МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕСПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ТГПУ им. Низами

Нагорный Александр Михайлович
Жаров Валентин Константинович
Тургунбаев Рискелди Мусаматович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. 1-ЧАСТЬ

Учебное пособие

5110100-методика преподавания математики

Ташкент - 2020

А.М.Нагорный, В.К.Жаров, Р.М.Тургунбаев

Математический анализ. 1-часть. Учебное пособие для бакалавриата 5110100-Методика преподавания математики. Т.: изд.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математический анализ раздел математики. Как любой будущий преподаватель математики или математик интересующийся сложностями науки Математики, Вы, Дорогой читатель, зададитесь вопросами: каковы источники (основания) этого раздела, какова история его развития. Какое место занимает раздел в самой древней науке, и, пожалуй, единственной Науки среди множества знаний Человека, в Математике? Какими основными понятиями и свойствами каких явлений занимается этот раздел? Все перечисленные вопросы лишь маленькая толика вопросов относящихся к Математическому анализу, но они весьма существенны для понимания, а, что же такое этот всего лишь раздел совершенной науки Математики.

Мы сразу заявим общее замечание авторов этого пособия – Математика это Абсолют Знания о Мире. В ней есть свои модификации связанные с историческими путями и развитием её в разных уголках земного шара, но именно, совпадение мыслей Homo Sapiens является первым аргументов в пользу Абсолюта Математики.

Теперь также определим, что занимаясь по этому пособию студент (ученик) осознанно, хотя конечно, в начале своего пути почти бессознательно, т.е. под руководством Учителя, начнет двигаться по страницам этой книжки, но на этом пути решая задачки простые и сложные, и, главное, учась задавать вопросы себе и Учителю (хорошему преподавателю).

И так первая и несколько рекомендаций будущему коллеге.

Как задавать вопросы своему Учителю? Во-первых, не бояться ошибиться и бояться выглядеть «глупым». Поэтому всегда помнить, если Вы, в самом деле, хотите чему-то научиться, должны двигаться, а это возможно в учебе, только экспериментируя, задавая вопросы и ошибаясь. Во-вторых, научиться выделять основные понятия и находить связь между предшествующим и последующим знанием, в нашем пособии это легко сделать мы Вам всегда поможем в этом сложном движении, но это и означает, что нужно научиться задавать вопросы Себе. В-третьих, получив хорошую оценку Учителя за работу, не сильно радуйтесь, получив – плохую не сильно огорчайтесь, в том и в другом случае, знайте, что необходимо много трудиться, чтобы чего-то достойного в жизни достичь.

Уважаемые Учителя, конечно, Вы обладаете и опытом преподавания и исследовательскими достижениями в нашей науке или в обширных знаниях и методиках преподавания математики, мы, авторы этого пособия, хотим предложить несколько капель наших Знаний из Абсолютного источника Математики[1].

Итак, наш многолетний труд и наши Учителя позволили нам, поделиться несколькими наблюдениями, за тем как преподавать математический анализ, и, что выбирать из его содержания для будущих учителей математики. Конечно, найдутся специалисты, которые заявят, а что здесь думать есть учебный план. Но, мы то с вами знаем, что Учебный план это одно, а работа Учителя совсем другое, и, чем больше времени остается для самосовершенствования, изучения рабочих материалов учащихся, характеров учащихся, творческих особенностей личности, наконец, истории самого предмета с задачками и вопросами к множеству учебных тем с Изюминками, тем интереснее наша профессия, а самое важно результат – будущие учителя нашей школы!

Первое на что следует обратить внимание в нашем пособии – это на понятийный состав введения в теорию действительного числа. Обратить внимание учащихся на понятия, которые им известны из средней школы. Еще раз эти понятия обсудить, возможно, следует предложить ознакомительную самостоятельную работу. Как выясняется в силу неоднородности требований в школах и, к сожалению, различной квалификации учителей, некоторые вопросы «уходят» из рассмотрения в школе, но иногда о некоторых просто забывают, поскольку они (вопросы) изучались в основной школе, а в последних двух классах были брошены силы на выпускные и вступительные испытания (экзамены).

Второе слабое владения выпускниками школ математической символикой и навыками писать конспекты лекций.

Третье, хотелось бы обратить внимание на тот факт, что у многих школьников складывается впечатление, что знание «на слух» такого понятия как производная, приводит их к убеждению, что они понимают о чем говорят – это одно из самых больших заблуждений школьников, как в техническом, так и в педагогическом вузе. Причина этого скрывается в том, что в общеобразовательной школе в силу исторических тенденций и, возможно, иных соображений высших чиновников и мыслителей от образования посчитали, что владение учащимися дифференциальным исчислением как инструментом благо для образования и значит государства. Но при этом, как и во Франции в начале шестидесятых, так и в СССР «забы-

---

[1] Об авторах этого небольшого труда Вы можете узнать в конце книжи

ли» о том, что математическое образование совсем не одно и тоже, что воспитание алгоритмиков или программистов. Не обратили внимание на то, что математическое образование создавалось сотнями лет и только лишь для развития и воспитания мышления будущих государственников, для которых ответственность за принятое решение является основной функцией в любом виде деятельности этой службы[2]. Хотелось бы напомнить, что математика как образовательная дисциплина создаёт полигон для любых видов деятельности и выработки Умений, Навыков и Знаний. Современные же возможности информационных педагогических сред образовательных систем существенно превосходят возможности подобной системы пятидесятилетней или тридцатилетней давности – появились средства новых коммуникационных технологий. Возникло новое качество информационных потоков, а с ним изменилась скорость их обращения и необходимость реагировать на принятые решения, а, следовательно, и ответственность за принятые решения. Таким образом, образовательная функция Математики существенно изменилась и усилилась. Однако вернёмся к образовательной функции математического анализа. Почему ещё в 1911 году сообщество педагогов-математиков считало необходимом введение в курсы гимназий, среднеобразовательных школ дифференциального и интегрального исчисления? На наш взгляд только из-за одной функции, именно развития с помощью этих исчислений инфинитезимального мышления, т.е. такого мышления, которое позволяло воображать, представлять возможные поведения числовых последовательностей, функций, рядов числовых и не числовых в окрестностях «подозрительных» точек, отрезков и областей с какими-то дополнительными условиями. Напомним, это было начало двадцатого века. Тогда ещё не было теории функций действительной и комплексной переменных, топологии, функционального анализа, общей современной алгебры, уравнений в частных производных и даже линейного программирования, но была очередная революция основ математического анализа, третья по счету за двух тысячелетнюю историю существования Математики. Иначе, поведение функции в «локальном» и в «глобальном» вызывала интерес у Человечества, поскольку от него зависела прагматические результаты деятельность. Также напомним, что с появ-

---

[2] О функциях государственной службы, о людях готовящих себя к такой службе и заблуждении, встречающегося в СМИ, о том, что госслужба и чиновник советского образца это одно и тоже .. Однако, хотелось бы заметить, что желание набить свои карманы за государственный счет, не отвечая за свои деяния и ответственность за государство и его процветание разные виды деятельности.

лением производной в математику вошло движение, а движение во времена И. Ньютона и Г. Лейбница «стучалось» в двери науки с невероятной силой! Отсюда понятно, что введение в курс общеобразовательной школы дифференциального исчисления не только прихоть выдающихся учёных, но веление времени. Но проблема в том, как это было сделано в шестидесятых-семидесятых годах нашей выдающейся математической средней школы! Была забыта основная заповедь – готово ли к этому нововведению мышление учащихся и самих учителей? А, если готово, то, как учитывается **преемственность** способов преподавания в средней и вышей школах? Как отражается она в понимании степени абстрактности понятий, уровней и градаций специфики будущих специальностей работников государства: инженеров, биологов, физиков, врачей, литераторов и многих других. Но что же произошло дальше! В школе «забыли» что без понимания предела функции в точке, понимание производной функции в точке не наступает. И, заменили в школе это тонкое понятие на геометрическую интерпретацию и таблицу дифференцирования (производных элементарных функций). Каков результат? Для чего сотни лет Человечество постепенно приходило к убеждению о необходимости развития инфинитезимального свойства мышления? Однако все было заменено на «таблицу производных». Предлагаемое пособие выступает, прежде всего, против этой исторической несправедливости, которая уже сейчас начинает сказываться на способности современных специалистов, например по IT технологиям переносить все размышление на оргтехнику. В самом деле, компьютер даже самый совершенный, остаётся «железкой» - помощником для специалиста, пусть даже с претензией на искусственный интеллект. А, зададим вопрос коллегам, а кто искусственный интеллект делает искусственным? По-китайски «компьютер» звучит как «дянь - нао», т.е. электрические мозги в переводе, а если нет электричества, то, что с этими мозгами будет?

И, наконец, в-четвертых, авторы этого небольшого пособия предлагают обратить внимание коллег на его организацию. В нем подборка задач не сама по себе как требует Учебный план, а с одной целью, выстроить так задачи, чтобы было основание для реализации принципа преемственности. Решение задач необходимо для подготовки решения следующих задач и формулировок вопросов учеников и их интерес к формулировкам следующий вопросов и поддержки желания решить следующие задачи. Конечно, столь идеальная модель авторских устремлений – сверхзадача любого педагога, но если, нас поддержат в этом коллеги и, наши ученики мы будем считать, что наши первые шаги в явном представлении принципа преемственности оказались полезными.

Авторы

ЧАСТЬ 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1-ГЛАВА. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§1. Предмет математического анализа

Математический анализ – раздел математики, в котором изучаются функции и их обобщения инифинитезимальными методами, в частности методом пределов. Методы математического анализа используются во многих разделах Математики. Можно выделить классические задачи математического анализа - это изучение функций во всём их многообразии, которое протребоволвало создание различных методов в частности дифференциальныго и интегральныго исчислений, в основе которых лежит операция предлеьного перехода и его искуссного применения.

Так как окружающая нас жизнь характеризуется в основном переменными величинами, да ещё зависимыми переменными, то ясно, почему математический анализ занимает особое место в системе математического знания. Он является фундаментом для построения многих мировоззренческих интерпретанций, начиная от физических моделей с разлчными формами движений и отражений до философских обобщений. В развитие математики математический анализ внес существенные изменения хотя бы уж тем что сотрясал все периоды развития проблемой конечного и бесконечного, дискретного и непрерываного, стационарного и переменного и влияет по сей день на основные пути проникновения математики в окружающий нас мир.

Границы предмета математического анализа указать сложно. Они не могут быть чёткими. Согласно определению математического анализа в него можно включить довольно широкий спектр разделов математики. Однако окончательно условные границы этого предмета, проследить лишь после изучения курса.

Труды выдающихся математиков: Р.Декарт (1596-1650), П. Ферма (1601-1665), И.Барроу (1630-1677), И. Ньютон (1643-1727), Г.В. Лейбниц (1646-1716), Ф. Лопоталь (1661-1704), Б. Тейлор (1685-1731) , Л. Эйлер (1707-1783), Ж. Даламбер (1717-1783), Ж. Лагранж (1736-1813), семейство Бернулли, Ж. Фурье (1772-1837), К.Ф. Гаусс (1777-1855), Б. Больцано (1781-1848), О. Коши (1789-1857), М.В. Остроградский (1801-1862), Н.Абель (1802-1829), Л. Дирихле (1805-1859), К. Вейерштрасс (1815-1897), Д.Стокс (1819-1903), П.Л.Чебышев (1821-1894), Б.Риман (1826-1866), Г. Кантор (1845-1918), С.В. Ковалевская (1850-1891), и многих других оказали огромное влияние на прогресс математического анализа.

Математический анализ развивается и в настоящее время, благодаря запросам, как практики, так и самой математики.

Математика единаа и многие обозначения перешли в математический анализ. Мы в дальнейшем будем использовать для оформления математических предложений следующими логическими символами:

$\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$, $\neg$

Их значение таково:

«$\forall$» - «любой» или «для всех», называется квантором общности.

«$\exists x$» - «существует по меньшей мере один x такой, что»…, называется квантором существования

«$A \Rightarrow B$» - «влечет за собой», «из A следует B», логический вывод.

«$\Leftrightarrow$» - «эквивалентность», «тогда и только тогда, когда…», $A \Leftrightarrow B$ истинно, только если оба значения A и B ложны, либо оба истинны. логическая равносильность.

$A \vee B$- «или» - «дизъюкция», логическое «или» Если справедливо хотя бы одно из A и B.

$A \wedge B$- «и» - Утверждение $A \wedge B$ истинно, если и A, и B истинны, и ложно в противном случае.

$\neg$ Утверждение $\neg A$ истинно тогда и только тогда, когда A ложно.

Примеры, иллюстрирующие применения этих символов, будут встречаться в тексте.

Символы - ∞, + ∞ (минус и плюс бесконечность) – называют «несобственными» числами. В истории математики знак ∞ был опредлен Дедекиндом в 1888 году, а в математическую практику ввел Валлис в 1655 году, но обозначил и в математическом смыслее впервые употребил для обозначения «сколько угдно большого» – худажник А.Дюрер в 1525 году. Их смысл следует из того, что $-\infty < \alpha < \infty$ в школе говорили «каково бы ни было действительное число α». Обозначали множество всех действительных чисел $R = (-\infty, \infty)$

§2. Множество действительных чисел построенного по Дедекинду

2.1. Множество рациональных чисел и их свойства

Со школы числа вида 1, 2, 3, … принято называть натуральными и их множества обозначается N, их часто используют для упорядочивания любого, произвольного множества объектов. Понятие Множество фундаметально.

Числа натуральные 1, 2, 3, …, и им противоположные -1, -2, -3, … и число 0 называются целыми. Они составляют множество Z.

Числа вида $\frac{p}{q}$, где p - целое, q - натуральное, называются рациональными. Они образуют множество $Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathrm{Z} \wedge q \in \mathrm{N} \right\}$.

Свойства.

1^0. Множество Q замкнуто относительно арифметических действии, т.е. сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел есть рациональное число.

2^0. Множество Q упорядочено. Т.е. 1) для любых рациональных чисел r_1 и r_2 выполняется только одино из соотношений $r_1 = r_2$, $r_1 < r_2$, $r_1 > r_2$; 2) для любых рациональных чисел r_1, r_2 и r_3 из $r_1 < r_2$, $r_2 < r_3$ и следует $r_1 < r_3$ (свойство транзитивности).

3^0. Множество Q плотно, т.е. между не равными рациональными числами r_1 и r_2 существует третье рациональное число r, *т.е.* $\forall r_1, r_2\ \exists r : r_1 < r < r_2$

Это утверждение легко проверяется, например $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, т.е. среднее арифметическое r_1 и r_2. Отсюда следует, что между не равными рациональными числами существуют бесконечно много рациональных чисел. Вообще говоря, понятие бесконечно много, непростое понятие.

Упраженение. Теорема **Евклида.** Множество простых чисел бесконечно.

Как известно со школы, рациональные числа могут выражаться конечными, либо бесконечными периодическими десятичными дробями. (Например: $\frac{2}{3} = 0,(6)$)…

Упражнение. Вспомните правлило обращения обыкновенных дробей в десятичные и наооборот.

В средней школе считалось, что любое рациональное число, как отрезок можно отложить от фиксированной точки на прямой.

Со школы изветстно следующее *определение.* Числа, представимые в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называются *иррациональными* числами.

Совокупность чисел рациональных и иррациональных получили общее название вещественных (или действительных) чисел[3].

Построим множество действительных чисел $\mathbb{R}$ строгого, по способу редложенному немецким математиком Рихардом Дедекиндом [].

ТЕОРЕМА. Не существует рационального числа, квадрат которого равен двум.

Доказательство. От противного. Допустим, что $\exists\ m/n \in \mathbf{Q}$: $(m/n)^2=2$, причем дробь m/n **несократима**. Если бы у числителя и знаменателя дроби был общий множитель, то мы бы на него сократили и добились допущения.

Тогда $\left(\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2\right) \Rightarrow \left(\frac{m^2}{n^2} = 2\right) \Rightarrow m^2 = 2n^2.$

Следовательно m^2 – четное, $\Rightarrow$ m тоже четное. Если бы это было не так, то $m=2k+1$, то есть $m^2 = (2k+1)^2= 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ – нечетное.

Но если m – четное число, то оно представимо равенством $m = 2k$, тогда $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n$, поэтому $n = 2k^2$ и следовательно n – четное. Наше рассуждение привело к тому, что оба числа n и m оказались четными, а следовательно дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит утверждению, что дробь m/n - несократима. Следовательно, число $\sqrt{2}$ - не является рациональным. QED

Замечание. Такие числа в школе мы называли **иррациональными**. Архит (древнегреческий мыслитель) установил, что числа: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11},$ т.е. неполные квадраты n являются иррациональными числами.

Отношение длины окружности к ее диаметру, обозначаемое как число π, также является иррациональным числом. Иррациональные числа представимы в виде бесконечных непериодических дробей. Об них мы говорим с Вами в следующих параграфах.

Основная теорема арифметики.

---

[3] Так принято в общеобразовательных, но не в физико-математических школах вводить понятие множества действительных чисел.

Всякое натуральное число $n>1$может быть представлено в виде $p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{k_3}\cdots p_r^{k_r}=n$, где $p_1, p_2, p_3,\dots p_k,\dots$ простые числа.

Теорема **Евклида.**

Множество простых чисел *бесконечно*.

Доказательство[4]. Доказательство проводится методом от противного. Т.е. пусть множество простых чисел конечно. Это значит, мы сможем пересчитать **все** простые числа, пусть их будет k. Обозначим их p_1, p_2, p_3, …, p_k. Построим число $\alpha = p_1p_2p_3\cdots p_k+1$. Какое оно? Во-первых, оно больше 1. Во-вторых, оно, очевидно, делится само на себя. В-третьих, оно больше самого большого простого числа p_k, и, кроме того, делится еще и на 1, а других простых делителей, входящих в произведение $p_1p_2p_3\cdots p_k$ у него нет! (Т.к. $\alpha - p_1p_2p_3\cdots p_k=1$). А это значит, если есть еще одно простое число, то оно не из списка, а это противоречие с возможностью пересчитать **все** простые числа. Что доказывает теорему.

