$, $\qquad (n = 1,2,3,...)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи бўлади.

◄ (1) қаторнинг дастлабки $2m$ та $(m \in N)$ ҳадидан иборат қисмий йиғиндиси

$$S_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + c_{2m-1} - c_{2m}$$

ни олайлик. Унда $S_{2(m+1)}$ учун

$$S_{2(m+1)} = S_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2})$$

бўлиб, $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ бўлганлиги сабабли (бунда $c_{2m+1} - c_{2m+2} > 0$ бўлади)

$$S_{2(m+1)} > S_{2m} \qquad (m = 1,2,3,...)$$

бўлади. Демак, $\{S_{2m}\}$ кетма-кетлик ўсувчи.

Энди S_{2m} йиғиндини қуйидагича ёзамиз:

$$S_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - ... - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифодада қатнашган қавс ичидаги айирмалар-нинг, шунингдек c_{2m} нинг мусбат бўлишини эътиборга олиб,

$$S_{2m} < c_1$$

бўлишини топамиз. Демак, $\{S_{2m}\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган.

Монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага кўра

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S \qquad (S - \text{чекли сон}) \tag{2}$$

мавжуд.

Энди (1) қаторнинг дастлабки $2m-1$ та $(m \in N)$ сондаги ҳадидан иборат ушбу

$$S_{2m-1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ... + c_{2m-1}$$

қисмий йиғиндисини олайлик. Равшанки,

$$S_{2m-1} = S_{2m} + c_{2m}.$$

Теореманинг $n \to \infty$ да $c_n \to 0$ бўлиши шарти ҳамда (2) муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + c_{2m}) = S.$$

Шундай қилиб, берилган (1) қаторнинг қисмий йиғинди-ларидан иборат кетма-кетлик чекли лимитга эга экани кўрсатилди. Демак, (1) қатор яқинлашувчи. ►

Масалан,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + ... \tag{3}$$

қатор ҳадлари келтирилган теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Теоремага кўра (3) қатор яқинлашувчи бўлади ((3) қаторнинг яқинлашуви ва йиғиндиси $\ln 2$ га тенг бўлиши кўрсатилган эди).

2^0. Дирихле-Абель аломати. Фараз қилайлик,

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\dots a_n\ ,\dots,$$

$$b_1\ ,b_2\ ,\ b_3\ ,\dots ,b_n\ ,\dots$$

ихтиёрий ҳақиқий сонлар кетма-кетликлари бўлиб,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

бўлсин. У ҳолда $\forall n \in N$, $\forall m \in N$ учун

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k (b_k - b_{k-1}) + S_{n+m} \cdot b_{n+m} - S_{n-1} b_n \qquad (4)$$

муносабат ўринли бўлади.

Одатда, (4) муносабат Абель айнияти дейилади.

◄ Равшанки, $a_k = S_k - S_{k-1}$ бўлади. Унда

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k$$

йиғинди ушбу кўринишга

$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m} S_k b_k - \sum_{k=n}^{n+m} S_{k-1} b_k \qquad (5)$$

келади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилув-чини қуйидагича:

$$\sum_{k=n}^{n+m} S_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k b_k + S_{n+m} b_{n+m}\ ,$$

иккинчи қўшилувчини эса қуйидагича

$$\sum_{k=n}^{n+m} S_{k-1} b_k = \sum_{k=n-1}^{n+m-1} S_k b_{k+1} = S_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k b_{k+1}$$

ёзиб оламиз.

Натижада (5) тенглик қуйидагича:

$$\sum_{k=n}^{n+m} S_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k b_k + S_{n+m} b_{n+m} - \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k b_{k+1} - S_{n-1} b_n =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{n+m} b_{n+m} - S_{n-1} b_n$$

бўлади. ►

2-теорема (Дирихе-Абель аломати). Айтайлик,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k + \dots \qquad (6)$$

қатор берилган бўлсин. Агар:

1) $\{b_k\}$ кетма-кетлик камаювчи ва у чексиз кичик миқдор,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қаторнинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги чегараланган бўлса, (6) қатор яқинлашувчи бўлади.

