O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

**O'. Toshmetov, R.M. Turgunbayev, E.M. Saydamatov,
M. Madirimov.**

MATEMATIK ANALIZ

I qism

*O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi
Pedagogika oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik
sifatida tavsiya etgan.*

Toshkent
«Extremum-Press»
2015

UO‘K 517.2 (075)
KBK 22.161
T 91

Toshmetov O‘., Turgunbayev R.M., Saydamatov E.M., Madirimov M. Matematik analiz. I-qism. Darslik. – T.: “Extremum-Press”, 2015. 408-b.

Taqrizchilar:
N. Yodgorov – Fizika-matematika fanlari nomzodi;
J. Seypullayev – Fizika-matematika fanlari nomzodi.

Ushbu darslik pedagogika oliy ta’lim muassasalari «Matematika o‘qitish metodikasi» bakalavriat ta’lim yonalishining «Matematik analiz» fani dasturiga mos yozilgan bo‘lib, bunda matematik analizning analizga kirish, bir o‘zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobiga oid nazariy materiallar to‘liq berilgan. Nazariy holatlarni ochib beruvchi misol va masalalar keltirilgan.

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2015 yil “2” fevraldagi “32”-sonli buyrug‘iga asosan darslik sifatida tavsiya etilgan.

ISBN 978-9943-4446-4-5

Nizomiy nomidagi Toshkent davlat pedagogika universiteti tashkil topganligining 80 yillik yubeliyiga bag'ishlanadi

KIRISH

Pedagogika universitetlari va pedagogika institutlari matematika, fizika-matematika fakultetlari bakalavr talabalari uchun darslar, matematik analizdan tuzilgan dastur bo'yicha turli darslik va kitoblardan foydalanib olib boriladi.

Ushbu darslikni yozishda, mana shu ko'p xillilikni bartaraf etish, talabalarning qiynalmasdan, bitta kitobdan foydalanib mavzularni o'zlashtirishlari osonlashishi hisobga olindi.

Darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalarida, matematika o'qitish metodikasi bakalavriat ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, "Matematik analiz" fan dasturiga mos yozilgan. Darslik uch bo'limdan–analizga kirish, bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi va bir o'zgaruvchili funksiyaning integral hisobidan iborat va o'n ikkita bobdan tashkil topgan. Bunda matematik analiz dasturida yuqorida aytilgan bo'limlar bo'yicha ko'rsatilgan barcha mavzulardan nazariy va qisman amaliy materiallar keltirilgan.

Darslikni tayyorlashda ta'lim bosqichlari orasidagi izchillikka va ta'limning kasbiy yo'nalganlik tamoyillariga hamda mualliflar o'zlarining Nizomiy nomidagi pedagogika universitetida, ko'p yillar davomida matematik analiz bo'yicha o'qigan ma'ruzalari va olib borgan amaliy mashg'ulotlaridan kelib chiqqan xulosalariga asoslandilar. Darslikning tuzilishi, mavzularning tanlanishi mana shu tajribalar natijasi bo'lib, shuningdek, shu paytgacha o'zbek tilida mavjud bo'lgan darslik va o'quv qo'llanmalardan, xorijiy davlatlarda chop etilgan yangi adabiyotlardan ijobiy foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlardagi atamalar, tushunchalar va belgilashlarni saqlab qolishga harakat qilindi.

Ushbu darslikda davriy funksiyalar mavzusi, boshqa adabiyotlardan farqli ravishda, davriy to'plam tushunchasi yordamida berildi.

Haqiqiy sonning irratsional darajasi mavzusining bayoni, boshqa, o'zbek tilidagi adabiyotlardagidan tamoman farq qiladi.

Nazariy va qisman amaliy materiallarni mukammal o'zlashtirishni ta'minlash maqsadida har bir bob so'nggida test savollari berildi.

Darslikda teorema, ta'rif, misol, formulalar har bir paragraf bo'yicha, rasmlar har bir bo'lim uchun alohida raqamlangan.

Darslik qo'lyozmasini o'qib chiqib, o'z fikr–mulohalazalarini bildirgan fizika–matematika fanlari nomzodi N.Yodgorovga, Ajiniyoz nomidagi Nukus DPI dotsenti fizika–matematika fanlari nomzodi J.Seypullayevga, O'zMU dotsenti fizika–matematika fanlari nomzodi T.To'ychiyevga minnatdorchilik bildiramiz

Mualliflar

BIRINCHI BO‘LIM. ANALIZGA KIRISH
I BOB. HAQIQIY SONLAR

1-§. Ratsional sonlar to‘plami va uning xossalari

1. Ratsional sonlar to‘plami. Ma’lumki, $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ kabi barcha natural sonlar to‘plami, $\mathbb{Z}=\{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ kabi barcha butun sonlar to‘plami belgilanadi.

1-ta’rif. Ushbu qisqarmaydigan $r=\frac{p}{q}$ kasr ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lgan har bir son *ratsional son* deyiladi. Bu yerda: p biror butun, q esa natural son.

Barcha ratsional sonlar to‘plamini $\mathbb{Q}$ orqali belgilaymiz:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} : p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}\}.$$

$\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$ kasrlarning har birini qisqartirish natijasida $\frac{1}{2}$ - qisqarmas kasr ko‘rinishga keltirish mumkin. Demak, ularning har biri ratsional son va ular o‘zaro teng.

$\mathbb{Q}$ to‘plamda arifmetik amallar quyidagicha kiritiladi. Aytaylik, $r_1=\frac{p_1}{q_1}$ va $r_2=\frac{p_2}{q_2}$ ratsional sonlar berilgan bo‘lsin. Bu r_1 va r_2 ratsional sonlarning yig‘indisi deb, $r_1+r_2=\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$ songa, ayirmasi deb, r_1-$r_2$$=\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2-p_2q_1}{q_1q_2}$ songa, ko‘paytmasi deb, $r_1r_2=\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1p_2}{q_1q_2}$ songa, $r_2\neq 0$ bolganda ularning bo‘linmasi deb, $r_1:r_2=\frac{p_1}{q_1}:\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1q_2}{q_1p_2}$ $(r_2\neq 0)$ songa aytiladi.

2-ta'rif. Agar $r_1-r_2=0$ bo'lsa – $r_1=r_2$, agar $r_1-r_2>0$ bo'lsa – $r_1>r_2$, agar $r_1-r_2<0$ bo'lsa, $r_1<r_2$ deyiladi.

2. Ratsional sonlarning tartiblanganlik xossasi.

1^o. Ixtiyoriy ikkita r_1 va r_2 ratsional sonlar uchun $r_1=r_2$, $r_1<r_2$, $r_1>r_2$ munosabatlardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

2^o. Ixtiyoriy uchta r_1, r_2 va r_3 ratsional sonlari uchun $r_1<r_2$ va $r_2<r_3$ munosabatlardan $r_1<r_3$ bo'lishi kelib chiqadi.

Bu xossalarning to'g'riligi ratsional sonlar ustidagi arifmetik amallarning xossalaridan foydalanib isbotlanadi.

3. Ratsional sonlarning zichlik xossasi.

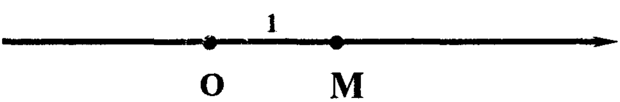
Bir-biridan farqli ixtiyoriy ikkita r_1 va r_2 ratsional sonlar orasida, ulardan boshqa, kamida bitta ratsional son mavjud.

Aytaylik, $r_1<r_2$ bo'lsin. U holda $r=\frac{r_1+r_2}{2}$ uchun $r_1<r<r_2$ bo'lishi ravshan. Shuningdek, ratsional sonlarni qo'shish va bo'lish qoidasidan $\frac{r_1+r_2}{2}\in Q$ kelib chiqadi.

2-§. Ratsional sonlarni sonlar o'qida tasvirlash

To'g'ri chiziqda ixtiyoriy bir nuqtani "boshlang'ich nuqta" deb olib, *O* orqali belgilaymiz. Bu *O* nuqtani "0"(nol) sonining geometrik tasviri deb qaraymiz.

Endi, shu to'g'ri chiziqda noldan o'ng tomonga yurishni musbat yo'nalish, chap tomonga yurishni manfiy yo'nalish deymiz. Bir kesma tanlab olib, uni o'lchov birligi deb qabul qilamiz. Bunday belgilashlar qilingan to'g'ri chiziqni *sonlar o'qi* deyiladi(1-rasm).



1-rasm.

Rasmda, *OM* orqali tanlangan birlik kesma belgilangan. *M* nuqta "1" bir soniga mos keladi deyiladi.

O‘lchov birligini, ya’ni OM kesmani O nuqtadan o‘ngga, to‘g‘ri chiziq bo‘ylab ketma-ket joylashtirilganda $1, 2, \ldots, n, \ldots$ sonlarga mos nuqtalar hosil

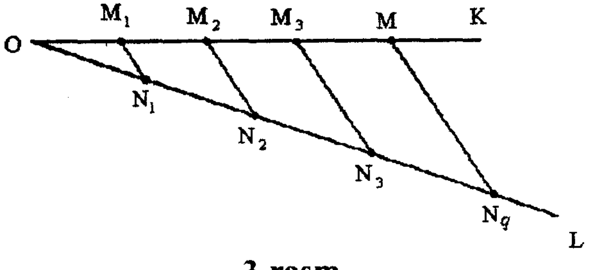
2- rasm.

qilinadi. Xuddi shuningdek, chap tomonda $-1, -2, \ldots, -n, \ldots$ larga mos nuqtalar belgilanadi. Bu nuqtalarni “butun nuqtalar” deyiladi (2-rasm).

Endi, $\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi musbat yoki $-\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi manfiy ratsional songa mos keladigan nuqtani topamiz.

Uchi O nuqtada bo‘lgan KOL burchak chizamiz. Biror kesma olib, uni O nuqtadan boshlab OL nur ustiga ketma-ket q marta qo‘yib $N_1, N_2, \ldots, N_q$ nuqtalarni belgilaymiz. OK nurda esa, O nuqtadan sonlar o‘qining birlik kesmasi OM ni qo‘yamiz. Agar M va N_q nuqtalarni birlashtirsak, OMN_q uchburchak hosil bo‘ladi.

Endi $N_1, N_2, \ldots, N_{q-1}$ nuqtalardan MN_q ga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazib, ularning OK bilan kesishish nuqtalarini $M_1, M_2, \ldots, M_{q-1}$ orqali belgilaymiz. Yasashga ko‘ra, $ON_1, N_1N_2, \ldots, N_{q-1}N_q$ kesmalar o‘zaro teng bo‘lganligi uchun $OM_1, M_1M_2, \ldots, M_{q-1}M$ kesmalar ham o‘zaro teng va har birining uzunligi $\frac{1}{q}$ bo‘ladi (3-rasm).



3-rasm.

Shulardan biri, masalan, OM_1 kesmani O nuqtadan sonlar o‘qi bo‘ylab o‘ng tomonga p marta qo‘yib, $\frac{p}{q}$ songa mos nuqtani, chap tomonga p marta qo‘yib, $-\frac{p}{q}$ songa mos nuqtani topamiz.

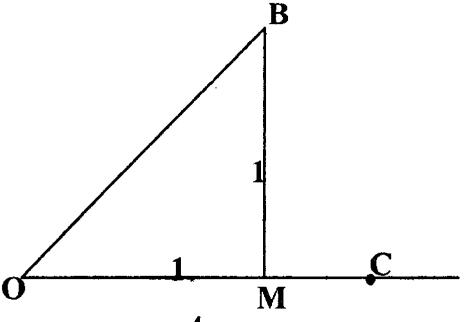
Shunday qilib, sonlar o‘qida barcha ratsional sonlarga mos keladigan nuqtalarni belgilab chiqish mumkin ekan. Bu nuqtalar “ratsional nuqtalar” deyiladi. Demak, sonlar o‘qida, har bir ratsional songa aniq bitta nuqta mos keladi.

Bu tasdiqning teskarisi o‘rinli emas, ya’ni sonlar o‘qini tasvirlovchi to‘g‘ri chiziqda shunday nuqta borki, unga mos keluvchi ratsional son mavjud bo‘lmaydi.

Mana shu oxirgi tasdiqni isbotlaymiz.

Katetlari, birlik kesma OM ga teng bo‘lgan OMB to‘g‘ri burchakli uchburchakning OB gipotenuzasini sirkul yordamida O nuqtadan o‘ngga joylashtirsak, sonlar o‘qida C nuqtaga ega bo‘lamiz (4-rasm).

Ravshanki, $|OC|^2=|OB|^2=2$. Mana shu C nuqtaga mos ratsional son mavjud emas.



4- rasm.

Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik, ya’ni shunday $\frac{p}{q}$ ratsional son, qisqarmas kasr mavjud bo‘lib, $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ bo‘lsin.

Bundan $p^2=2q^2$, ya’ni p ning juft sonligi kelib chiqadi. Shuning uchun, $p=2m$ belgilash kiritib, uni yuqoridagi tenglikka qo‘ysak, $q^2=2m^2$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa q ning ham juft ekanini ko'rsatadi. Demak, $\frac{p}{q}$ sonning qisqarmas kasr deb olganimizga zid xulosaga keldik. Bundan, C nuqtaga mos keladigan ratsional son mavjud emasligi kelib chiqadi.

Sonlar o'qida C nuqtaga o'xshash, ratsional sonlar orqali ifodalab bo'lmaydigan nuqtalarni ko'plab ko'rsatish mumkin. Bunday xulosa ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zaruriyatini keltirib chiqaradi.

3-§. Ratsional sonlar to'plamining kesimi. Irratsional sonning ta'rifi

1-ta'rif. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ qandaydir usulda A va B to'plamlarga ajratilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, bu ajratish $\mathbb{Q}$ ning *kesimi* deyiladi:

1) $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$;

2) $A \cup B = \mathbb{Q}$;

3) $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B \Rightarrow a < b$.

Odatda, kesimni (A,B) ko'rinishda belgilanadi. Bunda A to'plam kesimning *quyi sinfi*, B to'plam esa kesimning *yuqori sinfi* deyiladi.

Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning (A,B) kesimi faqat uch turda bo'ladi.

a) quyi sinf A da eng katta element mavjud, yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas. Bunday kesim *birinchi tur kesim* deyiladi;

b) quyi sinf A da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf B da eng kichik element mavjud. Bunday kesim *ikkinchi tur kesim* deyiladi;

d) quyi sinf A da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas. Bunday kesim *uchinchi tur kesim* deyiladi.

Har bir tur uchun misollarni ko'rib chiqamiz.

1-*misol.* 3 sonini va undan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlarni A sinfga, 3 dan katta bo'lgan barcha ratsional sonlarni B sinfga kiritamiz:

$A=\{x\in\mathbb{Q}: x\leq 3\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q}: x>3\}$.

Bunday ajratish kesimning uchala shartini qanoatlantiradi. Shuningdek, 3 soni quyi sinfning eng katta elementi bo'ladi, ammo yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas.

Umumiy holda, ixtiyoriy r ratsional son uchun $A=\{x\in\mathbb{Q}: x\leq r\}$, $B=\{x\in\mathbb{Q}: x>r\}$ to'plamlarni kiritib, (A,B) kesimni hosil qilsak, r soni quyi sinf A ning eng katta elementi bo'ladi. Yuqori sinf B da eng kichik element mavjud emas. Bu holda kesim r ratsional sonni aniqlaydi deymiz.

2-*misol.* Ixtiyoriy r ratsional soni uchun r dan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlarni A sinfga, r va undan katta bo'lgan barcha ratsional sonlarni B sinfga kiritib, hosil qilingan (A,B) kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas. Yuqori sinf B da r eng kichik element bo'ladi. Bu kesim ham r ratsional sonni aniqlaydi.

3-*misol.* Kvadrati 2 dan katta bo'lgan barcha musbat ratsional sonlarni B sinfga, qolgan barcha ratsional sonlarni A sinfga kiritsak, (A,B) kesimga ega bo'lamiz.

Bu kesimda, quyi sinf A ning eng katta elementi mavjud emas, ya'ni A sinfdan qanday bir r ratsional son olmaylik undan katta, A ga tegishli ratsional son har doim topilaveradi.

Shuni isbotlaymiz.

Aytaylik, $r\in A$ biror musbat ratsional son bo'lsin: $r^2<2$. Ma'lumki, ixtiyoriy n natural son uchun $r < r+\frac{1}{n}$ munosabat o'rinli va $r+\frac{1}{n}$ ratsional son. Endi $\left(r+\frac{1}{n}\right)^2 < 2$ shart bajariladigan n ning mavjudligini tekshirish yetarli.

Ushbu $n > \dfrac{2r+1}{2-r^2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n natural son uchun $\left(r+\dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$ bo'ladi.

Haqiqatan,

$$n > \frac{2r+1}{2-r^2} \Rightarrow 2n\text{-}nr^2 > 2r+1 \Rightarrow r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow \left(r+\frac{1}{n}\right)^2 < 2.$$

Demak, quyi sinf A ning eng katta elementi mavjud emas.

Xuddi shu kabi mulohazalar yordamida, yuqori sinf B ning eng kichik elementi mavjud emasligi ko'rsatiladi.

Izoh. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning, quyi sinfi A da eng katta element, yuqori sinfi B da eng kichik element bor bo'lgan (A,B) kesimni qurib bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, $\mathbb{Q}$ da shunday (A,B) kesim mavjud bo'lib, a_0 son A sinfning eng katta elementi, b_0 son B sinfning eng kichik elementi bo'lsin. Kesimning ta'rifidan $a_0 < b_0$ kelib chiqadi.

Ratsional sonlar to'plamining zichlik xossasiga ko'ra $a_0 < r < b_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi r ratsional son mavjud. Ammo a_0 son A to'plamning eng katta elementi bo'lgani uchun $r \notin A$, xuddi shuningdek, b_0 son B to'plamning eng kichik elementi bo'lgani uchun $r \notin B$. Bu esa kesim ta'rifining 2-shartiga zid, ya'ni A ga ham, B ga ham kirmay qolgan ratsional son bor ekan. Demak, (A,B) kesim emas.

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ni o'zaro kesishmaydigan A va B to'plamlarga har qanday ajratish ham kesim bo'lavermaydi.

Masalan, agar $A=\mathbb{N}$ va $B=\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ deb olsak, u holda $\mathbb{Q}=A\cup B$ bo'ladi, ammo $2\in A$ va $0\in B$ sonlari uchun $2>0$, shuningdek, $3\in A$ va $3{,}5\in B$ sonlari uchun $3<3{,}5$ bo'lib, kesimning 3-sharti bajarilmaydi.

Bunday mulohazalar $\mathbb{Q}$ ning (A,B) kesimi uchun faqat uch turli bo'lishini ko'rsatadi. Birinchi va ikkinchi tur kesimlar ratsional sonni aniqlaydi.

2-ta'rif. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning uchinchi tur kesimi yordamida aniqlangan son *irratsional son* deyiladi.

Yuqorida ko'rilgan 3-misoldagi kesim $\sqrt{2}$ irratsional sonini aniqlaydi.

4-§. Haqiqiy sonlar to'plami va uning xossalari

1. Haqiqiy sonlar to'plami. Avvalgi paragraflarda ratsional va irratsional sonlar qanday aniqlanishi va ularning ta'riflari bilan tanishib chiqdik.

1-ta'rif. Ratsional sonlar va irratsional sonlar birgalikda, umumiy nom bilan, *haqiqiy sonlar* deyiladi.

Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ orqali belgilanadi.

Har bir haqiqiy sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishda tasvirlash mumkin. Davriy bo'lgan cheksiz o'nli kasr ratsional sonni, davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr irratsional sonni ifodalaydi.

Masalan, $\frac{1}{5}$=0,200..., $\frac{1}{3}$=0,333...=0,(3), 0,121212...= 0,(12)= $=\frac{4}{33}$ lar ratsional sonlar, 0,10100100010..., 1,21211211121... lar irratsional sonlar bo'ladi.

2. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganligi. Dastlab, haqiqiy sonlar to'plamida teng, katta va kichik tushunchalarini kiritamiz.

Aytaylik, x va y haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

a) agar x va y larning ikkovi ham ratsional son bo'lsa, u holda ular orasida $x=y$, $x<y$, $x>y$ munosabatlardan faqat bittasi o'rinli bo'lishi ratsional sonlar to'plamining tartiblanganligidan kelib chiqadi.

b) aytaylik, x ratsional, y irratsional son bo'lsin. U holda y ni aniqlovchi 3-tur (A,B) kesim mavjud bo'ladi. Agar $x \in A$ bo'lsa, $x<y$, agar $x \in B$ bo'lsa, $x>y$ deb olamiz;

d) aytaylik, x va y larning ikkovi ham irratsional son bo'lsin. U holda x ni aniqlovchi (A,B), y ni aniqlovchi (C,D) 3-tur kesimlar mavjud bo'ladi. Agar $A=C$ bo'lsa – $x=y$, agar $A \subset C$ va $A \neq C$ bo'lsa – $x<y$, agar $A \supset C$ va $A \neq C$ bo'lsa, $x>y$ deb olamiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlar uchun $x=y$, $x<y$, $x>y$ munosabatlardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi. Shuningdek, $x<y$ va $x<z$ lardan $x<z$ kelib chiqadi. Demak, haqiqiy sonlar to'plami tartiblangan ekan.

3. Haqiqiy sonlar to'plamining zichligi. Haqiqiy sonlar to'plamida ratsional sonlar to'plamidagi kabi quyidagi xossa o'rinli.

Bir-biridan farqli ixtiyoriy ikki haqiqiy x va y sonlari orasida, kamida bitta haqiqiy, xususan, ratsional son mavjud.

Shu xossani isbotlaymiz.

Aytaylik, $x<y$ bo'lsin. Agar x va y larning ikkalasi ham ratsional son bo'lsa, u holda ratsional sonlar to'plamining zichlik xosasiga ko'ra ular orasida kamida bitta ratsional son mavjud.

Agar x ratsional son, y irratsional son bo'lsa, u holda y ni aniqlovchi (A,B) 3-tur kesim mavjud bo'lib, $x<y$ ekanligidan $x \in A$ bo'ladi. Quyi sinf A da eng katta element mavjud bo'lmaganligi sababli x dan katta $r \in A$ ratsional son mavjud: $x<r<y$.

Shuningdek, x irratsional son va y ratsional son bo'lgan hol yuqoridagiga o'xshash isbotlanadi.

Agar x va y larning ikkalasi ham irratsional son bo'lsa, u holda x ni aniqlovchi (A,B), y ni aniqlovchi (C,D) 3-tur kesimlar mavjud bo'lib, $x<y$ ekanligidan $A \subset C$ va $A \neq C$ bo'ladi. Bundan esa C da A ga tegishli bo'lmagan r ratsional son borligi kelib chiqadi: $x<r<y$.

4. Haqiqiy sonlar to'plamining uzluksizligi. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ da kiritilgan kesim tushunchasini haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da ko'ramiz.

1-ta'rif. Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ qandaydir usulda X va Y to'plamlarga ajratilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa, bu ajratish $\mathbb{R}$ ning *kesimi* deyiladi:

1) $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$;

2) $X \cup Y = \mathbb{R}$;

3) $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x < y$.

Xuddi ratsional sonlar to'plamidagi kabi, kesim (X,Y) ko'rinishda belgilanadi va X to'plam kesimning *quyi sinfi*, Y to'plam esa kesimning *yuqori sinfi* deyiladi.

Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning kesimi faqat uch turda bo'lishini bilamiz. Tabiiy savol tug'iladi: haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da kesim necha xil bo'lishi mumkin?

Quyidagi teorema shu savolga javob beradi.

1-teorema (Dedekind teoremasi). Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da hosil qilingan (X,Y) kesim uchun quyidagi ikki holdan biri o'rinli bo'ladi:

1) quyi sinf X da eng katta element mavjud, yuqori sinf Y da eng kichik element mavjud emas;

2) quyi sinf X da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf Y da eng kichik element mavjud.

Isboti. Aytaylik, $\mathbb{R}$ da biror (X,Y) kesim berilgan bo'lsin. Quyi sinf X dagi barcha ratsional sonlar to'plamini A, yuqori sinf Y dagi barcha ratsional sonlar to'plamini B orqali belgilaylik. U holda bu A va B to'plamlar ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ da kesim hosil qilishini bilamiz.

Ma'lumki, (A,B) kesim biror a sonni aniqlaydi. Bu son X yoki Y larning biriga tegishli bo'ladi.

Agar $a \in X$ bo'lsa, u holda a son X to'plamning eng katta elementi ekanini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, a son X ning eng katta elementi bo'lmasin. U holda X da a dan katta bo'lgan biror a_0 sonni olamiz. Haqiqiy sonlar to'plamining zichlik xossasiga ko'ra, $a<r<a_0$ shartni qanoatlantiruvchi r ratsional son mavjud. Endi $r < a_0$, $a_0 \in X$ dan $r \in X$, shuningdek, $a<r$ bo'lganligi uchun, (A,B) kesim xossasiga

ko‘ra $r \in B$, ya’ni $r \in Y$ kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto‘g‘ri ekanini ko‘rsatadi. Demak, a son X ning eng katta elementi bo‘ladi.

Agar $a \in Y$ bo‘lsa, u holda a son Y to‘plamning eng kichik elementi ekanligi yuqoridagi kabi ko‘rsatiladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremadan, haqiqiy sonlar to‘plamida 3-tur kesim mavjud bo‘lmasligi kelib chiqadi. Mana shu xususiyat haqiqiy sonlar to‘plamining *uzluksizlik xossasi* deyiladi.

Demak, haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ da hosil qilingan har bir kesim faqat bitta haqiqiy sonni aniqlaydi.

5-§. Haqiqiy sonlarni sonlar o‘qida tasvirlash

Ratsional sonlarni sonlar o‘qidagi nuqtalar orqali tasvirlash bilan 2-§ da tanishib o‘tgan edik. Bu paragrafda irratsional sonlarni sonlar o‘qida tasvirlash mumkinligini ko‘rib chiqamiz.

Oldingi mulohazalarga asoslangan holda, quyidagi tasdiqlar o‘rinli deb olamiz.

1) to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plami tartiblangan, ya’ni to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy ikki C va D nuqtalardan biri ikkinchisidan chapda yotadi. Shuningdek, agar C nuqta D nuqtadan, D nuqta E nuqtadan chapda yotsa, u holda C nuqta E nuqtadan chapda yotadi;

2) bir-biridan farqli ixtiyoriy ikki C va D nuqtalar orasida, kamida bitta “ratsional” nuqta mavjud;

3) to‘g‘ri chiziqning barcha nuqtalari to‘plamida qurilgan ixtiyoriy (X', Y') kesim uchun X' sinfning eng o‘ng nuqtasi yoki Y' sinfning eng chap nuqtasi mavjud (bu tasdiq to‘g‘ri chiziqning *uzluksizlik aksiomasi* deyiladi);

4) to‘g‘ri chiziqda eng chap va eng o‘ng nuqta mavjud emas.

Har bir ratsional songa, to‘g‘ri chiziqda ratsional nuqta mos kelishini 2-§ da ko‘rsatgan edik. Endi irratsional songa, to‘g‘ri chiziqdagi ratsional bo‘lmagan nuqta mos kelishini ko‘rib chiqamiz.

Aytaylik, x irratsional son va (A,B) uni aniqlovchi kesim bo'lsin. Agar quyi sinf A dagi ratsional sonlarga mos keladigan "ratsional" nuqtalarni A' sinfga, yuqori sinf B dagi ratsional sonlarga mos keladigan "ratsional" nuqtalarni B' sinfga kiritsak, u holda to'g'ri chiziqning ratsional nuqtalari to'plamida (A',B') kesim hosil bo'ladi.

Endi to'g'ri chiziqdagi barcha nuqtalarni X' va Y' sinflarga quyidagicha ajratamiz:

A' ning hech bo'lmaganda bitta nuqtasidan chaproqda joylashgan nuqtalar X' sinfga, qolgan nuqtalar Y' sinfga kiritiladi. Natijada to'g'ri chiziq nuqtalari to'plamida (X',Y') kesim hosil bo'ladi.

To'g'ri chiziqning uzluksizlik aksiomasiga ko'ra, (X',Y') kesim biror $M(x)$ nuqtani aniqlaydi. Bu nuqta X' da eng o'ng nuqta yoki Y' da eng chap nuqta bo'ladi. Bu nuqta "ratsional" nuqta bo'la olmaydi. Shu $M(x)$ nuqtani x irratsional songa mos qo'yamiz. Xuddi shu kabi, to'g'ri chiziqdagi har bir "ratsional" bo'lmagan nuqtaga bitta irratsional son mos kelishi yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yordamida ko'rsatiladi.

Shunday qilib, har bir haqiqiy songa to'g'ri chiziqdagi bitta nuqta va to'g'ri chiziqdagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos keladi. Shu sababli, haqiqiy son deganda son o'qidagi nuqtani, sonlar o'qidagi nuqta deganda haqiqiy sonni tushunish mumkin.

6-§. Haqiqiy sonning absolut qiymati va uning xossalari

Haqiqiy sonning absolut qiymati (moduli) tushunchasi, muhim tushunchalardan biri hisoblanadi.

Aytaylik, a biror haqiqiy son bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $a \geq 0$ bo'lsa, uning *absolut qiymati* deb, a sonning o'ziga, agar $a<0$ bo'lsa, $-a$ songa aytiladi.

Odatda, a sonning absolut qiymati $|a|$ kabi belgilanadi. Demak,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ agar } a \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -a, \text{ agar } a < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Masalan, $|3|=3$, $|-2{,}5|=2{,}5$, $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$, $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$.

Haqiqiy sonning absolut qiymati quyidagi xossalarga ega.

1°. Ixtiyoriy $x\in\mathbb{R}$ uchun $|x|=|-x|$ va $-|x|\le x\le|x|$ bo'ladi.

Bu xossaning o'rinliligi absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

2°. Ixtiyoriy $a>0$ uchun $|x|<a$ va $-a<x<a$ tengsizliklar o'zaro teng kuchli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $|x|<a$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Uning har ikki tomonini -1 ga ko'paytirib, $-a<-|x|$ tengsizlikni hosil qilamiz. 1° xossaga ko'ra, $-|x|\le x\le|x|$. Bu oxirgi ikki tengsizlikdan $-a<-|x|\le x\le|x|<a$ va demak, $-a<x<a$ kelib chiqadi.

Endi, aytaylik, $-a<x<a$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Agar $x\ge0$ bo'lsa, $|x|=x$ bo'lib, $|x|<a$ kelib chiqadi.

Agar $x<0$ bo'lsa, $|x|=-x$ bo'lib, $-a<x$, ya'ni $-x<a$ dan $|x|<a$ kelib chiqadi.

Isbotlangan 2° xossadan $|x|\le a$ va $-a\le x\le a$ tengsizliklarning ham o'zaro teng kuchliligi kelib chiqadi.

3°. Ikki son yig'indisining absolut qiymati va shu sonlar absolut qiymatlari yig'indisi uchun $|x+y|\le|x|+|y|$ munosabat o'rinli.

Isboti. 1° ga ko'ra $-|x|\le x\le|x|$ va $-|y|\le y\le|y|$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklarni qo'shib, $-(|x|+|y|)\le x+y\le|x|+|y|$ tengsizlikni hosil qilamiz. 2° ga asosan bu $|x+y|\le|x|+|y|$ kabi yoziladi.

Isbotlangan xossa qo'shiluvchilarning soni ikkitadan ortiq bo'lgan holda ham o'rinli:

$|x_1+x_2+\ldots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.

4°. Ikki son ayirmasining absolut qiymati va shu sonlar absolut qiymatlari ayirmasi uchun $|x|-|y|\le|x-y|$ munosabat o'rinli.

Isboti. Ushbu $|x|=|(x-y)+y|$ tenglik va 3° ga ko'ra $|x|\le|x-y|+|y|$ bo'ladi. Bundan $|x|-|y|\le|x-y|$ tengsizlik hosil qilinadi.

Quyidagi xossalar absolut qiymatning ta'rifidan kelib chiqadi.

5°. Ixtiyoriy $x,y\in\mathbb{R}$ lar uchun $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$ bo'ladi.

6°. Ixtiyoriy $x,y\in\mathbb{R}$ va $y\neq0$ uchun $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ bo'ladi.

2-ta'rif. Aytaylik, x, $y \in \mathbb{R}$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Ushbu $|x-y|$ son shu nuqtalar orasidagi *masofa* deyiladi.

7-§. Sonlar o'qidagi sodda to'plamlar

Elementlari sonlardan iborat to'plamlar *sonli to'plamlar* deyiladi. Biz, asosan, sonli to'plamlar bilan ish ko'ramiz. Shu sababli, kelgusida, to'plam deganda sonli to'plam tushuniladi. Matematikada ko'p uchraydigan sodda to'plamlarni ajratamiz.

Aytaylik, a, $b \in \mathbb{R}$ va $a<b$ bo'lsin.

1-ta'rif. *a*) ushbu $a \le x \le b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha sonlar to'plami *segment* yoki *kesma* deyiladi va $[a;b]$ orqali belgilanadi:

$$[a;b]=\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\};$$

b) ushbu $a<x<b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha sonlar to'plami *interval* yoki *ochiq oraliq* deyiladi va $(a;b)$ orqali belgilanadi:

$$(a;b)=\{x \in \mathbb{R} : a<x<b\};$$

d) ushbu $a \le x<b$ yoki $a<x \le b$ qo'sh tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha sonlar to'plami *yarim segment* deyiladi va mos ravishda $[a;b)$ yoki $(a;b]$ orqali belgilanadi:

$$[a;b)=\{ x \in \mathbb{R} : a \le x<b \}, \ (a;b]=\{ x \in \mathbb{R} : a<x \le b \}.$$

Kiritilgan bu, to'rt xil to'plamlar bir so'z bilan *oraliqlar* deyiladi. Demak, oraliq deganda segment, interval, yarim segmentlardan biri tushuniladi. Odatda, a va b sonlar shu oraliqlarning chegaraviy nuqtalari deyiladi.

2-ta'rif. x_0 nuqta tegishli bo'lgan ixtiyoriy $(a;b)$ interval x_0 nuqtaning *atrofi* deyiladi.

Ushbu $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ interval esa x_0 nuqtaning *ε-atrofi* deyiladi va $O(x_0;\varepsilon)$ orqali belgilanadi:

$$O(x_0;\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} : |x-x_0|<\varepsilon \}.$$

Intervallar va yarim segmentlar orasida chegaraviy nuqtalari cheksiz bo'lganlari ham uchraydi.

Masalan, $(-\infty;+\infty)=\mathbb{R}$, $[a;+\infty)=\{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$, $(a;+\infty)=\{x \in \mathbb{R} : x>a \}$, $(-\infty; b]=\{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$, $(-\infty; b)=\{x \in \mathbb{R} : x<b\}$.

8-§. Chegaralangan va chegaralanmagan to'plamlar

1. Yuqoridan chegaralangan to'plam. Aytaylik, $E\subset\mathbb{R}$ bo'sh bo'lmagan to'plam berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar shunday b son topilib, ixtiyoriy $x\in E$ uchun $x\leq b$ tengsizlik bajarilsa, u holda E to'plam *yuqoridan chegaralangan*, b uning *yuqori chegarasi* deyiladi.

1-*misol.* $E_1=(-\infty;0)$, barcha manfiy sonlar to'plami yuqoridan chegaralangan. Bu to'plam uchun 0 va ixtiyoriy musbat son yuqori chegara bo'ladi.

2-*misol.* $E_2=\{...-3,-2,-1, 0, 1, 2\}$ to'plam ham yuqoridan chegaralangan. Bu to'plam uchun 2 soni va undan katta har bir son yuqori chegara bo'ladi.

Keltirilgan misollardan ko'rinadiki, yuqoridan chegaralangan to'plamning yuqori chegarasi cheksiz ko'p bo'lar ekan.

Agar 1-ta'rif shartini qanoatlantiruvchi b soni topilmasa, u holda E to'plam *yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

Masalan, $E_3=\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ to'plam yuqoridan chegaralanmagan. Qanday b son olmaylik undan katta n_0 natural son mavjud: $b<n_0$. (n_0 sifatida b sonining butun qismidan keyingi sonni olish yetarli).

Yuqoridan chegaralangan to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi mavjudmi? – degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. Yuqoridan chegaralangan to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi mavjud.

Isboti. Aytaylik, E yuqoridan chegaralangan to'plam bo'lsin. Ikki holni ko'rib chiqamiz.

a) E to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud, ya'ni shunday $x_0\in E$ son borki, ixtiyoriy $x\in E$ lar uchun $x\leq x_0$ bo'ladi. Demak, x_0 son E to'plamning yuqori chegarasi bo'lib, E ning boshqa ixtiyoriy b chegarasidan katta bo'lmaydi: $x_0\leq b$.

Bulardan x_0 son E to'plamning eng kichik yuqori chegarasi ekanligi kelib chiqadi;

b) E to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lmasin. U holda haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ ni, quyidagicha X va Y to'plamlarga ajratamiz: E to'plamning barcha yuqori chegaralari to'plamini Y orqali, $\mathbb{R}$ dagi qolgan barcha sonlar to'plamini X orqali belgilaymiz. Bunday ajratish $\mathbb{R}$ da kesim bo'ladi.

Shuni tekshirib chiqamiz:

1) $E \neq \varnothing$ va $E \subset X$ dan $X \neq \varnothing$ kelib chiqadi. Shuningdek, E yuqoridan chegaralanganligi uchun uning yuqori chegarasi bor. Demak, $Y \neq \varnothing$;

2) har bir $x \in \mathbb{R}$ son yoki E ga yuqori chegara bo'ladi, yoki E ga yuqori chegara bo'lmaydi. Demak, yoki $x \in X$, yoki $x \in Y$ bo'ladi. Bu esa $X \cup Y = \mathbb{R}$ ekanini bildiradi;

3) aytaylik, $x \in X$ va $y \in Y$ bo'lsin. U holda x son E to'plamning yuqori chegarasi bo'lmaydi, ya'ni E da x dan katta bo'lgan biror $x_0 \in E$ son mavjud. $y \in Y$ son E to'plamning yuqori chegarasi bo'lganligi uchun $x < x_0 < y$ bo'ladi. Bundan $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ uchun $x < y$ bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki, (X, Y) kesim aniq bitta a sonni aniqlaydi. $E \subset X$ bo'lganligi uchun a son E to'plamning yuqori chegarasi bo'ladi, ya'ni $a \in Y$. Shuningdek, a son Y ning eng kichik elementi bo'lganligi sababli, a son E to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichik son bo'ladi.

2-ta'rif. Yuqoridan chegaralangan to'plam yuqori chegaralari orasida eng kichigi, uning *aniq yuqori chegarasi* deyiladi.

Aniq yuqori chegara $\sup E$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagi mulohazalar shuni ko'rsatadiki, agar E to'plamning eng katta elementi mavjud bo'lsa, u holda o'sha son E to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'ladi. Umuman olganda, yuqoridan chegaralangan to'plamning aniq yuqori chegarasi uning o'ziga tegishli bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $E_4 = [0;10]$ to'plamda 10 soni uning eng katta elementi va 10 soni bu to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'ladi.

E_5=(-8;1) to‘plam uchun $supE_5$=1 bo‘lib, 1 soni unga tegishli emas.

Yuqoridagi misollar uchun $supE_1$=0, $supE_2$=2 bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

Agar E to‘plam yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda $supE=+\infty$ deb olinadi.

2. Quyidan chegaralangan to‘plam. Aytaylik, $E\subset\mathbb{R}$ bo‘sh bo‘lmagan to‘plam berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. Agar shunday a son mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x\in E$ lar uchun $x\geq a$ tengsizlik bajarilsa, u holda E to‘plam *quyidan chegaralangan*, a uning *quyi chegarasi* deyiladi.

3-*misol.* E_6=[2;+∞) to‘plam quyidan chegaralangan. Bu to‘plam uchun 2 va undan kichik ixtiyoriy son quyi chegara bo‘ladi.

4-*misol.* $E_7=\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$ to‘plam quyidan chegaralangan. Bu to‘plam uchun 0 va ixtiyoriy manfiy son quyi chegara bo‘ladi.

Demak, quyidan chegaralangan to‘plamning quyi chegarasi cheksiz ko‘p bo‘ladi. Quyidagi teorema quyidan chegaralangan to‘plamlar uchun bo‘lib, 1-teorema kabi isbotlanadi.

2-teorema. Quyidan chegaralangan to‘plamning quyi chegaralari orasida eng kattasi mavjud.

4-ta’rif. Quyidan chegaralangan to‘plam quyi chegaralari orasida eng kattasi, uning *aniq quyi chegarasi* deyiladi.

Aniq quyi chegara $infE$ kabi belgilanadi.

Agar 3-ta’rif shartini qanoatlantiruvchi a soni topilmasa, u holda E to‘plam *quyidan chegaralanmagan* deyiladi.

Masalan, E_1 va E_2 to‘plamlar quyidan chegaralanmagan.

Agar E to‘plam quyidan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda $infE=-\infty$ deb olinadi.

5-ta’rif. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan to‘plam *chegaralangan* to‘plam deyiladi.

Masalan, E_8 – barcha to‘g‘ri kasrlar to‘plami, chegaralangan to‘plam bo‘ladi. Bu to‘plam uchun $infE_8$=0, $supE_8$=1.

Aytaylik, E chegaralangan to'plam bo'lsin. Agar $infE=c$, $supE=d$ belgilashni kiritsak, u holda $[c;d]$ segment, E to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik segment bo'ladi. Buni qanday tushunish kerak? Agar $E\subset[c;d]$ va $\dot{E}\subset[c_1;d_1]$ bo'lsa, u holda $[c;d]\subset[c_1;d_1]$ bo'ladi.

9-§. Bernulli tengsizligi

Ba'zi sonli to'plamlarning aniq yuqori chegarasini va aniq quyi chegarasini topishda ishlatiladigan bir muhim tengsizlikni keltiramiz.

Teorema. Barcha $n\in\mathbb{N}$ va ixtiyoriy $a>-1$ lar uchun

$$(1+a)^n\geq 1+na \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Isbotni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$n=1$ da (1) tengsizlik $1+a \geq 1+a$ to'g'ri.

$n=k$ uchun $(1+a)^k\geq 1+ka$ *ni* o'rinli deb olamiz.

Oxirgi tengsizlikning ikkala tomonini $1+a\geq 0$ songa ko'paytirsak,

$$(1+a)^{k+1}\geq(1+ka)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2\geq 1+(k+1)a$$

bo'ladi. Bu esa (1) tengsizlik $n=k+1$ uchun ham o'rinli ekanini, demak, barcha natural n lar uchun o'rinliligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

I bobga doir test savollari

1. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ zich to'plam;

B) Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ tartiblangan to'plam;

C) Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ yuqoridan chegaralangan;

D) ikkita ratsional sonlarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi (maxraj noldan farqli bo'lganda) ratsional son bo'ladi.

2. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ da bajarilgan kesim necha turli bo'lishi mumkin?

A) faqat bir turli; *B*) faqat uch turli;
C) faqat ikki turli; *D*) faqat to'rt turli.

3. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ zich to'plam;
B) Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ tartiblangan to'plam;
C) Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ to'la (uzluksiz) to'plam;
D) Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ quyidan chegaralangan.

4. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to'g'ri?

A) Ratsional son bilan irratsional sonning yig'indisi irratsional son bo'ladi;

B) Ixtiyoriy ratsional son bilan irratsional sonning ko'paytmasi irratsional son bo'ladi;

C) Ikkita irratsional son yig'indisi irratsional son bo'ladi;

D) Ikkita irratsional son ko'paytmasi irratsional son bo'ladi.

5. Quyidagi jumlaning qaysi biri to'g'ri?

A) Quyidan chegaralangan ixtiyoriy X sonli to'plam eng kichik elementga ega;

B) Quyidan chegaralangan ixtiyoriy X sonli to'plam eng katta elementga ega;

C) Chegaralangan ixtiyoriy X sonli to'plam aniq yuqori va aniq quyi chegaraga ega;

D) Chegaralangan ixtiyoriy X sonli to'plam eng katta va eng kichik elementga ega.

6. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) Yuqoridan chegaralangan sonli to'plam aniq yuqori chegaraga ega;

B) Quyidan chegaralangan sonli to'plam aniq quyi chegaraga ega;

C) Yuqoridan chegaralangan sonli to'plamning yuqori chegaralari cheksiz ko'p;

D) Ixtiyoriy chegaralangan sonli to'plam eng katta elementga ega.

7. Quyidagi to'plamlarning qaysi biri yuqoridan chegaralangan?

1) $[0;2]$, 2) $(-\infty; 0]$, 3) $[1; +\infty)$

A) 1,2; B) 2,3; C) 1,3; D) barchasi.

8. Quyidagi 1) $(-5;7)$ 2) $(-\infty; +\infty)$ 3) $(-\infty; 4)$ to'plamlarning qaysi biri quyidan chegaralangan?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 1,3.

9. x va y sonlarni aniqlovchi (A,B) va (C,D) kesimlar berilgan:

$x=(A,B)$, $y=(C,D)$. $x < y$ bo'lishi uchun quyidagi munosabatlarning qaysi biri o'rinli bo'lishi kerak?

A) $A \subset D$; B) $B \subset D, B \neq D$;

C) $B \subset C$; D) $D \subset B$, $D \neq B$.

10. x va y sonlarni aniqlovchi (A,B) va (C,D) kesimlar berilgan:

$x=(A,B)$, $y=(C,D)$. $x < y$ bo'lishi uchun quyidagi munosabatlarning qaysi bittasi o'rinli bo'lishi kerak?

A) $A \subset C$, $A \neq C$; B) $B \subset D$, $B \neq D$;

C) $B \subset C$; D) $D \subset A$.

11. Agar x va y haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlardan qaysi biri haqiqiy son absolut qiymatining xossasini ifodalaydi?

A) $|x|+|y| \leq |x-y|$; B) $|x| - |y| \leq |x-y|$;

C) $|x-y|<|x+y|$; D) $|xy| < |x|\cdot|y|$.

12. Agar x va y haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlardan qaysi biri haqiqiy son absolyut qiymatining xossasini ifodalamaydi?

A) $|x-y|\leq |x|+|y|$; B) $|x| - |y| \leq |x-y|$;
C) $|y| - |x| \leq |x-y|$; D) $|x-y|<|x+y|$.

13. Quyidagilardan qaysi biri ratsional sonlar to'plamida kesim bo'ladi?

1) A – kvadrati 3 dan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami, B – qolgan ratsional sonlar to'plami.

2) A –manfiy ratsional barcha sonlar to'plami, B – barcha musbat ratsional sonlar to'plami.

3) A – kvadrati 5 dan katta bo'lgan ratsional sonlar to'plami, B - qolgan ratsional sonlar to'plami.

4) A – kubi 3 dan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami, B – qolgan ratsional sonlar to'plami.

A) 1 va 3; B) 2 va 4;
C) faqat 4; D) faqat 2.

14. Quyidagilardan qaysi biri haqiqiy sonlar to'plamida kesim bo'ladi?

1) A – kvadrati 3 dan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami, B – qolgan haqiqiy sonlar to'plami.

2) A – kvadrati 5 dan katta bo'lgan barcha haqiqiy sonlar to'plami, B – qolgan haqiqiy sonlar to'plami.

3) A – barcha irratsional sonlar to'plami, B – barcha ratsional sonlar to'plami.

4) A – kubi 4 dan kichik bo'lgan barcha haqiqiy sonlar to'plami, B – qolgan haqiqiy sonlar to'plami.

A) 1 va 2; B) 2 va 4; C) 4; D) 3.

15. $\{n^2-10n+9\}$ to'plamning aniq quyi chegarasini toping.

A) –34; B) –15; C) –16; D) –19.

16. $\left\{\frac{2}{n^2-4n+9},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ **to'plamning aniq yuqori chegarasini toping.**

A) 0,2; B) 1/6; C) 0,4; D) 0,5.

17. $m=\sqrt[4]{2,56}$; $n = 3,4(25)$; $p = 1,01100111...$; $q=\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}+2}$ **sonlardan qaysilari irratsional?**

A) m,p; B) m,q; C) p,q; D) p, n.

18. $m=\sqrt[4]{256}$; $n = 3,141516...$; $p=\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}+13}$; $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **sonlardan qaysilari irratsional?**

A) m, p; B) n, q; C) p, q; D) m, p.

19. $m = 0,22(23)$, $n = 0,(223)$, $p = 0,222(3)$ **sonlarini o'sish tartibida yozing.**

A) $m< n <p$; B) $m <p <n$; C) $n <m <p$; D) $p <m <n$.

20. $|x-15|\geq 5$ **tengsizlikni yeching.**

A) $(-\infty;10]$; B) $[10;25]$;
C) $[25;+\infty)$; D) $(-\infty;10]\text{U}[20;+\infty)$.

21. $|x-7|<1$ **tengsizlikni yeching.**

A) $(-8;6)$; B) $(-\infty;6)$; C) $(6;8)$; D) $[6;8]$.

22. $2|x+3|\leq|x-1|$ **tengsizlikning butun yechimlari nechta?**

A) 5; B) 6; C) 10; D) 12.

23. $2|x-1|\leq|x+3|$ **tengsizlikning butun yechimlari nechta?**

A) 0; B) 6; C) 5; D) 8.

24. Quyidagi sonlardan qaysi biri 0,(7) ga teng?

A) 0,7777; B) 1/7; C) 7/10; D) 14/18.

25. 5,(8) ni oddiy kasrga aylantiring:

A) $5\frac{8}{10}$; B) $5\frac{3}{5}$; C) $5\frac{88}{100}$; D) $5\frac{8}{9}$.

26. 3,4(3) ni oddiy kasrga aylantiring:

A) $3\frac{13}{30}$; B) $3\frac{2}{45}$; C) $3\frac{67}{99}$; D) $3\frac{73}{90}$.

II BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYA

1-§. Funksiya tushunchasi

Funksiya tushunchasi matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida turli miqdorlar orasida mavjud bo‘lgan bog‘lanishlar o‘rganiladi.

Aytaylik, ixtiyoriy X va Y to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar X to‘plamdan olingan har bir x elementga biror qonuniyat yoki qoida bilan Y to‘plamdagi aniq bitta y element mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamni Y to‘plamga *akslantirilgan* deyiladi.

Bu yerdagi qonuniyat yoki qoidani f orqali belgilanadi va *akslantirish* deyiladi.

Agar X va Y to‘plamlar orasida f akslantirish berilgan bo‘lsa, u $f: X \to Y$ kabi belgilanadi.

Akslantirish natijasida x elementga mos kelgan y element x ning *aksi* (*obrazi*) deyiladi va $y=f(x)$ ko‘rinishda yoziladi. Shuningdek, x ning o‘zi y ning *asli* (*proobrazi*) deyiladi.

Odatda, X to‘plamni haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ ga akslantirish X to‘plamda berilgan *funksiya* deyiladi.

Yuqorida aytilganlar funksiyaning umumiy ta’rifi bo‘lib, biz asosan X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamlari bo‘lgan holni ko‘rib chiqamiz.

2-ta’rif. Agar X va Y sonli to‘plamlar berilgan bo‘lib, X to‘plamdan olingan har bir x songa biror qonuniyat yoki qoida bilan Y to‘plamdagi aniq bitta y son mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamda aniqlangan *funksiya berilgan* deyiladi. Funksiya $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$, . . . ko‘rinishlarda yoziladi.

Agar funksiya berilgan bo‘lsa, u holda X to‘plam funksiyaning *aniqlanish sohasi*, Y esa funksiyaning *o‘zgarish sohasi* deyiladi.

Shuningdek, x *erkli o‘zgaruvchi* yoki *argument*, y esa *erksiz o‘zgaruvchi* deyiladi.

Odatda, $\{f(x) : x \in X\}$ to'plam funksiyaning *qiymatlar to'plami* deyiladi va $E(f)$ orqali belgilanadi. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ bilan belgilanadi.

1-*misol.* Agar $X=Y=\mathbb{R}$ da $y=x^2$ funksiya berilgan bo'lsa, u holda

$D(f)=(-\infty;+\infty)$ va $E(f)=[0;+\infty)$ bo'ladi.

2-*misol.* Agar $X=(0;+\infty)$, $Y=R$ da $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ funksiya berilgan bo'lsa, u holda $D(f)=(0;+\infty)$, $E(f)=(0;1)$ bo'ladi.

Demak, funksiya berilgan bo'lishi uchun:

a) funksiyaning aniqlanish sohasi;

b) x ga mos kelgan y ni topish qoidasi yoki qonuniyat berilgan bo'lishi kerak.

Masalan, $y=\sqrt{x+1}$ qoida, ildiz chiqarish qoidasi bo'lib, $x\in[-1;+\infty)$ bo'lgandagina ma'noga ega. Shuning uchun, $X=[-1;+\infty)$ va $Y=[0;+\infty)$ bo'ladi.

2-§. Funksiyaning berilish usullari

Funksiya asosan uch xil usulda beriladi: analitik usul, jadval usuli, grafik usul.

1. Analitik usul. Agar y ni topish uchun x bilan bajarilishi kerak bo'lgan amallar majmuyi bitta yoki bir nechta formula ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda funksiya *analitik* usulda berilgan deyiladi.

Bu yerda amallar deyilganda qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va hokazolar tushuniladi.

Qisqacha aytganda, $y=f(x)$ funksiya formula yordamida berilgan bo'lsa, u holda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi. Bu yerdagi $f(x)$ formula funksiyaning *analitik ifodasi* deyiladi.

Funksiya analitik usulda berilganda uning aniqlanish sohasi berilmasligi mumkin. Bu holda aniqlanish sohasi deganda, x ning analitik ifoda ma'noga ega bo'ladigan barcha qiymatlari to'plami tushuniladi. Bu to'plam, funksiyaning *tabiiy aniqlanish sohasi* deyiladi va $D(f)$ yoki $D(y)$ orqali belgilanadi.

1-*misol.* $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$. $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2-*misol.* $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$, $x^2-5x+6 \geq 0$. $D(f)=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

2. Jadval usuli. Ba'zi hollarda, argument x ning ba'zi bir qiymatlariga mos keladigan funksiya qiymatlari jadvali beriladi. Bunda, funksiya *jadval* usulda berilgan deyiladi.

Funksiyaning jadval usulda berilishi ikkita x va y miqdorlar orasida bog'lanishni tajriba yo'li bilan aniqlashda qo'l keladi. Bunda x ning bir nechta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlari olinadi, tajriba asosida y ning x ga mos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlari aniqlanadi va jadval tuziladi.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

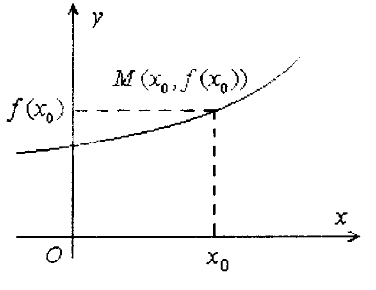
3. Grafik usul. Agar $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsa, u holda tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi qaraladi. Tekislikning barcha $(x,f(x))$ nuqtalaridan iborat ushbu

$\{M(x,f(x)): x\in X\}$

to'plam $y=f(x)$ funksiyaning *grafigi* deyiladi.

Agar tekislikda funksiyaning grafigi berilgan bo'lsa, u holda funksiya *grafik* usulda berilgan deyiladi.

Funksiya grafik usulda berilgan bo'lsa, u holda $f(x_0)$ qiymatni topish uchun abssissa o'qida x_0 nuqtani olib, undan ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, uni grafik bilan kesishgan nuqtasining ordinatasi y_0 ni olamiz, bu son $f(x_0)$ dan iborat bo'ladi (5- rasm).

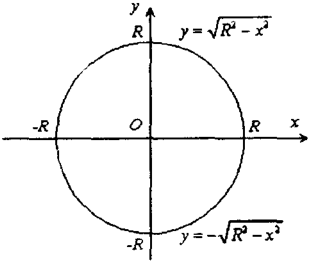


5-rasm.

Funksiyaning grafigi tekislikdagi biror chiziqdan yoki bir nechta nuqtalar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Lekin tekislikdagi har qanday chiziq yoki nuqtalar to'plami funksiyaning grafigi bo'lavermaydi.

Koordinatalar tekisligida biror ℓ chiziq berilgan bo'lsin. Abssissa o'qining har bir nuqtasidan, ordinata o'qiga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq ℓ ni ko'pi bilan bitta nuqtada kesib o'tsa, u holda ℓ chiziq birorta funksiyaning grafigi bo'ladi.

Masalan, $x^2+y^2=R^2$ aylanani olsak, bu aylana hech bir funksiyaning grafigi bo'la olmaydi. Lekin aylananing yuqori yarmi $y=\sqrt{R^2-x^2}$ funksiyaning, quyi yarmi esa $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ funksiyaning grafigi bo'ladi (6-rasm).



6-rasm.

Matematik analizda uchraydigan ba'zi, noyob funksiyalarning berilishi bilan tanishamiz.

3-*misol.* Quyidagicha aniqlangan funksiya *Dirixle funksiyasi* deyiladi.

$$D(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak, $D(0)=1$, $D(1{,}2)=1$, $D(\sqrt{3})=0$, $D(\pi)=0$.

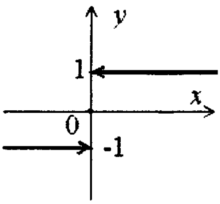
4-*misol.* Yana bir ajoyib funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$signx=\begin{cases} -1, \text{ agar } x<0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x=0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

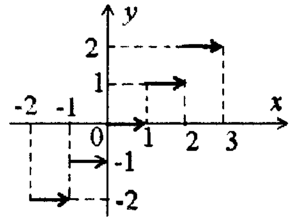
Bu funksiya grafigi 7-rasmda tasvirlangan. Shuningdek, $sign2=1$, $sign\sqrt{3}=1$, $sign0=0$, $sign(-6)=-1$ bo'lishi ravshan.

5-*misol.* $y=[x]$ funksiya grafigi 8-rasmda tasvirlangan. Bu yerdagi $[x]$ belgi, x sonining butun qismini bildiradi.

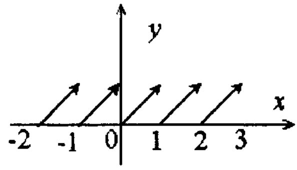
Masalan, $[2{,}5]=2$, $[5]=5$, $[\pi]=3$, $[-1{,}5]=-2$, $[-3{,}7]=-4$.



7-rasm.



8-rasm.



9-rasm.

6-*misol.* $y=\{x\}$ funksiya grafigi 9-rasmda tasvirlangan. Bu yerdagi $\{x\}$ belgi, x sonining kasr qismini bildiradi. Ta'rifga ko'ra $x=[x]+\{x\}$ bo'ladi. $\{x\}=x-[x]$ yozuv hisoblashni osonlashtiradi.

Masalan, $\{2{,}5\}=0{,}5$. $\{5\}=0$, $\{\pi\}=\pi-3$, $\{-1{,}2\}=0{,}8$.

4. Funksiyalar ustida amallar. Aytaylik, X to'plamda aniqlangan ikki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(x)=g(x)$ bo'lsa, u holda bu funksiyalar X to'plamda *o'zaro teng funksiyalar* deyiladi.

Shuningdek, X to'plamda berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'indisi $F_1(x)=f(x)+g(x)$, ayirmasi $F_2(x)=f(x)-g(x)$, ko'paytmasi $F_3(x)=f(x)g(x)$ va bo'linmasi $F_4(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ yana funksiya bo'ladi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+1$ funksiyalar $X=\mathbb{R}$ da berilgan bo'lsa, u holda $F_1(x)=2x^2+1$, $F_2(x)=-1$, $F_3(x)=x^4+x^2$, $F_4(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ lar ham X dagi funksiyalardir.

3-§. Funksiyalarning muhim sinflari

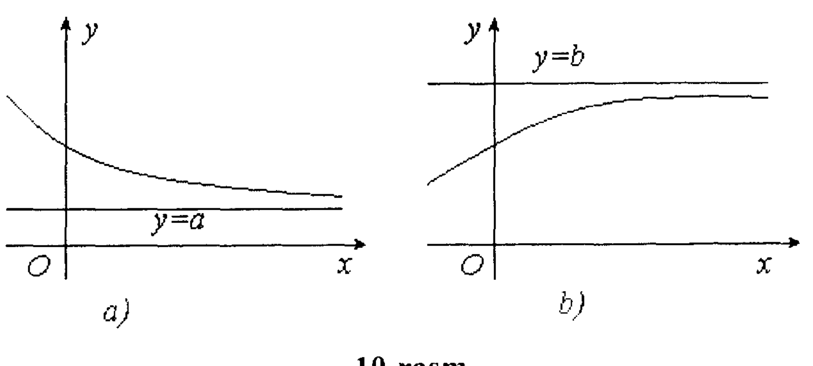
1. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.

1-ta'rif. a) agar $f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x): x\in X\}$ yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *yuqoridan chegaralangan* deyiladi. Demak, shunday b son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in X$ lar uchun $f(x)\leq b$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

b) agar $f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x): x\in X\}$ quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *quyidan chegaralangan* deyiladi. Demak, shunday b son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in X$ lar uchun $f(x)\geq b$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya quyidan chegaralangan bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u shu to'plamda *chegaralangan* funksiya deyiladi.

Yuqoridan chegaralangan funksiyaning grafigi, biror to'g'ri chiziqdan pastda (10, a-rasm), quyidan chegaralangan funksiyaning grafigi biror to'g'ri chiziqdan yuqorida joylashgan bo'ladi. (10, b-rasm).



10-rasm.

3-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)$ yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) *chegaralanmagan* deyiladi.

1-*misol.* $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ funksiya $X=(-\infty;+\infty)$ da chegaralangan, chunki $E(f)=(0;1]$ chegaralangan to'plam.

2- *misol.* $f(x)=sinx$ chegaralangan funksiya.

3-*misol.* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $X=(0;5)$ da chegaralanmagan, chunki $E(f)=(0{,}2;+\infty)$ chegaralanmagan to'plam.

4-*misol.* $f(x)=lgx$ funksiya $X=(0;+\infty)$ da chegaralanmagan, chunki $E(f)= =(-\infty;+\infty)$ chegaralanmagan to'plam.

2. Juft va toq funksiyalar.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $-x\in X$ bo'lsa, u holda X to'plam *simmetrik to'plam* (O nuqtaga nisbatan) deyiladi.

5-*misol.* $X_1=(-a;a)$, $X_2=(-\infty;+\infty)$, $X_3=[-a;a]$ lar simmetrik to'plam bo'ladi.

6-*misol.* $X_4=[-2;3]$, $X_5=(0;+\infty)$ to'plamlar simmetrik to'plam emas.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X simmetrik to'plamda berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *juft funksiya* deyiladi.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ *toq funksiya* deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^6+1$, $f(x)=x^{2n}$ funksiyalar juft, $f(x)=x^3$, $f(x)=sinx$, $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ lar toq funksiyalarga misol bo'ladi.

Shulardan biri, $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ funksiyaning toqligini tekshirib ko'raylik:

$$f(-x)=lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=lg\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

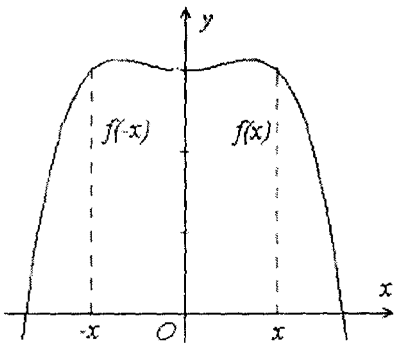
$$=lg\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=lg(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}=-lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

Demak, $f(x)=lg(x+\sqrt{x^2+1})$ toq funksiya ekan.

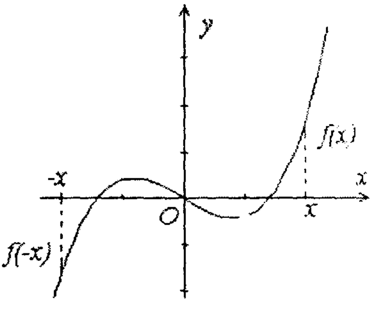
Juft funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ bo'lgani sababli, uning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (11-rasm).

Toq funksiya uchun $f(-x)=-f(x)$ bo'lgani sababli, toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (12-rasm).

Shuning uchun, juft funksiyalar grafigini chizishda, grafikning $x\geq0$ ga mos kelgan qismini chizish kifoya. Grafikning ikkinchi qismi esa, shu chizilgan grafikni ordinata o'qiga nisbatan simmetrik almashtirish yordamida hosil qilinadi.



11-rasm.



12-rasm.

Toq funksiyada ham shunday bo'ladi, faqat simmetrik almashtirish, koordinatalar boshi 0 ga nisbatan olinadi.

Shunday funksiyalar borki, ularni toq ham, juft ham deb bo'lmaydi. Masalan, $f(x)=x^2+x^3$, $g(x)=2+x^5$, $h(x)=tgx+x^2$.

Simmetrik to'plamda aniqlangan ixtiyoriy $f(x)$ funksiyani toq va juft funksiyalarning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

Haqiqatan, $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ belgilashda, birinchi qo'shiluvchi juft, ikkinchi qo'shiluvchi toq funksiya bo'ladi (mustaqil tekshirib ko'ring).

3. Murakkab funksiya. Funksiyalar kompozitsiyasi. Aytaylik, $u=\varphi(x)$ funksiya X sohada aniqlangan va qiymatlar to'plami $E(\varphi)$ bo'lsin. Shuningdek, $y=f(u)$ funksiya $E(\varphi)$ to'plamda aniqlangan bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ funksiya X to'plamda aniqlangan *murakkab funksiya* yoki φ va *f funksiyalarning kompozitsiyasi* deyiladi va $f\circ\varphi$ orqali belgilanadi: $(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))$.

7-*misol.* Agar $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$ bo'lsa, u holda $y=\sqrt{1-x^2}$ funksiya $[-1;1]$ da aniqlangan murakkab funksiya bo'ladi.

8-*misol.* Agar $y=\sqrt{1+u^2}$ va $u=lgx$ bo'lsa, u holda $y=\sqrt{1+\lg^2 x}$ funksiya $(0;+\infty)$ da aniqlangan murakkab funksiya bo'ladi.

9-*misol.* $y=e^{x^2}$ funksiyani $u=x^2$ va $y=e^u$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiya deb qarash mumkin.

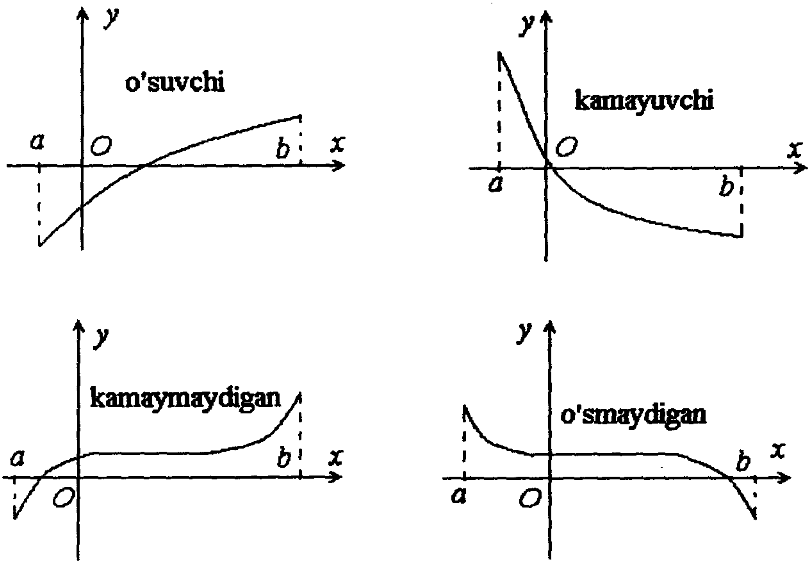
4. Monoton funksiyalar. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsin.

7-ta'rif. Agar X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda funksiya X to'plamda *o'suvchi* deb ataladi.

8-ta'rif. Agar X to'plamda olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamayuvchi* deb ataladi.

9-ta'rif. Agar X to'plamda olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 lar uchun $x_1<x_2$ tengsizlikdan $f(x_1)\le f(x_2)$ (yoki $f(x_1)\ge f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamaymaydigan* (yoki *o'smaydigan*) deyiladi.

O'suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan, o'smaydigan funksiyalar, bitta umumiy nom bilan *monoton funksiyalar* deyiladi. Demak, monoton funksiya deganda, shu to‘rt xil funksiyadan biri tushuniladi (13-rasm).



13-rasm.

10-*misol.* $y=2x+1$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da o‘suvchi, chunki $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda

$$f(x_2)-f(x_1)=2x_2+1-(2x_1+1)=2(x_2-x_1)>0$$

bo‘ladi va $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqadi.

11-*misol.* $y=-x^3$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da kamayuvchi.

Haqiqatan, agar $x_1<x_2$ bo‘lsa, u holda

$$f(x_2)-f(x_1)=-(x_2)^3+(x_1)^3=(x_1)^3-(x_2)^3=(x_1-x_2)((x_1+\frac{x_2}{2})^2+\frac{3}{4}(x_2)^2)<0$$

bo‘ladi va $f(x_1)>f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqadi.

5. Teskari funksiya. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to‘plamda berilgan bo‘lib, $Y=E(f)=\{f(x): x\in X\}$ uning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Endi Y to‘plamni X to‘plamga akslantiruvchi funksiya, ya’ni teskari funksiya bor yoki yo‘qligini tekshiramiz. Y to‘plamdan olingan ixtiyoriy y_o uchun, X to‘plamda $y_o=f(x_o)$

tenglikni qanoatlantiruvchi x_0 soni mavjud. Bunday son bitta yoki bir nechta bo'lishi mumkin.

Agar Y dan olingan har bir y uchun X to'plamda $y=f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi x faqat bitta bo'lsa, u holda $x=\varphi(y)$ funksiyaga ega bo'lamiz. Bu funksiya $y=f(x)$ funksiyaga *teskari funksiya* deyiladi.

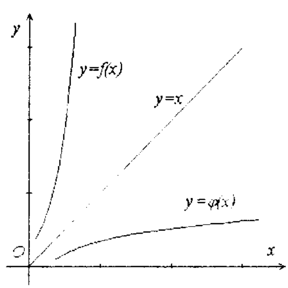
Masalan, $X=Y=(-\infty;+\infty)$ da berilgan $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya $x=y^3$ funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

Ba'zan, $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $x=f^{-1}(y)$ kabi ham belgilanadi.

Agar $x=\varphi(y)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(y)$ funksiyaga teskari funksiya bo'ladi. Shu sababli, bu ikki funksiyani *o'zaro teskari funksiyalar* deyiladi.

Ma'lumki, $y=f(x)$ funksiyada x argument, y funksiya deb yuritiladi. Unga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiyada x va y lar o'rnini almashtirib $y=\varphi(x)$ funksiyaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, bir xil belgilash bo'lganda ham, $y=\varphi(x)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deb qaraladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Agar $f(\varphi(x))=x$ va $\varphi(f(x))=x$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'ladi.



14-rasm.

Masalan, $y=3x-1$ va $y=\frac{1}{3}(x+1)$ berilgan bo'lsin. U holda

$(3\cdot\frac{1}{3}(x+1)-1)=x$ va $\frac{1}{3}((3x-1)+1)=x$

munosabatlarga ko'ra bu ikki funksiya o'zaro teskari funksiyalar ekan.

O'zaro teskari $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalarlarning grafiklari, $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi (14-rasm).

6. Davriy funksiyalar. Funksiyalarning asosiy xossalaridan biri davriylik bo'lib, ko'pchilik bu tushunchani ishlatayotganda funksiyaning aniqlanish sohasiga e'tibor bermaydi. Biz, davriy funksiya tushunchasi o'zining aniqlanish sohasi davriyligi bilan bog'liq holda o'rganilishi zarurligini ta'kidlab qo'yamiz.

Aytaylik, $Y \subset \mathbb{R}$ to'plam berilgan bo'lsin.

10-ta'rif. Agar $l \neq 0$ va har bir $x \in X$ uchun $x-l \in X$ va $x+l \in X$ bo'lsa, u holda X *davriy to'plam* va l uning *davri* deyiladi.

Davriy to'plamning eng kichik musbat davri uning *asosiy davri* deyiladi.

12-*misol.* $X=(-\infty;+\infty)$ davriy to'plam bo'lib, ixtiyoriy $l \neq 0$ soni uning davri bo'ladi.

Haqiqatan, ixtiyoriy $x-l$, $x+l \in (-\infty;+\infty)$ bo'lishi ravshan. Bu to'plamning asosiy davri mavjud emas.

13-*misol.* Barcha butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ham davriy to'plam bo'lib, ixtiyoriy n butun son uning davri bo'ladi. Bu to'plamning asosiy davri $l=1$ ga teng.

14-*misol.* Barcha ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ davriy to'plam bo'ladi. Ixtiyoriy $l \neq 0$ ratsional son uning davri bo'lishi ravshan, chunki har bir x ratsional son uchun $x-l$ va $x+l$ lar ham ratsional son bo'ladi.

Hech bir irratsional son $\mathbb{Q}$ uchun davr bo'la olmaydi. Haqiqatan, agar l irratsional son va x ratsional son bo'lsa, u holda $x-l$ va $x+l$ larning har biri irratsional son bo'ladi, ya'ni $x \pm l \notin \mathbb{Q}$.

Davriy to'plam ta'rifidan ko'rinadiki, agar l soni X to'plamning davri bo'lsa, u holda $\pm l, \pm 2l, \ldots, \pm nl, \ldots$ sonlarning har biri ham X to'plamning davri bo'ladi. Ya'ni, ixtiyoriy $x_0 \in X$ va har bir n natural son uchun $x_0-nl \in X$, $x_0+nl \in X$ bo'ladi.

Bundan davriy to'plamlarning quyidagi xossasi kelib chiqadi.

1°. Davriy to'plamlarda, yetarlicha katta musbat sonlar va yetarlicha kichik manfiy sonlar mavjud.

Demak, yuqoridan yoki quyidan chegaralangan to'plamlar davriy to'plam bo'la olmaydi.

Masalan, $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, $X_1=(a;+\infty)$, $X_2=(-\infty;b)$, $X_3=[a;b]$ to'plamlarning hech biri davriy to'plam emas.

Agar X to'plam l davrli to'plam bo'lib, $x_o \notin X$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy n natural son uchun $x_o \pm n\, l \notin X$ bo'ladi.

Bundan quyidagi xossa kelib chiqadi.

2^o. Agar X davriy to'plam bo'lib, biror x_o son unga tegishli bo'lmasa, u holda unga tegishli bo'lmagan sonlar cheksiz ko'p bo'ladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya berilgan va uning aniqlanish sohasi X bo'lsin.

11-ta'rif. Agar biror $l \neq 0$ son va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $x-l \in X$, $x+l \in X$ bo'lib, $f(x+l)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya *davriy funksiya*, l uning *davri* deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $y=f(x)$ funksiya l davrli davriy funksiya bo'lishi uchun

a) uning aniqlanish sohasi bo'lgan X to'plam l davrli davriy to'plam bo'lishi,

b) ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(x+l)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Agar shu shartlardan birortasi buzilsa, u holda $f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'lmaydi.

15-*misol.* $y=\cos\left(\sqrt{x}\right)^2$ funksiya davriy emas, chunki uning aniqlanish sohasi bo'lgan $D(y)=[0;+\infty)$ to'plam quyidan chegaralanganligi uchun davriy to'plam emas.

16-*misol.* $y=\sin\dfrac{1}{x}$ funksiya davriy emas, chunki uning aniqlanish sohasi bo'lgan $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ to'plam 2^o xossaga ko'ra davriy to'plam emas. Bu to'plamga tegishli bo'lmagan son faqat bitta.

Agar l soni $y=f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda $2l$ son ham uning davri bo'lishi ta'rifdan kelib chiqadi.

Haqiqatan, $f(x+l)=f(x)$ tenglikka ko'ra $f(x+2l)=f((x+l)+l)=f(x+l)=f(x)$ bo'lib, $f(x+2l)=f(x)$ tenglik o'rinli.

Xuddi shu kabi, $-l$ soni ham $y=f(x)$ funksiyaning davri bo'lishini ko'rsatish mumkin: $f(x)=f((x-l)+l)=f(x-l)$.

Bulardan ixtiyoriy $n\in\mathbb{Z}$ uchun $\pm nl$ ham $y=f(x)$ funksiyaning davri bo'lishligi kelib chiqadi.

Davriy funksiyaning eng kichik musbat davri (agar u mavjud bo'lsa), uning *asosiy davri* deyiladi.

17-*misol.* $f(x)=\sin ax$ va $f(x)=\cos(ax+b)$ $(a\neq 0)$ funksiyalarning davriy ekanini ko'rsating va ularning asosiy davrini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)=(-\infty;+\infty)$ davriy to'plam va ixtiyoriy l soni bu to'plamning davri bo'ladi.

Endi, $f(x+l)=f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi l ni topamiz. Shartga ko'ra, ixtiyoriy x uchun $\sin a(x+l)=\sin ax$ bo'lishi kerak. Bundan, $\sin(ax+al)-\sin ax=0 \Rightarrow 2\cos(ax+\frac{al}{2})\sin\frac{al}{2}=0$ kelib chiqadi. Oxirgi tenglik x ga bog'liq bo'lmagan holda bajarilishi uchun $\sin\frac{al}{2}=0$ bo'lishi shart.

Buning yechmi bo'lgan $\frac{al}{2}=n\pi$, $l=\frac{2n\pi}{a}$, $n\in\mathbb{Z}$ sonlarning har biri berilgan funksiyaning davri bo'ladi. Bularni tekshirib, $l=\frac{2\pi}{|a|}$ son $f(x)=\sin ax$ funksiyaning asosiy davri bo'lishini aniqlaymiz.