2.2. Сечения множества рациональных чисел

Справедлив тот факт, что множество Q не исчерпывает всех точек на прямой. В смом деле. На прямой отложим отрезок длиной 1ед. А затем как на стороне построим квадрат, ясно площадь его равна будет 1ед^2 . Далее проведем диагональ квадрата, которая имеет длину равную $\sqrt{2}$. И оказывается что число $\sqrt{2}$ невозможно измерить стороной исходного квадрата. Эту теорему знали в античные времена в Греции. Какой вывод из этого факта? Отсюда следует, что несмотря на то что множежство рациональных чисел плотно на прямой, все же оно оказывается весьма «дырявым» и находятся числа на той же прямой но не являющимися рациональными числами. Или еще проще множество рациональных чисел не непрерывно.

Упражение. Объясните последнее предложение в абзаце.

Определение. Сечением в множестве всех рациональных чисел Q будем называть разбиение Q на два не пересекающихся непустых множества A и B, причем $a<b$ для любых $a\in A$, $b\in B$, т.е. $Q=A\cup B,\quad A\cap B=\varnothing$.

---

[4] По мнению авторов, это доказательство одно из самых изящных творений античной математической мысли.

По этому определению можно однозначно определить число (точку), по которому можно произвести сечение. Действительно зафиксируем в множестве Q число α и тогда наше множество разобьем на два подмножества. В силу же упорядоченности рациональных чисел элементы двух подмножеств обладают свойсвами $a \le \alpha, \quad \alpha < b$, причем все $a \in A \wedge b \in B$. Тогда сечение обозначают так: $\alpha = A \setminus B$, а полученные подмножества A и B называют нижним и верхним классами соответственно. (Точно так же определяется сечение в любом упорядоченном множестве).

Возможны следующие виды сечений.

Если нижний класс A имеет наибольшее число, а верхний класс B не имеет наименьшего, то $\alpha = A \setminus B$ называют сечением первого рода.

Если нижний класс A не имеет наибольшего числа, а верхний класс B имеет наименьшее число, то $\alpha = A \setminus B$ называют сечением второго рода.

а) Сечения, произведенные рациональными числами в Q, являются сечениями либо первого рода, либо второго рода.

Однако, существует сечение третьего рода, т.е. $a < \alpha < b$. Покажем это.

Пусть множество A *состоит* из всех отрицательных и не отрицательные рациональных чисел, квадраты которых меньше 2, все остальные содержатся во множестве B. Согласно определению, такое разбиение на два класса – сечение. Следует иметь в виду, что нет такого рационального числа, квадрат которого равняется 2 (Вспомните теорема из античной Греции). Покажем, что A не имеет наибольшего числа. Пусть r произвольное положительное рациональное число, принадлежащее A, следоваетольно $r^2 < 2$ Можно найти такое n, что $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$.

Действительно, $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n}$. И вот тут мы впервые встречаеся с очень важной процедурой математического анализа. Она определяется следующими словами: мы можем подобрать такое n , что $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n} < 2$. А следовательно, легко заметить и следующие неравенства $\frac{2r+1}{n} < 2 - r^2$, *а поэтому* $\Rightarrow$ $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$.

А это значит, что нижний класс A не имеет наибольшего числа (обоснуйте!). Аналогично можно показать, что верхний класс В не имеет наименьшего числа.

Если число производит сечение в Q и оно первого или второго рода, то оно называется рациональным. Сечение третьего рода производится числом, которого нет среди рациональных чисел (Соответствующие точки, производящие сечения на прямой, есть, скажем $\alpha = \sqrt{2}$). А это число, как мы выяснили в начале этого параграфа, не принадлежит множеству рациональных чисел, т.е. это числа третьего рода. Поэтому дадим определение:

числа, которые производят сечения в Q, но являеются сечениями третьего рода, называется *иррациональным* (обозначим их *J*).

Множество всех Q- рациональных и иррациональных чисел - J называют множеством R действительных чисел, т.е. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup J$.

Основные свойства множества действительных чисел

1-свойство. Множество действительных чисел упорядочено, т.е. для каждой пары α и β его элементов имеет место одно, и только одно, из соотношений: $\alpha = \beta,$ $\alpha > \beta,$ $\alpha < \beta$ и для любых α, β и γ верно $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.

Упорядоченность в множестве R устанавливается так. Пусть даны два числа

$\alpha = A \setminus B$ и $\beta = A' \setminus B'$

Будем считать $\alpha = \beta$**,** если соответствующие сечения тождественны, т.е. $A = A'$, $B = B'$.

Будем считать $\alpha < \beta$, если класс A целиком содержится в классе A', не совпадая с ним ($A \subset A'$) , а если $\alpha > \beta$, то определяется анологично (самостоятельно). Из свойств включения множеств, не трудно показать свойство транзитивности, т.е., что $\alpha < \beta, \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.

*2-свойство***.**

Теорема. Если $\alpha > \beta$, то всегда найдется рациональное число r такое, что $\alpha > r > \beta$.

Доказательство. По определению неравенства $\alpha > \beta$, $A' \subset A$ не совпадая с A. Тогда существует такое r_1, что $\beta < r_1 \le \alpha$. Ясно, что $r \in B'$. Можно всегда предположить, что B' не имеет наименьшего числа (см.

определение сечения). Поэтому существует $r < r_1$, $r \in B'$. Тогда $\beta < r < r_1 \le \alpha \Rightarrow \beta < r < \alpha$. Отсюда следует, что между любыми двумя числами существует бесконечно много чисел. В этом состоит свойство плотности. (рассмотреть частные случаи)

3-свойство (Непрерывность (полнота $\boldsymbol{R}$)).

Рассмотрим свойство действительных чисел, отличающих их от рациональных чисел. В множестве рациональных чисел не всегда есть число (пограничное), которое производит сечение в этом множестве. (Таковы сечения третьего рода). В этом состояла неполнота множеств Q, что явилось основанием для введения иррациональных чисел. Возникает вопрос: всегда ли в множестве действительных чисел R, существует пограничное число, производящее его сечение? Ответ на этот вопрос дает теорема Дедекинда.

Теорема. Сечение в множестве действительных чисел R бывает лишь первого либо второго рода, т.е. точка, производящая сечение α принадлежит R.

Доказательство. Пусть A / B – сечение в множестве действительных чисел. Обозначим через A_1 все рациональные числа, принадлежащие A, а через B_1 все рациональные числа, принадлежащие B. Легко убедиться (проверяется выполнимость определения сечения), что A_1 и B_1 образуют сечение в множестве рациональных чисел Q:

$\alpha = A_1 \setminus B_1$, где α - действительное число. Оно попадает в один из классов A или B. Предположим, что оно попало в A. Покажем, что тогда оно в A – наибольшее. Предположим противное. Тогда найдется число $\beta \in A$, такое, что $\alpha < \beta$. Согласно свойству плотности найдется такое рациональное число r, что $\alpha < r < \beta$.

Так как α и $\beta \in A$, то $r \in A_1$. Но так как $\alpha < r$, то $r \in B_1$. Мы пришли к противоречия. Следовательно, α - является наибольшим в A. Если же предположить, что α попало в B, то аналогично доказывается, что оно наименьшее в B. Теорема доказана.

Итак, сечения в множестве действительных чисел R не приводят к числам иной природы. В этом смысле R полно, или непрерывно.

Упражнение. Проведите геометрическую интерпретацию теоремы Дедекинда. (<u>Указание.</u> Обратите внимание на начало этого параграфа)

2.3. Арифметические действия над действительными числами и свойства

Определение суммы действительных чисел.

Пусть имеем два действительных числа α и β. Станем рассматривать рациональные числа a, a' и b, b', удовлетворяющие неравенствам:

$a < a < a'$ и $b < \beta < b'$ (1)

Суммой α+β чисел α и β назовём такое действительное число γ, которое содержится между всеми суммами вида a+b, с одной стороны, и всеми суммами вида $a' + b'$, - с другой:

$a + b < \gamma < a' + b'.$ (2)

Удостоверимся, прежде всего, что такое число γ существует для любой пары действительных чисел α, β.

Рассмотрим множества всевозможных сумм $a+b$. Это множество ограничено сверху, например, любой суммой вида $a' + b'$. Положим же $\gamma = \sup\{a + b\}$.

Тогда $a + b \le \gamma$ и, в то же время, $b < \beta < b'$.

Так как каковы бы ни были рациональные числа a, b, a', b', удовлетворяющие условиям (1), всегда можно числа a, b увеличить, а числа $a' + b'$ уменьшить с сохранением этих условий, то в полученных только что неравенствах, соединённых и равенствами, равенства на деле ни в одном случае быть не может. Таким образом, число γ удовлетворяет определению суммы.

Наконец, заметим, что если числа α и β оба рациональны, то их обычная сумма γ=α+β, очевидно, удовлетворяет неравенствам (2). Таким образом, данное выше общее определение суммы двух действительных чисел не противоречит старому определению суммы двух рациональных чисел.

На действительные числа переносятся все формально логические следствия из свойств сложения. В частности, для действительных чисел могут быть доказаны существование и однозначность разности α – β чисел α и β, установлено понятие абсолютной величины числа α (для которой мы сохраняем обозначение $| a |$) и т.д.

Определение произведения действительных чисел. Перейдём к умножению действительных чисел, ограничиваясь сначала положительными числами. Пусть же даны два таких числа α и β. Мы здесь также станем рассматривать всевозможные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (1), но и эти числа предположим положительными.

Произведением α β двух положительных действительных чисел α и β назовём такое действительное число γ, которое содержится между всеми произведениями вида ab и всеми произведениями $a'b'$

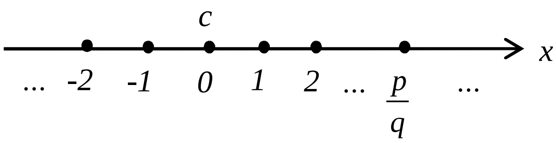
$$ab < \gamma < a'b'.$$

Доказательство существования и единственности числа γ аналогично приведённому выше при определении суммы двух действительных чисел.

§ 3. Числовые множества

3.1. Промежутки

Числовая ось – это геометрический образ множества действительных



чисел.

Ее обычно строят так.

Берется прямая, на которой указывается положительное направление; выбирается производная точка, соответствующая нулю; влево от нее отмечаются точки, соответствующие отрицательным числам, вправо – положительным; выбирается отрезок, представляющий единицу измерения. При помощи откладывания этого отрезка и строятся точки, соответствующие числам; доли этого отрезка представляют числа вида p/q, где p - целое, q - натуральное; так исчерпываются все точки, соответствующие рациональным числам. Но, как известно, на прямой есть точки, которые не соответствуют рациональным числам. Это как раз те точки, которые соответствуют сечениям III рода в множестве рациональных чисел; эти точки называются иррациональными числами, или иррациональными точками. Такое построение ставит во взаимно-однозначное соответствие множество действительных чисел и точек прямой. Построенная прямая называется числовой осью. На ней нет точек, которые соответствовали бы числам другой природы.

Вообще говоря, любую числовую ось определяют тремя элементами:

1. Прямая (геометрический образ);
2. Единица – масштабная едница (образ, например геометрический отрезок);

3. Начальная фиксированная точка на прямой с договоренность где положительное напраление, а где отрицательное направление, на выбранной нами прямой.

Некоторые специальные множества

В математическом анализе используются общепринятые множества: 1) отрезок; 2) интервал; 3) полуинтервал; 4) окрестность.

Определения.

1) Пусть заданы числа a и b.. *Отрезком* называют множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$. Его обозначают $[a,b]$.

Отрезок называют также сегментом.

2) *Интервалом* называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, и обозначают (a,b).

3) *Полуинтервалом* называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$, обозначается $[a,b)$, и $a < x \le b$, обозначается $(a,b]$.

Каждое из указанных множеств называют также *промежутком*. Длиной любого из указанных промежутков называется разность $b-a$.

4) Окрестностью точки x_0 называют любой интервал (a,b), серединой которого является x_0;

ε-окрестностью x_0, называется интервал $(x_0-\varepsilon,\ \ x_0+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Часто её обозначают так $O_\varepsilon(x_0)$.

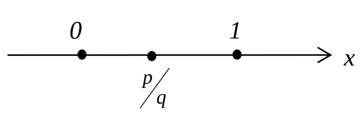
3.2. Ограниченные числовые множества. Границы числовых множеств

Непустое числовое множество обозначим через $\{x\}$.

Определение. Множество $\{x\}$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число a, что: $x \le a$ $(x \ge a)$ для $\forall x \in \{x\}$.

Пример: Множество натуральных чисел ограничено снизу любым неположительным числом, множество отрицательных чисел ограничено сверху.

Существуют множества, ограниченные и сверху и снизу. Например, так множество правильных положительных дробей $\frac{p}{q}$,



($p>0,\ q>0,\ \wedge\ p<q,\ \Rightarrow 0<\dfrac{p}{q}<1$) .

Оно ограничено сверху 1, снизу 0. Такое множество называют *ограниченным*.

Всякое ограниченное множество может быть размещено на некотором отрезке, иначе, стать подмножеством множества точек некоторого отрезка.

Если для множества существует хотя бы одна граница, то существует и бесконечное множество границ (обоснуйте в качестве упражнения!).

Определение. Наименьшая из всех верхних границ называется *точной верхней границей* данного множества, обозначается как $\sup\{x\}$ (*sup* - от слова *supremum* – наивысший), а наибольшая из всех нижних границ, называется *точной нижней границей*, данного множества, и обозначается как $\inf\{x\}$ (*inf* - от слова *infimum*- наинизший).

Вообще говоря, не всякое множество может иметь наибольшее и наименьшее число, например, множество всяких дробей: (0; 1). Однако может быть сформулирована теорема, которая гарантирует существование точной верхней и точной нижней границы.

Теорема. Множество, ограниченное сверху (снизу), имеет точную верхнюю (нижнюю) границу.

Доказательство проведем для точной верхней границы. Пусть множество $\{x\}$ ограничено сверху, числом a, тогда для $\forall x\in\{x\}\quad x\le a$.

Рассмотрим следующие два случая.

$a\in\{x\}$, тогда a, по определению, является точной верхней границей, принадлежащей $\{x\}$, и этим доказательство завершается: $a=\sup\{x\}$.

$a\notin\{x\}$, произведем сечение $A\setminus B$ следующим образом: к верхнему классу B отнесем все верхние границы этого множества, а к нижнему все остальные числа. Это разбиение является сечением, так как все числа размещены по классам A и B. Итак, в множестве действительных чисел определено число $\alpha=\sup\{x\}$, производящее это сечение. Притом это число является либо наибольшим в классе A или наименьшим в классе B, так как в множестве действительных чисел возможны лишь сечения 1 и 2 рода. Наибольшим в A оно быть не может, так как верхние границы $a\notin\{x\}$.

Следовательно, α является наименьшим в классе B. Так как B есть множество верхних границ множества $\{x\}$, то α является точной верхней границей множества $\{x\}$: $A \setminus B = \alpha$.

Аналогично доказывается существование точной нижней границы.

О двух свойствах границ

Точная верхняя граница обладает двумя свойствами:

1) $x \le \sup\{x\}\ \forall x \in \{x\}$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' > \sup\{x\} - \varepsilon,\ x' \in \{x\}$ - это свойство вытекает из того, что точная верхняя граница наименьшая из всех верхних границ и если бы это свойство не выполнялось, то $\sup\{x\}$ не было бы точной верхней границей.

Два свойства нижней границы:

1) $x \ge \inf\{x\}, \forall x \in \{x\}$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x',\ \ x' \in \{x\},\ \ \inf\{x\} + \varepsilon > x'$; если бы это не выполнялось, то $\inf\{x\}$ не являлось бы точной нижней границей.

Первое свойство в $\sup\{x\}$ и $\inf\{x\}$ характеризует ограниченность множества, второе характеризует точность границ $\sup\{x\}$ и $\inf\{x\}$.

3.3. Абсолютные значения, или модули и их свойства

Определение. Модулем, числа x называется $|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \ge 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Свойства модулей чисел

I . $|\alpha| \le \beta \Leftrightarrow -\beta \le \alpha \le \beta$.

II. $|x+y| \le |x| + |y|$

III. $|x-y| \le |x| + |y|$.

IV. $|x| - |y| \le |x-y|$ (1)

V. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ **VI.** $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \cdot y \ne 0$

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Доказать свойства множества рациональных чисел.
2. Сформулировать аксиому Архимеда.

3. Привести пример отрезка, длина которого не измеряется рациональным числом.

4. Доказать, что на множестве рациональных чисел существуют сечения трёх родов.

5. В примере б) (пункт 2.2.) показать, что верхний класс В не имеет наименьшего числа.

6. Показать, что действительное число производящее сечение в области действительных чисел и принадлежащее верхнему классу является в нём наименьшим.

7. Пусть с - положительное число, не являющееся точным квадратом целого числа, и $A \setminus B$ сечение, определяющее действительное число $\sqrt{c}$, где в класс В входят все положительные рациональные числа в такие, что $b^2 > c$, а в класс А – все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе А нет наибольшего числа, а в классе В нет наименьшего числа.

8. Построить сечение, определяющее число а) 2; b) -5/4; c) $\sqrt{3}$; d) $2^{\sqrt{2}}$
.

9. Доказать, что если *p* простое число, то $\sqrt{p}$ иррациональное число.

10. Доказать, что следующие числа иррациональны: a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; c) $\log_2 3$.

11. Доказать, что сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

12.Доказать однозначность суммы $\gamma=\alpha+\beta$ определяемой неравенствами (2) (пункт 2.3).

13.Доказать коммутативность, ассоциативность операции сложения и существование нулевого элемента.

14.Доказать для любого действительного числа существование противоположного.

15.Установить свойство. Если $\alpha > \beta$, то $\forall \gamma \in R$ следует $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

16.Доказать, существование и единственность произведения двух действительных чисел.

17.Доказать коммутативность, ассоциативность операции умножения и существование единичного элемента.

18.Доказать существование точной нижней границы, ограниченного снизу числового множества.