◄ Агар $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ қаторнинг қисмий йиғиндисини

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
десак, унда теореманинг шартига кўра, шундай $M > 0$ сон топиладики, барча $n \in N$ учун
$$|S_n| \le M \tag{7}$$
бўлади.

Шартга кўра $\{b_k\}$ кетма-кетлик камаювчи ва у чексиз кичик миқдор. Унда $\forall \varepsilon > 0$ га кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ да
$$0 \le b_n < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{8}$$
бўлади.

Энди
$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k$$
йиғиндига Абель айниятини қўллаймиз:
$$\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_{n+m} b_{n+m} - S_{n-1} b_n .$$

Натижада
$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k\right| \le \sum_{k=n}^{n+m-1} |S_k (b_k - b_{k+1})| + |S_{n+m} b_{n+m}| + |S_{n-1} b_n| =$$
$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} |S_k| \cdot (b_k - b_{k+1}) + |S_{n+m}| b_{n+m} + |S_{n-1}| \cdot b_n$$
бўлади.

(7) тенгсизликдан фойдаланиб топамиз:
$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k\right| \le M \left[\sum_{k=n}^{n+m-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+m}\right] + M \cdot b_n \quad .$$

Агар
$$\sum_{k=n}^{n+m-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+m} = (b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + ... + (b_{n+m-1} - b_{n+m}) + b_{n+m} = b_n$$
бўлишини эътиборга олсак, унда
$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k\right| \le 2M \cdot b_n$$
бўлиб, (8) муносабатга кўра
$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k\right| < \varepsilon$$
бўлади. Бундан Коши теоремасига кўра $\sum_{k=n}^{n+m} a_k b_k$ қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. ►

Мисол. Ушбу

$$\sum_{л=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+...+\frac{\cos kx}{k}+...$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин, бунда $x-$тайинланган ҳақиқий сон.

◀ Агар $x=2\pi$ бўлса, берилган қатор

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\cdot k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

гармоник қатор бўлиб, у узоқлашувчи бўлади.

Айтайлик, $x\neq 2\pi$ бўлсин. Берилган қаторда

$$a_k=\cos kx \quad , b_k=\frac{1}{k}$$

белгилашларни бажарамиз.

Равшанки, $\{b_k\}=\left\{\frac{1}{k}\right\}$ кетма-кетлик камаювчи ва чексиз кичик микдор бўлади $(k\to\infty$ да $\frac{1}{k}\to 0)$.

Энди $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx$ қаторнинг қисмий йиғиндиси S_n ни топамиз:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x\right]=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Кейинги муносабатдан, 2π га каррали бўлмаган x лар учун

$$|S_n|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\{S_n\}$ кетма-кетлик чегараланган. Унда берилган қатор 2-теоремага кўра яқинлашувчи бўлади.▶

Машқлар

1. Ушбу

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\right)=0$$

муносабатда $2n$ хатолик топилсин.

2. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{5}}{\sqrt{n}\ln(n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\pi}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

54-маъруза
Чексиз кўпайтмалар

1^0. Чексиз кўпайтма тушунчаси. Фараз қилайлик, бирор

$$\{c_n\}: c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Улар ёрдамида ушбу

$$c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot ...\cdot c_n ... \qquad (1)$$

ифодани тузамиз.

(1) ифода чексиз кўпайтма дейилади ва у $\prod_{n=1}^{\infty}c_n$ каби белгиланади:

$$\prod_{n=1}^{\infty}c_n = c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot ...\cdot c_n ...$$

Бунда $c_1, c_2, ..., c_n ...$ сонлар чексиз кўпайтманинг ҳадлари, c_n эса кўпайтманинг умумий ёки n-ҳади дейилади.

Қуйидаги

$$P_n = c_1\cdot c_2 ... c_n \qquad (n=1,2,3,...)$$

кўпайтма, (1) чексиз кўпайтманинг n-қисмий кўпайтмаси дейилади.

Демак, (1) чексиз кўпайтма берилганда ҳар доим унинг қисмий кўпайтмаларидан иборат ушбу $\{P_n\}$:

$$P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$$

кетма-кетликни ҳосил қилиш мумкин.