Shu usulda, $f(x)=\cos(ax+b)$ funksiyaning ham asosiy davri $l=\frac{2\pi}{|a|}$ bo'lishi ko'rsatiladi.

II bobga doir test savollari

1. Funksiya qanday usullarda beriladi?

A) faqat analitik usulda;

B) faqat grafik usulda;

C) faqat jadval usulda;

D) asosan analitik, grafik va jadval usullarda.

2. Qanday funksiyalar monoton funksiya deyiladi?

A) yuqoridan chegaralangan funksiyalar;

B) quyidan chegaralangan funksiyalar;

C) chegaralangan funksiyalar;

D) o‘suvchi, kamayuvchi, o‘smovchi va kamaymovchi funksiyalar.

3. Quyidagi funksiyalarning qaysilari $(-\infty;+\infty)$ da o‘suvchi?

1) $y=2x-1$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^3$; 4) $y=x^4$.

A) 1,2; B) 2,3; C) 1,4; D) 1,3;

4. Qanday funksiyalar juft funksiya deyiladi?

A) ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ juft funksiya deyiladi;

B) ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ juft funksiya deyiladi;

C) argument juft darajada qatnashgan funksiya juft funksiya deyiladi;

D) kamayuvchi funksiya juft funksiya deyiladi.

5. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to‘g‘ri?

A) Toq funksiyaning grafigi abssissa o‘qiga nisbatan simmetrik;

B) Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik;

C) Toq funksiyaning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik;

D) Juft funksiyaning grafigi abssissa o‘qiga nisbatan simmetrik.

6. $y=\sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}$ **funksiyaning aniqlanish sohasini toping.**

A) (-∞;-6); B) [-6; 4]; C) [-4; 6]; D) (4; +∞).

7. $y=\arcsin\frac{1-4x}{5}$ **funksiyaning aniqlanish sohasini toping.**

A) [4; 5]; B) [-1; 3/2];
C) [-3/2; 1]; D) [2; 3].

8. Juft funksiyani aniqlang.

1) $f(x)=x^3\sin x$; 2) $f(x)=x^2\cos x$; 3) $f(x)=x+x^3$.

A) 1,2; B) 1,3; C) 2,3; D) Barchasi.

9. Toq funksiyani aniqlang.

1) $f(x)=\cos x$; 2) $f(x)=x^2\sin x$; 3) $f(x)=x^2+1$.

A) 1; B) 3; C) 2; D) Barchasi.

10. Quyidagi nuqtalarning qaysi biri $f(x)=x^2-2x+3$ funksiyaning grafigiga tegishli?

A) (-1;0); B) (2;5); C) (-2;3); D) (3;6).

11. $f(x)=\frac{\sqrt{8+x}}{x+2}$ **funksiyaning aniqlanish sohasini toping.**

A) (–∞;8); B) (–∞;8];
C) (–∞;–2)U(–2;8); D) [–8;–2)U(–2;+∞).

12. $y=x^2-8x+7$ **funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.**

A) (–∞;+∞); B) [2;+∞);
C) [–9;+∞); D) [9;+∞).

13. $y=\frac{3+4x-x^2}{2}$ **funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.**

A) $(0;+\infty)$; B) $(-\infty;1,5]$;
C) $[-0,5;+\infty)$; D) $(-\infty;3,5]$.

14. $y=5\sin^2 x$ funksiyaning eng kichik musbat davrini toping.

A) 2π; B) π; C) $\pi/5$; D) $2\pi/3$.

15. $y=2\sin 2x$, $y=\cos(x-1)$, $y=\text{tg}\,\frac{x}{2}$ funksiyalarning musbat eng kichik umumiy davrini toping.

A) π; B) 3π; C) 2π; D) $\pi/2$.

16. Quyidagi funksiyalarining qaysi biri aniqlanish sohasida kamayuvchi?

A) $y=1-x^3$; B) $y=2x-7$;
C) $y=2^x$; D) $y=2x-x^2$.

17. Quyidagilardan qaysi biri $y=\frac{3}{2-x}-1$ funksiyaga teskari funksiya?

A) $y=x-2$; B) $y=2-\frac{3}{x+1}$;
C) $y=\frac{3}{x-2}+1$; D) $y=\frac{x-2}{3}+1$.

18. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri noto‘g‘ri?

A) Har qanday funksiyaning kvadrati quyidan chegaralangan funksiya bo‘ladi;

B) Ikkita chegaralangan funksiyaning ko‘paytmasi chegaralangan funksiya bo‘ladi;

C) Chegaralangan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari har doim mavjud;

D) Chekli sondagi chegaralangan funksiyalarning yig'indisi chegaralangan funksiya bo'ladi.

19. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri?

A) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda o'suvchi bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'ladi;

B) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda o'suvchi bo'lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'ladi;

C) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda o'suvchi bo'lsa, u holda $f(x)$-$g(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'ladi;

D) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda kamayuvchi bo'lsa, u holda $f(x)$-$g(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'ladi.

20. Davriy funksiyalar uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri?

A) Har qanday davriy funksiyaning asosiy davri mavjud;

B) Ikkita davriy funksiyaning yig'indisi davriy funksiya bo'ladi.

C) Har qanday davriy funksiya chegaralangandir;

D) Har qanday davriy funksiyaning aniqlanish sohasi chegaralanmagan to'plamdir.

21. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri (0;1) intervalda chegaralanmagan:

A) $y=x^2+x$; B) $y=\sin x$;

C) $y=\cos \pi x$; D) $y=1+1/x$?

III BOB. SONLI KETMA-KETLIKLAR. LIMITLAR NAZARIYASI

1-§. Ketma-ketlik va uning limiti

Ba'zan natural sonlar to'plami, natural sonlar ketma-ketligi deb ham ataladi. Shuning uchun, quyidagi ta'rifni kiritish tabiiy.

1-ta'rif. Aniqlanish sohasi barcha natural sonlar to'plami N dan iborat $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlaridan tuzilgan

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots \qquad (1)$$

ifoda *sonli ketma-ketlik* deyiladi.

Agar $x_1=f(1)$, $x_2=f(2)$, ... , $x_n=f(n)$, ... belgilashlar kiritsak, u holda (1) ifoda

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

ko'rinishni oladi. Undagi x_1, x_2, ... sonlar ketma-ketlikning hadlari, x_n esa ketma-ketlikning umumiy hadi deyiladi va (2) ketma-ketlik qisqacha $\{x_n\}$ orqali belgilanadi.

Ketma-ketlikni quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

Agar har bir natural n songa biror qonuniyat yoki qoidaga binoan aniq bitta x_n son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda x_1, x_2, ... , x_n, ... sonli ketma-ketlik berilgan deyiladi.

Demak, ketma-ketlik $\mathbb{N}$ da berilgan funksiya ekan.

1-*misol.* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, bunda $x_n=f(n)=\frac{1}{n}$.

2-*misol.* $2, 4, \ldots, 2n, \ldots$, bunda $x_n=f(n)=2n$.

3-*misol.* $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$, bunda $x_n=f(n)=(-1)^n$.

4-*misol.* $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ \frac{1-(-1)^n}{2}\ \ldots$, bunda $x_n=f(n)=\frac{1-(-1)^n}{2}$.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_o\in\mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $n>n_0$ shart bilan olingan barcha n larda $|x_n-a|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

Odatda, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyish o'rniga, a soni x_n o'zgaruvchi miqdorning limiti, deb ham yuritiladi. Aytilganlar qisqacha,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \to a$ ko'rinishlarda belgilanadi.

Ilgari eslatilganimizdek, $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ interval a nuqtaning ε-atrofi deyiladi. Ma'lumki,

$|x_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x_n-a<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$

Bunday belgilashlardan foydalanib, ketma-ketlik limitining boshqacha ta'rifini keltiramiz.

3-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy ε-atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari yotsa, u holda a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi.

4-ta'rif. Limitga ega bo'lgan ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

Limitga ega bo'lmagan ketma-ketlik *uzoqlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

5-*misol.* Umumiy hadi $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlik limiti 1 ekanligini ko'rsatamiz:

$$|x_n-1|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Agar $n_0>[\dfrac{1}{\varepsilon}]-1$ deb olsak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun, barcha $n>n_0$ larda $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1.$

6-*misol.* Umumiy hadi $x_n=2n$ ko'rinishda bo'lgan ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi.

Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib uning limiti a son bo'lsin.

Ta'rifga ko'ra qanday kichik $\varepsilon>0$ son olmaylik, shunday n_0 son mavjud bo'lib, $n>n_0$ bo'lgan barcha n larda $|2n-a|<\varepsilon$ bo'lishi kerak.

$|2n-a|<\varepsilon \Rightarrow 2n-a<\varepsilon \Rightarrow n<\dfrac{a+\varepsilon}{2}$.

Demak, bu tengsizlik $[\dfrac{a+\varepsilon}{2}]$ sondan katta bo‘lgan natural n lar uchun o‘rinli bo‘lmasligi kelib chiqadi. Shuning uchun, $\{2n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi.

2-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

1°. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $a>p$ (mos ravishda $a<q$) bo‘lsa, u holda biror raqamdan boshlab, barcha n larda $x_n>p$ (mos ravishda $x_n<q$) bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik, $a>p$ bo‘lsin. Endi, $0<\varepsilon<a-p$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib biror ε son olamiz. Haqiqiy sonlarning zichlik xossasiga ko‘ra bunday ε son mavjud.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ bo‘lganidan tanlangan ε son uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo‘lib, barcha $n>n_0$ larda $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ bo‘ladi. Endi, $\varepsilon<a-p$, ya’ni $a-\varepsilon>p$ bo‘lib, bulardan $x_n>p$ kelib chiqadi.

Xuddi shu kabi, $a<q$ hol ham isbotlanadi.

Natija. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $a>0$ (mos ravishda $a<0$) bo‘lsa, u holda biror raqamdan boshlab, barcha n lar uchun $x_n>0$ (mos ravishda $x_n<0$) bo‘ladi.

2^0. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi, ya’ni shunday c son mavjud bo‘lib, barcha n lar uchun $|x_n|\le c$ bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ bo‘lsin. Qanday $\varepsilon>0$ son olmaylik, biror $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo‘lib, barcha $n>n_0$ lar uchun $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Endi, $|x_1|$, $|x_2|$, ..., $|x_{n_0}|$, $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$ sonlarning eng kattasini c desak, ixtiyoriy $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $|x_n|\le c$ kelib chiqadi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan.

3^0. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega.

Isboti. Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita a va b limitlarga ega bo‘lib, $a<b$ bo‘lsin. Haqiqiy sonlar to‘plamining

zichlik xossasiga ko'ra shunday r son mavjud bo'lib, $a<r<b$ bo'ladi.

Endi, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $a<r$ bo'lgani uchun 1^0 xossaga binoan shunday bir $n_1\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n<r$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Shuningdek, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$ va $b>r$ bo'lgani uchun shunday bir $n_2\in\mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $n>n_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n larda $x_n>r$ bo'ladi.

Agar $n_o=\max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda $n>n_0$ bo'lgan barcha n larda birdaniga $x_n<r$ va $x_n>r$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Demak, limit yagona bo'ladi.

3-§. Tenglik va tengsizlikda limitga o'tish

1^o. Agar barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n=y_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$ bo'lsa, u holda $a=b$ bo'ladi.

Isboti limitning yagonaligidan kelib chiqadi.

2^o. Agar barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n\le y_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ bo'lsa, u holda $a\le b$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $a>b$ bo'lsin. Bu a va b sonlar orasida biror r son olamiz: $a>r>b$. Endi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $a>r$ bo'lgani uchun shunday bir $n_1\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_1$ bo'lgan barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n>r$ bo'ladi.

Xuddi shuningdek, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ va $b<r$ bo'lgani uchun shunday bir $n_2\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_2$ bo'lgan barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $y_n<r$ bo'ladi.

Agar $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n\in\mathbb{N}$ larda, bir vaqtda $y_n<r$ va $x_n>r$

tengsizliklar o'rinli bo'lib qoladi. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Demak, $a\le b$.

3°. (Oraliq ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema) Agar barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n\le y_n\le z_n$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ham mavjud bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$ bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_1\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ bo'ladi.

Xuddi shu kabi, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ dan, shunday $n_2\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_2$ bo'lgan barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar $n_o=\max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n\in\mathbb{N}$ larda yuqoridagi tengsizliklardan $a-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\varepsilon$, ya'ni $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$ kelib chiqadi. Bu esa, $\{y_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchisi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$ ekanini bildiradi.

4-§. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari

1. Cheksiz kichik miqdorlar. Aytaylik, $\{\alpha_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=0$ bo'lsa, α_n *cheksiz kichik miqdor* yoki qisqacha, *cheksiz kichik* deyiladi. Shuningdek, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi.

Cheksiz kichik miqdor, limiti 0 ga teng, yaqinlashuvchi ketma-ketlikning katta raqamli hadlari deb qaralishi mumkin.

Buni quyidagicha ham ta'riflasa bo'ladi:

$\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n>n_0$ larda $|\alpha_n|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, α_n *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

Masalan, $\alpha_n=\frac{1}{n^2}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Haqiqatan, $\forall\ \varepsilon>0$ uchun $|\alpha_n|=\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ munosabatlarga ko'ra, $n_o=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ deb olsak, u holda $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n larda $\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xususan, $\varepsilon=0{,}01$ desak, $n_0=\left[\frac{1}{\sqrt{0{,}01}}\right]=10$; $\varepsilon=0{,}0001$ desak, $n_0=\left[\frac{1}{\sqrt{0{,}0001}}\right]=100$ bo'ladi.

2. Ketma-ketlik, uning limiti va cheksiz kichik miqdor orasidagi bog'lanish. Aytaylik, $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ bo'lsin. Limit ta'rifiga asosan, $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_o$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $|x_n-a|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu yerda $x_n-a=\alpha_n$ belgilashni kiritsak, $|\alpha_n|=|x_n-a|<\varepsilon$ bo'lib, α_n cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Agar x_n va biror a son orasidagi $\alpha_n=x_n-a$ ayirma cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $|x_n-a|=|\alpha_n|<\varepsilon$ bo'lib, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'ladi: $\alpha_n=x_n-a \Leftrightarrow x_n=a+\alpha_n$.

Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. Biror a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lishi uchun, x_n had a son bilan birorta cheksiz kichik miqdor α_n ning yig'indisi ko'rinishida yozilgan bo'lishi zarur va yetarli: $x_n=a+\alpha_n$.

Masalan, $x_n=\dfrac{2n^2+1}{n^2}$ bo'lsa, uni $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$ kabi yozish mumkin. Bu yerda: $\alpha_n=\dfrac{1}{n^2}$ cheksiz kichik. Bundan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$ kelib chiqadi.

3. Cheksiz kichik miqdorlar haqidagi lemmalar. Kelgusida quyidagi lemmalardan foydalanmiz.

1-lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning yig'ndisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Isboti. Isbotni ikkita cheksiz kichik miqdorlar uchun keltiramiz.

Aytaylik, α_n va β_n lar cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin. U holda $\gamma_n=\alpha_n+\beta_n$ ham cheksiz kichik miqdor ekanligini ko'rsatamiz.

Cheksiz kichik miqdorlar ta'rifiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n=0$, ya'ni $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday $n_1\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n>n_1$ lar uchun $|\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi.

Xuddi shu kabi, shunday bir $n_2\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n>n_2$ lar uchun $|\beta_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi.

Agar $n_0=\max\{n_1, n_2\}$ deb olsak, u holda barcha $n>n_0$ lar uchun bir vaqtda $|\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ va $|\beta_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bundan $n>n_0$ larda

$$|\gamma_n|=|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

kelib chiqadi. Bu esa, γ_n miqdorning cheksiz kichikligini ko'rsatadi.

Shu kabi, chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'lishini ko'rsatishimiz mumkin.

2-lemma. Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdorning ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, x_n chegaralangan miqdor, α_n cheksiz kichik miqdor bo'lsin. U holda $\gamma_n = x_n\alpha_n$ ni cheksiz kichik miqdor bo'lishini ko'rsatamiz.

Berilishiga ko'ra x_n chegaralangan miqdor bo'lgani uchun shunday $c>0$ son mavjud bo'lib, barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $|x_n|<c$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shuningdek, α_n cheksiz kichik bo'lganligi sababli, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ ga mos ravishda shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n>n_0$ lar uchun $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{c}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, barcha $n>n_0$ lar uchun $|\gamma_n|=|x_n\alpha_n|=|x_n|\,|\alpha_n|<c\cdot\frac{\varepsilon}{c}=\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa, γ_n miqdorning cheksiz kichikligini ko'rsatadi.

5-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar

Aytaylik,

$\{x_n\} : x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ va $\{y_n\} : y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$

ketma-ketliklar berilgan bo'lsin.

Ushbu

$x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n, \ldots,$

$x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_n-y_n, \ldots$

$x_1\cdot y_1, x_2\cdot y_2, \ldots, x_n\cdot y_n, \ldots$

$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots\ (y_n\neq 0, n=1, 2, \ldots)$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati deyiladi va $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ kabi belgilanadi.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{x_n \pm y_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsin. 1-teoremaga asosan $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ bo'ladi, bu yerda: α_n va β_n lar cheksiz kichik miqdorlar. Bularga ko'ra

$$x_n + y_n = a + \alpha_n + (b + \beta_n) = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$$

bo'ladi. Agar $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ deb olsak, 1-lemmaga asosan γ_n ham cheksiz kichik miqdor bo'ladi. U holda $x_n + y_n = a + b + \gamma_n$ dan 1-teoremaga asosan $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ munosabatga kelamiz.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$$

tenglik ham shu kabi isbotlanadi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{x_n y_n\}$ ketma ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Oldingi teorema isbotidagi belgilashlarga ko'ra,

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n)$$

hosil bo'ladi. Endi, 1- va 2-lemmalarga asosan $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$ miqdor cheksiz kichik bo'ladi. Bundan $x_n y_n = ab + \gamma_n$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

ekanligi kelib chiqadi.

Natija. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{c \cdot x_n\} = c \cdot \{x_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim_{n\to\infty}\{c \cdot x_n\} = c \cdot \lim_{n\to\infty}\{x_n\}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, 3-teoremada $y_n = c$ deb olsak, oxirgi tenglik kelib chiqadi.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b\neq 0$ bo'lsin. Ma'lumki, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ (α_n, β_n cheksiz kichik miqdorlar) kabi yozib olish mumkin. U holda

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

bo'ladi. Agar $\gamma_n = \dfrac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$ belgilashni kiritsak, u holda 1- va 2-lemmalarga asosan γ_n cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki $\dfrac{1}{b(b+\beta_n)}$ chegaralangan miqdor, $(b\alpha_n - a\beta_n)$ esa, cheksiz kichik miqdor.

Bundan $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \gamma_n$, ya'ni $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} + \gamma_n$ kelib chiqadi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

6-§. Cheksiz katta miqdorlar. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanish

4-§ da cheksiz kichik miqdorlar va ularning xossalarini ko'rib chiqqan edik. Bu yerda cheksiz katta miqdorlar bilan tanishamiz.

Aytaylik, $\{x_n\}$ biror ketma-ketlik bo'lsin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy katta $\Delta>0$ son uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha

$n\in\mathbb{N}$ larda $|x_n|>\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_n *cheksiz katta miqdor*, $\{x_n\}$ esa, *cheksiz katta ketma-ketlik* deyiladi.

Bunday hol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ kabi yoziladi.

Agar biror $n_0\in\mathbb{N}$ son topilib, barcha $n>n_0$ larda $x_n>\Delta$ ($x_n<-\Delta$) bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$) ko'rinishida yoziladi.

1-*misol.* $x_n=n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=+\infty$.

2-*misol.* $x_n=-2n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n)=-\infty$.

3-*misol.* $x_n=(-n)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n)^n=\infty$.

4-*misol.* Umumiy hadi $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}\cdot n$ bo'lgan ketma-ketlik a) chegaralangan; b) cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladimi?

Yechish. a) bu ketma-ketlik chegaralanmagan. Haqiqatan ham, har qanday $\Delta>0$ son uchun shunday $n=2([\Delta]+1)$ mavjudki, $x_n>\Delta$ bo'ladi;

b) ammo bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lmaydi. Chunki $\Delta>0$ son va ixtiyoriy n_0 uchun shunday $n=2n_0+1$ mavjudki, $x_n=0<\Delta$ bo'ladi.

Bu misoldan har qanday chegaralanmagan ketma-ketlik ham cheksiz katta ketma-ketlik bo'lavermasligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar x_n cheksiz katta miqdor bo'lsa, u holda $\alpha_n=\dfrac{1}{x_n}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\varepsilon>0$, biror kichik son bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. Demak, shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son topiladiki, barcha $n>n_0$ lar uchun $|x_n|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ bo'ladi. Bundan, $|\alpha_n|=\dfrac{1}{|x_n|}<\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa, α_n ning cheksiz kichik miqdor ekanligini bildiradi.

3-teorema. Agar α_n cheksiz kichik miqdor va $\alpha_n \neq 0$ ($n=1,2,\ldots$) bo'lsa, u holda $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ cheksiz katta miqdor bo'ladi (mustaqil isbotlang).

7-§. Aniqmasliklar

Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bo'lsa, u holda

$$\{x_n \pm y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\ (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0)$$

ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rib o'tdik.

Endi, yuqoridagi shartlarning ba'zilari bajarilmay qolgan hollarda ham yaqinlashish bor yoki yo'qligini ko'rib o'tamiz.

1. « $\dfrac{0}{0}$ » **ko'rinishidagi aniqmaslik.** Ba'zan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lgan holda ham $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning xarakteriga qarab, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ ni topish mumkin.

Misollar. a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ va

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \text{ bo'ladi;}$$

b) $x_n = \dfrac{1}{n^3}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ va

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ bo'ladi;}$$

d) $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ va

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1$ bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinib turibdiki, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ bo'lgan holda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ haqida bir qiymatli fikr aytish mumkin emas. Shu sababli ham bu holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik « $\frac{0}{0}$ » ko'rinishidagi *aniqmaslik* deyiladi. Aniqmaslikning limitini topish *aniqmaslikni ochish* deb ham aytiladi.

2. « $\frac{\infty}{\infty}$ » **ko'rinishidagi aniqmaslik.** Ba'zan $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$ bo'lgan holda ham $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning xarakteriga qarab $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ ni hisoblash mumkin. Bu holda, yuqoridagi kabi, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma-ketlik « $\frac{\infty}{\infty}$ » ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.

a) $x_n=n^2+1$, $y_n=2n^2-n$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(2n^2-n)=\lim\limits_{n\to\infty}n(2-\frac{1}{n})=+\infty$ va

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

bo'ladi.

3. «$0\cdot\infty$» **ko'rinishidagi aniqmaslik.** Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$ bo'lsa, u holda, $x_ny_n=\dfrac{x_n}{\frac{1}{y_n}}$ yoki $x_ny_n=\dfrac{y_n}{\frac{1}{x_n}}$ almashtirishlar yordamida, «$0\cdot\infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik «$\dfrac{0}{0}$» yoki «$\dfrac{\infty}{\infty}$» ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltirib yechladi.

d) $x_n=\dfrac{1}{n^3+1}$, $y_n=n^3+2n$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+2n)=+\infty$ va

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=1 \text{ bo'ladi.}$$

Bulardan tashqari, «$\infty-\infty$», «0^0», «1^∞», «∞^0» ko'rinishidagi aniqmasliklar mavjud. Bunday aniqmasliklarni ham «$\dfrac{0}{0}$» yoki «$\dfrac{\infty}{\infty}$» ko'rinishidagi aniqmasliklarga keltirib yechiladi.

8-§. Monoton ketma-ketliklar va ularning limitlari

Aytaylik, biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n\in\mathbb{N}$ uchun $x_n<x_{n+1}$ $(x_n\leq x_{n+1})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ *o'suvchi (kamaymaydigan) ketma-ketlik* deyiladi.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $x_n>x_{n+1}$ $(x_n\geq x_{n+1})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ *kamayuvchi (o'smaydigan) ketma-ketlik* deyiladi.

O'suvchi, kamayuvchi, kamaymaydigan va o'smaydigan ketma-ketliklar, umumiy nom bilan *monoton ketma-ketliklar* deb yuritiladi.

O'suvchi va kamaymaydigan ketma-ketliklar *keng ma'noda o'suvchi* ketma-ketlik deyiladi.

Kamayuvchi va o'smaydigan ketma-ketliklar *keng ma'noda kamayuvchi* ketma-ketlik deyiladi.

1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ limitga ega, agar yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsin. U holda $\{x_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ to'plam ham yuqoridan chegaralangan bo'ladi va shuning uchun, uning aniq yuqori chegarasi mavjud. Uni a orqali belgilaymiz: $a=\sup\{x_n\}$. Endi a ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Aniqlanishiga ko'ra, a son $\{x_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lganidan, barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $x_n\le a$ bo'ladi. Shuningdek, har bir $\varepsilon>0$ uchun shunday n' son mavjud bo'lib, $x_{n'}>a-\varepsilon$ bo'ladi. $\{x_n\}$ o'suvchi ketma-ketlik bo'lganidan va yuqoridagilardan, barcha $n>n'$ larda $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Demak, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n= a$ bo'ladi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Aytaylik, $\{x_n\}$ o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. U holda har bir $\Delta>0$ son uchun shunday $n'\in\mathbb{N}$ son mavjudki, $x_{n'}>\Delta$ bo'ladi. Shuningdek, barcha $n>n'$ lar uchun $x_n>x_{n'}$ ekanligi va yuqoridagilarga asosan, $x_n>\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Demak, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

Shunday qilib, monoton o'suvchi ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ ekan.

Yuqoridagi usul bilan quyidagi teoremani ham isbotlash mumkin.

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ limitga ega, agar quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ bo'ladi.

1-*misol.* $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ ketma-ketlikning limitini toping.

Yechish. $x_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2^n}{n!}\cdot\dfrac{2}{n+1}=\dfrac{2}{n+1}\cdot x_n$

munosabatdan, barcha $n>1$ larda $x_{n+1}<x_n$ bo'lishi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek, barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n=\dfrac{2^n}{n!}>0$. Shu sababli, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega, uni a deb olamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ munosabatdan $a=0\cdot a$ va $a=0$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

Shu usulda, ixtiyoriy a uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-*misol.* Ixtiyoriy $c>0$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ ekanligini ko'rsating.

Yechish. $x_n=\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{n \text{ ta ildiz}}$ belgilashni kiritamiz.

Ko'rinib turibdiki, $x_1=\sqrt{c}$, $x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$, . . . bo'lib, har gal $\sqrt{c}$ soni eng ichkari ildiz ostiga qo'shilib boryapti. Demak, barcha $n\in\mathbb{N}$ larda $x_n<x_{n+1}$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi.

Endi matematik induksiya metodi yordamida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Ravshanki, $x_1=\sqrt{c}<\sqrt{c}+1$.

$n=k$ uchun $x_k<\sqrt{c}+1$, deb faraz qilib, $x_{k+1}<\sqrt{c}+1$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan,

$$x_{k+1}=\sqrt{c+x_k}<\sqrt{c+\sqrt{c}+1}<\sqrt{c+2\sqrt{c}+1}=\sqrt{c}+1.$$

Demak, barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $x_n<\sqrt{c}+1$. 7-teoremaga asosan $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega. Uni a deb olamiz: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

U holda $x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$, tenglikdan $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\sqrt{c+\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ bo'lib, $a=\sqrt{c+a}$ kelib chiqadi. Endi $a>0$ ekanligini hisobga olib, bu tenglamani yechamiz: $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ bo'ladi.

9-§. *e* soni

Umumiy hadi $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ko'rinishda bo'lgan ketma-ketlikning limiti mavjud ekanini isbotlaymiz.

Buning uchun, umumiy hadi $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni ko'rib chiqamiz. Ushbu

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)<$$

$$<\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n<1$$

munosabatlardan $x_n<x_{n-1}$ kelib chiqadi. Bu yerda Bernulli tengsizligiga ko'ra o'rinli bo'lgan $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$ tengsizlikdan foydalandik.

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi va $x_n>0$ bo'lganligi uchun u limitga ega. Bu limitni e orqali belgilaymiz.

Shuningdek,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bo'lib, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning ham limiti e ekanligi kelib chiqadi. Bu e soni irratsional son bo'lib, uning taqribiy qiymati

$$e \approx 2{,}71828182845904590...$$

ga teng.

10-§. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi

Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo'lib,

1. $\{x_n\}$ o'suvchi, $\{y_n\}$ kamayuvchi.
2. barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $x_n<y_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $x_n<y_n\le y_1$ bo'ladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Shu sababli, $\{x_n\}$ limitga ega: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

Xuddi shu kabi, $\{y_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi, quyidan chegaralangan va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=c'$ limit mavjud. Qolaversa,

$$c'-c=\lim_{n\to\infty}y_n-\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0.$$

Bundan $c=c'$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$, ... , $[a_n;b_n]$, ... segmentlarning har biri o'zidan oldingisining qismi, ya'ni

$$[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots$$

bo'lsa, u holda ular *ichma-ich joylashgan segmentlar* ketma-ketligi deyiladi.

Quyidagi tasdiq, *ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi* deb yuritiladi.

Natija. Agar ichma-ich joylashgan $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,. . ., $[a_n;b_n]$,. . . segmentlar ketma-ketligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ bo'lsa, u holda segmentlarning chap uchlaridan tuzilgan $\{a_n\}$ va o'ng uchlaridan tuzilgan $\{b_n\}$ ketma-ketliklar bitta limitga ega va bu limit barcha segmentlarga tegishli yagona nuqta bo'ladi.

Isboti. 1) $\{a_n\}$ o'suvchi, $\{b_n\}$ kamayuvchi, 2) barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $a_n<b_n$, 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ bo'lganligidan 9-teoremaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ bo'ladi. Bu limitni c deb olsak, barcha $n\in\mathbb{N}$ lar uchun $a_n\leq c\leq b_n$ kelib chiqadi.

11-§. Yaqinlashish prinsipi

1. Qismiy ketma-ketlik. Aytaylik, $\{x_n\}$ biror ketma-ketlik bo'lsin. Natural sonlardan $n_1<n_2<\ldots<n_k\ldots$ shartlar bilan n_1, n_2, ..., n_k, ... ketma-ketlik olamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shu natural sonlar ketma-ketligiga mos hadlarini olib tuzilgan $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ ketma-ketlikni, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *qismiy ketma-ketligi* deyiladi va $\{x_{n_k}\}$ kabi belgilanadi.

Masalan, 1, 4, 9, 16, 25,. . ., ya'ni, $x_n=n^2$ formula bilan berilgan ketma-ketlik uchun quyidagi ketma-ketliklarning har biri qismiy ketma-ketlik bo'ladi.

a) $1, 9, 25, \ldots, (2k-1)^2, \ldots$,

b) $4, 16, 36, \ldots, (2k)^2, \ldots$,

c) $4, 16, 64, 256, \ldots, (2^k)^2, \ldots$.

Qismiy ketma-ketlik limiti quyidagi xossaga ega.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo'lsa, u holda $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlik ham a limitga ega bo'ladi.

Umuman olganda, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti yo'qligidan uning qismiy ketma-ketliklari ham limitga ega emas, degan fikr kelib chiqmaydi, ya'ni shunday ketma-ketliklar borki, ularning limiti yo'q bo'lsa-da, uning ba'zi qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'ladi.

Masalan, -1, 1, -1,. . . , ya'ni, $x_n=(-1)^n$ kabi berilgan ketma-ketlik limitga ega emas. Uning

a) $x_1=-1, x_3=-1,\dots, x_{2n-1}=-1,\dots, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=-1,$

b) $x_2=1, x_4=1,\dots, x_{2n}=1,\dots, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=1$

qismiy ketma-ketliklari limitga ega.

Umuman, qanday ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin? – degan savolga quyidagi lemma javob beradi.

2. Bolsano-Veyershtrass lemmasi. Ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlikdan har doim, yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin.

Isboti. Aytaylik, $x_1, x_2, x_3,\dots, x_n,\dots$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsin. Demak, uning barcha hadlari tegishli bo'lgan $[a_1;b_1]$ segment mavjud bo'ladi. Bu segmentni teng ikki qismga ajratamiz: $[a_1;\frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2};b_1]$. Hosil bo'lgan segmentlarning birida (yoki ikkalasida ham) ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari bor bo'ladi. Segmentlardan, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari borini (ikkalasida ham bo'lganda, masalan, chapdagisini) $[a_2;b_2]$ orqali belgilaymiz. O'z navbatida, $[a_2;b_2]$ segmentni teng ikki qismga ajratamiz. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari borini $[a_3;b_3]$ orqali belgilaymiz. Va hokazo, shu jarayonni davom ettirib, ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligiga ega bo'lamiz:

$[a_1;b_1], [a_2;b_2],\dots, [a_n;b_n],\dots$

Ko'rinib turibdiki, $[a_k;b_k]$ segmetning uzunligi $b_k-a_k=\dfrac{b_1-a_1}{2^{k-1}}$ bo'lib, $k\to\infty$ da nolga intiladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra $\{a_k\}$ va $\{b_k\}$ ketma-ketliklar umumiy bir c limitga ega bo'ladi, ya'ni

$\lim\limits_{n\to\infty} a_k=\lim\limits_{n\to\infty} b_k=c.$

Endi, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $[a_1;b_1]$ dagi istalgan bir hadini olib, uni x_{n_1} orqali, $[a_2;b_2]$ dagi, x_{n_1} hadidan keyin kelgan biror hadini olib, x_{n_2} orqali, $[a_3;b_3]$ dagi x_{n_1}, x_{n_2} hadlaridan keyin kelgan biror hadni olib, x_{n_3} orqali belgilaymiz. Shu jarayonni davom ettirib, $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ qismiy ketma-ketlikni hosil qilamiz.

Tanlanishiga ko'ra, x_{n_k} lar uchun $a_k\le x_{n_k}\le b_k$, $k=1, 2, \ldots$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, $k\to\infty$ da $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=c$ kelib chiqadi. Lemma isbot bo'ldi.

3. Ketma-ketlikning quyi va yuqori limitlari. Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan limiti a bo'lgan qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin bo'lsa, u holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *qismiy limiti* deyiladi.

2-ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limitlari ichida eng kattasi uning *yuqori limiti* deyiladi va $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ orqali belgilanadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy limitlari ichida eng kichigi uning *quyi limiti* deyiladi va $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ orqali belgilanadi.

1-*misol.* $x_n=(-1)^n$: $-1, 1, -1, \ldots$ ketma-ketlikning qismiy limitlar to'plami $\{-1,1\}$ dan iborat. Demak, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=-1$ bo'ladi.

2-*misol.* x_n : 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, . . ., 1, n, . . . ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Uning 1, 1, 1, . . . qismiy ketma-ketligining limiti

1 va 1, 2, 3, 4,. . ., n,. . . qismiy ketma-ketligining **limiti** $+\infty$ bo'ladi. Demak, bu misolda $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=+\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=1$ ekan.

Qanday ketma-ketliklarning yuqori va quyi limitlari mavjud? – degan savolga javob beruvchi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Ixtiyoriy ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari mavjud.

4. Ketma-ketlik yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti. 8-§ da, monoton ketma-ketliklar uchun qanday shart bajarilganda, chekli limitga ega bo'lishi bilan tanishdik. Endi, ixtiyoriy ketma-ketlik, qanday shart bajarilganda yaqinlashuvchi bo'lishi masalasini ko'rib chiqamiz.

Aytaylik, biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $\forall$ $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha n, $m>n_0$ lar uchun $|x_n-x_m|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

2-teorema. (Koshi teoremasi). Biror, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun, uning fundamental ketma-ketlik bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. *Zarurligi.* Aytaylik, $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning limiti a bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Limit ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun, shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha $n>n_0$ larda $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan, barcha n, $m>n_0$ lar uchun

$$|x_n-x_m|=|(x_n-a)-(x_m-a)|\le|x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

kelib chiqadi. Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_0\in\mathbb{N}$ son mavjud bo'lib, barcha n, $m>n_0$ lar uchun $|x_n-x_m|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $x_m-\varepsilon<x_n<x_m+\varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar m ning bitta tayin qiymatini olsak, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning

chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Bolsano-Veyershtrass lemmasiga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=c$.

Endi, c soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ham limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Biror k sonini $|x_{n_k}-c|<\varepsilon$ va $n_k>n_0$ tengsizliklar bir vaqtda o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz. Agar $m=n_k$ deb olsak, u holda barcha $n>n_0$ lar uchun $|x_n-x_{n_k}|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bulardan

$|x_n-c|=|x_n-x_{n_k}+x_{n_k}-c|\le|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-c|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$ kelib chiqadi. Bu esa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

Isbotlangan teorema ketma-ketlik yaqinlashishining *Koshi kriteriyasi* (alomati) deb ham yuritiladi.

12-§. Funksiya limitining ta'riflari

1. Funksiyaning nuqtadagi limiti. Aytaylik, biror X sonli to'plam berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

1-*misol.* $X_1=[2;5]$ segmentning har bir nuqtasi uning limit nuqtasi bo'ladi. Bu to'plamning boshqa limit nuqtalari yo'q.

2-*misol.* $X_2=[0;3)$ to'plamning limit nuqtalari $[0;3]$ segment nuqtalaridan iborat, ya'ni bu to'plamning har bir nuqtasi va 3 nuqta uning limit nuqtalari bo'ladi. Ammo 3 nuqta unga tegishli emas.

Oxirgi misoldan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtalari unga tegishli bo'lishi ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin ekan.

Limit nuqtaning yuqoridagi ta'rifiga teng kuchli bo'lgan yana bitta ta'rifini keltiramiz.

2-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

Quyidagi teorema o'rinli:

Teorema. a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* bo'lishi uchun a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teorema yuqoridagi ikki ta'rifning teng kuchli ekanligini ta'kidlaydi.

Isboti. Agar a nuqta, 2-ta'rif bo'yicha X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda u 1-ta'rif bo'yicha ham limit nuqta bo'lishi aniq.

Aytaylik, a nuqta, 1-ta'rif bo'yicha X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Endi, a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ atrofini qaraymiz. Ta'rifga ko'ra, bu atrofda X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bor, uni x_1 deylik. Endi, $\varepsilon_1=|a-x_1|$ belgilash kiritib, a nuqtaning $(a-\varepsilon_1;\ a+\varepsilon_1)$ atrofini olsak, bu atrofda ham X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bor, uni x_2 deylik. Agar $\varepsilon_2=|a-x_2|$ belgilash kiritsak, u holda a nuqtaning $(a-\varepsilon_2;\ a+\varepsilon_2)$ atrofida ham X to'plamning a dan farqli kamida bitta x_3 nuqtasi bor. Shu jarayonni davom ettirib, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \in X$ nuqtalar to'plamiga ega bo'lamiz. Bu nuqtalarning har biri a nuqtaning $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ atrofiga tegishli bo'ladi.

Demak, a nuqta 2-ta'rif bo'yicha ham X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Aytaylik, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. U holda a nuqtaning har bir $(a-\frac{1}{n};a+\frac{1}{n})$ atrofida X to'plamning, a dan farqli kamida bitta x_n nuqtasi bor, ya'ni $a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n}$ bo'ladi. Bundan $n\to\infty$ da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ va $x_n\neq a$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda X to'plam nuqtalaridan tuzilgan va a ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ ketma-ketlikni ajratib olish mumkin ekan.

Shuningdek, a nuqtaning ixtiyoriy atrofida X to'plamning a dan farqli cheksiz ko'p nuqtalari borligi uchun, a ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketliklarni cheksiz ko'p usulda tanlab olish mumkin.

Ixtiyoriy $\Delta>0$ son uchun $(\Delta;+\infty)$ interval $+\infty$ «nuqta»ning, shuningdek, $(-\infty;\Delta)$ interval $-\infty$ «nuqta»ning, $(-\infty;\Delta)\cup(\Delta;+\infty)$ to'plam esa, ∞ «nuqta»ning *atrofi* deyiladi. Qolaversa, ∞, $+\infty$, $-\infty$ «nuqta»lar bu to'plamlarga limit nuqta bo'lishi yuqoridagi kabi ta'riflanadi. Bu holda ham, mos ravishda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ bo'ladigan $\{x_n\}$ ketma-ketliklarni cheksiz ko'p usullarda tanlab olish mumkinligini eslatib o'tamiz.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3-ta'rif. (Geyne). Agar X to'plamdan olingan va a ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$, $x_n \neq a$ ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik, doim yagona b limitga ega bo'lsa, u holda b soni $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi limiti* deyiladi.

Funksiya limiti $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ kabi belgilanadi, ba'zan "$x\to a$ da $f(x)\to b$" ko'rinishida ham yoziladi.

Odatda, bu ta'rif funksiya limitining ketma-ketliklar tilidagi ta'rifi deyiladi.

3-*misol.* $f(x)=3-x^2$ funksiyaning $x=1$ dagi limiti 2 ekanligini ko'rsating.

Yechish. $x_n \neq 1$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ bo'ladigan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olaylik. U holda $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)= \lim\limits_{n\to\infty} (3-x_n^2)=3 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 =3 - 1=2$.

Demak, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} (3-x^2)=2$.

4-*misol.* $f(x)=\sin x$ funksiyaning $x\to+\infty$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechish. Limiti $+\infty$ bo'lgan $x_n=n\pi$ yoki $x'_n=(2n+\frac{1}{2})\pi$ ketma-ketliklarni olaylik. U holda

$$f(x_n)=\sin n\pi=0, \qquad f(x'_n)=\sin(2n+\frac{1}{2})\pi=1$$

bo'lgani uchun, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=1$ bo'ladi. Bu esa, $x\to+\infty$ da $f(x)=\sin x$ funksiyaning limiti yo'qligini ko'rsatadi, chunki ta'rif bo'yicha limit yagona bo'lishi kerak.

Funksiya limitini boshqacha "ε-δ" tilida ham ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. (Koshi). Agar har bir, kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday bir $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $x\in X$ ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\Delta>0$ son uchun shunday bir $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $x\in X$ ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)|\geq\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda ∞ nuqta $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ orqali belgilanadi.

Agar x ning a ga yetarlicha yaqin qiymatlarida $f(x)>0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, agar $f(x)<0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ kabi yoziladi.

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\Delta>0$ son mavjud bo'lib, $|x|>\Delta$ (mos ravishda $x>\Delta$, $x<-\Delta$) bo'lgan barcha $x\in X$ larda $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda b son $f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ (mos ravishda $x\to-\infty$, $x\to+\infty$) dagi limiti deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ (mos ravishda $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$) ko'rinishida yoziladi.

Funksiya limitining 3- va 4-ta'riflari o'zaro ekvivalent. Uni mustaqil isbotlashni taklif qilamiz.

Shuningdek, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ belgilashlarni ta'riflang.

5-*misol*. $\lim\limits_{x\to2}(3x-1)=5$ ekanini isbotlang.

Yechish. $f(x)=3x-1$ funksiyani qaraymiz va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olamiz. U holda

$$|f(x)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |3x-1-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |3(x-2)|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$$

munosabatlardan ko'rinadiki, agar $\varepsilon>0$ son uchun $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ deb olsak, u holda $|x-2|<\delta$ bo'lganda, $|f(x)-5|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to2}(3x-1)=5$ ekanini bildiradi.

6-*misol*. $\lim\limits_{x\to3}(x^2-3)=6$ ekanini isbotlang.

Yechish. $f(x)=x^2-3$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olaylik. U holda

$$|f(x)-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-3-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2-9|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+3||x-3|<\varepsilon$$

munosabatlar o'rinli.

Agar δ ni 1 dan kichik deb olsak, u holda

$$|x-3|<\delta \Leftrightarrow 3-\delta<x<3+\delta \Leftrightarrow 2<x<4$$

bo'ladi. Bundan, $|x+3|<7$ kelib chiqadi. Buni hisobga olsak, u holda $7|x-3|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|x+3|\cdot|x-3|<\varepsilon$ bo'ladi. Demak, $\delta=min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$ deb olsak, u holda

$$|f(x)-6|=|x+3|\cdot|x-3|<7\cdot\frac{\varepsilon}{7}<\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to3}(x^2-3)=6$ ekanini bildiradi.

2. Funksiyaning bir tomonli limitlari.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\delta>0$ uchun $(a-\delta,a)$ intervalda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *chap limit* nuqtasi deyiladi.

7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\delta>0$ uchun $(a;a+\delta)$ intervalda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning *o'ng limit* nuqtasi deyiladi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, a nuqta X to'plamning chap (yoki o'ng) limit nuqtasi bo'lsin.

8-ta'rif (Geyne). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (mos ravishda, kichik) bo'lib, a ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olganimizda ham, funksiya qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik doim yagona b ga intilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng* (mos ravishda, *chap*) *limiti* deyiladi.

Funksiyaning o'ng limiti $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$ yoki $f(a+0)=b$, chap limiti $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ yoki $f(a-0)=b$ orqali belgilanadi. Agar $a=0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(+0)$, $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=f(-0)$ kabi belgilash ishlatiladi.

Masalan, $f(x)=[x]$ funksiya, ya'ni x ning butun qismini ifodalovchi funksiya uchun $a=1$ bo'lsin.

Agar $0<x_n<1$ shartlar bilan $\{x_n\}$ ketma-ketlik olsak, u holda $f(x_n)=[x_n]=0$ bo'ladi.

Agar $1<x_n<2$ shartlar bilan $\{x_n\}$ ketma-ketlik olsak, u holda $f(x_n)=[x_n]=1$ bo'ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=0$. Bu misolda chap va o'ng limitlar mavjud, ammo bir-biriga teng emas.

Yuqoridagi ta'rif, ketma-ketliklar tilidagi ta'rif deb yuritilsa, quyidagi ta'rif "ε-δ" tilidagi ta'rifdir.

9-ta'rif (Koshi). Agar har qanday, kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday bir $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $x\in X$ ning $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi *o'ng (chap)* limiti deyiladi.

Funksiyaning chap va o'ng limitlari uning *bir tomonli limitlari* deb yuritiladi. Agar a nuqta, bir vaqtda X to'plamning ham chap, ham o'ng limit nuqtasi bo'lsa, u holda quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. $f(x)$ funksiya, a nuqtada limitga ega bo'lishi uchun, shu nuqtada uning chap va o'ng limitlari mavjud bo'lib, $f(a\text{-}0)=f(a+0)$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

13-§. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Limitga ega bo'lgan funksiyalarning ba'zi xossalarini sanab o'tamiz.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va a son X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1°. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo'lib, $b>p$ $(b<q)$ bo'lsa, u holda $x\in X$ ning a ga yetarlicha yaqin $(x\neq a)$ qiymatlarida $f(x)>p$ $(f(x)<q)$ bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lib, $b>p$ bo'lsin. U holda $\varepsilon>0$ sonni $0<\varepsilon<b\text{-}p$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Limit ta'rifiga ko'ra bu $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x\in X$ larda $|f(x)\text{-}b|<\varepsilon$ bo'ladi. Bundan $b\text{-}\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ kelib chiqadi. Agar $b\text{-}\varepsilon>p$ tengsizlikni hisobga olsak, u holda $f(x)>p$ ni hosil qilamiz.

2°. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo'lib, $b>0$ $(b<0)$ bo'lsa, u holda $x\in X$ ning a ga yetarlicha yaqin $(x\neq a)$ qiymatlarida $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ bo'ladi.

3°. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo'lsa, u holda $x\in X$ ning a ga yaqin $(x\neq a)$ qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Limit ta'rifiga ko'ra $\varepsilon>0$ son uchun, shunday bir $\delta>0$ son topilib, $x\in X$ ning $a\text{-}\delta<x<a+\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi, a dan farqli barcha qiymatlarida $|f(x)\text{-}b|<\varepsilon$ yoki $b\text{-}\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya x ning $(a\text{-}\delta;a+\delta)\backslash\{a\}$ to'plamdagi barcha qiymatlarida chegaralangan ekan.

4°. Agar a nuqtaning atrofidan olingan, a dan farqli barcha x larda $f(x) \le g(x) \le \varphi(x)$ tengsizlik o'rinli va $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ lar mavjud bo'lib,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. U holda $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta_1 > 0$ topilib, $0 < |x-a| < \delta_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha x larda $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$ bo'ladi.

Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$ bo'lganidan, shu $\varepsilon > 0$ uchun $\delta_2 > 0$ son topilib, $0 < |x-a| < \delta_2$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan barcha x larda $b-\varepsilon < \varphi(x) < b+\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsak, u holda $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon$ va $b-\varepsilon < \varphi(x) < b+\varepsilon$ tengsizliklarning ikkalasi ham o'rinli bo'ladi.

Endi, $f(x) \le g(x) \le \varphi(x)$ ekanini e'tiborga olsak, u holda oxirgi tengsizliklardan $b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

5°. Agar $f(x)$ funksiya $x \to a$ da limitga ega bo'lsa, u holda bu limit yagona bo'ladi.

Isboti, ketma-ketliklar uchun aytilgan, xuddi shunga o'xshash xossa isboti kabi ko'rsatiladi.

14-§. Limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida amallar

1. Limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda berilgan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lsa, u holda

$$\text{a) } f(x) \pm g(x), \text{ b) } f(x) \cdot g(x), \text{ c) } \frac{f(x)}{g(x)} \ (\lim_{x\to a} g(x) \ne 0)$$

funksiyalarning har biri limitga ega bo'ladi va

a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x);$

b) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x);$

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

formulalar o‘rinli.

Isboti. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ va $\lim\limits_{x\to a}g(x)=c$ bo‘lsin. U holda X to‘plamdagi a yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=b$, $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=c$ bo‘ladi.

Bulardan $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)\pm g(x_n))=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\pm\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=b\pm c$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to a}(f(x_n)\pm g(x_n))=\lim\limits_{x\to a}f(x_n)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x_n)$.

Xuddi shu kabi qolgan formulalarni ham isbotlash mumkin.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lsa, u holda $kf(x)$ funksiya ham limitga ega bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a}(kf(x))=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$ bo‘ladi. Bu yerda k biror tayin, o‘zgarmas son.

Isboti. 1-teoremaning b) holida $g(x)=k$ deb olsak,

$\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x))=\lim\limits_{x\to a}k\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$ bo‘ladi.

Eslatma. 1-teoremadagi a) va b) tengliklar, undagi qo‘shiluvchilar, ko‘paytuvchilar soni bir nechta bo‘lgan holda ham o‘rinli. Ya’ni, agar $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$, . . . , $\lim\limits_{x\to a}f_n(x)$ lar mavjud bo‘lsa, u holda

a) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)+\lim\limits_{x\to a}f_2(x)+...+\lim\limits_{x\to a}f_n(x);$

b) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x))=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\cdot...\cdot\lim\limits_{x\to a}f_n(x)$

formulalar o‘rinli.

2. Murakkab funksiyaning limiti. Aytaylik, $y=f(u)$ funksiya U to‘plamda berilgan va c son U to‘plamning limit nuqtasi, $u=g(x)$ funksiya X to‘plamda berilib, a son X to‘plamning limit nuqtasi va

$E(g)\subset U$ bo'lsin. Shuningdek, a nuqtaning biror $(a-\delta;a+\delta)$ atrofidagi barcha nuqtalarda $g(x)\neq c$ bo'lsin.

Endi, $f(g(x))$ murakkab funksiyaning limiti qanday topiladi? – degan savolga javob beramiz.

2-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ va $\lim\limits_{u\to c} f(u)=b$ bo'lsa, u holda $x\to a$ da $f(g(x))$ murakkab funksiya ham limitga ega bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$ bo'ladi.

Isboti. Agar $\lim\limits_{u\to c} f(u)=b$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra har bir $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\sigma>0$ son mavjud bo'lib, $0<|u-c|<\sigma$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $u\in U$ larda $|f(u)-b|<\varepsilon$ bo'ladi. Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ bo'lsa, yuqoridagi $\sigma>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda $|g(x)-c|<\sigma$ bo'ladi. Demak, $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda $|f(g(x))-b|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=b$ ekanligini ifodalaydi.

3. Aniqmas ifodalar. Xuddi ketma-ketliklardagi kabi, ba'zan limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish, ayrim noaniqliklarga olib keladi. Quyida shunday hollarni ko'rib o'tamiz.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

a) agar $x\to a$ da $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ifoda «$\dfrac{0}{0}$» ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi;

b) agar $x\to a$ da $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ bo'lsa, u holda $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ifoda «$\dfrac{\infty}{\infty}$» ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi;

d) $x \to a$ da $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ bo'lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytma «$0 \cdot \infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi;

e) $x \to a$ da $f(x) \to +\infty$ $(-\infty)$, $g(x) \to -\infty$ $(+\infty)$ bo'lsa, u holda $f(x)+g(x)$ yig'indi «$\infty-\infty$» ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi.

Shuningdek, «0^0», «1^∞», «∞^0» ko'rinishidagi aniqmasliklar ham uchraydi. Bunday aniqmasliklarni yechish davomida, misollar xarakteriga qarab turli usullar qo'llaniladi.

1-*misol.* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ ni hisoblang.

Yechish. Ko'rinib turibdiki, bu ifoda « $\dfrac{0}{0}$ » ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

2-*misol.* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x-1}{2x^3+1}$ limitni hisoblang.

Yechish. Bu ifoda « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ko'rinishdagi aniqmaslik ekani ravshan.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x-1}{2x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}.$$

15-§. Ba'zi bir ajoyib limitlar

Limitlarni hisoblashga doir mashqlarda ba'zi bir ifodalarning limiti ko'p marta uchraydi. Shuning uchun ularni alohida ko'rib chiqamiz.

1-teorema. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ tenglik o'rinli.

Isboti. Ma'lumki, $0<x<\frac{\pi}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ qo'sh tengsizlik o'rinli. Shuningdek, $\sin x>0$ bo'lgani uchun bu tengsizlikni $\sin x$ ga bo'lsak, $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ hosil bo'ladi. Bundan $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ kelib chiqadi. Uni (-1) ga ko'paytirib, 1 ni qo'shsak, $0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$ tengsizlikka kelamiz. Endi, $\frac{\sin x}{x}$, $\cos x$ juft funksiyalar bo'lgani uchun bu tengsizlik x ni $-x$ bilan almashtirganda ham o'zgarmaydi. Shu sababli, oxirgi tengsizlik 0 dan farqli barcha $x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ larda o'rinli. Qolaversa, $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ bo'lgan x larda $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2|\sin\frac{x}{2}|<2|\frac{x}{2}|=|x|$ bo'ladi. Bulardan, $|1-\frac{\sin x}{x}|<|x|$ tengsizlik hosil bo'ladi.

Oxirgidan, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ekanligi kelib chiqadi.

Odatda, bu tenglik *birinchi ajoyib limit* deb yuritiladi.

1-natija. Quyidagi tengliklar o'rinli:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$.

Isboti.

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=.$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$

2-teorema. Ushbu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ tenglik o‘rinli.

Isboti. Avval $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Aytaylik, $\{x_k\}$ ketma-ketlik $+\infty$ ga intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsin: $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}=+\infty$. U holda, barcha k lar uchun $x_k>1$ deb qarash mumkin. Endi, x_k ning butun qismini n_k orqali belgilaylik, ya’ni $n_k=[x_k]$. Shunday qilib,

$\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ ketma-ketlik $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi bo‘ladi. Endi, $n_k\le x_{n_k}\le n_k+1$ dan

$$\frac{1}{n_k+1}<\frac{1}{x_k}\le\frac{1}{n_k}\text{ va }\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\le\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Shu sababli,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}:\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)\right)=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right)=e$$

bo'ladi va oraliq ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga asosan $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Agar oxirgi tenglikda $x=-y$ almashtirishni bajarsak, u holda $x\to-\infty$ da $y\to+\infty$ bo'ladi va $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$ munosabatlarga ko'ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right)=e$ kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Isbotlangan bu ikki tenglikdan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ bo'ladi.

Oxirgi tenglikdan $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$ ekanligini keltirib chiqarish mumkin.

Haqiqatan, $x=\frac{1}{y}$ almashtirish kiritsak, $y\to0$ da $x\to\infty$ bo'lib, $\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ kelib chiqadi.

Murakkab funksiyaning limiti haqidagi teorema yordamida quyidagi tengliklarni keltirib chiqarish mumkin:

2-natija. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, xususan, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ tenglik o'rinli.

Isboti. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

3-natija. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, xususan, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ tenglik o'rinli.

Isboti. Agar $y=a^x-1$ desak, u holda $a^x=1+y$ yoki $x=\log_a(1+y)$ bo'lib, $x\to 0$ da $y\to 0$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a$.

4-natija. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$ tenglik o'rinli.

Isboti. Agar $y=(1+x)^\mu-1$ desak, u holda $(1+x)^\mu=1+y$ yoki $\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$ bo'lib, $x\to 0$ da $y\to 0$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y\cdot\mu\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+y)}=.$$

$$=\mu\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\mu$$

1-*misol.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{x\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=4$.

2-*misol.* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{3x}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right)^3\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-3}=e^3\cdot 1=e^3.$$

3-*misol.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{3x}$ limitni hisoblang.

Yechish. 4-natijaga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1-2x}-1}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^{\frac{1}{n}}-1}{-2x}\cdot(-2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}\cdot(-2)=-\frac{2}{3n}.$$

16-§. Funksiyalarning limitga ega bo'lish shartlari

1. Monoton funksiyaning limiti. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va a nuqta shu to'plamning limit nuqtasi bo'lib, barcha $x\in X$ lar uchun $x\le a$ bo'lsin.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda u a nuqtada limitga ega, agar yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan bo'lsin, ya'ni $\{\ f(x) : x\in X\ \}$ to'plam yuqoridan chegaralangan. Bizga ma'lumki, bu to'plam aniq yuqori chegaraga ega. Uni b orqali belgilaylik: $b=\sup\{f(x): x\in X\}$. Endi, b son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra, barcha $x\in X$ lar uchun $f(x)\le b$ va $\forall\varepsilon>0$ uchun biror $x'\in X$ topilib, $f(x')>b-\varepsilon$ bo'ladi. Berilishiga ko'ra $f(x)$ funksiya o'suvchi. Ya'ni, barcha $x'<x$ larda $f(x')<f(x)$ bo'ladi. Bundan $b-\varepsilon<f(x)<b<b+\varepsilon$ tengsizlikni hosil qilamiz. Agar $\delta=a-x'$ deb olsak, u holda $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak, ta'rifga binoan, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

Endi, aytaylik, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. U holda qanday $\Delta>0$ katta sonni olmaylik, shunday $x'\in X$ mavjud bo'lib, $f(x')>\Delta$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lganligi uchun $x>x'$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda ham $f(x)>\Delta$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lib, barcha $x\in X$ lar uchun $x\leq a$ bo'lsin.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u holda u a nuqtada limitga ega, agar quyidan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $-\infty$ bo'ladi.

Bu teorema ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

2. Funksiya limitga ega bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

3-teorema (Koshi alomati). $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud bo'lishi uchun, $\forall\varepsilon>0$ songa mos shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha x', $x''\in X$ larda $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu teorema isbotini mustaqil bajarish o'quvchining o'ziga havola qilinadi.

17-§. Cheksiz kichik funksiyalar va ularni taqqoslash

1. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalari. Aytaylik, $y=\alpha(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x)=0$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ da *cheksiz kichik funksiya* deyiladi.

Cheksiz kichik funksiyalarni qisqacha, *cheksiz kichik* deyiladi.

1-*misol.* $\alpha(x)=x^2+x^3$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik, chunki $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x^3)=0$.

2-*misol.* $\alpha(x)=x^2-4$ funksiya $x\to 2$ da cheksiz kichik, chunki $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$.

Cheksiz kichik funksiyalar ham cheksiz kichik ketma-ketliklardagiga o'xshash quyidagi xossalarga ega.

1^0. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning yig'indisi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

2^0. Cheksiz kichik funksiya va chegaralangan funksiya ko'paytmasi cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Masalan, $\alpha(x)=x^2$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ funksiya chegaralangan: $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$. U holda $\alpha(x)f(x)$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kichik bo'ladi, chunki $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\sin\frac{1}{x})=0$.

2. Cheksiz kichiklarni taqqoslash. Aytaylik, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x\to a$ da cheksiz kichik bo'lsin.

2-ta'rif. Agar, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ limit mavjud va $c\neq 0$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichiklar, $x\to a$ da *bir xil tartibli* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichiklar $x\to a$ da *ekvivalent* deyiladi. Bu hol $\alpha\sim\beta$ ko'rinishida yoziladi.

4-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ cheksiz kichik, $x\to a$ da $\beta(x)$ cheksiz kichikka nisbatan *yuqori tartibli* deyiladi.

3-*misol.* $\alpha(x)=\sin x$, $\beta(x)=x$ funksiyalar $x\to 0$ da ekvivalent cheksiz kichiklar bo'ladi.

Haqiqatan, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Demak, $\sin x\sim x$.

4-*misol.* $\alpha(x)=1-\cos 2x$ va $\beta(x)=x$ lar $x\to 0$ da cheksiz kichiklar bo'lib, $1-\cos 2x$ funksiya x ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik bo'ladi. Haqiqatan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

5-*misol.* $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$ va $\beta(x)=x$ lar $x\to 0$ da bir xil tartibli cheksiz kichiklar bo'ladi. Haqiqatan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

3. Ekvivalent cheksiz kichiklar yordamida limitlarni topish.

1-teorema. Agar $x\to a$ da $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ va $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ham mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\cdot\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)}{\beta(x)\cdot\alpha_1(x)\cdot\beta_1(x)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

6-*misol.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$ limitini toping.

Yechish. $1-\cos 3x=2\sin^2\dfrac{3x}{2}\sim 2\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2=\dfrac{9x^2}{2}$. Shuningdek, $x\sim\sin x$ dan $x\sin x\sim x^2$ kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}}{x^2}=\frac{9}{2}.$$

7-*misol.* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3x^2+4x^5+x^6\right)^3}{\sqrt{x^8+4x^{10}}}$ limitni toping.

Yechish. $(3x^2+4x^5+x^6)^3 \sim (3x^2)^3 = 27x^6$, $\sqrt{x^8+4x^{10}} \sim \sqrt{x^8} = x^4$ munosabatlarga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2+4x^5+x^6\right)^3}{\sqrt{x^8+4x^{10}}} = \lim_{x\to 0}\frac{27x^6}{x^4} = \lim_{x\to 0}27x^2 = 0.$$

III bobga doir test savollari

1. Quyidagi to'plamlarning qaysi biri a nuqtaning ε atrofi bo'ladi?

A) $(a-\varepsilon; a]$; B) $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$;

C) $[a; a+\varepsilon)$; D) $(a-\varepsilon/2; a+\varepsilon/2)$

2. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to'g'ri?

A) Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi;

B) Kamayuvchi ketma-ketlik chekli limitga ega;

C) Monoton ketma-ketlik chekli limitga ega;

D) O'suvchi ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lsa u chekli limitga ega.

3. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) O'suvchi va yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chekli limitga ega;

B) Kamayuvchi va quyidan chegaralangan ketma-ketlik chekli limitga ega;

C) $a_n \geq 0$ bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$ bo'ladi;

D) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $a \geq r$ bo'lsa, u holda biror raqamdan boshlab $x_n > r$ bo'ladi.

4. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning yig'indisi cheksiz kichik miqdor;

B) Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdorlarning ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi;

C) Agar α_n cheksiz kichik miqdor bo'lsa, $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ chegaralangan miqdor bo'ladi;

D) Agar x_n cheksiz katta miqdor bo'lsa, $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

5. Quyidagilarning qaysilari cheksiz katta miqdor?

1) $x_n = n^3$, 2) $x_n = \frac{n+1}{n}$ 3) $x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$

A) 1,2; B) 2,3; C) 1,3; D) Barchasi.

6. Quyidagi limitlarni toping. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n+1}$ **va** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n}{\sqrt{n^4+1}}$

A) 1/3 va –3; B) 1/3 va 0;
C) ∞ va 0; D) 1 va 0.

7. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan;
B) Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega;
C) Monoton ketma-ketlik chekli limitga ega;
D) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lib, $x_n = y_n$ (n=1,2,...) bo'lsa, u holda $a=b$ bo'ladi.

8. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to'g'ri?

A) Agar $x_n \le y_n$ (n=1,2,...) bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ **chekli bo'lsa, u holda** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ham chekli bo'ladi;

B) Agar $x_n \le y_n$ (n=1,2,...) bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ chekli bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ham chekli bo'ladi;

C) Agar x_n o'zgaruvchi miqdor o'suvchi, y_n o'zgaruvchi miqdor kamayuvchi, $x_n \le y_n$ (n=1,2,...) bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$ bo'lsa, u holda

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ bo'ladi;

D) Agar $x_n \le y_n$ $(n=1,2,...)$ bo'lsa, u holda har doim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ bo'ladi.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}$ **limitni toping.**

A) $e^{3/2}$; B) e^3;
C) $e^{1/2}$; D) e^6.

10. Quyidagilarning qaysi biri 1, 1/4, 1/9, 1/16, ... , $1/n^2$, ... ketma-ketlik uchun qismiy ketma-ketlik bo'ladi?

1) 1, 1/4, 1/4, 1/9, 1/9, ... 2) 1, 1/2, 1/3, ... , $1/n$, ...

3) 1, 1/9, ... , $\frac{1}{(2n-1)^2}$, ...

A) 1; B) 2; C) 3; D) 1,2.

11. Quyidagi jumlalarning qaysi biri noto'g'ri?

A) Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

B) Chegaralangan ketma-ketlikdan har doim chekli limitga ega bo'lgan qismiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin;

C) Ixtiyoriy ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin;

D) 1,2,3,..., n,... ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin emas.

12. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri?

1) $\{n^\alpha\}$ ketma-ketlik $\alpha \ge 0$ da cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi.
2) $\{n^\alpha\}$ ketma-ketlik $\alpha \le 0$ da yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi.
3) $\{q^n\}$ ketma-ketlik $|q|<1$ da cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.
4) $\{q^n\}$ ketma-ketlik $|q| \le 1$ da yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

A) 1 va 3; B) 2 va 3;
C) 2,3 va 4; D) 2 va 4.

13. Agar $[a_n;b_n]$ ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo'lsa, u holda quyidagi mulohazalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) $\{a_n\}$ – kamaymaydigan ketma-ketlik;
B) $\{b_n\}$ – o'smaydigan ketma-ketlik;
C) $\{a_n - b_n\}$ – yaqinlashuvchi kichik ketma-ketlik;
D) $\{a_n + b_n\}$ – cheksiz kichik ketma-ketlik.

14. Quyidagi mulohazalardan qaysilari noto'g'ri?
1. Agar yaqinlashuvchi ketma-ketlikning barcha hadlari musbat bo'lsa, u holda uning limiti ham musbat bo'ladi. 2. Ketma-ketlikning limiti uning limit nuqtasi bo'ladi. 3. Agar $\{|a_n|\}$ – ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. 4. Agar $\{|a_n|\}$ – ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

A) 1 va 3; B) 2 va 4;
C) faqat 1; D) 1, 2, 4.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2}=1$. **Agar ketma-ketlik limiti ta'rifidagi $\varepsilon=0{,}001$ ga teng bo'lsa, $n_0(\varepsilon)$ ning eng kichik qiymatini toping.**

A) 2000; B) 1999;
C) 1998; D) 1997.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n}=1$. **Agar ketma-ketlik limiti ta'rifidagi $\varepsilon=0{,}001$ ga teng bo'lsa, $n_0(\varepsilon)$ ning eng kichik qiymatini toping.**

A) 2002; B) 1999;
C) 2000; D) 2001.

17. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan ketma-ketlikdir;
B) Chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlikdir;

C) Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, $\{1/ x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi;

D) Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, $\{1/ x_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

18. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lib, $b>p$ bo'lsa, u holda x ning a ga yetarlicha yaqin ($x\neq a$) qiymatlarida $f(x)>p$ bo'ladi;

B) Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lib, $b<q$ bo'lsa, u holda x ning a ga yetarlicha yaqin ($x\neq a$) qiymatlarida $f(x)<q$ bo'ladi;

C) Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo'lsa, x ning a ga yetarlicha yaqin (x≠a) qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi;

D) Agar barcha x larda $f(x)<g(x)$ bo'lsa, u holda har doim $\lim\limits_{x\to a} f(x)< \lim\limits_{x\to a} g(x)$ bo'ladi.

19. Quyidagi formulalarning qaysi biri xato?

A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$;   B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

C) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e$;   D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

20. Quyidagilarning qaysi biri noto'g'ri?

A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;   B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$;

C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;   D) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

21. Limitni toping $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{4+x}-2}$.

A) 4; B) 8; C) ½; D) ¼.

22. Limitni toping $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

A) 1; B) 3; C) –1; D) 6.

23. Limitni toping $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^x$.

A) e^{-3}; B) e^{-4}; C) e^4; D) e^3.

24. Limitni toping $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{4x}$.

A) 3; B) ¼; C) ¾; D) 4/3.

25. Jumlani davom ettiring: Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b<0$ **bo'lsa,**

A) a nuqtaning ixtiyoriy atrofida funksiya manfiy qiymatlarni qabul qiladi;

B) a nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bunda funksiyaning qiymatlari b dan kichik bo'ladi;

C) a nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(x)< b$ bo'ladi;

D) a nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, bunda funksiya manfiy qiymatlar qabul qiladi.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ **ni hisoblang.**

A) 1/3; B) 2/3; C) 3/2; D) 3.

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+5}}$ **ni hisoblang.**

A) -2/5; B) $2/\sqrt{5}$; C) 0; D) $-2/\sqrt{7}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ **ni hisoblang.**

A) 2/3; B) ∞; C) 0; D) 1.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4-1}}$ **ni hisoblang.**

A) 1; B) 2; C) 0; D) ∞.

30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ **ni hisoblang.**

A) 1/3; B) 2; C) -1/3; D) 3.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$ **ni hisoblang.**

A) $-2/\pi$; B) $-\pi/2$; C) $2/\pi$; D) $\pi/2$.

32. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$ **ni hisoblang.**

A) -1/2; B) 0,5; C) 0; D) -2.

1-§. Funksiyaning uzluksizligi ta'riflari

Funksiyaning uzluksizligi tushunchasi matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u funksiya limiti tushunchasi bilan bevosita bog'liq.

1. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi ta'riflari. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X oraliqda berilgan va $x_o \in X$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_o)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_o *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Demak, $f(x)$ funksiya nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ning mavjud bo'lishi va bu limit funksiyaning x_o nuqtadagi qiymati $f(x_o)$ ga teng bo'lishi kerak ekan. Bunday x_o nuqta $f(x)$ funksiyaning *uzluksizlik nuqtasi* deyiladi.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u *X to'plamda uzluksiz* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta uzluksiz bo'lmasa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi.

1-*misol.* $f(x)=2x^3+3x+1$ funksiya ixtiyoriy x_o nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating.

Yechish. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)= \lim\limits_{x \to x_0} (2x^3+3x+1)=2x_o^3+3x_0+1=f(x_o)$.

Demak, bu funksiya ixtiyoriy nuqtada uzluksiz ekan.

Funksiya limiti ta'riflaridan foydalanib, uzluksizlikning boshqa ta'riflarini keltiramiz.

4-ta'rif (Geyne). Agar X to'plamdan olingan va x_o ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun, funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketlik $f(x_o)$ ga yaqinlashsa, u holda $f(x)$ funksiya x_o *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

2-*misol.* Sonlar o'qi, $(-\infty;+\infty)$ da berilgan $y=D(x)$ Dirixle funksiyasi uchun $x_o=2$ uning uzilish nuqtasi ekanligini ko'rsating.

Yechish. Irratsional sonlarning 2 ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketligini olsak, $D(x_n)=0$ bo'lib, $D(x_n)\to 0$ kelib chiqadi. Agar ratsional sonlarning 2 ga intiluvchi $\{x'_n\}$ ketma-ketligini olsak, $D(x'_n)=1$ bo'lib, $D(x'_n)\to 1$ kelib chiqadi. Bu esa, $D(x)$ funksiyaning $x_o=2$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsatadi.

Shu usul bilan $D(x)$ funksiyaning ixtiyoriy $x_o\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsatish mumkin.

5-ta'rif (Koshi). Agar har bir $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $x\in X$ ning $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, **u holda** $f(x)$ funksiya x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

Odatda, $x-x_o$ ayirma *argument orttirmasi* deyiladi va Δx orqali belgilanadi. Shuningdek, $f(x)-f(x_o)$ ayirma funksiyaning x_0 nuqtadagi *orttirmasi* deyiladi va Δy orqali belgilanadi.

Agar funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f(x_0)-f(x_0)=0$$

bo'ladi va aksincha, agar $\lim\limits_{x\to x_0}\Delta y=0$ bo'lsa, **u** holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

6-ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

3-*misol.* $f(x)=\cos x$ funksiyaning har bir $x_o\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $|\Delta y|=|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|=$

$$=|\cos(x_0+\Delta x)-\cos_0|=|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin(x_0+\frac{\Delta x}{2})|\leq 2|\sin\frac{\Delta x}{2}|<2|\frac{\Delta x}{2}|=|\Delta x|.$$

Bundan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ kelib chiqadi. Demak, $f(x)=\cos x$ har bir x_o nuqtada uzluksiz ekan.

Shu kabi, $f(x)=\sin x$ funksiyani ham har bir $x_0\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatish mumkin.

2. Bir tomonli uzluksizlik.

7-ta'rif. Agar $f(x_0-0)=f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *chapdan uzluksiz* deyiladi. Bu tenglik o'rinli bo'lmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzilishga ega bo'ladi.

8-ta'rif. Agar $f(x_0+0)=f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *o'ngdan uzluksiz* deyiladi.

Bu ta'riflardan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiya x_o nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun, shu nuqtada ham chapdan, ham o'ngdan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

2-§. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar

1. Uzluksiz funksiya ustida arifmetik amallar. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan va $x_o \in X$ bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri x_o nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$f(x) \pm g(x), f(x)\cdot g(x), \ \frac{f(x)}{g(x)} \ (g(x_o)\neq 0)$$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_o nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$ bo'ladi. Bulardan va limitga ega bo'lgan funksiyalar xossasidan

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x))= \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_o) \pm g(x_o),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))= \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_o)\cdot g(x_o),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

1-*misol.* $f(x)=\cos^3 x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Avvalgi paragrafda $f(x)=\cos x$ funksiya har bir x_o nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatgan edik. 1-teoremaga ko'ra, $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos x\cdot\cos x$ funksiya ham har bir $x_o \in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-*misol.* $y=\text{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ funksiya $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, $n=1, 2, \ldots$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda uzluksiz.

Xuddi shuningdek, $y=\text{ctg}x$ funksiya $x=n\pi$, $n=1, 2, \ldots$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda uzluksiz ekanini ko'rsatish mumkin.

3-*misol.* $y=ax^n$, $n\in\mathbb{N}$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda uzluksiz bo'lishini tekshiring.

Ma'lumki, $y=ax^n=a\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$, ($n+1$ ta ko'paytuvchi) va $y=x$ funksiyaning uzluksizligini ko'rish qiyin emas. 1-teoremaga ko'ra, $y=ax^n$ funksiyaning uzluksizligi kelib chiqadi.

4-*misol.* $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ ko'rinishidagi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi. Bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda uzluksiz bo'ladi, chunki oldingi misolga ko'ra har bir qo'shiluvchi uzluksiz.

5-*misol.*
$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$
ko'rinishidagi funksiya *kasr ratsional funksiya* deyiladi. Maxraji noldan farqli nuqtalarda kasr ratsional funksiya uzluksiz bo'ladi.

2. Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Aytaylik, $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ funksiyalardan tuzilgan $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya berilgan bo'lsin.

2-teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x_o nuqtada, $y=f(u)$ funksiya $u_o=\varphi(x_o)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham x_o nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra, $\varphi(x)$ funksiya x_o nuqtada uzluksiz, $f(u)$ funksiya u_o nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_o)$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_o)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan $f(u_0)$ son $f(\varphi(x))$ funksiyaning $x\to x_0$ dagi limiti bo'ladi. Bu esa, $f(\varphi(x))$ funksiyaning x_o nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

6-*misol.* $y=\sin(x^3+4x+1)$ funksiya har bir $x\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlang.

Yechish. $u=x^3+4x+1$ funksiya barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada, $y=\sin u$ funksiya ham har bir $u\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun, 2-teoremaga ko'ra, $y=\sin(x^3+4x+1)$ murakkab funksiya ham barcha x larda uzluksiz bo'ladi.

3-§. Funksiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar x_0 nuqtada $y=f(x)$ funksiya uchun uzluksizlik shartlaridan kamida bittasi bajarilmasa, ya'ni agar x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya aniqlanmagan yoki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limit mavjud emas, yoki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ va $f(x_0)$ lar mavjud, lekin $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

1-ta'rif. Agar $f(x_o-0)$ va $f(x_o+0)$ bir tomonli limitlar chekli bo'lsa, u holda x_o nuqta funksiyaning *birinchi tur* uzilish nuqtasi deyiladi.

Bunda ikki hol yuz berishi mumkin:

a) $f(x_o-0)=f(x_o+0)$, ya'ni bir tomonli limitlar teng. Bu holda $f(x)$ funksiya *bartaraf qilish mumkin* bo'lgan uzilishga ega deb ataladi. Buning uchun $f(x_o)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ deb olish kifoya. Masalan,

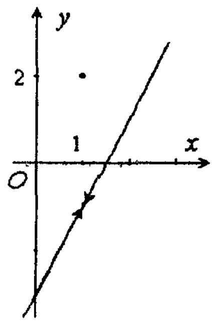
$f(x)=\begin{cases} 2x-3, & x\neq 1 \text{ bo'lsa}, \\ 2, & x=1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(2x-3)=$ $=-1$ bo'ladi. Demak, $f(1-0)=f(1+0)$, ammo $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1\neq 2=f(1)$ bo'lgani uchun, $x=1$ nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi ekan. Agar $f(1)=1$ deb olsak, funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz bo'lib qoladi (15-rasm);

b) $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, ya'ni bir tomonli limitlar teng bo'lmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *sakrashga ega* deyiladi. Ushbu $d=|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ son *sakrash kattaligi* deyiladi.