19. Найти точную верхнюю и точную нижнюю границы множества X, где a) $X=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$;

b) $X=\left\{0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},...,1+\frac{(-1)^n}{n},...\right\}$; c) [5;8); d) (-4;4).

Существуют ли наибольший, наименьший элемент множества X?

20. Пусть $\{-x\}$ множество чисел, противоположных числам $x\in\{x\}$. Доказать что

а) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$

б) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$

21. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений x y, где $x\in\{x\}$ и $y\in\{y\}$, причём $x\geq 0$ и $y\geq 0$. Доказать равенства,

а) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\inf\{y\}$

б) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\sup\{y\}$

22. Пусть $\{x+y\}$ есть множество всех сумм, где $x\in\{x\}$ и $y\in\{y\}$. Доказать равенства:

а) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$

б) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$

23.Доказать неравенства:

а) $|x+y|\leq|x|+|y|$

б) $||x|-|y||\leq|x-y|$

2-ГЛАВА. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§1. Понятие числовой последовательности.

В школьном курсе математики читателю встречались числовая последовательность вида

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ldots,\ \underset{n}{a+(n+1)d},\ldots$$

(арифметическая прогрессия) или последовательность вида

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{aq},\ \underset{3}{aq^2},\ldots,\ \underset{n}{aq^{n-1}},\ldots$$

(геометрическая прогрессия) эти прогрессии и есть примеры последовательностей.

Представим себе натуральный ряд:

$$1,2,3,\ldots,n,\ldots,n',\ldots, \qquad (1)$$

в котором числа расположены в порядке возрастания, так что большее число n' следует за меньшим числом n (или меньшее число n предшествует большему числу n'). Если теперь заменить в ряде (1), по какому-нибудь закону, каждое натуральное число n некоторым действительным числом x_n, то и получится числовая последовательность:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,x_n,\ldots,\ x_{n'},\ldots, \qquad (2)$$

члены или элементы которой x_n занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров. При $n' > n,$ член $x_{n'}$ следует за членом x_n (x_n предшествует $x_{n'}$), независимо от того, будет ли само число $x_{n'}$ больше, меньше или даже равно числу x_n. Часто такую операцию в математическом нализе называют упорядочение некоторого произвольного множества X. В чем суть такой операции? Она состоит в том что каждому или какому-то по выбранному признаку присваивается вполне конкретный и единственный номер по следованию ряда чисел из множества натуральных чисел. Приведем несколько примеров.

1. Пусть нас интересует последовательность четных чисел из множества натуральных чисел, т.е. A=$\{x\,|\,2,4,6,8,10,12,\ldots\}$; как нам занумеровать эту последовательность? Присвоить номер каждому члену последовательности! Пусть члены этой последовлательности после нашей нумерации будут иметь такой вид $\{x_n = 2n,\ n\in\mathbb{N}\}$. Верно ли что последнее мноежество это и есть множество А?

2. Рассмотрим следующее множество B= $\left\{x\,|\,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{7},\quad ...\right\}$. Понятно, что это множество можно задать правилом $\left\{x_n=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\right\}$

§2. Предел числовой последовательности

Определение. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для каждого сколь угодно малого положительного числа ε, существует такой номер N последовательности, что все её члены x_n, у которых номер $n>N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n-a|<\varepsilon. \qquad (1)$$

Тот факт, что a является пределом числовой последовательности, записывают так:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

Говорят также, что числовая последовательность стремится к a, и пишут $x_n\to a$.

Иногда число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$, и говорят, что эта последовательность сходится к a.

То же определение коротко может быть сформулировано так:

Число a есть предел числовой последовательности x_n, если её значения отличаются от a сколь угодно мало, начиная с некоторого места последовательности. Фомально, еще более кратко эти определения можно переписать так:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\ \forall\varepsilon>0, \exists\, N(\varepsilon):\forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon.$$

Рассмотрим детально это, можно сказать основное определение математического анализа.

Неравенство (1), где ε произвольно, сколь угодно малое, и есть точная запись утверждения, что x_n от a «отличается сколь угодно мало», а номер N как раз и указывает то «место (номера) последовательности, начиная с которого» это неравенство выполняется.

Важно дать себе отчёт в том, что номер N, вообще говоря, не может быть указан раз навсегда: он зависит от выбора числа ε. Для того чтобы подчеркнуть это, мы иной раз в место N будем писать N_ε. При уменьшении числа ε соответствующий номер $N = N_\varepsilon$, вообще говоря, увеличивается: чем большей близости значений последовательности x_n к a мы требуем, тем более далёкие значения её – в ряду $\{x_n\}$ – приходится рассматривать.

Неравенство (1) равносильно следующим неравенствам:

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$

или $$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \qquad (2)$$

(А почему?)

Этими неравенствами мы часто будем пользоваться впоследствии.

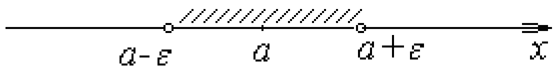
Упражнение.

А) А сколько членов последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ находится в окрестности точки a, определнной неравенствами (2).

Б) А сколько будет членов последовательности в случае, когда все значения последовательности x_n равны постоянному числу a.

Указание, подсказка к Б). Очевидно, что тогда $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, но на этот раз неравенство (1) будет выполняться для любого $\varepsilon > 0$ одновременно при всех значениях x_n.

Если изобразить числа $a, a \pm \varepsilon$ и значения x_n нашей числовой последовательности точками на числовой оси, то получится наглядное геометрическое истолкование предела числовой последовательности.



Какой бы малый отрезок (длины 2ε) с центром в точке a ни взять, все точки x_n начиная с некоторой из них, должны попасть внутрь этого отрезка (так что вне его может остаться разве лишь конечное число этих точек). Точка, изображающая предел a, является как бы средоточием сгустка точек, изображающих значения числовой последовательности.

Введем еще одно важное для понимания развития математического анализа понятие – понятие последовательности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательностью назовем однозначную функцию, построенную на множестве натуральных чисел.

Между множеством **X** и множеством **N** устанавливается инъективное отображение между множеством натуральных чисел и множеством **X**. Результатом будет следующее множество: $\{x_1, x_2, x_3. \ldots, x_n, \ldots\}$

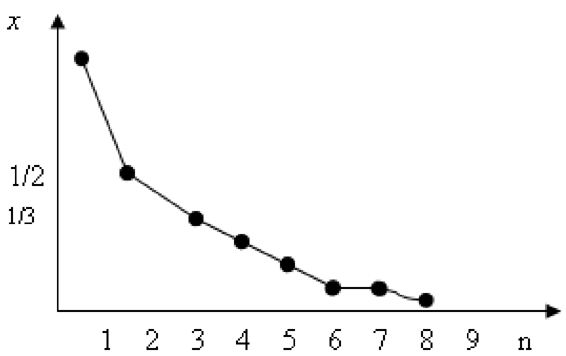


Рис.4.

Говорят что последовательность $\{x_n\}$ задана, если известно правило по которому осуществляется отображение или задана формула общего члена $x = f(n) \Leftrightarrow x_n$. Проиллюстрируем процесс, показав его образно (графически). Пусть абсциссой будет множество натуральных чисел **N**, а ординатой значение из множества X. Пусть дана последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$, построим её график (см. рис.).

Первый член последовательности равен 1, второй $\dfrac{1}{2}$, третий $\dfrac{1}{3}$, и т.д., следуя формуле общего члена последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$ мы можем получить любой её член.

Наблюдение за графиком последовательности: точки это члены последовательности (последняя изображенная на нашем графике $x_8 = \dfrac{1}{8}$), а линия между точками это линия движения наших глаз, понятно, что если Вам предложить найти точку девятую или следующую за ней, образ члена последовательности под номером 10, взгляд в результате отметит (приблизительно) местоположение точки на плоскости. Мы также видим, что точки графика **неограниченно приближается** к оси абсцисс Ox, **стремится** к ней.

Отметим, что слова «неограниченно приближается» и «стремится» понятны каждому, пока речь идет о наглядных свойствах графика. Но, если необходимо их использовать в математических рассуждениях и вычислениях? Понятно, что такого понимания недостаточно. Мы должны точно сформулировать, что означают эти выражения на языке чисел. Это приводит нас к одному из самых важных понятий, используемых в математике, – к понятию **предела**.

Люди естественно пришли к понятию предела, а с ним к понятию бесконечности и непрерывности. История философии поставляет нам множество тем развития проблемы предельного перехода. Апории Зенона первые явные указания на существование указанных проблем. Напомним один из них:

Дихотомия. Чтобы преодолеть путь, нужно сначала преодолеть половину пути, а чтобы преодолеть половину пути, нужно сначала преодолеть половину половины, и так до бесконечности. Поэтому движение никогда не начнётся.

Или вот еще одна интерпретация апория **Ахила и черепахи** :

Если принять что расстояние между Ахилесом, который помчался за черепахой, за отрезок равный единице (чего-нибудь км, ярдов, метров), прежде чем он сможет догнать черепаху ему нужно будет пробежать половину от исходного пути (т.е. от единицы), затем половину от половины, а далее половину от предыдущей половины и т.д. Формально это процесс представляется как последовательность действий: $1:2=\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2}:2=\frac{1}{4},\ \ \frac{1}{4}:2=\frac{1}{8},\ \ \frac{1}{8}:2=\frac{1}{16},\cdots,\ \ \frac{1}{2^n}:2=\frac{1}{2^{n+1}},\cdots$ или короче можно записать так $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{n+1}},\cdots$ общий член этой последовательности $x_n=\frac{1}{2^{n+1}}$. Поскольку величина $\frac{1}{2^{n+1}}$ определяет расстояние между Ахилом и черепахой , которое ни при каком n не равно нулю, становится ясно, что как бы долго не бежал Ахил обнаруживается, что расстояние между Ахилом и черепахой уменьшается и стремится к нулю, но в ноль не обращается, а следовательно он не догонит черепаху.

Замечание. Первые сложности, отраженные в философских размышлениях о переходе к бесконечному мы находим в апориях Зенона (около 450 г. до н. э.). Его парадоксы оказались в противоречии с представлениями обыденного опыта и интуитивными представлениями относительно бесконечно малого и бесконечно большого или, иначе, конкретного опыта данного нам в ощущениях и степени развития абстрактного знания, а если более строго потенциальной осуществимости и актуально существующего.

В самом деле, считалось, что сумму бесконечно многих величин[5] можно сделать сколь угодно большой, даже если каждая величина крайне мала ($\infty\times\varepsilon=\infty$), а также что сумма конечного или бесконечного числа ве-

---

[5] О понятии величина, и, его значении в античной математике написано немало исследований, мы здесь не будет заострять на нем внимание, хотя именно это понятие оказало существенное влияние на его развитие.

личин размера нуль равна нулю ($n\times 0=0,\ \infty\times 0=0$). Критика Зенона была направлена против таких представлений, и его четыре парадокса сформулированы так, чтобы подчеркнуть противоречия в понятиях движения и времени, а вместе с тем подчеркнуть значение непрерывности. Аргументы Зенона показали, что конечный отрезок можно разбить на бесконечное число малых отрезков, каждый из которых конечной длины. Они показали также, что мы встречаемся с затруднениями при объяснении того, каков смысл заявления, что прямая «состоит» из точек. [22].

Рассмотрим упомянутое выше понятие **предела.** Для этого обратимся к фрагменту интересного учебника Д. К. Фаддеева и И. С. Соминского [26].

«Последовательность $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,$ общий член которой $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, изображена на рисунке .

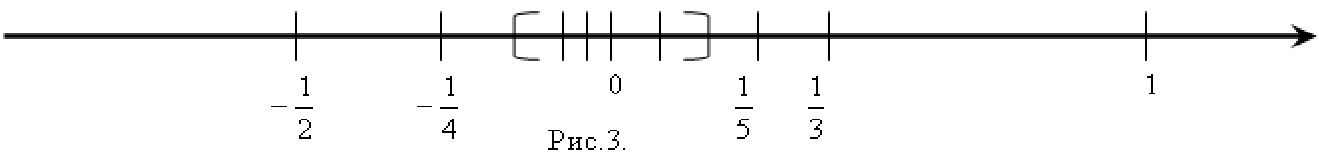


Рис.3.

Наблюдая за расположением точек последовательности, легко заметить, что они все ближе и ближе подходят к нулю, накапливаются около нуля. [проверьте это!]

Пусть ε любое положительное число. Возьмем на числовой оси отрезок длиной 2ε с центром в точке О.

Найдется такой номер N, что всякая точка последовательности с номером, большим N, будет находиться внутри этого отрезка.

Число N, конечно, зависит от ε. Чем меньше ε, тем, вообще, больше будет N.

Определение 1: Число a называется пределом последовательности, если для каждого положительного числа ε, сколь бы мало оно не было, существует такой номер N, что все точки последовательности, у которых номер больше N, будут находиться от a на расстоянии меньшем, чем ε .

Для того чтобы точка b находилась на числовой оси на расстоянии , меньшем ε от точки a, необходимо и достаточно, чтобы $|b-a|<\varepsilon$.

На основании этого определение предела можно сформулировать так:

Определение 2: Число a называется пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *если для каждого положительного числа ε, сколь бы мало* *оно не было, существует такой номер N, что все значения* a_n, *у которых номер n>N, удовлетворяют неравенству* $|a_n - a| < \varepsilon$.

Это же определение можно сформулировать и так:

Определение 3: Число а называется пределом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *если члены последовательности, начиная с некоторого места, отличаются от а сколь угодно мало*» [26].

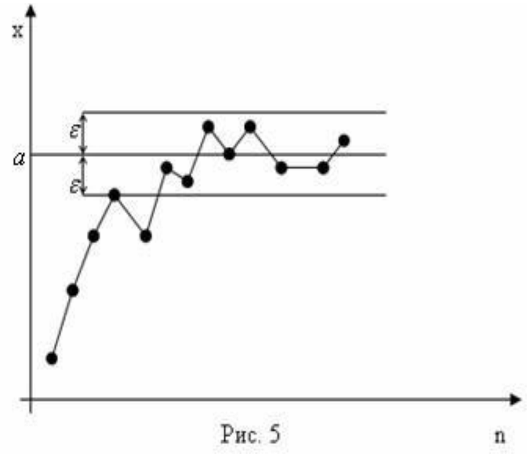


Рис. 5

Число а называется пределом последовательности $\{x_n\}$, *если для любого положительного числа ε (греческая буква «эпсилон») найдется такое число k, что для всех номеров n, больших k, выполняется неравенство* $|x_n - a| < \varepsilon$. Записывают этот факт так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу определения предела.

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу определения предела.

1) Рассмотрим график последовательности $\{x_n\}$ (рис.5)

Какое свойство этого графика выражается равенством $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

Проведем горизонтальную прямую $x = a$ и построим полоску ширины 2ε, окружающую эту прямую. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что точка (n, x_n) находится внутри построенной полоски. Таким образом, если последовательность $\{x_n\}$ стремится к а, то почти весь график последовательности лежит внутри указанной полоски.

Так как в определении предела число ε может быть любым сколь угодно малым, описанное свойство графика сохраняется для любой сколь угодно малой полоски. Итак, определение предела может быть пересказано следующим образом.

Число а называется пределом последовательности $\{x_n\}$, *если почти весь график этой последовательности лежит внутри сколь угодно узкой полоски, окружающей прямую* $x = a$.

2) Наглядное представление о пределе можно получить, если предположить, что члены последовательности – какие-то физические величины, и мы можем измерить их только с определенной точностью, которую допускают наши приборы.

Обозначим через ε наименьшую величину, различаемую прибором. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что мы не сможем отличить x_n от a.

Таким образом, условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что при любой точности измерения последовательность $\{x_n\}$, начиная с некоторого места, не отличается от постоянной последовательности *a, a, a, …*» [5 (27)].

Далее мы хотим напомнить слова профессора А.К. Власова: «Математику нельзя изучить как сборник рецептов, потребных на всякий случай. Не только самодовлеющее, но и служебное значение математики заключается в выработке привычки к математическому мышлению. Даже при малом запасе сведений математически воспитанная мысль позволяет использовать этот запас в надлежащих целях, а без привычки к математическому мышлению и большой запас теорем и формул является бесцельным, втуне лежащим, ненужным богатством» [29, с. I]. При этом следует также напомнить что фраза «мне не дано» или «математика это не моё», или уж, совсем часто, встречающийся самоприговор «я гуманитарий», кажутся совсем нелепыми, например, если провести аналогию со здравым смыслом или обыденным опытом. Каждый студент, будущий ли он философ или архивист, всегда следуя своему жизненному опыту (во всех его проявлениях) не отказывается от рациональных шагов при достижении цели. На самом деле, при оценке своих возможностей необходимо «смотреть на себя и на свой опыт со стороны», графически представить цели и задачи, необходимые для достижения цели, решать их по мере понимания «увиденного». Иначе, «плыть» по Заданности или абстрагироваться, представить прогностическую схему, а попросту Задуматься.

Замечание. Одним из способов проведения линий на плоскости, попросту графиков функций может быть способ использования «знаний» из пакета прикладных математических программ. Доверяясь умным пакетам можно построить многие графики функций, но главное можно увидеть воочию свойства функций и сделать выводы. Конечно, этот метод не безупречен, ниже в Лекциях мы придерживаемся классического способа построения графиков функций, но считаем, что умение пользоваться математическим пакетом прикладных программ ученику не повредит, в некоторых случаях облегчит размышления над упражнениями, теоремами предлагаемого курса.

§3. Бесконечно малые последовательности

Случай, когда числовая последовательность стремится к нулю: $x_n \to 0$, представляет особый интерес. Числовая последовательность x_n, *имеющая своим пределом нуль, называется бесконечно малойпоследовательностью,* или просто бесконечно малой.

Если в определении предела числовой последовательности положить $a=0$, то неравенство (1) примет вид

$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$ (для $n > N_\varepsilon$).

Таким образом, данное выше определение бесконечно малой можно сформулировать без упоминания термина «предел»:

x_n *называется бесконечно малой, если она по абсолютной величине становится и остаётся меньшей сколь угодно малого наперёд заданного числа* $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого места.