Масалан,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)... \qquad (n=2,3,...)$$

чексиз кўпайтманинг n-қисмий кўпайтмаси

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}...\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \qquad (n=2,3,4,...)$$

бўлиб, улардан тузилган $\{P_n\}$ кетма-кетлик

$$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, ..., \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}, ...$$

бўлади.

1-таъриф. Агар $n \to \infty$ да $\{P_n\}$ кетма-кетлик нолдан фарқли чекли P сонга интилса (яқинлашса), (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи дейилади, P эса унинг қиймати дейилади:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad P = \prod_{n=1}^{\infty} P_n .$$

Агар $\{P_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлмаса (ёки унинг лимити 0 бўлса), (1) чексиз кўпайтма узоқлашувчи дейилади.

Масалан, юқорида келтирилган

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$$

чексиз кўпайтма учун

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}$$

бўлади. Демак, $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ чексиз кўпайтма яқинлашувчи ва унинг қиймати $\frac{1}{2}$ га тенг.

2^0. Яқинлашувчи чексиз кўпайтманинг хоссалари. Айтайлик, бирор

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = c_1\cdot c_2\cdot c_3\cdot\ldots\cdot c_n\cdot\ldots \qquad (1)$$

чексиз кўпайтма берилган бўлсин.

Ушбу

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} c_n = c_{m+1}\cdot c_{m+2}\cdot\ldots \qquad (2)$$

чексиз кўпайтма (бунда m-тайинланган натурал сон) (1) чек-сиз кўпайтманинг қолдиғи дейилади.

1) Агар (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлса, (2) чексиз кўпайтма ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

◄ (1) чексиз кўпайтманинг қисмий кўпайтмаси

$$P_n = c_1\cdot c_2 \ldots c_n ,$$

(2) чексиз кўпайтманинг қисмий кўпайтмаси

$$Q_k^{(m)} = c_{m+1}\cdot c_{m+2}\cdot\ldots\cdot c_{m+k}$$

лар учун

$$P_n = P_m\cdot Q_k^{(m)} ,$$

(бунда, $n = m+k$) бўлади. Бу муносабатдан, $n\to\infty$ да P_n нинг чекли лимитга эга бўлишидан $k\to\infty$ да $Q_k^{(m)}$ нинг ҳам чекли лимитга эга бўлиши, шунингдек, $k\to\infty$ да $Q_k^{(m)}$ нинг чекли лимитга эга бўлишидан, $n\to\infty$ да P_n нинг ҳам чекли лимитга эга бўлиши келиб чиқади. ►

2) Агар (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{m\to\infty}(c_{m+1}\cdot c_{m+2}\cdot\ldots\cdot c_{m+k}\ldots) = 1$$

бўлади.

◀ Айтайлик, (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлиб, унинг қиймати P бўлсин. Унда

$$P_m \cdot c_{m+1} \cdot c_{m+2} \cdot \ldots \cdot c_{m+k} \ldots = P$$

бўлиб, ундан $m \to \infty$ да

$$c_{m+1} \cdot c_{m+2} \cdot \ldots \cdot c_{m+k} \ldots = \frac{P}{P_m} \to \frac{P}{P} = 1$$

бўлиши келиб чиқади. ▶

3) Агар (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

бўлади.

◀ Айтайлик, (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлиб, унинг қиймати P бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n) = P.$$

Унда $P_n = P_{n-1} \cdot c_n$, яъни $c_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

бўлади. ▶

Юқорида келтирилган хоссалардан қуйидаги хулоса-ларни чиқариш мумкин:

Чексиз кўпайтмаларнинг яқинлашишида, уларнинг даст-лабки чекли сондаги ҳадларининг таъсири бўлмайди.

Агар чексиз кўпайтма яқинлашувчи бўлса, унда $n \to \infty$ да $c_n \to 1$ бўлганлиги сабабли, унинг бирор ҳадидан бошлаб кейинги ҳадларини мусбат деб олиш мумкин бўлади.

Бу хоссалар яқинлашувчи чексиз кўпайтмаларда улар-нинг ҳадларини мусбат деб олиш имконини беради.