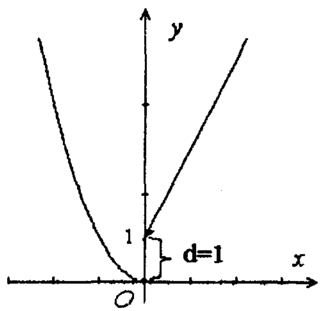
Masalan, $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x+1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$, funksiyani qaraylik. Bu funksiya $x=0$ nuqtada sakrashga ega, chunki

$$f(-0)=\lim_{x\to -0} x^2=0,\quad f(+0)=\lim_{x\to +0}(3x+1)=1 \text{ va } f(-0)\neq f(+0).$$

Demak, sakrash kattaligi $d=|1-0|=1$ bo'ladi (16-rasm).



15-rasm.

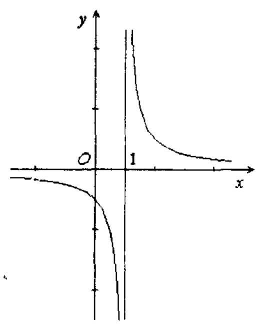


16-rasm.

2-ta'rif. Agar $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ bir tomonli limitlarning kamida biri mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqta funksiyaning *ikkinchi tur* uzilish nuqtasi deyiladi.

1-*misol.* $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. Bu funksiya uchun $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$,

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$. Demak, $x=1$ nuqta berilgan funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi ekan (17-rasm).



17-rasm.

2-*misol.* $D(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$ Dirixle funksiyasini ko'rib chiqamiz.

1-§ ning 2-misolida ko'rdikki, har bir $x_o \in(-\infty;+\infty)$ son uchun $D(x_o-0)$ ham, $D(x_o+0)$ ham mavjud emas. Demak, Dirixle funksiyasi barcha x larda ikkinchi tur uzilishga ega.

3-*misol.* Birinchi ajoyib limitga ko'ra, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega.

4-*misol.* $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 3, \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$ funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

4-§. Uzluksiz funksiyalarning xossalari

1. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz. Bu xossalar limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalariga o'xshab ketadi.

1^o. Agar $f(x)$ funksiya x_o nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda u x_o nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'ladi.

2^o. Agar $f(x)$ funksiya x_o nuqtada uzluksiz va $f(x_o)>p$ (mos ravishda $f(x_o)<q$) bo'lsa, u holda x_o nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda $f(x)>p$ (mos ravishda $f(x)<q$) bo'ladi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya x_o nuqtada uzluksiz va $f(x_o)>0$ (mos ravishda $f(x_o)<0$) bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning biror atrofidagi barcha nuqtalarda $f(x)>0$ (mos ravishda $f(x)<0$) bo'ladi.

2. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari.

Biz quyida, asosan, $[a;b]$ *segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarni*, ya'ni $(a;b)$ intervalda uzluksiz, a nuqtada o'ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz funksiyalarni ko'rib chiqamiz.

1-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Isbotni teskaridan faraz qilish usuli bilan olib boramiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. Ya'ni, qanday natural n son olmaylik, shunday $x_n \in [a;b]$ nuqta topilib, $f(x_n)>n$ bo'ladi.

Shu shart bilan $[a;b]$ segmentdan olingan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlikni qaraylik. Bu ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun, Bolsano-Veyershtrass lemmasiga ko'ra undan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikni ajratib olish mumkin: $x_{n_k} \to x_0 \in [a;b]$.

Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shuning uchun $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan, bu ketma-ketlikning qurilishiga ko'ra $f(x_{n_k})>n_k$ bo'lib, $f(x_{n_k}) \to +\infty$ ekani kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik, farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Teoremaning ikkinchi qismi ham shu kabi isbotlanadi.

Eslatma. Teoremadagi har bir shart muhim bo'lib, bu shartlarning birortasi bajarilmasa, u holda teoremaning xulosasi o'rinli bo'lmaydi. Masalan,

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{agar } x \in (0;1] \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$, funksiya $[0;1]$ segmentda aniqlangan va uning qiymatlar to'plami $E(f)=[1;+\infty)$. Demak, u chegaralanmagan. Bunga sabab, funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz emas;

b) $f(x)=x^2$ funksiya $[0;+\infty)$da uzluksiz, uning qiymatlar to'plami $E(f)=[0;+\infty)$. Demak, u chegaralanmagan. Bunga sabab, uning aniqlanish sohasi segmentdan iborat emas.

Bu misollar, funksiyaning uzluksiz bo'lishi va uning aniqlanish sohasi segment bo'lishi muhimligini bildiradi.

2-teorema. (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu segmentda o'zining aniq quyi va aniq yuqori chegaralariga erishadi.

Isboti. Teoremaning xulosasini quyidagicha aytish mumkin: $[a;b]$ segmentda shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo'lib, $f(x_1)=\sup\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\inf\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$ bo'ladi.

Demak, $f(x_1)$ son $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ segmentdagi eng katta qiymati, $f(x_2)$ esa eng kichik qiymati ekan.

Berilgan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lgani uchun, 1-teoremaga ko'ra chegaralangan bo'ladi. Demak, $E(f)$ to'plam aniq yuqori va aniq quyi chegaralarga ega. Ushbu $\sup\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}=c$, $\inf\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}=d$ belgilashlarni kiritaylik. Endi, $[a;b]$ segmentda biror x_1 nuqta mavjud bo'lib, $f(x_1)=c$ bo'lishini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, barcha $x\in[a;b]$ larda $f(x)<c$ bo'lsin. U holda $\varphi(x)=\dfrac{1}{c-f(x)}$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz va 1-teoremaga ko'ra chegaralangan. Ya'ni shunday $\mu>0$ son topilib, har bir $x\in[a;b]$ uchun $\varphi(x)\leq\mu$ bo'ladi. Bundan $f(x)\leq c-\dfrac{1}{\mu}$ bo'lib, $c-\dfrac{1}{\mu}$ son $f(x)$ funksiyaning yuqori chegarasi ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, c son $f(x)$ funksiyaning aniq yuqori chegarasi degan fikrga zid. Bu ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Eslatma. Teoremadagi har bir shart muhim bo'lib, ularning birortasi bajarilmasa, u holda teoremaning xulosasi ham o'rinli bo'lmaydi. Masalan,

a) Ixtiyoriy $b\geq1$ uchun $[0;b]$ segmentda $f(x)=x-[x]$ funksiya berilgan bo'lsin. Uning qiymatlar to'plami $E(f)=[0;1)$ bo'lib, funksiya $[0;b]$ segmentda o'zining yuqori chegarasiga erishmaydi. Bunga sabab, funksiya butun nuqtalarda, xususan, $x=1$ nuqtada uzluksiz emas.

b) $f(x)=x$ funksiyaning $(a;b]$ oraliqdagi qiymatlar to'plami $E(f)=(a;b]$ bo'lib, berilgan funksiya $(a;b]$ da o'zining aniq quyi chegarasiga erishmaydi. Bunga sabab, funksiyaning aniqlanish sohasi segmentdan iborat emas.

3-teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda shunday c nuqta $(a<c<b)$ topilib, $f(c)=0$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(a)<0$, $f(b)>0$ bo'lsin. $[a;b]$ kesmani teng ikki $[a; \frac{a+b}{2}]$ va $[\frac{a+b}{2};b]$ bo'lakka bo'lamiz. Agar $f(\frac{a+b}{2})=0$ bo'lsa, u holda teorema isbot qilingan bo'ladi.

Agar $f(\frac{a+b}{2})\neq0$ bo'lsa, u holda yangi segmentlardan birining chetki nuqtalarida funksiya turli ishorali qiymatlar qabul qiladi. Shu kesmani $[a_1;b_1]$ bilan belgilaymiz: $f(a_1)<0$ va $f(b_1)>0$.

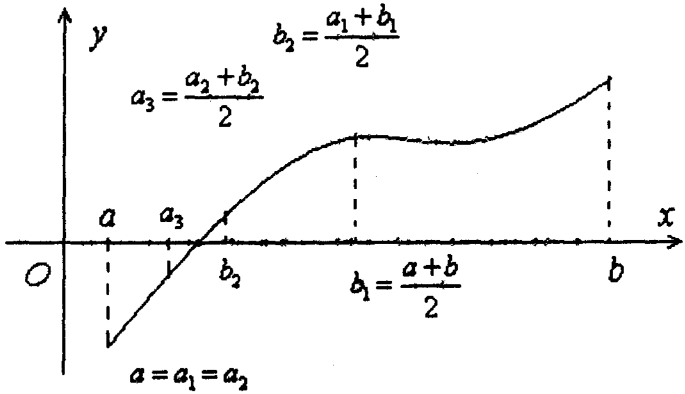
Endi, $[a_1;b_1]$ segmentni teng ikkiga bo'lamiz va yuqoridagi mulohazani $[a_1;b_1]$ segmentga nisbatan takrorlaymiz va hokazo.

Umuman, quyidagi ikki holdan biri ro'y beradi.

1-hol. Biror $\frac{a_n+b_n}{2}$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi;

2-hol. Barcha n lar uchun $f(\frac{a_n+b_n}{2})\neq0$ bo'lib, bu jarayon cheksiz davom etadi.

Agar 1-holda $\frac{a_n+b_n}{2}=c$ deb olsak, u holda $f(c)=0$ bo'lib, teorema isbot qilingan bo'ladi.



18-rasm.

2-holda esa ichma-ich joylashgan

$[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \ldots \supset [a_n;b_n] \supset \ldots$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'lib, barcha n=1, 2, 3,... larda $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$ bo'ladi (18-rasm). Shuningdek, $[a_n;b_n]$ segmentning uzunligi a_n-b_n=$\frac{b-a}{2^n} \to 0$ bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi prinsipiga asosan shunday $c \in (a;b)$ nuqta mavjudki, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ o'rinli ekan. Endi $f(x)$ funksiya c nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$ va $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$ bo'ladi. Bulardan $f(c)=0$ kelib chiqadi.

Bu teoremadan tenglamalarning yechimi mavjudligini ko'rsatishda foydalanish mumkin.

Misol. $x^7+x^3+1=0$ tenglamaning [-1;0] segmentda yechimi mavjudligini ko'rsating.

Yechish. $f(x)= x^7+x^3+1$ funksiya [-1;0] segmentda uzluksiz bo'lib, chetki nuqtalarda $f(-1)=-1<0$, $f(0)=1>0$ qiymatlarni qabul qiladi. 5-teoremaga asosan $c \in (-1;0)$ son topilib, $f(c)=0$ bo'ladi.

Demak, c son berilgan tenglamaning yechimi ekan.

4-teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida bir-biridan farqli, $f(a)=p$ va $f(b)=q$ qiymatlarga ega bo'lsa, u holda p va q sonlar orasidagi ixtiyoriy d son uchun shunday c nuqta $(a<c<b)$ topilib, $f(c)=d$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $p<d<q$ bo'lsin. Yordamchi $\varphi(x)=f(x)-d$ funksiyani olamiz. Bu, $\varphi(x)$ funksiya Bolsano-Koshining birinchi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi:

$\varphi(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'ladi, chunki, $y=f(x)$ va $y=d$ funksiyalar $[a;b]$ da uzluksiz.

$\varphi(a)=f(a)-d=p-d<0$, $\varphi(b)=f(b)-d=q-d>0$.

Shuning uchun $(a;b)$ intervalda shunday c nuqta topiladiki, $\varphi(c)=0$ yoki $f(c)-d=0$, ya'ni $f(c)=d$ bo'ladi.

Demak, $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgan funksiya o'zining, ixtiyoriy ikki qiymati orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda uning qiymatlari to'plami ham oraliq bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)$ oraliq bo'ladi.

5-§. Monoton funksiyaning uzluksizligi

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton funksiya bo'lsa, u holda u shu oraliqning istalgan nuqtasida uzluksiz bo'ladi yoki faqat birinchi tur uzilishga (sakrashga) ega bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi va x_o nuqta X oraliqning ichki nuqtasi bo'lsin. U holda x_o nuqtaning shunday $(x_o-\delta;x_o+\delta)\subset X$ atrofi mavjud bo'lib, $x\leq x_o$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ larda $f(x)\leq f(x_o)$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya yuqoridan chegaralangan. Monoton funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_o-0)\leq f(x_o)$ bo'ladi. Xuddi shu kabi, x_o nuqtada o'ng limit ham mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_o+0)\geq f(x_o)$ bo'ladi.

Bulardan $f(x_o-0)\leq f(x_o)\leq f(x_o+0)$ qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$ bo'lsa, u holda funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar, $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi.

Agar x_0 nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, bir tomonli limitning mavjudligini ko'rsatish kifoya.

Monoton kamayuvchi funksiya uchun ham shu kabi tasdiq o'rinli.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton **bo'lib,** uning qiymatlari to'plami biror Y oraliqdan iborat bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi bo'lsin. Faraz qilaylik, $x_0 \in X$ nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi bo'lsin. U holda 1-teoremaga asosan, $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ bo'ladi. Shuningdek, $(f(x_0-0);f(x_0+0))\setminus\{f(x_0)\}$ to'plamdagi sonlarning hech biri funksiyaning qiymati bo'lmaydi, ya'ni funksiyaning qiymatlar to'plami Y oraliqdan iborat bo'lmaydi. Bu ziddiyat fikrimizning noto'g'riligini, teoremaning to'g'riligini ko'rsatadi.

6-§. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz va o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda funksiyaning qiymatlar to'plami $Y=\{f(x): x\in X\}$ da unga teskari funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz va o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasiga asosan, uning qiymatlar to'plami Y oraliq bo'ladi. Demak, har bir $y_0\in Y$ uchun $f(x_0)=y_0$ tenglikni qanoatlantiruvchi x_0 son mavjud. Bu tenglikni qanoatlantiruvchi $x_0\in X$ yagona bo'ladi.

Haqiqatan, x_0 dan farqli x_1 nuqta olsak, $f(x)$ funksiya monoton bo'lib, $x_0\neq x_1$ bo'lgani uchun $f(x_0)\neq f(x_1)$ bo'ladi. Shunday qilib, Y oraliqdan olingan har bir y ga X oraliqda $f(x)=y$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x mos keladi. Demak, Y oraliqda $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud.

Endi, $y=f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lsa, $x=\varphi(y)$ funksiyaning ham o'suvchi bo'lishini, ya'ni $y_1<y_2$ ($y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$) bo'lganda $x_1<x_2$ tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $y_1<y_2$ bo'lganda $x_1>x_2$ bo'lsin. U holda $y=f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun $f(x_1)>f(x_2)$, ya'ni $y_1>y_2$ bo'ladi. Bu esa, $y_1<y_2$ deb olinishiga zid. Demak, $x=\varphi(y)$ funksiya Y oraliqda o'suvchi.

Monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi 1-teoremaga asosan, $x=\varphi(y)$ funksiya Y oraliqda uzluksiz bo'ladi. Funksiya kamayuvchi bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbot qilinadi.

7-§. Tekis uzluksiz funksiyalar

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x',x''\in X$ larda $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya X oraliqda *tekis uzluksiz* deyiladi.

Agar $x_o\in X$ nuqta olib, ta'rifdagi x' ni x bilan, x'' ni x_o bilan almashtirsak, $|x-x_o|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ lar uchun $|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa, $f(x)$ funksiyaning x_o nuqtada uzluksizligini bildiradi. Demak, $f(x)$ funksiyaning X da tekis uzluksizligidan u shu to'plamda uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Bu xulosaga teskari xulosa har doim to'g'ri bo'lavermaydi.

1-*misol.* $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0;1]$ oraliqda uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emasligini ko'rsating.

Yechish. Agar $\varepsilon=\frac{1}{2}$ deb olsak, u holda ta'rifda aytilganidek unga mos kelgan $\delta>0$ son mavjud emas, ya'ni qanday $\delta>0$ son olmaylik, $|x'-x''|<\delta$ bo'lgan x', x'' nuqtalar mavjudki, $|f(x')-f(x'')|>\frac{1}{2}$ bo'ladi.

Shuningdek, $x'=\frac{1}{n}$, $x''=\frac{1}{n+1}$ lar uchun

$|x'-x''|=|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}|=\frac{1}{n(n+1)}$ bo'ladi. Demak, n sonni shunday tanlash mumkinki, $\frac{1}{n(n+1)}<\delta$ bo'ladi. Lekin, $|f(x')-f(x'')|=$ $=|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})|=|n-(n+1)|=1$ bo'lib, uni $\frac{1}{2}$ dan kichik qilib bo'lmaydi. Shunday qilib, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0;1]$ da tekis uzluksiz emas ekan.

2-*misol.* $f(x)=x^2$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emasligini ko'rsating.

Yechish. Agar $x'=n$, $x''=n+\frac{1}{n}$ sonlarni olsak, u holda

$|x'-x''|=|n-(n+\frac{1}{n})|=\frac{1}{n}$ bo'lib, qanday $\delta>0$ son olmaylik, n sonni shunday tanlash mumkinki, $\frac{1}{n}<\delta$ bo'ladi. Bundan

$$|f(x')-f(x'')|=|n^2-(n+\frac{1}{n})^2|=|-2-(\frac{1}{n})^2|>2$$

kelib chiqadi. Demak, $f(x)=x^2$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda tekis uzluksiz emas.

Uzluksiz funksiyalar qaysi vaqtda tekis uzluksiz bo'ladi? – degan savol tug'iladi. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. (Kantor teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Teoremani teskaridan faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz ammo tekis uzluksiz bo'lmasin. Demak, biror $\varepsilon>0$ son mavjudki $\delta>0$ sonni qanchalik kichkina qilib olmaylik, $[a;b]$ da shunday x

va x'' nuqtalar topiladiki, $|x'-x''|<\delta$ bo'lsa ham, $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$ bo'ladi. Endi δ uchun, nolga intiluvchi $\delta_1=1$, $\delta_2=\frac{1}{2}$,. . ., $\delta_n=\frac{1}{n}$,. . . qiymatlarni olamiz. Shuningdek, δ_n sonning har bir qiymatiga ikkita x_n', $x_n''\in[a;b]$ nuqtalar topiladiki, ular uchun $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$ va $|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$ bo'ladi.

Har doim $x_n\in[a;b]$ bo'lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikni chegaralangan va Bolsano-Veyershtrass lemmasiga asosan undan yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratib olish mumkin: $x_{n_k}\to x_0$. Uzluksizlik ta'rifiga binoan $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ bo'ladi. Shuningdek, $\left|x'_{n_k}-x''_{n_k}\right|<\frac{1}{n_k}$ tengsizlikdan $x''_{n_k}\to x_0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(x''_{n_k})\to f(x_0)$. Bulardan $|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|<\varepsilon$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan farazga asosan, $|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\geq\varepsilon$. Bu qarama-qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

2-ta'rif. $\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}-\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ ayirma $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi *tebranishi* deyiladi va ω orqali belgilanadi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $[a;b]$ segmentning uzunliklari δ dan kichik bo'lan bo'laklarga bo'linganda funksiyaning har bir bo'lakdagi tebranishi ε dan kichik bo'ladi.

8-§. Elementar funksiyalar

1. Irratsional sonning taqribiy qiymatlari. Aytaylik, bizga α irratsional son berilgan bo'lsin. U holda shunday c_0 butun son mavjud bo'lib, α son c_0 va $c_0+1=d_0$ lar orasida yotadi, ya'ni $\alpha\in[c_0;d_0]$ bo'ladi. Endi, $[c_0;d_0]$ kesmani teng 10 ta bo'lakka bo'lamiz. α shu bo'lakchalardan biriga ichki nuqta bo'ladi. Masalan, $c_1=c_o+\frac{\alpha_1}{10}$, $d_1=c_0+\frac{\alpha_1+1}{10}$ (α_1-0, 1, 2, ..., 9 sonlardan biri) desak, $\alpha\in[c_1;d_1]$ bo'ladi. Endi, $[c_1;d_1]$ kesmani teng 10 bo'lakka bo'lamiz. α shu bo'lakchalardan birining ichki nuqtasi bo'ladi. Masalan, $c_2=c_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}$, $d_2=c_0+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2+1}{10^2}$, ($\alpha_1$-0,1,2,...,9 sonlardan biri) desak, $\alpha\in[c_2;d_2]$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, elementlari quyidagicha bo'lgan $\{c_n\}$ va $\{d_n\}$ **ketma-**ketliklarni tuzamiz:

$$c_n=c_o+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+...+\frac{\alpha_n}{10^n},$$

$$d_n=c_o+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+...+\frac{\alpha_n+1}{10^n},$$ (α_n=0,1,2,...,9 sonlardan biri).

Aniqki, $c_n<\alpha<d_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(d_n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$ va

$$[c_o;d_o]\supset[c_1;d_1]\supset...\supset[c_n;d_n]\supset...$$

larga egamiz. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga asosan $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_n=\alpha$ bo'ladi. Bu yerdagi c_n son α ning kami bilan, d_n son esa α ning ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati bo'ladi va xatolik $\frac{1}{10^n}$ dan kichik bo'lishi tushunarli.

2. Butun ko'rsatkichli daraja. Sonning arifmetik ildizi. Agar n musbat butun son bo'lsa, $a>0$ haqiqiy sonning n-darajasi deb $\underbrace{a\cdot a\cdot...\cdot a}_{n}$ ko'paytmani tushunamiz va u a^n orqali belgilanadi. Shuningdek, a^{-n} son $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ tenglik bilan aniqlanadi va $a^0=1$ deb qabul qilinadi.

Ixtiyoriy butun sonlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1°. Aytaylik, $n<m$ bo'lsin. Agar $a>1$ bo'lsa, u holda $a^n<a^m$, agar $a<1$ bo'lsa, u holda $a^n>a^m$ bo'ladi.

2°. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

3°. $(a^n)^m = a^{nm}$.

4°. $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Ixtiyoriy $n>0$ uchun $y=x^n$ funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda o'suvchi va uzluksiz, hamda $x=0$ da $y=0$, $x \to +\infty$ da $y \to +\infty$ bo'ladi.

Demak, har bir musbat a son uchun Bolsano-Koshining 2-teoremaga ko'ra $x^n=a$ tenglama yagona, musbat yechimga ega. Mana shu yechim $a>0$ sonning n-darajali *arifmetik ildizi* deyiladi va $\sqrt[n]{a}$ yoki $a^{\frac{1}{n}}$ ko'rinishda belgilanadi.

3. Ratsional ko'rsatkichli daraja. Aytaylik, $\dfrac{p}{q}$ ratsional va a musbat son bo'lsin. Agar p va q lar musbat butun son bo'lsa,

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p; \quad a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$$ deb qabul qilinadi.

4. Irratsional ko'rsatkichli daraja. Ixtiyoriy α irratsional son uchun a^α darajani aniqlaymiz.

Faraz qilaylik $a>1$ va α ixtiyoriy musbat irratsional son bo'lsin. Endi α sonning ko'pi bilan va kami bilan olingan taqribiy qiymatlaridan tuzilgan $\{c_n\}$ va $\{d_n\}$ to'plamlarni olaylik.

$a^\alpha = \sup\{a^{c_n}\}$ deb qabul qilamiz. U holda $a^\alpha = \inf\{a^{d_n}\}$ ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqatan, $\forall$ m va n lar uchun $c_m<d_n$ bo'lgani uchun

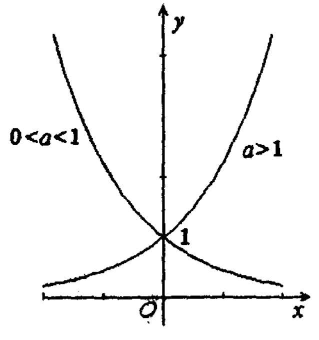
$a^{c_m} \le \sup\{a^{c_n}\} \le \inf\{a^{d_n}\} \le a^{d_m}$ o'rinli.

Agar $(1+\beta)^{10^m}=a$ tenglamaning yechimini β desak, u holda $\beta = a^{\frac{1}{10^m}} - 1$ bo'ladi. Bernulli tengsizligiga ko'ra,

$a=(1+\beta)^{10^m}\geq 1+\beta\cdot 10^m$ bo'ladi. Bundan $\beta\leq\frac{a-1}{10^m}$ ga ega bo'lamiz.

Shuning uchun, $a^{d_m}-a^{c_m}=a^{c_m}(a^{\frac{1}{10^m}}-1)=a^{c_m}\beta< a^{c_m}\frac{a-1}{10^m}$.

Shuningdek, $\{a^{c_m}\}$ to'plam chegaralangan, $\{\frac{a-1}{10^m}\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lganidan $\lim\limits_{m\to\infty}(a^{d_m}-a^{c_m})=0$ bo'ladi. Bundan $\sup\{a^{c_n}\}=\inf\{a^{d_n}\}$ kelib chiqadi.



19-rasm.

Agar $a<1$, $\alpha>0$ bo'lsa, u holda $a^{\alpha}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}}$ deb olamiz va butun sonlardagidek, $a>0$ va $\alpha<0$ bo'lganda, $a^{\alpha}=\frac{1}{a^{-\alpha}}$ deb qabul qilamiz.

Shunday qilib, ixtiyoriy haqiqiy x son uchun a^x ni aniqladik. Ta'kidlash joizki, a^x uchun yuqoridagi, butun ko'rsatkichli darajaning barcha xossalari o'rinli ekanligini tekshirib ko'rish mumkin.

5. Ko'rsatkichli funksiya.

1-ta'rif. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ ko'rinishidagi funksiya *ko'rsatkichli funksiya* deyiladi.

Ko'rsatkichli funksiyaning xossalari.

1°. Funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$ dan iborat.

2°. $a>1$ da $y=a^x$ funksiya o'suvchi va $a<1$ da kamayuvchi bo'ladi. Masalan, $a>1$ bo'lsin, u holda

$$x_1<x_2\Rightarrow\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}>a^0=1\Rightarrow a^{x_1}<a^{x_2}.$$

Shu kabi, $a<1$ bo‘lganda a^x funksiya kamayuvchi ekanligini ko‘rsatish mumkin (19-rasm).

3^o. $\forall\, x\in(-\infty;+\infty)$ da $a^x>0$.

4^o. $a>1$ uchun $\forall\, x\in(0;+\infty)$ da $a^x>1$, $\forall\, x\in(-\infty;1)$ da $a^x<1$;

$0<a<1$ uchun $\forall\, x\in(0;+\infty)$ da $a^x<1$, $\forall\, x\in(-\infty;0)$ da $a^x>1$;

$a^0=1$, ya’ni ko‘rsatkichli funksiyaning grafigi ordinata o‘qini (0;1) nuqtada kesib o‘tadi.

5^o. Ko‘rsatkichli funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz.

Isboti. Avvalo, $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik, $a>1$ bo‘lsin. U holda $a^{\frac{1}{n}}>1$ bo‘ladi. Agar $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ deb olsak, u holda $a=(1+\alpha_n)^n\geq 1+n\alpha_n \Rightarrow \alpha_n\leq\dfrac{a-1}{n}$ bo‘ladi.

Endi, $\alpha_n>0$ bo‘lganligidan, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n}=0$ kelib chiqadi.

Ushbu $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha_n$ tenglikda limitga o‘tsak,

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1+\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1.$$

Demak, $-\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x larda $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{-\frac{1}{n}}<a^x<a^{\frac{1}{n}}$ tengsizlik o‘rinli. Bundan va $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ dan $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $x_0\in(-\infty;+\infty)$ uchun

$$\lim_{x\to x_0} a^x=\lim_{x\to x_0}\left(a^{x_o}\cdot a^{x-x_o}\right)=\left|\begin{array}{c} x-x_o=t \\ x\to x_o \Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=a^{x_o}\lim_{t\to 0} a^t=a^{x_o}$$

bo‘ladi. Shuningdek, agar $a<1$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0}} = a^{x_0}$$

bo'ladi. Shunday qilib, ko'rsatkichli funksiya barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ larda uzluksiz.

6^0. a^x ning qiymatlar to'plami $(0;+\infty)$ dan iborat. Aytaylik, $a>1$ bo'lsin. U holda $a=1+\lambda$ deb olsak, $\lambda>0$ bo'ladi.

$a^n=(1+\lambda)^n \geq 1+n\lambda$ tengsizlikdan $n\to+\infty$ da $a^n\to+\infty$ kelib chiqadi. Demak, a^x istalgancha katta qiymatlarga ega.

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ dan $n\to+\infty$ da $a^{-n}\to 0$ kelib chiqadi.

Xuddi shu kabi, $a<1$ holni ham tekshirish mumkin.

6-xossaga asosan, a^x funksiyaning qiymatlar to'plami $(0;+\infty)$ intervaldan iborat bo'ladi.

6. Giperbolik funksiyalar. Quyidagi ko'rinishdagi funksiyalar mos ravishda:

$y=\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ -giperbolik kosinus, $y=\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ -giperbolik sinus,

$y=\text{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ -giperbolik tangens, $y=\text{cth}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ -giperbolik kotangens deyiladi.

$y=\text{sh}x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, qiymatlar to'plami $(-\infty;+\infty)$ intervaldan iborat. U toq funksiya va $(-\infty;+\infty)$ intervalda uzluksiz.

$y=\text{ch}x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$, qiymatlar to'plami $(1;+\infty)$ intervaldan iborat. U juft funksiya va $(-\infty;+\infty)$ intervalda uzluksiz.

$y=\text{th}x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan va qiymatlar to'plami $(-1;1)$ intervaldan iborat.

$y=\text{cth}x$ funksiya 0 dan farqli barcha $x\in(-\infty;+\infty)$larda aniqlangan va qiymatlari to'plami $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ dan iborat.

th$x$, cth$x$ funksiyalarning har biri toq va o'zining aniqlanish sohalarida uzluksiz.

Giperbolik funksiyalar orasida quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\mathrm{th}x=\frac{shx}{chx},\quad \mathrm{cth}x=\frac{chx}{shx},\qquad \mathrm{th}x\cdot\mathrm{cth}x=1,\qquad \mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,$$

$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}y,\qquad \mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y,$$

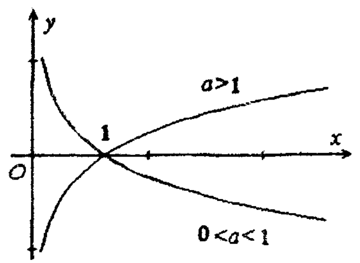
$$\mathrm{th}(x\pm y)=\frac{thx\pm thy}{1\pm thx\cdot thy},$$

$$\mathrm{cth}(x\pm y)=\frac{1\pm thx\cdot thy}{thx\pm thy},$$

$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x,\quad \mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x.$$

7. Logarifmik funksiya.

2-ta'rif. Biror b musbat sonning a (a>0) asosli logarifmi deb, b sonni hosil qilish uchun a sonni ko'tarish kerak bo'lgan α darajaga aytiladi: $a^{\alpha}=b$. Odatda, b sonning a asosga ko'ra logarifmi $\alpha=\log_a b$ orqali belgilanadi.



20-rasm.

Boshqacha aytganda, b sonning a asosga ko'ra logarifmi $a^x=b$ tenglamaning yechimidan iborat.

$y=a^x$ funksiya $a>1$ da o'suvchi, $a<1$ da kamayuvchi va qiymatlar to'plami $(0;+\infty)$ dan iborat bo'lgani uchun $a^x=b$ tenglama yagona yechimga ega. Demak, har qanday musbat b son yagona logarifmga ega.

3-ta'rif. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) ko'rinishdagi funksiya *logarifmik funksiya* deyiladi.

Logarifmning ta'rifiga ko'ra, logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga teskari funksiya bo'ladi. Logarifmik funksiyaning xossalarini sanab o'tamiz:

1°. $y=\log_a x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(0;+\infty)$ dan iborat.

2°. $y=\log_a x$ funksiya $a>1$ da o'suvchi, $a<1$ da kamayuvchi va ixtiyoriy musbat $a\neq 1$ uchun $\log_a 1=0$ bo'ladi.

Demak, logarifmik funksiya abssissa o‘qini (1;0) nuqtada kesib o‘tadi.

3°. $y=\log_a x$ funksiya $(0;+\infty)$ da uzluksiz funksiya bo‘ladi (20-rasm).

8. Darajali funksiya.

4-ta'rif. $y=x^{\mu}$ ko‘rinishidagi funksiya *darajali funksiya* deyiladi. Bu yerda μ, o‘zgarmas haqiqiy son.

Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi μ ga bog‘liq. Masalan, $f(x)=x^{\frac{1}{2m}}$ bo‘lib, $m\in\mathbb{N}$ bo‘lsa, $D(f)=[0;+\infty)$, $f(x)=x^{\frac{1}{2m-1}}$ bo‘lib, $m\in\mathbb{N}$ bo‘lsa, $D(f)=(-\infty;+\infty)$ bo‘ladi.

Shuningdek, $f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;+\infty)$, $f(x)=x^n$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-\infty;+\infty)$ bo‘ladi.

Agar μ irratsional son bo‘lsa, $y=x^{\mu}$ uchun $D(f)=(0;+\infty)$ bo‘ladi.

Darajali funksiyaning ba'zi xossalarini sanab o‘tamiz:

1°. $\mu>0$ bo‘lganda darajali funksiya o‘suvchi, $\mu<0$ bo‘lganda darajali funksiya kamayuvchi bo‘ladi.

Haqiqatan, $x^{\mu}=e^{\mu \ln x}$ almashtirishga ko‘ra hamda $y=\ln x$ va $y=e^u$ funksiyalarning har biri o‘suvchi bo‘lgani uchun $\mu>0$ bo‘lsa, $y=x^{\mu}$ o‘suvchi, $\mu<0$ bo‘lsa, $y=x^{\mu}$ kamayuvchi bo‘ladi.

2°. $y=x^{\mu}$ funksiya $(0;+\infty)$ da uzluksiz.

Bu $\ln x$ va e^x funksiyalarning har biri o‘zining aniqlanish sohasida uzluksiz bo‘lganidan kelib chiqadi.

9. Trigonometrik funksiyalar. Trigonometrik funksiyalar maktabda, akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida o‘rganilgan. Shu sababli, bu yerda trigonometrik funksiyalarning xossalarini sanab o‘tish bilan chegaralanamiz.

1°. $y=\cos x$, $y=\sin x$ funksiyalrning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$ intervaldan, qiymatlar to‘plami $[-1;1]$ segmentdan iborat.

y=tg$x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $\frac{\pi}{2}+k\pi$, k=±1, ±2,. . . nuqtalardan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan, qiymatlari to'plami (-∞;+∞) intervaldan iborat.

y=ctg$x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $k\pi$, k=±1, ±2, . . . sonlardan boshqa hamma haqiqiy sonlar to'plamidan, qiymatlar to'plami (-∞;+∞) intervaldan iborat.

2°. y=cos$x$ juft funksiya, y=sin$x$, y=tg$x$, y=ctg$x$ funksiyalar esa toq funksiyalardir.

3°. y=cos$x$, y=sin$x$, y=tg$x$ va y=ctg$x$ funksiyalarning har biri o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz funksiyalardir.

4°. y=cos$x$, y=sin$x$ funksiyalar davriy bo'lib, ularning asosiy davri 2π ga teng. y=tg$x$, y=ctg$x$ funksiyalar ham davriy bo'lib, ularning asosiy davri π ga teng.

10. Teskari trigonometrik funksiyalar.

1. **y=arcsin$x$ arksinus funksiya**. Ma'lumki, y=sin$x$ funksiya $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ segmentda o'suvchi va uzluksiz bo'lib, qiymatlari to'plami [-1;1] segmentdan iborat (21, a) -rasm). Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan, [-1;1] segmentda y=sin$x$ funksiyaga teskari funksiya mavjud. Bu funksiya y=arcsin$x$ orqali belgilanadi.

Bu funksiyaning xossalarini sanab o'taylik.

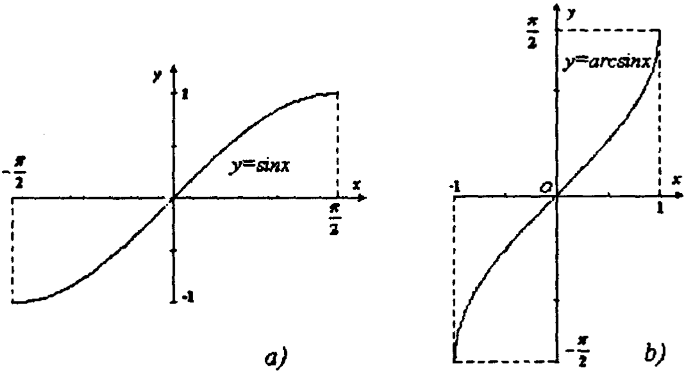
1°. Aniqlanish sohasi $D(f)$=[-1;1].

2°. Qiymatlari to'plami $E(f)=[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

3°. y=**arcsin$x$ funksiya** [-1;1] da o'suvchi.

4°. y=arcsin$x$ **funksiya** [-1;1] da uzluksiz.

Arcsinus funksiyalarning grafigi 21, b-rasmda berilgan.



21-rasm.

2. y=arccos$x$, arkkosinus funksiya.

y=cos$x$ funksiya [0;π] segmentda kamayuvchi va uzluksiz bo'lib, qiymatlar to'plami [-1;1] segmentdan iborat (22, a-rasm). Shuning uchun, [-1;1] segmentda y=cos$x$ funksiyaga teskari funksiya mavjud. Bu funksiya y=arccos$x$ orqali belgilanadi.

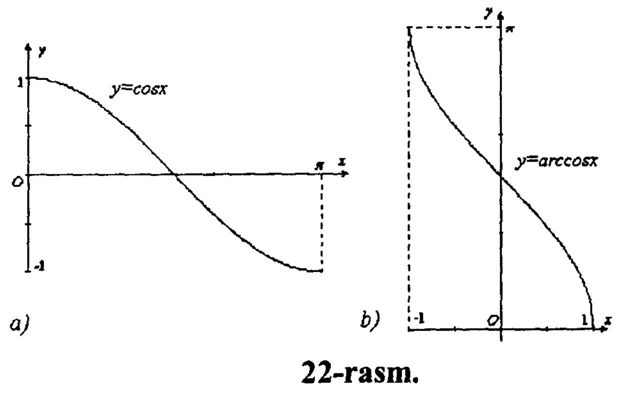
Bu funksiyaning xossalarini sanab o'taylik.

1°. Aniqlanish sohasi $D(f)$=[-1;1].

2°. Qiymatlari to'plami $E(f)$=[0;π].

3°. y=arccos$x$ funksiya [-1;1] da kamayuvchi.

4°. y=arccos$x$ funksiya [-1;1] da uzluksiz (22, b-rasm).



22-rasm.

Xuddi shunga o‘xshash, y=arctg$x$ va y=arcctg$x$ funksiyalarni ta’riflash mumkin.

Mana shu to‘rt xil funksiyalar *teskari trigonometrik funksiyalar* deyiladi.

Darajali, ko‘rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar *asosiy elementar funksiyalar* deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalar ustida to‘rt arifmetik amal (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish) va murakkab funksiya tuzish chekli marta bajarilganda hosil bo‘ladigan funksiyalar *elementar funksiyalar* deyiladi.

1. Quyidagi funksiyalarning har biri elementar funksiyaga misol bo‘ladi:

a) $y=x^2+\sin 2x$;

b) $y=\sqrt{\lg^2 x+\frac{1}{x}}+\arccos x$;

d) $y=\sin^2(x^3+3x+1)+\ln x$.

2. Elementar **bo‘lmagan** funksiyalarga quyidagilar misol bo‘ladi:

a) $y=[x]$ funksiya, “x ning butun qismi”;

b) $y=\{x\}=x-[x]$ funksiya, “x ning kasr qismi”;

d) Dirixle funksiyasi, $D(x)=\begin{cases} 1, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$.

IV bobga doir test savollari

1. Quyidagilarning qaysi biri xato?

A) agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo‘lsa, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi;

B) agar $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0)=0$ bo‘lsa, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi;

C) $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun shu nuqtada chapdan va o‘ngdan uzluksiz bo‘lishligi zarur va etarli;

D) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ bo'lsa, u holda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

2. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to'g'ri?

A) ixtiyoriy chegaralangan funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz;

B) monoton funksiyaning uzulish nuqtasi birinchi tur uzulish nuqta bo'ladi;

C) ixtiyoriy monoton funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi;

D) $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

3. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to'g'ri?

A) $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiya shu intervalda chegaralangan bo'ladi;

B) $(a;b)$ intervalda chegaralangan ixtiyoriy funksiya shu intervalda uzluksiz bo'ladi;

C) $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy funksiya shu segmantda chegaralangan bo'ladi;

D) $[a;b]$ segmentda o'suvchi bo'lgan ixtiyoriy funksiya shu segmentda uzluksiz bo'ladi.

4. Quyidagi jumlalarning qaysi biri xato?

A) $[a;b]$ segmentda uzluksiz funksiya shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi;

B) $[a;b]$ segmentda uzluksiz funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi;

C) $[a;b]$ segmentda uzluksiz funksiyaning qiymatlar to'plami ham segment bo'ladi;

D) $[a;b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan funksiya shu segmentda monoton bo'ladi.

5. Funksiyaning uzilish nuqtalarini toping $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

A) $x=1, x=2$; B) $x=1, x=-3$;
C) $x=1, x=3$; D) $x=4, x=3$.

6. Funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

$$y=\begin{cases} -x-3, & \text{agar } x<-1 \text{ bo‘lsa,} \\ 0, & \text{agar } -1\le x<0 \text{ bo‘lsa,} \\ \sqrt{x}, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

A) $x=0$; B) $x=-1, x=0$; C) $x=-1$; D) $x=-3$.

7. Quyidagi qaysi funksiyalarning [0;3] kesmada teskari funksiyasi mavjud?

1) $y=x^2+2x+2$; 2) $y=2x^3$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=2x^2+1$
A) 1 va 2; B) 2 va 4; C) 1 va 3; D) 1, 2 va 4.

8. Quyidagi qaysi funksiyalarning R da teskari funksiyasi mavjud?

1) $y=\sin x$; 2) $y=2x^2-1$; 3) $y=4x^3$; 4) $y=\mathrm{arctg}\,x$
A) 1 va 3; B) 1 va 2; C) 1,3 va 4; D) 3 va 4.

9. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, quyidagilardan qaysi biri o‘rinli?

1) $f(x)$ ning teskari funksiyasi mavjud;
2) $f(x)$ ning $[a;b]$ kesmada aqalli bitta nolati mavjud;
3) $f(x)$ $[a;b]$ kesmaning ixtiyoriy qismida chegaralangan bo‘ladi;
4) $f(x)$ ning qiymatlar to‘plami kesma bo‘ladi.
A) 1 va 3; B) 2 va 3; C) 2 va 4; D) 3 va 4.

10. Quyidagi funksiyalardan qaysilari o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz?

1) $y=\arcsin x$, 2) $y=\mathrm{arctg}\,x$, 3) $y=\arcsin(\sin x)$, 4) $y=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)$
A) 1 va 2; B) 1 va 3; C) 1,2 va 4; D) barchasi.

11. Quyidagi mulahozalardan qaysi biri to'g'ri?

A) Agar funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lmasa, u holda u chegaralanmagan bo'ladi;

B) Agar funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u chegaralangan bo'ladi va eng katta hamda eng kichik qiymatlarini qabul qiladi;

C) Agar funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lmasa, u holda uning eng katta va eng kichik qiymatlari yo'q;

D) Agar funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'lsa, u holda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud.

12. $y=a^x$ – ko'rsatkichli funksiya uchun quyidagilarning qaysi biri xato?

A) $a>1$ bo'lganda o'sadi;

B) $0<a<1$ bo'lganda kamayadi;

C) quyidan chegaralangan;

D) yuqoridan chegaralangan.

13. $y=\log_a x$ logarifmik funksiya uchun quyidagilarning qaysi biri xato?

A) logarifmik funksiyaning grafigi abssissa o'qini kesadi;

B) logarifmik funksiyaning grafigi ordinata o'qini kesadi;

C) $a>1$ bo'lganda o'sadi;

D) $0<a<1$ bo'lganda kamayadi.

14. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri o'zining aniqlanish sohasida quyidan chegaralangan?

A) 1,2 B) 2,3 C) 1,3 D) 3,4 E) 2,4

15. Quyidagi funksiyalarning qaysi biri o'zining aniqlanish sohasida chegaralangan?

1) $y=a^x$; 2) $y=log_a x$; 3) $y=sinx$ 4) $y=cosx$

A) 1,2; B) 2,3; C) 1,3; D) 3,4.

16. $y=log_x(3-x)$ **funksiyaning aniqlanish sohasini toping.**
A) $(-\infty;3)$; B) $(0;+\infty)$; C) $(0;1)U(1;3)$; D) $(0;3)$.

17. $y=lgcosx$ **funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.**
A) $(-\infty;0]$; B) $(-1;0)$; C) $(-1;1)$; D) $(0;+\infty)$.

18. $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ **funksiyaning qiymatlar to'plamini toping.**
A) $(-1;1)$; B) $[-2;2]$; C) $(-2;2)$; D) $[-2;0)U(0;2]$.

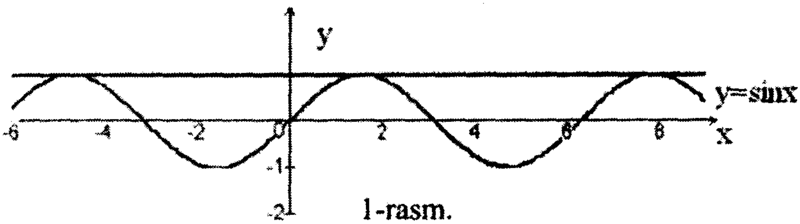
19. $y=a^x$ **funksiya uchun qaysi mulohaza noto'g'ri?**
A) aniqlanish sohasi – barcha haqiqiy sonlar to'plami;
B) qiymatlar to'plami – barcha musbat sonlar to'plami;
C) grafigi $(0;1)$ nuqtadan o'tadi;
D) aniqlanish sohasida har doim o'suvchi.

20. $y=log_a x$ **funksiya uchun qaysi mulohaza noto'g'ri?**
A) aniqlanish sohasi – barcha musbat sonlar to'plami;
B) grafigi $(1;0)$ nuqtadan o'tadi;
C) aniqlanish sohasida uzluksiz;
D) aniqlanish sohasida har doim o'suvchi.

IKKINCHI BO‘LIM. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING DIFFERENSIYAL HISOBI
V BOB. HOSILA

1-§. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar

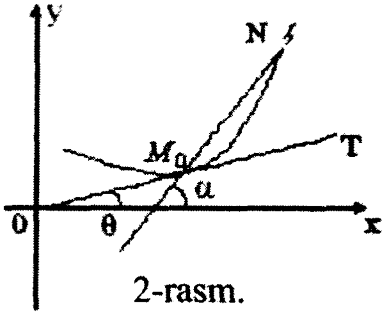
1.1. Egri chiziq urinmasi. Siz aylananing urinmasi tushunchasi bilan tanishsiz. Aylanaga o‘tkazilgan urinma shu aylana bilan yagona umumiy nuqtaga ega, shuningdek, aylana to‘g‘ri chiziqning bir tomonida joylashgan bo‘lar edi. Endi tekislikda ixtiyoriy egri chiziq berilgan bo‘lsa, unga o‘tkazilgan urinmani qanday aniqlash mumkin degan masalani ko‘rib chiqaylik.



1-rasm.

Urinmani egri chiziq bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq sifatida aniqlash mumkin emas, chunki, masalan, $y=ax^2$ parabola ordinata o‘qi bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega, lekin parabolaga urinmaydi. Egri chiziq urinma to‘g‘ri chiziqning bir tomonida joylashishi muhim xususiyat emas, chunki $y=ax^3$ egri chiziqqa abssissa o‘qi (0;0) nuqtada urinadi, lekin egri chiziq bu o‘qni shu nuqtada kesib o‘tadi. Urinmaning egri chiziq bilan yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lishi ham uning muhim xususiyati bo‘la olmaydi. Masalan, $y=1$ to‘g‘ri chiziq $y=sinx$ sinusoida bilan cheksiz ko‘p umumiy nuqtaga ega, ammo u sinusoidaga urinadi (1-rasm).

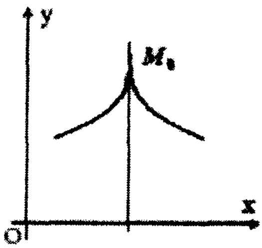
Urinmaga ta’rif berish uchun limit tushunchasidan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Faraz qilaylik, γ biror egri chiziq yoyi, M_0 shu egri chiziqning nuqtasi bo‘lsin. Egri chiziqqa tegishli N nuqtani tanlab, M_0N kesuvchi o‘tkazamiz. Agar N nuqta egri chiziq bo‘ylab M_0 nuqtaga yaqinlashsa, M_0N kesuvchi M_0 nuqta



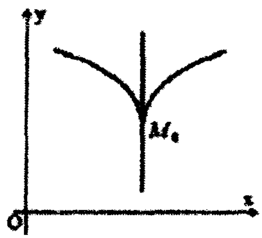
2-rasm.

atrofida buriladi. Shunday holat bo‘lishi mumkinki, N nuqta M_0 nuqtaga yaqinlashgan sari M_0N kesuvchi biror M_0T limit vaziyatga intilishi mumkin. Bu holda M_0T to‘g‘ri chiziq γ egri chiziqning M_0 nuqtasidagi urinmasi deyiladi (2-rasm). Egri chiziqning urinmasi 3- va 4-rasmdagidek vaziyatda bo‘lishi ham mumkin.

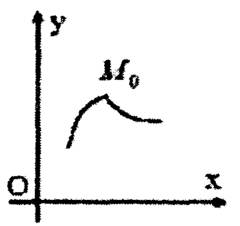
Agar kesuvchining limit holati mavjud bo‘lmasa, u holda M_0 nuqtada urinma o‘tkazish mumkin emas deyiladi. Bunday hol M_0 nuqta egri chiziqning sinish (o‘tkirlanish) nuqtasi (5-rasm) bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.



3-rasm.



4-rasm.

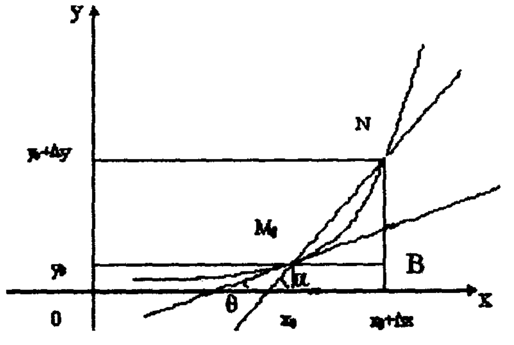


5-rasm.

1.2. Egri chiziq urinmasining burchak koeffitsientini topish masalasi. Endi γ egri chiziq biror oraliqda aniqlangan uzluksiz $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo‘lgan holda urinmaning burchak koeffitsientini topaylik. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya grafigini ifodolovchi γ chiziqqa tegishli M_0 nuqtaning abssissasi x_0, ordinatasi $f(x_0)$ va shu nuqtada urinma mavjud deb faraz qilaylik.

γ chiziqda M_0 nuqtadan farqli $N(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ nuqtani olib, M_0N kesuvchi o‘tkazamiz. Uning Ox o‘qi musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagini α bilan belgilaymiz (6-rasm).

Ravshanki, α burchak Δx ga bog‘liq bo‘ladi: $\alpha=\alpha(\Delta x)$ va $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{BN}{M_0B}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ o‘rinli. Urinmaning abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini θ bilan belgilaymiz. Agar $\theta\neq\pi/2$ bo‘lsa, u holda $\mathrm{tg}\alpha$ funksiyaning uzluksizligiga ko‘ra $k_{urinma}=tg\theta=$ $=\lim\limits_{N\to M_0} tg\alpha$, va N nuqtaning M_0 nuqtaga intilishi Δx yning 0 ga intilishiga teng kuchli ekanligini e’tiborga olsak,



6-rasm.

$k_{urinma}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiyaning abssissasi x_0 bo‘lgan nuqtasida novertikal urinma o‘tkazish mumkin bo‘lishi uchun shu nuqtada $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitning mavjud bo‘lishi zarur va yetarli, limit esa urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo‘lar ekan.

3. Harakatdagi nuqta tezligini topish haqidagi masala. Aytaylik, moddiy nuqta $s=s(t)$ qonuniyat bilan to‘g‘ri chiziqli harakatlanayotgan bo‘lsin. Ma’lumki, fizikada nuqtaning t_0 va $t_0+\Delta t$ vaqtlar orasida bosib o‘tgan $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ yo‘lining shu vaqt oralig‘iga nisbati nuqtaning o‘rtacha tezligi deyilar edi: $v_{o‘rta}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$. Ravshanki, Δt qancha kichik bo‘lsa, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ o‘rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shuncha yaqin bo‘ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligi deb

$[t_0;t_0+\Delta t]$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikning Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi.

Shunday qilib, $v_{oniy}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Yuqoridagi ikkita turli masalani yechish jarayoni bitta natijaga – funksiya orttirmasining argument orttirmasiga bo'lgan nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashga keltirildi. Ma'lum bo'lishicha, ko'pgina masalalar yuqoridagi kabi limitlarni hisoblashni taqozo qilar ekan. Shu sababli buni alohida o'rganish maqsadga muvofiq.

2-§. Hosila

2.1. Funksiya hosilasining ta'rifi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervalga tegishli x_0 nuqta olib, unga shunday Δx orttirma beraylikki, $x_0+\Delta x\in(a,b)$ bo'lsin. Natijada $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $\Delta x\to 0$ da $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud va chekli bo'lsa, bu limit *$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi* deyiladi va $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$, yoki $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$ orqali, ba'zan esa $y'|_{x=x_0}$ yoki $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ kabi belgilanadi.

Demak, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Bunda $x_0+\Delta x=x$ deb olaylik. U holda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta x\to 0$ bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x \to x_0$ da $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nisbatning limiti sifatida ham ta'riflanishi mumkin:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lgan funksiya shu nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u (a,b) *intervalda differensiallanuvchi funksiya* deyiladi.

Hosila topish amali *differensiallash amali* deyiladi.

Yuqoridagi limit mavjud bo'lgan har bir x_0 nuqtaga aniq bitta son mos keladi demak $f'(x)$ – bu yangi funksiya bo'lib, u yuqoridagi limit mavjud bo'lgan barcha x larda aniqlangan. Bu funksiya $f(x)$ funksiyaning *hosila funksiyasi*, odatda, *hosilasi* deb yuritiladi.

Endi hosila ta'rifidan foydalanib, $y=f(x)$ funksiya hosilasini topishning quyidagi algoritmini berish mumkin:

1^0. Argumentning tayinlangan x qiymatiga mos funksiyaning qiymati $f(x)$ ni topish.

2^0. Argument x ga $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan chiqib ketmaydigan Δx orttirma berib, $f(x+\Delta x)$ ni topish.

3^0. Funksiyaning $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ orttirmasini hisoblash.

4^0. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbatni tuzish.

5^0. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini hisoblash.

1-*misol.* $f(x)=kx+b$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosila topish algoritmidan foydalanamiz.

1^0. Argument x ni tayinlab, funksiya qiymatini hisoblaymiz: $f(x)=kx+b$.

2^0. Argumentga Δx orttirma beramiz, u holda $f(x+\Delta x)=k(x+\Delta x)+b=kx+k\Delta x+b$.

3^0. Funksiya orttirmasi $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(kx+k\Delta x+b)-(kx+b)=k\Delta x$.

4^0. $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{k\Delta x}{\Delta x}=k$.

5^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}k=k$.

Demak, $(kx+b)'=k$ ekan.

Xususan, $f(x)=b$ o'zgarmas funksiya (bu holda $k=0$) uchun $(b)'=0$; $f(x)=x$ ($k=1$) funksiya uchun $x'=1$ bo'ladi.

2-*misol*. $f(x)=x^2$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Yuqoridagi algoritmdan foydalanamiz.

1^0. Argument x ni tayinlab, funksiya qiymatini hisoblaymiz: $f(x)=x^2$.

2^0. Argumentga Δx orttirma beramiz, u holda $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

3^0. Funksiya orttirmasi $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2==\Delta x(2x+\Delta x)$.

4^0. $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

5^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Demak, $(x^2)'=2x$ ekan.

3-*misol*. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. 1^0. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

2^0. $f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}$. Bu yerda umumiylikni cheklamagan holda $x>0$ va $|\Delta x|<x$ deb hisoblaymiz.

3^0. $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

4^0. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + x\Delta x}$.

5^0. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (-\frac{1}{x^2 + x\Delta x}) = -\frac{1}{x^2}$.

Demak, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

2. Hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi bilan uning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi orasida quyidagi bog'lanish mavjud:

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lsin. Demak, ushbu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limit mavjud va $f'(x_0)$ ga teng. Barcha $x \neq x_0$ nuqtalarda ushbu tenglik o'rinli: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$. U holda ko'paytmaning limiti haqidagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini bildiradi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremaning teskarisi o'rinli emas, ya'ni funksiyaning nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada hosilasi mavjudligi kelib chiqavermaydi. Masalan, $y=|x|$ funksiya x ning barcha qiymatlarida, xususan $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = |\Delta x|$ bo'lib, undan

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

va $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limiti mavjud emasligi kelib chiqadi, demak, $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas.

3. Bir tomonli hosilalar.

2-ta'rif. Agar $\Delta x \to +0$ ($\Delta x \to -0$) da $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi deb ataladi va $f'_+(x_0)$ ($f'_-(x_0)$) kabi belgilanadi.

Odatda, funksiyaning o'ng va chap hosilalari *bir tomonli hosilalar* deb ataladi.

Yuqoridagi misoldan, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi - 1 ga tengligi kelib chiqadi.

Funksiyaning hosilasi ta'rifi va bir tomonli hosila ta'riflardan hamda funksiya limiti mavjudligining zaruriy va yetarli shartidan quyidagi teoremaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ lar mavjud va $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli bo'ladi.

Bu teoremaning isbotini o'quvchiga mashq sifatida qoldiramiz.

4. Cheksiz hosilalar. Ba'zi nuqtalarda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limit $+\infty$ ($-\infty$) ga teng bo'lishi mumkin. Bunday hollarda shu nuqtalarda funksiya *cheksiz hosila*ga ega yoki funksiyaning hosilasi cheksizga teng deyiladi.

Ushbu $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya uchun $\Delta y/\Delta x$ nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini ko'rib chiqaylik. Funksiyaning 0 nuqtadagi orttirmasini hisoblaymiz: $\Delta y=\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=f(0+\Delta x)=f(\Delta x)=\sqrt[3]{\Delta x}$.

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ va bu nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limiti $+\infty$ ga teng.

Demak, $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega ekan.

Cheksiz hosila uchun ham bir tomonli cheksiz hosila tushunchasini qarash mumkin.

Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada $+\infty$ $(-\infty)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty\ (-\infty)$$

munosabatning o'rinli ekanligini isbotlash mumkin. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli ekanligi o'z-o'zidan ravshan.

Berilgan x_0 nuqtada $f'_+(x_0)=+\infty$, $f'_-(x_0)=-\infty$, ($f'_+(x_0)=-\infty$, $f'_-(x_0)=+\infty$) bo'lishi ham mumkin. Bunday holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga (xatto cheksiz hosilaga ham) ega emas deb hisoblanadi.

Misol tariqasida $y=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi bir tomonli hosilalarini aniqlaylik. Bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi orttirmasi $\Delta y(0)=\sqrt[3]{(\Delta x)^2}$ ga teng va $\frac{\Delta y(0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Shu sababli $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ va $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$

bo'ladi. Demak, $y'_-(0)=-\infty$, $y'_+(0)=+\infty$ bo'lib, funksiya $x=0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega emas.

3-§. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari. Urinma va normal tenglamalari

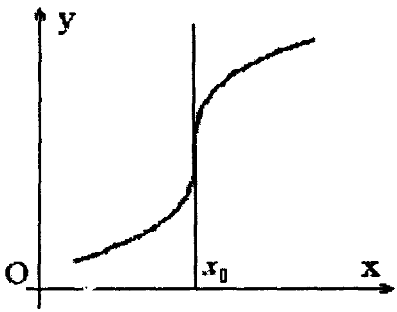
3.1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Yuqorida biz, agar $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0;f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish mumkin bo'lsa, u holda urinmaning burchak koeffitsienti $k_{urinma}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekanligini ko'rsatgan edik. Bundan hosilaning geometrik ma'nosi kelib chiqadi:

$y=f(x)$ funksiya grafigiga abssissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti hosilaning shu nuqtadagi qiymatiga teng $k_{urinma}=f'(x_0)$.

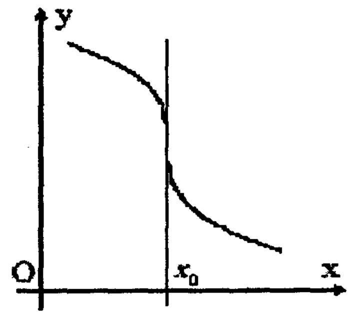
Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz va $f'(x_0)=+\infty$ bo'lsin. U holda funksiya grafigi abssissasi $x=x_0$ nuqtada vertikal urinmaga ega bo'lib, unga nisbatan funksiya grafigi 7-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.

Xuddi shu kabi $f'(x_0)=-\infty$ bo'lganda ham $x=x_0$ nuqtada funksiya grafigi vertikal urinmaga ega bo'ladi, funksiyaning grafigi urinmaga nisbatan 8-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.

Agar $f'_+(x_0)=+\infty$ va $f'_-(x_0)=-\infty$ bo'lsa, u holda funksiya grafigining $x=x_0$ nuqta atrofida 4-rasmda tasvirlangandek bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, $f'_+(x_0)=-\infty$ va $f'_-(x_0)=+\infty$ bo'lganda, funksiya grafigi $x=x_0$ nuqta atrofida 3-rasmdagidek ko'rinishda bo'ladi. Bunday hollarda $(x_0,f(x_0))$ nuqtada urinma mavjud, ammo hosila mavjud emas.



7-rasm.



8-rasm.

Agar $x=x_0$ nuqtada chekli bir tomonli hosilalar mavjud, lekin $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ bo'lsa, u holda funksiya grafigi 5-rasmdagiga o'xshash ko'rinishga ega bo'ladi. $(x_0, f(x_0))$ nuqta grafikning *sinish nuqtasi* bo'ladi.

3.2. Hosilaning fizik ma'nosi. Hosila tushunchasiga olib keladigan ikkinchi masalada harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi oniy tezligi $v_{oniy} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ekanligini ko'rgan edik. Bundan hosilaning fizik (mexanik) ma'nosi kelib chiqadi.

$s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziqli harakatda t vaqt momentidagi harakat tezligining son qiymati hosilaga teng: $v_{oniy} = s'(t)$.

Hosilaning mexanik ma'nosini qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikka teng.

Hosila tushunchasi nafaqat to'g'ri chiziqli harakatning oniy tezligini, balki boshqa jarayonlarning ham oniy tezligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, Aytaylik, $y=Q(T)$ jismni T temperaturaga qadar qizdirish uchun uzatilayotgan issiqlik miqdorining o'zgarishini tavsiflovchi funksiya bo'lsin. U holda jismning *issiqlik sig'imi* issiqlik miqdoridan temperatura bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$C=\frac{dQ}{dT}=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Umuman olganda, hosilani $f(x)$ funksiya bilan tavsiflanadigan jarayon oniy tezligining *matematik modeli* deb aytish mumkin.

3.3. Urinma va normal tenglamalari. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega, $M(x_0;f(x_0))$ funksiya grafigiga tegishli nuqta bo'lsin. Funksiya grafigiga shu nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzaylik.

Bu tenglamani $y=kx+b$ ko'rinishda izlaymiz. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $M(x_0;f(x_0))$ nuqtadan o'tishi ma'lum, shu sababli $f(x_0)=kx_0+b$ tenglik o'rinli. Bundan $b=f(x_0)-kx_0$ ekanligini topamiz. Demak, urinma tenglamasi $y=kx+f(x_0)-kx_0$ yoki $y=f(x_0)+k(x-x_0)$ ko'rinishga ega bo'ladi. Agar urinmaning k burchak koeffitsienti hosilaning x_0 nuqtadagi qiymatiga tengligini e'tiborga olsak, $y=f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0;f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

$y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0;f(x_0))$ nuqtasidan o'tadigan va shu nuqtadagi urinmaga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq normal deyiladi. Ma'lumki, agar $k_{urinma}\neq 0$ bo'lsa, urinma va normalning burchak koeffitsientlari $k_{normal}\cdot k_{urinma}=-1$ shart bilan bog'langan bo'ladi. Bundan $y=f(x)$ funksiya grafigiga $M(x_0;f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan normal tenglamasini

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (2)$$

keltirib chiqarish mumkin.

Izoh. Agar $k_{urinma}=0$ bo'lsa, u holda urinma tenglamasi $y=f(x_0)$, normal tenglamasi esa $x=x_0$ bo'ladi.

1-*misol*. Abssissasi $x=1$ bo'lgan nuqtada $y=1/x$ giperbolaga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing.

Yechish. Bu misolda $x_0=1$, $f(x_0)=1$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f'(1)=-1$. Bu qiymatlarni (1) formulaga qo'yib urinma tenglamasini hosil qilamiz: $y=1-(x-1)$, ya'ni $y=2-x$;

(2) formuladan foydalanib, normal tenglamasini yozamiz: $y=1+(x-1)$, ya'ni $y=x$.

2-misol. $y=x^2$ parabolaning A(0;-4) nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan nuqta $y=x^2$ parabolaga tegishli emasligi ko'rinib turibdi. Aytaylik, $x=x_0$ nuqta urinish nuqtasining abssissasi bo'lsin. U holda $f(x_0)=x_0^2$, $f'(x)=2x$, $f'(x_0)=2x_0$. (1) formuladan foydalansak, $y=x_0^2+2x_0(x-x_0)$,

ya'ni

$$y=2x_0x-x_0^2 \qquad (3)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Shartga ko'ra urinma (0;-4) nuqtadan o'tishi kerak. (3) tenglamada x va y o'rniga 0 va -4 qiymatlarini qo'yib x_0 ga nisbatan $-4=-x_0^2$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan $x_0=2$, $x_0=-2$ bo'lishini topamiz.

Agar $x_0=2$ bo'lsa, u holda urinma tenglamasi $y=4x-4$; agar $x_0=-2$ bo'lsa, $y=-4x-4$ bo'ladi.

Shunday qilib, ko'rsatilgan shartni qanoatlantiruvchi ikkita $y=4x-4$, $y=-4x-4$ urinma tenglamasini hosil qildik.

3.4. Ikki chiziq orasidagi burchak. Urinmalar yordamida ikki egri chiziq orasidagi burchak tushunchasi ta'riflanadi.

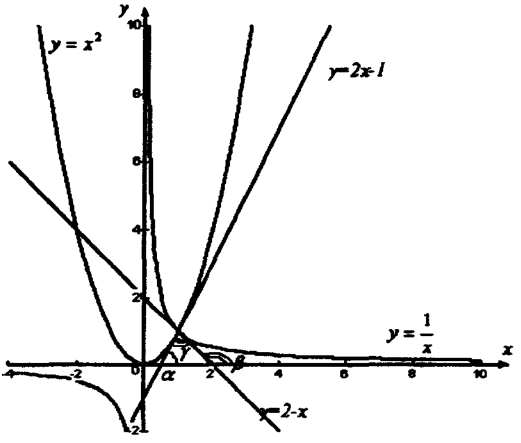
Ikki egri chiziq orasidagi burchak deb, ularning kesishish nuqtasida shu chiziqlarga o'tkazilgan urinmalari orasidagi burchakka aytiladi.

Bu ta'rifdan foydalanib ikki chiziq orasidagi burchak tangensini topish mumkin. Aytaylik, $y=f_1(x)$ va $y=f_2(x)$ chiziqlar $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada kesishsin hamda $y=f_1(x)$ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma abssissa o'qi bilan α burchak, $y=f_2(x)$ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma esa β burchak tashkil qilsin (9-rasm).

Agar γ urinmalar orasidagi burchak bo'lsa, u holda $\gamma=\beta-\alpha$ bo'ladi. Bundan esa

$$tg\gamma=tg(\beta-\alpha)=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta\cdot tg\alpha}$$

tenglikka ega bo'lamiz.



9-rasm.

Ammo hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra $tg\alpha=f_1'(x_0)$ va $tg\beta=f_2'(x_0)$, demak, ikki chiziq orasidagi burchak uchun

$$tg\gamma=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1-f_2'(x_0)\cdot f_1'(x_0)} \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

3-*misol.* $y=x^2$ parabola va $y=\frac{1}{x}$ giperbolalar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Avvalo, parabola va giperbolaning kesishish nuqtasini topamiz. Buning uchun ushbu $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ sistemani yechamiz. Bundan $x^2 = \dfrac{1}{x}$, $x^3=1$, $x=1$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, sistemaning yolg'iz (1,1) yechimi mavjud. $(x^2)'=2x$ bo'lgani uchun $f_1'(1)=2$, shuningdek, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ bo'lgani uchun $f_2'(1)=-1$ bo'ladi. Demak, (4) formulaga ko'ra $tg\gamma = \dfrac{-1-2}{1+2\cdot(-1)} = 3$ bo'lib, bundan burchak kattaligi uchun $\gamma=arctg3$ tenglikning o'rinli ekani kelib chiqadi (9-rasm).

4-§. Hosilani hisoblash qoidalari

Biz oldingi paragraflarda hosila tushunchasini turli fizik masalalarni yechishda, urinma tenglamasini yozishda foydalandik. Hosilaning boshqa tatbiqlarini kelgusida o'rganamiz. Bu degani har xil masalalarda uchrashi mumkin bo'lgan turli xil funksiyalarning hosilalarini hisoblashni bilish zarurligini anglatadi. Ushbu paragrafda $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning hosilalarini bilgan holda ularning yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasining hosilalarini topishni o'rganamiz.

Quyida keltirilgan teoremalar isbotida hosila topish algoritmidan, limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalardan foydalanamiz. Shuningdek, $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ va $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ ekanligini hisobga olgan holda, $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u$, $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$ tengliklardan foydalanamiz. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1. Yig'indining hosilasi.

1-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning $x \in (a,b)$ nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x)=u(x)+v(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va

$$f'(x)=u'(x)+v'(x) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. 1^0. $f(x)=u(x)+v(x)$.

2^0. $f(x+\Delta x)= u(x+\Delta x)+ v(x+\Delta x)= u(x)+\Delta u+ v(x)+\Delta v$.

3^0. $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)= \Delta u+\Delta v$.

4^0. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

5^0. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$.

Shunday qilib, (1) tenglik o'rinli ekan. Isbot tugadi.

Misol. $(x^2+1/x)'=(x^2)'+(1/x)'=2x-1/x^2$.

Matematik induksiya metodidan foydalanib, quyidagi natijani isbotlash mumkin:

Natija. Agar $u_1(x), u_2(x), \ldots ,u_n(x)$ funksiyalarning x nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x)= u_1(x)+ u_2(x)+ \ldots+u_n(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f'(x)=(u_1(x)+ u_2(x+ \ldots +u_n(x))'= u'_1(x)+ u'_2(x+ \ldots +u'_n(x) .$$

2. Ko'paytmaning hosilasi.

2-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ ko'paytmasi ham $x \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. 1^0. $f(x)=u(x)\cdot v(x)$.

2^0. $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)=(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v)=$
$=u(x)v(x)+\Delta uv(x)+\Delta vu(x)+ \Delta u\Delta v$.

3^0. $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)= \Delta uv(x)+\Delta vu(x)+\Delta u\Delta v$.

4^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta uv(x)+\Delta vu(x)+\Delta u\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$.

5^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x})\cdot v(x)+(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x})\cdot u(x)+$

$+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v.$

Bunda $v(x)$ funksiyaning uzluksizligini e'tiborga olsak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ va natijada (2) formulaga ega bo'lamiz.

1-natija. Quyidagi $(Cu(x))'=C\cdot u'(x)$ formula o'rinli.

Isboti. Ikkinchi teoremaga ko'ra $(Cu(x))'=C'\cdot u(x)+C\cdot u'(x)$. Ammo $C'=0$, demak, $(Cu(x))'=C\cdot u'(x)$.

Misollar. 1. $(6x^2)'=6(x^2)'=6\cdot 2x=12x$.

2. $(x^4)'=((x^2)(x^2))'=(x^2)'(x^2)+(x^2)(x^2)'=2x(x^2)+(x^2)\cdot 2x=4x^3$.

3. $(0,25x^4-3x^2)'=(0,25x^4)'+(3x^2)'=0,25\cdot 4x^3+3\cdot 2x=x^3+6x$.

2-natija. Agar $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funksiyalar x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $f(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)$ ham x nuqtada hosilaga ega va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$f'(x)=(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x))'=u'_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)+u_1(x)\cdot u'_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)+\ldots+u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u'_n(x)$.

3. Bo'linmaning hosilasi.

3-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega, $v(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda ularning $f(x)=u(x)/v(x)$ bo'linmasi $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. 1^0. $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$.

2^0. $f(x+\Delta x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}$.

3^0. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)}$

4^0. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)\Delta x}=$

$$=\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}$$

5^0. $\Delta x\to 0$ da limitga o'tamiz, limitga ega funksiyalarning xossalari va 2-teorema isbotidagi kabi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ tenglikdan foydalansak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\dfrac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=$ $=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ natijaga erishamiz, ya'ni (3) formula o'rinli ekan.

Misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{3x+7}{5x-4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $\left(\dfrac{3x+7}{5x-4}\right)'=\dfrac{(3x+7)'\cdot(5x-4)-(3x+7)\cdot(5x-4)'}{(5x-4)^2}=$

$$=\frac{3(5x-4)-5(3x+7)}{(5x-4)^2}=-\frac{47}{(5x-4)^2}.$$

Shunday qilib, biz ushbu paragrafda hosilani hisoblashning quyidagi qoidalarini keltirib chiqardik:

1. Ikkita, umuman, chekli sondagi funksiyalar yig'indisining hosilasi hosilalar yig'indisiga teng.
2. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin.
3. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi $u'v+uv'$ ga teng.
4. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bo'linmasining hosilasi $(u'v-uv')/v^2$ ga teng.

1- va 2-teorema natijalaridan foydalangan holda quyidagi qoidaning ham o‘rinli ekanligini ko‘rish qiyin emas:

5. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining hosilasi hosilalarning aynan shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng, ya'ni agar $f(x)=c_1u_1(x)+ c_2u_2(x)+...+ +c_nu_n(x)$ bo‘lsa, u holda $f'(x)=c_1u'_1(x)+ c_2u'_2(x)+...+ c_nu'_n(x)$.

Bu qoidaning isbotini o‘quvchilarga havola qilamiz.

Izoh. Yuqoridagi teoremalar funksiyalar yig‘indisi, ko‘paytmasi, bo‘linmasining hosilaga ega bo‘lishining yetarli shartlarini ifodalaydi. Demak, ikki funksiya yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatidan iborat bo‘lgan funksiyaning hosilaga ega bo‘lishidan, bu funksiyalarning har biri hosilaga ega bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $u(x)=|x|$, $v(x)=|x|$ deb, ularning ko‘paytmasini tuzsak, $y=x^2$ ko‘rinishdagi funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiyaning $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada, xususan, $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud. Ammo, ma'lumki, $y=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas.

5-§. Murakkab funksiyaning hosilasi. Teskari funksiyaning hosilasi

5.1. Murakkab funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $u=\varphi(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y=f(u)$ funksiya esa $(c;d)$ da aniqlangan bo‘lib, bu funksiyalar yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin (bunda, albatta, $x\in(a,b)$ da $u=\varphi(x)\in(c,d)$ bo‘lishi talab qilinadi).

1-teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega, $y=f(u)$ funksiya esa $u=\varphi(x)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(\varphi(x)))'=f'(u)\cdot\varphi'(x) \qquad (1)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo‘lganligi uchun uning x nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta u=\varphi'(x)\Delta x+\alpha\Delta x \qquad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda $\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$.

Shunga o‘xshash, $y=f(u)$ funksiyaning u nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\beta\Delta u \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bunda $\Delta u\to 0$ da $\beta\to 0$.

So‘ngi (3) tenglikdagi Δu o‘rniga uning (2) tenglik bilan aniqlangan ifodasini qo‘yamiz. Natijada $\Delta y=f'(u)(\varphi'(x)\Delta x+\alpha\Delta x)+$ $+\beta(\varphi'(x)\Delta x+\alpha\Delta x)=f'(u)\varphi'(x)\Delta x+(f'(u)\alpha+\varphi'(x)\beta+\alpha\beta)\Delta x$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar $\Delta x\to 0$ bo‘lsa, (2) tenglikdan $\alpha\to 0$ va $\Delta u\to 0$ bo‘lishi, agar $\Delta u\to 0$ bo‘lsa, u holda (3) tenglikdan $\beta\to 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bulardan esa $\Delta x\to 0$ da $f'(u)\alpha+\varphi'(x)\beta+\alpha\beta$ cheksiz kichik funksiya ekanligi kelib chiqadi, uni γ bilan belgilaymiz.