Если вернуться к общему случаю числовой последовательности x_n, имеющий предел a, то разность

$a_n = x_n - a$

между переменной и её пределом, очевидно, будет бесконечно малой: ведь, в силу (1),

$|a_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ (для $n > N_\varepsilon$).

Обратно, если a_n есть бесконечно малая, то $x_n \to a$. Это приводит нас к следующему утверждению:

Для того чтобы последовательность x_n *имела своим пределом постоянное число* a*, необходимо и достаточно, чтобы разность между ними* $a = x_n - a$ *была бесконечно малой.*

В связи с этим можно было бы дать и для понятия «предел» последовательности и другое определение (равносильное нам известному (Обоснуйте!)):

Число a называется пределом числовой последовательности x_n, если разность между числом и любым членом последовательности есть бесконечно малая последовательность.

Итак, если последовательность $x_n \to a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то она может быть представлена в виде

$x_n = a + \alpha_n$,

где α_n есть бесконечно малая последовательность при $n \to \infty$, и обратно, если последовательность x_n допускает такое представление, то она имеет пределом своим число a. Этим часто пользуются на практике для установления предела числовой последовательности.

Примеры. 1) Рассмотрим числовые последовательности

$$x_n = \frac{2}{n}, \quad x_n = -\frac{3}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n};$$

им отвечают такие последовательности значений:

$$2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ldots,$$

$$-3,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{3},\ -\frac{3}{4},\ldots,$$

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{8},\ldots$$

Все три последовательности являются бесконечно малыми последовательностями, т.е. имеют пределом 0. Действительно, для них

$$|x_n| = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

лишь только $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Таким образом, в качестве N_ε можно, например, взять наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{3}{\varepsilon}$.

§4. Некоторые теоремы о числовой последовательности имеющей предел

Теорема 1. *Если* числовая последовательность. x_n *стремится к пределу* a *и* $a > p$ $(a < q)$*, то и все значения переменной, начиная с некоторого, также будут* $x_n > p$ $(< q)$.

Пусть числовая последовательность x_n имеет предел a. При любом $p < a$ (или при любом $q > a$) легко подобрать число $\varepsilon > 0$ так, чтобы было $a - \varepsilon > p$ (или $a + \varepsilon < q$); для этого достаточно взять ε меньшим разности $a - p$ (или $q - a$). Но, по определению предела, найдётся такой номер N, что для $n > N$ будет выполнятся неравенство $x_n > a - \varepsilon$ $(x_n < a + \varepsilon)$, а следовательно – и подавно неравенство $x_n > p$ (или $x_n < q$).

Это простое предложение имеет ряд полезных следствий.

Теорема 2. *Если числовая последовательность* x_n *стремится к пределу* $a>0\ (<0)$, *то и сама переменная* $x_n>0\ (<0)$, *начиная с некоторого места.*

Для доказательства достаточно применить предыдущее утверждение, взяв $p=0\ \ (q=0)$.

Можно установить и более точный результат:

Теорема 3. *Если числовая последовательность* x_n *стремится к пределу* a, *отличному от нуля, то, по крайней мере, достаточно далёкие значения* x_n *по абсолютной величине превзойдут некоторое положительное число* r:

$|x_n|>r>0$ (*для* $n>N$).

Действительно, при $a>0\ (<0)$ можно взять $0<p<a\ \ (a<q<0)$ и положить $r=p\ \ (r=|q|)$.

Теорема 4. Е*сли, числовая последовательность* x_n *имеет предел* a, *то она является ограниченной,* в том смысле, что все её значения по абсолютной величине не превосходят некоторой конечной границы, начиная с некоторого номера последовательности:

$|x_n|\le M \quad (M=const.;\ n=1,2,3...)$.

Возьмём число $M'>|a|$, так что - $M'<a<M'$, и положим $p=-M'$, а $q=M'$. Найдётся такой номер N, что для $n>N$ будет

$-M'<x_n<M'$ или $|x_n|<M'$.

Это неравенство выполняется при $n=N+1, N+2,...,$ так что ему могут не удовлетворять лишь первые N значений нашей последовательности (или некоторые из них).

Поэтому, если положить M равным наибольшему из чисел

$|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, M'$, то уже для всех значений x_n будем иметь место: $|x_n|\le M$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Последовательность* x_n *не может одновременно стремиться к двум различным пределам.*

Действительно, допустим противное: пусть одновременно $x_n\to a$ и $x_n\to b$, причём $a<b$. Возьмём любое число r между a и b: $a<r<b$.

Поскольку $x_n\to a$ и $a<r$, найдётся такой номер N', что для $n>N'$ будет выполняться неравенство: $x_n<r$. С другой стороны, раз $x_n\to b$ и $b>r$ найдётся и такой номер N'', что для $n>N''$, окажется: $x_n>r$. Если взять номер N большим и N', и N'', то соответствующее значение переменной x_n будет и $< r$, и $> r$, что невозможно.

Этот противоречие доказывает наше утверждение.

§5. Бесконечно большие последовательности

Бесконечно малымпоследовательностям, в некотором смысле, противопоставляются бесконечно большие последовательности.

Числовая последовательность x_n *называется бесконечно большой, если она по абсолютной величине становится и остаётся большей сколь угодно большого наперёд заданного числа* $E > 0$, *начиная с некоторого места*:

$| x_n | > E$ $(для \ \ n > N_E) |$.

Если числовая последовательность x_n *является бесконечно большой, то говорят также, что она имеет предел ∞ или стремится к ∞, и пишут*

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, \ \ x_n \to \infty$.

Особенно важны те частные случаи, когда бесконечно большая последовательность x_n (по крайней мере, для достаточно больших n) сохраняет определенный знак (+ или -); тогда, в соответствии со знаком, говорят, что последовательность x_n имеет предел +∞ или -∞, и пишут:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty, \ \ x_n \to +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty, \ \ x_n \to -\infty$.

Если числовая последовательность x_n *является бесконечно большой, то её обратная величина* $a_n = \dfrac{1}{x_n}$ *будет бесконечно малой.*

Возьмём любое число $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \to \infty$, то для числа $E = \dfrac{1}{\varepsilon}$ найдётся такой номер N, что $| x_n | > \dfrac{1}{\varepsilon}$, лишь только $n > N$.

Тогда для тех же знаний n, очевидно будет $| a_n | < \varepsilon$, что и доказывает наше утверждение.

§6. Предельный переход в равенстве и неравенстве

Соединяя две числовые последовательности x_n и y_n знаками равенства или неравенства, мы всегда подразумеваем, что речь идёт о соответствующих значениях их, т.е. о значениях с одним и тем же номером.

Теорема 1. *Если две числовые последовательности x_n, y_n при всех изменениях равны $x_n = y_n$, причём каждая из них имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то равны и эти пределы: $a = b$.*

Следует из единственности предела.

Этой теоремой пользуются обычно в форме предельного перехода в равенстве: из $x_n = y_n$ заключают, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 2. Если для двух числовых последовательностей x_n, y_n *всегда выполняется неравенство $x_n \geq y_n$, причём каждая из них имеет конечный предел: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то и $a \geq b$.*

Это теорема устанавливает допустимость предельного перехода и неравенстве (соединённом с равенством): из $x_n \geq y_n$ можно заключить, что $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Конечно, знак > всюду может быть заменён знаком <.

Мы обращаем внимание читателя на то, что из строгого неравенства $x_n > y_n$, вообще говоря, не вытекает строгое же неравенства $\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n$, а только, по-прежнему $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$. Так, напр., $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ при всех n,и тем не менее

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) = 0.$$

При установлении существования и величины предела последовательности иногда бывает, полезна теорема:

Теорема 3. *Если для последовательностей x_n, y_n, z_n всегда выполняются неравенства $x_n \leq y_n \leq z_n$, причём последовательности x_n и z_n стремятся к общему пределу a:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a,$$

то и последовательность y_n имеет тот же предел:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По этому ε, прежде всего, найдётся такой номер N', что при $n > N'$

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$.

Затем, найдётся такой номер N'', что при $n > N''$

$a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$.

Пусть N будет больше обоих чисел N' и N''; тогда, при $n > N$, выполняются оба предшествующих двойных неравенства. Тогда

$a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon$.

Окончательно, при $n > N$

$a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$ или $|y_n - a| < \varepsilon$.

Таким образом, действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Из этой теоремы, в частности, следует: *если при всех* n $a \le y_n \le z_n$ *и известно, что* $z_n \to a$ *то и* $y_n \to a$. Впрочем, это очень легко доказать и непосредственно.

Лемма 1. *Сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.*

Проведём доказательство для случая двух бесконечно малых α_n и β_n (общий случай исчерпывается аналогично).

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Согласно определению бесконечно малой, по числу ε для бесконечно малой a_n найдётся такой номер N', что при $n > N'$ будет $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Точно так же и для бесконечно малой β_n найдётся такой номер N'', что при $n > N''$ будет $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Если взять натуральное число N большим обоих чисел N' и N'', то при $n > N$ одновременно выполняются оба эти неравенства, так что

$|a_n + \beta_n| \le |a_n| + |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Итак, величина $a_n + \beta_n$, действительно, является бесконечно малой.

Лемма 2. *Произведение ограниченной переменной* x_n *на бесконечно малую* a_n *есть величина бесконечно малая.*

§7. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

Следующие теоремы важны в том отношении, что с их помощью во многих случаях делается ненужным обращение всякий раз к определению понятия «предел», с разысканием по заданному ε соответствующего N, и т.д. Этим вычисление пределов значительно облегчается.

Теорема 1. *Если числовые последовательности* x_n *и* y_n *имеют конечные пределы:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то и сумма (разность) их также имеет конечный предел, причём*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Из условия теоремы следует, что

$$x_n = a + a_n,\ \ y_n = b + \beta_n, \qquad (1)$$

где a_n и β_n - бесконечно малые. Тогда

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (a_n \pm \beta_n).$$

Здесь $a_n \pm \beta_n$ есть бесконечно малая по лемме 1; следовательно, пользуясь вторым определением предела, можно утверждать, что последовательность $x_n \pm y_n$ имеет предел, равный $a \pm b$, что и требовалось доказать.

Это теорема и её доказательство переносятся на случай любого конечного числа слагаемых.

Теорема 2. *Если числовые последовательности* x_n *и* y_n имеют конечные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то и произведение их также имеет конечный предел, и*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

Исходя из тех же равенств (1), имеем на этот раз

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2 из , есть бесконечно малая последовательность. Отсюда и следует, что последовательность $x_n y_n$, действительно, имеет пределом ab.

Это теорема может быть распространена на случай любого конечного числа сомножителей (например, методом математической индукции).

3^0. *Если числовые последовательности* x_n *и* y_n *имеют конечные пределы:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причём* b *отлично от 0, то их отношение также имеет конечный предел, и* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Поскольку $b \neq 0$, с некоторого места, не только $y_n \neq 0$, но даже

$$|y_n| > r > 0,$$

где r – постоянное число. Ограничимся теми значениями номера n, для которых это выполняется; тогда отношение $\frac{x_n}{y_n}$ заведомо имеет смысл.

Исходя, по-прежнему, из равенств (1), имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Выражение в скобках, в силу лемм 1 и 2, есть бесконечно малая последовательность. Множитель же при ней, на основании вышесказанного, будет ограниченной переменной:

$$\left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{1}{|b|r}.$$

Следовательно, по лемме 2, всё произведение справа будет бесконечно малым, а оно представляет разность между последовательностью $\frac{x_n}{y_n}$ и числом $\frac{a}{b}$. Итак, предел $\frac{x_n}{y_n}$ есть $\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

§8. Предел монотонной числовой последовательности

Теоремы о существовании пределов переменных, которые приводились до сих пор, имели такой характер: в предположении, что для одних числовых последовательностей пределы существуют, устанавливалось существование пределов для других числовых последовательностей, так или иначе связанных с первыми. Вопрос о признаках существования конечного предела для заданной числовой последовательности, безотносительно к другим переменным, не ставился. Мы рассмотрим здесь один простой и важный частный класс переменных.

Числовая последовательность x_n называется возрастающей, если

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots,$$

т.е. если из $n' > n$ следует лишь $x_{n'} > x_n$. Её называют неубывающей, если

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots,$$

т.е. если из $n' > n$ следует лишь $x_{n'} \ge x_n$. Можно и в последнем случае называть переменную возрастающей, если придать этому термину более широкий смысл.

Аналогично устанавливается понятия об убывающей – в узком или широком смысле слова числовой последовательности:

$x_1 > x_2 > ... > x_n > x_{n+1} > ...$

или

$x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ge x_{n+1} \ge ...,$

так что из $n' > n$ следует $x_{n'} < x_n$ или $x_{n'} \le x_n$ соответственно.

Переменные всех этих типов, изменяющиеся в одном направлении, объединяются под общим названием монотонных. Обычно о числовой последовательности говорят, что она «монотонно возрастает» или «монотонно убывает».

По отношению к монотонным числовым последовательностям имеет место следующая – фундаментальной важности-

Теорема. *Пусть дана монотонно возрастающая числовая последовательность* x_n*. Если она ограничена сверху:*

$x_n \le M \quad (M = const.;\ n = 1, 2, 3...),$

то необходимо имеет конечный предел, в противном же случае – она стремится к $+\infty$.

Всегда имеет предел монотонно убывающая числовая последовательность x_n*. Её предел конечен, если она ограничена снизу:*

$m \le x_n \quad (m = const.;\ n = 1, 2, 3...),$

В противном же случае её пределом служит $-\infty$.

Доказательство. Ограничимся случаем возрастающей, хотя бы в широком смысле, последовательности x_n (случай убывающей последовательности исчерпывается аналогично).

Допустим сначала, что это переменная ограничена сверху. Тогда, по теореме, для множества $\{x_n\}$ её значений должна существовать и конечная точная верхняя граница: $a = \sup\{x_n\}$.

Мы покажем, именно это число a и будет пределом последовательности x_n.

Вспомним, характерные свойства точной верхней границы. Во-первых, для всех значений n будет $x_n \le a$.

Во-вторых, какое бы ни взять число $\varepsilon > 0$, найдётся такой номер N, что $x_N > a - \varepsilon$.

Ввиду монотонности нашей числовой последовательности (здесь мы впервые на это опираемся), при $n > N$ будет $x_n \geq x_N$, т.е. и подавно $x_n > a - \varepsilon$, то для этих значений номера n выполняются неравенств:

$0 \leq a - x_n < \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$,

откуда и следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пусть теперь числовая последовательность x_n не ограничена сверху. Тогда, сколь велико ни было бы число $E > 0$, найдётся хоть одно значение нашей переменной, которое больше Е; пусть это будет $x_N : x_N > E$. Ввиду монотонности числовой последовательности x_n, для $n > N$ и подавно

$x_n > E$.

А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Легко понять, что все заключения остаются в силе и для переменной, которая, лишь начиная с некоторого места, становится монотонной (ибо – без влияния на предел переменной – любое конечное число её первых значений можно отбросить).

Обратимся к примерам применения теоремы.

§9. Число *e*

Рассмотрим числовую последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Так как с возрастанием показателя n основание степени здесь убывает, то «монотонный» характер последовательности непосредственно не усматривается. Для того чтобы убедиться в нём, прибегнем к разложению по формуле бинома:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (1)$$

Если от x_n перейти теперь к x_{n+1}, т.е. увеличить n на единицу, то прежде всего, добавиться новый $(n+2)$ - й (положительный) член, каждый же из написанных $n+1$ членов увеличится, ибо любой множитель в скобках вида $1-\frac{s}{n}$ заменится большим множителем $1-\frac{s}{n+1}$. Отсюда и следует, что $x_{n+1} > x_n$, т.е. последовательность x_n оказывается возрастающей.

Покажем, что она к тому же ограничена сверху. Опустив в выражении (1) все множители в скобках, мы этим увеличим её, так что

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=y_n.$$

Заменив, далее, каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с 3) числом 2, мы ещё увеличим полученное выражение, так что, в свою очередь,

$$y_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но прогрессия (с первым членом $\frac{1}{2}$) имеет сумму 1, поэтому $y_n < 3$, а значит и подавно $x_n < 3$.

Следовательно, числовая последовательность x_n имеет конечный предел. По примеру Эйлера (L. Euler), его обозначают всегда буквой e. Число

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

имеет исключительную важность как для самого анализа, так и для его приложений. Вот первые 15 знаков его разложения в десятичную дробь:

$$e = 2,71828\,18284\,59045\ldots$$

Пример . Путь дана последовательность $\{y_n\}$, $\quad y_n = q^n$. Докажите, что справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & q<1; \\ 1, & q=1; \\ \infty, & q>1 \end{cases}$.

Решение. Если $q=1$, то $y_n=1$ при любом n. Ясно, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Пусть теперь $q > 1$. Тогда $q = 1+\alpha$, где $\alpha > 0$. Тогда по формуле бинома Ньютона $(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n$

Так как $\alpha > 0$, то все слагаемые в последней сумме положительны. Отбрасывая все слагаемые, кроме первых двух, получим $(1+\alpha)^n = q^n > 1 + n\alpha$. Отсюда заключаем, так как $1 < 1 + n\alpha$ и при $n \to \infty$ неограниченно растет $n\alpha$, то y_n также неограниченно растет, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Наконец, пусть $q < 1$. Тогда $q=1/r$, где $r > 1$. Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$

.

Упражнение. Обратите внимание на предложенные в таблице определения. Необходимо к каждому определению сделать чертеж и соответствующие комментарий.

Определение возрастающей п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется возрастающей, если с увеличением номера последовательности её члены увеличиваются, т.е. справедливо $\forall n \Rightarrow y_n < y_{n+1}$.
Определение убывающей п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется убывающей, если с увеличением номера последовательности её члены уменьшаются (убывают), т.е. справедливо $\forall n \Rightarrow y_n > y_{n+1}$
Определение невозрастающей п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется невозрастающей, если с увеличением номера последовательности её члены неувеличиваются, т.е. справедливо $\forall n \Rightarrow y_n \geq y_{n+1}$
Определение неубывающей п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется неубывающей, если с увеличением номера последовательности её члены неуменьшаются, т.е. справедливо

	$\forall n \Rightarrow y_n \le y_{n+1}$
Определение ограниченной снизу п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует такое число m, для всех номеров n членов последовательности выполняется неравенство $y_n \ge m$.
Определение ограниченной сверху п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число M, для всех номеров n членов последовательности выполняется неравенство $y_n \le M$.
Определение ограниченной п-ти	Последовательность $\{y_n\}$ называется ограниченной если существует такое число C, для всех номеров n членов последовательности выполняется неравенство $\|y_n\| \le C$.