3^0. Чексиз кўпайтмалар билан қаторлар орасидаги боғланиш. Фараз қилайлик,

$$\prod_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n \ldots \qquad (c_n > 0,\ n = 1,2,\ldots)$$

чексиз кўпайтма берилган бўлсин. Бу чексиз кўпайтма ҳадларининг логарифмларидан ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln c_n = \ln c_1 + \ln c_2 + \ldots + \ln c_n + \ldots \tag{3}$$

қаторни ҳосил қиламиз.

1-теорема. (1) чексиз кўпайтманинг яқинлашувчи бўлиши учун (3) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

◀ **Зарурлиги.** Айтайлик, (1) чексиз кўпайтма яқинла-шувчи бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n) = P. \qquad (P - \text{чекли сон})$$

Унда (3) қаторнинг қисмий йиғиндиси учун

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln c_k = \ln c_1 + \ln c_2 + \ldots + \ln c_n = \ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n)$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n) = \ln P$$

бўлади. Демак, (3) қатор яқинлашувчи.

Етарлилиги. Айтайлик, (3) қатор яқинлашувчи бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln c_k = \lim_{n\to\infty} \ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n) = S .$$

Унда (1) чексиз кўпайтманинг қисмий кўпайтмаси учун

$$P_n = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n = e^{\ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots c_n)}$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots c_n)} = e^s$$

бўлади. Демак, (1) чексиз кўпайтма яқинлашувчи. ►

Кўпинча, $\prod_{n=1}^{\infty} c_n$ чексиз кўпайтмани ўрганишда, унинг умумий ҳади c_n ни қуйидагича

$$c_n = 1 + a_n$$

ифодалаш қулай бўлади. У ҳолда (1) чексиз кўпайтма

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) ,$$

чексиз қатор эса

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

кўринишларга эга бўлади.

Фараз қилайлик, n нинг $(n \in N)$ етарлича катта қиймат-ларида

$$a_n > 0 \quad (\text{ёки } a_n < 0)$$

бўлсин.

2-теорема. Ушбу

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

чексиз кўпайтманинг яқинлашувчи бўлиши учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарли.

◄ Равшанки, $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ чексиз кўпайтма ва $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторни яқинлашувчи бўлиши учун аввало

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

бўлиши керак. Шу муносабат бажарилсин.

Келтирилган теореманинг исботи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

муносабат ҳамда 1-теореманинг қўлланишидан келиб чиқади. ►

Масалан, бу теоремадан фойдаланиб, ушбу

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^{\alpha}}) = (1+1)\cdot(1+\frac{1}{2^{\alpha}})\cdot(1+\frac{1}{3^{\alpha}})...(1+\frac{1}{n^{\alpha}})...$$

чексиз кўпайтманинг $\alpha > 1$ бўлганда яқинлашувчи бўлишини (чунки, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$ яқинлашувчи),

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}) = (1+1)\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{n})...$$

чексиз кўпайтманинг эса узоқлашувчи бўлишини (чунки, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ узоқлашувчи) топамиз.

Машқлар

1. Ушбу

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2n}\right) \qquad \left(|x|<1\right)$$

чексиз кўпайтманинг яқинлашувчилиги кўрсатилсин ва қиймати топилсин.

2. Қуйидаги

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = e^{c}$$

тенглик исботлансин, бунда

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

(Эйлер ўзгармаси).

Адабиётлар

1. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1-том, Тошкент, «Ўзбекистон», 1994,1995.
2. Худойберганов Г., Варисов А., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1 ва 2 қисмлар, Қарши, «Насаф», 2003.
3. Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В. Лекции по математическому анализу, Москва, «Высшая школа», 1999.
4. Ильин В., Садовничий В., Сендов Б. Математический анализ, Москва «Наука», 1979.
5. Кудрявцев Л. Курс математического анализа ТТ, 1, 1973.
6. Рудин У. Основы математического анализа, Москва «Мир», 1976.
7. Дороговцев А. Математический анализ, Киев, «Высшая школа», 1985.
8. Фихтенгольц Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ТТ, I, II, Москва “физмат-лит”, 2001.
9. Саъдуллаев А., Мансуров Ҳ., Худойберганов Г., Варисов А., Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1 ва 2-томлар, Тошкент, «Ўзбекистон», 1993, 1996.
10. Демидович Б. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Москва, «Наука», 1990.

Мундарижа

11-боб. Сонли қаторлар