Shunday qilib, $\Delta y=f'(u)\varphi'(x)\Delta x+\gamma\Delta x$ tenglik o‘rinli. Bundan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x)+\gamma$ va $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\varphi'(x)$ o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $y'=f'(u)\varphi'(x)$ ekanligini isbotlaydi.

Misol. $y=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Bu yerda $y=u^4$, $u=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)$. Demak,

$$y'=(u^4)'\cdot\left(x^2-\frac{2}{x}\right)'==4u^3\left(2x+\frac{2}{x^2}\right)=8\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^3\left(x+\frac{1}{x^2}\right).$$

Amalda (1) tenglikni

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{yoki} \quad y_x'=y_u'u_x'$$

ko‘rinishda yozib, quyidagi qoida tarzida ifodalaydi:

Murakkab funksiyaning erkli o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilasi oraliq o‘zgaruvchi bo‘yicha olingan hosila va oraliq o‘zgaruvchidan erkli o‘zgaruvchi bo‘yicha olingan hosilalar ko‘paytmasiga teng.

Bu qoidani quyidagicha talqin qilish mumkin: agar berilgan nuqtada y o'zgaruvchi u ga nisbatan y_u' marta tez, u esa x ga nisbatan u_x' marta tez o'zgarsa, u holda y o'zgaruvchi x ga nisbatan $y_u'u_x'$ marta tez o'zgaradi, ya'ni $y_x'=y_u'u_x'$.

Yuqoridagi qoida uchta, umuman, chekli sondagi hosilaga ega bo'lgan funksiyalar kompozitsiyasi uchun ham o'rinli. Masalan, agar $y=f(u)$, $u=\varphi(t)$, $t=h(x)$ bo'lsa, u holda $y_x'=y_u'u_t't_x'$ tenglik o'rinli bo'ladi.

5.2. Teskari funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada monoton o'suvchi, $(a;b)$ intervalda $y'=f'(x)$ hosilaga ega va $\forall x\in(a,b)$ uchun $f'(x)\neq 0$ bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. U holda $y=f(x)$ funksiya uchun teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqidagi teorema shartlari bajariladi, chunki $y=f(x)$ funksiyaning uzluksizligi uning hosilaga ega ekanligidan kelib chiqadi. Shunday qilib, $[\alpha;\beta]$ kesmada $y=f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'ladi.

Teskari funksiya argumenti y ga $\Delta y\neq 0$ orttirma beramiz. U holda $x=\varphi(y)$ funksiya biror $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$ orttirma oladi va teskari funksiyaning monotonligidan $\Delta x\neq 0$, uzluksizligidan esa $\Delta y\to 0$ da $\Delta x\to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $x=\varphi(y)$ funksiyaning hosilasini topamiz. Yuqorida aytilganlarni e'tiborga olsak, hosilaning ta'rifiga ko'ra;

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)},$$ demak, $x_y'=\varphi'(y)=1/f'(x)$ formula o'rinli ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada monoton o'suvchi, $(a;b)$ intervalning har bir nuqtasida noldan farqli $y'=f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya $(f(a);f(b))$ intervalda hosilaga ega va $\forall y\in(f(a);f(b))$ uchun uning hosilasi $1/f'(x)$ ga teng bo'ladi.

Ushbu teorema $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lganda ham o'rinli ekanligini isbotlashni o'quvchilarga qoldiramiz.

Demak, teskari funksiya hosilasini hisoblash qoidasi

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \tag{4}$$

formula bilan ifodalanadi.

6-§. Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari

6.1. $y=x^{\mu}$ $(x>0)$ **darajali funksiyaning hosilasi.** Bu funksiyaning x nuqtadagi orttirmasi $\Delta y=(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}=x^{\mu}((1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu}-1)$ ga teng va $\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\mu-1}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$ bo'ladi.

Ma'lumki, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$. Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}x^{\mu-1}\cdot\left(\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^{\mu}-1}{\frac{\Delta x}{x}}\right)=\mu x^{\mu-1}$. Bundan funksiyaning x nuqtadagi hosilasi mavjud va $y'=\mu x^{\mu-1}$ bo'ladi.

Demak, $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ formula o'rinli.

Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash formulasini foydalangan holda, $(u(x))^{\mu}$ ko'rinishdagi murakkab funksiya uchun quyidagi formulani yozish mumkin:

$((u(x))^{\mu})'=\mu(u(x))^{\mu-1}\cdot u'(x)$.

Masalan, $y=(x^2+1)^3$ funksiyaning hosilasini topish talab qilinsin. Bu misolda $u(x)=(x^2+1)$, $\mu=3$. Demak, yuqoridagi formulaga ko'ra

$y'=3(x^2+1)^2\cdot((x^2+1)'=3((x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$ bo'ladi.

6.2. Ko‘rsatkichli funksiyaning hosilasi. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ ko‘rsatkichli funksiya uchun $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$ va $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$.

Ma’lumki, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ln a$.

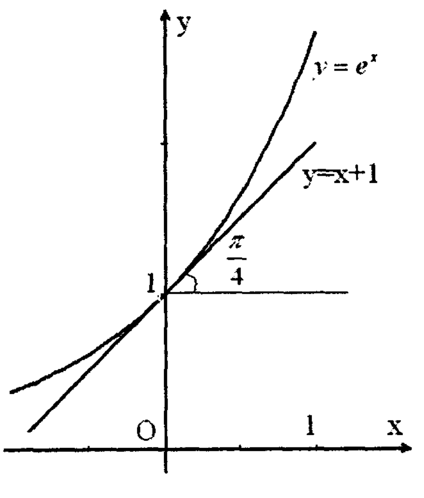
Shuning uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a^x\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\ =a^x\ln a$ mavjud. Demak, $(a^x)'=a^x\ln a$, xususan, $(e^x)'=e^x$ formulalar o‘rinli ekan.

Ko‘rinib turibdiki, $y=e^x$ funksiya ajoyib xossaga ega: uning hosilasi o‘ziga teng ekan.

Misol. $y=e^x$ funksiya grafigi Oy o‘qini qanday burchak ostida kesib o‘tadi?

Yechish. Funksiya grafigi Oy o‘qini (0;1) nuqtada kesib o‘tadi. Funksiya grafigiga shu nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz: $y'=e^x$ va $y'(0)=e^0=1$, bundan esa urinmaning Ox o‘qi bilan kattaligi $\pi/4$ ga teng bo‘lgan burchak tashkil qilishi kelib chiqadi. U holda urinma Oy o‘qi bilan ham kattaligi $\pi/4$ ga teng bo‘lgan burchak tashkil qiladi.

10-rasmda $y=e^x$ funksiya grafigi berilgan, bunda funksiya grafigi $x=0$ nuqta atrofida $y=x+1$ to‘g‘ri chiziqqa urinadi.



10-rasm.

Yuqoridagi misolda olingan natija e soniga quyidagicha ta’rif berishga imkon beradi: e soni deb ordinata o‘qini $\pi/4$ burchak ostida kesib o'tuvchi ko'rsatkichli funksiyaning asosiga aytiladi. $a^{u(x)}$ ($a>0$, $a\neq1$) funksiya uchun quyidagi formulalarning o'rinli bo'lishini ko'rish qiyin emas:

$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a.$

Masalan, $(3^{5x-3})' = 3^{5x-3} \cdot (5x-3)' \cdot \ln 3 = 5 \cdot 3^{5x-3} \cdot \ln 3.$

6.3. ***$y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$, $x>0$)*** **logarifmik funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya $x=a^y$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lgani uchun teskari funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{x \ln a}$, ya'ni $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Xususan, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ formula o'rinli.

Bu formulalardan quyidagi muhim xulosani chiqarish mumkin: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\log_a x)' = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x \ln a}=0$, ammo $(\log_a x)'$ geometrik nuqtayi nazardan $y=\log_a x$ funksiya grafigiga abssissasi x ga teng bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng. Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to+\infty} tg\alpha=0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha=0$, bu esa yetarlicha katta x lar uchun urinma abssissalar o'qiga «deyarli parallel» bo'lishini anglatadi. Bu holni funksiya grafigini chizishda hisobga olish zarur.

$\log_a u(x)$ funksiya uchun quyidagi formula o'rinli:

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln a}.$$

6.4. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari.

1) ***$y=\sin x$*** **funksiyaning hosilasi.** Funksiyaning x nuqtadagi orttirmasini sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$ ga teng. Bu tenglikda birinchi ajoyib limit va *cosx* funksiyaning uzluksizligini e'tiborga olgan holda limitga o'tsak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta \acute{o}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos x$$ bo'ladi.

Demak, *(sinx)'=cosx* formula o'rinli;

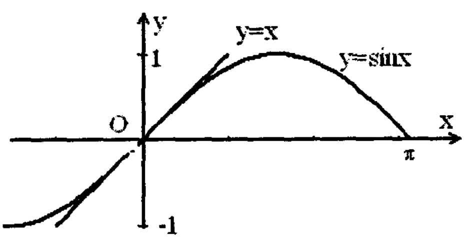
2) ***y=cosx* funksiyaning hosilasi**. Bu funksiyaning hosilasini topish uchun *cosx=sin(x+π/2)* ayniyat va murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz. U holda

(cosx)'=(sin(x+π/2))'=cos(x+π/2)·(x+π/2)'=cos(x+π/2)·1=cos(x+π/2).

cos(x+π/2)=-sinx ayniyatni e'tiborga olsak, quyidagi formulalarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi: *(cosx)'=-sinx;*

3) ***y=tgx* va *y=ctgx* funksiyalarning hosilalari**. Bu funksiyalarning hosilalarini topish uchun bo'linmaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$(tgx)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$



11-rasm.

Xuddi shunga o'xshash $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ formulani ham keltirib chiqarish mumkin. Buni mashq sifatida o'quvchilarga qoldiramiz.

Trigonometrik funksiyalarning argumentlari x erkli o‘zgaruvchining $u(x)$ funksiyasi bo‘lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko‘ra quyidagi formulalar o‘rinli bo‘ladi:

$$(\sin u)'=u'\cdot\cos u, \quad (\cos u)'=-u'\sin u,$$

$$(tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u}, \quad (ctgu)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Misol. $y=\sin x$ funksiya grafigi koordinatalar boshida Ox o‘qi bilan qanday burchak tashkil etadi?

Yechish. Buning uchun $y=\sin x$ grafigiga abssissasi $x=0$ bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz: $y'=\cos x$, demak, $f'(0)=\cos 0=1$, burchak koeffitsienti $tg\alpha=1$, bundan izlanayotgan burchak $\pi/4$ ga teng.

Misol. $y=tgx$ funksiya grafigi koordinatalar boshida Ox o‘qi bilan qanday burchak tashkil etadi

Yechish. Buning uchun $y=tgx$ funksiya grafigiga abssissasi $x=0$ bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz: $y'=(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, demak, $f'(0)=$ $=\frac{1}{\cos^2 0}=1$, burchak koeffitsienti $tg\alpha=1$, bundan izlanayotgan burchak $\pi/4$ ga teng.

Bu misollarda olingan natijalarni $y=\sin x$ va $y=tgx$ funksiya grafiklarni chizishda e’tiborga olish kerak. 11-rasmda $y=\sin x$ funksiya grafigi keltirilgan. Bu funksiya grafigi koordinatalar boshida $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa urinadi.

6.5. Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremadan foydalanib, $y=arssinx$ $(-1\leq x\leq 1)$ funksiyaning hosilasini topaylik.

Bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\sin y$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ da monoton o'suvchi va $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda hosilaga ega hamda bu intervalning har bir nuqtasida hosila noldan farqli: $x'_y=\cos y\neq 0$. Shuning uchun $y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}$. Endi $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda $\cos y>0$ va bunda $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 x}$ formula o'rinli bo'lganligi uchun $y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'ladi.

Demak, $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1<x<1)$

formula o'rinli.

Endi $y=\arccos x$ $(-1\leq x\leq 1)$ funksiyaning hosilasi uchun formula keltirib chiqaramiz. Bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\cos y$ funksiya $[0,\pi]$ da monoton kamayuvchi, $(0;\pi)$ da hosilaga ega bo'lib, bu intervalning har bir nuqtasida noldan farqli $x'_y=-\sin y$ hosilaga ega. Demak, teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teorema shartlari o'rinli. Shu sababli 5-§ dagi (4) ga ko'ra $y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ham o'rinli bo'ladi. (Bu yerda $(0;\pi)$ da $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$ ekanligidan foydalandik).

Shunday qilib, $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ formula o'rinli ekan.

Ma'lumki, $y=arctgx$ funksiyaning qiymatlar to'plami $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ intervaldan iborat. Shu intervalda unga teskari bo'lgan $x=tgy$ funksiya mavjud va bu funksiyaning hosilasi $x'_y=\frac{1}{\cos^2 y}$ noldan farqli. Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremadan foydalansak,

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(tgy)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi.

Demak, quyidagi formula o'rinli:

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Xuddi yuqoridagi kabi $y=arcctgx$ funksiya uchun

$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

formulaning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

Teskari trigonometrik funksiyalarning argumentlari x erkli o'zgaruvchining $u(x)$ funksiyasi bo'lsa, u holda murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi teoremadan quyidagi formulalar kelib chiqadi:

$$(arcsinu(x))'=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};\quad (arccosu(x))'=-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$$

$$(arctgu(x))'=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)};\quad (arcctgu(x))'=-\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$

7-§. Logarifmik hosila. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi

7.1. Logarifmik hosila. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va $f(x)>0$ bo'lsin. U holda shu intervalda $lny=lnf(x)$ funksiya aniqlangan bo'ladi. Bu funksiyani x

argumentning murakkab funksiyasi sifatida qarab, x nuqtadagi hosilasini hisoblash mumkin bo'lgan x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning hosilasini topish kerak bo'lsin. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz: $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\ln f(x))'$, bundan

$$y' = y(\ln f(x))' \qquad (1)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Funksiya logarifmidan olingan hosilaga *logarifmik hosila* deyiladi.

Bir nechta funksiyalar ko'paytmasining hosilasini topishda (1) formuladan foydalanish hisoblashlarni birmuncha soddalashtirishga imkon beradi. Haqiqatan ham, $y=u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n$ funksiya (bu yerda har bir u_i, $i=\overline{1,n}$ funksiya hosilaga ega va $\forall x \in D(f)$ da $u_i>0$) berilgan bo'lsin. Bu funksiyani logarifmlab, $\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + ... + \ln u_n$, bundan esa

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u'_n}{u_n}$$

tenglikni hosil qilamiz. So'nggi tenglikning ikkala tomonini y ga ko'paytirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n \cdot \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \cdots + \frac{u'_n}{u_n} \right).$$

Misol. $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyani logariflaymiz:

$\ln y = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+3)$. Bu tenglikdan hosila olib, ushbu tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}.$$

Bundan

$$y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3 (x+3)^4} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3} \right) =$$

$$=\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}.$$

2. Daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $y=(u(x))^{v(x)}$ $(u(x)>0)$ ko'rinishdagi daraja-ko'rsatkichli funksiya berilgan va $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar x ning qaralayotgan qiymatlarida differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyaning hosilasini hisoblash uchun (1) formulani qo'llaymiz. U holda (1) formulaga ko'ra $y'=u(x)^{v(x)}\cdot(\ln(u(x)^{v(x)}))'=u(x)^{v(x)}(v(x)\cdot\ln u(x))'=u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x)+$ $+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)})$ bo'ladi. Bundan $(u(x)^{v(x)})'=u(x)^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x)+$ $+v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x)$ formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, daraja-ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi ikkita qo'shiluvchidan iborat: agar $u(x)^{v(x)}$ ko'rsatkichli funksiya deb qaralsa, birinchi qo'shiluvchi, agar $u(x)^{v(x)}$ darajali funksiya deb qaralsa, ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi.

Misol. $y=x^{x-1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. (1) formulani qo'llaymiz.

$$y'=y\cdot(\ln x^{x-1})'=x^{x-1}\cdot((x-1)\ln x)'=x^{x-1}\cdot(\ln x+1-\frac{1}{x}).$$

8-§. Yuqori tartibli hosilalar

8.1. Yuqori tartibli hosila tushunchasi. Faraz qilaylik, biror (a,b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a,b) da aniqlangan funksiya bo'ladi. Demak, hosil bo'lgan funksiyaning hosilasi, ya'ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa, uni $f(x)$ funksiyaning *ikkinchi tartibli hosilasi* deyiladi va y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rif bo'yicha $y''(x)=(y')'$ ekan.

Shunga o'xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo'lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''', $f'''(x)$,

$\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha $y'''=(y'')'$.

Berilgan funksiyaning to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash aniqlanadi. Umuman, $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n-tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta'rif bo'yicha n-tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak, $y'''(2)=24\cdot2=48$.

Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n-tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini topish zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz.

1) $y=x^{\mu}$ $(x>0,\ \mu\in R)$ funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu\, x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)\,x^{\mu-2}, \ldots$

Bundan

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning $n=1$ uchun o'rinliligi yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni

$y^{(k)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n=k+1$da o'rinl bo'lishini ko'rsatamiz.

Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=$ $=(\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$ bo'lishi kelil chiqadi. Bu esa (1) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishin bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (1) formula $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun o'rinli.

(1) da μ=-1 bo'lsin. U holda $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (2)$$

formula bilan topiladi;

2) $y=lnx$ (x>0) funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $y'=\frac{1}{x}$ bo'lishidan va (2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (3)$$

formula kelib chiqadi;

3) $y=sinx$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y'=cosx$. Biz uni quyidagi

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y=sinx$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(IV)})=(-\cos x)'=\sin x=\sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

Bu ifodalardan esa $y=sinx$ funksiyainng n-tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to‘g‘riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Xuddi shunga o‘xshash

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \qquad (5)$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Masalan,

$$(\cos x)^{(115)} = \cos(x + 115\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x.$$

8.2. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi. Ikkinchi tartibli hosila sodda mexanik ma’noga ega. Aytaylik, moddiy nuqtaning harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan aniqlangan bo‘lsin. U holda uning birinchi tartibli hosilasi $v(t)=s'(t)$ harakat tezligini ifodalashi bizga ma’lum. Ikkinchi tartibli $a=v'(t)=s''(t)$ hosila esa harakat tezligining o‘zgarish tezligi, ya’ni harakat tezlanishini ifodalaydi.

Misol. Moddiy nuqta $s=5t^2+3t+12$ (s metrlarda, t sekundlarda berilgan) qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning o‘zgarmas kuch ta’sirida harakat qilishini ko‘rsating.

Yechish. $s'=(5t^2+3t+12)'=10t+3;$ $s''=(10t+3)'=10$, bundan $a=10m/s^2$ bo‘lib, harakat tezlanishi o‘zgarmas ekan. Nyuton qonuni bo‘yicha kuch tezlanishga proporsional. Demak, kuch ham o‘zgarmas ekan.

8.3. Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi.

1-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda bu ikki funksiya yig‘indisining n -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x)+ v(x))^{(n)}= u^{(n)}(x)+ v^{(n)}(x)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik, $y=u+v$ bo‘lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y'=u'+v',\ y''=(y')'=(u'+v')'=u''+v''.$$

Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya'ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ tenglik o'rinli bo'lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta'rifi, hosilaga ega bo'lgan funksiyalar xossalaridan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'=(u^{(k)})'+(v^{(k)})'= =u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko'ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural n uchun o'rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini n-tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini o'quvchilarga qoldiramiz.

Misol. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. So'ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladigan A va B koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x+3=A(x-3)+B(x-2)$ yoki

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ikki ko'phadning tenglik shartidan (ikki ko'phad teng bo'lishi uchun o'zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo'lishi zarur va yetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi $A=-7$, $B=9$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (1) tenglikka qo'yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasini quyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=-7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}+9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (7)$$

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun $u=\frac{1}{x+a}$ funksiyaning n-tartibli hosilasini bilish yetarli. Bu funksiyani $u=(x+a)^{-1}$ ko'rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$$u'=-(x+a)^{-2},\ u''=2(x+a)^{-3},\ u'''=-2\cdot 3(x+a)^{-3}=-6(x+a)^{-4}.$$

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+a)^{-n-1} \qquad (8)$$

Shunday qilib, (7) va (8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)}=-7\cdot(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}+9\cdot(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=$$

$$=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n}-\frac{7}{(x-2)^n}\right)$$

natijaga erishamiz.

3-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo'lsa, u holda bu ikki funksiya ko'paytmasining n-tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n{}'u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+$$
$$+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)} \qquad (9)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Isboti. Matematik induksiya metodini qo'llaymiz. Ma'lumki, $(uv)'=u'v+uv'$. Bu esa n=1 bo'lganda (9) formulaning to'g'riligini ko'rsatadi. Shuning uchun (9) formulani ixtiyoriy n uchun o'rinli deb olib, uning $n+1$ uchun ham to'g'riligini ko'rsatamiz. (9) ni differensiyalaymiz:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+u^{(n)}v'+C'_n u^{(n)}v'+C_n' u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-1)}v''+C_n^2u^{(n-2)}v'''+$$
$$+\ldots+C_n^k u^{(n-k+1)}v^{(k)}+C_n^k u^{(n-k)}v^{(k+1)}+\ldots+C_n^{n-1}u''v^{(n-1)}+C_n^{n-1}u'v^{(n)}+$$
$$+u'v^{(n)}+uv^{(n+1)} \qquad (10)$$

Ushbu

$$1+C_n'=1+n=C'_{n+1}, \quad C_n'+C_n^2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}=C_{n+1}^2,$$

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{(n+1)n\ldots(n+1-(k-1))}{k!}=C_{n+1}^k$$

tengliklardan foydalanib, (10) ni quyidagicha yozamiz:

$$(uv)^{n+1}=u^{(n+1)}v+C_{n+1}^1u^{(n)}v'+C_{n+1}^2u^{(n-1)}v''+\ldots+C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n+1)}$$

Demak, (9) formula $n+1$ uchun ham o'rinli ekan. Isbot etilgan (9) formula *Leybnits formulasi* deb ataladi.

Misol. $y=x^3e^x$ ning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. $u=e^x$ va $v=x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga ko'ra $y^{(20)}=x^3(e^x)^{(20)}+C_{20}^1(x^3)'(e^x)^{(19)}+C_{20}^2(x^3)''(e^x)^{(18)}+C_{20}^3(x^3)'''(e^x)^{(17)}+$ $+C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{16}+\ldots+(x^3)^{(20)}e^x$ bo'ladi. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)'''=6$, $(x^3)^{(4)}=0$ tengliklarni va $y=x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek, $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)}=e^x$ ekanligini e'tiborga olsak,

$y^{(20)}=e^x(x^3+3C_{20}^1x^2+6C_{20}^2x+6C_{20}^3)$ tenglik hosil bo'ladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$C_{20}^1=20, \quad C_{20}^2=\frac{20\cdot19}{2}=190, \quad C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}=\frac{20\cdot19\cdot18}{6}=1140$$

Demak,

$$y^{(20)}=e^x(x^3+60x^2+1140x+6840).$$

V bobga doir test savollari

1 $x-x_0$ = Δx ? = Δf	6 $f(x)=x^3-2x^2+1$ → Urinma $y=4x-7$ $f(x)=x^2$, $x_0=1$ → ?
2 $4x_0\Delta x$, $\Delta x\to 0$ → 0 $6x_0+5\Delta x$, $\Delta x\to 0$ → ?	7 $f(x)=x^3-2x^2+4$, $x_0=2$ → Normal $y=-0{,}25x+4{,}5$ $f(x)=x^2$, $x_0=1$ → ?
3 $(x^2+2)'$ = $2x$? = $3x^2$	8 $u(x)\cdot v(x)$ → $u'v+uv'$ $C\cdot u(x)$ → ? $C/v(x)$ → ?
4 $x\to x_0$ ⟺ $\Delta x\to 0$? ⟺ $\Delta f\to 0$	9 Tekis tezlanuvchan harakat — $v=at+v_0$ $(a>0)$ Tekis sekinlanuvchan harakat — ?

5 $u(x)+v(x) \rightarrow \Delta u+\Delta v$ $u(x)\cdot v(x) \rightarrow ?$ $u(x)/v(x) \rightarrow ?$	10 $(uv)' = u'v+uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = ?$ $? = u'-v'$
11 $(f(3x))'=3f'(3x)$ $? \quad =4f'(4x)$ $(3f(x))'= ?$ $(f^3(x))'=?$ $? \quad =3f'(3x+1)$	16 $(f(2x)) \rightarrow 4f''(2x)$ $? \leftarrow 2f''(2x)$
12 $(\sin 2x)'=2\cos 2x$ $(2\sin x)'=?$ $(\sin^2 x)'=?$ $(\sin(x^2))'=?$ $? \quad =4\cos 2x$	17 $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ $(u-v)^{(n)}=?$ $? \quad = Cu^{(n)}$
13 $(e^x+4)'=e^x$ $(e^{x+4})'= e^{x+4}$ $? \quad =e^x+4$ $? \quad =4e^x$ $(e^4)' =?$	18 $a^{u(x)} \rightarrow a^{u(x)}\cdot u'(x)\ln a$ $? \leftarrow \lambda u'(x)\cdot(u(x))^{\lambda-1}$ $u(x)^{v(x)} \rightarrow$

14 $\ln x \rightarrow 1/x$ $\log_2 x \rightarrow ?$	19 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ $? = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ $\left(\frac{2}{x}\right)^{(n)} = ?$
15 $tgx \rightarrow 1+tg^2x$ $thx \rightarrow ?$ $? \leftarrow 1+ctg^2x$	20 $(e^x)^{(n)}=e^x$ $(chx)^{(n)}=?$ $(shx)^{(n)}=?$ $? \quad =3^n e^{3x+1}$ $? \quad =3^{n-1} e^{3x+1}$

VI BOB. DIFFERENSIAL

1-§. Differensiallanuvchi funksiya. Differensiallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va $x_0 \in (a,b)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Δy orttirmasini

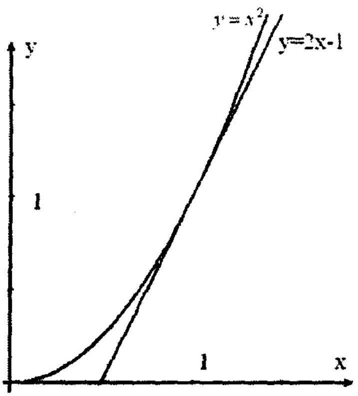
$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada *differensiallanuvchi funksiya* deyiladi. Bunda A - Δx ga bog'liq bo'lmagan biror o'zgarmas son, $\alpha(\Delta x)$ esa $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

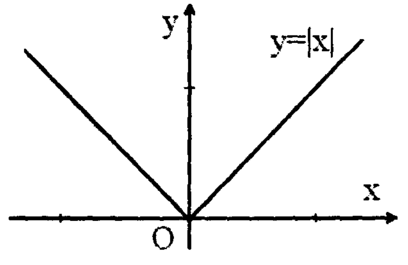
$y=kx+b$ chiziqli funksiyani ko'rib chiqamiz. Buning uchun $\Delta y = k\Delta x$ tenglik o'rinli, ya'ni funksiya orttirmasi argument orttirmasiga to'g'ri proporsional. Tarifdagi $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ tenglik esa, funksiya orttirmasi argument orttirmasiga «deyarli to'g'ri proporsional»ligini bildiradi, ya'ni $\Delta y \approx A\Delta x$. Bu tenglik $|\Delta x|$ qanchalik kichik bo'lsa, shunchalik aniqroq bo'ladi. Geometrik nuqtayi nazardan funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi funksiya grafigi x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida biror novertikal to'g'ri chiziq, ya'ni biror chiziqli funksiya grafigi bilan «qo'shilib» ketishini anglatadi. Shunday qilib, geometrik nuqtayi nazardan funksiyaning x nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi funksiya grafigini x nuqtaning yetarlicha kichik atrofida «to'g'rilash» mumkinligini anglatadi.

Masalan, 16-rasmda $y=x^2$ funksiya grafigining $x_0=1$ nuqta atrofida $y=2x-1$ to'g'ri chiziq grafigi bilan «qo'shilib» ketishi ko'rsatilgan.

17-rasmdan $y=|x|$ funksiyani $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi emasligi kelib chiqadi, bu funksiya grafigini $x=0$ nuqtaning hech bir atrofida «to'g'rilab» bo'lmaydi.



16-rasm.



17-rasm.

1-teorema. *f(x)* funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. *Zaruriyligi*. Funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda funksiyaning orttirmasini (1) ko'rinishda yozish mumkin. Undan $\Delta x \neq 0$ da $\frac{\Delta \acute{o}}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ ni yozish mumkin. Bundan $\Delta x \to 0$ da $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, demak, x nuqtada hosila mavjud va $f'(x)=A$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Chekli $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. U holda $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, bu yerda $\alpha(\Delta x)$ $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik funksiya. Demak,

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (2)$$

yoki $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, bu yerda $A=f'(x_0)$. Shunday qilib $x=x_0$ nuqtada $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va $A=f'(x_0)$ ekan.

Bu teorema bir o'zgaruvchili funksiya uchun differensiallanuvchi bo'lish hosilaning mavjud bo'lishiga teng kuchli ekanligini anglatadi. Shu sababli hosilani topish amali funksiyani *differensiallash*, matematik analizning hosila o'rganiladigan bo'limi *differensial hisob* deb ataladi.

Shunday qilib, avvalgi 1-ta'rif bilan ekvivalent bo'lgan ushbu ta'rifni ham berish mumkin:

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada *differensiallanuvchi* deyiladi.

2-§. Funksiya differensiali, uning geometrik va fizik ma'nolari

2.1. Funksiya differensiali. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, $x\in(a;b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ya'ni funksiyaning x nuqtadagi orttirmasini

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{1}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsin, bunda $\Delta x\to 0$ da $\alpha(\Delta x)\to 0$.

Ta'rif. x nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya orttirmasi (1) ning bosh qismi $f'(x)\Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi differensiali deyiladi va dy yoki $df(x)$ orqali belgilanadi, ya'ni $dy=f'(x)\Delta x$.

Masalan, $y=x^2$ funksiya uchun $dy=2x\Delta x$ ga teng.

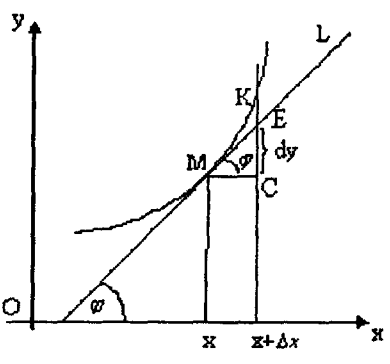
Agar $f(x)=x$ bo'lsa, u holda $f'(x)=1$ va $df(x)=1\cdot\Delta x$, ya'ni $dx=\Delta x$ bo'ladi. Shuni hisobga olgan holda argument orttirmasi, odatda, dx bilan belgilanadi.

Buni nazarga olsak, $f(x)$ funksiya differensialining formulasi $dy=f'(x)dx$ yoki

$$dy=y'dx \tag{2}$$

bo'ladi.

2.2. Differensialning geometrik ma'nosi. Endi $x\in(a;b)$ nuqtada differensallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning grafigi 18-rasmda ko'rsatilgan chiziqni ifodalasin deylik.



18-rasm.

Bu chiziqning $(x,f(x))$ va $(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ nuqtalarini mos ravishda M va K bilan belgilaylik. Unda $MC=\Delta x$, $KC=\Delta y$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya grafigiga uning $M(x,f(x))$ nuqtasida o'tkazilgan ML urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti $tg\varphi=f'(x)$. Shu ML urinmaning KC bilan kesishgan nuqtasini E bilan belgilaylik. Ravshanki, ΔMEC dan $\frac{EC}{MC}=tg\phi$. Bundan $EC=MC\cdot tg\varphi=f'(x)\Delta x$ ekani kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali $y=f'(x)\Delta x$ funksiya grafigiga $M(x,f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi EC ni ifodalaydi. Differensialning geometrik ma'nosi aynan shundan iborat.

3. **Differensialning fizik ma'nosi.** Moddiy nuqta $s=f(t)$, bu yerda s – bosib o'tilgan yo'l, t-vaqt, $f(t)$-differensiallanuvchi funksiya, qonuniyat bilan to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan bo'lsin.

Δt vaqt oralig'ida nuqta $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$ yo'lni bosib o'tadi. Yo'lning bu orttirmasini $\Delta s=f'(t)\Delta t+\alpha(\Delta t)\Delta t$ ko'rinishda ifodalashimiz mumkin. Bu yo'lni nuqta biror o'zgaruvchan tezlik bilan bosib o'tgan. Agar Δt vaqt oralig'ida nuqta o'zgarmas $f'(t)$ tezlik, ya'ni t vaqtdagi tezligiga teng tezlik bilan harakatlandi desak, bu holda bosib o'tilgan yo'l $f'(t)\Delta t$ ga teng bo'ladi. Bu esa yo'lning differensialiga teng:

$$ds=f'(t)\Delta t.$$

3-§. Elementar funksiyalarning differensiallari. Differensial topish qoidalari. Differensial formasining invariantligi

3.1. Elementar funksiyalarning differensiallari. Elementar funksiyalarning hosilalarini bilgan holda ularning differensiallari uchun quyidagi formulalarni yozish mumkin:

1. $d(x^{\mu})=\mu\cdot x^{\mu-1}dx\ (x>0);$

2. $d(a^x)=a^x\cdot\ln a\ dx\ (a>0, a\neq 1);$

$3. d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a} dx \ (x > 0, a > 0, a \neq 1),$

xususan, $d(\ln x) = \dfrac{dx}{x} \ (x > 0)$;

4. $d(\sin x) = \cos x dx$;
5. $d(\cos x) = -\sin x dx$;
6. $d(tg x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$;
7. $d(ctg x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} dx \quad (x \neq k\pi; k \in Z)$;
8. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1)$;
9. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (-1 < x < 1)$;
10. $d(arctg x) = \dfrac{1}{1+x^2} dx$;
11. $d(arcctg x) = -\dfrac{1}{1+x^2} dx$.

3.2. Differensial topish qoidalari. Funksiya differensiali ta'rifi va hosila topish qoidalaridan quyidagi tasdiqlarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

a) chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining differensiali ularning differensiallari yig'indisiga teng.

Masalan, ikki funksiya yig'indisi uchun bu tasdiqni quyidagicha isbotlash mumkin: $d(u(x)+v(x))=(u(x)+v(x))'dx= =(u'(x)+v'(x))dx=u'(x)dx+v'(x)dx=du+dv$.

b) quyidagi $d(u(x)\cdot v(x))= v(x)\cdot du+u(x)\cdot dv$ formula o'rinli.

Isboti. Ko'paytmaning hosilasi va funksiya differensiali formulalaridan foydalanamiz: $d(u(x)\cdot v(x))=(u(x)\cdot v(x))'dx= =(u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x))dx==(u'(x)dx)\cdot v(x)+u(x)\cdot(v'(x)dx)= =v(x)\cdot du+u(x)\cdot dv$.

c) quyidagi $d(Cu(x))=Cu'(x)dx$ formula o'rinli;

d) bo'linmaning differensiali uchun quyidagi

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{du\cdot v(x)-u(x)\cdot dv}{v^2(x)}$$

formula o'rinli.

3.3. Differensial formasining invariantligi. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Differensialning ta'rifiga ko'ra $dy=y_x'\Delta x$, yoki erkli o'zgaruvchining orttirmasini dx kabi yozishga kelishganimizni e'tiborga olsak, $dy=y_x'dx$ edi.

Endi x erkli o'zgaruvchi emas, balki t erkli o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin: $x=\varphi(t)$. U holda $y=f(\varphi(t))=g(t)$ funksiya t o'zgaruvchining murakkab funksiyasi va $dy=y_t'dt$ tenglik o'rinli bo'ladi. Lekin $y_t'=y_x'x_t'dt$ va $dx=x_t'dt$ larni e'tiborga olsak, $dy=y_x'dx$ formulaga ega bo'lamiz, ya'ni differrensialning avvalgi ko'rinishiga qaytamiz.

Shunday qilib, differensial formasi o'zgarmadi, ya'ni funksiya differensialining formasi x erkli o'zgaruvchi bo'lganda ham, erksiz (oraliq) o'zgaruvchi bo'lganda ham bir xil ko'rinishda bo'ladi: differensial hosila va hosila qaysi o'zgaruvchi bo'yicha olinayotgan bo'lsa, o'sha o'zgaruvchi differensiali ko'paytmasiga teng bo'ladi. Bu xossa *differensial formasining invariantligi* deyiladi. Shuni aytib o'tish lozimki, bu xossada faqat differensial formasining saqlanishi haqida gap boradi. Agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $dx=\Delta x$; x erksiz o'zgaruvchi bo'lsa, u holda, umuman olganda, $dx\neq\Delta x$ bo'ladi.

Misol. $y=\sqrt[3]{x}$ berilgan. 1) x erkli o'zgaruvchi bo'lganda va 2) $x=t^5+t^2-3$ bo'lganda dy ni hisoblang.

Yechish. 1) 2-§ dagi (2) formulaga ko'ra

$$dy=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

2) differensial formasining invariantlik xossasidan foydalansak, $dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ bo‘lib,

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t^5+t^2-3)^2}} d(t^5+t^2-3) = \frac{(5t^4+2t)dt}{3\sqrt[3]{(t^5+t^2-3)^2}}$$

natijaga ega bo‘lamiz.

4-§. Taqribiy hisoblashlarda differensialning qo‘llanilishi

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun $\Delta y \approx f'(x_0)dx$, ya’ni $\Delta y \approx dy$ taqribiy tenglik o‘rinli. Shu taqribiy tenglik matematik analizning nazariy va tatbiqiy masalalarida muhim ahamiyatga ega bo‘lib, differensialning mohiyatini belgilaydi. Yuqoridagi tenglikda $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x=x-x_0$ deb olsak, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0)$ yoki

$$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$

(1) formula funksiya qiymatlarini taqribiy hisoblashda keng qo‘llaniladi.

Masalan, $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun quyidagi

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \qquad (2)$$

formula o‘rinli. Agar $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyaning $x=0,98$ dagi qiymatini hisoblash talab qilinsa, (2) formulada $x=1$, $\Delta x=-0,02$ deb olish yetarli. U holda $\sqrt{0,98} \approx \sqrt{1} + \frac{-0,02}{2\sqrt{1}} = 1-0,01 = 0,99$ bo‘ladi.

Agar $\sqrt{0,98}$ kalkulatorda hisoblasak, uni 10^{-6} aniqlikda 0,989949 teng ekanligini ko‘rish mumkin. Demak, differensial yordamida hisoblaganda xatolik 0,001 dan katta emas. Umumiy holda differensial yordamida taqribiy hisoblashlardagi xatolikni baholash masalasini kelgusida o‘rganamiz.

5-§. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

5.1. Yuqori tartibli differensiallar. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya biror (a,b) intervalda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning $dy=f'(x)dx$ differensiali x ga bog'liq bo'lib, $dx=\Delta x$ va Δx orttirma x ga bog'liq emas, chunki x nuqtadagi orttirmani x ga bog'liq bo'lmagan holda ixtiyoriy tanlash mumkin. Bu holda differensial formulasidagi dx ko'paytuvchi o'zgarmas bo'ladi va $f'(x)dx$ ifoda faqat x ga bog'liq bo'lib, uni x bo'yicha differensiallash mumkin.

Demak, bu funksiyaning differensiali mavjud bo'lishi mumkin va u, agar mavjud bo'lsa, funksiyaning *ikkinchi tartibli differensiali* deb ataladi.

Ikkinchi tartibli differensial d^2y yoki $d^2f(x)$ kabi belgilanadi. Shunday qilib, ikkinchi tartibli differensial quyidagicha aniqlanar ekan: $d^2y=d(dy)$.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali ifodasini topish uchun $dy=f'(x)dx$ formulada dx ko'paytuvchi o'zgarmas deb qaraymiz. U holda

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=(f''(x)dx)dx=f''(x)(dx)^2$$

bo'ladi. Biz kelgusida dx ning darajalarini qavssiz yozishga kelishib olamiz. Bu kelishuvni e'tiborga olsak, $(dx)^2=dx^2$ bo'ladi va ikkinchi tartibli differensial uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d^2y=f''(x)dx^2 \qquad (1)$$

Shunga o'xshash, uchinchi tartibli differensialni ta'riflash va uning uchun ifodasini keltirib chiqarish mumkin: $d^3y=d(d^2y)=d(f''(x)dx^2)=f'''(x)dx^3$.

Umumiy holda funksiyaning $(n-1)$-tartibli differensiali $d^{n-1}y$ dan olingan differensial funksiyaning n-tartibli differensiali deyiladi va d^ny kabi belgilanadi, ya'ni $d^ny=d(d^{n-1}y)$. Bu holda ham funksiyaning n-tartibli differensiali uning n-tartibli hosilasi orqali quyidagi

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n \qquad (2)$$

ko'rinishda ifodalanishini isbotlash mumkin.

Yuqoridagi formuladan funksiyaning n-tartibli hosilasi uning n-tartibli differensiali va erkli o'zgaruvchi differensialining n-darajasi nisbatiga teng ekanligi kelib chiqadi:

$$f^{(n)}(x)=d^n y/dx^n.$$

5.2. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallari. Endi x argument biror t o'zgaruvchining funksiyasi $x=\varphi(t)$ bo'lgan hol uchun yuqori tartibli differensiallarni hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz.

Bu holda $dx=\varphi'(t)dt$ bo'lganligi sababli, dx ni x ga bog'liq emas deb bo'lmaydi. Shu sababli ta'rif bo'yicha $(d^2y=d(f'(x)dx))$ hisoblaganda, d^2y ni ikkita $f'(x)$ va dx funksiyalar ko'paytmasining differensiali deb qaraymiz.

Natijada $d^2y=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d^2x=$ $=(f''(x)dx)dx+f'(x)d^2x=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x,$
ya'ni

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x \qquad (3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi ikkinchi tartibli differensial uchun hosil qilingan (1) formula (3) formulaning xususiy holi ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham, agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $d^2x=x''dx^2=0\cdot dx^2=0$ bo'lib, (3) formuladagi ikkinchi qo'shiluvchi qatnashmaydi.

Uchinchi tartibli differensial uchun quyidagi

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dxd^2x+f'(x)d^3x \qquad (4)$$

formula o'rinli ekanligini isbotlashni o'quvchilarga taklif qilamiz.

Ikkinchi va uchinchi tartibli differensiallar uchun olingan formulalardan murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallarini hisoblashda differensial formasining invariantligi buziladi. Boshqacha aytganda, ikkinchi va undan yuqori tartibli differensial formulalari ko'rinishi x argument erkli o'zgaruvchi yoki boshqa o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lishiga bog'liq bo'ladi.

VI bobga doir test savollari

1 $(u+v)'=u'+v'$ $d(u+v)=?$ $d(C+u)=du$ $(C+u)'=?$	6 F-kuch A-ish $dA=F(x)dx$ q-zaryad I-tok kuchi ?
2 $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ $d(u\cdot v)=?$ $d(Cu)=Cdu$ $(Cu)'=?$	7 $(f(g(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ $d(f(g(x))=?$ $d(\cos(x^2+1))=-$ $\sin(x^2+1)d(x^2+1)$ $(\cos(x^2+1))'=$
3 $(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$ $d(u/v)=?$ $d(C/u)=-Cdu/u^2$ $(C/u)'=$	8 Hosilaning geometrik ma'nosi → Urinmaning burchak koeffitsienti Differensiyalning geometrik ma'nosi → ?
4 $(\sin x)'=\cos x$ $d(\sin x)=?$ $d(\sin(2x+1))=2\cos(2x+1)du$ $(\sin(2x+1))'=$	9 Hosilaning fizik ma'nosi → Harakat tezligi Differensiyalning fizik ma'nosi → ?
5 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ $d(x^{\alpha})=?$ $d((2x-1)^{\alpha})=$ $((2x-1)^{\alpha})'=$	10 $\Delta f(x)=A\Delta x+\alpha\Delta x$ $d(f(x))=?$ $\Delta(x^3)=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$ $A=?$ $\alpha=?$

VII BOB. DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI VA ULARNING TATBIQLARI

1-§. O'rta qiymat haqidagi teoremalar

Matematik analiz kursida o'rganiladigan asosiy va amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega bo'lgan funksiyalar sinflaridan (to'plamlaridan) biri–bu uzluksiz funksiyalar sinfi hisoblanadi. Oldingi bobda biz differensiallanuvchi funksiyalar sinfi uzluksiz funksiyalar sinfining qismi bo'lishini ko'rsatgan edik. Differensiallanuvchi funksiyalar o'ziga xos ahamiyatga ega, chunki ko'pgina tatbiqiy masalalarni yechish hosilasi mavjud funksiyalarni o'rganishga keltiriladi. Bunday funksiyalar ba'zi bir umumiy xossalarga ega. Bu xossalar ichida *o'rta qiymat haqidagi teoremalar* nomi bilan birlashgan teoremalar alohida ahamiyatga ega. Ushbu teoremalar $[a;b]$ kesmada o'rganilayotgan funksiya uchun u yoki bu xossaga ega bo'lgan $[a;b]$ kesmaga tegishli c nuqtaning mavjudligini ta'kidlaydi.

1.1. Ferma teoremasi

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda aniqlangan va biror $c \in (a,b)$ nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishsa va shu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isboti. $f(c)$ funksiyaning eng katta qiymati bo'lsin, ya'ni $\forall x \in (a;b)$ da $f(x) \leq f(c)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Shartga ko'ra bu c nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud.

Ravshanki,

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

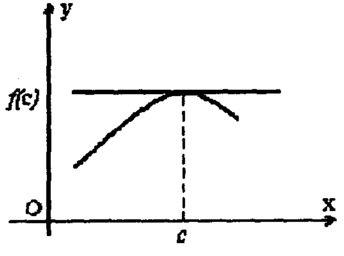
Ammo $x<c$ bo'lganda $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \Rightarrow f'(c)\geq 0$ va $x>c$ bo'lganda

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \Rightarrow f'(c)\leq 0$$

bo'lishidan $f'(c)=0$ ekani kelib chiqadi.

Eng kichik qiymat holi shunga o'xshash isbotlanadi.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma'noga ega. U $f(x)$ funksiya grafigiga $(c;f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning Ox o'qiga paralell bo'lishini ifodalaydi (19-rasm).



19-rasm.

1-eslatma. Ichki c nuqtada $f'(c)=0$ bo'lsa ham bu nuqtada $f(x)$ funksiya eng katta (eng kichik) qiymatni qabul qilmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=2x^3-1$, $x\in(-1;1)$ da berilgan bo'lsin. Bu funksiya uchun $f'(0)=0$ bo'ladi, lekin

$f(0)=-1$ funksiyaning $(-1;1)$ dagi eng katta yoki eng kichik qiymati bo'lmaydi.

1.2. Roll teoremasi

2-teorema (Roll teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo'lib, quyidagi

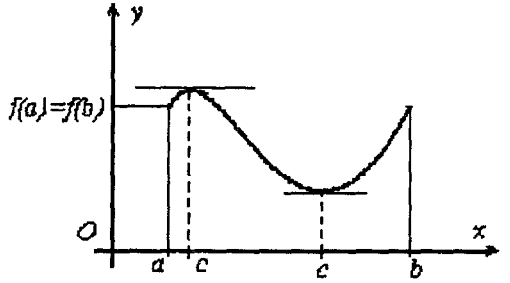
1) $[a;b]$ da uzluksiz;
2) $(a;b)$ da differensiallanuvchi;
3) $f(a)=f(b)$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladigan kamida bitta c $(a<c<b)$ nuqta mavjud bo'ladi.

Isboti. Ma'lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu kesmada o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya uchun ikki hol bo'lishi mumkin.

1. $M=m$, bu holda $[a,b]$ kesmada $f(x)=const$ va $f'(x)=0$ bo'ladi. Ravshanki, $f'(c)=0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta sifatida $\forall c\in(a;b)$ ni olish mumkin.

2. $M>m$, bu holda teoremaning $f(a)=f(b)$ shartidan funksiya M yoki m qiymatlaridan kamida birini $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilishi kelib chiqadi. Aniqlik uchun $f(c)=m$ bo'lsin. Eng kichik qiymatning ta'rifiga ko'ra $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\geq f(c)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.



20-rasm.

Endi $f'(c)=0$ ekanligini ko'rib chiqamiz. Teoremaning ikkinchi shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning har bir x nuqtasida chekli hosilaga ega. Bu shart, xususan c nuqta uchun ham o'rinli. Demak, Ferma teoremasi shartlari bajariladi. Bundan $f'(c)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

$f(c)=M$ bo'lgan holda teorema yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Roll teoremasiga quyidagicha geometrik talqin berish mumkin (20-rasm). Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya kesma uchlarida teng qiymatlar qabul qilsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigida abssissasi $x=c$ bo'lgan shunday C nuqta topiladiki, shu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma abssissalar o'qiga parallel bo'ladi.

2-eslatma. Roll teoremasining shartlari yetarli bo'lib, zaruriy shart emas. Masalan, 1) $f(x)=x^3$, $x\in[-1:1]$ funksiya uchun teoremaning 3-sharti bajarilmaydi.

$(f(-1)=-1\neq 1=f(1))$, lekin $f'(0)=0$ bo'ladi.

2) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{agar} \quad 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{agar} \quad 1<x<2, \\ 2, & \text{agar} \quad x\ge 2 \end{cases}$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajarilmaydi, lekin (1;2) intervalning ixtiyoriy nuqtasida $f'(x)=0$ bo'ladi.

1.3. Lagranj teoremasi

3-teorema (Lagranj teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda (a,b) da kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo'lib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Quyidagi yordamchi funksiyani tuzib olamiz:

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Bu $\Phi(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ va x funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida qarash mumkin. Bundan $\Phi(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek,

$$\Phi(a)=\Phi(b)=0,$$

demak, $\Phi(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Demak, Roll teoremasiga ko'ra (a,b) intervalda kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo'ladiki, $\Phi'(c)=0$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\Phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

va bundan esa isbot qilinishi kerak bo'lgan (1) formula kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

(1) formulani ba'zida *Lagranj formulasi* deb ham yuritiladi. Bu formula

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad (2)$$

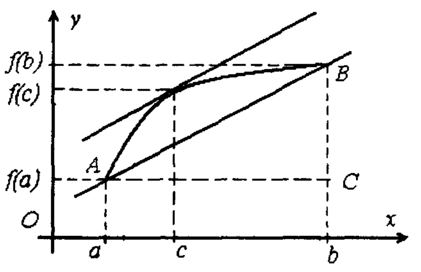
ko'rinishda ham yoziladi.

Endi Lagranj teoremasining geometrik ma'nosiga to'xtalamiz. $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantirsin deylik (21-rasm). Funksiya grafigining $A(a;f(a))$, va $B(b;f(b))$ nuqtalar orqali kesuvchi o'tkazamiz, uning burchak koeffitsienti

$$tg\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

bo'ladi.

Hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $f'(c)$ - bu $f(x)$ funksiya grafigiga uning $(c;f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti: $tg\beta=f'(c)$ Demak, (1) formula (a,b) intervalda kamida bitta shunday c nuqta mavjudligini ko'rsatadiki, $f(x)$ funksiya grafigiga $(c;f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma AB kesuvchiga paralell bo'ladi.



21-rasm.

Isbot qilingan (1) formulani boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin. Buning uchun $a<c<b$ tengsizliklarni e'tiborga olib, $\frac{c-a}{b-a}=\theta$ belgilash kiritamiz, u holda $c=a+(b-a)\theta$, $0<\theta<1$ bo'lishi ravshan. Natijada (1) formula ushbu

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$$

ko'rinishga keladi.

Agar (1) formulada $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ almashtirishlar bajarsak, u

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x \qquad (3)$$

bu yerda $x_0 < c < x_0+\Delta x$, ko'rinishga keladi. Bu formula argument orttirmasi bilan funksiya orttirmasini bog'laydi, shu sababli (3) formula *chekli orttirmalar formulasi* deb ataladi.

Agar (1) Lagranj formulasida $f(a)=f(b)$ deb olsak, Roll teoremasi kelib chiqadi, ya'ni Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekan.

Misol. Ushbu [0,2] kesmada $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ funksiya uchun Lagranj formulasidagi c ning qiymatini toping.

Yechish. Funksiyaning kesma uchlaridagi qiymatlarini va hosilasini hisoblaymiz: $f(0)=-2$; $f(2)=12$; $f'(x)=12x^2-10x+1$. Olingan natijalarni Lagranj formulasiga qo'yamiz, natijada

$12-(-2)=(12c^2-10c+1)(2-0)$ yoki $6c^2-5c-3=0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechamiz: $c_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{97}}{12}$.

Topilgan ildizlardan faqat $\dfrac{5+\sqrt{97}}{12}$ qaralayotgan kesmaga tegishli. Demak, $c=\dfrac{5+\sqrt{97}}{12}$ ekan.

Lagranj teoremasi, o'z navbatida, quyidagi teoremaning xususiy holi bo'ladi.

1.4. Koshi teoremasi

4-teorema (Koshi teoremasi). Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lib,

1) $[a,b]$ da uzluksiz;

2) (a,b) intervalda $f'(x)$ va $g'(x)$ mavjud hamda $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda bitta shunday c $(a<c<b)$ nuqta topilib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Ravshanki, (4) tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $g(b)\neq g(a)$ bo'lishi kerak. Bu esa teoremadagi $g'(x)\neq 0$, $x\in(a;b)$

shartdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $g(a)=g(b)$ bo‘lsa, u holda $g(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror $c\in(a;b)$ nuqtada $g'(c)=0$ bo‘lar edi. Bu esa $\forall x\in(a;b)$ da $g'(x)\neq 0$ shartga ziddir. Demak, $g(b)\neq g(a)$.

Endi yordamchi

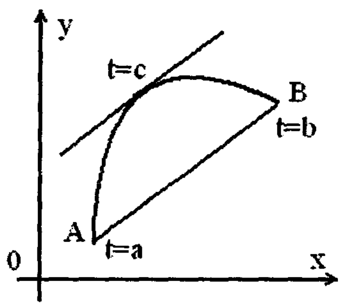
$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$ funksiyani

tuzaylik.

Shartga ko‘ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz hamda (a,b) intervalda differensiyalanuvchi bo‘lgani uchun $F(x)$, birinchidan, $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida uzluksiz, ikkinchidan, (a,b) intervalda

$$\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

hosilaga ega.



22-rasm.

So‘ngra $\Phi(x)$ funksiyaning $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $\Phi(a)=\Phi(b)=0$. Demak, $\Phi(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun hech bo‘lmaganda bitta shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $\Phi'(c)=0$ bo‘ladi. Shunday qilib,

$$0=\hat{O}'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

va bundan (4) tenglikning o‘rinli ekani kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Isbotlangan (4) tenglik *Koshi formulasi* deb ham ataladi.

Endi Koshi teoremasining geometrik ma’nosini aniqlaymiz. Aytaylik, $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, $a\le t\le b$ tekislikdagi chiziqning parametrik tenglamasi bo‘lsin. Shuningdek, chiziqda $t=a$ ga mos keluvchi nuqtani $A(\varphi(a), f(a))$, $t=b$ ga mos keluvchi nuqtani $B(\varphi(b),f(b))$

kabi belgilaylik (22-rasm). U holda (4) formulaning chap qismi AB vatarning burchak koeffitsientini, o'ng tomoni esa egri chiziqqa parametrning $t=c$ qiymatiga mos keladigan nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini anglatadi. Demak, Koshi formulasi AB yoyning AB vatarga parallel bo'lgan urinmasining mavjudligini ta'kidlaydi.

Misol. Ushbu $f(x)=x^2$ hamda $\varphi(x)=\sqrt{x}$ funksiyalar uchun [0,4] kesmada Koshi formulasini yozing va s ni toping.

Yechish. Berilgan funksiyalarning kesma uchlaridagi qiymatlari va hosilalarini topamiz: $f(0)=0, f(4)=16$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(4)=2$; $f'(x)=2x$, $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Bulardan foydalanib Koshi formulasini yozamiz: $\dfrac{16-0}{2-0}=\dfrac{2c}{\dfrac{1}{2\sqrt{c}}}$, bundan $4c\sqrt{c}=8$ yoki $c\sqrt{c}=2$. Demak $c=\sqrt[3]{4}$.

1.5. Darbu teoremasi.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya biror oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, shu oraliqqa tegishli bo'lgan $x=a$, $x=b$ nuqtalarda $f'(a)=A\neq B=f'(b)$ bo'lsa, u holda bu oraliqda $f'(x)$ funksiya A va B sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi, ya'ni A va B sonlar orasidan olingan har qanday C soni uchun (a,b) intervalga tegishli bo'lgan kamida bitta c nuqta topilib, $f'(c)=C$ bo'ladi.

Isboti. Avval teoremaning maxsus holini – A va B har xil ishorali bo'lgan – holini isbotlaymiz. Aniqlik uchun $A>0$, $B<0$ bo'lsin. U holda (a,b) intervalga tegishli bo'lgan kamida bitta c nuqta topilib, $f'(c)=0$ bo'lishini isbotlashimiz lozim.

Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada hosilaga ega, demak bu kesmada uzluksiz. U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning kamida bitta c

nuqtasida eng katta qiymatiga erishadi. Bu nuqta a nuqtadan ham, b nuqtadan ham farqli. Haqiqatan ham,

$$A = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$$

bo'lganligi sababli, argument orttirmasi absolyut qiymat jihatdan yetarlicha kichik bo'lganda $\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $\Delta x > 0$ bo'lganda $f(a+\Delta x)-f(a)>0$ yoki $f(a+\Delta x)>f(a)$ munosabat o'rinli. Demak, $f(a)$ qiymat $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'la olmaydi. Shunday qilib, $a \neq c$.

Xuddi shunga o'xshash,

$$B = f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x} < 0$$

munosabatdan foydalanib, $c \neq b$ ekanligi isbotlanadi.

Demak, $a<c<b$. U holda Ferma teoremasiga ko'ra $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Endi teoremani umumiy holda isbotlaymiz. Aytaylik, A va B biri ikkinchisiga teng bo'lmagan sonlar bo'lsin. Aniqlik uchun $A>B$ deb olamiz. $A>C>B$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy C sonni tayinlab olamiz va ushbu $F(x) = f(x) - Cx$ yordamchi funksiyani tuzamiz. $F(x)$ funksiya ham $f(x)$ funksiya kabi $[a;b]$ kesmada hosilaga ega: $F'(x) = f'(x) - C$. Shu hosilaning $[a;b]$ kesma uchlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$F'(a) = f'(a) - C = A - C > 0;$$

$$F'(b) = f'(b) - C = B - C < 0.$$

Demak, $F'(x)$ hosila $[a;b]$ kesma uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qiladi. U holda yuqorida isbotlaganimizga ko'ra kamida bitta c ($a<c<b$) nuqta topilib, $F'(c) = 0$, ya'ni $f'(c) - C = 0$ bo'ladi. Bundan $f'(c) = C$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

2-§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lganda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish masalasi yengillashadi. Odatda, hosilalardan foydalanib, aniqmasliklarni ochish *Lopital qoidalari* deb ataladi. Biz quyida Lopital qoidalarining bayoni bilan shug'ullanamiz.

2.1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Ma'lumki, $x\to a$ da $f(x)\to 0$ va $g(x)\to 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik deyilar edi. Ko'pincha $x\to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifodaning limitini topishga qaraganda $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifodaning limitini topish oson bo'ladi. Bu ifodalar limitlarining teng bo'lish sharti quyidagi teoremada ifodalangan.

1-teorema. Agar

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta)$, bu yerda $\delta>0$, to'plamda differensiallanuvchi va shu to'plamdan olingan ixtiyoriy x uchun $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

3) hosilalar nisbatining limiti (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

mavjud bo'lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Har ikkala funksiyani $x=a$ nuqtada $f(a)=0$, $g(a)=0$ deb aniqlasak, natijada ikkinchi shartga ko'ra, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0=g(a)$ tengliklar o'rinli bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Avval $x>a$ holni qaraymiz. Berilgan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;x]$, bu yerda $x<a+\delta$, kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun a bilan x orasida shunday c nuqta topiladiki, ushbu $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi. $f(a)=g(a)=0$ ekanligini e'tiborga olsak, so'nggi tenglikdan

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki, $a<c<x$ bo'lganligi sababli, $x\to a$ bo'lganda $c\to a$ bo'ladi. Teoremaning 3-sharti va (2) tenglikdan $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ kelib chiqadi.

Shunga o'xshash, $x<a$ holni ham qaraladi. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ limitni hisoblang.

Yechish. Bu holda $f(x)=\ln(x^2-3)$, $g(x)=x^2+3x-10$ bo'lib, ular uchun 1-teoremaning barcha shartlari bajariladi.

Haqiqatan ham,

1) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x^2-3)=\ln 1=0$,

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-10)=0$;

2) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$, $g'(x)=2x+3$, $x\neq\pm\sqrt{3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x}{(x^2-3)(2x+3)}=\dfrac{4}{7}$ bo'ladi.

Demak, 1-teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}=\dfrac{4}{7}$.

1-eslatma. Shuni ta'kidlash kerakki, berilgan funksiyalar nisbatining limiti 3)-shart bajarilmasa ham mavjud bo'lishi mumkin, ya'ni 3)-shart yetarli bo'lib, zaruriy emas.

Masalan, $f(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$ funksiyalar $(0;1]$ da 1)-, 2)-shartlarni qanoatlantiradi va $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\dfrac{1}{x})=0$, lekin $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}(2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})$ mavjud emas, chunki $x_n=\dfrac{1}{\pi n}\to 0$ $n\to\infty$ da

$$\lim_{x_n\to 0}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})=\lim_{n\to\infty}(\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+\sin\pi n)=0,$$

$x_n=\dfrac{1}{\pi(2n+\frac{1}{2})}\to 0$ $n\to\infty$ da esa, $\lim\limits_{x_n\to 0}(2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})=$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{\pi(2n+\frac{1}{2})}\cdot cos(2\pi n+\frac{\pi}{2})+\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2}))=1.$$

2-teorema. Agar $[c;+\infty)$ nurda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo'lib,

1) $(c;+\infty)$ da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

3) hosilalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (chekli yoki cheksiz) mavjud bo'lsa, u holda funksiyalar nisbatining limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Umumiylikni saqlagan holda, teoremadagi c sonni musbat deb olish mumkin. Quyidagi $x=\dfrac{1}{t}$ formula yordamida x o'zgaruvchini t o'zgaruvchiga almashtiramiz. U holda $x\to+\infty$ da $t\to0$ bo'ladi. Natijada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar t o'zgaruvchining $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ va $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ funksiyalari bo'lib, ular $(0,\dfrac{1}{c}]$ da aniqlangan. Teoremadagi (2) shartga asosan

$$\lim_{t\to+0}f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad \lim_{t\to+0}g\left(\frac{1}{t}\right)=0 \text{ bo'ladi.}$$

Ushbu, $\left(f\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)_t'=\left(f\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)_x'\cdot x_t'=-f_x'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{t^2}$,

$\left(g\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)_t'=\left(g\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)_x'\cdot x_t'=-g_x'\left(\dfrac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{t^2}$ munosabatlardan $\left(0;\dfrac{1}{c}\right)$ intervalda $f_t'\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $g_t'\left(\dfrac{1}{t}\right)$ hosilalarning mavjudligi kelib chiqadi. So'ngra teoremaning 3)-shartiga ko'ra

$$\lim_{t\to+0}\frac{f_t'\left(\frac{1}{t}\right)}{g_t'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{-f_t'\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)}{-g_t'\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demak, $f\left(\frac{1}{t}\right)$ va $g\left(\frac{1}{t}\right)$ funksiyalarga 1-teoremani qo'llash

mumkin. Bunda $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$ e'tiborga olsak, (3)

tenglikning o'rinliligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

2.2. $\frac{\infty}{\infty}$ **ko'rinishdagi aniqmaslik.** Agar $x\to\infty$ da $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ifoda $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyilar edi. Endi bunday aniqmaslikni ochishda ham $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkinligini ko'rsatadigan teoremani keltiramiz.

3-teorema. Agar

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a;\infty)$ nurda differensiallanuvchi hamda $g'(x)\neq 0$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa,

u holda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ mavjud va $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud. Aytaylik, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\mu$ bo'lsin. U holda $\forall\varepsilon>0$ sonni olsak ham shunday $N>0$ son topilib, $x\geq N$ bo'lganda

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

tengsizliklar bajariladi. Umumiylikni cheklamagan holda $N>a$ deb olishimiz mumkin. U holda $x\geq N$ tengsizlikdan $x\in(a;\infty)$ kelib chiqadi.

Aytaylik, $x>N$ bo‘lsin. U holda $[N;x]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga Koshi teoremasi qo‘llanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \text{ bu yerda } N<c<x.$$

Endi $c>N$ bo‘lganligi sababli $x=c$ da (3) tengsizliklar o‘rinli:

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(\tilde{n})}{g'(\tilde{n})}<\mu+\frac{\varepsilon}{2},$$

bundan esa

$$\mu-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}<\mu+\frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarga ega bo‘lamiz.

Teorema shartiga ko‘ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$, $f(N)$ va $g(N)$ lar esa chekli sonlar. Shu sababli x ning yetarlicha katta qiymatlarida $\dfrac{f(x)-f(N)}{g(x)-g(N)}$ kasr $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ kasrdan istalgancha kam farq qiladi. U holda shunday M soni topilib, $x\geq M$ larda

$$\mu-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\mu+\varepsilon \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday M soni mavjudki, barcha $x\geq M$ larda (4) tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu esa $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\mu$ ekanligini anglatadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Yuqorida isbotlangan teorema $x\to a$ (a-son) holda ham o‘rinli. Buni isbotlash uchun $t=\dfrac{1}{x-a}$ almashtirishni bajarish yetarli.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $f(x)=\ln x$, $g(x)=x$ funksiyalar uchun 3-teorema shartlarini tekshiramiz: 1) bu funksiyalar $(0,+\infty)$ da differensiallanuvchi; 2) $f'(x)=1/x$ $g'(x)=1$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{1}=0$, ya'ni mavjud. Demak, izlanayotgan limit ham mavjud va $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ tenglik o'rinli.

2.3. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar.

Ma'lumki, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ bo'lganda, $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uning quyidagi

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\dfrac{0}{0}$ yoki $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltirish mumkin. Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$, bo'lganda, $f(x)-g(x)$ ifoda $\infty-\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik bo'lib, uni ham quyidacha shakl almashtirib,

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$$

$\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Ma'lumki, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya 1, 0 va ∞ ga, $g(x)$ funksiya esa mos ravshda ∞, 0 va 0 ga intilganda $(f(x))^{g(x)}$ darajali-ko'rsatkichli ifoda 1^∞, 0^0, ∞^0 ko'rinishidagi aniqmasliklar edi. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun avval $y=(f(x))^{g(x)}$ ni logarifmlaymiz: $\ln y= g(x)\cdot \ln(f(x))$. Bunda $x\to a$ da $g(x)\ln(f(x))$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi.

Shunday qilib, funksiya hosilalari yordamida $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda, ularni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslikka keltirib, so'ng yuqoridagi teoremalar qo'llaniladi.

2-eslatma. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f(x)$ va $g(x)$ lar singari yuqorida keltirilgan teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni bu holda Lopital qoidasini takror qo'llash mumkin bo'ladi.

Misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ limitni hisoblang.

Yechish. Ravshanki, $x\to 0$ da $\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Uni logarifmlab, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikni ochishga keltiramiz:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{tgx}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\frac{tgx}{x})'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{tgx}\cdot\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-tgx}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x\cos x)'}{(x^3)'}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

3-§. Teylor formulasi

Teylor formulasi matematik analizning eng muhim formulalaridan biri bo'lib, ko'plab nazariy tatbiqlarga ega. U taqribiy hisobning negizini tashkil qiladi.

3.1. Teylor ko'phadi. Peano ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi. Ma'lumki, funksiyaning qiymatlarini hisoblash ma'nosida ko'phadlar eng sodda funksiyalar hisoblanadi. Shu sababli funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun uni shu nuqta atrofida ko'phad bilan almashtirish muammosi paydo bo'ladi.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya ta'rifiga ko'ra, agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi orttirmasini $\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$, ya'ni

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Boshqacha aytganda x_0 nuqtada differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya uchun birinchi darajali

$$P_1(x)=f(x_0)+b_1(x-x_0) \qquad (1)$$

ko'phad mavjud bo'lib, $x\to x_0$ da $f(x)=P_1(x)+o(x-x_0)$ bo'ladi. Shuningdek, bu ko'phad $P_1(x_0)=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=b=f'(x_0)$ shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi umumiyroq masalani ko'rib chiqaylik. Agar $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan $y=f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$f(x)=P_n(x)+ o((x-x_0)^n) \qquad (2)$$

shartni qanoatlantiradigan darajasi n dan katta bo'lmagan $P_n(x)$ ko'phad mavjudmi?

Bunday ko'phadni

$$P_n(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+ ... +b_n(x-x_0)^n, \qquad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz. Noma'lum bo'lgan $b_0, b_1, b_2, ..., b_n$ koeffitsientlarni topishda

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ P_n''(x_0)=f''(x_0),\ ...,$$
$$P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0) \qquad (4)$$

shartlardan foydalanamiz. Avval $P_n(x)$ ko'phadning hosilalarini topamiz:

$$P_n'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+3b_3(x-x_0)^2+ ... +nb_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x)=2\cdot 1b_2+3\cdot 2b_3(x-x_0)+ ... +n\cdot(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2},$$
$$P_n'''(x)=3\cdot 2\cdot 1b_3+ ... +n\cdot(n-1)\cdot(n-2)b_n(x-x_0)^{n-3},$$
$$.................................,$$
$$P_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1b_n.$$

Yuqorida olingan tengliklar va (3) tenglikning har ikkala tomoniga x o'rniga x_0 ni qo'yib, barcha $b_0, b_1, b_2, ..., b_n$ koef-fitsientlar qiymatlarini topamiz:

$$P_n(x_0)=f(x_0)=b_0,$$
$$P_n'(x_0)=f'(x_0)=b_1,$$
$$P_n''(x_0)=f''(x_0)=2\cdot 1b_2=2!b_2,$$
$$...........................$$
$$P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)=n\cdot(n-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1b_n=n!b_n$$

Bulardan $b_0=f(x_0),\ b_1=f'(x_0),\ b_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ . . .,\ b_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ hosil qilamiz. Topilgan natijalarni (3) qo'yamiz va

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+ ... +\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \qquad (5)$$

ko'rinishda ko'phadni hosil qilamiz. Bu ko'phad *Teylor ko'phadi* deb ataladi.

Teylor ko'phadi (2) shartni qanoatlantirishini isbotlaymiz. Funksiya va Teylor ko'phadi ayirmasini $R_n(x)$ orqali belgilaymiz: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. (4) shartlardan $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=...=R_n^{(n)}(x_0)=0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar $x\to x_0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$ ifodaning 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik ekanligini ko'rish qiyin emas. Unga Lopital qoidasini n marta tatbiq qilamiz. U holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=$$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=\dfrac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0$, demak, $x\to x_0$ da $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ o'rinli ekan.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $x\to x_0$ da quyidagi formula

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\quad(6)$$

o'rinli bo'ladi.

Bu yerda $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ *Peano ko'rinishidagi qoldiq had* deyiladi.

Agar (6) formulada $x_0=0$ deb olsak, Teylor formulasining xususiy holi hosil bo'ladi:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n).\quad(7)$$

Bu formula *Makloren formulasi* deb ataladi.

3.2. Teylor formulasining Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadi. Teylor formulasi $R_n(x)$ qoldiq hadi yozilishining turli ko'rinishlari mavjud. Biz uning Lagranj ko'rinishi bilan tanishamiz.

Ko'rib chiqilayotgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida $n+1$-tartibli hosilaga ega bo'lsin deb talab qilamiz va $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ funksiyani kiritamiz. Ravshanki,

$g(x_0)=g'(x_0)=...=g^{(n)}(x_0)=0;\ g^{(n+1)}(x_0)=(n+1)!\neq 0.$

Ushbu $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ va $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ funksiyalarga Koshi teoremasini tatbiq qilamiz. Bunda $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=...=R_n^{(n)}(x_0)=0$ e'tiborga olib, quyidagini topamiz:

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{R_n'(c_1)}{g(c_1)}=\frac{R_n'(c_1)-R_n'(x_0)}{g'(c_1)-g'(x_0)}=\frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}=...=$$

$$\frac{R_n^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)}=\frac{R_n^{(n)}(x)-R_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(x_0)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

bu yerda $c_1\in(x_0;x);\ c_2\in(x_0;c_1);\ ...\ ;\ c_n\in(x_0;c_{n-1});\ \xi\in(x_0;c_n)\subset(x_0;x)$.

Shunday qilib, biz $\dfrac{R_n(x)}{g(x)}=\dfrac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$ ekanligini ko'rsatdik, bu yerda $\xi\in(x_0;x)$. Endi $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$, $g^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$, $R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi\in(x_0;x). \qquad (8)$$

Bu (8) formulani Teylor formulasining *Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi* deb ataladi.

Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (9)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu yerda θ birdan kichik bo'lgan musbat son, ya'ni $0<\theta<1$.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi quyidagi shaklda yoziladi:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+...$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \text{bu yerda } \xi\in(x_0;x).$$

Agar $x_0=0$ bo'lsa, u holda $\xi=x_0+\theta(x-x_0)=\theta x$, bu yerda $0<\theta<1$, bo'lishi ravshan, shu sababli Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasi

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{10}$$

shaklida yoziladi.

3.3. Teylor formulasining Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadi. Teylor formulasi qoldiq hadining boshqa ko'rinishlariga misol tariqasida Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadni keltirish mumkin. Buning uchun

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

yordamchi funksiyani tuzib olamiz va $[x_0;x]$ segmentda uzluksiz, $(x_0;x)$ intervalda esa noldan farqli chekli hosilaga ega bo'lgan biror $\psi(t)$ funksiyani olib, bu funksiyalarga Koshi teoremasini qo'llasak,

$$R_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad c\in(x_0;x) \tag{11}$$

ko'rinishdagi qoldiq hadni chiqarish mumkin.

Agar (11) formulada $\psi(t)$ funksiya sifatida $\psi(t)=x-t$ funksiya olinsa, natijada *Koshi shaklidagi qoldiq hadni* hosil qilamiz:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad c=x_0+\theta(x-x_0), \quad 0<\theta<1$$

4-§. Ba'zi bir elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi

4.1. e^x funksiya uchun Makloren formulasi. $f(x)=e^x$ funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda barcha tartibli hosilalari mavjud: $f^{(k)}(x)=e^x$, $k=1, 2, \ldots, n+1$. Bundan $x=0$ da $f^{(k)}(0)=1$, $k=1, 2, \ldots, n$; $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ va $f(0)=1$ hosil bo'ladi. Olingan natijalarni 3-§ dagi (10) formulaga qo'yamiz:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \qquad (1)$$

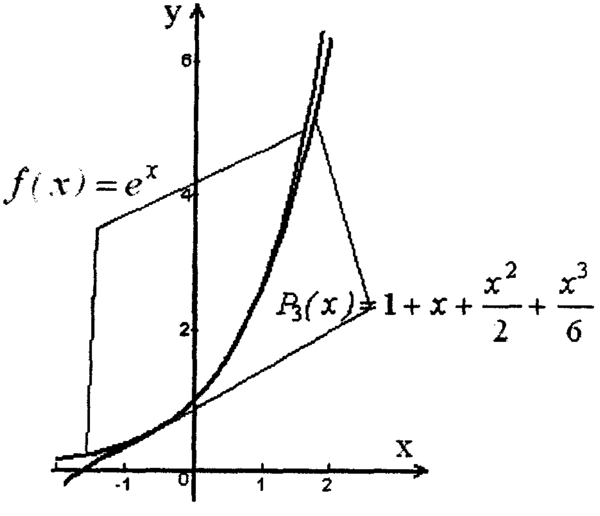
bu yerda $0<\theta<1$ formulaga ega bo'lamiz.

23-rasmda $f(x) = e^x$ funksiya va $P_3(x)$ ko'phad funksiyaning grafiklari keltirilgan.

Agar $x=1$ bo'lsa,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula yordamida e sonining irratsionalligini isbot qilish mumkin.



23-rasm.

Haqiqatan ham, faraz qilaylik, $e = \frac{p}{q}$ – ratsional son bo'lsin.

Bunda $e>1$ bo'lganligi uchun $p>q$ bo'ladi. (2) da $e = \frac{p}{q}$ desak,

$$\frac{p}{q}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $n!$ ga ko‘paytirsak, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\frac{p}{q}n!-(2\cdot n!+\frac{1}{2!}\cdot n!+\frac{1}{3!}\cdot n!+...+1)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta} \qquad (3)$$

Bu yerda n sonni r dan katta deb olishimiz mumkin. U holda $\theta<1, p>q$ bo‘lganligi uchun

$$0<\frac{1}{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\theta}<\frac{1}{n+1}\frac{p}{q}\leq\frac{p}{n+1}<1 \qquad (4)$$

bo‘ladi. Shuningdek, $n>p>q$ bo‘lganligi uchun $\frac{p}{q}n!$ – butun son, chunki $n!$ da q ga teng bo‘lgan ko‘paytuvchi uchraydi.

Aniqki,

$$2n!+\frac{1}{2!}\cdot n!+\frac{1}{3!}\cdot n!+...+1$$

ko‘rinishdagi yig‘indi ham butun son bo‘ladi. Demak, $n>p$ uchun (3) tenglikning chap tomoni musbat butun son, o‘ng tomoni esa (4) ga ko‘ra birdan kichik musbat son bo‘ladi. Bu kelib chiqqan ziddiyat e sonining ratsional son deb faraz qilishimizning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi. Shuning uchun e – irratsional son bo‘ladi.