Теорема (достаточный признак существования предела последовательности). *Всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность* имеет предел. Или: монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

§10. Лемма о вложенных промежутках

В заключение этого параграфа, посвящённого монотонной числовой последовательности, остановимся на сопоставлении двух таких числовых последовательностях, изменяющихся «навстречу» одна другой:

Пусть даны монотонно возрастающая числовая последовательность x_n и монотонно убывающая числовая последовательность y_n, причём всегда

$$x_n < y_n. \qquad (1)$$

Если разность $y_n - x_n$ стремится к 0, то обе последовательности имеют общий конечный предел:

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Действительно, при всех значениях n имеем: $y_n \le y_1$, а значит, ввиду (1), и $x_n < y_1$ ($n = 1, 2, 3$ Возрастающая переменная x_n оказывается ограниченной сверху, следовательно, она имеет конечный предел

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Аналогично, для убывающей переменной y_n будем имеет

$$y_n > x_n \geq x_1,$$

так что и она стремится к конечному пределу

$$c' = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Так как, разность обоих пределов по условию равна 0, то $c' = c;$ что и требовалось доказать.

Доказанному утверждению можно придать другую форму, в которой оно чаще применяется.

Условимся говорить, что промежуток $[a', b']$ содержится в промежутке $[a, b]$ или вложен в него, если все точки первого промежутка принадлежат второму или, что то же самое, если $a \leq a' < b' \leq b.$

Лемма. Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных промежутков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *, так что каждый последующий содержится в предыдущем, причём длины этих промежутков стремятся к 0 с возрастанием* n:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Тогда концы a_n *и* b_n *промежутков (с разных сторон) стремятся к общему пределу*

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

который представляет единственную точку, общую всем промежуткам.

Это есть лишь перефразировка доказанной выше теоремы согласно условию, $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$, так что левый конец a_n и правый конец b_n $n-$го промежутка играют здесь роль монотонных последовательностей x_n и y_n.

Так как a_n стремится к c возрастая, а b_n - убывая, то

$$a_n \leq c \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

т.е. точка c, действительно, принадлежит всем нашим промежуткам. В то же время другой, отличной от c, точки c' с тем же свойством быть не может, ибо иначе мы имели бы

$$b_n - a_n \geq |c' - c| > 0$$

и длина n - го промежутка не могла бы стремится к 0.

Впоследствии нам не раз придётся опираться на это предложение, которое будем называть «леммой о вложенных промежутках».

§11. Принцип сходимости

Пуст задана последовательность x_n, пробегающая последовательность значений

$$x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_{n'} ... \qquad (1)$$

Займёмся, наконец, вопросом об общем признаке существования конечного предела для этой последовательности. Само определение предела для этой цели служить не может, ибо в нём фигурирует уже тот предел, о существовании которого идёт речь. Мы нуждаемся в признаке, который использовал бы лишь то, что нам надо, а именно – последовательность (1) значений числовой последовательности.

Теорема Больцано-Коши. *Для того чтобы числовая последовательность* x_n *имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* N, *чтобы неравенство*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполнялось, лишь только $n > N$ *и* $n' > N$.

Как видит читатель, суть дела здесь в том, чтобы значения переменной между собой безгранично сближались по мере возрастания их номеров. Обратимся к доказательству.

Необходимость. Пусть последовательность x_n имеет определенный конечный предел, скажем, a. По самому определению предела, какого бы ни было число $\varepsilon > 0$, по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдётся такой номер N, что для $n > N$ всегда имеет место неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмём теперь любые два номера $n > N$ и $n' > N$; для них одновременно будет

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \le |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Этим необходимость условия доказана. Значительно труднее доказать достаточность.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнено; требуется установить, что тогда для последовательности x_n существует определенный конечный предел.

С этой целью произведём в области всех действительных чисел сечение по следующему правилу. В нижний класс A отнесём каждое такое действительное число α, для которого, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n > \alpha$.

В верхний же класс A' отнесём все остальные (т.е. не попавшие в A) действительные числа α'.

Прежде всего, убедимся в не пустоте этих классов, используя для этого условие теоремы. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, возьмём соответствующий ему (в указанном там смысле) номер N. Если $n > N$ и $n' > N$, то выполняется (2) откуда

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon. \qquad (3)$$

Теперь мы видим, что каждое число $x_{n'} - \varepsilon$, (где $n' > N$) в отдельности относится к классу A, ибо для достаточно больших n (именно, для $n > N$) x_n его превосходит. С другой стороны, так как (для тех же n) x_n оказывается меньшим, чем любое из чисел вида $x_{n'} + \varepsilon$ (при $n' > N$), то ни одно такое число заведомо не может принадлежать A и, следовательно, относится к классу A'.

Правило, определяющее классы A и A', так сформулировано, что из него непосредственно ясно, что каждое действительное число попадает в один и только один из этих классов. В месте с тем, каждое число α (из A) меньше каждого числа α' (из A'); ведь, при $\alpha > \alpha'$, последовательность x_n, начиная с некоторого места, превзошло бы и α', вопреки определению числа α'. Таким образом, произведённое разбиение области действительных чисел на классы есть, действительно сечение.

По основной теореме Дедекинда, существует такое действительное число a, которое является пограничным между числами обоих классов:

$$\alpha \le a \le \alpha'.$$

Но, как мы отметили, при любом $n' > N$ число $x_{n'} - \varepsilon$ есть одно из α, а число $x_{n'} + \varepsilon$ - одно из α',Поэтому, в частности,

$$x_{n'} - \varepsilon \le a \le x_{n'} + \varepsilon \quad \text{или} \quad |a - x_{n'}| = |x_{n'} - a| \le \varepsilon$$

для любого $n' > N$. По определению же предела, это и значит, что

$a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Теорема доказана.

Применения этого признака мы будем не раз встречать в дальнейшем изложении.

§12. Частичные последовательности и частные пределы

Рассмотрим теперь, наряду с последовательностью

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ (1)

какую-либо извлечённую из неё частичную последовательность (или под последовательность)

$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}, ...,$ (2)

где $\{n_k\}$ есть некоторая последовательность возрастающих натуральных чисел:

$n_1 < n_2 < n_3 ... < n_k < n_{k+1} < ...$ (3)

Здесь роль номера, принимающего последовательно все натуральные значения, играет уже не n, а k; n_k же представляет собой последовательность, принимающую натуральные значения и, очевидно, стремящуюся к ∞ при возрастании k.

Если последовательность (1) имеет определённый предел a *(конечный или нет), то тот же предел имеет и частичная последовательность (2).*

Остановимся для примера на случае конечного a. Пусть для заданного $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, что при $n > N$ уже выполняется неравенство

$|x_n - a| < \varepsilon$.

Ввиду того, что $n_k \to \infty$, существует и такое K, что при $k > K$ будет $n_k > N$. Тогда, при тех же значениях k, будет выполнятся неравенство

$|x_k - a| < \varepsilon$,

что и доказывает наше утверждение.

[Заметим попутно, что в этом рассуждении мы не опирались на неравенства (3), т.е. не пользовались монотонностью последовательности n_k. Значит, наше *утверждение сохраняет силу, по какому бы закону ни стремились* $k + \infty$ целочисленная последовательность n_k].

Если для числовой последовательности x_n или, что то же, для последовательности (1) нет определённого предела, то это не исключает возможности существование предела для какой-либо частичной последовательности (2) или для соответствующей ей последовательности $x'_k = x_{n_k}$. Такой предел называют частичным пределом для последовательности x_n или последовательности (1).

Лемма Больцано-Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности (1) всегда можно извлечь такую частичную последовательность (2), которая сходилось бы к конечному пределу.*

(Это формулировка не исключает возможности равных чисел в составе данной последовательности, что удобно в приложениях.)

Доказательство. Пусть все числа x_n заключены между границами a и b. Разделим этот промежуток $[a, b]$пополам, тогда хоть в одной половине будет содержаться бесконечное множество элементов данной последовательности, ибо, в противном случае, и во всём промежутке $[a, b]$ этих элементов содержалось бы конечное число, что невозможно. Итак, пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин, которая содержит бесконечное множество чисел x_n (или, если обе половины таковы, то – любая из них).

Аналогично, из промежутки $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$ - при условии, чтобы в ней содержалось бесконечное множество чисел x_n, и т.д. Продолжая это процесс до бесконечности, на k - й его стадии выделим промежуток $[a_k, b_k]$, также содержащий бесконечное множество чисел x_n.

Каждый из построенных промежутков (начиная со второго) содержится в предыдущем, составляя его половину. Кроме того, длина k - го промежутка, равная

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

стремится к нулю с возрастанием k. Применяя сюда лемму о вложенных промежутках, заключаем, что a_k и b_k стремятся к общему пределу c.

Теперь построение частичной последовательности $\{x_{n_k}\}$ произведём индуктивно – следующем образом. В качестве x_{n_1} возьмём любой (например, первый) из элементов x_n нашей последовательности, содержащихся в $[a_1, b_1]$. В качестве x_{n_2} возьмём любой (например, первый) из элементов x_n, следующих за x_{n_1} и содержащихся в $[a_2, b_2]$, т.д. Вообще, в качестве x_{n_k}

возьмём любой (например, первый) из элементов x_n , следующих за ранее выделенными $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k-1}}$ и содержащихся в $[a_k, b_k]$. Возможность такого выбора, производимого последовательно, обусловливается именно тем, что каждый из промежутков $[a_k, b_k]$ содержит бесконечное множество чисел x_n, т.е. содержит элементы x_n со сколь угодно большими номерами.

Далее, так как

$a_k \le x_{n_k} \le b_k$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} b_k = c$,

То, **по теореме 3⁰**, (§6), и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = c,$ что и тр. д.

Метод, применённый при доказательстве этой леммы и состоящий в последовательном делении пополам рассматриваемых промежутков, известен под именем *метода Больцано*; он будет часто нам полезен и в других случаях.

Лемма Больцана – Вейерштрасса значительно облегчает доказательство многих трудных теорем, как бы вбирая в себя основную трудность рассуждение. Для примера докажем снова с её помощью *принцип сходимости;* мы имеем в виду достаточность содержащегося в теореме Больцано-Коши условия, которая потребовала от нас значительных усилий.

Итак, пусть условия выполнено, и по заданному $\varepsilon > 0$ найден такой номер N, что для $n > N$ и $n' > N$ имеют место неравенство (2) или (3) из §11. Если n' при этом фиксировать, то из (3) ясно, что последовательность x_n, во всяком случае, будет ограниченной: её внесения для $n > N$ содержатся между числами $x_n{}' - \varepsilon$ и $x_n{}' + \varepsilon$, и нетрудно эти границы раздвинуть так, чтобы охватить и первые N значений: $x_1, x_2, ..., x_N$.

Тогда, по только что доказанной теореме, можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к конечному пределу c:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = c.$$

Покажем, что к этому пределу стремится вообще и последовательность x_n. Можно выбрать k настолько большим, чтобы было

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

и, одновременно, $n_k > N$. Следовательно, в (2) можно взять $n' = n_k$:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon,$$

и, сопоставляя оба эти неравенства, окончательно находим

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \text{ (для } n > N\text{)},$$

что и доказывает наше утверждение.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Постройте (начертите) графики следующих последовательностей $\{x_n\}$, исходя из графиков характеризуйте поведение последовательностей: 1) $x_n = \frac{2}{n}$; 2) $x_n = \frac{n-2}{n}$; 3) $x_n = \frac{n+2}{n}$; 4) $x_n = n^2$; 5) $x_n = n^3$; 6) $x_n = (-1)^n n^2$; 7) $x_n = (-1)^n \frac{2}{n}$; 8) $x_n = n^2 - 2n + 1$; 9) $x_n = \frac{n^2+2}{n}$; 10) $x_n = \frac{n+2}{n^2}$; 11) $x_n = \frac{n^2+2}{n^2-2}$.

2. Доказать, что сумма S убывающий геометрический прогрессии с первым членом равным b_1 и знаменателем $q, |q|<1$ равна: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

3. Привести пример ограниченной числовой последовательности не имеющий предела.

4. Доказать, что если числовая последовательность α_n (не обращающаяся в 0) является бесконечно малой, то $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ будет бесконечно большой последовательностью.

5. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $b \neq 0$, то с некоторого места, не только $y_n \neq 0$, но даже $|y_n| > r > 0$.

6. Распространить результаты $n1^o - 2^o$ на случай бесконечных пределов.

7. При каких условиях верно 3^o в случае бесконечных пределов.

8. Доказать лемму 2, §6.

9. Доказать равенство (исходя из определения предела последовательности).

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{5n+1} = \frac{4}{5}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}=-\frac{2}{3}$, начиная с какого n выполняется неравенство $\left|\frac{2n-1}{2-3n}+\frac{2}{3}\right|<0{,}0001$? f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}$, начиная с какого n выполняется неравенство $\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|<0{,}001$?

10. Исходя из определения предела последовательности, выясните, имеют ли пределы следующие последовательности: 1) $x_n=\frac{3}{n}$; 2) $x_n=\frac{n-2}{n}$; 3) $x_n=\frac{n+2}{n}$; 4) $x_n=n^2$; 5) $x_n=n^3$; 6) $x_n=(-1)^n n^2$; 7) $x_n=(-1)^n\frac{2}{n}$; 8) $x_n=n^2-2n+1$; 9) $x_n=\frac{n^2+2}{n}$; 10) $x_n=\frac{n+2}{n^2}$; 11) $x_n=\frac{n^2+2}{n^2-2}$.

11. Найдите предел последовательности $\{x_n\}$, где $x_n=\sqrt[n]{2}$.

12. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, бесконечно большая, если

a) x_n=8n+1; b) x_n=6n-1; c) $x_n=n^x$, (x>0); d) $x_n=\sqrt{n^3+2}$.

13. Вычислить пределы:

13.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{4n^2-1}$.

13.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-4}{n^3+6}$.

13.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{n^3+n+1}$.

13.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$.

13.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3+1}$.

13.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4+(n-1)^4}{n^4+10}$.

13.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+5}$.

13.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

13.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}$.

13.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt[4]{n^4+3n-1}}$.

13.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

13.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$.

13.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

13.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

13.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cos n^3}{2n}-\frac{3n}{6n+1}\right)$. 13.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+1\right)$.

13.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\sin(n+1)+\frac{2n^2}{1+9n^2}\right)$. 13.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n}\sin n^2+\frac{2n}{3n+1}\right)$.

13.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+...+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$. 13.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+...-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

14. Используя теорему о пределе монотонной последовательности доказать, существование предела следующих последовательностей:

a) $x_n=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^n}$, b) $x_n=1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$,

c) $x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+...+\frac{1}{2^n+1}$.

15. Показать, что пределы последовательностей существуют и найти их:

a) $x_n=\frac{c^n}{n!}\ (c>0)$; b) $x_n=\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}_{n}$;

c) $x_n=\underbrace{\sin\sin...\sin 1}_{n\ ta}$.

16. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n}\right)$.

17. Определите свойства следующих последовательностей: 1) $x_n=\frac{3}{n}$; 2) $x_n=\frac{n-2}{n}$; 3) $x_n=\frac{n+2}{n}$; 4) $x_n=n^2$; 5) $x_n=n^3$; 6) $x_n=(-1)^n n^2$; 7) $x_n=(-1)^n\frac{2}{n}$; 8) $x_n=n^2-2n+1$; 9) $x_n=\frac{n^2+2}{n}$; 10) $x_n=\frac{n+2}{n^2}$; 11) $x_n=\frac{n^2+2}{n^2-2}$. [13]

Дополнение к главе, но для первого прочтения (но особо любопытным рекомендуем с ним ознакомиться)

Данное дополнение к тексту главы предлагается с одной лишь целью, после оназнакомления с ней будущие учителя матемаики, а может быть математик заметят связь между множеством натуральных чисел и построениеме математической логики, некоторые элементы современной теории доказательств и т.д.

«Основная идея … рассуждения состоит в том, что доказательство теоремы *А для всех* значений *n* получают, доказывая ее справедливость поочередно для последовательности частных случаев $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Возможность такого умозаключения зависит от двух факторов:

а) должно быть дано общее доказательство того, что *если* верно утверждение A_r, то верно и следующее за ним утверждение A_{r+1};

б) должно быть известно, что утверждение A_1 справедливо.

Этих двух условий достаточно для доказательства *всех* утверждений $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — таков логический принцип, который имеет в математике столь же основополагающее значение, как классические правила аристотелевой логики. Даем абстрактную формулировку этого принципа:

Пусть бесконечная последовательность математических предложений $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *представляет в своей совокупности теорему А. Исходим из следующих допущений:* а) *с помощью какого- либо математического рассуждения можно показать для любого целого числа r, что из справедливости утверждения* A_r *вытекает справедливость - утверждения* A_{r+1}, *и* б) *известно, что предложение* A_1 *верно; в таком случае все утверждения последовательности справедливы, и тем самым теорема А доказана.*

Мы принимаем этот принцип в качестве основного положения **математического мышления.**

Принцип полной индукции большей частью применяют, не указывая этого ясно и ограничиваясь, самое большее, ничем не обязывающим «и т. д.». Особенно часто это встречается в элементарной математике. Однако в более сложных доказательствах следует предпочесть ясно выраженное проведение процесса индукции». [16, с.45]

Упражнения

Докажите следующие утверждения.

1. Для любого натурального числа *n* выполнено равенство
$1 + 2^2 + 2^3 + \bullet\bullet\bullet + 2^{n-1} = 2^n — 1$.

2. Каково бы ни было натуральное число n, число $9^n — 1$ делится на 8.

3. Сумма первых *n* четных чисел равна $n^2 + n$, т. е.

$2+4+6+\dots+2n = n^2+n$.

4. Пусть $a > 1$ — фиксированное вещественное число, а натуральное число n больше или равно 3. Тогда $(1+a)^n > 1+na^2$

5. Для любого натурального числа n имеет место тождество:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}-1$$

6. Любое натуральное число n 3 удовлетворяет неравенству $n^2 < 5$ • п!.

7. Число 10^n — 1 делится на 9 при любом натуральном показателе n.

8. Последняя цифра (справа) числа 3^n с натуральным показателем может быть только 1, 3, 7 или 9.

9. Пусть n — целое число, большее 4. Тогда предпоследняя цифра (справа) числа 3^n четна.

10. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Тогда $A^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$ для всех $n \geq 1$.

Теоремы существования

Теоремы существования легко узнать по формулировке, поскольку они утверждают, что найдется по крайней мере один объект, обладающий указанными свойствами. Обычно такие теоремы доказывают одним из следующих способов.

1) Если возможно, указывают алгоритм (процедуру) явного построения объекта, удовлетворяющего требуемым свойствам. Такое доказательство называют *конструктивным.*

2) Иногда явная конструкция объекта невозможна. Поэтому нам нужно найти аргументы, гарантирующие существование объекта, хотя мы и не можем предъявить ни одного примера, удовлетворяющего условиям теоремы.

Пример 1. *Для любых двух рациональных чисел найдется третье рациональное число, лежащее между ними.*

Анализ. Переформулируем это утверждение, выделив предположение и заключение.

А: Рассмотрим два рациональных числа a и b и для определенности будем считать, что $a < b$.

Б: Найдется такое рациональное число с, что $a < c < b$.

Доказательство. По определению рациональных чисел имеем $a = \frac{m}{n}, n \neq 0,\quad b = \frac{p}{q}, q \neq 0,$ где т, п, p и q — целые числа. Нам уже известно, что среднее арифметическое двух разных чисел лежит строго между ними (см. пример 3 на стр. 68). Поэтому для доказательства нашей теоремы достаточно проверить, что среднее арифметическое рациональных чисел — число рациональное. Итак,

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = \frac{mq+np}{2pq}\ .$$

Число $mq + np$ целое, так как целыми являются числа т, п, p и q. Кроме того, знаменатель дроби 2ng, будучи целым числом, как произведение трех ненулевых чисел отличен от нуля. Значит, число с рационально и как среднее арифметическое чисел *a и Ь,* лежит между ними, т. е. $a < c < b$.

Пример 2. *Пусть x — иррациональное число. Тогда найдется хотя бы одна цифра, которая бесконечное число раз повторяется в представлении x бесконечной десятичной дробью .*

Анализ. Мы даже не знаем, чему равно данное нам число *x,* поэтому, естественно, не приходится и мечтать найти конкретную цифру, удовлетворяющую условию утверждения. Иными словами, конструктивного доказательства нам не построить.

Доказательство. Попробуем доказать утверждение методом «от противного». Допустим, что каждая из десяти цифр повторяется в записи числа *x* лишь конечное число раз. Пусть для определенности цифра *к* повторяется n_k раз. Но тогда в бесконечной десятичной дроби, равной числу *x,* будет всего лишь конечное число знаков, а именно

$$N = n_0 + n_1 + \cdots + n_8 + n_9$$

знаков, что противоречит ее бесконечности. Полученное проI и поречие доказывает исходное утверждение. ■ [15, с99-101]

Упражнения

Докажите следующие утверждения.

1. Существует функция, определенная на всей числовой прямой, множество значений которой — полуинтервал (0,1].

2. Найдется такое натуральное число п, при котором число $2^n + 7^n$ будет простым.

3. Пусть a — иррациональное число. Тогда найдется такое иррациональное число b, для которого произведение ab будет целым числом.

4. Найдется многочлен второй степени P(x), для которого P(0) = -1 и P(-1) = 2.

5. Можно подобрать два рациональных числа a и b, удовлетворяющих условию: a^b — положительное целое число, а b^a — отрицательное целое число.

6. Между двумя рациональными числами $a < b$ найдется по крайней мере три рациональных числа.

7. Неравенство $2^k > 4^k$ имеет решение в целых числах.

8.-------------------------------- Пусть P(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ — многочлен нечетной степени n, в частности $a_n \neq 0$. Тогда уравнение P(x) = 0 имеет хотя бы один вещественный корень.

Замечание. В дальнейшем нам встретятся теоремы **Едиственности**. Конечно, в качестве упражнения, дорогой читатель, обратите внимание на конструкцю этих теорем. Если Вы вспомнили теперь подобные теоремы из средней школы, то конечно обсудите их в Учителем.

3-ГЛАВА. ФУНКЦИЯ И ЕЁ ПРЕДЕЛ

§1. Определение понятия функции. Способы задания функции

Пусть D- произвольное подмножество действительных чисел $(D \subseteq R)$. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $y = f(x),$ то говорят, что на множестве D определена *числовая функция* f. Множество D называется *областью определения функции,* а множество $E = \{y \in R \mid y = f(x), x \in D\}$ - *множеством значений функции.*

Для записи функции применяют следующие обозначения: $y = f(x),\ f: D \to E,\ D \xrightarrow{f} E,$ где f - некоторый закон соответствия.

Принята следующая терминология: x- независимая переменная или аргумент y- зависимая переменная или функция.

Определение. Графиком же функции $y = f(x),$ называют множество упорядоченных пар (в общем случае n-ок) удовлетворяющих способу задания функции или $Gr(f(x)) = \{(x, f(x)) \mid y = f(x)\}$ - в данном случае на плоскости.

В данной главе рассматриваем числовые функции одной действительной переменной: $D \subseteq R,\ E \subseteq R.$ Чтобы определить функцию $y = f(x),$ нужно задать множество D и закон (правило, соответствии) f, переводящий элементы x множества D в элементы y множества E.

Наиболее широко применяемыми способами задания функции являются аналитический, табличный, графический и программный (вербальный).

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Например, формула $y = \dfrac{3x + e^x}{\cos x + arctgx}$ определяет y как функцию x аналитически.

Если дана функция $y = f(x),$ то часто значение функции, при некотором значении аргумента x_0, записывают в виде $f(x_0)$ или $y|_{x=x_0}$.

Например, если $f(x)=5x^2+5x,$ то $f(1)=10,$ $f(2)=30.$

При аналитическом задании функции область определения D либо указывают, например $y=x^3, D(f)=[1;2],$ либо понимают под D множество значений аргумента $x,$ при которых данная формула имеет смысл, т.е. те значения, которым соответствуют действительные значения зависимой переменной y. В этом случае говорят, что D является *естественной областью определения функции.*

Например, для $y=x^3$ естественной областью определения функции является множество $D(f)=R.$

Условимся в тех случаях, когда функция задана аналитически и область ее определения не указана, подразумевать под $D(f)$ естественную область определения.

Пример 1. Найти область определения D и множество значений E функции $y=\sqrt{x^2-9}$

Решение. Естественной областью определения функции является множество

$D(f)=\left\{x \mid x^2-9\geq 0\right\}=\left\{x : |x|\geq 3\right\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty),$ а множеством значений $E(f)=[0;+\infty)$

Аналитически функция может быть задана не одной, а несколькими формулами. Такие функции называют *составными.*

Приведем примеры составных функций.

1.*Единичная функция Хевисайда*

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & \forall x<0,\\ 1 & \forall x\geq 0\end{cases}$$

(ее график приведен на рис. 2.1).

2. *Функция сигнум, или функция знака:*

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & \forall x<0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ 1 & \forall x>0\end{cases}$$

Аналитически функция $y=f(x),\quad x\in[a;\ b]$, может быть неявно задана, т.е. уравнением $F(x,\ y)=0$, если $\forall\ x\in[a,b]\ F(x,\ f(x))=0.$ В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x,\ y)=0$ относительно $y,$ удается получить явное задание той же функции.

Например, уравнение $5x - y + 2 = 0$ неявно задает функцию $y = \frac{5x+2}{2}$, $D(f) = R.$

Иначе:

1 . Аналитический (уравнением):

а) явным y = f(x);

b) неявным F(x,y) =0;

с) параметрическим $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$

Примеры аналитического заданий:

а) y = $|x|$ + x ; b) x + y = 0; c) я $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}.$

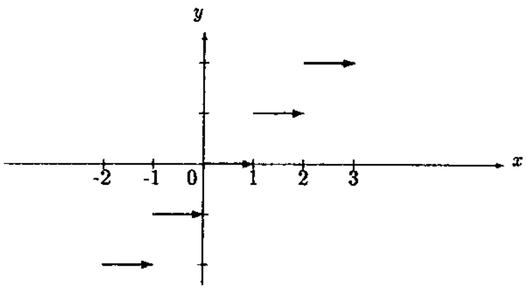
Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1, y_2, ..., y_n$. Например, Вы используете для задания таблицы программы электронных таблиц *Excel.* Известны более старные таблицы значений логарифмической функции, тригонометрических функций и др. Этот способ задания функции широко применяется на практике в тех случаях, когда значения функции имеют определенный физический смысл и находятся в результате эксперимента. К достоинствам табличного способа относят то, что для значений аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ из таблицы сразу можно получить значения функции $y_1, y_2, ..., y_n$ (т.е. не нужны дополнительные вычисления). Его недостатками являются: отсутствие наглядности (трудно судить о характере изменения функции); невозможность определения промежуточных значений функции по таблице; затруднения в непосредственном применении математического аппарата.

Если функция задана аналитически, то для нее всегда можно построить таблицу (т.е. табулировать функцию). Если функция задана таблично, то в общем случае найти аналитическое выражение функции по ее табличным данным невозможно. Однако с помощью интерполирования функции можно найти формулу (и не одну) для таблично заданной функции, которая будет давать точные табличные значения функции и ее приближенные значения, не входящие в таблицу. Такие формулы называют *интерполяционными.*

Графический способ задания функции состоит в преставлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат. *Графиком* Г *функции* $y = f(x)$ называют множество точек $M(x, y)$ плоскости R^2, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью, т.е. Г= $\{M(x;y) \in R^2 \mid y = f(x)\}$. Чаще всего график функции есть некоторая линия. Если аргумент x принимает отдельные значения, например $x \in N$, то графиком функции является множество изолированных точек.

Графический способ задания функции нагляден, но не удобен для применения математического аппарата.

В последние годы в связи с бурным развитием и применением информационных технологий широко распространился, стал одним из основных *программный способ задания функции,* при котором функция задается с помощью указания программы на одном из машинных языков, пришедших, но еще сохраняющий свои позиции так называемый вербальный способ задания функции. Этот способ задания функции используют при решении различных задач с помощью ЭВМ. Разработаны стандартные программы, т.е. набор команд, задающих функцию[6]. Они могут быть составлены заранее и храниться в оперативном запоминающем устройстве или во внешнем запоминающем устройстве вычислительной машины.



Отметим, что указанные способы задания функции (аналитический, табличный, графической и программный), являясь наиболее употребительными, не исчерпывают всех возможный способов. В частности, можно задать функцию, описав словами закон соответствия f, позволяющий по данному $x \in D$ определить $y \in E$. Такой способ задания функции называется *описательным* или *словесным.*Например, функция $E(x)$ (читается: «антье от x»), обозначаемая же $[x]$, определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x. Эту же функцию можно задать аналитически и графически.

$E(x) = [x] = n \quad \forall x \in [n; n+1), n \in N.$

---

[6] Начало этому было положено микрокалликуляторами.

§2. Простейшая классификация функций

Классификацию функций действительного переменного можно преводить по различным признакам: по характеру поведения функции, по структуре аналитического выражения и т. д.

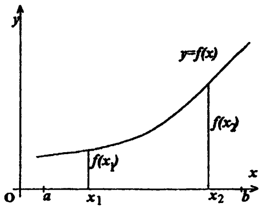
Рассмотрим простейшую классификацию функций действительного переменного, исходя из характера поведения функций.

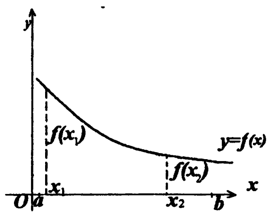
2.1. Функции монотонные и кусочно-монотонные

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется строго возрастающей на этом множестве, если с возрастанием аргумента будет возрастать значение функции. Иначе: функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется строго возрастающей на этом множестве, если

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Геометрически строго возрастающая функция изображается графиком, поднимающимся вверх вправо.





а) возрастающая функция б) убывающая функция

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется строго убывающей на этом множестве, если

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Геометрически строго убывающая функция изображается графиком, опускающимся вниз вправо.

Заметим, что строго возрастающие и строго убывающие функции осуществляют взаимно однозначное соответствие между областью определения и множеством значений, а поэтому они играют в анализе особую роль.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется возрастающей или неубывающей на этом множестве, если

$$\forall x_1, x_2 \in X (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)).$$

Следовательно, неубывающая функция $y = f(x)$ или возрастает, или не меняет своего значения. Геометрически это означает, что или график функции поднимается вверх вправо, или параллелен оси абсцисс.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется убывающей или невозрастающей на этом множестве, если

$\forall x_1, x_2 \in X(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Геометрически это означает, что или график функции опускается вниз вправо, или параллелен оси абсцисс.

Функции строго возрастающие, строго убывающие, неубывающие и невозрастающие называются монотонными.

Пример. Функция $y = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси. В самом деле, здесь $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)$. Очевидно, что при независимо от знаков x_1 и x_2, правая часть последнего равенства больше нуля, то есть $f(x_2) - f(x_1) > 0$, откуда $f(x_2) > f(x_1)$.

Следует отметить, что одна и та же функция на различных участках может вести себя по-разному. Так, функция $y = x^2$ строго убывает на $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на $[0, +\infty)$.

Подобные функции называются кусочно-монотонными. Точнее, функция $f(x)$ на X называется кусочно - монотонной, если X есть объединение конечного числа промежутков, на каждом из которых $f(x)$ монотонна.

Легко показать справедливость следующих утверждений:

Сумма двух возрастающих на множестве X функций есть функция возрастающая.

Композиция двух возрастающих (убывающих) функций есть функция возрастающая.

Композиция двух функций, одна из которых возрастает, а другая убывает, есть функция убывающая.

2.2. Функции четные и нечетные

Функция $f(x)$, определенная в области симметричной относительно начала координат, называется четной, если $f(-x) = f(x)$, то есть при замене аргумента x на -x она не меняет своего значения как по абсолютной величине, так и по знаку.

Например, функция $f(x) = x^2$ при замене аргумента x на -x дает

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

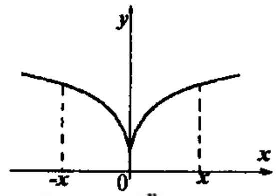
или функция

$f(x) = \cos x,\ f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

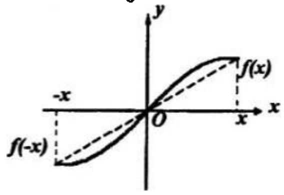
Функция $y = f(x)$ определенная в области симметричной относительно начала координат, называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$, то есть при замене аргумента x на -x она не меняет своего значения по абсолютной величине, но меняет знак. Например:

$$f(x) = x^3,\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Так как для четной функции выполнено $f(-x) = f(x)$, то ее график симметричен относительно оси Оу. Это значит, что та часть графика, которая соответствует отрицательным значениям x, получается зеркальным относительно оси Оу отображением той части графика, которая соответствует положительным значениям x.



Поскольку для нечетной функции справедливо $f(-x) = -f(x)$, то ее график симметричен относительно начала координат. Это значит, что если какая-либо точка принадлежит графику, то ему принадлежит также точка симметричная относительно начала координат.



Легко показать, что сумма нескольких четных (нечетных) функций является четной (нечетной) функцией. Произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение функций четных на нечетную есть функция нечетная.

Конечно, не всякая функция, заданная в области симметричной относительно начала координат, будет четной или нечетной. Однако справедлива теорема.

Теорема. Всякая функция $f(x)$ с областью определения, симметричной относительно начала координат, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

Доказательство. Составим две вспомогательные функции

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\ \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Легко, проверить что функция $\varphi(x)$ - четная, а функция $\psi(x)$ - нечетная, а их сумма есть $f(x)$.

2.3. Периодические функции

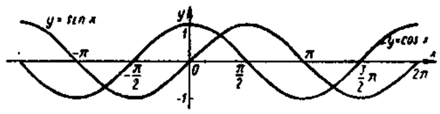
Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$ (называемое периодом), что для любого значения x из области определения функции число $x \pm T \in X$ и при этом справедливо равенство

$f(x+T) = f(x)$.

Если функция является периодической с периодом T, то зная значения этой функции на полусегменте $[0,T)$ (или вообще на любом отрезке длины T), мы можем найти значения этой функции в любой точке области определения. Так, например, зная, что значения функции при $x = x_0$ равно A, заключаем, что это же значение функция будет принимать и при ,. x_0+T, $x_0+2T,...$, а так же при x_0-T, $x_0-2T,...$

Имея часть графика функции на участке $[0,T)$, мы можем построить график этой функции на всей области определения. Для этого достаточно параллельно перенести вдоль Ox часть графика, заданную на $[0,T)$, вправо на величину T, чтобы получить ту часть графика функции, которая соответствует значениям x, заключенным между T и 2T, включая T. Аналогично строятся и другие части графика.

Простейшими периодическими функциями являются функции y=sinx и y=cosx с периодом 2π.



Очевидно, что если число T является периодом функции, то периодами функции будут числа 2T, 3T. В самом деле, например

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x).$$

Может случиться, что во множестве периодов одной и той же функции есть наименьший положительный. Это число называют минимальным периодом.

Не всякая периодическая функция имеет минимальный период. Например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \textit{если } x \in Q, \\ 0, \textit{если } x \in R \setminus Q \end{cases}$$

периодическая. Ее периодом будет любое рациональное число. Однако минимального периода она не имеет, так как не существует наименьшего не отрицательного рационального числа, отличного от нуля.