2. Sinus funksiya uchun Makloren formulasi. $f(x)=\sin x$ funksiyaning istalgan tartibli hosilasi mavjud va n-tartibli hosila uchun quyidagi formula o‘rinli edi (1.8-§): $f^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$.

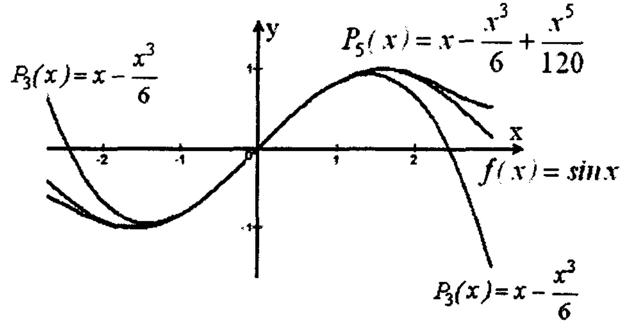
$x=0$ da $f(0)=0$ va

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{agar} \quad n=2k,\\ (-1)^k, & \text{agar} \quad n=2k+1\end{cases}$$

Shuning uchun 3-§ dagi (10) formulaga ko‘ra

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\sin(\theta x + \frac{2k+3}{2}\pi), \quad 0<\theta<1$$

(5) ko'rinishdagi yoyilmaga ega bo'lamiz.



24-rasm.

24-rasmda *f(x)=sinx*, $P_3(x)$, $P_5(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.

4.3. Kosinus funksiya uchun Makloren formulasi. Ma'lumki, *f(x)=cosx* funksiyaning *n*-tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ formulaga egamiz (I.8-§). x=0 da $f(0)=1$

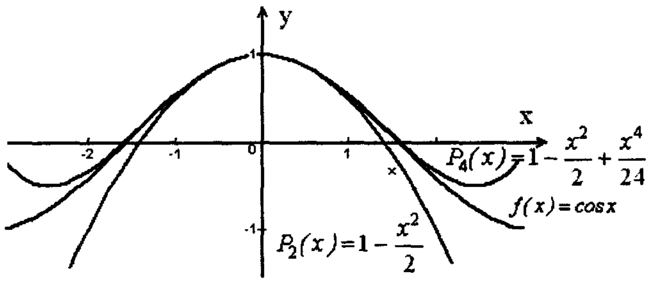
va $f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{agar } n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{agar } n = 2k \end{cases}$

Demak, *cosx* funksiya uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos(\theta x + k\pi), \ 0<\theta<1$$

(6)

25-rasmda *f(x)=cosx*, $P_2(x)$, $P_4(x)$ funksiyalarning grafiklari keltirilgan.



25-rasm.

4.4. ***$f(x)=(1+x)^{\mu}$*** **($\mu\in\mathbb{R}$) funksiya uchun Makloren formulasi.** Bu funksiya (-1;1) intervalda aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Uni Makloren formulasiga yoyish uchun $f(x)=(1+x)^{\mu}$ funksiyadan ketma-ket hosilalar olamiz:

$$f'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1},\qquad f''(x)=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},$$

$$f'''(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \qquad (7)$$

Aniqki, $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)$. Shuning uchun $f(x)=(1+x)^{\mu}$ funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1}\ (0<\theta<1). \qquad (8)$$

4.5. ***$f(x)=\ln(1+x)$*** **funksiya uchun Makloren formulasi.** Bu funksiyaning (-1;∞) intervalda aniqlangan va istalgan tartibli hosilasi mavjud. Haqiqatan ham, $f'(x)=(\ln(1+x))'=(1+x)^{-1}$ funksiyasiga (7) formulani qo‘llab, unda μ=-1 deb n ni n-1 bilan almashtirsak, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ formulani hosil qilamiz.

Ravshanki, $f(0)=0,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ Shuni e'tiborga olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1$$

(9)

Yuqorida keltirilgan asosiy elementar funksiyalarning Makloren formulalari boshqa funksiyalarni Teylor formulasiga yoyishda foydalaniladi. Shunga doir misollar ko'rib chiqamiz.

1-misol. Ushbu $f(x)=e^{-3x}$ funksiya uchun Makloren formulasini yozing.

Yechish. Bu funksiyaning Makloren formulasini yozish uchun $f(0),\ f'(0),...,f^{(n)}(0)$ larni topib, 3-§ dagi (10) formuladan foydalanish mumkin edi. Lekin $f(x)=e^x$ funksiyaning yoyilmasidan foydalanish ham mumkin. Buning uchun (1) formuladagi x ni $-3x$ ga almashtiramiz, natijada

$$e^{-3x}=1-\frac{3x}{1!}+\frac{9x^2}{2!}-...+(-1)^n\frac{3^n x^n}{n!}+\frac{(-3x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-3\theta x},\quad 0<\theta<1,$$

formulaga ega bo'lamiz.

2-misol. Ushbu $f(x)=\ln x$ funksiyani $x_0=1$ nuqta atrofida Teylor formulasini yozing.

Yechish. Berilgan funksiyani Teylor formulasiga yoyish uchun $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun olingan (9) asosiy yoyilmadan foydalanamiz. Unda x ni x-1 ga almashtiramiz, natijada

$\ln x=\ln((x-1)+1)$ va $\ln x=$

$$=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(n+1)}\cdot\frac{(x-1)^{n+1}}{(1+\theta(x-1))^{n+1}},$$

$0<\theta<1$ formulaga ega bo'lamiz. Bu formula $x-1>-1$ bo'lganda, ya'ni $x>0$ larda o'rinli.

4.6. Teylor formulasi yordamida taqribiy hisoblash. Makloren formulasi Lagranj ko'rinishdagi qoldiq hadini baholash masalasini qaraylik.

Faraz qilaylik, shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsinki, argument x ning $x_0=0$ nuqta atrofidagi barcha qiymatlarida hamda n ning barcha qiymatlarida $|f^{(n)}(x)|\leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

$$|R_n(x)|=|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}|\leq M\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Argument x ning tayin qiymatida $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ tenglik o'rinli, demak, n ning yetarlicha katta qiymatlarida $R_n(x)$ yetarlicha kichik bo'lar ekan.

Shunday qilib, $x_0=0$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

ko'phad bilan almashtirish mumkin. Natijada funksiyaning x nuqtadagi qiymati uchun

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

taqribiy formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida bajarilgan taqribiy hisoblashdagi xatolik $|R_n(x)|$ ga teng bo'ladi.

1-misol. $e^{0.1}$ ni 0,001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. e^x funksiyaning Makloren formulasidan foydalanamiz. (1) formulada $x=0{,}1$ deb olsak, u holda

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\ldots+\frac{(0,1)^n}{n!},$$

masala shartiga ko'ra xatolik 0,001 dan katta bo'lmasligi kerak, demak

$R_n(x)=\dfrac{0,1^{n+1}}{(n+1)!}e^{0,1\theta}<0,001$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan birinchi n ni topish yetarli. $e^{0,1\theta}<2$ ekanligini e’tiborga olsak, so‘nggi tengsizlikni quyidagicha yozib olish mumkin:

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}<0,001.$$

Endi n=1, 2, 3, ... qiymatlarni so‘nggi tengsizlikka qo‘yib tekshiramiz va bu tengsizlik n=3 dan boshlab bajarilishini topamiz. Shunday qilib, 0,001 aniqlikda

$$e^{0,1}\approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}=1,055.$$

Xususiy holda, n=1 bo‘lganda

$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ taqribiy hisoblash formulasi $R_2(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$, $x_0<\xi<x$ aniqlikda o‘rinli bo‘ladi.

2-misol. Differensial yordamida radiusi r=1,01 bo‘lgan doira yuzini toping. Hisoblash xatoligini baholang.

Yechish. Doira yuzi $S=\pi r^2$ ga teng. Bunda r_0=1, Δr=0,01 deb olamiz va $S=S(r)$ funksiya orttirmasini uning differensiali bilan almashtiramiz:

$S(r)\approx S(r_0)+dS(r_0)=S(r_0)+S'(r_0)\Delta r.$

Natijada

$S(1,01)\approx S(1)+dS(1)=S(1)+S'(1)0,01=\pi\cdot 1^2+2\pi\cdot 0,01=1,02\pi$

hosil bo‘ladi.

Bunda hisoblash xatoligi

$R_2(r)=\dfrac{S''(\xi)}{2!}\cdot(r-r_0)^2$, $r_0<\xi<r$ dan katta emas. $S''(r)=2\pi$ va r ga bog‘liq emas, shu sababli $R_2(r)=\dfrac{2\pi}{2!}\cdot 0,01^2=0,0001\pi$. Demak, hisoblash xatoligi 0,000314 dan katta emas.

3-*misol*. Ushbu $f(x)=e^{x^2-x}$ funksiyaning x=0,03 nuqtadagi qiymatini differensial yordamida hisoblang. Xatolikni baholang.

Yechish. Taqribiy hisoblash formulasi $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ da $x_0=0$, $x=0{,}03$ qiymatlarni qo'ysak, $f(0{,}03)\approx f(0)+f'(0)0{,}03$ bo'lib, xatolik

$$R_2=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot x^2=\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot 0{,}03^2,\ 0<\xi<0{,}03 \text{ bo'ladi.}$$

Berilgan funksiya hosilalarini va nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz: $f'(x)=(2x-1)\,e^{x^2-x}$, bundan $f'(0)=-1$, $f''(x)=2\,e^{x^2-x}+$ $+(2x-1)^2\,e^{x^2-x}=e^{x^2-x}\,(4x^2-4x+3)$, bundan $f''(\xi)<3$. Olingan natijalardan foydalanib, $f(0{,}03)\approx 1+(-1)\cdot 0{,}03=0{,}97$ va $R_2<\frac{3}{2!}\cdot$ $\cdot 0{,}03^2=0{,}0017$ ekanligini topamiz.

Teylor formulasi funksiyalarni ekstremumga tekshirishda, qatorlar nazariyasida, integrallarni hisoblashlarda ham keng tatbiqqa ega.

VII bobga doir test savollari

I.

1. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan.
2. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ da differensiallanuvchi.
3. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.
4. c nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud.
5. $g(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan.
6. $g(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz.
7. $f(a)=f(b)$.
8. $g(x)$ funksiya $(a;b)$ da differensiallanuvchi.
9. $g'(x)\neq 0$.
10. $f'(c)=0$ bo'ladigan kamida bitta c $(a<c<b)$ nuqta mavjud.
11. $(a;b)$ intervalda kamida bitta c nuqta mavjud bo'lib.
12. kamida bitta c $(a<c<b)$ nuqta topilib, $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

13. $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning biror ichki c nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi.

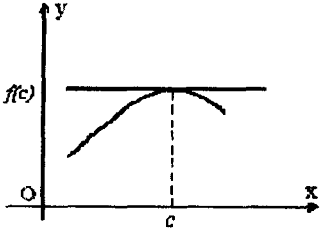
14. $f'(c)=0$ bo'ladi.

15. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan.

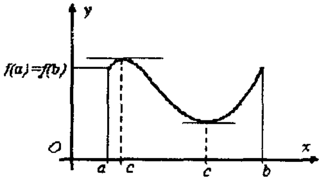
T/r	Teorema	Sharti	Xulosasi
1.1.	Ferma teoremasi	16, 14, 4	15
1.2.	Roll teoremasi	?	?
1.3.	Lagranj teoremasi	?	?
1.4.	Koshi teoremasi	?	?

II.

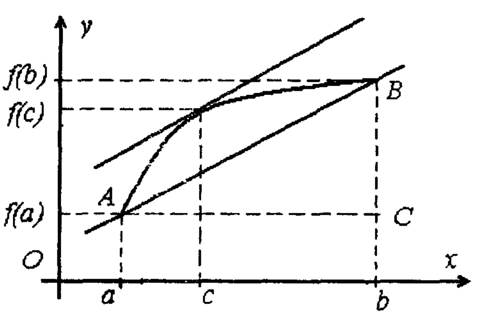
2.1. Ferma teoremasi



2.2. ?



2.3 ?



III.

3.1.	Ferma teoremasi	Geometrik ma'nosi	Urinma Ox o'qqa parallel
3.2.	Roll teoremasi	Geometrik ma'nosi	?
3.3.	Lagranj teoremasi	Geometrik ma'nosi	?
3.4.	Ferma teoremasi	Fizik ma'nosi	?
3.5.	Roll teoremasi	Fizik ma'nosi	Kamida bitta nuqtada tezlik 0 ga teng
3.6.	Lagranj teoremasi	Fizik ma'nosi	?

IV. Teylor (Makloren) formulasi qoldiq hadi

T/r	Funksiya	Peano	Lagranj	Koshi
4.1.	$f(x)$	$o(x^n)$	$\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$	$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$, $0<\theta<1$
4.2.	e^x	?	?	?
4.3.	$\sin x$	?	?	?
4.4.	$\cos x$	?	?	?
4.5.	$\ln(1+x)$	?	?	?

VIII BOB. HOSILA YORDAMIDA FUNKSIYANI TEKSHIRISH

1-§. Hosila yordamida funksiyani monotonlikka tekshirish

1.1. Funksiyaning o'zgarmaslik sharti

1-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) da differensiallanuvchi bo'lsin. Shu intervalda $f(x)$ funksiya o'zgarmas bo'lishi uchun $f'(x)=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. *Zarurligi* ravshan. Chunki funksiya o'zgarmas bo'lsa, barcha nuqtalarda $f'(x)=0$ bo'ladi.

Yetarliligi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differrensiallanuvchi, ya'ni $\forall x \in (a;b)$ uchun chekli $f'(x)$ hosila mavjud va $f'(x)=0$. Endi $x_1<x_2$ bo'lgan $\forall x_1,x_2 \in (a;b)$ nuqtalarni olaylik. Ko'rib chiqilayotgan $f(x)$ funksiya $[x_1;x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x_1;x_2)$ intervalga tegishli shunday c nuqta topilib,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x)=0$, bundan $f'(c)=0$, va (1) tenglikdan $f(x_2)-f(x_1)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ intervalning istalgan ikkita nuqtasidagi qiymatlari o'zaro teng. Demak, funksiya o'zgarmas bo'ladi.

Bundan integral hisobda muhim rol o'ynaydigan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega va $f'(x)=g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ bilan $g(x)$ funksiyalar o'zgarmas songa farq qiladi:

$$f(x)=g(x)+C, \quad C=const.$$

Haqiqatan ham, shartga ko'ra $(f(x)-g(x))'=C'=0$. Bundan 1-teoremaga asosan $f(x)-g(x)=C$, ya'ni $f(x)=g(x)+C$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Misol. Funksiyaning o'zgarmaslik shartidan foydalanib

$sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ formulaning o‘rinli ekanligini isbotlang.

Yechish. Quyidagi funksiyani ko‘rib chiqamiz: $f(x)=sin^2x+\frac{1}{2}cos2x$, bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan, differensiallanuvchi va hosilasi aynan nolga teng: $f'(x)=2sinxcosx-sin2x=0$. Funksiyaning o‘zgarmaslik shartiga ko‘ra

$$sin^2x+\frac{1}{2}cos2x=C$$

o‘rinli. C ni aniqlash uchun x argumentga qiymat beramiz, masalan, $x=0$ bo‘lsin. U holda $C=\frac{1}{2}$ va $sin^2x+\frac{1}{2}cos2x=\frac{1}{2}$ yoki $sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ bo‘ladi.

1.2. Funksiyaning o‘sishi va kamayishi. Biz bu yerda funksiya hosilasi yordamida funksiyaning monotonligini aniqlash mumkinligini ko‘rsatamiz.

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lsin. Bu funksiya $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan (o‘smaydigan) bo‘lishi uchun $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

Isboti. Kamaymaydigan funksiya holatini ko‘ramiz.

Zaruriyligi. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan bo‘lsin. U holda $\forall x\in(a;b)$ va $\Delta x>0$ uchun $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$ tengsizlik, $\Delta x<0$ uchun $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa $\frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$ bo‘lishi aniq. Teorema shartiga ko‘ra $f(x)$ differensiallanuvchi, demak, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\Delta x\to 0$ da chekli limiti mavjud, tengsizlikda limitga o‘tish haqidagi teoremaga ko‘ra, bu limit nomanfiy bo‘ladi, ya’ni $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$.

Yetarliligi. $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x) \geq 0$ bo'lsin. Endi $x_1 < x_2$ bo'lgan $\forall x_1,\ x_2 \in (a;b)$ nuqtalarni olaylik. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya $[x_1;x_2]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x_1;x_2)$ intervalga tegishli shunday c nuqta topilib,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra $f'(x) \geq 0$, bundan $f'(c) \geq 0$, va (2) tenglikdan $f(x_2)-f(x_1) \geq 0$, ya'ni $f(x_2) \geq f(x_1)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa funksiyaning $(a;b)$ intervalda kamaymaydigan funksiyaligini ko'rsatadi.

O'smaydigan funksiya holati ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

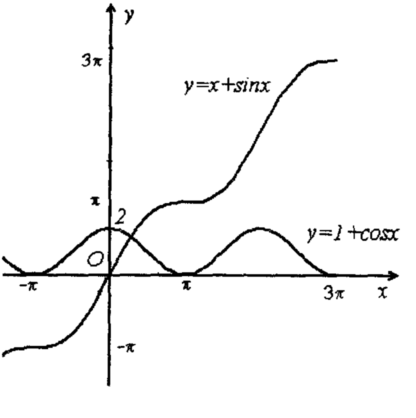
Endi funksiyaning qat'iy monoton bo'lishining yetarli shartini isbotlaymiz.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi va $\forall x \in (a;b)$ uchun $f'(x)>0$ ($f(x)<0$) bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $x_1, x_2 \in (a;b)$ va $x_1 < x_2$ bo'lsin. Aniqki, $[x_1;x_2]$ kesmada $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu teoremaga binoan shunday $c \in (x_1;\ x_2)$ mavjudki,

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik va $f'(c)>0$ ($f'(c)<0$) ekanligidan $f(x_2)>f(x_1)$ ($f(x_2)< f(x_1)$) bo'lishi kelib chiqadi.



26-rasm.

Bu $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini ifodalaydi.

Ushbu $y=x^3$ funksiya (-1;1) intervalda qat'iy o'suvchi, lekin uning hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng bo'ladi.

Shunga o'xshash $f(x)=x+\cos x$ funksiya ham aniqlanish sohasida qat'iy o'suvchi, ammo uning hosilasi $f'(x)=1-\sin x$ cheksiz ko'p nuqtalarda ($x=\frac{\pi}{2}+2n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$) nolga teng bo'ladi (26-rasm).

Bu misollar yuqoridagi teoremaning shartlari funksiyaning qat'iy o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun faqat yetarli shart ekanligini ko'rsatadi.

1-misol. Ushbu $f(x)=2x^2-\ln x$ funksiyaning monotonlik intervallarini toping.

Yechish. Funksiya (0;+∞) intervalda aniqlangan va hosilasi $f'(x)=4x-1/x$ ga teng. Yuqoridagi yetarli shartga ko'ra, agar $4x-1/x>0$ bo'lsa, ya'ni $x>1/2$ bo'lsa, o'suvchi; agar $4x-1/x<0$ bo'lsa, ya'ni $x<1/2$ bo'lsa, funksiya kamayuvchi bo'ladi. Shunday qilib, funksiya (0;1/2) intervalda kamayuvchi, (1/2;+∞) intervalda o'suvchi bo'ladi.

2-misol. Ushbu $f(x)=\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{2x^2}$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ dan iborat. Funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{x^3}=\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{x^3}, \text{ bundan}$$

$(-\infty;-3]\cup(0;1]\cup[2;\infty)$ to'plamda $f'(x)\geq 0$, $[-3;0)\cup[1;2]$ da esa $f'(x)\leq 0$ bo'lishini aniqlash qiyin emas.

Demak, berilgan $f(x)$ funksiya $(-\infty;-3]$, $(0;1]$ va $[2;\infty)$ oraliqlarning har birida o'suvchi; $[-3;0)$ va $(1;2]$ oraliqlarning har birida kamayuvchi bo'ladi.

3-misol. Agar $0<x\leq 1$ bo'lsa, $x-x^3/3<\mathrm{arctg}x<x-x^3/6$ qo'sh tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

Yechish. Berilgan tengsizlikning o'ng qismi $arctgx<x-x^3/6$ tengsizlikni isbotlaymiz. Chap qismi shunga o'xshash isbotlanadi. $f(x)=arctgx-x+x^3/6$ funksiyani ko'rib chiqamiz, uning hosilasi

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$ ga teng. $f(x)=arctgx-x+x^3/6$ funksiya sonlar o'qida aniqlanagan va uzluksiz, demak, u $[0;1]$ kesmada ham uzluksiz, $(0;1)$ intervalda $f'(x)<0$. Bundan esa $f(x)$ funksiya $[0;1]$ kesmada kamayuvchi bo'lib, $0<x\leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi x lar uchun $f(x)<f(0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. So'nggi tengsizlikni $-f(0)=0$ ni e'tiborga olib, quyidagicha yozib olamiz:

$arctgx-x+x^3/6<0$ bundan $arctgx<x-x^3/6$.

Bu qo'shtengsizlikda qatnashgan funksiya grafiklari 27-rasmda keltirilgan.

1.3. Funksiyaning nuqtada monotonlik sharti. Biz shu paytgacha funksiyaning o'sishi va kamayishi tushunchalarini biror oraliqqa nisbatan kiritdik va o'rgandik. Ba'zi hollarda bu tushunchalarni nuqtaga nisbatan qarash foydadan xoli emas.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan va $x_0\in(a;b)$ bo'lsin.

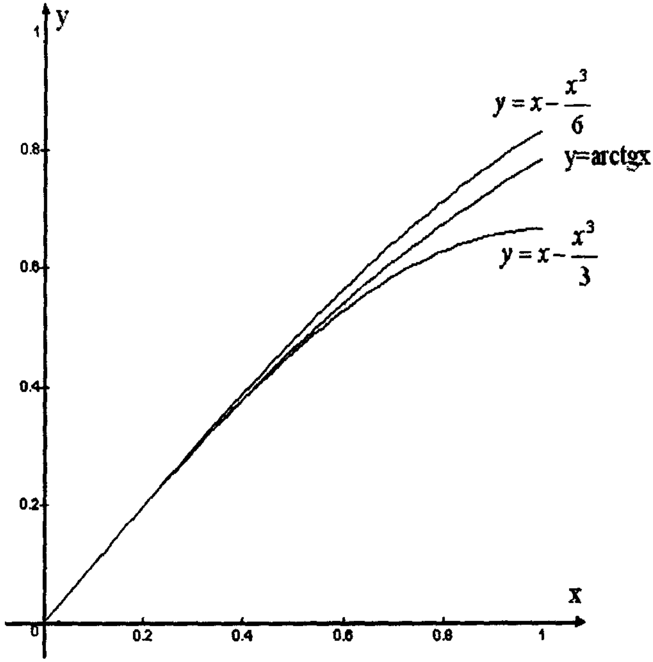
Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ atrofi topilib, $x<x_0$ bo'lganda $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$, $x>x_0$ bo'lganda esa $f(x)>f(x_0)$ $(f(x)<f(x_0))$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *o'suvchi* (*kamayuvchi*) deyiladi.

Endi x_0 nuqtada monotonlikning yetarli shartini keltiramiz.

4-teorema. $f(x)$ funksiya $x_0\in(a;b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $f'(x_0)>0$ $(f'(x_0)<0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya shu nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra chekli $f'(x_0)$ mavjud va u noldan katta (kichik) bo'lgani uchun ushbu

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \quad (<0)$$



27-rasm.

tengsizlik o'rinli. Limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalaridan x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, bu atrofda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \quad (<0)$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, $x<x_0$ bo'lganda $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ tengsizlik, $x>x_0$ bo'lganda esa $f(x)>f(x_0)$ $(f(x)<f(x_0))$ tengsizlik ham o'rinli. Bu $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishini ifodalaydi. Teorema isbot bo'ldi.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqtalarda funksiya o'sishi ham, kamayishi ham mumkin. Masalan, $y=x^5$ funksiya hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng, lekin funksiya shu nuqtada o'suvchi; $y=-x^5$ funksiya hosilasi ham $x=0$ nuqtada nolga teng, lekin bu funksiya $x=0$ nuqtada kamayuvchi ekanligini ko'rish qiyin emas.

Endi biror x_0 nuqtada o'suvchi bo'lgan funksiyaning shu nuqtaning atrofida o'suvchi bo'lishi shart emasligini ko'rsatuvchi misol keltiramiz.

Ushbu $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & \text{agar} \quad x\neq 0, \\ 0, \quad \text{agar} \quad x=0 \end{cases}$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiya barcha nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqatan ham, $x\neq 0$ lar uchun

$f'(x)=1+2x\sin\dfrac{2}{x}-2\cos\dfrac{2}{x}$, $x=0$ uchun esa

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\dfrac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x\sin\frac{2}{x})=1>0 \text{ bo'ladi.}$$

Demak, 4-teoremaga asosan berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o'suvchi bo'ladi.

Endi quyidagi

$$x_n=\frac{1}{\pi n},\ x_n'=\frac{2}{\pi+2\pi n},\quad n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

nuqtalarda hosilaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'\left(\frac{1}{\pi n}\right)=1+\frac{2\sin \pi n}{\pi n}-2\cos 2\pi n=-1,$$

$$f'\left(\frac{2}{\pi+2\pi n}\right)=1+\frac{4}{\pi+2\pi n}\sin(\pi+2\pi n)-2\cos(\pi+2\pi n)=1-2(-1)=3.$$

Demak berilgan funksiyaning hosilasi $\delta>0$ soni qanday bo'lmasin n ning yetarlicha katta qiymatlarida $(-\delta;\ \delta)$ atrofida ham musbat, ham manfiy qiymatlarni qabul qiladi. Bundan $f(x)$ funksiyaning o'zi $x=0$ nuqtada o'suvchi bo'lgani bilan bu nuqtaning $(-\delta;\ \delta)$ atrofida monoton emasligi kelib chiqadi.

Yuqorida biz $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\frac{2}{x}, & \text{agar} \quad x\neq 0, \\ 0, \ \text{agar} \quad x=0 \end{cases}$ funksiya hosilasi $f'(x)=\begin{cases} 1+2x\sin\frac{2}{x}-2\cos\frac{2}{x}, & \text{agar} \quad x\neq 0, \\ 1, \ \text{agar} \quad x=0 \end{cases}$ ekanligini ko‘rdik.

Shu hosilani uzluksizlikka tekshiraylik. Agar $x\neq 0$ bo‘lsa, $f'(x)$ funksiyaning uzluksizligi ravshan. Agar $x=0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ mavjud emas, demak, hosila $x=0$ nuqtada uzilishga ega.

O‘quvchilarga quyidagi teoremani isbotlashni taklif qilamiz:

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada musbat hosilaga ega bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo‘lib, bunda $f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘ladi.

2-§. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

2.1. Funksiyaning parametrik usulda berilishi. Aytaylik, t o‘zgaruvchining T qiymatlar to‘plamida

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

funksiyalar sistemasi berilgan va $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar to‘plami D bo‘lsin. Ushbu savolga javob izlaymiz: (1) sistema D to‘plamda y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydimi? Har bir x ga unga mos t bo‘yicha $y=\psi(t)$ sonini mos qo‘ysak, bu moslik funksiya bo‘ladimi?

D to‘plamdan ixtiyoriy x_0 ni tayinlab,

$$x_0=\varphi(t) \qquad (2)$$

tenglamani ko‘rib chiqamiz.

Bu tenglama T to‘plamda yechimga ega. Ammo (2) tenglamaning ildizi yagona bo‘lmasligi ham mumkin. Aytaylik, bu tenglama T

to'plamda bir nechta t_{01}, t_{02}, ...ildizlarga ega bo'lsin. U holda $y_{01}=\psi(t_{01})$, $y_{02}=\psi(t_{02}),...$ sonlar ichida bir-biriga teng bo'lmaganlari mavjud bo'lishi mumkin, masalan $y_{01}\neq y_{02}$, bo'lsin. U holda yuqoridagi moslikka ko'ra $x=x_0$ ga y_0 sifatida y_{01} ni ham y_{02} ni ham mos qo'yish mumkin. Shu sababli (1) funksiyalar sistemasi yordamida D to'plamda x ning funksiyasini aniqlab bo'lmaydi.

Ikkinchi tomondan, (2) tenglama ildizlari to'plamida $y=\psi(t)$ funksiya o'zgarmas songa teng bo'lishi mumkin: $\psi(t_{01})=\psi(t_{02})=y_0$. U holda qaralayotgan x_0 songa y o'zgaruvchining t ga mos keladigan yagona y_0 qiymatini mos qo'yish mumkin.

Agar D dan olingan har bir x uchun yuqoridagi xossa o'rinli bo'lsa, u holda D sohada yuqoridagi qoida yordamida $y=f(x)$ funksiya aniqlanadi. Bu funksiya (1) sistema yordamida aniqlangan deyiladi. (1) dagi t o'zgaruvchi parametr, $y=f(x)$ funksiya esa parametrik ko'rinishda berilgan deyiladi.

(1) sistemadan $y=f(x)$ funksiyaning analitik ifodasini olish *parametrni yo'qotish* deb ataladi.

(1) sistema y o'zgaruvchini x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida aniqlashi uchun $x=\varphi(t)$ funksiya (T to'plamdan olingan t uchun) teskarilanuvchi bo'lishi yetarli. Haqiqatan ham, bu holda (2) tenglama T to'plamda yagona yechimga ega bo'ladi. Demak, D dan olingan har bir x_0 uchun $x_0=\varphi(t_0)$ bo'ladigan yagona t_0 mavjud, bu t_0 songa yagona $y_0=\psi(t_0)$ mos keladi. Shunday qilib, (1) sistema y ni x ning $y=f(x)$ funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bu funksiyani x ning murakkab funksiyasi sifatida aniqlash mumkin:

$$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

bu yerda: $\varphi^{-1}(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ funksiyaga teskari funksiya.

1-*misol.* $T=(-\infty;+\infty)$ da $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ berilgan.

Bu sistema $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydimi?

Yechish. $x=t^3$ funksiya T da qat'iy monoton va $D=(-\infty;+\infty)$ da teskari funksiyasi $t=\sqrt[3]{x}$ mavjud. Bundan $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ sistema y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi.

Bu holda y funksiyani t parametrni yo'qotib, x orqali ifodalash mumkin: $y=x\sqrt[3]{x}$, bu yerda $x\in(-\infty;+\infty)$.

2-*misol.* $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\cos t,\ t\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$ sistema berilgan.

Bu sistema $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydimi?

Yechish. $x=t^2$ funksiyaning qiymatlar to'plami $D=[0,+\infty)$ dan iborat. D dan olingan har bir x $(x\neq 0)$ ga $T=(-\infty;+\infty)$ dan ikkita: $t_1=-\sqrt{x}$ va $t_2=\sqrt{x}$ sonlar mos keladi. Bu sonlarga esa $y=\cos t$ funksiyaning aynan bitta qiymati mos keladi:

$$y=\psi(t_1)=\psi(t_2)=\cos\sqrt{x},\ (0\le x<+\infty).$$

Shunday qilib, berilgan sistema $[0;\infty)$ da $y=\cos\sqrt{x}$ funksiyani aniqlaydi.

3-*misol.* Ushbu $\begin{cases} x=t+\cos t, \\ y=\sin t+\ln t,\ 0<t<+\infty \end{cases}$ sistema biror sohada y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydimi?

Yechish. $(0;+\infty)$ oraliqda $x=t+\cos t$ funksiya monoton o'suvchi, demak, x ning qiymatlar to'plami $(0;\infty)$ da $t=\varphi^{-1}(x)$ teskari funksiya mavjud. Shu sababli bu sistema $(0;+\infty)$ da y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. Ammo bu funksiyani chekli sondagi elementar funksiyalar yordamida ifodalab bo'lmaydi.

Istalgan $y=f(x)$ funksiyani parametrik ko'rinishda yozish mumkin. Buning uchun qiymatlar to'plami berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga teng bo'lgan ixtiyoriy $x=\varphi(t)$ funksiyani olish yetarli. Bu holda $x=\varphi(t)$ funksiyaning T

aniqlanish sohasida $y = f(\varphi(t)) = \psi(t)$ funksiya mavjud bo'ladi va

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (3)$$

sistema $f(x)$ funksiyani parametrik usulda aniqlaydi.

Haqiqiatan ham, agar D dan olingan ixtiyoriy x_0 uchun T dan $x_0 = \varphi(t_0)$ bo'ladigan biror $t = t_0$ ni topamiz. U holda $y_0 = \psi(t_1) = f(\varphi(t_0)) = f(x_0)$ bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, yuqoridagi usul bo'yicha topilgan y_0 son $x_0 = \varphi(t)$ tenglama ildizlaridan qaysi biri olinganligiga bog'liq emas, shuningdek, D dan olingan har bir x_0 ga (3) sistema yordamida mos qo'yilgan y_0 son $y=f(x)$ qonunga bo'ysunadi.

Yuqorida aytilganlardan, $y=f(x)$ funksiyani parametrik usulda berilishining cheksiz ko'p usullari mavjudligi kelib chiqadi. Bularning eng soddasi $x = \varphi(t) = t$ funksiya yordamida parametrik usulda berishdir:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in D(f).$$

4-*misol.* $y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \le x \le a) \qquad (4)$

funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyani biror parametrik usulda yozing.

Yechish. Bunda trigonometrik funksiyalardan foydalanish qulay. $x=a\cos t$ funksiyani $[0,\pi]$ da qaraymiz, u holda $x \in [-a, a]$ bo'ladi. $y = \sqrt{a^2 - (a\cos t)^2} = a\sqrt{\sin^2 t} = a|\sin t|$ $[0,\pi]$ da $\sin t \ge 0$, shu sababli $y=a\sin t$.

Demak, berilgan funksiyani

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi]$$

sistema yordamida berish mumkin.

Yuqoridagi funksiyani

$$\begin{cases} x = \dfrac{2at}{t^2+1}, \\ y = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t \in [-1;1] \end{cases}$$

sistema yordamida ham berish mumkin. Buni tekshirib ko'rishni o'quvchilarga qoldiramiz.

Geometriyada $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ sistema biror $[t_0, t_1]$ oraliqda qaraladi. Ko'pincha bunda berilgan sistema y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlash masalasi geometrik nuqtayi nazardan chetda qoladi. Berilgan oraliqdan olingan har bir t ga mos keluvchi x va y lar topilib, $M(x,y)$ nuqtalarni xOy koordinata tekisligida qaraydi. Bunday nuqtalar to'plami geometriyada chiziq, sistema esa uning parametrik tenglamasi deyiladi.

Odatda, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalarni $[t_0, t_1]$ oraliqda yoki $(-\infty;+\infty)$ oraliqda uzluksiz deb qaraladi. Bu holda bunday sistema bilan aniqlangan nuqtalarning geometrik o'rni *Jordan chizig'i* yoki *uzluksiz chiziq* deyiladi. Xususan, biror oraliqda uzluksiz $y=f(x)$ funksiyaning grafigi Jordan chizig'i bo'ladi.

Agar uzluksiz chiziqni shunday parametrik berish mumkin bo'lib, t parametrni $[t_0, t_1]$ oraliqdan olingan turli qiymatlarga tekislikning turli nuqtalari mos kelsa (bunda $t=t_0$ va $t=t_1$ istesno), bu chiziq sodda chiziq deyiladi. Masalan, berilgan oraliqda uzluksiz bo'lgan $y=f(x)$ funksiya grafigi sodda chiziqqa misol bo'ladi.

Agar sodda chiziqda ((3) tenglama bilan berilgan) parametrni $t=t_0$ va $t=t_1$ qiymatlarga tekislikda bitta nuqta mos kelsa, u holda bu chiziq *sodda yopiq chiziq* deyiladi. Bunga misol sifatida

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \qquad t \in [0;2\pi] \end{cases}$$

sistema bilan berilgan ellipsni qarash mumkin.

2.2. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi. Faraz qilaylik, x argumentning y funksiyasi quyidagicha

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta \end{cases} \tag{5}$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin.

Agar $x=\varphi(t)$ funksiya teskarilanuvchi bo'lsa, ya'ni $t = \varphi^{-1}(x)$ mavjud bo'lsa, u holda $y=\psi(t)$ tenglamani $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ ko'rinishda yozib olish va $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ funksiyaning hosilasini topish masalasini qarash mumkin. Odatda, bu masala parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish masalasi deb ham yuritiladi.

Teorema. Aytaylik, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz hamda $(\alpha;\beta)$ da differensiallanuvchi va $\varphi'(t)$ shu intervalda ishorasini saqlasin. Agar $x=\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlar to'plami $[a,b]$ kesma bo'lsa, u holda $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ tenglamalar $[a,b]$da uzluksiz, (a,b)da differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi va

$$y'_x = f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} \tag{6}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $\varphi'(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ da ishorasini saqlaydi, aniqlik uchun $\varphi'(t)>0$ bo'lsin. U holda $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ da uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'ladi. Shuning uchun $[a,b]$ kesmada unga teskari bo'lgan uzluksiz, qat'iy o'suvchi $t = \varphi^{-1}(x)$ funksiya mavjud va bu funksiya (a,b) oraliqda differensiallanuvchi, hosilasi $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ formula bilan hisoblanadi. Bu holda $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$ funksiya ham $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. Bu funksiyaning hosilasini topamiz. Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasiga ko'ra $y'_x = y'_t\, t'_x$, bundan esa $y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}$ $(x'_t \neq 0)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Teorema isbot bo‘ldi.

$(\alpha;\beta)$ da $\varphi'(t)<0$ bo‘lgan holda teorema shunga o‘xshash isbotlanadi.

5-misol. Ushbu $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \pi/2 \end{cases}$ parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $(0,\pi/2)$ da $x'_t = -12\cos^2 t \sin t < 0$ va bu kesmada yuqoridagi teoremaning barcha shartlari bajariladi. Shuning uchun (6) formulaga ko‘ra $y'_x = \frac{12\sin^2 t\cos t}{-12\cos^2 t\sin t} = -tgt$ bo‘ladi.

Aniqki,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (7)$$

tenglamalar y'_x funksiyani x ning funksiyasi sifatida parametrik ifodalaydi.

Aytaylik, (6) tenglamalar sistemasi yuqoridagi teorema shartlarini qanoatlantirsin. U holda y'_x funksiyaning x bo‘yicha hosilasi, ya’ni y ning x bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilasini quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y''_{x^2} = (y'_x)_x' = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{(x'_t)'_t} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'(t))^3}.$$

Shunday qilib, quyidagi qoida o‘rinli ekan: y ning x bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilasini topish uchun parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning birinchi tartibli hosilasi y'_x ni t parametr bo‘yicha differensiallab, so‘ngra hosil qilingan natijani x'_t ga bo‘lish kerak.

Misol tariqasida yuqorida berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz: $y'_x=tgt$, $(y'_x)'_t=(tgt)'_t=1/\cos^2 t$ va $x'_t=-$

$-12\cos^2 t \cdot \sin t$ ekanligini e'tiborga olsak, qoidaga ko'ra $y''_{x^2} = -\dfrac{1}{12\cos^4 t \cdot \sin t}$ bo'ladi.

Xuddi shu usulda uchinchi va boshqa yuqori tartibli hosilalar ham hisoblanadi.

2.3. Parametrik usulda berilgan chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari. Agar biror chiziq $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ sistema yordamida parametrik berilgan bo'lsa, bu chiziqning t parametrning t_0 qiymatiga mos (x_0,y_0) nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini aniqlash mumkin:

$$k = f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \tag{8}$$

U holda (1) chiziqning (x_0,y_0) nuqtasidagi urinmasi tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0), \text{ bu yerda } x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$$

Ba'zi hollarda $(\psi'(t_0) \ne 0)$ yuqoridagi tenglama

$$\frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} \text{ kabi yoziladi.}$$

(1) chiziqning (x_0, y_0) nuqtasidagi normali ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$y - \psi(t_0) = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - \varphi(t_0))$$

6-*misol.* $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ chiziqning $t = \frac{\pi}{4}$ ga mos keluvchi nuqtasida o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

Yechish: Hosilalarni topamiz:

$\varphi'(t) = -12\cos^2 t\sin t,\ \ \psi'(t) = 12\sin^2 t\cos t.$ $(0;\frac{\pi}{2})$ da $\varphi'(t) < 0$, demak, berilgan sistema shu oraliqda y ni x ning differensiallanuvchi funksiyasi sifatida aniqlaydi.

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2},\ \ \psi(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2},\ \ \varphi'(t_0) = \varphi'(\frac{\pi}{4}) = -12\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 =$$

$$= -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{8} = -3\sqrt{2};\ \ \psi'(t_0) = \psi'(\frac{\pi}{4}) = 12\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 3\sqrt{2}.$$

$$y-\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow y-\sqrt{2} = -x+\sqrt{2} \Rightarrow y+x-2\sqrt{2} = 0$$

Normal tenglamasi

$$y-\sqrt{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow y-\sqrt{2} = x-\sqrt{2} \Rightarrow y = x.$$

7-*misol.* $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ lemniskataning $\theta = \frac{\pi}{6}$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtasida o‘ikazilgan urinmaning burchak koeffitsientini toping.

Yechish. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan chiziqni parametrik ko‘rinishda yozib olamiz. Buning uchun qutb koordinatalari va dekart koordinatalarini bog‘lovchi $x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta$ formuladan foydalanamiz. U holda lemnistikaning quyidagi parametrik tenglamasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \end{cases} \text{bu yerda } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

$$\varphi'(\theta) = -a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta - \frac{a\cos\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\psi'(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta - \frac{a\sin\theta\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\psi'(\theta)=\psi'(\frac{\pi}{6})=a\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=0;$$

$$\varphi'(\theta_0)=\varphi'(\frac{\pi}{6})\neq 0$$

Demak, $k=\dfrac{\psi'(\theta_0)}{\varphi'(\theta_0)}=0$ va urinma Ox o'qqa paralel bo'ladi.

3-§. Birinchi tartibli hosila yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish

3.1. Funksiyaning ekstremumlari. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan va $x_0\in(a;b)$ bo'lsin.

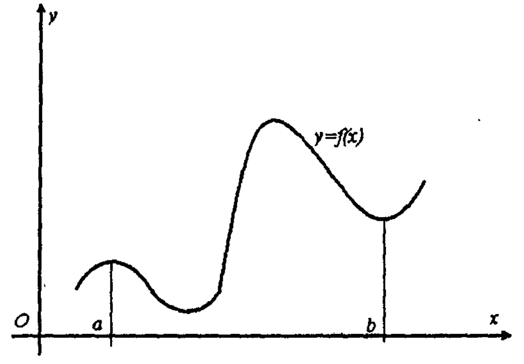
1-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo'lib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy x uchun $f(x)\leq f(x_0)$ ($f(x)\geq f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *maksimum* (*minimum*) *nuqtasi*, $f(x_0)$ esa *funksiyaning maksimumi* (*minimumi*) deb ataladi.

2-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ mavjud bo'lib, shu atrofdan olingan ixtiyoriy $x\neq x_0$ uchun $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy maksimumga (minimumga) ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalari funksiyaning ekstremum nuqtalari, maksimum va minimum qiymatlari funksiyaning ekstremumlari deb ataladi.

Shunday qilib, agar $f(x_0)$ maksimum (minimum) bo'lsa, u holda $f(x_0)$ funksiyaning x_0 nuqtaning kichik atrofida qabul qiladigan qiymatlarning eng kattasi (eng kichigi) bo'ladi, ya'ni funksiya ekstremumi lokal xarakterga ega. Bundan funksiya ekstremumi u aniqlangan sohada eng katta yoki eng kichik qiymati bo'lishi shart emasligi kelib chiqadi.

Shuningdek, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir qancha maksimum va minimumlarga ega bo'lishi, maksimum qiymati uning ba'zi bir minimum qiymatidan kichik bo'lishi ham mumkin. Masalan, grafigi 28-rasmda ko'rsatilgan $y=f(x)$ funksiya uchun $x=a$ nuqtada lokal maksimum, $x=b$ nuqtada lokal minimum mavjud bo'lib, $f(a)<f(b)$ tengsizlik o'rinli.



28-rasm.

3.2. Ekstremumning zaruriy sharti. Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremum nuqtalarini topish osonlashadi.

Avval ekstremumning zaruriy shartini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng yoki mavjud emas.

Isboti. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lsin. U holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ atrofi mavjud bo'lib, bu atrofdan olingan $\forall x$ uchun $f(x_0)>f(x)$ bo'ladi. Agar $x>x_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$$

tengsizlik, agar $x<x_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi ravshan.

Bu tengsizliklar chap tomonidagi ifodalarning $x \to x_0$ da limiti mavjud bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0+0) \leq 0,$$

$$\lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0-0) \geq 0 \text{ bo‘ladi.}$$

Agar funksiyaning chap $f'(x_0-0)$ va o‘ng $f'(x_0+0)$ hosilalari nolga teng bo‘lsa, u holda funksiya hosilasi $f'(x_0)$ mavjud va nolga teng bo‘ladi.

Agar $f'(x_0-0)$ va $f'(x_0+0)$ lar noldan farqli bo‘lsa, aniqki, $f'(x_0+0) < f'(x_0-0)$ bo‘lib, $f'(x_0)$ mavjud bo‘lmaydi.

Funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo‘lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi. Teorema isbot bo‘ldi.

1-*misol.* Ma’lumki, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ da hosilasi mavjud emas. Bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega (I bob, 2-§. 2-rasmga qarang).

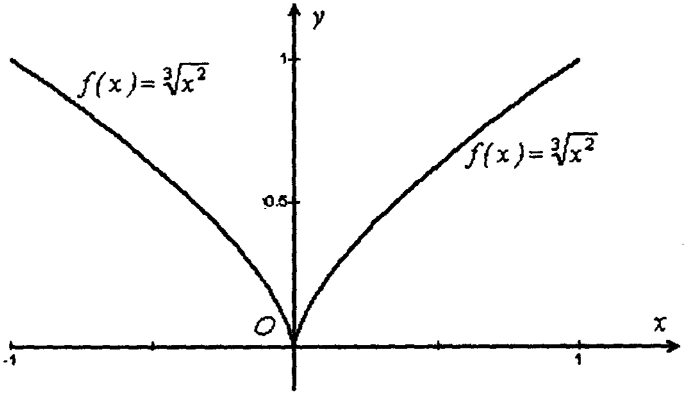
2-*misol.* $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ bo‘lsin.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty, \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to -0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

bo‘lgani uchun $x=0$ nuqtada funksiyaning ham hosilasi mavjud emas. Ammo bu funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo‘lishi ravshandir (29- rasm).

3-ta’rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar yoki hosila mavjud bo‘lmaydigan nuqtalar funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataladi. Funksiya hosilasi nolga teng bo‘lgan nuqtalar *statsionar nuqtalar* deb ataladi.

Har qanday kritik nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lavermaydi.



29-rasm.

Masalan, $f(x)=(x-1)^3$, $f'(x)=3(x-1)^2$, $f'(1)=0$ bo'lib, $x_0=1$ kritik nuqta. Lekin $x_0=1$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida $f(1)=0$ eng kichik yoki eng katta qiymat bo'la olmaydi. Chunki har bir atrofda noldan kichik va noldan katta qiymatlar istalgancha bor. Demak, $x=1$ nuqtada ekstremum yo'q.

Misol. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda bu nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'la olmasligini ko'rsating.

Yechish. Aytaylik, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ bo'lsin.

U holda $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ dan olingan ixtiyoriy $x\neq x_0$ lar uchun $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>\dfrac{1}{\varepsilon}$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa $x>x_0$ da $f(x)>f(x_0)$, $x<x_0$ da $f(x)<f(x_0)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada ekstremumi yo'q. $f'(x_0)=-\infty$ bo'lgan hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

30-rasmda funksiya grafigining kritik nuqta atrofidagi holatlari tasvirlangan.

3.3. Ekstremum mavjud bo'lishining yetarli shartlari.

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va x_0 nuqta funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin.

a) agar $\forall x \in (x_0-\delta; x_0)$ uchun $f'(x)>0$, $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ uchun $f'(x)<0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishida o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

b) agar $\forall x \in (x_0-\delta; x_0)$ uchun $f'(x)<0$, $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ uchun $f'(x)>0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «-» dan «+» ga o'zgartirsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi;

d) agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isboti. a) holni qaraymiz. Bu holda $\forall x \in (x_0-\delta; x_0)$ uchun $f'(x)>0$ bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0-\delta;\ x_0)$ da qat'iy o'suvchiligi kelib chiqadi. So'ngra shartga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani sababli

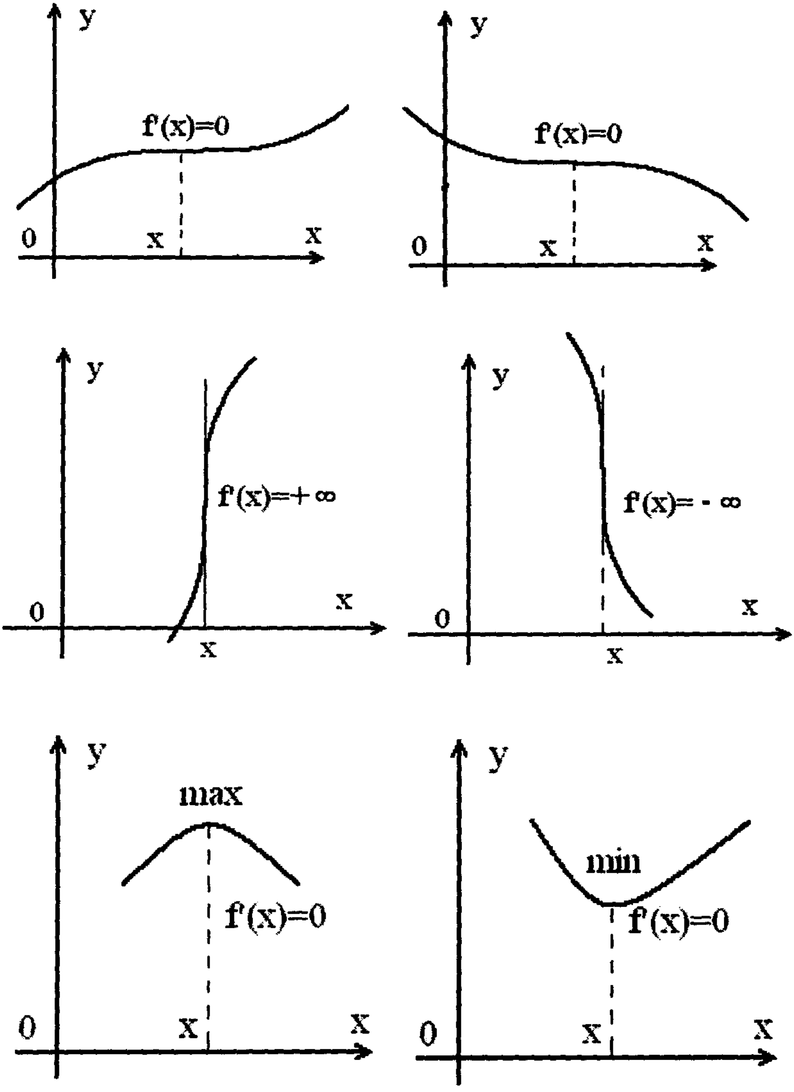
$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

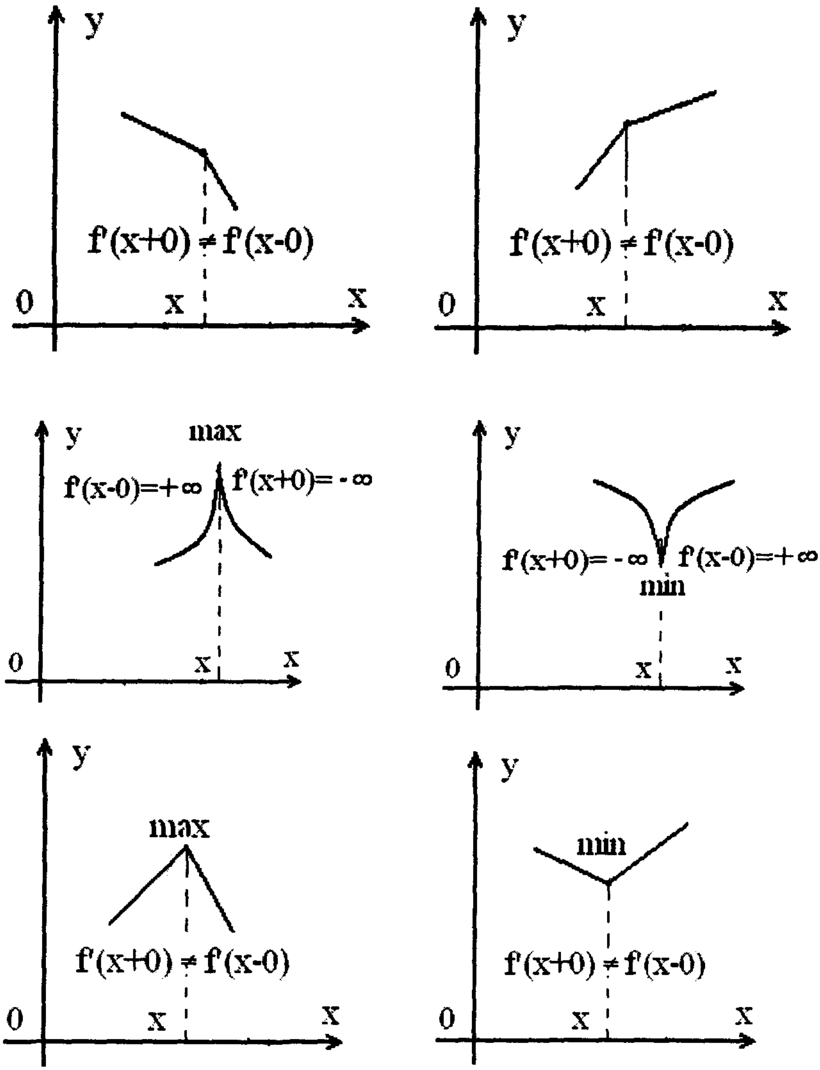
tenglik o'rinli. Demak, $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ uchun

$$f(x)<f(x_0) \qquad (2)$$

bo'ladi. $\forall x \in (x_0;\ x_0+\delta)$ uchun $f'(x)<0$ bo'lishidan $f(x)$ funksiyaning $(x_0;\ x_0+\delta)$ da qat'iy kamayuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (1) tenglikni e'tiborga olsak, $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ uchun yana (2) tengsizlik bajariladi. Bundan $\forall x \neq x_0$ va $\forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ uchun $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega;

b) bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishishi a) holga o'xshash isbotlanadi.


y
f'(x)=0
0
x
x
y
f'(x)=0
0
x
x
y
f'(x)=+ ∞
0
x
x
y
f'(x)= - ∞
0
x
x
y
max
f'(x)=0
0
x
x
y
min
f'(x)=0
0
x
x



30-rasm.

$f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmaydigan *d*) holda *$f(x)$* funksiya x_0 nuqtaning $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ atrofida

qat'iy o'suvchi yoki qat'iy kamayuvchi bo'ladi. Demak, x_0 nuqtada ekstremum yo'q.

Shunday qilib, ekstremumga sinalayotgan nuqtani o'tishda funksiya hosilasi ishorasining o'zgarishi ekstremumga erishishning faqat yetarli sharti bo'lib, lekin zaruriy sharti bo'la olmaydi.

2-teoremadan funksiyaning ekstremumga tekshirish uchun 1-qoidani keltirib chiqaramiz.

1-qoida. $f(x)$ funksiyaning ekstremumlarini topish uchun:

1) $f(x)$ funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topib, $f'(x)=0$ tenglamani yechish kerak. So'ngra $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topib, kritik nuqtalar to'plamini hosil qilish kerak;

2) har bir kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosilaning ishorasini aniqlash kerak;

3) agar hosila ishorasini «+» dan «-» ga («-» dan «+» ga) o'zgartirsa, u holda bu kritik nuqtada $f(x)$ funksiya maksimumga (minimumga) ega bo'ladi. Agar hosila ishorasi o'zgarmasa, ekstremum mavjud bo'lmaydi.

Misol. $f(x)=(x+4)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz. Uning hosilasini topamiz: $f'(x)=\dfrac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$.

Aniqki, hosila $x=-1$ nuqtada nolga aylanadi, $x=1$ nuqtada esa chekli hosila mavjud emas.

Endi hosilaning ishorasini aniqlaymiz. Buning uchun $(-\infty;+\infty)$ oraliqni 31-rasmda ko'rsatilgandek oraliqlarga ajratamiz va hosil bo'lgan har bir oraliqda hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

31-rasm.

Bu chizmadan qoidaga ko'ra berilgan funksiyaning x=-1 nuqtada maksimum qiymat $f(-1)=3\sqrt[3]{4}$ ga va x=1 nuqtada minimum qiymat $f(x)=0$ ga ega bo'lishini ko'rish mumkin.

4-§. Yuqori tartibli hosilalar yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish

4.1. Ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshirish

1-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$ bo'lsin. U holda agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi, agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, minimum nuqtasi bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. Demak, x_0 kritik nuqtada $f'(x)$ kamayuvchi, ya'ni $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ lar uchun $f'(x)>f'(x_0)=0$ va $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ uchun $0=f'(x_0)>f'(x)$ bo'ladi. Bu esa x_0 nuqtadan o'tishda hosila o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirishini, demak, x_0 maksimum nuqta ekanligini bildiradi.
$f''(x_0)>0$ bo'lgan holda x_0 ning minimum nuqta bo'lishi shunga o'xshash isbotlanadi.

Isbotlangan teoremaga asoslanib, ikkinchi tartibli hosila yordamida funksiyani ekstremumga tekshirishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

2-qoida. $f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirish uchun:

1) $f'(x)=0$ tenglamaning barcha yechimlarini topamiz;

2) har bir statsionar nuqtada (ya'ni hosilani nolga aylantiradigan nuqtada) $f''(x_0)$ ni hisoblaymiz. Agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 maksimum nuqtasi, $f''(x_0)>0$ bo'lsa, x_0 minimum nuqtasi bo'ladi;

3) ekstremum nuqtalar qiymatini $y=f(x)$ qo'yib, $f(x)$ ning ekstremum qiymatlarini topamiz.

Umuman aytganda, bu qoidaning qo'llanish doirasi torroq, masalan, u birinchi tartibli chekli hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarga qo'llanila olmasligi o'z-o'zidan ravshan. Ikkinchi tartibli hosila nolga aylangan yoki mavjud bo'lmagan nuqtada ham qoida aniq natija bermaydi.

1-misol. Ikkinchi tartibli hosila yordamida $y=2\sin x+\cos 2x$ funksiya ekstremumlarini aniqlang.

Yechish. Funksiya davriy bo'lganligi sababli $[0;2\pi]$ kesma bilan cheklanishimiz mumkin (32-rasm).

Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)$; $y''=-2\sin x-4\cos 2x$.

Ushbu $2\cos x(1-2\sin x)=0$ tenglamadan funksiyaning $[0;2\pi]$ kesmaga tegishli bo'lgan kritik nuqtalarini topamiz: $x_1=\pi/6$; $x_2=\pi/2$; $x_3=5\pi/6$; $x_4=3\pi/2$. Endi har bir kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila ishorasini aniqlaymiz va tegishli xulosa chiqaramiz:

$y''(\pi/6)=-3<0$, demak, $x_1=\pi/6$ nuqtada $y(\pi/6)=3/2$ maksimum mavjud.

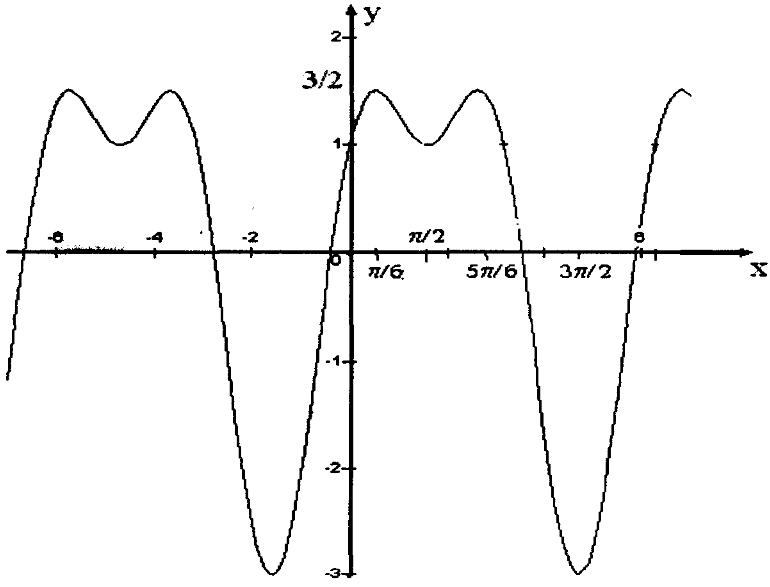
$y''(\pi/2)=2>0$, demak, $x_2=\pi/2$ nuqtada $y(\pi/2)=1$ minimum mavjud.

$y''(5\pi/6)=-3<0$, demak, $x_3=5\pi/6$ nuqtada $y(5\pi/6)=3/2$ maksimum mavjud.

$y''(3\pi/2)=6>0$, demak, $x_4=3\pi/2$ nuqtada $y(3\pi/2)=-3$ minimum mavjud.

Bu funksiyaning $(-2\pi;2\pi)$ intervaldagi grafigi 32-rasmda keltirilgan.

4.2. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarning ekstremumlari Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ sistema yordamida parametrik ko'rinishda berilgan bo'lib, t parametrning o'zgarish oralig'ida $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsin. Shuningdek bu oraliqda $\varphi'(t)\neq 0$ bo'lsin. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari



32-rasm.

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};\quad y''_{x^2}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

bo'ladi. Bu holda ekstremumga tekshirish kerak bo'lgan nuqtalar t ning qiymatlari $\psi'(t)=0$ tenglamadan aniqlanadi (chunki ko'rilayotgan oraliqda $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ mavjud va $\varphi'(t)\neq 0$). Aytaylik, $t=t_0$ shunday qiymatlardan biri bo'lsin. U holda parametrning bu qiymatida $y''_{x^2}=\dfrac{\psi''(t)}{(\varphi'(t_0))^2}$ bo'ladi. Bundan agar $\psi''(t_0)<0$ bo'lsa, x ning $\varphi(t_0)$ qiymatida maksimumga; agar $\psi''(t)>0$ bo'lsa, x ning $\varphi(t_0)$ qiymatida minimumga ega bo'ladi. Agar $\psi''(t_0)=0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning yuqori tartibli xosilalarini tekshirish kerak bo'ladi.

$\varphi'(t)$ nolga teng bo'ladigan nuqtalarni alohida tekshirish talab qiladi.

2-misol. $\begin{cases} x = \varphi(t) = t^5 - 5t^2 - 20t + 7, \\ y = \psi(t) = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3, \quad -2 < t < 2 \end{cases}$

Sistema bilan berilgan funksiyani ekstremumga tekshiring.

Yechish. $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar istalgan tartibli xosilalarga ega.

$\varphi'(t) = 5t^4 - 10t - 20, \psi'(t) = 12t^2 - 12t - 18, \psi''(t) = 24t - 12.$

(-2;2) da $\varphi'(t) \neq 0$; demak, berilgan sistema (-2;2) da $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi.

$\psi'(t) = 0$ tenglama $t_1 = -1,\ t_2 = \frac{3}{2}$ ildizlarga ega bo'lib, ular (-2;2) intervalga tegishli. $\psi''(-1) < 0,\ \psi''(\frac{3}{2}) > 0$ bo'lganligi sababli, $y=f(x)$ funksiya $t=-1$ da (ya'ni $x=31$da) maksimumga, $t = \frac{3}{2}$ da (ya'ni $x = -\frac{1033}{32}$) minimumga ega bo'ladi.

4.3. Teylor formulasi yordamida ekstremumga tekshirish

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofida $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ $(n \geq 2)$ uzluksiz hosilalarga ega va $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo'lsin.

U holda:

1) agar n juft va $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga ega bo'ladi;

2) agar n juft va $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada lokal minimumga ega bo'ladi;

3) agar n toq bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isboti. $f(x)$ funksiya uchun Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozamiz:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}$$

$$f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\text{ bu yerda } \xi\in(x_0,x).$$

Teorema shartiga ko'ra $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, shu sababli $f(x)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ yoki

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Yana teorema shartiga ko'ra $f^{(n)}(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shuning uchun uzluksiz funksiyaning lokal xossalariga ko'ra x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofi topilib, bunda $f^{(n)}(x)$ funksiyaning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Aytaylik, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ bo'lsin. U holda $\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ bo'lishi aniq. Endi quyidagi ikki holatni ko'rib chiqamiz.

1-holat. Aytaylik, n toq son bo'lsin. U holda $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ atrofda (1) tenglikning o'ng tomonidagi $f^{(n)}(\xi)$ ko'paytuvchining ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ikkinchi ko'paytuvchi esa $x>x_0$ da $(x-x_0)^n>0$, $x<x_0$ da $(x-x_0)^n<0$ bo'ladi, ya'ni $(x-x_0)^n$ ifoda x_0 nuqta atrofida ishorasini o'zgartiradi. Bundan esa (1) tenglikning chap tomoni, ya'ni $f(x)-f(x_0)$ ayirma ham x_0 nuqta atrofida ishorasini o'zgartirishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, n toq son bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

2-holat. Endi n juft son bo'lsin. U holda (1) tenglikning o'ng tomoni ishorasini o'zgartirmaydi, uning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Bundan, agar $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lsa, u holda $f(x)-f(x_0)<0$, ya'ni $f(x)<f(x_0)$, demak, funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi. Agar $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lsa, u holda $f(x)-f(x_0)>0$, ya'ni $f(x)>f(x_0)$, demak, funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

3-*misol.* Ushbu $y=x^5-5x^4-5$ funksiyaning ekstremumlari topilsin.

Yechish. Funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz. Uning uchun funksiya hosilasini topamiz: $y'=5x^4-20x^3$. Kritik nuqtalar faqat statsionar nuqtalardan iborat, shuning uchun $5x^4-20x^3=0$ tenglamani yechamiz. Uning ildizlari $x_1=0$, $x_2=4$ bo'ladi.

Ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $f''(x)=20x^3-60x^2$.

$f''(4)>0$ bo'lgani uchun, $x=4$ nuqtada funksiya minimum qiymat qabul qiladi: $f(4)=-261$. $f''(0)=0$ bo'lgani uchun uchinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f'''(x)=60x^2-120x$, $f'''(0)=0$, to'rtinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f^{(4)}(x)=120x-120$, $f^{(4)}(0)=-120<0$ va $n=4$ juft bo'lgani uchun 3-teoremaga ko'ra $x=0$ nuqtada funksiya maksimumga ega: $f(0)=-5$.

5-§. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyaning qiymatlar to'plami $E(f)=\{f(x):\ x\in X\}$ ni ko'rib chiqamiz.

Agar $E(f)$ to'plam chegaralangan bo'lsa, u holda uning aniq yuqori chegarasi mavjud, uni $M=\sup\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ deb belgilaymiz. Agar $M\in E(f)$ bo'lsa, u holda M soni $f(x)$ funksiyaning eng katta qiymati deb ataladi va $M=\max\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ kabi belgilanadi. Xuddi shunga o'xshash $E(f)$ to'plamning aniq quyi chegarasi mavjud, uni $m=\inf\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ deb belgilaymiz. Agar $m\in E(f)$ bo'lsa, u holda m soni $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati deb ataladi va $m=\min\limits_{x\in X}\{f(x)\}$ kabi belgilanadi.

Endi $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyani ko'rib chiqamiz. Bu holda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiyaning $[a;b]$ da eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi. Aniqki, bu holda quyidagi qoida o'rinli bo'ladi.

Qoida. $[a,b]$ da funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun bu kesmaga tegishli barcha kritik nuqtalarni topib, funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi. So'ngra bu qiymatlar bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati, eng kichigi esa $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiymati bo'ladi.

1-*misol*. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ funksiyaning $[\frac{1}{100};100]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Funksiya hosilasini topamiz: $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$. Uni nolga tenglab, ya'ni $\frac{x^2-1}{x^2}=0$ tenglamaga qarab $x=-1$ va $x=1$ ekanligini topamiz. Bulardan $x=-1$ nuqta $[\frac{1}{100};100]$ kesmaga tegishli emas va bu kesmada hosila mavjud bo'lmagan nuqta yo'q. Faqat bitta $x=1$ statsionar nuqta $[\frac{1}{100};100]$ kesmaga tegishli. Berilgan funksiyaning $x=\frac{1}{100}$; $x=1$; $x=100$ nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblaymiz. $f(1/100)=100{,}01$; $f(1)=2$; $f(100)=100{,}01$. Bu qiymatlarning eng kattasi 100, 01; eng kichigi 2.

Demak, berilgan funksiyaning $[\frac{1}{100};100]$ dagi eng katta qiymati 100,01, eng kichik qiymati esa 2 ga teng, ya'ni $\max\limits_{[0,01;100]}\{f(x)\}=100{,}01$; $\min\limits_{[0,01;100]}\{f(x)\}=2$.

Agar $f(x)$ funksiya intervalda, to'g'ri chiziqda, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$, $(a;b]$ oraliqlarda tekshirilayotgan bo'lsa, u holda bunday oraliqlarda funksiyaning eng katta (eng kichik) qiymatlari mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Masalan, $y=x$ funksiyaning $(1;2]$ oraliqda eng kichik qiymati, $[1;2)$ oraliqda esa eng katta qiymati mavjud emas. Sonlar o'qida $y=x^2$ funksiyaning eng katta qiymati, $y=\text{arctg}x$ funksiyaning eng katta, eng kichik qiymatlari mavjud emas.

Agar $f(x)$ funksiya $[a;b)$ ($[a;+\infty)$) oraliqda o'suvchi bo'lsa, u holda bu oraliqda funksiyaning eng kichik qiymati mavjud va unga $x=a$ nuqtada erishiladi.

Shunga o'xshash tasdiq $(a;b]$ ($(-\infty;b]$) oraliqda uzluksiz funksiya uchun ham o'rinlidir.

Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz, $x_0\in(a;b)$ kritik nuqtaga ega, $(a;x_0)$ intervalda o'suvchi (kamayuvchi), $(x_0;b)$ intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lsa, u holda qaralayotgan oraliqda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi.

Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz, unda chekli sondagi kritik nuqtalarga ega va $a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$, $(a;x_0)$ intervalda o'suvchi (kamayuvchi), $(x_n;b)$ intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lsa, u holda qaralayotgan $(a;b)$ intervalda $f(x)$ funksiya eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi. Bu qiymatni funksiya kritik nuqtalardan birida qabul qiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ ($[a;b)$) da uzluksiz va $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ ($x\to b-0$) da chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaning kritik nuqtalardagi qiymati va cheksizdagi limitlarini solishtirib, uning eng katta, eng kichik qiymatlarining mavjudligi haqida fikr bildirish mumkin.

2-*misol.* $f(x)=\ln x-x$ funksiyaning $(0;+\infty)$ oraliqdagi eng katta qiymatini toping.

Yechish. Funksiyaning hosilasini va kritik nuqtalarini topamiz: $f'(x)=\dfrac{1-x}{x}$, $x=1$. Agar $0<x<1$ bo'lsa, u holda

$f'(x)>0$, bundan $f(x)$ o'suvchi. Agar $1<x<+\infty$ bo'lsa, u holda $f'(x)<0$, bundan $f(x)$ kamayuvchi. Demak, $f(x)=\ln x-x$ funksiya $x=1$ nuqtada eng katta qiymatiga erishadi: $f(1)=-1$.

3-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{9}{x}+\dfrac{25}{1-x}$ funksiyaning $(0;1)$ intervaldagi eng kichik qiymatini toping.

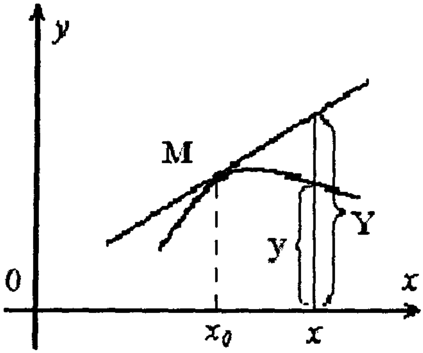
Yechish. Bu funksiya uchun $f'(x)=\dfrac{(8x-3)(2x+3)}{x^2(1-x)^2}$ va bundan funksiyaning $(0;1)$ intervalga tegishli bo'lgan kritik nuqtasi $x=\dfrac{3}{8}$ ekanligini topamiz. Agar $0<x<\dfrac{3}{8}$ bo'lsa, u holda $f'(x)<0$, bundan $f(x)$ kamayuvchi. Agar $\dfrac{3}{8}<x<1$ bo'lsa, u holda $f'(x)>0$, bundan $f(x)$ o'suvchi. Demak, $(0;1)$ intervalda berilgan $f(x)=\dfrac{9}{x}+\dfrac{25}{1-x}$ funksiya $x=\dfrac{3}{8}$ nuqtada eng kichik qiymatga erishadi: $f\left(\dfrac{3}{8}\right)=64$.

6-§. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Egri chiziqning burilish nuqtasi

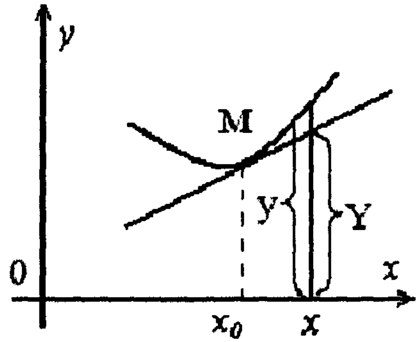
6.1. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega, ya'ni funksiya grafigining $M(x_0,f(x_0))$ nuqtasidan novertikal urinma o'tkazish mumkin bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $x=x_0$ nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lib, $y=f(x)$ egri chiziqning bu atrofdagi nuqtalarga mos bo'lgan bo'lagi shu egri chiziqqa $M(x_0,f(x_0))$ nuqtasidan o'tkazilgan urinmadan pastda (yuqorida) joylashsa, u holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ *nuqtada qavariq* (*botiq*) deyiladi.

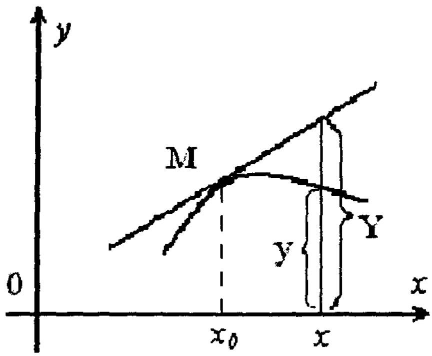
Agar egri chiziq biror intervalning barcha nuqtalarida qavariq (botiq) bo'lsa, u holda bu chiziq shu intervalda *qavariq* (*botiq*) deyiladi. 33-rasmda qavariq va 34-rasmda botiq egri chiziqlar chizilgan.



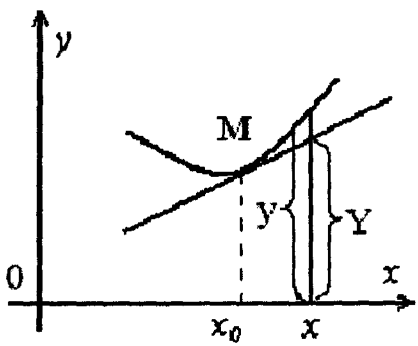
33-rasm.



34-rasm.



35-rasm.



36-rasm.

Egri chiziq nuqtasining ordinatasini y bilan, shu egri chiziqqa $M(x_0,f(x_0))$ nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning x ga mos ordinatasini Y bilan belgilaylik. Aniqki, agar x_0 nuqtaning biror atrofidan olingan barcha x lar uchun $y\text{-}Y \leq 0$ ($y\text{-}Y \geq 0$) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda egri chiziq $x=x_0$ nuqtada qavariq (botiq) bo‘ladi. (35,36-rasmlar)

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan va $x_0 \in X$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo‘lsin. Agar

$f''(x_0)>0$ bo‘lsa, u holda funksiya grafigi x_0 nuqtada botiq; agar $f''(x_0)<0$ bo‘lsa, u holda funksiya grafigi x_0 nuqtada qavariq bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik, $f''(x_0)>0$ bo‘lsin. Quyidagicha yordamchi funksiya kiritamiz: $F(x)=y-Y$, ya'ni $F(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$. Ravshanki $F(x_0)=0$, $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$, $F''(x)=f''(x)$ bo‘ladi. Bundan $F'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$ va $F''(x_0)=f''(x_0)>0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, (ekstremum mavjudligining yetarli shartiga ko‘ra) x_0 nuqta $F(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi, ya'ni x_0 nuqtaning biror atrofida $F(x)\geq F(x_0)=0$ bo‘ladi. $F(x)=y-Y$ bo‘lganligidan $y\geq Y$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa x_0 nuqtaning aytilgan atrofida funksiya grafigi urinmadan yuqorida joylashishini, ya'ni funksiya grafigi x_0 nuqtada botiq bo‘ladi. Teoremaning ikkinchi qismi shunga o‘xshash isbotlanadi.

Agar biror intervalda $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziq shu intervalda botiq (qavariq) bo‘ladi.

Misol. Ushbu $y=x^5$ funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlarini aniqlang.