2.4. Функции ограниченные и неограниченные

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной на этом множестве сверху, если

$\exists M \forall x \in X \; (f(x) \le M)$.

Иначе говоря, функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной на этом множестве сверху, если множество ее значений ограничено сверху.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена сверху на всей числовой прямой и числом M для нее может быть любое число большее или равное единице. Число M в определении носит название верхней границы функции $y = f(x)$ на множестве X.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной на этом множестве снизу, если

$\exists m \forall x \in X \ (f(x) \geq m)$.

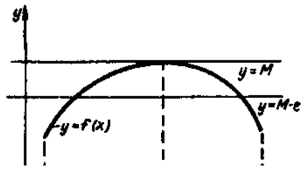
Число m называется нижней границей функции $f(x)$ на множестве X.

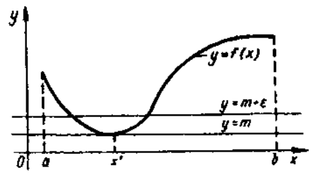
Например, функция $y=x^2$ ограничена снизу на всей числовой прямой. Ее нижней границей может быть любое число $m \leq 0$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной на этом множестве, если она ограничена и сверху и снизу, то есть

$\exists c > 0 \forall x \in X \ (|f(x)| \leq c)$.

Геометрически это означает





а) для функции, ограниченной сверху, имеется такая прямая $y = M$, что все точки графика $y = f(x)$ лежат ниже прямой $y = M$;

б) для функции, ограниченной снизу, имеется такая прямая $y = m$, что все точки графика $y = f(x)$ лежат выше прямой $y = m$;

в) для ограниченной функции, имеются прямые $y = -c,\ y = c$ такие, что все точки графика $y = f(x)$ лежат между этими прямыми.

Число M называется верхней гранью функции $y = f(x)$ на множестве X ($M = \sup f(x)$), если выполнены два условия:

1) $\forall x \in X (f(x) \leq M)$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in X \ (f(x') > M - \varepsilon)$.

Число m называется нижней гранью функции $y = f(x)$ на множестве X $m = \inf f(x)$, если выполнены два условия:

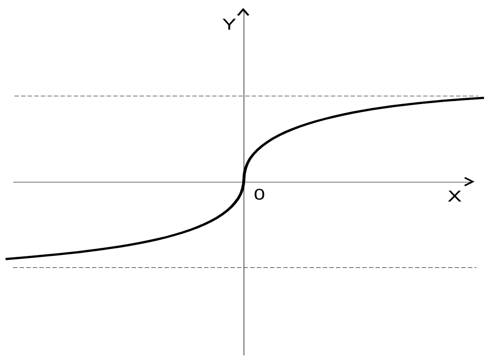
1) $\forall x \in X (f(x) \geq m)$,

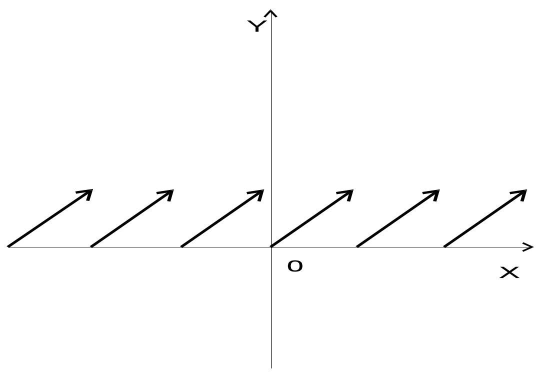
2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in X \ (f(x') < m + \varepsilon)$.

Условие б) означает, что нижняя грань m есть наибольшая из всех нижних границ.

Вопрос о том, являются ли нижняя m и верхняя М - грани ограниченной функции - значениями этой функции - сложен. В дальнейшем положительный ответ на этот вопрос будет получен для непрерывных функций, определенных на сегменте.

Пример.

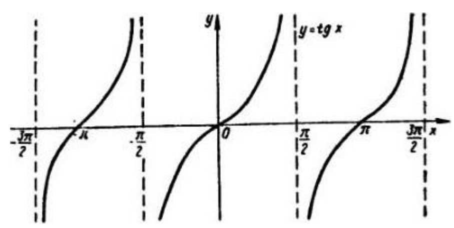




Неограниченность функции, очевидно, можно определить так: функция *f(x)* называется неограниченной на множестве X, если

$\forall A \exists x' \in X (f(x') > A)$.

Примерами неограниченных функций являются функции $y = tgx, \ y = ctgx$



§3. Сложная функция. Обратная функция

Пусть на некотором множестве D определена числовая функция $u = \varphi(x)$ и $E(u)$ - множество значений функции u. Далее, пусть на множестве $E(u)$ задана функция $y = f(u)$ $(D(f) \subseteq E(u))$. Тогда функция φ переводит (ставит в соответствие, отображает) элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y:

$x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y \Leftrightarrow y = f(\varphi(x)) \Leftrightarrow (f \circ \varphi)$.

Таким образом, в конечном итоге каждому значению $x \in D(f)$ ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно вполне определенное значение $y \in E(f)$, где $E(f)$ - множество значений функции $y = f(u)$:

$$E(f) = \{y \in R \mid y = f(u),\ u = \varphi(x),\ x \in D(\varphi)\}.$$

В этом случае y называют *сложной функцией* аргумента x или *функцией от функции* (записывают $y = f(\varphi(x))$). Часто сложную функцию называют также *композицией функции* f и φ или *суперпозицией функций* и обозначают $f \circ \varphi$. При этом функцию $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом*, x - *независимой переменной*.

Пусть $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция. Ее можно разбить на отдельные звенья (говорят также «записать в виде цепочки равенств»): $y = f(u),\ u = \varphi(x)$.

Пусть $y = f(\varphi(\psi(x)))$ - сложная функция двух промежуточных аргументов t и u:

$$y = f(\varphi(\psi(x))) \Leftrightarrow (f \circ \varphi \circ \psi) : x \xrightarrow{\psi} u \xrightarrow{\varphi} t \xrightarrow{f} y.$$

Ее можно представить в виде цепочки равенств: $y = f(t),\ t = \varphi(u),\ u = \psi(x)$.

Функция $y = f(x)$ является отображением множества $D(f) \to E(f)$, где $D(f)$ - область определения функции, $E(f)$ - множество значений функции $y = f(x)$.

При взаимно однозначном отображении множества D на множество E каждый элемент y множества E является образом одного и только одного элемента x множества D и наоборот, т.е.

$y = f(x)$ - *взаимно однозначная функция* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists y \in E : y = f(x);\ \forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2).$$

Не всякая функция $y = f(x)$ имеет обратную. Функция, имеющая обратную, называется *обратимой.*

Теорема. *Если числовая функция* $y = f(x)$ *монотонна, то существует обратная функция* $y = f^{-1}(y)$. *При этом, если* f *- возрастающая функция, то и* f^{-1} *- возрастающая функция, а если* f *- убывающая функция, то и* f^{-1} *- убывающая функция.*

Заметим, что монотонность функции является лишь достаточным условием ее обратимости, т.е. существует немонотонные обратимые функции.

Рассмотрим методику построения графика обратной функции. Пусть $y = f(x)$ монотонна на $[a;b]$, т.е. для нее существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. По существу эти две функции (рис. 1) выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y. Только при функциональной зависимостью $y = f(x)$ мы рассматриваем x как аргумент, y как функцию. При функциональной зависимости $x = f^{-1}(y)$ аргументом служит y, функцией - x, поэтому график обратной функции $x = f^{-1}(y)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ (см. рис.1).

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$, совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy, т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла.

Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла. (см. рис.2).

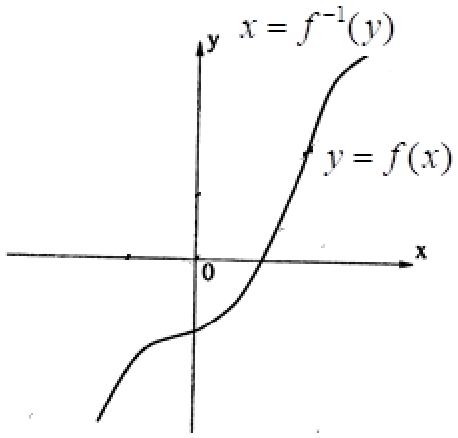


Рис. 1

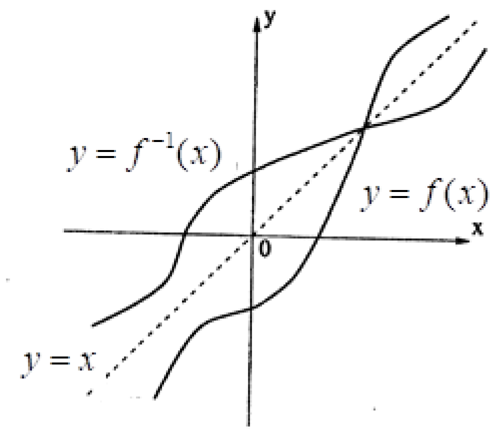
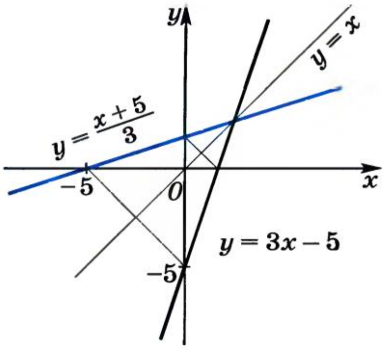


Рис.2

Сформулируем общее правило нахождения обратной функции для взаимно однозначной функции $y = f(x)$:

1) Решая уравнение $y = f(x)$ относительно x, находим $x = f^{-1}(y)$;

2) Меняя обозначения переменной x на y, а y на x, получаем функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную к данной.



Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Найти области существования функции

а) $y = \arccos(2\sin x)$

б) $y = \lg[\cos(\lg x)]$

в) $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$

г) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$

2. Определить область существования и множество значений следующих функций:

а) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$

б) $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$

в) $y = \lg(1 - 2\cos x)$

г) $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$

3. Найти $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если

а) $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$

б) $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$

в) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ -x^2 & \text{при } x > 0 \end{cases}$

4.Найти $f(x)$, если $f(x+2) = x^2 - 3x + 2$

5.Найти $f(x)$, если $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ $(|x|\geq 2)$.

6. Найти обратную функцию $x=\varphi(y)$ и её область существования.

а) $y=2x+3$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$

б) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ $\quad(x\neq -1)$

в) $y=\begin{cases} x, \ \textit{если} \ -\infty<x<1 \\ x^2, \textit{если} \ 1\leq x\leq 4 \\ 2, \ \textit{если} \ \ 4<x<+\infty \end{cases}$

7. Докажите. Монотонная функция не может быть периодической.

8. Привести примеры функций, обладающих перечисленными свойствами:

а) периодическая, но с периодом 1;

б) всюду разрывная;

в) возрастающую но ограниченную сверху 1;

г) возрастающую, но ограниченную снизу 2;

д) периодическую с периодом $\frac{\pi}{2}$;

е) возрастающую на R_- и убывающую на R_+;

ж) нигде не возрастающую и неубывающую функцию.

Начертите их графики.

9. Определить, какие из функции периодические, найти основной период, если существует.

9.1. $f(x)=sin2x$.

9.2. $f(x)=cos\pi x$.

9.3. $f(x)=sin^2 x$.

9.4. $f(x)=\{x\}$.

9.5. $f(x)=5$.

9.6. $f(x)=sin(x+1)$.

9.7. $f(x)=cos\ x^2$.

9.8. $f(x)=lg(sin\ x)$.

9.9. $f(x)=sin(cos\ x)$.

9.10. $f(x)=sin^2 3x$.

10. Доказать, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in Q, \\ 0, & \text{если } x\in R\setminus Q \end{cases}$ периодическая, но не обладает основным периодом.

11. Найти основной период функции $f(x)=\{2x\}$

12. Доказать, что функция монотонна в указаном промежутке.

12.1. $f(x)=2x-3$, $(-\infty;+\infty)$.

12.2. $f(x)=-3x+2$, $(-\infty;+\infty)$.

12.3. $f(x)=x^2+2x+5$, $(-\infty;-1)$ va $(-1;+\infty)$. 12.4. $f(x)=\cos x$, $[0;\pi]$.
12.5. $f(x)=|x|-x$, $(-\infty;0]$. 12.6. $f(x)=2x-1$, $(-\infty;+\infty)$.

§4. Предел функции в точке

4.1. Бесконечно малая функция[7]

Определение. Бесконечно малой функцией в окрестности точки x_0 называется функция $\alpha(x)$, которая в процессе своего изменения становится и при дальнейшем изменении остается по модулю меньше любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon>0$ при достаточно близких к x_0 значениях аргумента x.

Например: **1)** $\alpha(n)=\dfrac{1}{n^2}$ - бесконечно малая, так как полагая $\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, то, как следует из этого неравенства, при $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ определение всегда будет выполняться.

Последнее соотношение предопределяет характер изменения аргумента n: $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

2) $f(x)=x^3$ - бесконечно малая функция при значениях x, приближающихся к нулю. При $\forall\varepsilon>0\ |f(x)|<\varepsilon$, или $|x|<\sqrt[3]{\varepsilon}$.

В примере, если значение x приближаются к какому-нибудь значению x_0, не равному нулю, то x не будет бесконечно малой в окрестности x_0. Бесконечно малую функцию называют также бесконечно малой величиной.

Важно отметить, что, испытывая на бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ в окрестности x_0, считается, что в x_0 функция не определена, т.е. не рассматривается. Это предусматривают в определении бесконечно малой функции.

[7] Обратите внимание говорят о бесконечно малой функции, когда же о величине, то для начал следует её определить, когда-то этим занимался и Фалес, и Евклид и уж этим активно заниались в девятнадцатом веке. [4, 5,7-13, 16-22]

Определение. $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией в окрестности точки x_0, если для $\forall\varepsilon > 0$ при приближении x к x_0 при условии, что $x \neq x_0$, $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Или иначе, для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих $|x - x_0| < \delta$ и $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

В примере 2) $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

4.2. Два свойства бесконечно малых величин

Теорема 1. Сумма двух бесконечно малых величин – величина бесконечно малая.

Теорема 2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию – бесконечно малая.

4.2. Определение предела функции в точке

Везде пределы рассматриваются в предельных точках.

Определение. Точка x_0 называется предельной или точкой сгущения множества $X = \{x\}$, если в любой ее окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\exists x \in X$, $x \neq x_0$. Точка x_0 может как принадлежать X, так и не принадлежать ему.

Пусть задана функция $y = f(x)$. Число A называется пределом этой функции в точке x_0 (точка сгущения), если по $\forall\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < |x - x_0| < \delta \qquad (5)$$

выполняется соотношение

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (6)$$

Замечание. Требование $|x - x_0| > 0$ (см. (5)) равносильно тому, что $x \neq x_0$, т.е. предполагается, что значение *f* в точке x_0 не рассматривается. В этом случае *f* может быть в точке x_0 не определена или $f(x_0) \neq A$, а предел будет существовать, так как будет выполняться определение. Если снять это требование, то класс функций, имеющих предел, сузился бы.

Например, функция $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0 \\ 5 & \text{при } x = 0 \end{cases}$

предел имеет. Он равен 0 при $x \to 0$. Это возможно, так как выполняется (5).

Если бы потребовать, чтобы не выполнялось $|x-x_0|>0$, то предел не существовал бы!

Понятия предела в определениях 1 и 2 вводятся однотипно: это числа a и A, для которых $|x_n-a|=|\alpha_n|<\varepsilon$ и $|f(x)-A|=|\alpha(x)|<\varepsilon$, где α_n и $\alpha(x)$ - бесконечно малая, $\forall\varepsilon>0$.

В дальнейшем определяется характер изменения аргументов, чтобы выполнялись эти условия:
для первого случая отыскивается N, чтобы при $n>N$ $|\alpha_n|<\varepsilon$;

для второго отыскивается $\delta>0$, чтобы при x, близких к $x_0\left(0<|x-x_0|<\delta\right)$ $|\alpha(x)|<\varepsilon$, т.е. в обоих случаях аргументы должны лежать в определенных окрестностях предельных точек.

Предел по Гейне.

Число A называют пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности аргументов $x\neq x_0$, имеющей своим пределом x_0, соответствующая последовательность значений функции имеет своим пределом число A

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Можно доказать, что определения предела по Коши и Гейне *эквивалентны*.

4.3. Теорема о связи переменной, предела и бесконечно малой

Теорема. Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела своим пределом число A при $x\to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы.

$$f(x)=A+\alpha(x), \qquad (7)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$ $(x\neq x_0)$

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тогда согласно определению предела

$$|\alpha(x)|=|f(x)-A|<\varepsilon, \qquad (8)$$

при $0<|x-x_0|<\delta$, т.е. $|\alpha(x)|<\varepsilon$-, следовательно, $\alpha(x)$- бесконечно малая., откуда вытекает (7).

Достаточность. Пусть выполняется (7), где $\alpha(x)$ - бесконечно малая,

Тогда выполняется (8) и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

4.4. Некоторые теоремы о пределах

Предшествующая теорема позволяет доказать ряд теорем теории пределов.

1) Теорема о перестановочности операции предела и арифметических операций.

Теорема. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$ (f и φ имеют пределы), то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x); \qquad (9)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}. \qquad \left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0 \right)$$

Все утверждения (9) доказываются однотипно. Поэтому ограничимся доказательством, скажем, случая умножения.

$$f(x) \cdot \varphi(x) = \left(A + \alpha(x) \right) \cdot \left(B + \beta(x) \right) = A \cdot B +$$

$+\alpha(x) \cdot B + \beta(x) \cdot A + \alpha(x) \cdot \beta(x) = A \cdot B + \gamma(x)$, $\alpha(x), \beta(x)$- бесконечно малые и $\gamma(x) = \alpha(x) \cdot B + \beta(x) \cdot A + \alpha(x) \cdot \beta(x)$.

В силу теоремы о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию и суммы бесконечно малых, заключаем, что $\gamma(x)$ - бесконечно малая.