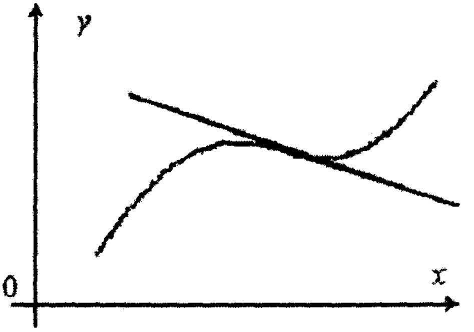
Yechish. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz: $y''=20x^3$. Bundan, agar $x>0$ bo‘lsa, $y''>0$, agar $x<0$ bo‘lsa $y''<0$ bo‘ladi. Demak, $(-\infty;0)$ oraliqda egri chiziq qavariq, $(0;+\infty)$ oraliqda esa botiq bo‘ladi.

6.2. Egri chiziqning burilish nuqtasi. Endi egri chiziqning burilish nuqtasi tushunchasini kiritamiz.

2-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ atrofi topilib, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta;x_0)$ oraliqda botiq (qavariq), $(x_0;x_0+\delta)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo‘lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ egri chiziqning *burilish nuqtasi* deyiladi.

Agar burilish nuqtasida urinma mavjud bo‘lsa, u egri chiziqni kesib o‘tadi (37-rasm).

2-teorema. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Agar $x=x_0$ nuqta funksiyaning grafigining burilish nuqtasi bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud va nolga teng yoki mavjud bo'lmaydi.



37-rasm.

Isboti. Aytaylik, x_0 nuqta $f(x)$ ning burilish nuqtasi bo'lsin. Teskarisini faraz qilamiz: $f''(x_0)$ mavjud va $f''(x_0)\neq 0$. U holda $f''(x_0)<0$ yoki $f''(x_0)>0$ bo'ladi.

$f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$) bo'lgan holda 1-teoremaga binoan x_0 nuqtaning biror $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, bunda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq) bo'ladi. Bu x_0 ning burilish nuqta bo'lishiga zid. Demak, burilish nuqtada $f''(x_0)$ nolga teng bo'ladi yoki mavjud bo'lmaydi.

$f''(x_0)=0$ bo'lishi yoki $f''(x)$ ning mavjud bo'lmasligi burilish nuqtasi mavjudligining faqat zaruriy sharti bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^4$ funksiya uchun $y'=4x^3$, $y''=12x^2$ va $y''(0)=0$ bo'ladi. Lekin, $x=0$ burilish nuqtasi emas.

Endi burilish nuqtasi mavjudligining yetarli shartini tayinlovchi teoremani keltiramiz.

3-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differrensiallanuvchi va x_0 nuqtaning shunday $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ atrofi topilib, $(x_0-\delta; x_0)$ va $(x_0; x_0+\delta)$ intervallarda $f''(x)$ mavjud hamda har bir intervalda $f''(x)$ ishorasi o'zgarmas bo'lsin. Agar x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonlarida $f''(x)$ har xil ishorali bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi; agar $f''(x)$ bir xil ishorali bo'lsa, u holda x_0 nuqtada burilish bo'lmaydi.

Isboti. Haqiqatan ham, $x_0-\delta<x<x_0$ bo'lganda $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$) bo'lsa, $x_0<x<x_0+\delta$ bo'lganda esa $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) bo'lsa, 1-teoremaga ko'ra x_0 dan chapda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq), x_0 dan o'ngda esa botiq (qavariq) bo'ladi. Demak, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi.

Agar $(x_0-\delta;x_0)$ va $(x_0;\ x_0+\delta)$ intervallarda $f''(x)$ bir xil ishorali, masalan $f''(x)<0$ bo'lsa, u holda bu intervallarda $f(x)$ funksiya qavariq bo'lib, burilish bo'lmaydi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasini aniqlash uchun $f''(x)=0$ tenglamani yechamiz va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni topamiz. Hosil qilingan har bir x_0 nuqtadan chapda va o'ngda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz.

1-*misol*. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ funksiyaning burilish nuqtasini toping.

Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi – $(-\infty;+\infty)$. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $f'(x)=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$,

$f''(x)=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Ikkinchi tartibli hosila $x=0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda mavjud va noldan farqli. Bu nuqta atrofida 3-teorema shartlarini tekshiramiz. Agar $x<0$ bo'lsa, $f''(x)<0$; $x>0$ bo'lsa – $f''(x)>0$ bo'ladi. Demak, grafikning $(0;f(0))$ nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.

2-*misol*. $y=\frac{a}{x}\ln\frac{x}{a}$ $(a>0)$, $0<x<\infty$, funksiyaning burilish nuqtasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $y''=\frac{2a}{x^3}(\ln\frac{x}{a}-\frac{3}{2})$ ga teng.

Agar $\ln\frac{x}{a}-\frac{3}{2}=0$ bo'lsa, u holda $f''(x)=0$ bo'ladi. Demak, $x=ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $f''(x)=0$. Bu nuqtadan chapda va o'ngda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $0<x<ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $f''(x)<0$, $x>ae^{\frac{3}{2}}$ bo'lganda $f''(x)>0$ bo'ladi.

Demak, grafikning $(ae^{\frac{3}{2}};\frac{3}{2}\cdot e^{-\frac{3}{2}})$ nuqtasi burilish nuqtasi bo'ladi.

3-*misol.* Quyidagi funksiyalarning qavariqlik, botiqlik intervallari va burilish nuqtalarini toping:

a) $y=x^4+x^3-18x^2+24x-15$; *b)* $y=x+x^{5/3}$.

Yechish. a) funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$y'=4x^3+3x^2-36x+24$, $y''=12x^2+6x-36=12(x^2+x/2-3)$.

Ushbu $y''=0$ tenglamani yechib, $x_1=-2$, $x_2=1{,}5$ ekanligini topamiz.

Bundan $(-\infty;-2)$ va $(1{,}5;\ \infty)$ oraliqlarda $y''>0$, demak, bu oraliqlarda grafik botiq bo'ladi; $(-2;1{,}5)$ oraliqda $y''<0$, demak, bu oraliqda grafik qavariq bo'ladi. $x_1=-2$ va $x_2=1{,}5$ nuqtalardan o'tishda ikkinchi tartibli hosila ishorasini o'zgartiradi. Shu sababli $(-2;-127)$ va $(1{,}5;\ -11{,}0625)$ nuqtalar burilish nuqtalari bo'ladi;

b) funksiyaning hosilalarini topamiz: $y'=1+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ $(x\neq 0)$. $x=0$ bo'lganda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. $x<0$ bo'lganda $y''<0$, demak, funksiya grafigi qavariq, $x>0$ bo'lganda $y''>0$, demak, grafik botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila $x=0$ nuqtadan o'tganda ishorasini o'zgartiradi, shu sababli $(0;0)$ nuqta burilish nuqtasi bo'ladi.

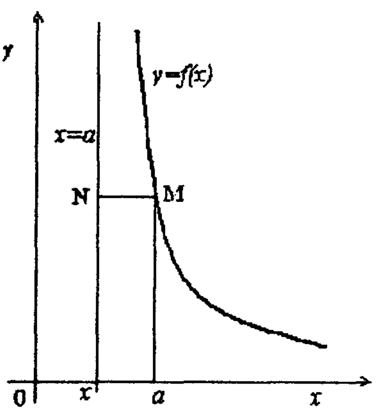
7-§. Asimptotalar

Funksiyani cheksizlikda, ya'ni $x \to +\infty$ va $x \to -\infty$ da yoki uning ikkinchi tur uzilish nuqtasi atrofida o'rganish ko'p hollarda funksiya grafigi nuqtalari bilan biror to'g'ri chiziqning nuqtalari orasidagi masofa yetarlicha kichik bo'lishini ko'rsatadi. Bunday xossaga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlarni topish funksiyani tekshirishda yordam beradi.

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ egri chiziqda olingan o'zgaruvchi nuqta koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan biror to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq egri chiziqning *asimptotasi* deyiladi.

Asimptotalar *vertikal* (ordinatalar o'qiga parallel) va *og'ma* (ordinatalar o'qiga parallel emas) bo'lib ikkiga ajraladi. Og'ma asimptotalar ichida abssissalar o'qiga parallel bo'lganlari ham mavjud bo'lib, ular *gorizontal asimptota* deyiladi.

7.1. Vertikal asimptotalar. Faraz qilaylik, a nuqtadagi bir tomonli limitlarning kamida biri cheksizga teng bo'lsin. U holda $y=f(x)$ egri chiziqdagi $M(x,y)$ nuqta $x \to a$ da koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashadi, shu nuqtadan $x=a$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $MN=|x-a|$ nolga intiladi. Demak, ta'rifga ko'ra, $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning (funksiya grafigining) *vertikal asimptotasi* bo'ladi.



38-rasm.

Ravshanki, haqiqiy sonlar to'plamida uzluksiz bo'lgan funksiyalar uchun vertikal asimptota mavjud emas. Vertikal asimptota faqat ikkinchi tur uzilish nuqtalarida bo'lishi mumkin.

Misol. Ushbu funksiyaning $f(x)=\dfrac{x^2+9x}{x^2-4}$ vertikal asimptotalarini toping.

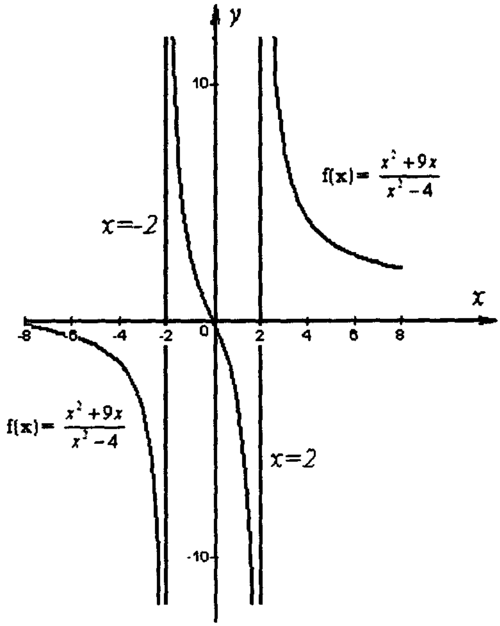
Yechish. Funksiyaning aniqlanish sohasi, aniqki, $x^2-4=0$ tenglama ildizlaridan boshqa barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Bu nuqtalarda funksiya ikkinchi tur uzilishga ega. Haqiqatan ham,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^2+9x}{x^2-4}=+\infty,$$ demak $x=-2$ va $x=2$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptota bo'ladi (39-rasm).



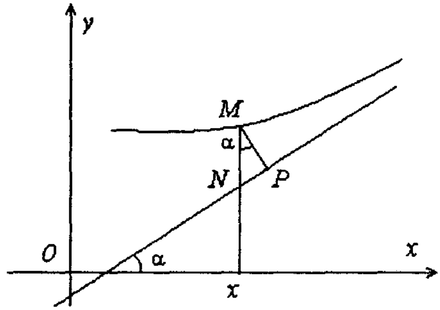
39-rasm.

7.2. Og'ma asimptota. Og'ma asimptota tenglamasini $y=kx+b$ ko'rinishda izlaymiz. Bir xil abssissali egri chiziq ordinatasi va asimptota ordinatasi orasidagi masofa $x\to+\infty$ yoki $x\to-\infty$ da nolga intilishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, M va N abssissasi x ga teng bo'lgan egri chiziqdagi va asimptotadagi nuqtalar (40-rasm), MP esa M nuqtadan asimptotagacha bo'lgan masofa, α $(\alpha\neq\pi/2)$ asimptotaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi bo'lsin. U holda ΔMNP uchburchakdan $MP=MN\cos\alpha$, bundan esa,

$MN = MP/\cos\alpha$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan, agar MP nolga intilsa, u holda MN ham nolga intilishi, va aksincha, agar MN nolga intilsa, u holda MP nolga intilishi kelib chiqadi.



40-rasm.

Shunday qilib, agar $x \to +\infty$ yoki $x \to -\infty$ da $f(x)-kx-b$ ayirma nolga intilsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo'lar ekan.

Bundan $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$ shart $y=kx+b$ to'g'ri chiziqning $y=f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shart ekanligi kelib chiqadi.

Xususan, $y=b$ gorizontal asimptota bo'lishi uchun $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-b)=0$, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Amalda og'ma asimptotalarni topish uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi.

Teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{va } b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$

chekli limitlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. *Zaruriyligi.* $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining $x\to\infty$ dagi asimptotasi bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

U holda $f(x)-kx-b=\alpha(x)$ tenglik o'rinli, bu yerda: $\alpha(x)$ $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya. So'ngi tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin: $f(x)=kx+b+\alpha(x)$. Demak,

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x})=k,$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}(b+\alpha(x))=b$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ va $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ chekli limitlar mavjud bo'lsin. So'ngi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$ tenglikni quyidagicha yozib olish mumkin: $f(x)-kx=b+\beta(x)$, bu yerda: $\beta(x)$ $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya. Demak, $f(x)-kx-b=\beta(x)$, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$. Bu esa $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining $x\to\infty$ dagi asimptotasi ekanligini bildiradi.

Misol. Ushbu $f(x)=x\ln(e+\frac{1}{x})$ funksiyaning asimptotalarini toping.

Yechish. Avval bu funksiyainng aniqlanish sohasini topamiz. Buning uchun $e+\frac{1}{x}>0$ tengsizlikni yechib, $D(y)=(-\infty;-\frac{1}{e})\cup(0;\infty)$ ni hosil qilamiz.

Endi chegaraviy nuqtalardagi funksiya holatini aniqlaymiz. $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{e}-0}x\ln(e+\frac{1}{x})=-\infty$, $x\to+0$ dagi limitni hisoblashda Lopital qoidasidan foydalanamiz:

$$\lim_{x\to+0}x\ln(e+\frac{1}{x})=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Bulardan ko'rinadiki, berilgan egri chiziqning $x=-\frac{1}{e}$ vertikal asimptotasi mavjud.

Endi og'ma asimptotalar mavjudligini tekshiramiz.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}x(\ln(e+\frac{1}{x})-1)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e}$$

Demak, grafikning $y=x+\frac{1}{e}$ og'ma asimptotasi mavjud.

Misol. Asimptotalarni toping. *a)* $y=2x+\frac{2x}{x-3}$; *b)* $y=xe^{1/x}$

Yechish. a) $x=3$ da $f(x)=2x+\frac{2x}{x-3}$ funksiya ikkinchi tur uzilishga ega va $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}(2x+\frac{2x}{x-3})=\pm\infty$ bo'lganligi sababli, $x=3$ vertikal asimptota bo'ladi.

Og'ma asimptotalarni izlaymiz: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2+$

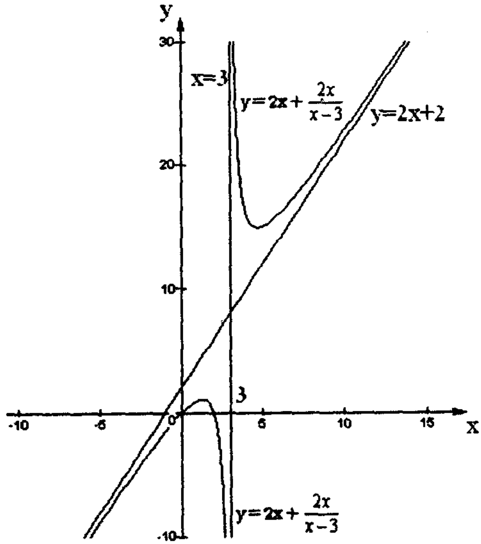
$+\frac{2}{x-3})=2;$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)==\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x+\frac{2x}{x-3}-2x)=2$. Demak, $y=2x+2$ og'ma asimptota bo'ladi (41-rasm);

b) $y=xe^{1/x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ to'plamdan iborat. $x=0$ nuqtada funksiyaning chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz.

$$\lim_{x\to-0} xe^{1/x}=0;$$

$\lim\limits_{x\to+0} xe^{1/x}=$ ($1/x=t$ belgilashni kiritamiz, u holda $x\to+0$ da $t\to+\infty$ bo'ladi) $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$.) Demak, $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.



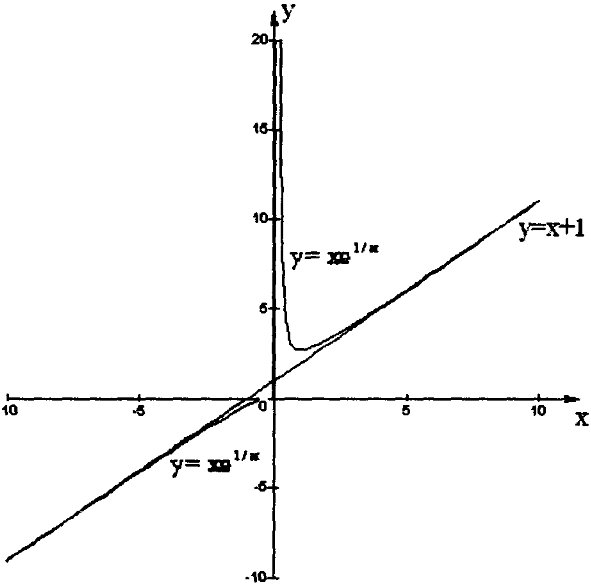
41-rasm.

Endi og'ma asimptotalarni izlaymiz:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=e^0=1,$

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(xe^{1/x}-x)= \;=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}=$ $|1/x=z,\quad x\to\pm\infty,$

$z\to0|=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$, shunday qilib $y=x+1$ og'ma asimptota ekan (42-rasm).



42-rasm.

8-§. Funksiyani to‘la tekshirish va grafigini yasash

Funksiyaning xossalarini tekshirish va uning grafigini yasashda quyidagilarni bajarish maqsadga muvofiq:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasi va uzilish nuqtalari topiladi; funksiyaning chegaraviy nuqtalaridagi qiymatlari (yoki unga mos limitlari) hisoblanadi.
2. Funksiyaning toq-juftligi, davriyligi tekshiriladi.
3. Funksiyaning nollari va ishora turg‘unlik oraliqlari aniqlanadi.
4. Asimptotalar topiladi.
5. Funksiya ekstremumga tekshiriladi, uning monotonlik intervallari aniqlaniladi.
6. Funksiya grafigining burilish nuqtalari, qavariqlik va botiqlik intervallari topiladi.

Misollar

1. $y=x(x^2-1)$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) aniqlanish sohasi – haqiqiy sonlar to'plami. Uzilish nuqtalari yo'q. Funksiyaning chegaraviy qiymatlari: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x^2-1)=+\infty;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x^2-1)=-\infty;$

2) funksiya davriy emas, toq funksiya;

3) funksiyaning uchta holati bor: x=0; x=-1; x=1. Ushbu $x(x^2-1)>0$ tengsizlikni yechamiz, uning yechimi $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ to'plamdan iborat. Demak, funksiya $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ to'plamda musbat va $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ to'plamda manfiy qiymatlar qabul qiladi;

4) og'ma asimptotaning burchak koeffitsientini topamiz:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}==\lim_{x\to\infty}(x^2-1)=\infty.$$

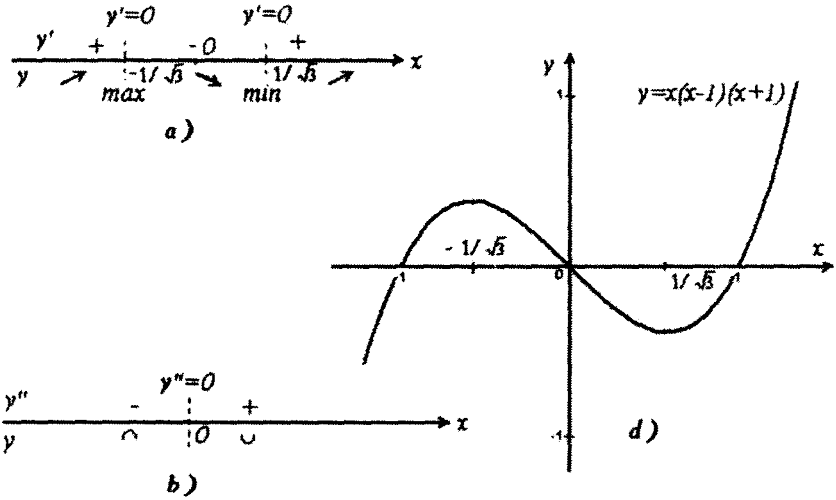
Demak, og'ma asimptota mavjud emas. Vertikal asimtotalar ham mavjud emas (chunki, uzilish nuqtalari yo'q);

5) funksiya hosilasini topamiz: $y'=3x^2-1$. Hosilani nolga tenglashtirib, statsionar nuqtalarini topamiz: y'=0 yoki $3x^2-1=0$, bundan $x=-1/\sqrt{3}$, $x=1/\sqrt{3}$. Ushbu (43, a-rasm) sxemani chizamiz va intervallar metodidan foydalanib, funksiya hosilasining ishoralarini aniqlaymiz. Bundan funksiya $(-\infty,-1/\sqrt{3})$ va $(1/\sqrt{3},+\infty)$ intervallarda monoton o'suvchi, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ intervalda monoton kamayuvchi; $x=-1/\sqrt{3}$ nuqtada maksimumga, $x=1/\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega ekanligi kelib chiqadi. Ekstremum nuqtalarida funksiya qiymatlarini hisoblaymiz: agar $x_{max}=-1/\sqrt{3}$ bo'lsa, u holda $y_{max}=2/(3\sqrt{3})$; agar $x_{min}=1/\sqrt{3}$ bo'lsa, u holda $y_{min}=-2/(3\sqrt{3})$ bo'ladi;

6) ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y''=6x$. Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib $y''=6x=0$, $x=0$ ekanligini topamiz. Sxemani (43, b-rasm) chizamiz va hosil bo'lgan intervallarda ikkinchi tartibli hosila ishoralarini aniqlaymiz. Bundan $x=0$ nuqtada burilish mavjud, $(-\infty;0)$ da funksiya grafigi qavariq,

$(0;+\infty)$ da botiq ekanligini topamiz. Burilish nuqtasi ordinatasini topamiz: $y(0)=0$.

Funksiya grafigi 43, c-rasmda keltirilgan.



43-rasm.

2. $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) aniqlanish sohasi – $[0,4]$ kesma. Funksiyaning chegaraviy qiymatlarini topamiz: agar $x=0$ bo'lsa, u holda $y=2$; agar $x=4$ bo'lsa, $y=2$. Funksiyaning uzilish nuqtalari yo'q;

2) funksiya toq ham, juft ham emas, davriy ham emas;

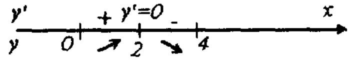
3) funksiyaning holatlari yo'q;

4) og'ma asimptotalari yo'q, chunki aniqlanish sohasi kesmadan iborat;

5) hosilasini topamiz: $y'=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}}$.

Hosilani nolga tenglashtirib, kritik (statsionar) nuqtani topamiz: $x=2$. 44-rasmdagi sxemani chizamiz. Bundan funksiya $(0,2)$ intervalda o'suvchi, $(2,4)$ intervalda kamayuvchi, $x=2$ nuqtada funksiya maksimumga erishishi kelib chiqadi. Maksimum nuqtasining ordinatasi $y_{max}=2\sqrt{2}$;

6) ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

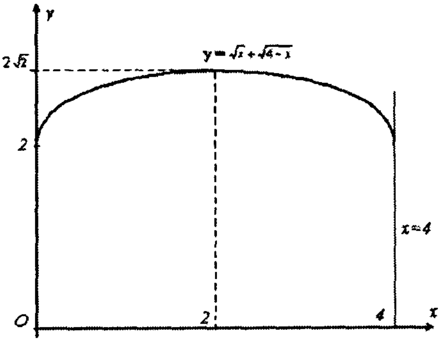


$$y''=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(4-x)^{3/2}+x^{3/2}}{x^{3/2}(4-x)^{3/2}}.$$

(0,4) intervalda ikkinchi tartibli hosila manfiy, demak, bu intervalda funksiya grafigi qavariq bo'ladi.

Funksiya grafigi 44-rasmda chizilgan. Shuni aytib o'tish kerakki, $\lim\limits_{x\to+0} y'=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 4-0} y'=-\infty$ bo'lganligi sababli, funksiya grafigi (0,2) nuqtada ordinatalar o'qiga, (4,2) nuqtada x=4 to'g'ri chiziqqa urinadi.



44-rasm.

3. $y=x^x$. funksiyani tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. Avval funksiyani quyidagicha yozib olamiz: $y=x^x=e^{x\ln x}$.

1) funksiyaning aniqlanish sohasi

barcha musbat sonlar to'plami. Chegaraviy qiymatlari: $\lim\limits_{x\to 0+} e^{x\ln x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$. Uzilish nuqtalari yo'q.

2) funksiya juft ham, toq ham, davriy ham emas;

3) funksiyaning holatlari mavjud emas;

4) og'ma asimptotasini izlaymiz: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x\ln x}}{x}=+\infty$, demak, og'ma asimptota yo'q;

5) hosilasini topamiz: $y'=x^x(\ln x+1)$. $y'=0$ tenglamadan $x=e^{-1}$, funksiya $(0,1/e)$ intervalda kamayuvchi, $(1/e,+\infty)$ intervalda o'suvchi bo'ladi. $x=e^{-1}$ nuqtada funksiya minimumga ega, uning ordinatasi $y_{min}=0,692$;

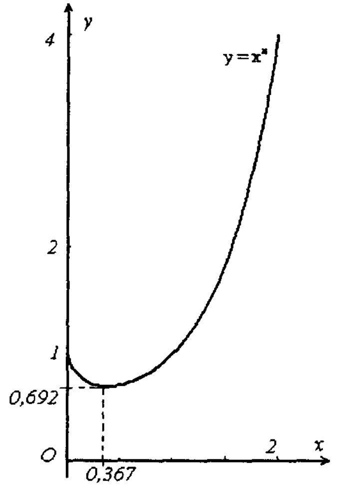
6) ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y''=x^x((\ln x+1)^2+1/x)$. Ikkinchi tartibli hosila $(0,+\infty)$ intervalda musbat, demak, funksiya bu intervalda botiq.

Funksiyaning $x=0$ nuqta atrofida tekshiramiz.

$$\lim_{x\to 0+} y' = \lim_{x\to 0+} x^x(\ln x+1) = -\infty,$$

bundan funksiya grafigi (0,1) nuqtada ordinatalar o'qiga urinishi kelib chiqadi.

Funksiya grafigi 45-rasmda berilgan.



45-rasm.

4. $f(x)=x+\ln(x^2-1)$ funksiyani to'la tekshiring va grafigini chizing.

Yechish. 1) funksiya $x^2-1>0$, ya'ni $(-\infty;-1)$ va $(1;+\infty)$ oraliqlarda aniqlangan va uzluksiz. Funksiyaning chegaraviy qiymatlarini izlaymiz:

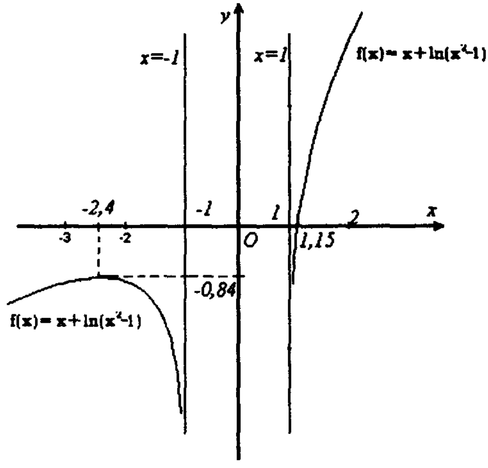
$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (x+\ln(x^2-1)) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (x+\ln(x^2-1)) = -\infty.$$

Demak, funksiya grafigi ikkita $x=-1$ va $x=1$ vertikal asimptotalarga ega;

2) funksiya toq ham, juft ham, davriy ham emas;

3) funksiya $(-\infty,-1)$ intervalda manfiy, $(1,+\infty)$ intervalda yagona holat mavjud, uni topish uchun taqribiy hisoblash metodlaridan foydalaniladi, natijada $x_0\approx 1,15$ ekanligini aniqlashimiz mumkin. Demak, funksiya $(1;1,15)$ intervalda manfiy, $(1,15, +\infty)$ oraliqda musbat;



46-rasm.

4) Og'ma asimptotalarini izlaymiz:

$k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\dfrac{\ln(x^2-1)}{x})=1$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty} ln(x^2-1)=+\infty$, demak og'ma asimptota mavjud emas;

5) funksiya hosilasi $y'=1+2x/(x^2-1)$ funksiyaning aniqlanish sohasida mavjud, shu sababli uning kritik nuqtalari faqat statsionar nuqtalardan iborat bo'ladi. Bunda $y'=0$ tenglama yechimlari $x_1=-1-\sqrt{2}$ va $x_2=-1+\sqrt{2}$ bo'lib, $x_2=-1+\sqrt{2}$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas. Shunday qilib, yagona kritik nuqta mavjud va $(-\infty;-1)$ oraliqqa tegishli. $(1;+\infty)$ oraliqda $y'>0$ va funksiya o'suvchi bo'ladi. $x_1=-1-\sqrt{2}$ nuqtada maksimum mavjud. Uning ordinatasi $f(-1-\sqrt{2})=-1-\sqrt{2}+$ $+ln(2+2\sqrt{2})\approx -0,84$ ga teng.

6) ikkinchi tartibli hosilani topamiz: $y''=-\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$. Bundan $y''<0$, demak grafik qavariq.

Funksiya grafigi 46-rasmda berilgan.

VIII bobga doir test savollari

1

$f'(x)<0 \quad \searrow f(x)$

$? \quad \nearrow f(x)$

2

$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)>0,\ x\in(a,x_0) \\ f'(x)<0,\ x\in(x_0,b) \end{array}} \Rightarrow$ x_0- maksimum nuqta

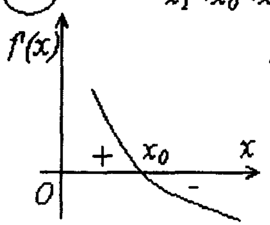
$\bigcirc \Rightarrow$ x_0- minimum nuqta

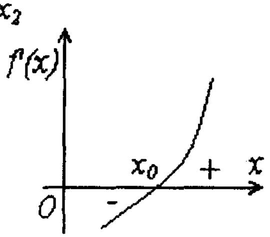
3

f' ishorasi ($f'(x_0)=0$)		$f(x)$
$x<x_0$	$x_0<x$	
+	-	max
-	+	?
+	+	?
-	-	?

4

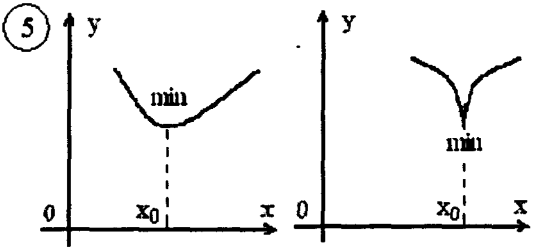
$x_1<x_0<x_2$





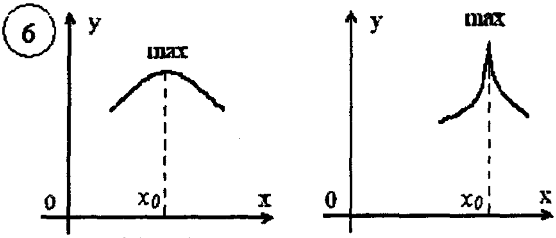
$f'(x_1)>0$
$f'(x_2)<0$
x_0-max

?



$f'(x_0-0)=0$ $\quad$ $f'(x_0-0)=?$

$f'(x_0+0)=0$ $\quad$ $f'(x_0+0)=?$



$f'(x_0-0)=0$ $\quad$ $f'(x_0-0)=?$

$f'(x_0+0)=0$ $\quad$ $f'(x_0+0)=?$

7.

$(a;b)$ intervalda $f'(x)$ kamaymaydi	$(a;b)$ intervalda $f(x)$ botiq
?	$(a;b)$ intervalda $f(x)$ qavariq

8.

x_0 nuqtada ekstremum mavjud bo`lishining zaruriy sharti	$f'(x_0)=0$ yoki $f'(x_0)$ mavjud emas
x_0 $f(x)$ funksiya grafigi burilish nuqtasi bo`lishining zaruriy sharti	?

9.

$f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$	$f(x_0)$ lokal minimum
$f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$	?

10.

$f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$	Ekstremum yoq
$f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)<0$	?
$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0, f^{(IV)}>0$	?
$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0, f^{(IV)}<0$	?

11.

$y=kx+b$ – og'ma asimptota	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$
$y=b$ - gorizontal asimptota	$\Leftrightarrow$	?
?	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

12. $y=kx+b$ – og'ma asimptota

k=	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$
b=	?

UCHINCHI BO'LIM. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING INTEGRAL HISOBI

IX BOB. ANIQMAS INTEGRAL

1-§. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

Differensial hisobning asosiy masalalaridan biri – berilgan $f(x)$ funksiyaga ko'ra uning hosilasi $f'(x)$ ni topishdan iborat edi. Bu masalaning teskarisi, ya'ni hosilasiga ko'ra funksiyaning o'zini tiklash masalasi katta ahamiyatga ega bo'lib, integral hisobning asosiy masalalaridan hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya biror (a,b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar (a,b) da $f(x)$ funksiya biror $F(x)$ funksiyaning hosilasiga teng, ya'ni (a,b) intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun $F'(x)= f(x)$ bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning ***boshlang'ich funksiyasi*** deyiladi.

Masalan,

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ bo'lsin. Bu funksiyaning $(0;+\infty)$ intervalda boshlang'ich funksiyasi $F(x)=2\sqrt{x}$ bo'ladi, chunki $(0;+\infty)$ da $F'(x)=(2\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$;

2) $f(x)=x^2$ ning $(-\infty;+\infty)$ oraliqda boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo'lishi aniq.

Ravshanki, agar biror oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda ixtiyoriy o'zgarmas C son uchun

$$F(x)+C \qquad (1)$$

funksiya ham $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki,

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya biror boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda uning boshlang'ich funksiyalari cheksiz ko'p bo'ladi.

Quyidagi savol tug'ilishi tabiiy: biror oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari (1) formula bilan ifodalanadimi, boshqacha aytganda, $f(x)$ funksiyaning (1) formula bilan ifodalanmaydigan boshlang'ich funksiyalari mavjudmi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

1-teorema. Agar biror oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi C o'zgarmasning biror qiymatida (1) formula yordamida ifodalanadi.

Isboti. Aytaylik, $G(x)$ funksiya qaralayotgan oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. Ushbu $\varphi(x)=G(x)-F(x)$ yordamchi funksiyani ko'rib chiqamiz. Bu funksiya uchun $\varphi'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ bo'ladi, ya'ni qaralayotgan oraliqda $\varphi(x)$ funksiya uchun funksiyaning doimiylik sharti bajariladi. Boshqacha aytganda $G(x)-F(x)=C$, ya'ni $G(x)=F(x)+C$ bo'ladi. Demak, $G(x)$ funksiya (1) formuladan C ning biror qiymatida hosil bo'ladi.

Shunday qilib, agar oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning bitta $F(x)$ boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda uning barcha boshlang'ich funksiyalari $F(x)+C$, bu yerda: C ixtiyoriy o'zgarmas son, ko'rinishda ifodalanar ekan.

2-ta'rif. (a,b) intervalda berilgan $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyalarning umumiy ifodasi $F(x)+C$, bu yerda: C=const, shu $f(x)$ funksiyaning *aniqmas integrali* deb ataladi va u $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bunda $\int$ – *integral belgisi*, $f(x)$ *integral ostidagi funksiya*, $f(x)dx$ – *integral ostidagi ifoda*, x – *integrallash o'zgaruvchisi* deb ataladi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \qquad (2)$$

bu yerda: $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi.

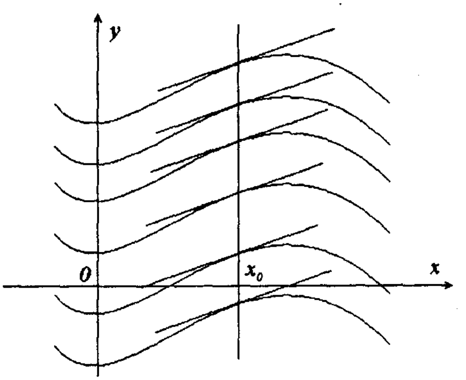
Masalan, (-∞;+∞) da $f(x)=cosx$ bo'lsin. Bu holda $(sinx)'=cosx$ bo'lgani uchun $\int \cos xdx = sinx+C$ bo'ladi.

(2) formuladan ko'rinadiki, berilgan $f(x)$ funksiyaning biror boshlang'ich funksiyasini va uning aniqmas integralini topish masalalari deyarli bir xil masalalardir. Shu sababli $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topishni ham, aniqmas integralini topishni ham $f(x)$ funksiyani *integrallash* deb ataymiz. Integrallash differensiallashga nisbatan teskari amaldir.

Integrallash amalining to'g'ri bajarilganligini tekshirish uchun olingan natijani differensiallash yetarli: differensiallash natijasida integral ostidagi funksiya hosil bo'lishi lozim.

Masalan, $\int 3x^2dx = x^3 + C$ ekanligini tekshirish uchun tenglikning o'ng tomonidagi funksiyadan hosila olamiz: $(x^3+C)'=3x^2$, demak, integrallash to'g'ri bajarilgan.

Geometrik nuqtai nazardan bu teorema $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali $y=F(x)+C$ bir parametrli *egri chiziqlar oilasini* ifodalaydi (C-parametr). Bu egri chiziqlar oilasi quyidagi xossaga ega: egri chiziqlarga abssissasi $x=x_0$ bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmalar bir-biriga parallel bo'ladi (1-rasm).



1-rasm.

$F(x)+C$ egri chiziqlar oilasi *integral egri chiziqlar* deb ataladi. Ular bir-biri bilan kesishmaydi, biri-biriga urinmaydi. Tekislikning har bir nuqtasidan faqat bitta integral chiziq o'tadi. Barcha integral chiziqlar biri ikkinchisidan Oy o'qiga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'ladi.

Misol. Abssissasi x bo'lgan nuqtasida o'tkazilgan urinmasining burchak koeffitsienti $k=x^3$ formula bilan ifodalanadigan va (2;5) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqni toping.

Yechish. Ma'lumki, $y'=k=x^3$, bu shartni qanoatlantiruvchi y funksiyaning umumiy ifodasi $y=\int x^3dx$ bo'ladi. Bu integralni hisoblab, $y=\frac{x^4}{4}+C$ ifodaga ega bo'lamiz. Izlanayotgan egri chiziq (2;5) nuqtadan o'tadi. Shu sababli funksiya ifodasiga berilgan nuqta koordinatalarini qo'yamiz va C ning kerakli qiymatini topamiz. Natijada $5=\frac{2^4}{4}+C$, $C=1$ hosil bo'ladi. Demak, izlanayotgan egri chiziq tenglamasi $y=\frac{x^4}{4}+1$ ekan.

Endi quyidagi savolga javob izlaymiz: biror oraliqda berilgan har qanday $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjudmi?

Ushbu savolning javobi Darbu teoremasidan kelib chiqadi (VII bob, 1-§, 5-teorema).

Bu teoremaga asosan quyidagi

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } -2\le x<0,\\ 1, & \text{agar } 0\le x\le 2\end{cases}$$

funksiya [-2;2] da boshlang'ich funksiyaga ega emas, chunki bu funksiya 0 va 1 qiymatlarni qabul qilib, ular orasidagi qiymatlarini qabul qilmaydi.

Har qanday funksiyaning ham boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lavermaydi, lekin quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya biror oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda uning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi.

Bu teoremaning isboti kelgusida ko'rsatiladi, shu sababli bu bobda uzluksiz funksiyalarni integrallash haqida gapiriladi. Uzilishga ega bo'lgan funksiyalar uchun integrallash masalasi uning u yoki bu uzluksizlik oraliqlari uchun qaraladi.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega. Bu funksiya $(0;+\infty)$ va $(-\infty;0)$ oraliqlarda uzluksiz. Birinchi oraliqda

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$$

formula o'rinli. Ammo ikkinchi oraliq uchun bu formula ma'noga ega emas. Lekin bu oraliqda quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C.$$

Bu ikki formulani quyidagicha umumlashtirib yozish mumkin:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

2-§. Aniqmas integralning sodda xossalari

1^0. Aniqmas integralning differensiali (hosilasi) integral ostidagi ifodaga (funksiyaga) teng:

$d\int f(x)dx=f(x)dx$ ($(\int f(x)dx)'=f(x)$).

Isboti. Ta'rifga ko'ra $d\int f(x)dx=d(F(x)+C)=dF(x)=F'(x)dx=$ $=f(x)dx$.

2^0. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$\int dF(x)=F(x)+C.$

Isboti. $\int dF(x)=\int F'(x)dx=F(x)+C.$

3^0. Agar $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa, u holda ixtiyoriy k ($k\neq 0$) son uchun

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad (1)$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi oldiga chiqarish mumkin.

Isboti. $\int f(x)dx=F(x)+C$ bo'lsin. U holda

$$k\int f(x)dx=k(F(x)+C)=kF(x)+kC \qquad (2)$$

bo'ladi. $(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)$ va kC ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lganligi uchun $kF(x)+kC$ ifoda $kf(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalarini beradi, ya'ni

$$\int kf(x)dx = kF(x)+kC \qquad (3)$$

bo'ladi. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi.

1-izoh. $k=0$ bo'lganda (1) tenglik o'rinli emas. Haqiqatan ham, bu tenglikning chap tomoni $\int 0f(x)dx=\int 0dx=C$, C – ixtiyoriy o'zgarmas son, o'ng tomoni esa $0\int f(x)dx=0\cdot(F(x)+C)=0$.

2-izoh. Integrallarni topishda kC yozilmaydi. Uning o'rniga C yoziladi, chunki ixtiyoriy o'zgarmas sonni yozish usuli muhim emas. Bunda o'zgarmas qo'shiluvchining ixtiyoriy qiymat qabul qila olishi muhim hisoblanadi.

Agar C–ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa, u holda C^3, $4C$ – ixtiyoriy o'zgarmas son bo'ladi. Lekin C^2, $\sin C$ – ixtiyoriy o'zgarmas son emas, chunki $C^2\geq 0$, $|\sin C|\leq 1$.

4^0. Agar $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'lsa, u holda

$$\int (f(x) \pm g(x))dx=\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

bo'ladi, ya'ni ikkita funksiya algebraik yig'indisining integrali aniqmas integrallar algebraik yig'indisiga teng.

Isboti. Aytaylik, $F(x)$ va $G(x)$ lar mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ larning boshlang'ich funksiyalari bo'lsin. U holda

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = (F(x)+C_1) \pm (G(x)+C_2) =$$
$$= (F(x) \pm G(x))+(C_1\pm C_2)$$

Ammo, $F(x)\pm G(x)$ funksiya $f(x)\pm g(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi, chunki $(F(x)\pm G(x))'=F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x)$, $C_1\pm C_2$ esa, – ixtiyoriy ikkita o'zgarmas sonlarning algebraik yig'indisi – yana ixtiyoriy o'zgarmas son bo'ladi.

Shu sababli $(F(x)\pm G(x))+(C_1\pm C_2)$ ifoda $f(x)\pm g(x)$ ning barcha boshlang'ich funksiyalarini beradi, ya'ni $\int (f(x)\pm g(x))dx$ ga teng bo'ladi.

Bu xossani chekli sondagi funksiyalar uchun ham isbotlash mumkin. Buning uchun matematik induksiya metodidan foydalanish yetarli.

3-izoh. Integrallarni topishda $C_1 \pm C_2$ o‘rniga C yoziladi.
Masalan,

$$\int(\cos x+3x^2)dx=\int\cos x dx+\int 3x^2 dx=\sin x+x^3+C.$$

5^0. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Tenglikning o‘ng tomonining hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng ekanligini ko‘rsatish yetarli. Haqiqatan ham,

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)'=\frac{1}{a}(F(ax+b))'=f(ax+b).$$

6^0. (integrallash formulasining invariantligi). Agar integrallash formulasida integrallash o‘zgaruvchisini shu o‘zgaruvchining istalgan differensiallanuvchi funksiyasi bilan almashtirsak, integrallash formulasining shakli o‘zgarmaydi, ya’ni agar $\int f(x)dx=F(x)+C$ va u funksiya x ning differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsa, u holda $\int f(u)du=F(u)+C$ bo‘ladi.

Isboti. Birinchi tartibli differensialning invariantlik formasidan foydalanamiz. Bunga ko‘ra, agar $dF(x)=F'(x)dx$ va $u=u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, u holda $dF(u)=F'(u)du$ bo‘ladi. $\int f(u)du=F(u)+C$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun so‘nggi tenglikning ikkala tomonidan differensial olamiz:

$$d\left(\int f(u)du\right)=f(u)du, \qquad d(F(u)+C)=F'(u)du=f(u)du.$$

Bu differensiallarning tengligidan 6^0 xossaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

3-§. Integrallash qoidalari va asosiy integrallar jadvali

Yuqorida isbotlangan aniqmas integralning sodda xossalari va aniqmas integrallar jadvali birgalikda integrallarni hisoblashning asosiy qoidalarini aniqlaydi. Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo'lganligi sababli, quyida keltiriladigan formulalarning ko'pchiligini hosilalar jadvalidan hosil qilish mumkin.

Quyida asosiy aniqmas integrallar jadvalini keltiramiz. Bunda har bir formula integral ostidagi funksiyalarning aniqlanish sohasida qaraladi.

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C;$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C; \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0;$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (|x|<|a|);$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

9. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

10. $\int chx dx = shx + C;$

11. $\int shx dx = chx + C;$

12. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C;$

13. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C;$

14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \ a \neq 0;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ (|x|>|a|).$

4-§. Integrallash usullari

4.1. Bevosita integrallash usuli. Bu usul integral ostidagi ifodani jadvaldagi biror integral ostidagi ifoda ko'rinishiga keltirish va aniqmas integral xossalaridan foydalanishga asoslangan.

Masalan:

$$1)\ \int 2^{2x}\cdot 3^x dx=\int (2^2\cdot 3)^x dx=\int 12^x dx=\frac{12^x}{\ln 12}+C;$$

$$2)\ \int tg^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=$$

$$=tgx-x+C;$$

$$3)\ \int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\int(1-\sin x)dx=x+\cos x+C;$$

$$4)\ \int\cos 2x dx=\int\cos 2x\cdot\frac{1}{2}d(2x)=\frac{1}{2}\int\cos(2x)d(2x)=$$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+C$, bunda integrallash formulasining invariantligi xossasidan foydalanildi.

4.2. O'zgaruvchini almashtirish usuli. Ushbu $\int f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Integralda o'zgaruvchini almashtirish usulining mohiyati shundan iboratki, unda integrallash o'zgaruvchisi x ni biror $x=\varphi(t)$ formula yordamida t o'zgaruvchi bilan almashtiriladi. Bunda $\varphi'(t)$ uzluksiz va $x=\varphi(t)$ ga nisbatan teskari funksiya $t=\varphi^{-1}(x)$ mavjud deb faraz qilinadi. Endi

$$x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$$

ifodalarni $\int f(x)dx$ ga qo'yamiz:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Bu yerda: $\varphi(t)$ ni shunday tanlash kerakki, o‘ng tomondagi integral soddaroq bo‘lsin. Agar $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri $F(t)$ bo‘lsa,

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

kelib chiqadi.

(3) formula aniqmas integralda *o‘zgaruvchini almashtirish formulasi* deb ataladi.

Ba’zi hollarda yangi o‘zgaruvchini $t=\varphi(x)$ formula orqali kiritish foydadan xoli emas.

1-*misol.* $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ ni hisoblang.

Yechish. $e^x-1=t^2$ almashtirish kiritamiz. U holda $e^x=t^2+1$, $x=\ln(t^2+1)$, $dx=\frac{2t}{t^2+1}dt$ va

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{e^x-1}+C \text{ bo‘ladi.}$$

2-*misol.* $\int\sin^3 x\cos xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $t=sinx$, $dt=cosxdx$ almashtirishni kiritamiz. Bu holda

$$\int\sin^3 x\cdot\cos xdx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C \text{ bo‘ladi.}$$

O‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib, aniqmas integralni hisoblashda almashtirishni qulay tanlab olish muhim hisoblanadi. Ixtiyoriy integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirishning umumiy qoidasi yo‘q. Bunday qoidalarni ba’zi funksiyalar (trigonometrik, irratsional va boshq.) sinflari uchun keltirish mumkin.

Ko‘p hollarda integrallarni hisoblashda integral ostidagi funksiyani differensial belgisi ostiga “kiritish” usulidan foydalaniladi. Funksiya differensialining ta’rifiga ko‘ra $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Bu tenglikning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tish (hosil qilish) $\varphi'(x)$ ko‘paytuvchini differensial belgisi ostiga “kiritish” deb aytiladi.

Aytaylik, ushbu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ ko'rinishdagi integralni hisoblash talab qilinsin. Bu integralda $\varphi'(x)$ ko'paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritamiz, so'ngra $\varphi(x)=u$ almashtirish bajaramiz. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du\,.$$

3-*misol.* $I=\int\sqrt[3]{1+x^2}\,xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. $xdx=\frac{1}{2}d(1+x^2)$ ekanligidan foydalanamiz, u holda

$$I=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)=|1+x^2=u|=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=$$

$=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1+x^2)^4}+C$ bo'ladi.

4-*misol.* $I=\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{4+3\cos x}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin xdx=-\frac{1}{3}d(4+3\cos x)$ ekanligini ko'rish qiyin emas. $4+3cosx=u$ deb belgilaymiz. Natijada

$$I=-\frac{1}{3}\int(4+3\cos x)^{-\frac{1}{2}}d(4+3\cos x)=-\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}}+C=$$

$=-\frac{2}{3}\sqrt{4+3\cos x}+C$ hosil bo'ladi.

Agar integral ostidagi funksiya $\varphi'(x)/\varphi(x)$ ko'rinishda bo'lsa, u holda $\varphi'(x)$ ko'paytuvchini differensial belgisi ostiga kiritish orqali uni jadvaldagi integralga keltirish mumkin:

$$\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\int\frac{d(\varphi(x))}{\varphi(x)}=\ln|\varphi(x)|+C\,.$$

Masalan, $\int tgxdx=\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=|u=\cos x|=$

$$= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

4.3. Bo'laklab integrallash usuli. Bu usul ikki funksiya ko'paytmasining differensiali formulasidan kelib chiqadi. Ma'lumki, agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, u holda $d(uv)=udv+vdu$ yoki $udv=d(uv)-vdu$ bo'ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$\int udv=\int d(uv)-\int vdu$ yoki

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (4)$$

formula hosil bo'ladi. Bu formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu formula yordamida $\int udv$ ni hisoblash boshqa, $\int vdu$ integralni hisoblashga keltiriladi. Bu formuladan $\int udv$ ga nisbatan $\int vdu$ integralni hisoblash oson bo'lganda foydalaniladi.

1-*misol.* $\int x\cos xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=x$, $du=x$, $v=\sin x$, $dv=\cos xdx$ belgilashlarni kiritamiz. U holda $\int x\cdot\cos xdx = \int udv = u\cdot v - \int vdu = x\cdot\sin x -$ $-\int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$ bo'ladi.

2-*misol.* $\int \ln xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $u=\ln x$, $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=x$, $dv=dx$ almashtirishni kiritamiz.

U holda, $\int \ln xdx = \int udv = x\cdot\ln x - \int x\cdot\dfrac{dx}{x} = x\cdot\ln x - x + C$ bo'ladi.

Endi amaliyotda tez-tez uchrab turadigan va bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan integrallar tiplarini keltiramiz.

1. $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$ ko'rinishdagi integrallar, bu yerda: $P_n(x)$ – n-darajali ko'phad, k – biror son. Bu integrallarni hisoblash uchun $u=P_n(x)$ deb olish va (4) formulani n marta qo'llash yetarli.

2. $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$,

$\int P_n(x) arctgx dx$, $\int P_n(x) arcctgx dx$ ko'rinishdagi integrallar, bu yerda $P_n(x)$ – n- darajali ko'phad. Bu integrallarni bo'laklab integrallash uchun $P_n(x)$ oldidagi ko'payuvchi funksiyani u deb olish lozim.

3. $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$, bu yerda a va b lar haqiqiy sonlar. Bu integrallar ikki marta bo'laklab integrallash usuli bilan hisoblanadi.

3-*misol.* $\int \arcsin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral 2-tipga kiradi, bunda $P_0(x)=1$ va $u=\arcsin x$ deb olamiz. U holda

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$ bo'ladi.

4-*misol.* $\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral 3-tipga mansub. u sifatida dx ning oldidagi ko'paytuvchilardan ixtiyoriy birini olamiz va ikki marta bo'laklab integrallashni bajaramiz. Ikkinchi marta integrallaganimizda avval berilgan integralni o'z ichida saqlaydigan tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan berilgan integralni topamiz:

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-x}, & du = -e^{-x}dx \\ dv = \cos\frac{x}{2}dx, & v = 2\int \cos\frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$+2e^{-x}\sin\frac{x}{2}+2\int e^{-x}\sin\frac{x}{2}dx=\left|\begin{matrix} u=e^{-x}, & du=-e^{-x}dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx, & v=-2\cos\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}-{-4}\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx,$$ ya'ni

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2}\ -\ 4\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx,$$ bundan

$$5\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=2e^{-x}\sin\frac{x}{2}-4e^{-x}\cos\frac{x}{2},$$ yoki

$$\int e^{-x}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{5}(e^{-x}\sin\frac{x}{2}-2e^{-x}\cos\frac{x}{2}).$$

5-§. Ratsional funksiyalarni integrallash

5.1. Sodda ratsional kasrlar va ularni integrallash. Sodda ratsional kasrlar deb nomlanadigan kasrlar asosan to'rt xil bo'ladi. Ratsional funksiyalarni integrallash shu to'rt xil sodda kasrlarni integrallashga keltiriladi. Shu sababli bu to'rt xil kasrni integrallash masalasi alohida ahamiyat kasb etadi. Ularning ko'rinishi quyidagicha:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \text{va}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

bunda A, M, N, a, p va q lar haqiqiy sonlar, $k>1$natural son va p^2-$4q<0$ deb hisoblanadi.

Endi yuqoridagi kasrlarni integrallash masalasiga o'tamiz.

a) $\frac{A}{x-a}$ ni integrallash quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

b) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ni integrallaymiz ($k>1$).

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

d) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ ni integrallash (p^2-$4q$<0) suratida maxrajining differensialini ajratib olish va maxrajini kvadratlar yig'indisiga keltirish orqali jadvaldagi integrallarga keltiriladi.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \end{array} \right| =$$

$$\frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d(x+p/2)}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}} arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

e) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ (k>1) sodda kasrni integrallash uchun $x+p/2=z$ almashtirish bajaramiz, bundan $dx=dz$, $x^2+px+q=(x+p/2)^2+q-p^2/4=z^2+a^2$, bu yerda $a^2=q-p^2/4$. U holda

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = M\int \frac{zdz}{(z^2+a^2)^k} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^k} =$$

$$= MI_0 + \frac{2N-Mp}{2}I_k$$ bo'ladi. Ravshanki,

$$I_0 = \int \frac{zdz}{(z^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} + C.$$

Demak, $I_k = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k}$ integralni hisoblash kifoya bo'ladi.

$$I_k = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\cdot\int \frac{z^2+a^2-z^2}{\left(z^2+a^2\right)^k}dz = \frac{1}{a^2}\cdot\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}} -$$

$-\frac{1}{a^2}\cdot\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$. Bu yerda $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}} = I_{k-1}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$I_k = \int \frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\left(I_{k-1} - \int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}\right) \qquad (5)$$

bo'ladi.

Endi $\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k}$ ni bo'laklab integrallaymiz.

$$\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^k} = \left| \begin{array}{ll} u = z, & du = dz \\ dv = \frac{zdz}{(z^2+a^2)^k}, & v = \frac{1}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{k-1}} =$$

$$\frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}I_{k-1}.$$

So'nggi topilgan ifodani (5) formulaga qo'yamiz, natijada

$$I_k = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} - \frac{z}{2(1-k)(z^2+a^2)^{k-1}}\right) \qquad (6)$$

(6) rekurrent formula deb ataladi. $z = \frac{2x+p}{2}$ va $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ almashtirishlarga qaytib, izlanayotgan integralni topamiz.

$I_1 = \int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{z}{a} + C$ bilgan holda (6) formula yordamida $I_2 = \int \frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$ integralni hisoblash mumkin. Haqiqatan ham,

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+a^2} + \frac{z}{2(z^2+a^2)}\right) =$$

$$= \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{z}{a} + C.$$

Shunday qilib, biz barcha sodda kasrlarni integrallash formulalarini hosil qildik.

5.2. Ratsional funksiyalarni integrallash. Integralni hisoblash uchun umumiy usullar bo'lmagani uchun ayrim funksiyalar sinflarini integrallash yo'llari o'rganilgan. Hozir biz ana shunday funksiyalar sinflaridan biri bilan tanishib chiqamiz.

Ma'lumki, $R_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ko'phad butun ratsional funksiya,

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m} \quad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$$

esa kasr ratsional funksiyalar deb ataladi. Butun va kasr ratsional funksiyalar umuman ratsional funksiyalar deb ataladi. Butun ratsional funksiyani integrallash quyidagicha bajariladi:

$$\int R_n(x)dx = \int a_0x^n dx + \int a_1x^{n-1}dx + ... + \int a_{n-1}xdx + \int a_n dx =$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + ... + a_{n-1}\cdot\frac{x^2}{2} + a_n x + C.$$

Endi kasr ratsional funksiyalarni integrallash masalasiga o'tamiz.

Ushbu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kasr ratsional funksiya berilgan bo'lsin.

Agar $n<m$ bo'lsa, u holda $f(x)$ – to'g'ri, $n \geq m$ bo'lsa, $f(x)$ – noto'g'ri kasr ratsional funksiya deyiladi.

Misollar. $\frac{3x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x}$ – to'g'ri kasr ratsional funksiyalar;

$\frac{x^2+3}{x^2+5}$, $\frac{x^3+x+5}{x^2+4}$ – noto'g'ri kasr ratsional funksiyalar bo'ladi.

To'g'ri ratsional kasrni integrallashni o'rganamiz.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n<m)$ to'g'ri ratsional kasr berilgan bo'lsin. Uni chekli sondagi sodda ratsional kasrlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. Shu maqsadda $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kasrning maxrajini chiziqli va kvadrat ko'paytuvchilarga ajratish lozim, buning uchun $Q_m(x)=0$, ya'ni

$$b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m=0 \qquad (7)$$

tenglamani yechish kerak. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra $Q_m(x)=0$ tenglama karrali ildizlarini hisobga olganda m ta ildizga ega bo'ladi. Bu ildizlar haqiqiy (sodda yoki karrali) va kompleks (sodda va karrali) bo'lishi mumkin.

Ma'lumki, agar $x=\alpha$ qaralayotgan $Q_m(x)$ ko'phadning sodda (k karrali) ildizi bo'lsa, u holda $Q_m(x)$ ko'phad $x-\alpha$ $((x-\alpha)^k)$ ga qoldiqsiz bo'linadi va

$$Q_m(x)=(x-\alpha)Q_{m-1}(x) \ (Q_m(x)=(x-\alpha)^kQ_{m-k}(x))$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $z=u+iv$ kompleks son $Q_m(x)$ ko'phadning sodda ildizi bo'lsa, u holda unga qo'shma bo'lgan $\bar{z}=u-iv$ kompleks son ham $Q_m(x)$ ko'phadning ildizi bo'ladi. Bu holda ko'phad $(x-z)(x-\bar{z})=x^2+px+q$ ga qoldiqsiz bo'linadi, bu yerda $p=-(z+\bar{z})=-2u$, $q=z\bar{z}=u^2+v^2$, $p^2/4-q<0$ va uni $Q_m(x)=(x^2+px+q)Q_{m-2}(x)$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Shunga o'xshash, agar z kompleks son s karrali ildizi bo'lsa, u holda $Q_m(x)=(x^2+px+q)^sQ_{m-2s}(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Faraz qilaylik, (7) tenglamaning barcha haqiqiy va kompleks ildizlari topilgan bo'lsin. U holda $Q_m(x)$ ko'phadni chiziqli va kvadrat ko'paytuvchilarga ajratish mumkin:

$Q_m(x)=$

$$b_0(x-\alpha)^{k_1}(x-\beta)^{k_2}...(x-\gamma)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}...(x^2+p_rx+q_r)^{s_r},$$

bu yerda $k_1+k_2+...+k_t+2s_1+2s_2+...2s_r=m$.

Algebra kursida $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to'g'ri ratsional kasr elementar (sodda) kasrlar yig'indisi shaklida yozilishi ko'rsatiladi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-\alpha)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+...+\frac{B_{k_2}}{(x-\beta)^{k_2}}+...+$$

$$+\frac{L_1}{x-\gamma}+\frac{L_2}{(x-\gamma)^2}+...+\frac{L_{k_t}}{(x-\gamma)^{k_t}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+...+$$

$$+\frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+...+\frac{U_1x+V_1}{x^2+p_rx+q_r}+...+\frac{U_{s_r}x+V_{s_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}, \qquad (8)$$

bunda $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, \ldots, B_{k_2}, L_1,\ldots, L_{k_t}, M_1, \ldots M_{s_1}, N_1,\ldots, N_{s_1}, U_1,\ldots, U_{s_r}, V_1,\ldots, V_{s_r}$ - noma'lum koeffitsientlar.

Yuqoridagi formulani koeffitsientlarni topmagan holda bir necha misollarda ko'rsatamiz:

1)

$$\frac{x^2+2}{(x^3-1)(x^2+1)}=\frac{x^2+2}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+1};$$

2) $$\frac{3x-2}{(x+4)(x-2)^3}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3};$$

3)

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^3(x^2+2)^2(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+2)^2}+\frac{H}{x+5}$$

(8) yoyilmadagi koeffitsientlarni topish uchun *noma'lum koeffitsientlar metodi* yoki *xususiy qiymatlar metodi*dan foydalaniladi.

Noma'lum koeffitsientlar metodining mohiyati quyidagidan iborat. Aytaylik, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to'g'ri ratsional kasrning (8) ko'rinishdagi noma'lum koeffitsientli sodda kasrlar yig'indisi shaklidagi yoyilmasi berilgan bo'lsin. Sodda kasrlarni $Q_m(x)$ umumiy maxrajga keltiramiz va suratda hosil bo'lgan ko'phadni $P_n(x)$ ga tenglashtiramiz.

Ma'lumki, ikkita ko'phad aynan teng bo'lishi uchun bu ko'phadlardagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarning teng bo'lishi zarur va yetarli. Shuni hisobga olgan holda hosil bo'lgan ayniyatning o'ng va chap tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz va yuqoridagi noma'lum koeffitsientlarga nisbatan m ta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Shu sistemani yechib, noma'lum koeffitsientlarni topamiz.

1-*misol*. Ushbu $\frac{x^2}{x^3-8}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ bo'lganligi sababli (8) formulaga ko'ra

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4},$$

bu yerda A, B va C lar noma'lum koeffitsientlar. Bu tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz, u holda

$$\frac{x^2}{x^3-8}=\frac{A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$ bo'ladi. Bundan

$$x^2=(A+B)x^2+(2A+C-2B)x+4A-2C.$$

Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, A, B, C larni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{l|c} x^2 & 1 = A + B, \\ x^1 & 0 = 2A + C - 2B, \\ x^0 & 0 = 4A - 2C \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A = \frac{1}{3},\ B = \frac{2}{3},\ C = \frac{2}{3}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{x^2}{x^3 - 8} = \frac{1}{3(x-2)} + \frac{2(x+1)}{3(x^2 + 2x + 4)}.$$

2-*misol.* Ushbu $\dfrac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9}$ ratsional kasrni sodda kasrlarga yoying.

Yechish. Kasrning maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$x^4+4x^3+4x^2-9=(x^2+2x)^2-9=(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)$.

(8) formuladan foydalanib yoyilmani yozamiz:

$$\frac{7x^2 + 26x - 9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Tenglamaning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz. U holda

$$\frac{7x^2 + 26x - 9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)} =$$

$$\frac{A(x+3)(x^2+2x+3) + B(x-1)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}$$

bo'ladi. Bu kasrlarning suratlarini tenglashtiramiz so'ngra x oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{l|c} x^3 & 0 = A + B + C, \\ x^2 & 7 = 5A + B + 2C + D, \\ x^1 & 26 = 9A + B - 3C + 2D, \\ x^0 & -9 = 9A - 3B - 3D, \end{array}\Bigg\} \Rightarrow A = 1,\ B = 1,\ C = -2,\ D = 5.$$

Demak,

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x-1)(x+3)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

Noma'lum koeffitsientlarni topishda x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni solishtirish o'rniga x o'zgaruvchiga bir nechta (noma'lum koeffitsientlar soniga teng) qiymatlar berib, noma'lum koeffitsientlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin. Bu metod *xususiy qiymatlar metodi* deb yuritiladi.

Bu metod ayniqsa $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasr maxraji ildizlari sodda va haqiqiy bo'lganda qo'l keladi. Bunda x ga shu ildizlarga teng qiymatlar berish qulay bo'ladi.

3-*misol.* $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajrating.

Yechish. (8) formulaga ko'ra

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}.$$

Ushbu tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va suratlarini tenglashtiramiz:

$4x^2+16x-8=A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2).$

x ga ketma-ket $x=0$, $x=-2$ va $x=2$ qiymatlar berib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{r|l} x=0 & -8=-4A \\ x=-2 & -24=8B \\ x=2 & 40=8C \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=2, \\ B=-3, \\ C=5. \end{cases}$$

Shunday qilib,

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}.$$

Ba'zi hollarda yuqorida ko'rilgan ikkala metoddan birgalikda foydalanish ham mumkin, ya'ni noma'lum koeffitsientlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilish uchun x ga bir qator xususiy qiymatlar berish va x ning oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish mumkin.

Endi ratsional kasr funksiyalarni integrallash qoidasini keltiramiz. Ratsional kasrni integrallash uchun quyidagi ishlarni bajarish lozim:

1) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasr noto'g'ri ($n \geq m$) bo'lsa, u holda uni ko'phad va to'g'ri ratsional kasr yig'indisi ko'rinishda ifodalab olamiz:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)},\ k<m;$$

2) agar qaralayotgan $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasr to'g'ri ($n < m$) bo'lsa, u holda uni (8) formula yordamida sodda kasrlarga yoyamiz;

3) ratsional kasr integralini uning butun qismi va sodda ratsional kasrlar integrallari yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz va har bir integralni hisoblaymiz.

Noma'lum koeffitsientlarni topganimizdan keyin $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ratsional kasrni integrallash masalasi yuqoridagi ayniyatda qatnashgan sodda kasrlarni integrallash masalasiga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Bundan $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx$ kelib chiqadi. Endi x o'zgaruvchiga 0, 1, 2 va -1 qiymatlar berib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -A=1, \\ D=2, \\ A+2B+2C+2D=9, \\ -8A-4B+2C-D=0. \end{cases}$$

Bundan A=-1, B=2, C=1, D=2 ni topamiz.

Demak,

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3} =$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

5-*misol*. $I=\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi kasr–noto‘g‘ri kasr. Uning butun va to‘g‘ri qismlarini ajratib olamiz:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}.$$

To‘g‘ri qismi $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ ni sodda kasrlarga ajratamiz (qarang 3-misol).

Natijada $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}$ tenglikka ega bo‘lamiz.

Bundan

$$I=\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+\ln|x| - 3\ln|x+2| + 5\ln|x-2| + \ln C = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$\ln\left|\frac{Cx^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|.$$

6-*misol.* $\int \frac{x^2}{x^3-8}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya to'g'ri kasrdan iborat. Uni sodda kasrlarga ajratishni 1-misolda ko'rgan edik. Shu yoyilmadan foydalanib integralni hisoblaymiz:

$$\int \frac{x^2}{x^3-8}dx=$$

$$\int \frac{x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}\right)dx=\left|\begin{array}{c} A=\frac{1}{3}, \\ B=C=\frac{2}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{3}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x^2+2x+4|+\frac{1}{3}\ln C=$$

$$=\ln|(C(x-2)(x^2+2x+4))^{\frac{1}{3}}|=\ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}.$$

Izoh. Integrallarni hisoblashda har doim ham tayyor sxemalardan foydalanishga harakat qilavermaslik kerak. Xususan, yuqoridagi misolda $x^2dx=\frac{1}{3}d(x^3-8)$ ekanligidan foydalanish mumkin edi. U holda $\int\frac{x^2}{x^3-2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3-8)}{x^3-8}dx=$

$$=\frac{1}{3}\ln|x^3-8|+\frac{1}{3}\ln C=\ln\sqrt[3]{C(x^3-8)}.$$

6-§. Trigonometrik ifodalarni integrallash

Kelgusida *R(u,v,...,w)* kabi belgilashdan foydalanamiz. U $u,v,...,w$ larga nisbatan ratsional funksiyani, ya'ni $u,v,...,w$ va haqiqiy sonlar ustida chekli sondagi to'rt arifmetik amalni bajarish natijasida hosil bo‘lgan ifodani anglatadi. Bu yerda $u, v, ..., w$ lar harf, ifoda bo‘lishi mumkin.

Masalan, $R(u,v)=\dfrac{\sqrt{2}u^2-v}{3u+4v^3-1}$ u va v larga nisbatan ratsional funksiya;

$R(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x})=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x}}{x+3\sqrt[3]{x}}$ x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ larga nisbatan ratsional funksiya; $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{3\sin x+\cos^3 x}{3-\sin^2 x+2\cos x}$ $sinx$ va $cosx$ larga nisbatan ratsional funksiya bo‘ladi.

$x+4\sqrt{x}-3$ ifoda x ga nisbatan ratsional funksiya emas, chunki ifodada x dan ildiz chiqarish amali ham ishtirok etmoqda. Lekin x, $\sqrt{x}$ larga nisbatan ratsional funksiya bo‘ladi.

$I=\int R(\sin x,\cos x)dx$ integralni ko‘rib chiqaylik. Ushbu integralni hisoblash uchun umumiy usul mavjud. Haqiqatan ham, $t=tg\dfrac{x}{2}$ almashtirishni bajarsak, $x=2arctgt$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$,

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

kelib chiqadi. Bu ifodani integralga qo‘ysak,

$$I=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

hosil bo‘ladi. Bunda R o‘z argumentlarining ratsional funksiyasi bo‘lgani uchun R_1 ham ratsional funksiya bo‘ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

1-*misol.* $\int\dfrac{dx}{1+\sin x}$ ni hisoblang.

Yechish. Bunda $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{2dt}{1+2t+t^2}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2}=$$

$$=\frac{-2}{t+1}+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C \text{ bo‘ladi.}$$

Shuni ta'kidlash kerakki, $t=tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash osonlashadi.

2-*misol.* $\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $tg\frac{x}{2}=t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=$$

$$\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(9+\frac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+2t+17}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16}=\frac{1}{2}arctg\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Ko‘pgina hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional funksiyalarni integrallashga olib keladi. Shuning uchun, ba'zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish ancha qulay bo‘ladi.

a) *R(sinx, -cosx)=-R(sinx, cosx)* bo‘lsa, u holda *sinx=t* almashtirish bajariladi.

Agar $R(-sinx, cosx)=-R(sinx, cosx)$ bo'lsa, u holda $cosx=t$ almashtirish bajariladi. Nihoyat,

$R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx)$ bo'lsa, u holda $tgx=t$ almashtirishdan foydalaniladi.

3-*misol.* $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu holda integral ostidagi funksiya uchun

$$R(-sinx, -cosx)=R(sinx, cosx)$$

shart bajariladi, $tgx=t$ almashtirishdan foydalanamiz. Natijada

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+tg^2 x)d(tgx) = \int (1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C$$

bo'ladi;

b) $I = \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ integralni ko'raylik. Bunda m, n- butun sonlar. Quyidagi uchta holni ko'ramiz:

1) m va n lardan hech bo'lmaganda biri toq son bo'lsin. Masalan, m- toq son, ya'ni $m=2k+1$, k-butun son. U holda $t=sinx$, $dt=cosxdx$, $cos^{2k}x=(1-sin^2x)^k=(1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I = \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x dx = \int t^n \cdot (1-t^2)^k dt$$

bo'ladi. Demak, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

4-*misol.* $\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \sin^4 2x \cdot \cos^3 2x dx = \int \sin^4 2x (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^4 (1-t^2)dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{14}t^7 + C = \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{14}\sin^7 2x + C$$

kelib chiqadi.

2) m va n musbat juft sonlar bo'lsin, ya'ni $m=2s$, $n=2k$, s, k- natural sonlar. Bu holda ushbu

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bu formulalar orqali *sinx* va *cosx* larning darajalarini pasaytirish mumkin bo'ladi.

5-*misol.* $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x(\sin x \cos x)^2 dx =$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

3) agar m va n lar juft sonlar bo'lib, ularning kamida biri manfiy bo'lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda $tgx=t$ almashtirishni bajarish lozim bo'ladi;

d) $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$, n – natural son, $n>1$ ko'rinishdagi integrallar mos ravishda $tgx=t$ va $ctgx=t$ almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, $tgx=t$, $x=arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx = \int \frac{t^n}{1+t^2}dt$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

6-*misol.* $\int tg^5 x dx$ ni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi almashtirishlarni bajarsak,

$$\int tg^5 x dx = \int \frac{t^5}{1+t^2}dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{t^2+1})dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(tg^2 x + 1) + C$$

hosil bo'ladi.

e) $\int \sin nx \cdot \cos mx dx, \quad \int \cos nx \cdot \cos mx dx, \quad \int \sin nx \cdot \sin mx dx$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(n-m)x + \sin(n+m)x),$$

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x),$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig'indining integraliga keltirish mumkin.

7-misol. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(5x-3x) + \sin(5x+3x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x + \frac{1}{2}\int \sin 8x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

7-§. Sodda irratsional funksiyalarni integrallash

Har qanday ratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lishini va ularni hisoblash usullarini ko'rib chiqdik. Lekin har qanday irratsional funksiyaning boshlang'ich funksiyalari elementar funksiya bo'lavermaydi. Biz hozir boshlang'ich funksiyalari elementar bo'ladigan ba'zi bir sodda irratsional funksiyalarni integrallash bilan shug'ullanamiz. Ular asosan biror almashtirish yordamida ratsional funksiyaga keltiriladigan funksiyalardir.

7.1. $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx$ $(m_1, n_1, m_2, n_2, \dots, m_k, n_k$ **– butun sonlar) ko'rinishidagi integrallar.**

Bu integral $x=t^s$, bu yerda s $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, ..., \frac{m_k}{n_k}$ kasrlarning eng kichik umumiy maxraji, almashtirish natijasida ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ..., \sqrt[n_k]{x^{m_k}})dx = \int R(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, ..., t^{r_k}) st^{s-1} dt$$

1-*misol.* $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$ ni hisoblang.

Yechish: 1/2 va 1/3 kasrlarning eng kichik umumiy maxraji 6 ga teng bo'lganligi sababli $x=t^6$ almashtirish bajaramiz. U holda $dx=6t^5dt$ bo'ladi.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \int \frac{t^3 6t^5}{t^3-t^2}dt = 6\int \frac{t^6}{t-1}dt = 6\int (t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1})dt =$$

$$= t^6 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C = x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} +$$

$$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C$$

7.2. $I=\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)dx$ **ko'rinishdagi integral.**

Bu integralda R–o'z argumentlarining ratsional funksiyasi, a, b, c, d lar haqiqiy sonlar va α_1, α_2, ..., α_n– ratsional sonlar bo'lib, ularning eng kichik umumiy maxraji m va $ad-bc \neq 0$ bo'lsin. (Agar ad-bc=0 bo'lsa, u holda $\frac{ax+b}{cx+d}$=*const* va $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha_n}\right)$ ifoda x ga nisbatan ratsional funksiya bo'ladi).

Quyidagi $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ yoki $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$ almashtirishni kiritamiz. U holda $x=\frac{t^m d-b}{a-ct^m}$ va $dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}dt}{(a-ct^m)^2}$ bo'ladi. Natijada, berilgan integral t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi, ya'ni

$$I=\int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t^{\alpha_1\cdot m}, \ldots, t^{\alpha_n m}\right)\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}\,dt.$$

Bundan avval R ning argumentlari irratsional ifodalardan tashkil bo'lsa, endi argumentlar ratsional va butun ratsional funksiyalarga keltirildi.

Qisqacha qilib yozsak, $I=\int R_1(t)dt$, bunda $R_1(t)$ – ratsional funksiya. Avval olingan natijalarga ko'ra bunday integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

2-misol. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $R(x,\sqrt{x+1},\sqrt[3]{x+1})$ ko'rinishdagi funksiya bo'lib, bu yerda $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$. Bu kasrlarning eng kichik umumiy maxraji m=6. U holda $t^6=x+1$, $x=t^6-1$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x+1}=t^3$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ almashtirishlarni bajarib, quyidagi $I=\int\frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}$ integralga kelamiz. Natijada

$$I=6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=$$

$$=2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln|\sqrt[6]{x+1}-1|+C \text{ bo'ladi.}$$

7.3.

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ko'rinishdagi integrallar. I_1 integralni hisoblash uchun ildiz ostidagi ifodadan to'la kvadrat ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a((x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}))=a((x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2).$$

Keyin esa $x+\frac{b}{2a}=u,\ dx=du$ almashtirish bajariladi. Natijada integral jadvaldagi ushbu $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm k^2}}$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

I_2 integral suratida ildiz ostidagi ifodaning differensiali ajratib olinadi va bu integral ikkita integral yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi.

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}++(B-\frac{AB}{2a})I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\int(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}d(ax^2+bx+c)+(B-\frac{Ab}{2a})I_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+}$$

bu yerda: I_1 yuqorida hisoblangan integral.

I_3 integralni hisoblash $x=\frac{1}{u},\ dx=-\frac{1}{u^2}du$ almashtirish yordamida I_1 ga keltiriladi.

3-*misol.* $\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$ ni hisoblang.

Yechish. Berilgan integral I_2 ko'rinishidagi integral.

$$\int\frac{(3x-1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\frac{3}{2}\int(x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2x+2)-$$

$$-4\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$$

4-*misol.* $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integral I_3 ko'rinishdagi integral.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{u}\\ dx=-\frac{1}{u^2}du\end{array}\right|=-\int\frac{udu}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}-1}}=-\int\frac{du}{\sqrt{1+2u-u^2}}=$$

$$=\int\frac{d(u-1)}{\sqrt{2-(u-1)^2}}=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}}+C=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}x}+C.$$

7.4. Trigonometrik almashtirishlar yordamida $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ integralni hisoblash.

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ integrallarning xususiy hollarini hisoblashni yuqorida qarab o'tdik. Hisoblashning bir necha usullari mavjud bo'lib, bunda biz avval trigonometrik almashtirishlariga asoslangan hisoblash usulini ko'rib o'tamiz.

ax^2+bx+c kvadrat uchhadni to'la kvadratini ajratish va o'zgaruvchini almashtirish natijasida $u^2\pm k^2$ ko'rinishga keltirish mumkin. Shunday qilib, quyidagi uch turdagi integrallarni qarash yetarli $I_1=\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,\ I_2=\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du,$ $I_3=\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du.$

I_1 integral $u=k\sin t$ ($u=k\cos t$) almashtirish natijasida $\sin t$ va $\cos t$ ga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

Haqiqatan ham, $u=k\sin t$, $k>0$ almashtirishdan foydalansak, $du = k\cos t dt$, $\sqrt{k^2-u^2} = k\cos t$,

$$\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du = \int R(k\sin t, k\cos t)k\cos t dt \text{ bo‘ladi.}$$

I_2 integral esa $u=k\,tgt$ yoki $u=k\,ctgt$ almashtirish yordamida *sint* va *cost* ga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

Haqiqatan ham, $u=k\,tgt$, $k>0$ almashtirishni bajaramiz. U holda $du = \frac{k}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{k^2+u^2} = \frac{k}{\cos t}$ va

$$\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du = \int R\left(k\frac{\sin t}{\cos t}, \frac{k}{\cos t}\right)\cdot\frac{k}{\cos^2 t}dt$$

bo‘ladi.

I_3 integral $u = k\sec t = \frac{k}{\cos t}$ yoki $u = \frac{k}{\sin t}$ almashtirish yordamida sin$t$ va cos$t$ ga nisbatan ratsional funksiya integraliga keltiriladi. Haqiqatan ham, $u = \frac{k}{\cos t}$ almashtirishni bajaraylik.

U holda $du = \frac{k\sin t}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{u^2-k^2} = k\frac{\sin t}{\cos t}$ va

$$\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du = \int R\left(\frac{k}{\cos t}, \frac{k\sin t}{\cos t}\right)\cdot\frac{k\sin t}{\cos^2 t}dt$$

bo‘ladi. *sint* va *cost* ga nisbatan ratsional funksiya integrallari avvalgi paragrafda aytilgan metodlar yordamida hisoblanadi.

5-*misol*. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos t dt\end{matrix}\right|=a^2\int\cos^2 t dt=$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+$$

$$+C=\left|\begin{matrix}t=\arcsin\frac{x}{a}\\ \sin t=\frac{x}{a}\\ \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\end{matrix}\right|=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

6-*misol.* $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=atgt\\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{a^2(1+tg^2t)}\cdot$

$\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt=a^2\int\frac{dt}{\cos^3 t}$ bo‘ladi. $\int\frac{dt}{\cos^3 t}$ integralni hisoblashni o‘quvchilarga havola qilamiz.

$\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ integralni quyidagicha bo‘laklab integrallash ham mumkin.

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{x^2+a^2},\ du=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}\\ dv=dx,\qquad v=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{x^2+a^2}-$$

$$-\int\frac{a^2+x^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+\int\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ ni tenglikning chap tomoniga o'tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

Izoh. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ integrallarni ham bo'laklab integrallash mumkin.

7-*misol.* $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left|\begin{array}{c} x=atgt \\ dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{a}{\cos^2 t}}{a^4tg^4t\cdot a\dfrac{1}{\cos t}}dt=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int(\sin t)^{-4}d(\sin t)-\frac{1}{a^4}\int(\sin t)^{-2}d(\sin t)=$$

$-\frac{1}{3a^4\sin^3 t}+\frac{1}{a^4\sin t}+C$, *sint* ni x orqali ifodalaymiz. $x=atgt$, $\sin t=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, u holda

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x}+C.$$

7.5. $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ integralni Eyler almashtirishlari yordamida hisoblash. Agar ildiz ostidagi kvadrat uch hadning haqiqiy ildizlari bo'lmasa va $a<0$ bo'lsa, u manfiy bo'lib, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ funksiya mavjud bo'lmaydi va integrallash masalasi o'z ma'nosini yo'qotadi. Shuning uchun quyidagi ikki hol mavjud.

1) $a<0$ va ax^2+bx+c haqiqiy ildizlarga ega bo'lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\cdot t \qquad (1)$$

almashtirishni bajaramiz. Bunda α, β kvadrat uchhadning haqiqiy ildizlari ($\alpha<\beta$). Demak, $a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2$,

$$a(x-\beta)=(x-\alpha)\cdot t^2,\ x=\frac{\alpha t^2-\beta a}{t^2-a}, \qquad dx=\frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t=\frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}.$$

Endi topilgan ifodalarni berilgan integralga qo'yib, t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo'lamiz.

Agar $\alpha=\beta$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)^2}$ funksiya mavjud bo'lmaydi, chunki $a<0$.

8-*misol.* $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ ni hisoblang.

Yechish. Bunda $a=-1<0$, $1-x^2=(1-x)(1+x)$, shuning uchun (1) ko'ra $\sqrt{1-x^2}=(1+x)t,\ 1-x=(1+x)t^2,\qquad x=\frac{1-t^2}{t^2+1},$

$$dx=\frac{-4tdt}{(t^2+1)^2},\ \sqrt{1-x^2}=\left(1+\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)t=\frac{2t}{t^2+1},\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

bo'ladi. Topilgan ifodalarni berilgan integralga qo'ysak,

$$I=\int\frac{-4tdt}{2t(1-t^2)}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C$$ kelib chiqadi;

2) $a>0$ bo‘lsin. Bu holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}\qquad (\text{yoki } t+x\sqrt{a})\qquad (2)$$

almashtirishni bajaramiz. Bundan

$$x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}},\qquad dx=\frac{2t^2\sqrt{a}+2bt+2c\sqrt{a}}{(b+2t\sqrt{a})^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=\frac{bt+c\sqrt{a}+t^2\sqrt{a}}{b+2t\sqrt{a}}$$

kelib chiqadi. Topilganlarni berilgan integralga qo‘yib, yana t ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo‘lamiz.

9-*misol*. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$ ni hisoblang.

Yechish. (2) ga ko‘ra

$$\sqrt{x^2+5}=t-x,\ \ x^2+5=t^2-2tx+x^2,\ \ x=\frac{t^2-5}{2t},$$

$$dx=\frac{t^2+5}{2t^2}dt,\ \sqrt{x^2+5}=t-\frac{t^2-5}{2t}=\frac{t^2+5}{2t}.$$ Shuning uchun

$$I=\int\frac{(t^2+5)}{2t^2\,\frac{t^2+5}{2t}}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C\cdot$$

Yuqorida keltirilgan (1) va (2) almashtirishlar *Eyler almashtirishlari* deb ataladi.

7.6. Binomial differensialni integrallash. Ushbu $I=\int x^m \cdot (a+bx^n)^p dx$ integral berilgan bo'lsin, bunda m, n, p – ratsional sonlar, a va b – haqiqiy sonlar.

$a+bx^n$ binom (ikki had) bo'lgani tufayli integral ostidagi ifoda *binomial differensial* deb aytiladi. Binomial differensialga bog'liq quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. (P.L.Chebishev teoremasi) Quyidagi uch holdagina binomial differensialning integrali elementar funksiya bo'ladi.

1-*hol.* p – butun son;

2-*hol.* $p=\frac{r}{s}$ – kasr son, lekin $\frac{m+1}{n}$ – butun son;

3-*hol.* $p=\frac{r}{s}$ va $\frac{m+1}{n}$ – kasr sonlar, lekin $\frac{m+1}{n}+p$ – butun son.

Ushbu uch holda binomial differensialning integrali elementar funksiya bo'lishini ko'rsatish bilan cheklanib, teoremaning to'liq isbotini keltirmaymiz.

1-holda p butun son bo'lsa, m va n kasrlarning umumiy maxraji k ni topib,

$$x=t^k,\ dx=kt^{k-1}dt$$

almashtirishlardan foydalansak,

$$x^m \cdot (a+bx^n)^p dx = t^{mk}(a+bt^{nk})^p \cdot kt^{k-1}dt$$

bo'ladi (mk va nk lar butun sonlar).

Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda t ga nisbatan ratsional funksiya bo'lib, berilgan masala ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

10-*misol.* $I=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot(1+\sqrt[3]{x^2})}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu yerda $I=\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}dx$ va $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-1$. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$x=t^3,\ dx=3t^2dt,\ t=\sqrt[3]{x},\ \ x^{-2/3}=t^{-2},\ (1+x^{2/3})^{-1}=(1+t^2)^{-1}$.

U holda $I=\int t^{-2}\cdot(1+t^2)^{-1}\cdot 3t^2dt=3\int\frac{dt}{t^2+1}=$

$=3\cdot arctgt+C=3\cdot arctg\sqrt[3]{x+}C$.

2-holda $p=\frac{r}{s}$ bo'lsa,

$$a+bx^n=t^s,\quad x=b^{-1/n}(t^s-a)^{1/n},\quad dx=b^{-1/n}\frac{1}{n}(t^s-a)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$$

almashtirishlarni bajarib,

$$x^m(a-bx^n)^{\frac{r}{s}}dx=\frac{s}{n}\cdot b^{-\frac{m+1}{n}}\cdot(t^s-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot t^{r+s-1}dt$$

ga ega bo'lamiz. Shartga ko'ra $\frac{m+1}{n}$ – butun son, shuning uchun o'ng tomondagi ifoda t ga nisbatan ratsional funksiya bo'lib, bu masala ham ratsional funksiyani integralashga keltiriladi.

11-*misol.* $I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ ni hisoblang.

Yechish. Bunda $I=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx$ bo'lib,

$m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{3}\quad(r=1,\ s=3)$ va $\frac{m+1}{n}$=2 butun son.

Shuning uchun $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\quad x=(t^3-1)^4,\ x^{-\frac{1}{2}}=(t^3-1)^{-2}$,

$dx=12t^2(t^3-1)^3dt,\quad \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=t$ almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda

$$I=\int(t^3-1)^{-2}\cdot t\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt=12\int(t^6-t^3)dt=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C=$$

$$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$$

3-holda $p=\frac{r}{s}$ va $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ butun son bo'lganda $a+bx^n=t^s x^n$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi: $x^n=a(t^s-b)^{-1}$, $x=a^{\frac{1}{n}}(t^s-b)^{-\frac{1}{n}}$,

$$dx=-\frac{s}{n}a^{\frac{1}{n}}(t^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}\cdot t^{s-1}dt, \qquad x^m=a^{\frac{m}{n}}(t^s-b)^{-\frac{m}{n}},$$

$$a+bx^n=t^s\cdot a(t^s-b)^{-1},\ x^m\cdot(a+bx^n)^p dx=$$

$$=a^{\frac{m}{n}}(t^s-b)^{-\frac{m}{n}}\cdot a^p(t^s-b)^{-p}\cdot t^{sp}\cdot\left(-\frac{s}{n}\right)a^{\frac{1}{n}}(t^s-b)^{-\frac{n+1}{n}}\cdot t^{s-1}dt=$$

$$=-a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}+\frac{1}{n}}\cdot\frac{s}{n}\cdot(t^s-b)^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}-1-\frac{1}{n}}\cdot t^{r+s-1}dt=$$

$$=-a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}\cdot\frac{s}{n}\cdot t^{r+s-1}\cdot(t^s-b)^{-1-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}\right)}dt.$$

Teoremaning shartiga ko'ra, $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}$ – butun son. Shuning uchun masala t ga nisbatan ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

12-*misol.* $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu yerda $I=\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx$ bo'lib, $m=-2$, $n=3$, $p=-\frac{5}{3}$, $\frac{m+1}{n}+p=-2$ butun son.

Ushbu $1+x^3=t^3x^3$ almashtirishni bajaramiz.

U holda $t=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$, $x=(t^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $dx=-(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\cdot t^2dt$,

$1+x^3=t^3\cdot(t^3-1)^{-1}$ bo'ladi. Demak,

$$I=-\int(t^3-1)^{\frac{2}{3}}\cdot t^{-5}\cdot(t^3-1)^{\frac{5}{3}}\cdot(t^3-1)^{-\frac{4}{3}}\cdot t^2dt=$$

$$=-\int\frac{t^3-1}{t^3}dt=-t-\frac{1}{2t^2}+C=-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}-\frac{x^2}{2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}=C.$$

13-*misol.* $I=\int(1+x^2)^{\frac{1}{4}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu holda $m=0$, $n=2$, $p=\frac{1}{4}$ – butun son emas, $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}$ – butun son emas va $p+\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ – butun son emas. Demak, Chebishev teoremasiga ko'ra berilgan integral elementar funksiyalar bilan ifodalanmaydi.

IX bobga doir test savollari

1. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, quyidagi formulalardan qaysi biri to'g'ri? ($k \neq 0$)

A) $\int f(kx)dx = kF(x) + C$;

B) $\int f(kx)dx = kF(\frac{1}{k}x) + C$;

C) $\int f(b-kx)dx = \frac{1}{k}F(b-kx) + C$;

D) $\int f(b-kx)dx = -\frac{1}{k}F(b-kx) + C$.

2. $F(x)=\cos 3x-\cos\pi$ funksiya quyidagi $f_1(x)=\sin 3x$, $f_2(x)=-\sin 3x+\sin\pi$, $f_3(x)=3\sin 3x$, $f_4(x)=-3\sin 3x$ funksiyalarning qaysi biri uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi?

A) f_1 B) f_2 C) f_3 D) f_4

3. Quyidagi $F_1(x)=x^5$, $F_2(x)=0{,}2\cdot x^5$, $F_3(x)=4x^3$, $F_4(x)=0{,}2\cdot x^5+5$, $F_5(x)=4x^3+4$, $F_6(x)=x^5-5$ funksiyalardan qaysilari $f(x)=x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi?

A) $F_2;F_6$ B) $F_2;F_4$ C) $F_1;F_6$ D) $F_3;F_5$

4. $f(x)=x^2$ funksiyaning $M(-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasini toping.

A) $F(x)=x^3+5/3$;
B) $F(x)=x^3/3$;
C) $F(x)=x^3/3+10/3$;
D) $F(x)=x^3/3+3$.

5. $\int \sin 3x\cdot\cos 3x dx$ ni hisoblang.

A) $^1/_6\cos 6x+C$;
B) $-9\cos x\cdot\sin x+C$;
C) $^1/_{12}\sin 6x+C$;
D) $-^1/_{12}\cos 6x+C$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x/2}}$ **ni hisoblang.**

A) $-4\sqrt{1-x/2}$; B) $-4\sqrt{1-x/2}+C$;
C) $4\sqrt{1-x/2}+C$; D) $2\sqrt{1-x/2}$.

7. $\int \frac{x^3+2x+2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$ **ni hisoblang.**

A) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$;

B) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+2\ln|x|+C$;

C) $\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+\ln|x|+C$;

D) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+2\ln|x|$.

8. $\int ctg^2xdx$ **ni toping.**

A) x–ctgx+C; B) ctgx–x+C;
C) –x–ctgx+C; D) x+ctgx+C.

9. $\int lnxdx$ **ni toping.**

A) $xlnx-x+C$; B) $xlnx+x+C$;
C) $xlnx+C$; D) $^1/_2 \cdot ln^2x+C$.

10. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ **ni hisoblang.**

A) $\sqrt{x}$ -arctg $\sqrt{x}$ +C; B) 2 $\sqrt{x}$ –2arctg $\sqrt{x}$ +C;
C) $\sqrt{x}$ +arctg $\sqrt{x}$ +C; D) 2 $\sqrt{x}$ +2arctg $\sqrt{x}$ +C.

11. Sodda ratsional kasrni ko'rsating.

A) $\frac{2x-7}{(x-4)^2}$; B) $\frac{x+2}{x-4}$;

C) $\frac{3x+8}{x^2+4x-5}$; D) $\frac{3-x}{x^2+x+5}$.

12. Agar $\frac{6x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}$ **bo'lsa,** ***a*** **va** ***b*** **ni toping.**

A) $a=-{}^{7}/_{4}$; $b={}^{17}/_{4}$; B) $a={}^{7}/_{4}$; $b={}^{17}/_{4}$;

C) $a={}^{17}/_{4}$; $b={}^{7}/_{4}$; D) $a=-{}^{17}/_{4}$; $b=-{}^{7}/_{4}$.

13. $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$ **ni toping.**

A) $\ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|$+C; B) $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}$+C;

C) $ln|(x+1)(2x+1)|$+C; D) $\ln\sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}$+C.

14. $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$ **ni toping.**

A) $\ln|x(x^2+1)|$+C; B) $\ln(x^2+1)$+C;

C) $\ln|x|$+arctg$x$+C; D) $\ln|x|$–arctg$x$+C.

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$ **ni toping.**

A) $\sqrt{2x+5}$+C; B) $\ln|2x+5|$+C;

C) $\ln\sqrt{2x+5}$+C; D) $0,5\sqrt{2x+5}$+C.

16. $3\int \cos^3 x dx$ ni hisoblang.

A) $3\sin x+\sin^3 x+C$; B) $\sin x+3\sin^3 x+C$;
C) $3\sin x-\sin^3 x+C$; D) $^3/_4\cos^4 x+C$.

17. Codda kasrlarni ko'rsating

1) $\frac{5}{2x-3}$; 2) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$; 3) $\frac{x^3+1}{x^2+x+1}$;

4) $\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}$; 5) $\frac{2x^2+3}{x^2-x+1}$

A) 1, 2, 3; B) 1, 2;
C) 1, 2, 5; D) 1, 2, 4.

18. Quyidagi sodda ratsional kasrlarga yoyishning qaysi biri to'g'ri?

1) $\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+1}$;

2) $\frac{3x}{(x+2)^2(x^2+1)}=\frac{Ax}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$;

3) $\frac{x-1}{(x+3)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$;

4) $\frac{x^2+1}{(x+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+1}$

A) 1, 3; B) 2, 4;
C) 2, 3; D) 3, 4.

19. $\int \frac{xdx}{x^4+1}$ **integralni hisoblang.**

$A)\ arctg\frac{x}{4}+C;$ $\quad B)\ \frac{1}{2}arctgx^2+C;$

$C)\ arctg\,4x+C;$ $\quad D)\frac{1}{2}arctg^2x+C.$

20. $3\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$ **ni hisoblang.**

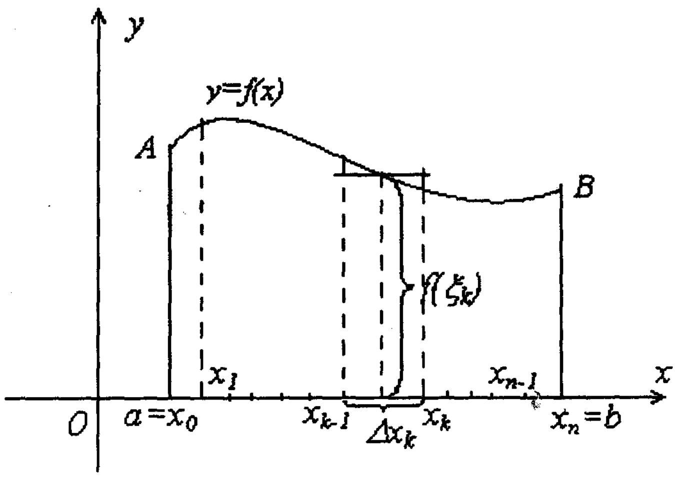
A) $\frac{4}{5}\sqrt[6]{(x^3+2)^5}+C;$ $\quad B)\ \frac{5}{4}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C;$

$C)\ \frac{5}{6}\cdot\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C;$ $\quad D)\ \frac{x^3}{3}\cdot\frac{5}{6}(\frac{x^4}{4}+2x)+C.$

1-§. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar

1.1. Yuza haqidagi masala. [*a;b*] kesmada uzluksiz va nomanfiy *f(x)* funksiya berilgan bo'lsin. *y=f(x)* funksiyaning grafigi, *Ox* o'q, *x=a* va *x=b* to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura *aABb egri chiziqli trapetsiya* deb ataladi.

Xususiy holda *A* bilan *a* nuqta yoki *B* va *b* nuqtalar ustma-ust tushishi ham mumkin, yoki har ikki hol bir vaqtda yuz berishi mumkin. Bu hollarda ham qaralayotgan figura egri chiziqli trapetsiya deb yuritiladi.



2-rasm.

aABb egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish talab qilinsin. Buning uchun [*a;b*] kesmani

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$$

nuqtalar yordamida *n* ta bo'lakka bo'lib va bu nuqtalardan *Oy* o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, *aABb* egri chiziqli trapetsiyani *n* ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga bo'lamiz. Endi har bir $[x_{k-1},x_k]$ kesma ichida ixtiyoriy ξ_k nuqta olamiz. Har bir trapetsiyada asosi $[x_{k-1},x_k]$ va balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'trburchak chizamiz. Bu to'g'ri to'trburchaklarning yuzalari

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k,\ k=1,2,...,n$$

bo'ladi. To'g'ri to'rtburchaklar yuzlarining yig'indisi esa

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

orqali belgilaymiz. Agar $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ deb belgilasak va $\lambda\to 0$ bo'lsa, (bu holda $[a;b]$ ni mayda bo'laklarga bo'lishlar soni n cheksiz o'sadi) S_n ifoda egri chiziqli trapetsiya yuziga tobora yaqinlasha boradi. Shuning uchun egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ni qabul qilish tabiiydir.

1.2. O'zgaruvchan kuch bajargan ish haqidagi masala. Faraz qilaylik, jism Ox o'q bo'ylab Ox o'qdagi proeksiyasi x ning funksiyasi bo'lgan $F=f(x)$ kuch ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Jism shu kuch ta'sirida a nuqtadan b nuqtagacha harakatlanganda bajarilgan ishni topish talab qilinsin.

Buning uchun $[a;b]$ ni n ta bo'lakka bo'lamiz:

$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b$. $[x_{k-1},x_k]$ bo'lakdan ixtiyoriy ξ_k nuqtani tanlab olamiz va shu bo'lakda jismga ta'sir etuvchi kuchni $f(\xi_k)$ ga, uning bajargan ishini

$$f(\xi_k)\cdot(x_k-x_{k-1})=f(\xi_k)\Delta x_k$$

ga teng deb qaraymiz. U holda $F=f(x)$ kuchning $[a;b]$ da bajargan ishi taqriban $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ga teng bo'ladi. Aniqki, $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$

nolga intilsa, $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ bajarilgan ishni aniqroq ifodalaydi va

uni $A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ deb olish mumkin.

Shunday qilib, yuqoridagi ikki masalani yechish ushbu

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ko'rinishdagi yig'indining limitini hisoblash masalasiga olib keldi. Shunga o'xshash ko'pchilik geometrik, mexanik va h.k. masalalar shunday yig'indilarning limitini izlashga keltiriladi.

2-§. Integral yig'indi, aniq integralning ta'rifi

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da aniqlangan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani

$$a=x_0< x_1< x_2< \ldots <x_n=b$$

nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz. $[a;b]$ ni bo'luvchi bu sonlar to'plamini $[a;b]$ ning *bo'linishi* deb ataymiz va τ_n bilan belgilaymiz:

$$\tau_n=\{x_0, x_1, \ldots, x_n | a=x_0< x_1< x_2< \ldots <x_n=b\}.$$

Har bir elementar $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ kesmada bittadan ixtiyoriy ξ_k nuqta tanlab, shu nuqtalarda funksiyaning $f(\xi_k)$ qiymatlarini hisoblaylik va quyidagi yig'indini tuzaylik:

$$S(\tau_n)= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ , (1)$$

bu yerda $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ kesmaning uzunligi.

Ushbu (1) yig'indi $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ dagi *integral yig'indisi* deb ataladi.

$[a;b]$ ning bo'linishlari τ_n va har bir $[x_{k-1},x_k]$ kesmadan ξ_k nuqtalarni tanlash usullari cheksiz ko'p bo'lganligi sababli $f(x)$ ning $[a;b]$ dagi (1) integral yig'indilari to'plami cheksiz to'plam bo'ladi. $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$ belgilash kiritamiz.

1-ta'rif. Agar λ nolga intilganda *f(x)* ning $[a;b]$ dagi (1) integral yig'indisi chekli I limitga ega bo'lib, bu limit $[a;b]$ ning τ_n bo'linishlariga va ξ_k nuqtalarini tanlash usuliga bog'liq bo'lmasa, o'sha I limit *f(x)* ning $[a;b]$ dagi *aniq integrali* deyiladi va u

$$\int_a^b f(x)dx$$

orqali belgilanadi:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Bunday holda *f(x)* funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi (yoki Riman ma'nosida integrallanuvchi) deyiladi.

Bu yerda ham aniqmas integraldagi kabi *f(x)dx integral ostidagi ifoda*, *f(x)- integral ostidagi funksiya*, *x - integrallash o'zgaruvchisi* deb ataladi, *a* va *b* esa mos ravishda *integrallashning quyi va yuqori chegaralari* deyiladi.

Aniq integralning $\int_a^b f(x)dx$ belgilanishi shu funksiyaning aniqmas integrali belgilanishiga o'xshash. Bu tasodifiy emas. Aniq integralni hisoblash shu integral ostidagi funksiyaning aniqmas integralini hisoblashga keltiriladi, ularning belgilashlarining o'xshashligi integrallash formulalarini eslab qolishni osonlashtiradi. Ammo aniq integral bilan aniqmas integral orasida muhim farq mavjud: *f(x)* funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi aniq integrali biror sondan iborat, shu funksiyaning aniqmas integrali esa uning barcha boshlang'ich funksiyalarini ifodalaydi. Shu sababli bular turli tushunchalardir.

Aniq integral tushunchasiga olib kelgan birinchi masaladan aniq integralning geometrik ma'nosi kelib chiqadi: geometrik nuqtayi nazardan nomanfiy funksiyaning aniq integrali son jihatdan shu funksiyaga mos egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi.

3-§. Aniq integral mavjud bo'lishining zaruriy sharti

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya $[a;b]$ da chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik. U holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning τ_n bo'linishiga mos $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ kesmalarning hech bo'lmaganda birida chegaralanmagan bo'ladi. Masalan, funksiya $[x_{j-1},x_j]$ da chegaralanmagan bo'lsin. Integral yig'indini quyidagicha yozish mumkin:

$$S(\tau_n)=A+f(\xi_j)\Delta x_j,$$

bunda $A=\sum_{k=1}^{j-1} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{k=j+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

$[x_{j-1},x_j]$ da $f(x)$ chegaralanmaganligidan shunday $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$ nuqta mavjudki, $|f(\xi_j)\Delta x_j| > |A| + \frac{1}{\lambda}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda

$$|S(\tau_n)| = |A+f(\xi_j)\Delta x_j| \geq |f(\xi_j)\Delta x_j| - |A| > |A| + \frac{1}{\lambda} - |A| = \frac{1}{\lambda}$$

Demak, $\lambda \to 0$ da $S(\tau_n) \to \infty$ bo'ladi va bundan integral yig'indining chekli limiti mavjud emasligi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ ning integrallanuvchi ekanligiga zid bo'ladi. Bu qarama-qarshilik teoremani isbot qiladi.

Shuni ham aytish kerakki, ba'zi bir chegaralangan funksiyalar integrallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin, ya'ni funksiyaning chegaralanganligi uning integrallanuvchi bo'lishi uchun faqat zaruriy shart bo'lib, yetarli shart bo'la olmaydi. Masalan,

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \text{ irratsional bo`lsa,} \\ 1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo`lsa} \end{cases}$$

funksiya (Dirixle funksiyasi) $[-1;1]$ da chegaralangan. Shu funksiyaning kesmadagi integral yig'indilarini olaylik. Agar har bir $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada ξ_k lar uchun faqat ratsional nuqtalar tanlab olinsa,

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k=2$$

bo'ladi.

Agar har bir $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada ξ_k lar uchun faqat irratsional nuqtalar tanlab olinsa,

$$S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\Delta x_k=0.$$

Demak, $S(\tau_n)$ integral yig'indining limiti ξ_k nuqtalarni tanlab olish usuliga bog'liqdir. Bu esa Dirixle funksiyasining integrallanuvchi emasligini ko'rsatadi.

4-§. Darbu yig'indilari va ularning xossalari

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ da aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. $[a;b]$ ning biror τ_n bo'linishini olib, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$m_k=\inf_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x),\ M_k=\sup_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)\ (1)$$

$$\underline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k,\ \overline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k\ (2)$$

Bunda (2) yig'indilar mos ravishda *Darbuning quyi va yuqori yig'indilari* deb ataladi. Funksiyaning chegaralanganligidan m_k va M_k ning mos kesmada mavjudligi aniq. Umuman olganda, (2) yig'indilar integral yig'indi bo'lmaydi, chunki m_k va M_k funksiyaning qiymatlari bo'lmasligi mumkin (agar $f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, (2) yig'indilar $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilari bo'ladi).

Darbu yig'indilarining uchta asosiy xossasi mavjud.

(I) Har qanday τ_n bo'linish uchun

$$\underline{S}(\tau_n)\le S(\tau_n)\le\overline{S}(\tau_n)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Isboti. Ixtiyoriy $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ uchun $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$,

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}.$$

Shuni ta'kidlash lozimki, berilgan τ_n bo'linish uchun Darbuning quyi va yuqori yig'indilari yagona bo'ladi, lekin integral yig'indi, har bir qism kesmadan ξ_k nuqtalarni tanlash evaziga cheksiz ko'p bo'ladi.

(II) $[a;b]$ ning bo'linish nuqtalari sonini oshirish natijasida quyi yig'indilar kamaymaydi, yuqori yig'indilar esa o'smaydi.

Isboti. $[a;b]$ ning τ_n bo'linishi uchun quyi yig'indi $\underline{S}_1$ bo'lsin. Endi bo'linish nuqtalarni orttiramiz. Masalan, $[x_{k-1}, x_k]$ ni $\overline{x}$ nuqta yordamida ikkiga bo'lamiz. Hosil bo'ladigan yangi quyi yig'indini $\underline{S}_2$ deb belgilaymiz.

$$\underline{S}_1 = \sum_{j=1}^{k-1} m_j \Delta x_j + m_k \Delta x_k + \sum_{j=k+1}^{n} m_j \Delta x_j,$$

$$\underline{S}_2 = \sum_{j=1}^{k-1} m_j \Delta x_j + m_k'(\overline{x} - x_{k-1}) + m_k''(x_k - \overline{x}) + \sum_{j=k+1}^{n} m_j \Delta x_j,$$

bunda $m_k' = \inf\limits_{[x_{k-1};\overline{x}]} f(x)$, $m_k'' = \inf\limits_{[\overline{x};x_k]} f(x)$.

Ma'lumki, to'plamning aniq quyi chegarasi qism to'plamining aniq quyi chegarasidan katta emas. Buni e'tiborga olsak, $m_k' \ge m_k$, $m_k'' \ge m_k$ va $m_k'(\overline{x} - x_{k-1}) + m_k''(x_k - \overline{x}) \ge m_k(\overline{x} - x_{k-1}) + m_k(x_k - \overline{x}) =$ $= m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k \Delta x_k$ munosabat o'rinli.

Demak, $\underline{S}_2 \ge \underline{S}_1$ bo'ladi.

Yuqori yig'indiga bog'liq bo'lgan hol shunga o'xshash isbotlanadi.

(III) $[a;b]$ ning har qanday bo'linishidagi quyi yig'indi har qanday boshqa bo'linishdagi yuqori yig'indidan katta emas.

Isboti. τ_{n_1} bo'linishdagi yig'indilar $\underline{S}_1$ va $\overline{S_1}$ bo'lsin, τ_{n_2} bo'linishdagi yig'indilarni $\underline{S}_2$ va $\overline{S_2}$ deb belgilaylik. Endi, τ_{n_1} va

τ_{n_2} lardagi bo'linish nuqtalarni birgalikda olib, yangi τ_{n_3} bo'linishni va unga mos $\underline{S}_3$ va $\overline{S}_3$ larni hosil qilamiz.

(II) ga ko'ra $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3$ va $\overline{S}_2 \geq \overline{S}_3$, (I) ga ko'ra $\underline{S}_3 \leq \overline{S}_3$. Shuning uchun $\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3 \leq \overline{S}_3 \leq \overline{S}_2$ yoki $\underline{S}_1 \leq \overline{S}_2$.

Demak, quyi yig'indilar to'plami yuqoridan, yuqori yig'indilar to'plami esa quyidan chegaralangan bo'ladi.

5-§. Aniq integralning mavjudlik sharti

Quyida integral mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartini keltiramiz.

Teorema. $[a;b]$ kesmada aniqlangan va chegaralangan $f(x)$ funksiyaning shu kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n))=0 \qquad (1)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. *Yetarliligi.* (1) shart bajarilgan bo'lsin. $\lambda\to 0$ da quyi yig'indilar $\{\underline{S}_n\}$ ketma-ketligi limitga ega bo'ladi, chunki $\lambda\to 0$ da bo'linish nuqtalarining soni ortadi, natijada $\{\underline{S}_n\}$ uchun Darbu yig'indilarining (II) xossasiga ko'ra

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \ldots \leq \underline{S}_n \leq \ldots$$

o'rinli bo'ladi. Shu bilan birga (III) xossaga ko'ra $\underline{S}_n \leq \overline{S}_1$, ya'ni $\{\underline{S}_n\}$monoton o'suvchi hamda yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik. Demak, u limitga ega.

Shunga o'xshash, $\lambda\to 0$ da yuqorida yig'indilar ketma-ketligi $\{\overline{S}_n\}$ ham limitga ega bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning chegaralanganligi va (1) shartdan $0=\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n))=$

$=\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(\tau_n)-\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(\tau_n)$, $\quad \lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{S}(\tau_n)=\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{S}(\tau_n)=I$ kelib chiqadi va bunda I chekli sondir. U holda $\underline{S}(\tau_n)\leq S(\tau_n)\leq \overline{S}(\tau_n)$ tengsizlikka ko'ra oraliqdagi o'zgaruvchi $S(\tau_n)$ ham o'sha limitga ega bo'ladi. Demak, chekli $\lim_{\lambda\to 0} S(\tau_n)=I$ limit mavjud ekan.

Zarurligi. *f(x)* funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni $\lim_{\lambda\to 0} S(\tau_n)=I$ bo'lsin. Bu holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\lambda<\delta$ bo'lganda $|S(\tau_n)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. Yuqoridagi I limit integral yig'indi $S(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ da qatnashgan ξ_k nuqtalarni tanlash usuliga bog'liq bo'lmaganligi hamda m_k va M_k lar *f(x)* funksiya qiymatlari to'plamining aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo'lganligi sababli

$$|\underline{S}(\tau_n)-I|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\qquad |\overline{S}(\tau_n)-I|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan $I-\varepsilon<\underline{S}(\tau_n)\le\overline{S}(\tau_n)<I+\varepsilon$ yoki $\lambda<\delta$ bo'lganda $|\overline{S}(\tau_n)-\underline{S}(\tau_n)|<2\varepsilon$ kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlik esa (1) shartning bajarilishini ko'rsatadi.

6-§. Integrallanuvchi funksiyalar sinflari

1-teorema. Agar *f(x)* funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Isboti. Kantor teoremasiga ko'ra *f(x)* funksiya $[a;b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son topilib, $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi va $[a;b]$ kesmaga tegishli bo'lgan barcha x', x'' lar uchun $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

f(x) funksiya har bir $[x_{k-1},x_k]$ da uzluksiz bo'lgani uchun Veyershtrassning 2-teoremasiga ko'ra shunday $\xi_k'\in[x_{k-1},x_k]$ va $\xi_k''\in[x_{k-1},x_k]$ nuqtalar topiladiki, $f(\xi_k')=m_k$, $f(\xi_k'')=M_k$ bo'ladi.

$\left|\xi_k' - \xi_k''\right| \le x_k - x_{k-1} \le \lambda$ tengsizlik o'rinli. Agar $\lambda<\delta$ deb olsak, tekis uzluksizlikka ko'ra $\left|f(\xi_k') - f(\xi_k'')\right| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu holda

$$0<\overline{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k') - f(\xi_k'')\right|\Delta x_k <$$

$$< \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon(b-a).$$

Shunday qilib, $\lambda<\delta$ bo'lganda $0<\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon(b-a)$ bo'lib, $\varepsilon>0$ ixtiyoriy bo'lganidan $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$ tenglikning, ya'ni funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti bajarilishi kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Ushbu $y=x^2-1$, $y=\dfrac{1+x}{x}$ funksiyalar $[1;2]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi, chunki ular bu kesmada uzluksiz.

Aksincha, $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $[0;1]$ kesmada chegaralanmagan va uzilishga ega. Funksiya chegaralanmaganligidan uning $[0;1]$ kesmadagi integrali mavjud emasligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi teoremaga asosan kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi integrallanuvchi bo'lar ekan. Bu sinfni ma'lum ma'noda kengaytirish mumkin. Buning uchun $[a;b]$ da chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lgan chegaralangan funksiyalar sinfini ko'rib o'tamiz.

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada chegaralangan bo'lsin.

$M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ belgilarni kiritib, quyidagi $\omega_{[a;b]} = M - m$ sonni *f(x) funksiyaning [a;b] kesmadagi tebranishi* deb ataymiz. U holda $[x_{k-1};x_k]$, k=1,2,..., n kesmalardagi funksiyalarning tebranishini ω_k orqali belgilasak, $\omega_k=M_k-m_k$ va

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\cdot\Delta x_k$$

bo'lganligi uchun integral mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartini quyidagicha yozish mumkin bo'ladi:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\cdot\Delta x_k=0 \qquad (1)$$

2-teorema. Agar $[a;b]$ da chegaralangan $f(x)$ funksiya shu kesmada chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtalari $c_1, c_2, \ldots, c_k$ bo'lsin. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ olamiz va har bir uzilish nuqtasining uzunligi ε dan kichik bo'lgan

$$(c_1-\varepsilon_1;\ c_1+\varepsilon_1),\ (c_2-\varepsilon_2;\ c_2+\varepsilon_2),\ \ldots,\ (c_k-\varepsilon_k;\ c_k+\varepsilon_k)$$

atroflarini ajratib olamiz.

$[a;b]$ kesmadan bu oraliqlarni chiqarib tashlasak, k+1 ta kesma qoladi. Ularning har birida $f(x)$ funksiya uzluksiz va Kantor teoremasiga ko'ra tekis uzluksiz funksiya bo'ladi. Shuning uchun uzilish nuqtalarini o'rab oluvchi atroflarning tashqarisida yotuvchi oraliqlar uchun shunday $\delta_1>0$ mavjudki, ulardan olingan va $|x'-x''|<\delta_1$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x' va x'' lar uchun

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Endi

$$\delta=\min\{\delta_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k\}$$

belgilashni kiritib, $[a;b]$ kesmaning uzunligini δ dan kichik bo'lgan Δx_j, j=1, 2, ... , n qismiy oraliqlarga bo'lamiz. Shunda 2 xil oraliqlarga ega bo'lamiz:

1) uzilish nuqtalarini o'rab oluvchi atroflarning tashqarisida yotuvchi oraliqlar – ularda funksiyaning tebranishi $\omega_j<\varepsilon$ bo'ladi.

2) ajratilgan atroflar bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lgan oraliqlar – bu oraliqlarda funksiyaning tebranishi $M\text{-}m=\omega_{[a;b]}$ dan katta bo'la olmaydi.

Shunday qilib, $\sum_{j=1}^{n}\omega_j\Delta x_j$ ni yuqoridagi ikki xil qismiy oraliqlarga mos ravishda guruhlab, ikkita yig'indiga ajratamiz:

$$\sum_{j'}\omega_{j'}\Delta x_{j'}+\sum_{j''}\omega_{j''}\Delta x_{j''}.$$

Bunda

$$\sum_{j'}\omega_{j'}\Delta x_{j'}<\varepsilon\sum_{j'}\Delta x_{j'}<\varepsilon(b-a),$$

$$\sum_{j''}\omega_{j''}\Delta x_{j''}<(M-m)\sum_{j''}\Delta x_{j''}<(M-m)3k\varepsilon,$$

chunki 2-xil qismiy oraliqlardan $(c_j-\varepsilon_j;\ c_j+\varepsilon_j)$ da to'la joylashganlarining uzunliklari yig'indisi $k\varepsilon$ dan kichik, qisman yotganliklariniki $2k\varepsilon$ dan kichik bo'ladi. Shuning uchun, agar $\Delta x_j<\delta$ bo'lsa,

$$\sum_{j}\omega_j\Delta x_j<\varepsilon((b-a)+3k(M-m)),\ \text{ya'ni}\ \lambda=\max_{1\le j\le n}\Delta x_j\to 0$$

da $\sum_{j=1}^{n}\omega_j\Delta x_j\to 0$ va (1) shartga ko'ra $f(x)$ funksiya berilgan kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada monoton bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $f(x)$ o'suvchi funksiya bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olib, unga ko'ra $\delta>0$ sonni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

So'ngra $[a,b]$ kesmani $\lambda=\max_{1\le j\le n}\Delta x_j<\delta$ bo'ladigan τ_n bo'linishiga mos Darbuning quyi $\underline{S}(\tau_n)$ va $\overline{S}(\tau_n)$ yuqori yig'indilarini tuzamiz. U holda

$$\underline{S}(\tau_n)-\overline{S}(\tau_n)=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=$$

$$\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1)-f(x_0)+...+f(x_n)-f(x_{n-1}))=$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_n)-f(x_0))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak, funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti $\underline{S}(\tau_n)-\overline{S}(\tau_n)<\varepsilon$ bajariladi. Bu esa qaralayotgan funksiyaning integrallanuvchi ekanligini bildiradi.

Chegaralangan va kamayuvchi funksiyaning integrallanuvchi ekanligi yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Misol. $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(1;2],\\ 2, & x=1\end{cases}$ funksiyaning [1,2] kesmada integrallanuvchi ekanligini asoslang.

Yechish. Bu funksiyaning integrallanuvchi ekanligini yuqoridagi teoremalardan foydalanib asoslash mumkin.

Funksiya x=1 nuqtada uzilishga ega, qolgan nuqtalarda esa uzluksiz. 2-teoremaga ko'ra bu funksiya [1;2] da integrallanuvchi bo'ladi.

Shuningdek, berilgan funksiya [$a;b$] da kamayuvchi. Shuning uchun ushbu funksiya 3-teoremaning hamma shartlarini qanoatlantiradi va integrallanuvchi bo'ladi.

1-izoh. Integrallanuvchi funksiyalar sinflarining soni faqatgina chegaralangan uzluksiz, chegaralangan va chekli sondagina uzilish nuqtalariga ega bo'lgan hamda chegaralangan va monoton bo'lgan funksiyalar sinflari bilan cheklanib qolmaydi. Uzilish nuqtalari sanoqli to'plamni (hadlari takrorlanmaydigan ketma-ketlikni) tashkil etadigan chegaralangan funksiyalar sinfi ham kesmada integrallanuvchi bo'lishini ko'rsatish mumkin.

2-izoh. Agar $a=b$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra har qanday funksiya uchun ushbu

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

tenglikni o'rinli deb faraz qilamiz.

7-§. Aniq integralning xossalari

Avval aniq integralning tenglik bilan ifodalanadigan xossalarini qaraymiz.

1^0. $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$.

Isboti. Haqiqatan ham, bunda $f(x)=1$ va ta'rifga ko'ra

$\int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a$ bo'ladi.

2^0. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $kf(x)$ (k=sonst) ham integrallanuvchi va

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} kf(\xi_k)\Delta x_k = k \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = k\int_a^b f(x)dx.$$

Demak, $\int_a^b kf(x)dx$ mavjud va uning qiymati $k\int_a^b f(x)dx$ ga teng.

3^0. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f_1(x) \pm f_2(x)$ ham $[a;b]$ da integrallanuvchi va

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Bu xossa avvalgi xossa kabi isbotlanadi. Bu xossa qo'shiluvchilar soni chekli (ikkitadan ko'p) bo'lganda ham o'rinli bo'ladi.

4^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, ya'ni integrallash chegaralari o'rnini almashtirsak, aniq integral ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiradi.

Isboti. $\int_a^b f(x)dx$ integral $a<b$ hol uchun aniqlangan edi. Agar $a>b$ bo'lsa, 4^0 xossa aniq integral ta'rifiga qo'shimcha sifatida qaraladi. Bu xossani quyidagicha talqin qilish mumkin: $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_b^a f(x)dx$ integrallari ishorasi bilan farq qiladigan integral yig'indilarning limiti bo'ladi.

5^0. (Aniq integralning additivlik xossasi) Agar $f(x)$ funksiya uchun $\int_a^c f(x)dx, \int_a^b f(x)dx, \int_c^b f(x)dx$ mavjud bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

Isboti. $a<c<b$ bo'lsin. $[a;b]$ ni shunday n ta bo'lakka bo'lamizki, $c=x_m$ bo'linish nuqtalaridan biri bo'lsin. U holda

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \text{ va}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,\ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^c f(x)dx,$$

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_c^b f(x)dx$ bo'lgani uchun bu yerdan (1) kelib chiqadi.

Agar $a< b < c$ bo'lsa, u holda $\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$ bo'lib, bundan $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx =$

$= \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ bo'ladi.

Shunday qilib, c nuqta $[a;b]$ ning ichki yoki tashqi nuqtasi bo'lishidan qat'i nazar, (1) tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi aniq integralning tengsizlik bilan ifodalanadigan xosslarini o'rganamiz.

6^0. Agar $[a;b]$ da $f(x)$ integrallanuvchi va $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ bo'ladi.

Isboti. $f(\xi_k)\geq 0$, $k=1,2,...,n$ va $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ bo'lgani uchun

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$ bo'ladi. Bu tengsizlikda limitga o'tsak,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$$

kelib chiqadi.

7^0. (Aniq integralning monotonlik xossasi) Agar $[a;b]$ da $f(x)$ va $\varphi(x)$ lar integrallanuvchi va $\varphi(x)\leq f(x)$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

Isboti: $[a;b]$ ning ixtiyoriy bo'linishi uchun $\varphi(\xi_k) \leq f(\xi_k)$, $k=1, 2, ..., n$. Demak, $\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ bo'ladi. Bundan

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\xi_k)\Delta x_k \leq \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \text{ yoki } \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

kelib chiqadi.

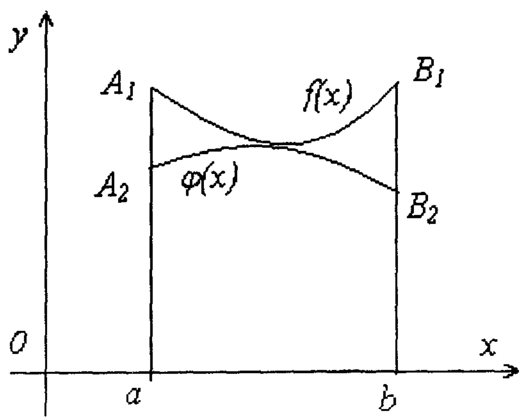
3-rasmda 7^0 xossaning geometrik talqini berilgan. $\varphi(x)\leq f(x)$ bo'lganligi sababli aA_2B_2b egri chiziqli trapetsiyaning yuzi aA_1B_1b egri chiziqli trapetsiyaning yuzidan katta emas.

8^0. Agar $[a;b]$ da $f(x)$ uzluksiz bo'lib, $f(x)\geq 0$ va $f(x)$ aynan nolga teng bo'lmasa, u holda $\int_a^b f(x)dx > 0$ bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ aynan nolga teng bo'lmaganligi sababli $[a;b]$ kesmada shunday ξ nuqta topilib, bu nuqta uchun $f(\xi)>0$ bo'ladi. $f(x)$ ning uzluksizligiga ko'ra ξ ning shunday $(\alpha;\beta)$ atrofi mavjudki, $(\alpha;\beta)\subset [a;b]$ va bu oraliqning barcha nuqtalari uchun ham $f(x)>0$ o'rinli bo'ladi. U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx \quad \text{va} \quad 6^0\text{-xossadan}$$

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f(x)dx$ kelib chiqadi. $f(x)$ uzluksiz bo'lgani uchun $[\alpha;\beta]$ da u eng kichik qiymatga erishadi. Bu eng kichik qiymatni m bilan belgilaymiz. $[\alpha;\beta]$ da $f(x)>0$ bo'lganligi uchun



3-rasm.

$m>0$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} mdx = m(\beta - \alpha) > 0,$$

va bundan $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ kelib chiqadi.

1-izoh. Umumiy holda 6^0-xossadagi tengsizlik qat'iy bo'la olmaydi. Haqiqatan ham,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0) \cup (0;1], \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

funksiya 6^0 xossadagi shartlarni qanoatlantiradi. Shu bilan birga

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = 0 + 0 = 0,$$

ya'ni $\int_{-1}^{1} f(x)dx \geq 0$ (qat'iy tengsizlik bajarilmaydi).

$\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$ bo'lishi uchun *f(x)* funksiya $[a;b]$ kesmada 8^0 xossa shartlarini qanoatlantirishi yetarli.

9^0. Agar *f(x)* funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi va

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \leq \int_{a}^{b} |f(x)|dx$$

tengsizlik o'rinli.

Isboti. *f(x)* funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\lambda<\delta$ bo'lgan har qanday τ_n bo'linishga nisbatan

$$\overline{S}(\tau_n) - \underline{S}(\tau_n) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

bo‘ladi. Aniqki, $x', x'' \in [a;b]$ lar uchun

$$\left| |f(x'')| - |f(x')| \right| \le |f(x'') - f(x')|$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lib, undan quyidagi

$$\sup \left| |f(x'')| - |f(x')| \right| \le \sup |f(x'') - f(x')|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\bar{\omega}_k \le \omega_k$ tengsizlik o‘rinli, bunda $\bar{\omega}_k$ - $|f(x)|$ funksiyaning $[x_{k-1};x_k]$ dagi tebranishi. Natijada

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\omega}_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

bo‘ladi. Bundan esa $|f(x)|$ funksiyaning $[a;b]$ kesmada integrallanuvchiligi kelib chiqadi.

Shuningdek,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \Delta x_k$$

tengsizlikda $\lambda \to 0$ da limitga o‘tsak, izlanayotgan tengsizlik kelib chiqadi.

2-izoh. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $|f(x)|$ ham integrallanuvchi bo‘lishini ko‘rib o‘tdik. Bunga teskari bo‘lgan xulosa, umuman aytganda, noto‘g‘ri bo‘ladi. Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ irratsional bo`lsa,} \\ -1, & \text{agar } x \text{ ratsional bo`lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b 1 dx = b - a,$$

Demak, $[a;b]$ da $|f(x)|$ funksiya integrallanuvchi bo‘ladi, lekin $f(x)$ ning o‘zi Dirixle funksiyasi kabi integrallanuvchi emas.

10^0. (Aniq integralni baholash) Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi va $m \le f(x) \le M$ bo‘lsa, u holda

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (2)$$

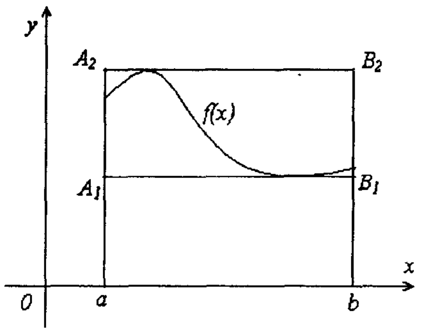
tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra ixtiyoriy $x\in[a;b]$ uchun $m\le f(x)\le M$. Bu tengsizlikka 7^0 xossani, so'ngra 2^0 va 1^0 xossalarni tatbiq etamiz:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx,$$

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx,$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$ 4-rasm



4-rasm.

4-rasmda $[a,b]$ da $f(x)\ge 0$ bo'lgan hol uchun 10^0 xossaning geometrik talqini berilgan. aA_1B_1b to'g'ri to'rtburchakning yuzi $m(b-a)$ ga, aA_2B_2b to'g'ri to'rtburchakning yuzi $M(b-a)$ ga teng. (2) tengsizlikdan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi birinchi to'g'ri to'rtburchak yuzidan kichik emas, ikkinchi to'g'ri to'rtburchak yuzidan katta emasligi kelib chiqadi.

1-*misol.* $\int_0^1 \sqrt{9+x^2}\,dx$ integralni baholang.

Yechish. $[0;1]$ kesmada $9\le 9+x^2\le 10$ tengsizlik o'rinli.

Bundan $3 \le \sqrt{9+x^2} \le \sqrt{10}$ ekanligi kelib chiqadi. (2) formulaga ko'ra $3(1-0) \le \int_0^1 \sqrt{9+x^2}dx \le \sqrt{10}(1-0)$ yoki $3 \le \int_0^1 \sqrt{9+x^2}dx \le \sqrt{10}$.

2-*misol.* $\int_0^1 xdx$ va $\int_0^1 x^3dx$ integrallarni solishtiring.

Yechish. $[0;1]$ kesmada $x \ge x^3$ bo'lganligi sababli $\int_0^1 xdx \ge \int_0^1 x^3dx$ bo'ladi.

8-§. O'rta qiymat haqidagi teoremalar

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday c nuqta topiladiki,

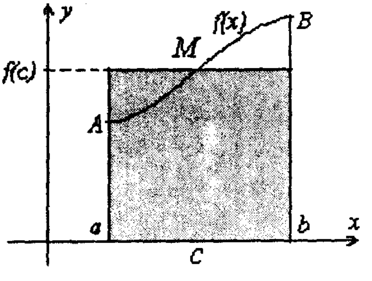
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi. Demak, 10^0-xossaga ko'ra $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ tengsizlik o'rinli. Bundan

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Endi Bolsano-Koshining 2-teoremasiga asosan $[a;b]$ kesmada shunday c nuqta topiladiki,



5-rasm.

$$a(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \quad \text{yoki} \quad \int\limits_a^b f(x)dx = a(c)b-a)$$

bo‘ladi (5-rasm).

Ushbu tenglikning mohiyati quyidagicha: $f(x)\geq 0$ bo‘lganda tenglikning chap tomoni egri chiziqli trapetsiyaning yuzini, o‘ng tomoni *f(c)(b-a)* ifoda esa to‘g‘ri to‘rtburchak yuzini ifoda qiladi (5-rasm).

Demak, *y=f(x)* funksiyaning grafigida shunday *M(c;f(c))* nuqta mavjudki, tomonlarining uzunliklari *f(c)* va *b-a* bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi yuqoridan $y=f(x)\geq 0$, quyidan *Ox* o‘q bilan va *x=a, x=b* vertikal to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo‘ladi. Boshqacha aytganda, *f(x)* funksiyaning [*a;b*] da qabul qiladigan barcha qiymatlarining o‘rta arifmetigi *f(c)* ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx\,. \qquad (2)$$

Bunda *f(c)*-berilgan *f(x)* funksiyaning [*a;b*] kesmadagi *o‘rta qiymati* deyiladi.

Misol. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiyaning [1;2] kesmadagi o‘rta qiymatini toping.

Yechish. (2) formulaga ko‘ra

$$f(c)=\frac{1}{2-1}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2, \text{ demak,}$$

funksiyaning o‘rta qiymati ln2 ga teng ekan.

2-teorema. Agar [*a;b*] da *f(x)* va *φ(x)* lar uzluksiz, $\varphi(x)\geq 0$ (yoki ≤ 0) bo‘lsa, u holda [*a;b*] da shunday *c* nuqta topiladiki,

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)dx=f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx \qquad (3)$$

o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $f(x)$ va $\varphi(x)$ uzluksizligidan $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar mavjud bo'ladi. Veyershtrass teoremasiga ko'ra, $\sup\limits_{[a;b]} f(x)=M$, $\inf\limits_{[a;b]} f(x)=m$ lar mavjud va $m\leq f(x)\leq M$. $\varphi(x)\geq 0$ bo'lgani uchun $m\varphi(x)\leq f(x)\varphi(x)\leq M\varphi(x)$ kelib chiqadi. U holda

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Bu yerda ikki holat bo'lishi mumkin.

I holat: $\int_a^b \varphi(x)dx=0$ bo'lsin. Aniqki, bu holda so'nggi tengsizlikdan $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0$ kelib chiqadi va (3) tenglik o'rinli bo'ladi.

II holat: $\int_a^b \varphi(x)dx>0$ bo'lsin. U holda $m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} \leq M$ tengsizlik o'rinli. $[a;b]$ da $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun shunday c nuqta topiladiki, $\dfrac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx}=f(c)$ bo'ladi. Bu tenglikdan (3) tenglik kelib chiqadi.

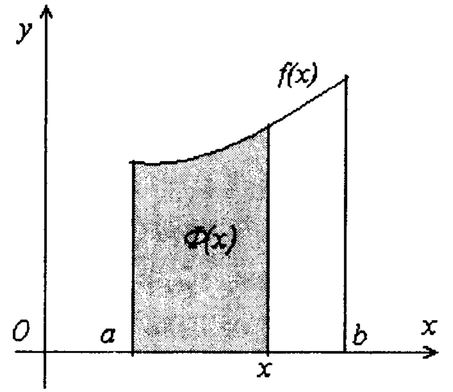
9-§. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral

$f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lsin. U holda bu funksiya har qanday $[a;x]\subset[a;b]$ da integrallanuvchi bo'ladi va $\int_a^x f(t)dt$

integral x ning $[a;b]$ dagi har bir qiymatiga aniq bir sonni mos qo'yadi. Demak, bu holda integral o'zining yuqori chegarasining funksiyasi bo'ladi:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ a\leq x\leq b.$$

Geometrik nuqtayi nazardan $f(t)\geq 0$ bo'lganda $\Phi(x)$ funksiya 6-rasmdagi egri chiziqli trapetsiyaning bo'yalgan qismining yuzini bildiradi.



6-rasm.

$\Phi(x)$ funksiyaning x bo'yicha, ya'ni aniq integralning yuqori chegarasi bo'yicha hosilasini topamiz.

Teorema. Uzluksiz funksiya aniq integralining yuqori chegarasi bo'yicha hosilasi mavjud va u integral ostidagi funksiyaning yuqori chegarasidagi qiymatiga teng:

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$$

Isboti. $x,\ x+\Delta x\in[a;b]$ lar uchun $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-$$

$\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ bo'ladi. O'rta qiymat haqidagi teoremaga ko'ra shunday $\xi\in[x;x+\Delta x]$ topiladiki, bu nuqtada

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x,\ \text{ya'ni}\ \Delta\Phi(x)=f(\xi)\Delta x$$

o'rinli bo'ladi. Bundan $\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi)$ kelib chiqadi. $\Delta x \to 0$ da $\xi \to x$ va $f(x)$ ning uzluksizligini nazarda tutsak,

$\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Bu tenglik $[a;b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $\Phi(x)$ mavjud ekanligini ko'rsatadi.

1-*misol.* $\Phi(x) = \int_3^x \sin t dt$ funksiya hosilasini toping.

Yechish. Yuqoridagi teoremaga ko'ra $\Phi'(x) = \sin x$ bo'ladi.

2-*misol.* $\Phi(x) = \int_1^{x^2} e^t dt$ funksiya hosilasini toping.

Yechish. Bu holda yuqori chegara x ning funksiyasidan iborat, shu sababli murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalanamiz:

$$\Phi'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{x^2}.$$

Endi quyi chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integralni qaraylik. Berilgan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo'lsin. U holda bu funksiya har qanday $[x;b] \subset [a;b]$, $a \le x \le b$ kesmada integrallanuvchi va uning integrali x ga bog'liq bo'ladi. Uni

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt$$

deb belgilaymiz. Aniq integral xossasiga ko'ra

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = \Phi(x) + F(x).$$

Bundan

$$F(x)=\int_a^b f(t)dt-\Phi(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik $F(x)$ funksiyaning xossalarini $f(x)$ hamda $\Phi(x)$ funksiyalarning xossalari orqali o'rganish mumkinligini ko'rsatadi. Jumladan, $F(x)$ funksiya $\Phi(x)$ kabi $[a;b]$ da hosilaga ega va

$$F'(x)=\left(\int_a^b f(t)dt-\hat{O}(x)\right)'=0-f(x)=-f(x)$$

bo'ladi.

10-§. Nyuton- Leybnis formulasi, aniq integralni hisoblash

10.1. Nyuton-Leybnis formulasi. Aniq integral bilan boshlang'ich funksiya orasida qanday bog'lanish mavjudligini ko'rib o'taylik.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz va $F(x)$ uning boshlang'ich funksiyalaridan biri bo'lsin: $F'(x)=f(x)$. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ham $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. U holda ma'lumki,

$$\Phi(x)=F(x)+C,\ C=\text{const}.$$

Demak,

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C.$$

Bunda $x=a$ deb olsak, $0=F(a)+C$ yoki $C=-F(a)$ kelib chiqadi. Demak,

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$$

Endi $x=b$ deb olsak,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (1)$$

bo'ladi, ya'ni $[a;b]$ *kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning aniq integrali shu funksiyaning boshlang'ich funksiyalardan birortasining bu kesmadagi orttirmasiga teng* bo'ladi.

(1) formula integral hisobning asosiy formulasi bo'lib, u *Nyuton-Leybnis formulasi* deyiladi.

(1) tenglikning o'ng tomonidagi, $F(b)-F(a)$ ayirma, odatda $F(x)\big|_a^b$ ko'rinishida yoziladi. Bu holda Nyuton-Leybnis formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Nyuton-Leybnis formulasi aniq integralni hisoblash masalasini aniqmas integralni hisoblash masalasiga olib keladi.

Misollar:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = ln|x|\,\big|_1^2 = ln2 - ln1 = ln2;$

b) $\int_0^\pi (1+sinx)dx = (x-cosx)\big|_0^\pi = (\pi - cos\pi)-(0-cos0) = \pi+1+1 = \pi+2;$

c) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{4+x}} = \int_0^5 (4+x)^{-\frac{1}{2}}d(4+x) = 2\sqrt{4+x}\,\big|_0^5 = 2(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 2;$

d) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}(e^0 - e^2) = \frac{e^2-1}{2}.$

10.2. Aniq integralni bo'laklab integrallash. Aniqmas integrallarni hisoblashda bo'laklab integrallash usuli asosiy usullardan biri edi. Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra, aniq integral bilan aniqmas integral orasida bog'lanish mavjud. Shu sababli bo'laklab integrallash usulini aniq integrallarni hisoblashda ham tatbiq qilish mumkin.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;b]$ da uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$(u\cdot v)'=u'v+uv'$$

bo'lib, $u(x)v(x)$ funksiya $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra $\int_a^b (u'v+uv')dx=(uv)\Big|_a^b$. Bundan

$$\int_a^b uv'dx=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b u'vdx$$

kelib chiqadi. So'ngra $uv'dx=udv$ va $u'vdx=vdu$ ekanligini e'tiborga olsak, natijada

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu \qquad (2)$$

aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi hosil bo'ladi.

Misol. $\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $u=x$, $dv=\cos xdx$ deb olsak, $du=dx$, $v=\sin x$ hosil bo'ladi.

Demak, (2) ga ko'ra

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx=\left(x\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi-2}{2}.$$

10.3. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Aniqmas integrallarni hisoblashda yangi o'zgaruvchi kiritish usuli bilan soddaroq integralga erishib, ushbu

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

munosabatdan foydalangan edik. Shunga o'xshash masalani aniq integral uchun ham ko'rib o'taylik.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz, $x=\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kemada uzluksiz differensiallanuvchi, $x=\varphi(t)$

funksiya qiymatlari to‘plami $[a;b]$ kesmadan iborat va $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz bo‘lgani uchun shu kesmada u boshlang‘ich funksiya $F(x)$ ga ega. Shartga ko‘ra $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo‘lganligi sababli Nyuton-Leybnits formulasiga ko‘ra

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta dF(\varphi(t)) =$$

$$= \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Shuni ta’kidlash kerakki, aniq integralni o‘zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan hisoblaganda integral ostidagi ifoda bilan bir qatorda integrallash chegaralari ham o‘zgaradi.

1-*misol.* $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ hisoblang.

Yechish. Bu integralda $x=sint$ almashtirishni bajaramiz. U holda $x=sint$ funksiya yuqoridagi teoremadagi barcha shartlarni $[0;\frac{\pi}{2}]$ kesmada qanoatlantiradi va $dx=costdt$, $a=0$ da $\alpha=0$, $b=1$ da $\beta=\pi/2$. Demak, (3) formulaga ko‘ra

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt =$$

$$=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

2-*misol.* $\int\limits_{0}^{9}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz, u holda $dx=2tdt$ va $a=0$ da $t_1=\sqrt{a}=0$, $b=9$ da $t_2=\sqrt{b}=3$ bo'ladi. (3) formulaga ko'ra

$$\int\limits_{0}^{9}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\limits_{0}^{3}\frac{2tdt}{1+t}=2\int\limits_{0}^{3}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2(t-\ln|1+t|)\Big|_0^3=6-2\ln 4.$$

3-*misol.* $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$ ni hisoblang.

Yechish. $sinx=t$ deb almashtirishni bajaramiz. U holda $cosxdx=dt$, $t_1=sin(\pi/6)=1/2$, $t_2=sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ bo'ladi. (3) formulaga asosan

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2}t^{-5}dt=-\frac{1}{4t^4}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}=\frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{9}\right)=\frac{32}{9}.$$

1. [0;1] kesma $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=1$ nuqtalar bilan 3 ta bo'lakka bo'lingan. Quyidagilarning qaysilari $y=x^2$ funksiyaning integral yig'indisi bo'ladi?

$A)\ 0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2});$ $B)\ 0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+1\cdot(1-\frac{1}{2});$

$C)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+1\cdot(1-\frac{1}{2});$ $D)\ \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+1\cdot(1-\frac{1}{2}).$

2. Quyidagilarning qaysi biri $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'la olmaydi? Bu yerda [1;3]; $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=2{,}5$, $x_3=3$

$A)\ f(1{,}5)\cdot(2-1)+f(2{,}1)\cdot(2{,}5-2)+f(3)\cdot(3-2{,}5);$

$B)\ f(1)\cdot(2-1)+f(2)\cdot(3-2)+f(3)\cdot(2{,}5-2);$

$C)\ f(1)\cdot(2-1)+f(2{,}5)\cdot(2{,}5-2)+f(3)\cdot(3-2{,}5);$

$D)\ f(1)\cdot(2-1)+f(2{,}6)\cdot(2{,}5-2)+f(3)\cdot(3-2{,}5).$

3. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Bo'linish nuqtalarining sonini oshirish natijasida quyi yig'indilar kamaymaydi;

B) Bo'linish nuqtalarining sonini oshirish natijasida yuqori yig'indilar o'smaydi;

C) Quyi yig'indi har qanday yuqori yig'indidan katta emas;

D) Quyi yig'indi integral yig'indidan katta.

4. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Chegaralangan funksiya integrallanuvchi bo'ladi;

B) Kesmada uzluksiz funksiya integrallanuvchi bo'ladi;

C) Kesmada monoton funksiya integrallanuvchi bo'ladi;

D) Integrallanuvchi funksiya chegaralangan bo'ladi.

5. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri to‘g‘ri?

A) Darbuning quyi yig‘indisi yuqori yig‘indidan katta emas;
B) Darbuning quyi yig‘indisi integral yig‘indi bo‘ladi;
C) Darbuning yuqori yig‘indisi integral yig‘indi bo‘ladi;
D) Integrallanuvchi funksiya uzluksiz bo‘ladi.

6. Quyidagi jumlalardan qaysi biri to‘g‘ri?

A) Agar $\int_a^b f(x)dx > 0$ bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)>0$ bo‘ladi;

B) Agar $\int_a^b f(x)dx = 0$ bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)=0$ bo‘ladi;

C) Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)>0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo‘ladi;

D) Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx > 0$ bo‘ladi.

7. Quyidagi jumlalardan qaysi biri to‘g‘ri?

A) Agar $\int_a^b f(x)dx > 0$ bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo‘ladi;

B) Agar $\int_a^b f(x)dx = 0$ bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)=0$ bo‘ladi;

C) Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ bo‘ladi;

D) Agar $\int_a^b f(x)dx \leq 0$ bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo‘ladi.

8. $\int_1^4 (1+5x+\frac{3\sqrt{x}}{2})dx$ **ni hisoblang.**

A) 43,5; B) 47,5;
C) 47; D) 48,5;

9. $\int_0^{1/9} \frac{9dx}{3\sqrt{x}+1}$ **ni hisoblang.**

A) 2(1–ln2); B) 2+ln4;
C) ln0,5; D) 1+ln2;

10. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{tgx}{\sin 2x} dx$ **ni hisoblang.**

A) 1; B) $1.\sqrt{2}$;
C) $1.\sqrt{3}$; D) $\sqrt{3}$.

11. ***f*****(*****x*** **=*****sinx*** **funksiyaning [0;π] da o'rta qiymatini toping.**

A) π; *B*) 0; *C*) $\frac{2}{\pi}$; *D*) $\frac{\pi}{2}$.

12. *f*(*x*)=2*x*²+1 funksiyaning [0;1] kesmadagi o'rta qiymatini toping.

A) 1; B) 2;
C) 5/3; D) 3/5;

13. Agar $a=\int_0^1 e^x dx$, $b=\int_0^1 e^{\sin x} dx$, $c=\int_0^1 e^{tgx} dx$ **bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri o'rinli?**

A) $a<b<c$; B) $c<b<a$;
C) $a<b<c$; D) $b<a<c$.

14. $f(x)=\sqrt{x}$ **funksiyaning [1,4] da o'rta qiymatini toping.**

A) 2; B) $\frac{7}{6}$; C) 3; D) $\frac{14}{9}$.

15. Quyidagi munosabatlardan qaysi biri o'rinli?

A) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$; B) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$;

C) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b f(|x|)dx$; D) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \ge \int_a^b |f(x)|dx$.

16. $\int_a^x \frac{1}{1+t^2}dt$ **integralning hosilasi quyidagi funksiyalardan qaysi biriga teng bo'ladi?**

A) $arctgx$; B) $\frac{1}{x^2}$; C) $\frac{1}{1+x^2}$; D) $-\frac{1}{1+x^2}$.

XI BOB. XOSMAS INTEGRALLAR

$[a;b]$ oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning aniq integrali tushunchasini kiritib, batafsil o'rgandik. Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, integralning bayonida oraliqning chekliligi va $f(x)$ ning chegaralanganligi bevosita ishtirok etdi.

Endi avvalgi integral tushunchasini ma'lum ma'nolarda umumlashtirish imkoniyati bormikan, degan savol tug'uladi. Albatta, umumlashtirish shunday bo'lishi kerakki, natijada Riman integralining asosiy xossalari o'z kuchini saqlab qolsin. Ba'zi hollarda aniq integral tushunchasini cheksiz oraliqda aniqlangan funksiya yoki chegaralanmagan funksiya uchun umumlashtirishga to'g'ri keladi. Biz hozir ana shunday umumlashgan (yoki xosmas) integrallarni kiritamiz va o'rganamiz.

1-§. Integrallash sohasi chegaralanmagan xosmas integral

$f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ cheksiz oraliqda aniqlangan bo'lib, uning har qanday $[a;\ t]$ chekli qismida integrallanuvchi bo'lsin, ya'ni ixtiyoriy t $(t>a)$ uchun ushbu

$$\int_a^t f(x)dx$$

integral mavjud bo'lsin. Bu integral berilgan $f(x)$ funksiya uchun faqat t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t), \qquad t \in [a;+\infty).$$

1-ta'rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty)$ oraliqdagi *xosmas integrali* deyiladi va u $\int_a^\infty f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

2-ta'rif. Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, (1) xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, $f(x)$ funksiya esa cheksiz $[a;+\infty)$ *oraliqda integrallanuvchi funksiya* deb ataladi.

Agar $t \to +\infty$ da $F(t)$ ning limiti cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, (1) *xosmas integral uzoqlashuvchi* deyiladi.

1-*misol.* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Agar $\alpha \neq 1$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_1^{t} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^t = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(t^{1-\alpha} - 1),$$

Demak,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha}, & \forall \alpha > 1, \\ \infty, & \forall \alpha < 1. \end{cases}$$

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_1^{t} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} \ln|x| \Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} \ln t = \infty.$$

Demak, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ integral $\alpha > 1$ da yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ da uzoqlashuvchi ekan.

2-*misol.* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx$, $a > 0$ ni hisoblang.

Yechish. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_0^{t} e^{-ax} dx = \lim\limits_{t \to +\infty} \left. \dfrac{-e^{-ax}}{a} \right|_0^t =$

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{-e^{-at}}{a} + \frac{e^0}{a} \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{ae^{at}} \right) = \frac{1}{a}.$$

Funksiyaning $(-\infty; b]$ oraliq bo'yicha xosmas integrali ham yuqoridagi kabi ta'riflanadi.

$f(x)$ funksiya $(-\infty;b]$ da berilgan bo'lib, bu oraliqning istalgan $[r;b]$ qismida integrallanuvchi, ya'ni

$$\int_r^b f(x)dx = \Phi(r)$$

mavjud bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $r \to -\infty$ da $\Phi(r)$ funksiyaning limiti $\lim\limits_{r\to-\infty} \Phi(r)$ mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning $(-\infty;b]$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va u $\int_r^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{r\to-\infty} \Phi(r) = \lim_{r\to-\infty}\int_r^b f(x)dx \qquad (2)$$

4-ta'rif. Agar $r \to -\infty$ da $\Phi(r)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, (2) xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, $f(x)$ esa cheksiz $(-\infty;b]$ oraliqda integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Agar $r \to -\infty$ da $\Phi(r)$ ning limiti cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, (2) integral uzoqlashuvchi deyiladi.

3-*misol.* $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $t \to +\infty$ da

$$F(t) = \int_0^t \cos x dx = \sin t$$

funksiya limitga ega emas.

4-*misol.* $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}arctgx\Big|_r^0=\lim_{r\to-\infty}(arctg0-arctgr)=\frac{\pi}{2}.$$

Demak, integral yaqinlashuvchi va

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}.$$

Aytaylik, *f(x)* funksiya (-∞;+∞) da uzluksiz bo'lsin. U holda biror $c\in(-\infty;+\infty)$ uchun $\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$ va $\int_{-\infty}^{c}f(x)dx$ integrallar yig'indisi bu funksiyaning ikkala integrallash chegaralari ham cheksiz bo'lgan xosmas integrali deyiladi va quyidagicha yoziladi: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$. Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$$

va ta'rif bo'yicha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{c}f(x)dx+\lim_{t\to\infty}\int_{c}^{t}f(x)dx \qquad (3)$$

deb qabul qilamiz.

Agar (3) dagi ikkala limit ham mavjud va chekli bo'lsa, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

5-*misol.* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

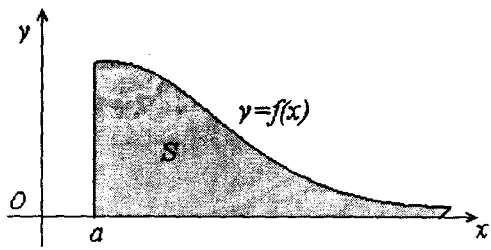
Yechish. (3) formulada c=0 deb olamiz. U holda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{r\to-\infty}\int_{r}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$= \lim_{r\to-\infty} arctgx\Big|_r^0 + \lim_{t\to+\infty} arctgx\Big|_0^t = \lim_{r\to-\infty}(arctg0 - arctgr) +$$

$$+ \lim_{t\to+\infty}(arctgt - arctg0) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi.$$

Geometrik nuqtayi nazardan yaqinlashuvchi $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral $y=f(x)\geq 0$ egri chiziq, $x=a$, $y=0$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan va Ox o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli S yuzaga ega ekanligini anglatadi (7-rasm). Shunga o'xshash, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ va $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi xosmas integrallarga ham geometrik talqin berish mumkin.



7-rasm.

2-§. Xosmas integralning xossalari

Yuqorida kiritilgan xosmas integrallar aniq integrallarga o'xshash xossalarga ega:

1^0. Agar $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi va k-o'zgarmas son bo'lsa, $\int\limits_a^{+\infty} kf(x)dx$ ham yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2^0. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty} (f(x) \pm \varphi(x))dx$ yaqinlashuvchi va

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Izoh. Berilgan integrallarning yaqinlashuvchiligi yetarli shart bo‘lib, funksiyalar yig‘indisining integrali yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun zaruriy shart emas. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad x \in [1;+\infty)$$

bo‘lsin. U holda

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x+1}dx = -\lim_{t\to+\infty} \ln|x+1|\Big|_1^t = -\lim_{t\to+\infty}[\ln(t+1) - \ln 2] = -\infty.$$

Demak, qaralayotgan xosmas integrallar uzoqlashuvchi bo‘ladi. Funksiyalar yig‘indisi uchun esa

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{t\to+\infty} (\ln|x| - \ln|x+1|)\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln(t+1) + \ln 2) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \ln\frac{t}{t+1} + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$$

yaqinlashuvchi xosmas integral bo‘ladi.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, agar integrallardan biri yaqinlashuvchi bo‘lib, ikkinchisi uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm \varphi(x))dx$$

xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3^0. Agar $f(x)$ ning $[a;+\infty\ )$ bo‘yicha $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integrali yaqinlashuvchi bo‘lsa, bu funksiyaning $[b;+\infty)$ $(a<b)$ oraliq bo‘yicha $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ integrali ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bunda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$

o‘rinli bo‘ladi.

4^0. Agar $x \in [a;+\infty)$ uchun $f(x) \geq 0$ va bu funksiyaning xosmas integrali yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

bo‘ladi.

5^0. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;+\infty)$ da aniqlangan, uzluksiz va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda

a) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lganda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi;

b) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yzoqlashuvchi bo‘lganda $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol tariqasida 5^0-xossaning isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta’riflaridan kelib chiqadi.

5^0-xossaning isboti. Aniq integralning xossalariga ko'ra ixtiyoriy $t > a$ uchun $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$.

Agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx < +\infty$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. Demak, $F(t)$ funksiya yuqoridan chekli son bilan chegaralangan. Shuningdek, $f(x) \ge 0$ bo'lgani uchun $F(t)$ funksiya o'suvchi bo'ladi. Bulardan chekli limitning $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$ mavjudligi, ya'ni $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Aksincha, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^t f(x)dx \le \int_a^t \varphi(x)dx$ tengsizligidan $t\to+\infty$ da chap tomoni chegaralanmagan va bundan o'ng tomonining limiti chekli emasligi, ya'ni $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

6-*misol.* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. 5^0-xossadan foydalanamiz. Berilgan integralni $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ integral bilan solishtiramiz, bu integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi (1-misol). $(1;+\infty)$ da

$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$ bo'lganligi sababli, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ integralning yaqinlashishidan berilgan $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

3-§. Absolut yaqinlashuvchi integrallar

Quyida xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli shartini isbotsiz keltiramiz [2, 210-b.].

1-teorema (Koshi teoremasi). Quyidagi

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, shunday t_0 $(t_0>a)$ soni topilib, $t' > t_0$, $t''> t_0$ bo'lgan ixtiyoriy t', t'' lar uchun

$$\left| \int\limits_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ushbu teoremadan xosmas integrallarning yaqinlashuvchiligini aniqlashda foydalanish qiyin, ammo bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega va undan quyidagi teoremani isbot qilishda foydalanamiz.

2-teorema. Agar $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ yaqinlashuvchi integral. 1-teoremaga asosan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, shunday t_0 $(t_0>a)$ soni topiladiki,

$t' > t_0$, $t''> t_0$ $(t''>t')$ bo'lganda $\int_{t'}^{t''}|f(x)|dx < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Ammo

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| \le \int_{t'}^{t''}|f(x)|dx .$$

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, shunday t_0 $(t_0>a)$ soni topiladiki, $t' > t_0$, $t''> t_0$ bo'lganda $\left|\int_{t'}^{t''} f(x)dx\right| <\varepsilon$ bo'ladi. 1-teoremaga asosan $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

1-ta'rif. Agar $\int_a^{+\infty} | f(x) | dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *absolut yaqinlashuvchi xosmas integral* deyiladi, *f(x)* funksiya esa $[a;+\infty)$ oraliqda *absolut integrallanuvchi funksiya* deb ataladi.

2-ta'rif. Agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lib, $\int_a^{+\infty} | f(x) | dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral *shartli yaqinlashuvchi* deyiladi.

Misol. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Avval $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integralni tekshiramiz. $(1;+\infty)$ da $\frac{|\sin x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ va $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, 5^0-xossaga ko'ra $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^2}dx$ integral yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ integral absolut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagi xossalarni $\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx$ integral uchun ham bayon qilish mumkin.

4-§. Xosmas integrallarni hisoblash

Endi xosmas integrallarni hisoblash bilan shug'ullanamiz.

a) Nyuton-Leybnis formulasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da uzluksiz bo'lsin. Xosmas integral ta'rifi va Nyuton-Leybnis formulasidan

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{a}^{t}f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}(F(t)-F(a))$$

kelib chiqadi va bunda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Agar $t\to+\infty$ da $F(t)$ ning limiti chekli bo'lsa, bu limitni $F(t)$ ning $+\infty$ dagi qiymati deb qabul qilishimiz mumkin, ya'ni

$$\lim_{t\to+\infty}F(t)=F(+\infty).$$

Bundan esa, $f(x)$ funksiya xosmas integrali uchun Nyuton-Leybnis formulasi o'rinli bo'lishi kelib chiqadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

b) bo'laklab integrallash. Aytaylik, $u(x)$ va $v(x)$ har biri $[a;+\infty)$ da uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Agar $\int_a^{+\infty} v(x)du(x)$ xosmas integral yaqinlashuvchi va

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = u(+\infty), \quad \lim_{t\to+\infty} v(t) = v(+\infty)$$

limitlar chekli bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} u(x)dv(x)$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)du(x).$$

Misol. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ xosmas integralni hisoblang.

Yechish. Bo'laklab integrallash usulidan foydalanamiz. U holda

$u(x)=x,\qquad dv(x)=e^{-x}dx,\qquad du(x)=dx,\qquad v(x)=-e^{-x},$

$$(u(x)v(x))\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0,$$

$\int_0^{+\infty} v(x)du(x) = \int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx = \lim_{t\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^t = 0-1=-1$ bo'ladi va demak,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 0-(-1)=1.$$

d) o'zgaruvchini almashtirish. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;+\infty)$ da berilgan bo'lsin. Quyidagi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralda $x=\varphi(t)$ almashtirish kiritamiz. Bunda

(1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;+\infty)$ da berilgan va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega;

(2) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;+\infty)$ da qat'iy o'suvchi;

(3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(+\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$ bo'lsin.

U holda $\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ yaqinlashuvchi bo'lishidan $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchiligi va $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

5-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali

Aniq integral mavjudligining zaruriy sharti integral ostidagi funksiyaning chegaralanganligi edi.

Endi $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da chegaralanmagan bo'lsin. Aniqrog'i, ixtiyoriy $\varepsilon>0$, $(\varepsilon<b-a)$ uchun $f(x)$ funksiya $[a;b-\varepsilon]$ da chegaralangan va integrallanuvchi bo'lib, b nuqtaning atrofidagina chegaralanmagan bo'lsin. Bu holda b nuqta $f(x)$ funksiyaning *maxsus nuqtasi* deb ataladi.

Demak, ixtiyoriy t $(a<t<b)$ uchun $\int\limits_{a}^{t} f(x)dx$ integral mavjud bo'lib, u faqat t o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\int\limits_{a}^{t} f(x)dx=F(t),\ a<t<b.$$

1-ta'rif. Agar $t\to b-0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va u $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} F(t) = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx.$$

Agar $t\to b$-0 da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib, u chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, $f(x)$ funksiya esa $[a;b)$ da integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

Agar $t\to b$-0 da $F(t)$ funksiyaning limiti cheksiz bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqorida limit mavjud bo'lmagan holda ham biz xosmas integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Xuddi yuqoridagidek, a nuqta $f(x)$ ning maxsus nuqtasi bo'lganda $(a;b]$ oraliq bo'yicha xosmas integral ta'riflanadi.

$f(x)$ funksiya $(a;b]$ oraliqda berilgan bo'lib, a nuqta shu funksiyaning maxsus nuqtasi bo'lsin. Bu funksiya $(a;b]$ning istalgan $[t;b]$ $(a<t<b)$ qismida integrallanuvchi, ya'ni ushbu

$$\int_t^b f(x)dx = F(t)$$

integral mavjud bo'lsin.

2-ta'rif. Agar $t\to a+0$ da $F(t)$ funksiyaning $\lim\limits_{t\to a+0} F(t)$ limiti mavjud bo'lsa, bu limit chegaralanmagan $f(x)$ funksiyaning $(a;b]$ oraliqdagi xosmas integrali deb ataladi va u $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+0} F(t) = \lim_{t\to a+0} \int_t^b f(x)dx.$$

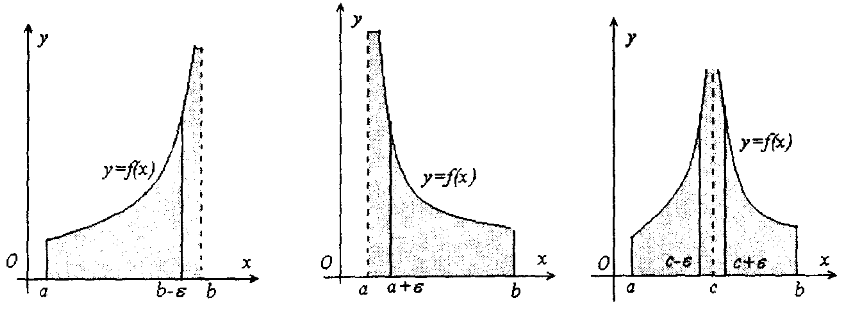
Agar $t\to a+0$ da $F(t)$ funksiyaning limiti mavjud va chekli bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, $f(x)$ esa $(a;b]$ da integrallanuvchi funksiya deyiladi. Agar $t\to a+0$ da $F(t)$ ning limiti cheksiz bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. Yuqoridagi limit mavjud bo'lmagan holda ham biz integralni uzoqlashuvchi deymiz.

Agar *f(x)* funksiya *[a;b]* kesmaning biror ichki *c* nuqtasida $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ bo'lsa, u holda aniq integralning additivlik xossasiga o'xshash integralni ikkita integralning yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{t\to c-0}\int_a^t f(x)dx+\lim_{\tau\to c+0}\int_\tau^b f(x)dx.$$

Agar tenglikning o'ng tomonidagi limitlar mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Geometrik nuqtayi nazardan chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali $y=f(x)$ egri chiziq, $y=0$, $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan va $x\to b-0$ da ($x\to a+0$, $x\to c\pm 0$) *Oy* o'qi yo'nalishida cheksiz cho'zilgan figuraning chekli yuzga ega ekanligini anglatadi (8-rasm).



8-rasm.

1-*misol.* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda $x=0$ nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir. Bu holda ta'rif bo'yicha

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0+0} 2\sqrt{x}\,\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0}(2-2\sqrt{t}) = 2\,.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va uning qiymati 2 ga teng.

2-*misol.* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bunda $x=1$ nuqta integral ostidagi funksiyaning maxsus nuqtasidir.

Bu holda

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}(-2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^t = \lim_{t\to 1-0}(-2\sqrt{1-t}+2) = 2.$$

Demak, bu integral ham yaqinlashuvchi.

3-*misol.* $\int_0^1 \frac{dx}{\tilde{o}}$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0+0} \ln|x|\,\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0+0}(\ln 1 - \ln t) = +\infty,$$

ya'ni bu xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-*misol.* $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R},\ a<b$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ikki holatni qaraymiz. 1-hol. $\alpha\neq 1$ bo'lsin. U holda

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t (b-x)^{-\alpha}d(b-x) =$$

$$= -\lim_{t\to b-0}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^t = -\frac{1}{1-\alpha}\lim_{t\to b-0}((b-t)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}) =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha<1,\\ \infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

2-hol. α=1 bo‘lsin. U holda $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)}=\lim\limits_{t\to b-0}\int\limits_a^t \frac{dx}{(b-x)}=$

$$=-\lim_{t\to b-0}\ln|b-x|\Big|_a^t=-\lim_{t\to b-0}(\ln|b-t|-\ln|b-a|)=+\infty.$$

Demak, $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral α<1 bo‘lganda yaqinlashuvchi, α≥1 da uzoqlashuvchi bo‘lar ekan.

6-§. Chegaralanmagan funksiya xosmas integralining xossalari

Quyida maxsus nuqtasi b bo‘lgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliq bo‘yicha olingan $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integralining xossalarini keltiramiz. Bu xossalarni maxsus nuqtasi a bo‘lgan funksiyaning $(a;b]$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integrallari uchun ham bayon qilish mumkin.

1^0. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ dagi xosmas integrali yaqinlashuvchi bo‘lsa, bu funksiyaning $[c;b)$, $(a<c<b)$ oraliq bo‘yicha integrali ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2^0. Agar $\int\limits_a^b f(x)dx$ va $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy α, β sonlar uchun

$$\int_a^b(\alpha f(x)\pm\beta\varphi(x))dx$$

integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b(\alpha f(x)\pm\beta\varphi(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b\varphi(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3^0. Agar $\int_a^b f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ bo'ladi.

4^0. Agar $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b \varphi(x)dx$ integrallar yaqinlashuvchi bo'lib, $[a;b)$ da $f(x)\leq\varphi(x)$ bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b\varphi(x)dx$ bo'ladi.

5^0. $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;b)$ da uzluksiz bo'lib, b esa ularning maxsus nuqtasi va $0\leq f(x)\leq\varphi(x)$, $x\in[a;b)$ bo'lsin. U holda

a) $\int_a^b\varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) $\int_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b\varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misol tariqasida 3^0 xossaning isbotini keltiramiz. Qolgan xossalar bevosita xosmas integral va uning yaqinlashuvchiligi ta'riflaridan kelib chiqadi.

3^0 xossaning isboti. Aniq integralning xossalariga asosan $f(x)\geq 0$ bo'lsa, ixtiyoriy $t\in[a;b)$ uchun $\int_a^t f(x)dx\geq 0$ bo'ladi.

Bundan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx \geq 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

7-§. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integralini hisoblash

Endi chegaralanmagan funksiyaning xosmas integralini hisoblash bilan shug'ullanamiz.

a) Nyuton-Leybnis formulasi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b)$ da uzluksiz bo'lsin. Ma'lumki, bu holda shu oraliqda uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ mavjud bo'ladi.

Agar $x\to b\text{-}0$ da $F(x)$ ning chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitni $F(x)$ ning b nuqtadagi qiymati deb qabul qilamiz, ya'ni

$$\lim_{x\to b-0} F(x)=F(b).$$

Xosmas integral ta'rifi va aniq integrallar uchun Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanib,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to b-0} (F(t)\text{-}F(a)) = F(a)\text{-}F(b) = f(x)\Big|_a^b$$

ni topamiz. Bu esa, yuqoridagi kelishuv asosida, $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali uchun Nyuton-Leybnis formulasi o'rinli bo'lishini ko'rsatadi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)\text{-}F(a);$$

b) bo'laklab integrallash.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri $[a;b)$ da uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega, b nuqta esa $v(x)u'(x)$ va $u(x)v'(x)$ funksiyalarning maxsus nuqtasi bo'lsin.

Agar $\int_a^b v(x)du(x)$ xosmas integral yaqinlashuvchi va ushbu $\lim\limits_{t\to b-0} u(t)v(t)$ limit chekli bo'lsa, u holda $\int_a^b u(x)dv(x)$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'lib,

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunda

$$u(b)v(b) = \lim_{t\to b-0} u(t)v(t).$$

d) o'zgaruvchini almashtirish.

$f(x)$ funksiya $[a;b)$ da berilgan bo'lib, b uning maxsus nuqtasi bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integralni ko'rib chiqaylik. Ushbu integralda $x=\varphi(t)$ almashtirishni bajaramiz, bunda $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta)$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(t) > 0$ hosilaga ega hamda $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} \beta(t) = b$. Bu holda agar $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqorida biz maxsus nuqtasi b bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $[a;b)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integralini hisoblash usullarini ko'rib o'tdik. Bu usullarni maxsus nuqtasi a bo'lgan funksiyaning $(a;b]$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integralini hisoblashda ham qo'llash mumkin.

1-*misol*: $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ ni hisoblang.

Yechish. Ushbu integralda $x=\varphi(t)=t^2$ almashtirishni bajaramiz. Aniqki, $\varphi(t)$ funksiya $(0;1]$ oraliqda $\varphi'(t)=2t>0$ uzluksiz hosilaga ega va $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. Demak,

$$I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\limits_0^1 \frac{2tdt}{(1+t^2)t}=2\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=2\,arctgt\Big|_0^1=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Chegarasi cheksiz bo‘lgan xosmas integraldagi kabi chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali uchun ham absolut yaqinlashish tushunchasini kiritish mumkin.

$(a;b]$ da aniqlangan va a nuqta maxsus nuqtasi bo‘lgan $f(x)$ funksiya uchun $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ absolut yaqinlashuvchi xosmas integral deyiladi, $f(x)$ funksiya esa $(a;b]$ da absolut integrallanuvchi funksiya deb ataladi.

XI bobga doir test savollari

1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ **ni hisoblang.**

A) 0,5; B) 1/3; C) 0,25; D) uzoqlashuvchi.

2. $\int\limits_{0}^{1}x\ln x dx$ **xosmas integralni hisoblang.**

A) 0,5; B) –0,5; C) - 0,25; D) uzoqlashuvchi.

3. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$ **xosmas integralni hisoblang.**

A) 5; B) 3; C) 1; D) -3.

4. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ **xosmas integralni yaqinlashishiga tekshiring.**

A) yaqinlashuvchi, -6; B) yaqinlashuvchi, 6;

C) uzoqlashuvchi; D) yaqinlashuvchi, $\frac{3}{7}$.

5. To'g'ri jumlani toping:

A) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$ integral $\alpha<1$ da yaqinlashuvchi;

B) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$ integral $\alpha\geq 1$ da yaqinlashuvchi;

C) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$ integral $\alpha>1$ da yaqinlashuvchi;

D) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^{\alpha}}$ $\alpha\leq 0$ da uzoqlashuvchi.

6. To‘g‘ri xulosalarni ko‘rsating:

Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $[a;+\infty)$ da aniqlangan, uzluksiz va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda

1) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo‘lganda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi;

2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lganda $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi;

3) $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘lganda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo‘ladi;

4) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ yaqinshuvchi bo‘lganda $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

A) 1 va 2; B) 1 va 3; C) 2 va 3; D) 3 va 4.

7. To‘g‘ri jumlani toping:

A) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha<1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \geq 1$ da uzoqlashuvchi bo‘ladi;

B) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha \leq 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha>1$ da uzoqlashuvchi bo‘ladi;

C) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha>1$ bo‘lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \leq 1$ da uzoqlashuvchi bo‘ladi;

D) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ integral $\alpha \geq 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha < 1$ da uzoqlashuvchi bo'ladi.

8. Noto'g'ri xulosalarni ko'rsating:

f(x) va *φ(x)* funksiyalar $[a;b)$ da uzluksiz bo'lib, b esa ularning maxsus nuqtasi va $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, $x \in [a;b)$ bo'lsin. U holda

1) $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi;

3) $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

A) 1 va 2; B) 1 va 3; C) 2 va 3; D) 3 va 4.

9. Yaqinlashuvchi integrallarni ko'rsating:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{\cos x}{x^2}dx$; 4) $\int\limits_9^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx$

A) 1 va 4; B) 1 va 2; C) 1 va 3; D) barchasi.

10. Uzoqlashuvchi integrallarni ko'rsating:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$;

3) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\sin x}{x^2} dx$; 4) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$

A) 1 va 4; B) 1 va 2; C) 1 va 3; D) barchasi.

11. Yaqinlashuvchi integrallarni ko'rsating:

1) $\int_0^{1} \frac{1}{1-x} dx$; 2) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$;

3) $\int_{-4}^{-2} \frac{3}{\sqrt[5]{x+2}} dx$; 4) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+x)^2} dx$

A) 1 va 4; B) 1 va 2;
C) 2 va 3; D) barchasi.

12. Uzoqlashuvchi integrallarni ko'rsating:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2+x)^3} dx$;

3) $\int_{-4}^{5} \frac{1}{\sqrt{4+x}} dx$; 4) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x} dx$

A) 1 va 4; B) 1 va 2;
C) 1 va 3; D) barchasi.

1-§. Yuza tushunchasining ta'rifi. Kvadratlanuvchi soha. Yuzaning additivligi

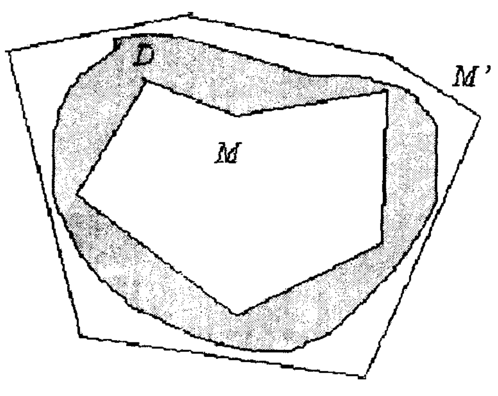
Tekislikda yopiq chiziq bilan chegaralangan D tekis figura (soha) berilgan bo'lsin (9-rasm). M bu figuraga ichki chizilgan, M' esa tashqi chizilgan ko'pburchak bo'lsin. Ularning yuzalarini mos ravishda σ va σ' deb belgilaymiz. Aniqki, bunday ko'pburchaklar cheksiz ko'p bo'ladi. Ixtiyoriy M ko'pburchak M' ning qism to'plami bo'lib, $\sigma \leq \sigma'$ bo'ladi. Agar biror M' ko'pburchakga va uning σ' yuziga qarasak, barcha $M \subset D$ ko'pburchaklar uchun ularning yuzlari $\{\sigma\}$ sonlar to'plami yuqoridan ana shu o'zgarmas σ' son bilan chegaralangan bo'ladi. Demak, $\{\sigma\}$ sonlar to'plamining aniq yuqori chegarasi mavjud va

$$\sup_{M \subset D} \sigma \leq \sigma' .$$

Shunga o'xshash biror M va σ ni o'zgarmas deb qabul qilsak, $\{\sigma'\}$ sonlar to'plami quyidan chegaralangan bo'lib,

$$\inf_{M' \supset D} \sigma' \geq \sigma$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.



9-rasm.

Agar $\sup\sigma = \overline{S}$ va $\inf\sigma' = \underline{S}$ belgilarni kiritsak, ixtiyoriy M, σ va M', σ' lar uchun

$$\sigma \le \overline{S} \le \underline{S} \le \sigma' \qquad (1)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

1-ta'rif. Agar berilgan D figura uchun $\overline{S} = \underline{S}$ bo'lsa, D figura yuzaga ega yoki kvadratlanuvchi deyiladi va uning yuzi aynan shu

$$S = \overline{S} = \underline{S}$$

songa teng deb qabul qilinadi.

Misol: D figuraning o'zi ko'pburchak bo'lsa, ravshanki $\overline{S} = \underline{S}$ bo'ladi.

1-teorema. D tekis figura kvadratlanuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday M ($\grave{I} \subset D$) va M' ($\grave{I}' \supset D$) lar mavjud va ularning yuzlari uchun

$$\sigma' - \sigma < \varepsilon$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. *Zarurligi*. $S = \overline{S} = \underline{S}$ bo'lsin. Yuqori va quyi chegaralar ta'riflaridan foydalansak, $\frac{\varepsilon}{2}$ uchun shunday M, σ, va M', σ' lar topiladiki, ular uchun $\sigma > S - \frac{\varepsilon}{2}$, $\quad \sigma' < S + \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\sigma' - \sigma < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kelib chiqadi.

Yetarliligi. Endi ε>0 uchun shunday M, σ va M', σ' lar mavjud bo'lib,

$$\sigma' - \sigma < \varepsilon$$

o'rinli bo'lsin. U holda (1) ga ko'ra

$$\underline{S} - \overline{S} \le \sigma' - \sigma < \varepsilon$$

bo'ladi, bunda $\underline{S}$ va $\overline{S}$ lar o'zgarmas sonlar. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy ekanligini e'tiborga olsak, $\overline{S} = \underline{S}$ tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar D yopiq va chegaralangan soha bo'lib, yopiq va kvadratlanuvchi D_1 va D_2 sohalarga bo'lingan bo'lsa va ularning umumiy ichki nuqtalari bo'lmasa, u holda D soha ham kvadratlanuvchi bo'lib, uning S yuzi D_1 va D_2 sohalarning S_1 va S_2 yuzlari yig'indisiga teng bo'ladi.

Isboti. $M_1 \subset D_1$, $M_2 \subset D_2$ va bu ko'pburchaklarning yuzalari mos ravishda σ_1 va σ_2 bo'lsin. Shuningdek, $M_1' \supset D_1$, $M_2' \supset D_2$ va ularning yuzlari mos ravishda σ_1' va σ_2' bo'lsin (10-rasm).

$$M = M_1 \cup M_2,\ M' = M_1' \cup M_2'$$

yangi ikkita ko'pburchak hosil qilib, ularning yuzalarini σ va σ' kabi belgilaymiz. Ravshanki,

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma \le \sigma' = \sigma_1' + \sigma_2'.$$

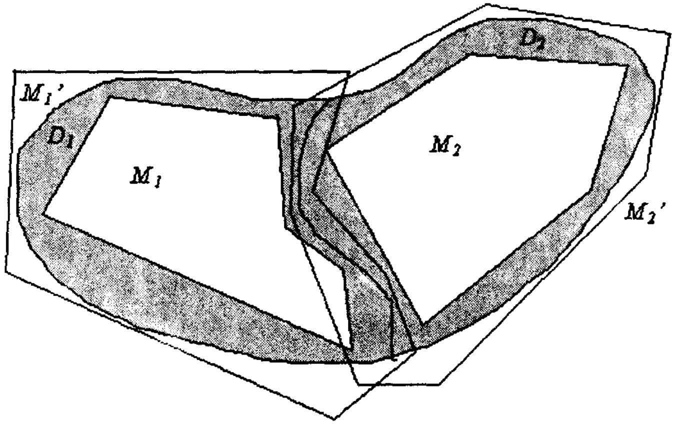
1-teoremaga asosan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ da shunday M_1, M_1' va M_2, M_2' ko'pburchaklar mavjudki, ularning yuzalari uchun

$$\sigma_1' - \sigma_1 < \frac{\varepsilon}{2},\ \sigma_2' - \sigma_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan

$$(\sigma_1' + \sigma_2') - (\sigma_1 + \sigma_2) < \varepsilon,$$

ya'ni $\sigma' - \sigma < \varepsilon$ kelib chiqadi.



10-rasm.

Demak, shunday $M \subset D$ va $M' \supset D$ lar topiladiki, ularning yuzalari uchun $\sigma' - \sigma < \varepsilon$ bo'ladi. 1-teoremaga ko'ra bundan D kvadratlanuvchi soha bo'lishi kelib chiqadi.

Endi D ning yuzasini topamiz. Quyidagi

$$\sigma_1 \leq S_1 \leq \sigma_1', \quad \sigma_2 \leq S_2 \leq \sigma_2'$$

munosabatlardan

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \leq S_1 + S_2 \leq \sigma_1' + \sigma_2' = \sigma'$$

kelib chiqadi. Bundan

$$\sigma \leq S \leq \sigma', \quad \sigma' - \sigma < \varepsilon$$

ekanligini nazarda tutsak,

$$|(S_1 + S_2) - S| < \sigma' - \sigma < \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. ε son ixtiyoriy bo'lgani uchun

$$S = S_1 + S_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqorida isbot qilingan teorema *yuzaning additivlik xossasi*ni bildiradi va u yuzaning additivligi haqidagi teorema deb ataladi.

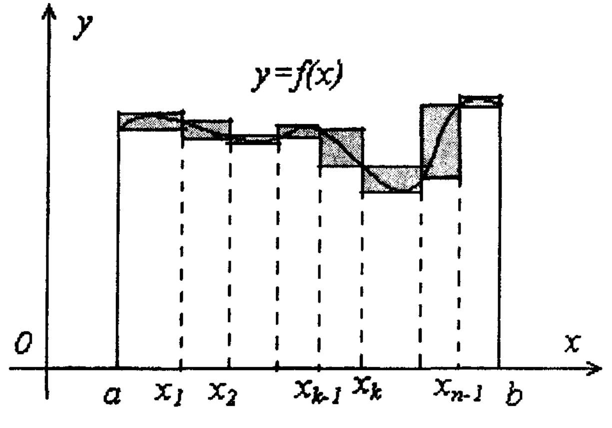
2-§. Yuzani hisoblash formulalalari

Faraz qilaylik, $x=a$, $x=b$, $y=0$ to'g'ri chiziqlar va $y=f(x)$ nomanfiy uzluksiz funksiya grafigi bilan chegaralangan D tekis figura berilgan bo'lsin. Biz shu figuraning yuzasini hisoblaymiz. Buning uchun $[a;b]$ kesmaning biror τ_n bo'linishini olamiz:

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b.$$

$f(x)$ ning $[x_{k-1},x_k]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m_k va M_k bo'lsin. Har bir $[x_{k-1},x_k]$ ga mos, asosi shu kesmadan iborat bo'lgan, balandliklari esa $y=m_k$ va $y=M_k$ bo'lgan ikkitadan to'g'ri to'rtburchaklar yasaymiz (11-rasm).

Barcha to'rtburchaklarning kichiklaridan (balandliklari m_k) iborat bo'lgan ko'pburchak D figuraga ichki chizilgan ko'pburchak bo'lib, katta to'rtburchaklardan iborat ko'pburchak tashqi chizilgan bo'ladi. Ularning yuzalari mos ravishda



11-rasm.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \underline{S}(\tau_n), \quad \sigma' = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \overline{S}(\tau_n)$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya uzluksiz, bundan uning integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Demak,

$$\sup \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(\tau_n) = \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}(\tau_n) = \inf \sigma' \quad (\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k),$$

ya'ni D figura (egri chiziqli trapetsiya) kvadratlanuvchi va uning yuzasi

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

bo'ladi.

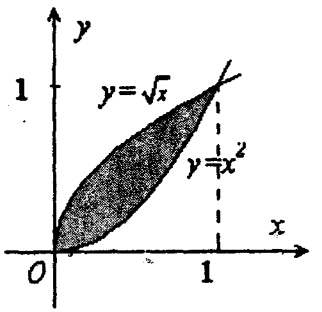
Agar yuqoridagi D figura quyidan $y=0$ to'g'ri chiziq o'rniga $y=\varphi(x)$ $(\varphi(x)\le f(x),\quad x\in[a;b])$ chiziq bilan chegaralangan bo'lib, $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda

$$S=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx$$

bo'ladi.

Misol. $y=x^2$ va $x=y^2$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

Yechish. Berilgan figura yuqoridan $y=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 1$ chiziq bilan, quyidan esa $y=x^2,\quad 0\le x\le 1$ chiziq bilan chegaralangan (12-rasm). Shuning uchun



12-rasm.

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\bigg|_0^1-\frac{1}{3}x^3\bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Egri chiziqli trapetsiyadagi egri chiziq parametik usulda $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ berilgan bo'lsin, bunda $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $[\alpha;\beta]$ kesmada $\psi(t)$ uzluksiz, $\varphi(t)$ esa monoton va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega deb faraz qilamiz. O'zgaruvchini almashtirish qoidasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

1-*misol.* $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ ellipsning yuzini hisoblang.

Yechish. Avval ellips chorak qismining yuzini topamiz:

$$\frac{S}{4}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt =$$

$$\frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Demak, $S=\pi ab$.

2-*misol.* Ox o'qi va $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ sikloidaning bir arkasi bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

Yechish. (1) formulaga ko'ra

$$S=\int_{0}^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$=a^2\left(\int_{0}^{2\pi} dt - 2\int_{0}^{2\pi}\cos tdt + \int_{0}^{2\pi}\cos^2 tdt\right) = a^2\left((t-2\sin t)\Big|_{0}^{2\pi} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+\cos 2t)dt\right) = a^2\left(2\pi+\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}\right) = 3\pi a^2.$$

3-§. Qutb koordinatalar sistemasida figuraning yuzasini hisoblash

Qutb koordinatalar sistemasida tenglamasi $r=r(\varphi)$ bo'lgan l egri chiziq, $\varphi=\alpha$ va $\varphi=\beta$ nurlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblash talab qilinsin.

Bu figurani to'g'ri figura, ya'ni boshi O nuqtada bo'lgan $\varphi=\varphi^*$ nur $(\alpha\le\varphi^*\le\beta)$ $r=r(\varphi)$ chiziqni ko'pi bilan bitta nuqtada kesib o'tadi deb faraz qilamiz. Shuningdek, $r=r(\varphi)$ funksiyani $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz deb qaraymiz.

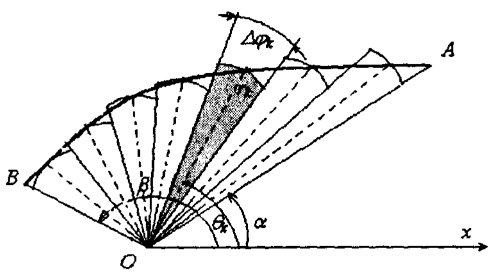
Egri chiziqli OAB sektorning yuzini hisoblash uchun integral yig'indi tuzish, keyin esa limitga o'tishdan iborat algoritmdan foydalanamiz.

1. $[\alpha,\beta]$ ni n ta qism kesmalarga bo'lamiz va $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=\beta$, $\Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ belgilash kiritamiz. U holda OAB egri chiziqli sektor n ta egri chiziqli qism sektorlarga ajraladi.

2. Har bir $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$, $k=\overline{1,n}$ qism kesmadan ixtiyoriy ravishda θ_k nuqtani tanlab olamiz va $r(\varphi)$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$r_k=r(\theta_k),\ k=\overline{1,n}$$

3. Har bir $[\varphi_{k-1},\varphi_k]$ qism kesmada $r=r(\varphi)$ funksiyani o'zgarmas va qiymati $r_k=r(\theta_k)$ ga teng deb qaraymiz. Bu holda egri chiziqli qism sektorni radiusi $r_k=r(\theta_k)$, markaziy burchagi $\Delta\varphi_k$ bo'lgan doiraviy sektor bilan almashtiramiz (13-rasm).



13-rasm.

Bunday doiraviy sektor yuzi $\Delta S_k=\frac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k$ formula bilan hisoblanadi.

Egri chiziqli OAB sektorning S yuzini taqriban n ta doiraviy qism sektorlardan tuzilgan figura yuziga teng deb qarash mumkin:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k \qquad (1)$$

(1) taqribiy tenglik $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ kesmalar qanchalik kichik bo'lsa, shunchalik aniq bo'ladi. (1) ning o'ng tomoni $\frac{1}{2} r^2(\varphi)$ uzluksiz funksiya uchun integral yig'indi bo'ladi.

4. *OAB* egri chiziqli sektorning yuzi *S* deb integral yig'indining $\lambda = \max\limits_{[\alpha;\beta]} \Delta\varphi_k \to 0$ dagi limit qiymatini qabul qilamiz:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k) \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$$

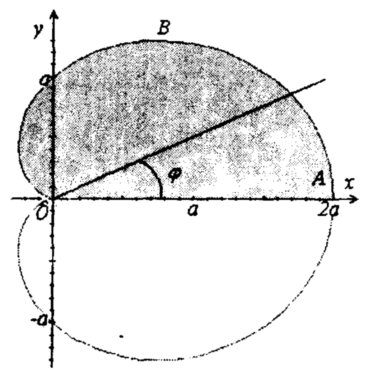
Shunday qilib, egri chiziqli sektorning yuzi quyidagi formula bilan hisoblanar ekan.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \qquad (2)$$

1-*misol.* $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardioida bilan chegaralangan figuraning yuzasini hisoblang (14-rasm).

Yechish. Kardioida qutb o'qiga nisbatan simmetrik, demak, uning yuzasi *ABO* egri chiziqli sektor yuzasining ikkilanganligiga teng bo'ladi. *ABO* egri chiziqli sektor $r = a(1 + \cos\varphi)$ chiziq, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ nurlar bilan chegarlangan. 14-rasm

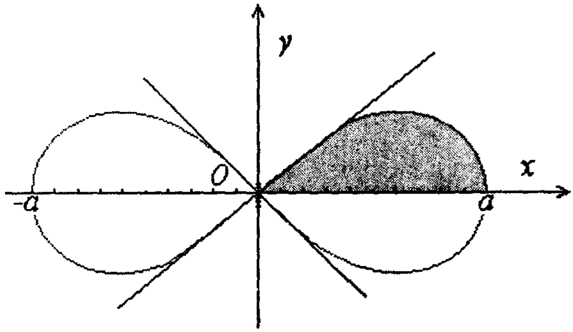
(2) formulaga ko'ra



14-rasm.

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}r^2d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})d\varphi=$$

$$=a^2(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2 .$$



15-rasm.

2-misol. $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniskata bilan chegaralangan figuraning yuzasini toping.

Yechish. $\sqrt{\cos 2\varphi}$ funksiya $[0;2\pi]$ ning faqatgina $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ va $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$ qismlarida aniqlangan (15-rasm). Bu figura qutb boshi va qutb o'qiga nisbatan simmetrik. Shuning uchun

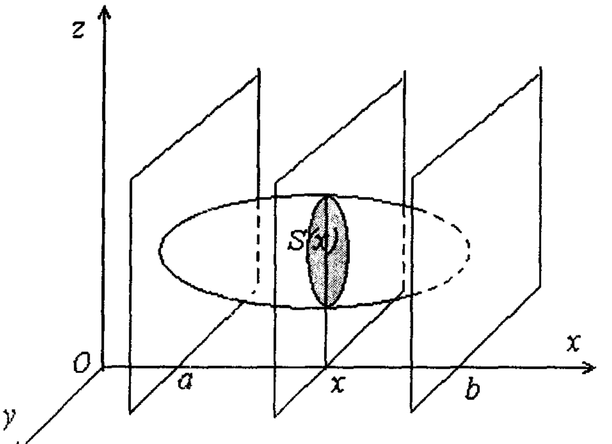
$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi d\varphi=2a^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2 .$$

4-§. Fazoviy jism hajmini hisoblash

4.1. Ko'ndalang kesimi ma'lum bo'lgan jism hajmini hisoblash.

Aytaylik, yopiq sirt bilan chegaralangan T jism berilgan bo'lib, uning biror to'g'ri chiziqqa, masalan, abssissalar o'qi Ox ga, perpendikular tekislik bilan ixtiyoriy kesimining yuzasi ma'lum bo'lsin. Bunday kesim *ko'ndalang kesim* deyiladi. Ko'ndalang kesim uning Ox o'q bilan kesishish nuqtasining abssissasi x bilan aniqlanadi.

Umuman olganda, x o'zgarishi bilan ko'ndalang kesim yuzi S o'zgaradi, ya'ni x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Uni $S(x)$ bilan belgilaymiz. $S(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz deb qaraymiz, bu yerda a va b berilgan T jismning cheti (chegaraviy) kesimlari abssissalari (16-rasm).

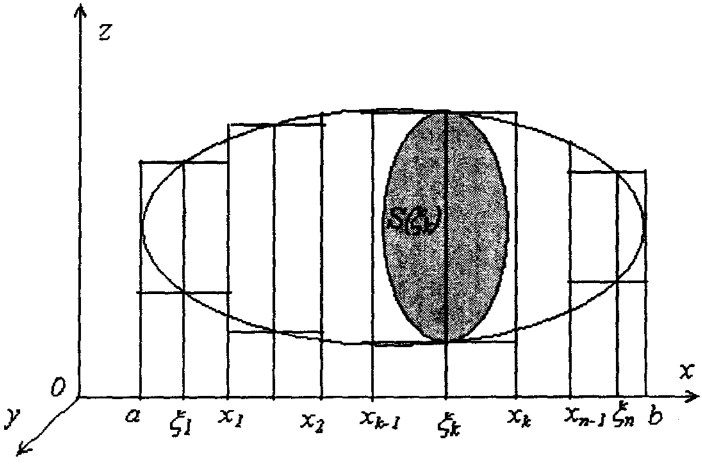


16-rasm.

T jismning V hajmini hisoblash uchun integral yig'indini tuzish va limitga o'tishdan iborat algoritmdan foydalanamiz.

1. $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta qism kesmalarga ajratamiz.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k$, $k = \overline{1,n}$ belgilashlar kiritamiz. Bo'lish nuqtalari x_k orqali Ox o'qqa perpendikular tekisliklar o'tkazamiz. $x = x_k$ $k = \overline{1,n}$ tekisliklar oilasi T jismni har birining qalinligi Δx_k, $k = \overline{1,n}$ bo'lgan qatlamlarga ajratadi (17-rasm).



17-rasm.

2. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ qism kesmadan ixtiyoriy ravishda ξ_k nuqta tanlab olamiz va $S(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi $S(\xi_k)$ qiymatini hisoblaymiz.

3. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ qism kesmada $S=S(x)$ funksiya o'zgarmas va qiymati $S(\xi_k)$ ga teng deb faraz qilamiz. U holda T jismning har bir qatlamida asosi $S(\xi_k)$ va yasovchisi Ox o'qqa paralel to'g'ri silindrni ko'rish mumkin. Bu qism to'g'ri silindrning balandligi Δx_k, hajmi $\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$ formula bilan hisoblanadi.

T jismning hajmi V taqriban n ta pog'onali qism silindrlardan tashkil topgan figura hajmiga teng bo'ladi:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

Aniqki, $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k$ qanchalik kichik bo'lsa, taqribiy tenglik shunchalik aniq bo'ladi.

Izlanayotgan hajmning qiymati deb $V = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ ni qabul qilamiz.

Limit ostidagi ifoda $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $S(x)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'lganligi sababli

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx \text{ bo'ladi.}$$

Shunday qilib, $x=a$ va $x=b$ tekisliklar orasida joylashgan jism hajmi, agar Ox o'qqa perpendikular kesim yuzasi ma'lum $S = S(x), \quad x \in [a,b]$ funksiya bo'lsa,

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadi.

Misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Agar ellipsoidni $x=h$ tekislik bilan kesib o'tsak, kesimda

$\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1-\frac{h^2}{a^2})} = 1$ ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari $b\sqrt{1-h^2/a^2}$ va $c\sqrt{1-h^2/a^2}$ ga teng bo'lib, yuzasi $S = S(h) = \pi bc\,(1-\frac{h^2}{a^2})$ ga teng bo'ladi. (1) formulaga ko'ra izlanayotgan hajm

$$V=\int_{-a}^{a}S(h)dh=\int_{-a}^{a}\pi bc(1-\frac{h^2}{a^2})dh=\pi bc(h-\frac{h^3}{3a^2})\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Xususan, $a=b=c=r$ bo'lganda radiusi r ga teng shar hosil bo'ladi va uning hajmi $\frac{4}{3}\pi r^3$ bo'ladi.

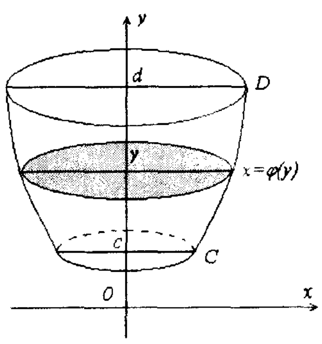
4.2. Aylanma jism hajmini hisoblash. *Ox* o'q atrofida *aABb* egri chiziqli trapetsiyani aylantirishdan hosil bo'lgan jismni ko'rib chiqamiz. Bunda *aABb* trapetsiyani $y=f(x)$ egri chiziq, *Ox* o'qi, $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan deb qaraymiz (18-rasm). Agar bu jismga *Ox* o'qqa perpedikular tekisliklar bilan kesib o'tsak, kesimda radiusi $y=f(x)$ ning moduliga teng bo'lgan doiralar hosil bo'ladi. Demak, bu holda ko'ndalang kesim yuzasi

$S(x)=\pi y^2=\pi(f(x))^2$ bo'ladi.

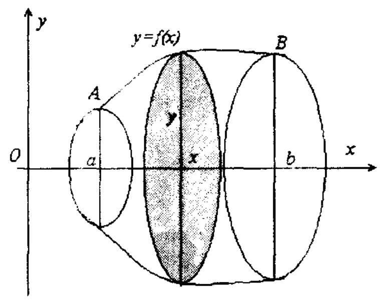
Aylanma jism hajmini hisoblash uchun (1) dan foydalanamiz:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx \qquad (2)$$

Agar jism *cCDd* trapetsiyani *Oy* o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan bo'lsa (19-rasm), u holda uning hajmi quyidagi



18-rasm.



19-rasm.

formula bilan hisoblanadi:

$$V=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d(\varphi(y))^2dy,\text{ bu yerda } x=\varphi(y),\quad y\in[c,d]$$

CD chiziq tenglamasi.

1-*misol.* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsni *Ox* o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. (2) formulaga ko'ra

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3-\frac{a^3}{3})=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

2-*misol.* $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi$ sikloida arkasini *Ox* o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan figura hajmini toping.

Yechish: (2) formuladan foydalanamiz. Bunda $0\le x\le 2\pi a$ bo'ladi. Demak, $V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx$. Bu integralda o'zgaruvchilarni almashtiramiz. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ deb olamiz, u holda $dx=a(1-\cos t)dt$ bo'ladi. Agar $x_1=0$ va, $t_1=0$, $x_2=2\pi a$ bo'lsa, $t_2=2\pi$ bo'ladi. Bularni e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)dt=$$

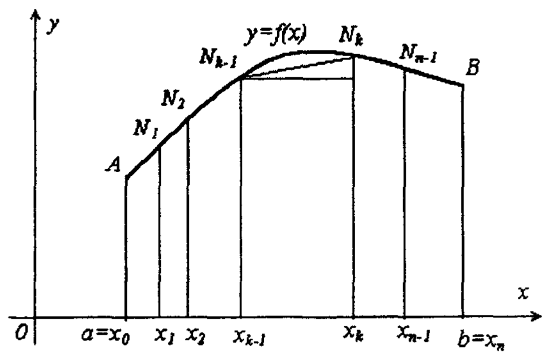
$$= \pi a^3((t-3\sin t)\Big|_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt - \int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d(\sin t)) =$$

$$= \pi a^3(2\pi + \left(\frac{3}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2}) - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

5-§. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash

5.1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida yassi yoy uzunligini hisoblash. Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va l shu funksiya grafigi bo'lsin. (20-rasm). Yassi l egri chiziqning uzunligini topish talab qilinsin. Yassi l egri chiziqning uzunligini s bilan belgilaymiz.

Avval AB yoyini uzunliging deganda nimani tushunishni aniqlab olamiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ nuqtalar yordamida n-ta bo'lakka bo'lamiz. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ belgilashni kiritamiz. Har bir x_i, $i=\overline{1,n}$ nuqtadan Oy o'qqa l chiziq bilan kesishganga qadar parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu holda AB yoy n ta bo'lakka bo'linadi. l chiziqning qo'shni bo'linish nuqtalarini kesma (vatar) bilan tutashtiramiz va $AN_1N_2\ldots N_{n-1}B$ siniq chiziq hosil qilamiz. Shu siniq chiziqning uzunligini l_n bilan belgilaymiz.



20-rasm.

Demak,

$$l_n = \left|\overline{AN_1}\right| + \left|\overline{N_1N_2}\right| + \ldots + \left|\overline{N_{n-1}B}\right| = \sum_{k=1}^{n}\Delta l_k\ ,$$

bu yerda: $\Delta l_k - N_{k-1}N_k$ yoyga tiralgan vatar uzunligi.

Siniq chiziqning uzunligi AB yoy uzunligining taqribiy qiymati bo'ladi $(l \approx l_n)$. Aniqki, agar $[a,b]$ kesmaning bo'linish nuqtalari soni n ni (qism kesma uzunliklari eng kattasining uzunligini nolga intiladigan qilsak) orttirsak, u holda siniq chiziqning uzunligi AB yoy uzunligiga intiladi deb qabul qilish tabiiy.

Agar $\lambda = \max\limits_{[a;b]} \Delta x_k \to 0$ da l_n chekli limitga ega bo'lsa, u holda bu limit l *yoyning uzunligi* deyiladi, egri chiziq bu holda *to'g'rilanuvchi* deb ataladi:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \qquad (1)$$

Agar chekli limit mavjud bo'lmasa, yoy uzunligi mavjud emas, chiziq esa *to'g'rilanmaydigan* deyiladi.

Endi, agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda l – to'g'rilanuvchi ekanligini ko'rsatamiz va uning uzunligini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz.

$\overline{N_{k-1}N_k}$ vatar uzunligini hisoblaymiz. $N_{k-1}(x_{k-1},y_{k-1})$, $N_k(x_k,y_k)$ bo'lganligi sababli

$$\Delta l_k = \left|\overline{N_{k-1}N_k}\right| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k \text{ bo'ladi.}$$

Lagranj teoremasiga ko'ra

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Demak,

$$\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k .$$

Olingan natijani (1) ga qo'yamiz.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k \qquad (2)$$

(2) formulaning o'ng tomonida $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ funksiyaning $[a,b]$ dagi integral yig'indisi yozilgan. Bu funksiya uzluksiz bo'lganligi sababli integral yig'indining limiti mavjud va shu limit $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ funksiyaning $[a,b]$ dagi aniq integraliga teng bo'ladi.

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Shunday qilib, agar *f(x)* funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda *AB* yoy to'g'irlanuvchi va uning uzunligi s quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx \qquad (3)$$

Misol. $x^2+y^2=R^2$ aylana uzunligini hisoblang.

Yechish. Avval aylananing I chorakdagi qismi uzunligini topamiz. Aylananing bu yoyi tenglamasi $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $0\le x\le R$ bo'ladi.

Bundan $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Demak, (3) formulaga ko'ra

$$\frac{1}{4}s=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=R\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Shunday qilib, aylana uzunligi $s=2\pi R$ ga teng.

5.2. Parametrik ko'rinishda berilgan yoy uzunligini hisoblash.

Egri chiziq tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[t_1,t_2]$, bu yerda *x(t), y(t)* – uzluksiz hosilaga ega va $[t_1,t_2]$ da $x'(t)\neq 0$.

(3) formuladan foydalanish uchun avval o‘zgaruvchini almashtiramiz. $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$, $y'_x = y'_t / x'_t$. U holda

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)^2} \, x'(t)dt$$

yoki

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt. \qquad (4)$$

Misol. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ sikloida arkasi uzunligini hisoblang.

Yechish.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} \, dt =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

5.3. Qutb koordinatalar sistemasida yoy uzunligi. Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. $r(\varphi)$ va $r'(\varphi)$ larni $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz deb faraz qilamiz. Bu chiziqni parametrik ko‘rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi, \\ y = r(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

x va y dan φ bo‘yicha hosilalarni hisoblaymiz:

$$\left. \begin{aligned} x'_\varphi &= r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ y'_\varphi &= r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2.$$

Demak,

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi \qquad (5)$$

Misol. $r=a(1+\cos\varphi)$ kardioida uzunligini hisoblang.

Yechish. Burchak 0 dan π gacha o'zgarganda izlanayotgan yoyning yarmini hosil qilamiz. (5) dan foydalanamiz:

$$r'=-a\sin\varphi,\quad r^2+(r')^2=a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi=$$

$$=2a^2(1+\cos\varphi)=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

U holda

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi}=8a.$$

5.4. Yoy differensiali. Yoy uzunligi $s=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ formula bilan aniqlanar edi, bu yerda *y=f(x)* funksiya [*a;b*] da aniqlangan va uzluksiz hosilaga ega. Ushbu formulada integrallashning quyi chegarasi o'zgarmas, yuqori chegarasi esa o'zgaruvchi deb faraz qilaylik. Yuqori chegarani *x* bilan integrallash o'zgaruvchisini *t* bilan belgilaylik. Bu holda yoy uzunligi yuqori chegaraning funksiyasi bo'ladi:

$$s(x)=\int_a^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integralning hosilasi haqidagi teoremaga ko'ra *s(x)* funksiya differrensiallanuvchi, uning hosilasi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$s'(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Bundan yoy differensiali uchun quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$ds=s'(x)dx=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Demak, yoy differensiali yordamida yoy uzunligini hisoblash uchun ushbu $s=\int_a^b ds$ formulani hosil qilishimiz mumkin.

Agar $y'=\frac{dy}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$ds=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

ya'ni

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

(Pifagor teoremasining analogi) hosil bo'ladi.

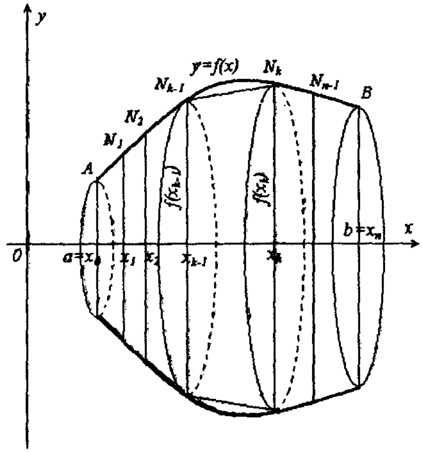
6-§. Aylanma sirt yuzini hisoblash

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, nomanfiy va uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. Uning grafigi bo'lgan AB egri chiziqni Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida aylanma sirt hosil bo'ladi (21-rasm). Shu sirtning yuzini aniq integral yordamida aniqlaymiz. Buning uchun $[a;b]$ ning biror bo'linishini olamiz:

$$a=x_0<x_1<...<x_{k-1}<x_k<...<x_n=b.$$

Bo'linish nuqtalaridan Oy o'qqa paralel to'g'ri chiziqlarni o'tkazib, ularni AB yoygacha davom ettiramiz. Buning natijasida AB yoy ham $N_k(x_k;f(x_k))$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'linadi. Endi $A=N_0$, N_1, $...,N_n=B$ nuqtalarni ketma-ket tutashtirib, siniq egri chiziq hosil qilamiz.

AB yoyni Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan aylanma sirtning yuzasi deb siniq chiziqni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan sirt yuzasining $N_{k-1}N_k$ vatarlar eng kattasining uzunligi nolga intilgandagi limitini qabul qilamiz.



21-rasm.

Ma'lumki,

$$|N_{k-1}N_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

vatar uzunligi nolga intilganda $\Delta x_k \to 0$ va aksincha. Shuning uchun kelgusida limitni

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$$

uchun ko'rib o'tamiz. $N_{k-1}N_k$ vatarni Ox o'qi atrofida aylantirganda kesik konus sirti hosil bo'ladi va uning yuzasi

$$S_k = \frac{2\pi f(x_{k-1}) + 2\pi f(x_k)}{2} |N_{k-1}N_k|.$$

Shu tarzda hosil qilingan yuzalarning n tasini qo'shsak, siniq chiziq yordamida hosil qilingan sirt yuzasi P_n kelib chiqadi:

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta l_k, \quad \Delta l_k = |N_{k-1}N_k|.$$

Uni boshqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$P_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta s_k - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (\Delta s_k - \Delta l_k),$$

bunda Δs_k mos ravishda N_{k-1} va N_k nuqtalar orasidagi yoy uzunligi.

Ma'lumki, $\Delta x_k \to 0$ da $\Delta s_k \to 0$ Shuningdek, $\dfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ bo'linma $f(x_{k-1})$ va $f(x_k)$ lar orasidagi son bo'lib, $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lganidan, shunday $\xi_k \in (x_{k-1}; x_k)$ mavjudki,

$$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}=f(\xi_k)$$

bo'ladi. $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$ deb belgilaylik. $\lambda \to 0$ da P_n ning tarkibidagi ikkinchi qo'shiluvchi

$$0 \le 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(\Delta s_k-\Delta l_k)=2\pi\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(\Delta s_k-\Delta l_k)\le$$

$$\le 2\pi M\sum_{k=1}^{n}(\Delta s_k-\Delta l_k)=2\pi M\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k-\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k\right)\to 0,$$

chunki

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k=L$$

(yuqoridagi shartlarda AB yoyning to'g'rilanuvchiligi nazarda tutilgan).

Demak,

$$\lim_{\lambda\to 0}P_n=2\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta s_k=2\pi\int_a^b f(x)ds$$

bo'ladi, ya'ni aylanma sirtning yuzi

$$S=2\pi\int_a^b f(x)ds=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

formula bilan ifodalanadi.

Agar to‘g‘rilanuvchi yoy tenglamasi $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ lar uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, u holda sirtning yuzasi

$$S = 2\pi \int_a^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$$

bo‘ladi. Shunga o‘xshash, agar egri chiziq

$$r = f(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

tenglama bilan berilgan bo‘lib, $f'(\theta)$ uzluksiz funksiya bo‘lsa,

$$S = 2\pi \int_a^\beta f(\theta)\sin\theta\sqrt{f^2(\theta) + f'(\theta)^2}\,d\theta$$

formulani keltirib chiqaramiz.

Misol. Radiusi R bo‘lgan sfera sirtining yuzasini toping.

Yechish. I usul. Aylana tenglamasi parametrik ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

chorak aylanani Ox o‘qi atrofida aylantirish natijasida yarim sfera hosil bo‘ladi. Bu holda $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ bo‘ladi, shuning uchun

$$\frac{S}{2} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt =$$

$$= -2\pi R^2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^2 .$$

Demak, $S = 4\pi R^2$.

II usul. Qutb koordinatalar sistemasida aylana tenglamasi $r = R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$. Shuning uchun

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin\theta\sqrt{R^2+0^2}\,d\theta=2\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=2\pi R^2,\quad S=4\pi R^2.$$

7-§. Aniq integralning fizik masalalarni yechishga tatbiqi

7.1. O'zgaruvchan kuch ishini hisoblash. Aytaylik, moddiy nuqta biror o'zgaruvchan $\vec{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakat qilsin. Bu nuqtaning ko'chishini $\vec{s}$ vektor orqali belgilaymiz va kuchning yo'nalishi ko'chish yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin deb faraz qilamiz. $|\vec{F}|$ va $|\vec{s}|$ orqali $\vec{F}$ va $\vec{s}$ vektorlarning uzunligini belgilaymiz.

Agar $\vec{F}$ o'zgarmas bo'lsa, u holda mexanikadan ma'lumki, bajarilgan ish $A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|$ ga teng bo'ladi.

Endi $\vec{F}$ yo'nalishni saqlagan holda modul bo'yicha o'zgaruvchan bo'lgan holatni ko'rib chiqamiz. Shu kuch bajargan ishni hisoblaymiz. *Ox* o'qi deb moddiy nuqta harakatlanayotgan to'g'ri chiziqni qabul qilamiz. Aytaylik, yo'nalishning boshlang'ich va oxirgi nuqtalari abssissalari mos ravishda a va b ($a<b$) bo'lsin. $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida kuch moduli ma'lum qiymat qabul qiladi va x ning funksiyasi, ya'ni $\vec{F}=F(x)$ bo'ladi.

$F(x)$ funksiyani uzluksiz deb hisoblaymiz. O'zgaruvchan kuch bajargan ishini hisoblash uchun integral yig'indini tuzish va limitga o'tishga asoslangan algoritmdan foydalanamiz.

1. $[a,b]$ kesmani x_k, $k=\overline{1,n}$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz: $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$ belgilashni kiritamiz, u k- qism kesma uzunligiga teng. Ma'lumki, butun yo'ldagi ishni A bilan, $[x_{k-1},x_k]$ qism kesmada bajarilgan ishni A_k bilan belgilab, quyidagiga ega bo'lamiz: $A=\sum_{k=1}^{n}A_k$.

Agar $[x_{k-1}, x_k]$ ni yetarlicha kichik qilib olsak, u holda har bir bunday kesmada $|\vec{F}| \approx const$ deb qarash mumkin.

2. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ qism kesmadan ixtiyoriy ξ_k nuqtani tanlab olamiz va *F(x)* funksiyaning shu nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz.

3. Har bir qism kesmada kuchning moduli o'zgarmas qiymatga ega va *F(x)* funksiyaning ξ_k nuqtadagi qiymatiga teng deb faraz qilamiz: $\left|\vec{F}\right| = F(\xi_k)$. Bu holda kuchning $[x_{k-1}, x_k]$ kesmadagi ishi $\Delta A_k = \left|\vec{F}\right| \Delta x_k = F(\xi_k)\Delta x_k$ bo'ladi.

O'zgaruvchan kuchning butun yo'ldagi ($[a,b]$ da) ishi uchun

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4. $\lambda = \max\limits_{[a,b]} \Delta x_k \to 0$ dagi A_n ning limiti mavjud bo'ladi (chunki *F(x)* farazga ko'ra uzluksiz) va o'zgaruvchan kuchning *a* nuqtadan *b* nuqtagacha bo'lgan to'g'ri chiziqli yo'ldagi ishini ifodalaydi:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx \qquad (1)$$

Misol. Agar prujinani 0,05 m ga cho'zish uchun 2 H kuch sarf qilinsa, u holda bu prujinani 0,1 m ga cho'zish uchun bajariladigan ishni hisoblang.

Yechish: Guk qonuniga ko'ra prujinani cho'zuvchi (siquvchi) kuch moduli $\left|\vec{F}\right|$ shu cho'zishga (siqishga) proporsional bo'ladi, ya'ni $\left|\vec{F}\right| = kx$, bu yerda x-cho'zilish (siqilish) kattaligi. Shartga ko'ra $2 = k \cdot 0,05$, bundan $k = 40$. (1) formulaga ko'ra

$$A=\int_0^{0,1}40xdx=20x^2\Big|_0^{0,1}=0,2J.$$

7.2. O'zgaruvchan quvvatli elektrodvigatel ishini hisoblash. Endi ishni topishga doir boshqa masalani qaraymiz. Dvigatelning $\Delta t=[a,b]$ vaqt oralig'ida bajargan ishini hisoblaymiz, bunda uning t vaqtdagi quvvati ma'lum va $N(t)$ ga teng qaraymiz.

Yuqoridagi algoritmdan foydalanamiz:

1. $[a,b]$ kesmani n ta bo'lakka ajratamiz: $[t_{k-1}, t_k]$, $k=\overline{1,n}$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

2. Har bir $[t_{k-1}, t_k]$ qism kesmadan ixtiyoriy τ_k nuqtani tanlaymiz.

3. Har bir qism kesmada quvvatni o'zgarmas va $N(\tau_k)$ ga teng deb qaraymiz. U holda

$$A\approx A_n=\sum_{k=1}^{n}N(\tau_k)\Delta t_k .$$

$N(t)$ funksiyani uzluksiz deb qaraymiz va $\lambda=\max\limits_{[a,b]}\Delta t_k\to 0$ da limitga o'tamiz. Natijada

$$A=\int_a^b N(t)dt \qquad (2)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Misol. $[0,\frac{2\pi}{\omega}]$ vaqt oralig'ida o'zgaruvchi tok bajargan ish va o'rtacha quvvatini hisoblang.

Bunda tok kuchi $I=I_0\sin\omega t$ formula bilan aniqlanadi (I_0-tokning maksimal qiymati, ω -doiraviy chastota, t-vaqt, zanjir qarshiligi R-ga teng)

Yechish. Ma'lumki, o'zgarmas tok kuchining quvvati $N=I^2R$ formula bilan aniqlanadi. (2) formulaga ko'ra

$$A = I_0^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = I_0^2 R \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt = \frac{I_0^2 R\pi}{\omega}.$$

O‘zgaruvchan tokning o‘rtacha quvvati esa

$$N_{\text{o'rta}} = \frac{A}{2\pi/\omega} = \frac{I_0^2 R}{2}$$ ga teng bo‘ladi.

7.3. Statik momentlarni, inersiya momentlarini va og‘irlik markazi koordinatalarini hisoblash.

7.3.1. Umumiy ma’lumotlar. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. m massali $A(x,y)$ moddiy nuqtaning Ox o‘qqa (Oy) nisbatan *statik momenti* deb, son jihatdan nuqta massasini nuqtadan Ox o‘qiga bo‘lgan masofa ko‘paytmasiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi:

$$M_x = my \quad (M_y = mx)$$

2-ta’rif. m massali $A(x,y)$ moddiy nuqtaning Ox (Oy o‘q, O nuqta) ga nisbatan *inersiya momenti* deb, shu nuqta massasini Ox (Oy, O nuqta) gacha bo‘lgan masofa kvadrati ko‘paytmasiga teng bo‘lgan kattalikka aytiladi:

$$I_x = my^2, \; I_y = mx^2, \; I_0 = m(x^2 + y^2)$$

Agar $m_1, m_2, ..., m_n$ massali $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2), ...,$ $A_n(x_n, y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo‘lsa, u holda statik momentlar

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \; M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \qquad (1)$$

inersiya momentlari

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \; I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2, \; I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) m_k$$

formulalar bilan hisoblanadi.

3-ta’rif. Moddiy nuqtalar sistemasining *og‘irlik markazi* deb quyidagi xossaga ega bo‘lgan nuqtaga aytiladi: agar bu nuqtaga sistema massasi $M=\sum_{k=1}^{n} m_k$ qo'yilsa, u holda uning ixtiyoriy o'qqa nisbatan statik momenti sistemaning shu o'qqa nisbatan statik momentiga teng bo'ladi.

Og'irlik markazi koordinatalarini $S(\overline{x},\overline{y})$ deb belgilasak, u holda ta'rifga ko'ra

$$M_x=\sum_{k=1}^{n} m_k y_k=M\overline{y},\quad M_y=\sum_{k=1}^{n} m_k x_k=M\overline{x}$$

hosil qilamiz. Shunday qilib, moddiy nuqtalar sistemasining og'irlik markazi koordinatalari

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M}=\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right)/\sum_{k=1}^{n} m_k,\qquad \overline{y}=\frac{M_x}{M}=\left(\sum_{k=1}^{n} m_k y_k\right)/\sum_{k=1}^{n} m_k$$

formula bilan hisoblanadi.

7.3.2. Tekis yoyning og'irlik markazi. To'g'rilanadigan AB yoy bo'ylab $\rho=1$ zichlik bilan biror modda joylashgan bo'lib, bu yoyning parametrik tenglamalari

$$\begin{cases} x=x(l), \\ y=y(l),\ 0\le l\le L \end{cases}$$

bo'lsin (parametr sifatida l –yoy uzunligi olingan), bunda L – butun yoy uzunligi $x(l)$, $y(l)$ lar $[0;L]$ da uzluksiz funksiyalar.

$[0;L]$ ning biror bo'linishini olamiz:

$$0=l_0<l_1<\ldots<l_n=L.$$

Natijada AB yoy $P_{k-1}P_k$ qismlarga bo'linadi, bunda

$$P_k=P_k(x_k,y_k),\ x_k=x(l_k),\ y_k=y(l_k)$$

$P_{k-1}P_k$ yoyga joylashgan massa $\Delta m_k=1\Delta l_k$. Shu massani P_k nuqtaga markazlashtiramiz. U holda sistema og'irlik markazining koordinatalari taqriban

$$\overline{x}\approx\frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x(l_k)\Delta l_k}{L},\qquad \overline{y}\approx\frac{\sum_{k=1}^{n} y(l_k)\Delta l_k}{L}$$

bo‘ladi. $x(l)$ va $y(l)$ funksiyalar uzluksiz bo‘lgani uchun yuqoridagi integral yig‘indilarning $\lambda(l)=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta l_k\to 0$ dagi limiti mavjud bo‘ladi va ta’rifga ko‘ra og‘irlik markazining kooradinatalari shu limitlarga teng deb qabul qilinadi:

$$\overline{x}=\frac{1}{L}\int_0^L x(l)dl,\quad \overline{y}=\frac{1}{L}\int_0^L y(l)dl.$$

AB yoy tenglamasi $y=f(x)$, $a\le x\le b$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. U holda

$$\overline{x}=\frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx,\quad \overline{y}=\frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \text{ bo‘ladi.}$$

1-teorema (Guldinning birinchi teoremasi). AB tekis yoyni shu tekislikda yotgan yoy bilan kesishmaydigan biror o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladigan sirtning yuzi shu yoyning uzunligi bilan uning og‘irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko‘paytmasiga teng.

Isboti. AB yoy tenglamasi $y=f(x)$, $a\le x\le b$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

$$\overline{x}=\frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}dx,\quad \overline{y}=\frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Bu tengliklarning ikkinchisini $2\pi L$ ga ko‘paytirsak,

$$2\pi\overline{y}L=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

hosil bo‘ladi. Ushbu tenglikning o‘ng tomoni AB yoy Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtning yuzasi bo‘lib, chap tomoni yoy uzunligi bilan uning og‘irlik markazi chizgan aylana uzunligining ko‘paytmasidir.

Misol. $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$ yarim aylananing og‘irlik markazi koordinatalarini topish talab qilinsin.

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad \bar{y} = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} R\,dx = \frac{2R}{\pi},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} x\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R} \frac{Rx}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 0,$$

chunki integral ostidagi funksiya toq. Demak, yarim aylananing og'irlik markazi $\left(0;\frac{2R}{\pi}\right)$ nuqtada joylashgan.

7.3.3. Tekis figuraning og'irlik markazi. $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $f(x) \le \varphi(x)$ uzluksiz egri chiziqlar va $x=a$, $x=b$, $a<b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan G tekis figura bo'ylab zichligi o'zgarmas $\rho = 1$ bo'lgan biror modda joylashgan bo'lsin. $[a;b]$ kesmani

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

nuqtalar yordamida n ta bo'lakka bo'lib, G figuraga n ta to'g'ri to'rtburchak chizamiz. Bu to'rtburchakning balandligi $\varphi(x_k) - f(x_k)$ ga, asosi esa $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ga teng ($k=1,2\ldots,n$). Bu holda har bir to'rtburchakka joylashgan modda massasi

$$m_k = \rho(\varphi(x_k) - f(x_k))\Delta x_k$$

bo'ladi (bunda $\rho = 1$- jismning zichligi). To'rtburchak diagonallari kesishgan nuqtaning, ya'ni og'irlik markazining koordinatalari quyidagicha yoziladi:

$\bar{x}_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, $\quad \bar{y}_k = \frac{\varphi(x_k)+f(x_k)}{2}$. U holda n ta to'rtburchakdan iborat bo'lgan figuraning og'irlik markazi koordinatalari quyidagicha yoziladi:

$$\bar{\xi}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_k\cdot m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\frac{\Delta x_k}{2}\right)(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k},$$

$$\bar{\eta}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\bar{y}_k\cdot m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)+f(x_k))(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k}.$$

Bulardan $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k\to 0$ da $\lim\limits_{\lambda\to 0}\bar{\xi}=\xi$, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\bar{\eta}=\eta$ bo'lib, $M(\xi,\eta)$ nuqta G figuraning og'irlik markazi bo'ladi. Shuningdek,

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k=\int_a^b(\varphi(x)-f(x))dx=S,$$

bunda S berilgan G figuraning yuzasidir. Endi

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\frac{\Delta x_k}{2}\right)(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k-$$

$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k^{\,2}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k=\int\limits_a^b x(\varphi(x)-f(x))dx$ bo'ladi va

$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k^{\,2}=0,$ chunki $\lambda\to 0$ da

$$\sum_{k=1}^{n}(\varphi(x_k)-f(x_k))\Delta x_k^{\,2}\le\sum_{k=1}^{n}(|\varphi(x_k)|+|f(x_k)|)\Delta x_k^{\,2}\le$$

$\le N\lambda\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k=N\lambda(b-a)\to 0$ (bunda

$N=\sup(|\varphi(x_k)|+|f(x_k)|)$). Demak, $\lambda\to 0$ da

$$\xi = \frac{\int_a^b x(\varphi(x) - f(x))dx}{\int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx}, \quad \eta = \frac{\int_a^b (\varphi^2(x) - f^2(x))dx}{2\int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx}.$$

Agar G figura egri chiziqli trapetsiya bo'lsa $(y = \varphi(x),\ f(x) = 0)$, u holda

$$\xi = \frac{1}{S}\int_a^b xydx, \quad \eta = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx$$

bo'ladi. Bunda $S = \int_a^b \varphi(x)dx -$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzi.

Bu holda $\eta = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx$ tenglikdan $2\eta S = \int_a^b \varphi^2(x)dx$ yoki $2\pi\eta S = \pi\int_a^b \varphi^2(x)dx$ bo'lib, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi:

2-teorema (Guldinning ikkinchi teoremasi). Tekis figurani o'zi bilan kesishmaydigan o'q atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan figuraning hajmi $(\pi\int_a^b \varphi^2(x)dx)$ shu figuraning yuzasi S va uning og'irlik markazi chizgan aylananing uzunligi ko'paytmasiga teng.

XII bobga doir test savollari

1. $y=\sin x$, $y=0$, $0\leq x\leq\pi$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

A) π; B) 2; C) 2π; D) 1.

2. $y=x^2/2$, $y=1/(1+x^2)$ chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

A) $\pi/2$; B) $\pi/2-1/3$; C) $1/3-\pi/2$; D) $\pi-2$.

3. $y=2x^{3/2}$, $0\leq x\leq 11$ yoy uzunligini hisoblang.

A) 7; B) 74; C) 65; D) 70; E) 19.

4. $xy=16$, $y=0$, $x=4$, $x=8$ chiziqlar bilan chegaralangan figurani *Ox* o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan figura hajmini hisoblang.

A) 64π; B) 32π; C) 216π; D) 16π.

5. Jism $v(t)=3t^2+1$ (m/s) tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Jismning $t_1=0$ (s) dan $t_2=4$ (s) gacha bo'lgan vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini hisoblang. (m)

A) 68; B) 49; C) 65; D) 22.

6. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan jismning tezligi $v(t)=4t-t^2$ ga teng. Jismning harakat boshlangandan to to'xtaguncha o'tgan yo'lini hisoblang. (m)

A) 10,3; B) $10^2/_3$; C) 10,5; D) 12.

7. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan jismning tezligi $v(t)=4t+3t^2$ ga teng. Jismning $t_1=0$ harakat boshlangandan to $t_2=4$ (s) gacha bo'lgan vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini hisoblang. (m)

A) 70; B) 96; C) 48; D) 72.

8. ***y=sinx, y=cosx*** **egri chiziqlar va** ***Ox*** **o'qi bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.**

A) $\frac{3\pi}{2}$; *B*) $2\pi-\sqrt{2}\,\pi$; *C*) $2-\sqrt{2}$; *D*) $2+\sqrt{2}$.

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **ellipsni** ***Ox*** **o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan aylanma ellipsoidning hajmini hisoblang.**

A) $\pi a^2 b$; *B*) $\frac{ab^2}{3}$; *C*) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$; *D*) $\frac{3ab^2\pi}{4}$.

10. ***y=sinx*** $(0\leq x\leq\pi)$ **sinusoidaning** ***Ox*** **o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan jismning hajmini toping.**

A) $\frac{3}{4}\pi^2$; *B*) $\frac{4}{3}\pi^2$; *C*) $\frac{1}{2}\pi^2$; *D*) π^2.

11. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ **ellips bilan chegaralangan figura yuzasini toping.**

A) 4 π; B) 9π; C) 6π; D) π.

12. ***y=x²***, ***y=4*** **chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzasini toping.**

A) $\frac{8}{3}$; *B*) $\frac{16}{3}$; *C*) $\frac{32}{3}$; *D*) 16.

13. $y=x^2-6x+8$ **parabola va** ***Ox*** **o'qi bilan chegaralangan figura yuzini toping.**

A) $\frac{4}{3}$; *B*) $\frac{2}{3}$; *C*) 4; *D*) 2.

14. $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ **lemniskata bilan chegaralangan figura yuzini toping.**

A) 4; B) 8; C) 16; D) 24.

Test savollari javoblari

I bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	B	D	A	C	D	A	A	D	A	B	D	C
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
C	C	C	A	B	B	D	C	B	B	D	D	A

II bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	D	D	B	B	B	B	A	C	D	D	C	D
14	15	16	17	18	19	20	21					
B	C	A	B	C	A	D	D					

III bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	D	D	C	C	B	C	C	A	C	C	C	D
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
D	B	D	B	D	C	D	B	C	B	C	D	C
27	28	29	30	31	32							
C	C	B	A	A	C							

IV bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	B	C	D	C	C	D	D	D	C	B	D	B
14	15	16	17	18	19	20						
C	D	C	A	C	D	D						

IX bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	C	A	C	C	B	B	B	A	B	D	B	B
14	15	16	17	18	19	20						
D	D	C	D	C	B	C						

X bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	B	D	A	A	C	C	D	A	C	C	C	D
14	15	16										
D	B	C										

XI bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
B	C	C	C	C	A	A	D	D	B	C	A	

XII bob.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	B	B	B	A	B	B	C	D	C	C	C	A
14												
C												

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 1-қисм.– Т.: “Ўқитувчи”, 1994.–416 б.

2. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 2-қисм.– Т.: “Ўқитувчи”, 1995.–436 б.

3. Саъдуллаев А. ва бошқалар. Математик анализ курси мисол ва масалалар тўплами. 1-қисм. – Т.: “Ўзбекистон”, – 1993. –317-б.

4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. – М.: “Высшая школа”, 1999. – 695 стр.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: «Издательство АСТ», 2003,– 558 стр.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. – М.: Интеграл-Пресс, 2002,–416 стр.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. II. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 544 стр.

8. Xudoyberganov G. va boshq. Matematik analizdan ma’ruzalar. I qism. 2010.

9. Xudoyberganov G. va boshq. Matematik analizdan ma’ruzalar. II qism. 2010.

Mundarija

O‘quv adabiyoti

Toshmetov O‘rmon, Turgunbayev Riskildi Musamatovich, Saydamatov Erkin Muhammadjanovich, Madirimov Mamatsali.

MATEMATIK ANALIZ

I qism

Muharrir **A. Ziyodov**
Kompyuterda sahifalovchi **G‘. Pirnazarov**

Nashr. lits. AI № 222. 16.11. 2012.
Bosishga 03.08.2015 da ruxsat etildi. Bichimi $60x84^{1}/^{16.}$
«Times New Roman» garniturasi. Nashr. tab. 25,3.
Bosma tab. 24,0.
Adadi 400 dona, Buyurtma № 196.
Narxi shartnoma asosida.

Original maket «Extremum-Press» MCHJda tayyorlandi.
«Extremum-Press» nashriyoti 100053,
Toshkent sh., Bog‘ishamol 3. Tel: 234-44-05
E-mail: Extremum-Press@mail.ru

«SAYDANA PRINT» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., Qamarniso ko‘chasi 3-uy.
Tel: 162-08-43.