Поэтому, согласно теореме 6:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi(x) \right) = A \cdot B = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x). \ \Delta$$

Эта теорема широко используется для отыскания пределов.

Следствие: Постоянный множитель выносится за знак предела.

2) Теорема о единственности предела.

Теорема. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то этот предел единственен.

Доказательство. Предположим противное: при $x \to x_0$ $\lim f(x) = A$, $\lim f(x) = B$. Тогда

$$|A - B| = \left| \left(A - f(x) \right) + \left(f(x) - B \right) \right| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| \to 0,$$

так как $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малая.

Поэтому $A=B$. Δ

3) Теорема о пределе промежуточной функции.

Теорема. Если $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ в окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Доказательство.

В силу существования предела

$\varphi(x)-A=\alpha(x)$ - бесконечно малая, $\psi(x)-A=\beta(x)$ - бесконечно малая. Тогда $\varphi(x)-A\le f(x)-A\le\psi(x)-A$ или $\alpha(x)\le f(x)-A\le\beta(x)$, откуда

$$|f(x)-A|\le\max\left(|\alpha(x)|,|\beta(x)|\right).$$

Отсюда: $f(x)-A\to 0$ при $x\to x_0$, так как $\alpha(x),\beta(x)\to 0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Δ

4.5. Отыскание пределов при помощи определения и теорем о пределах

Доказательство того, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ при помощи определения предела по Коши (отыскание предела функции). Для этого проверяется выполнимость определения.

Пример. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1)=9$.

Для этого возьмем $\forall\varepsilon>0$ и покажем, что можно найти δ - окрестность точки 4 $(4-\delta,\ \ 4+\delta)$, что при $x\in(4-\delta,\ \ 4+\delta)$, $x\ne 4$ разность $|(2x+1)-9|<\varepsilon$.

Доказательство.

$$|(2x+1)-9|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<(2x+1)-9<\varepsilon\Leftrightarrow 4-\frac{\varepsilon}{2}<x<4+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, при $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, выполняется определение предела.

4) Использование определения предела по Гейне.

а) Непосредственное использование определения пределов по Гейне целесообразно для доказательства отсутствия предела.

Покажем, что функция $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ в точке 0 предела не имеет. Выбираем 2 последовательности, стремящиеся к нулю:

$$\{x_n'\},\ x_n'=\frac{1}{2\pi n-\dfrac{\pi}{2}}\to 0;\ \ \{x_n''\},\ \ x_n''=\frac{1}{2\pi n+\dfrac{\pi}{2}}\to 0,\ n\to\infty.$$

Соответствующие последовательности значений функции:

$$\sin\frac{1}{x_n'}=\sin\left(2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)=-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=-1$$

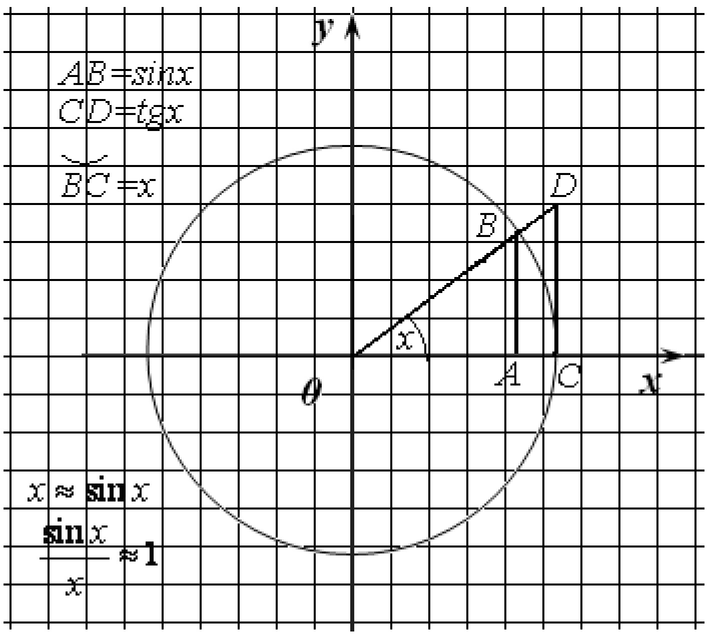
$$\sin\frac{1}{x_n''}=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n''}=1,\ n\to\infty.$$

Пределы разные. Функция в $x_0=0$ предела не имеет.

§5. Первый замечательный предел

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Этот предел широко применяется в теории пределов. Поэтому называется замечательным. Непосредственный переход к пределу дает неопределенность $\dfrac{0}{0}$.



Пусть $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ и измеряется в радианной мере:

Очевидно (см. чертеж), так как AB=sinx; CD=tgx; $дугаBC = x$

$$\sin x < x < tgx. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\sin x < x. \qquad (2)$$

Делим (1) на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$

$$1 - 1 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \qquad (3)$$

$$1 - \cos x = 2\sin\frac{2x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x \qquad (4)$$

Представляем (4) в (3):

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x \qquad (5)$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, при $x > 0$.

Этот предел имеет место не только при $x > 0$, но и при $x < 0$, так как $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ Δ.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2 \cdot \dfrac{\sin 2x}{2x} = 2$

§6. Второй замечательный предел

Нами получено e как предел функции натурального аргумента. Легко показать, что при непрерывности аргумента предел тот же. Имеют место соотношения:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to -\infty)}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{\phi(x)\to 0}\left(1 + \phi(x)\right)^{\frac{1}{\phi(x)}} = e$$

Этот предел называется *вторым замечательным пределом*. С его помощью раскрываются неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0, которые получаются при непосредственном переходе к пределу (сам предел (15) есть раскрытие неопределенного вида 1^∞).

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=?$. Непосредственный переход к пределу: 1^{∞}. Раскрываем неопределенность:

$$\cos x^{\frac{1}{\sin^2 x}}=(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}=\left[(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{-\frac{1}{2}}\to e^{-\frac{1}{2}}.$$

§7. Ещё раз о бесконечно малых

7.1. Новое определение бесконечно малой

На основании теории пределов бесконечно малую можно определить так.

Определение. $\alpha(x)$- называется бесконечно малой в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, или на языке $\varepsilon-\delta$: $\alpha(x)$ - бесконечно малой, если при $\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0$, что из $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$.

а) $A(x)$ называются бесконечно большой в окрестности x_0, если для $\forall\ \ M>0$, начиная с достаточно близких к x_0 переменных x, - $|A(x)|>M$.

Примеры.

$A(x)=\dfrac{1}{x-1}$ - бесконечно большая в окрестностях $x=1$. Чем меньше $|x-1|$, тем больше $|A(x)|$

б) Если бесконечно большая $A(x)$ для x, достаточно близких к x_0, сохраняет определенный знак (+ или -), тогда в соответствии со знаком говорят $A(x)\to+\infty$ или $A(x)\to-\infty$, или $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=+\infty(-\infty)$.

Примеры. $A_n\to+\infty,\ B_n\to-\infty;\ C_n$ не имеет предела, но бесконечно большая, то $|C_n|\to\infty$ при $n\to\infty$.

4) Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой

Если в окрестности x_0 $\alpha(x)$ - бесконечно малая, не принимающая значения 0, то ее обратная величина $\dfrac{1}{\alpha(x)}=A(x)$ - бесконечно большая, и наоборот.

Доказательство. Согласно определению бесконечно малой $|\alpha(x)|<\varepsilon$ при $\forall\varepsilon>0$ и достаточно малой окрестности x_0. Из чего

$\Rightarrow \dfrac{1}{|\alpha(x)|} = |A(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon} = M$ - бесконечно большая.

Пусть $M > 0$ - произвольно. Ему будет соответствовать ε такое, что (следует из предыдущего соотношения) $|\alpha| < \varepsilon$ - бесконечно малая в соответствующей окрестности x_0. Эти рассуждения взаимообратны. Δ.

Примеры. $|\alpha(x)| = |x-1|$ - бесконечно малая в окрестности 1.

$|A(x)| = \dfrac{1}{|x-1|}$ - бесконечно большая в этой же окрестности.

7.2. Сравнение бесконечно малых

Отношения бесконечно малых могут стремиться к $c \neq 0$; 0, ∞, а также могут вообще не иметь предела.

Примеры.

$$\alpha = \frac{1}{n},\ \beta = \frac{1}{n^2},\ \gamma = \frac{3}{n},\ \delta = \frac{(-1)^n}{n}\ (n \to \infty).$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{n} \div \frac{1}{n} = 3 \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} \to 3$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{n} \div \frac{1}{n^2} = n \to \infty$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n^2} \div \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{1}{n} : \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \text{ не имеет предела.}$$

б) Определение. Если отношение бесконечно малых $\dfrac{\alpha}{\beta}$ стремятся к 1, то бесконечно малые называются эквивалентными $(\alpha \sim \beta)$.

Пример. $\alpha = \sin x$, $\beta = x$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

в) Определение. | Если отношение двух бесконечно малая стремится к некоторому числу, не равному 0, то бесконечно малые называются бесконечно малыми одного порядка.

Пример. $\alpha = \sqrt{x+1} - 1$, $\beta = x$ - это бесконечно малая одного порядка в окрестности нуля.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}\qquad x\to0$$

г) Определение. Если отношения двух бесконечно малых стремится к 0, то делимое называется бесконечно малой более высокого порядка, чем делитель.

Пример. $\alpha=\frac{1}{n^2}$, $\beta=\frac{1}{n}$. Следовательно, α - бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

д) Определение. Пусть заданы две бесконечно малые α и β. Если $\frac{\alpha}{\beta^k}\to c\neq0$, то α называется бесконечно малой k-того порядка малости по сравнению с бесконечно малой β.

Пример. $\alpha=1-\cos x$, $\beta=x$, $x\to0$. Сравним эти бесконечно малые:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\to\frac{1}{2};$$

отсюда вытекает, что бесконечно малая $\alpha=1-\cos x$ в окрестностях точки 0 является бесконечно мал0й 2-го порядка относительно бесконечно малой $\beta=x$.

Замечание. Существуют несравниваемые бесконечно малые величины. Например, $\alpha(x)=x\sin\frac{1}{x}$; $\beta(x)=x$; $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\sin\frac{1}{x}$ при $x\to0$ предела не имеет.

7.3. Символы «о-малое», «О-большое»

а) Если α - бесконечно малая более высокого порядка, чем β, то это обозначают так: $\alpha=o(\beta)$.

Пример. $\alpha=1-\cos x$, $\beta=x$, $x\to0$

$1-\cos x=o(x)$, так как $\qquad 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{2}$

$$\frac{\alpha}{\beta}\sim\frac{x^2}{2}:x=\frac{x}{2}\to0$$

б) Если $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \le c$, где $c = const$, то этот факт обозначают $\alpha = \mathrm{O}(\beta)$.

Из определения вытекает, что α либо одного порядка малости β, либо более высокого порядка малости.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Используя определение предела функции в точке доказать равенства: a) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)=4$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2}{x^2+1}=\frac{2}{5}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = 1$; e) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$, при каких значениях δ из 0<|*x*-2|<δ следует $|(2x-1)-3| < 0{,}01$? f) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{2(x+1)}=\frac{1}{4}$, при каких значениях δ из 0<|*x*-3|<δ следует $\left|\frac{x-1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\right| < 0{,}01$?

2. Используя определение предела функции в бесконечности доказать равенства: ф) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2}=2$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$.

3. Вычислить пределы

3.1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2+2}$; 3.2. $\lim\limits_{x\to 1}(5x^3-4x+1)$; 3.3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}$;

3.4. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$; 3.5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 3.6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^3-x}$;

3.7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$; 3.8. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+5x+2}{3x^2-x-14}$; 3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

3.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$; 3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x}$; 3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{2x^2}$;

3.13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; 3.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{3x}$; 3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$;

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+3x}-3}{\sqrt{25+2x}-5}$. 3.17. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$; 3.18. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-4}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x+3}$; 3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;

3.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4+3x^3+1}{0{,}1x^4+1}$;   3.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$;

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;   3.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2+4}-x^2\right)$;

3.25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;   3.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-3x+1}}{1-x^2}$;

3.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$;   3.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

3.29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$;   3.30. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})$;

3.31. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;   3.32. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

3.33. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$;   3.34. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$.

4. Вычислить пределы (первый замечательный предел)

4.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$;   4.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$;   4.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 7x}$;   4.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$;

4.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{4x}$;   4.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgmx}{nx}$;   4.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x}{\sin 4x}$;   4.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\arcsin x}{3x}$;

4.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctgx}{3x}$;   4.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+\arcsin x}{2x+arctgx}$;   4.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x+\arcsin x}{\sin x+\arcsin x}$;

4.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{5x}$;   4.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$;   4.14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{4}}{x^3}$;   4.16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;   4.17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$;

4.18. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$;   4.19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$;

4.20. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}$.   4.21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$;

4.22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$;   4.23 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$;   4.24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

5. Вычислить пределы ($\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ второй замечательный предел).

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$; 5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; 5.3.. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$;

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$; 5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}$; 5.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{-x}$;

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$; 5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^x$; 5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+1}\right)^x$;

5.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^x$; …….5.11. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+tg\alpha)^{ctg\alpha}$; 5.12. . $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\cos ecx}$;

5.13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$; 5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

5.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\right)$; 5.17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

6. Какие из пар функции эквивалентны

$a)$ $\alpha(x)=\sin nx$ и $\beta(x)=nx$, *при* $x\to 0$;

b) $\alpha(x)=\mathrm{tg}mx$ и $\beta(x)=mx$, *при* $x\to 0$;

c) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}$ -1 *и* $\beta(x)=\frac{1}{2}x$, *при* $x\to 0$;

d) $\alpha(x)=x^2-1$ *и* $\beta(x)=2(x-1)$, *при* $x\to 1$;

e) $\alpha(x)=1-\cos x$ и $\beta(\mathrm{x})=\frac{1}{2}x^2$, *при* $x\to 0$;

f) $\alpha(x)=\sqrt{1+tgx}-1$ и $\beta(x)=\frac{x}{2}$, *при* $x\to 0$;

g) $\alpha(x)=\frac{\sqrt{1+x^2+x^3}-1}{\sin 2x}$ и $\beta(x)=\sin x$, *при* $x\to 0$.

4-ГЛАВА. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§1. Определения непрерывной функции в точке

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из этого определения непрерывности вытекает, что знак предела со знаком функции в окрестности точки x_0 перестановочны, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$

Пример **.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to 2} x \cdot \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 1 = 2\cdot 2 + 1 = 5$.

2) Определение непрерывности по Коши.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если по $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, что

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta.$$

Пример. Доказать, что $y = \sin x$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$.

Пусть $\forall x_0$, $\forall \varepsilon > 0$. Тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| < 2\cdot\frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

Выбрав $\delta = \varepsilon$, получим $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \varepsilon$.

Определение непрерывности по Гейне. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для произвольной последовательности значений аргумента, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции сходится к $f(x_0)$:

$\forall \{x_n\}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$.

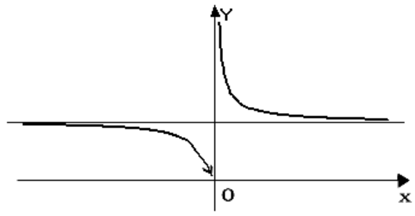
Определение по Гейне в основном используется для доказательства отсутствия непрерывности.

Определение непрерывности через левый и правый пределы.

Если предел функции $y = f(x)$ в точке x_0 рассматривается при значениях x, меньших $x_0 \quad (x < x_0)$, то предел называется *левым* и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$.

Если же $x > x_0$, то предел называют *правым*: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$.

Такие пределы называют *односторонними*.

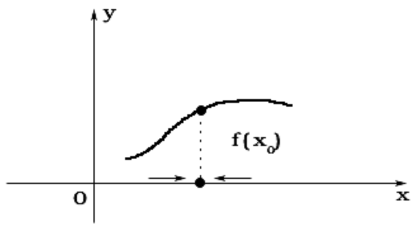


Пример. Найти левый и правый пределы в точке $x=0$ функции $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$, $a>1$

$\lim\limits_{0-0} a^{\frac{1}{x}} = 0$; $\lim\limits_{0+0} a^{\frac{1}{x}} = \infty$; $f(0-0) \ne f(0+0)$. Δ.

Определение Функция называется непрерывной в x_0, если левый предел равен правому пределу в x_0 и равен значению функций $f(x_0)$

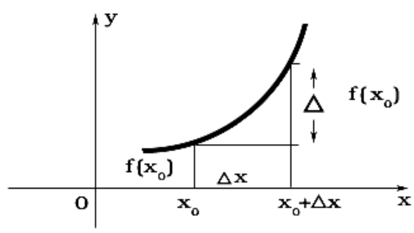
$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0)$



При помощи отыскания левых и правых пределов в предшествующем примере показано, что функция в точке $x_0=0$ не является непрерывной.

Определение непрерывности через приращение функции.

Пусть задана функция $y=f(x)$. Через Δx обозначим приращение аргумента, $x_0+\Delta x$ – его приращенное значение; $f(x_0+\Delta x)$ - приращенное значение функции. $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции, $f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \Delta y$.



Определение. Если при стремлении к нулю приращения Δx значения аргумента x_0, стремится к нулю и приращение функции Δy, то функция называется *непрерывной* в точке x_0.

$\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Можно показать, что все определения непрерывности эквивалентны.

Пример. Показать, что функция $y = x^2+1$ непрерывна в любой точке x.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2+1) = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 2x\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2 = 0.$$

Все указанные определения непрерывности являются определениями непрерывности в точке. Поэтому они называются определениями *локальной* непрерывности.

Функция называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Например. Функция $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{при} \quad x=0\end{cases}$ непрерывна на $X=(-\infty,\infty)$.

§2. Точки разрыва и их классификация

1) Определение. Если в некоторой точке функции $y=f(x)$ нарушается определение непрерывности, то говорят, что в этой точке функция имеет разрыв. Точка называется точкой разрыва, а функция называется разрывной.

Пример. Функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1 \ \text{при}\ x\in Q\\ 0\ \text{при}\ x\in I\end{cases}$$

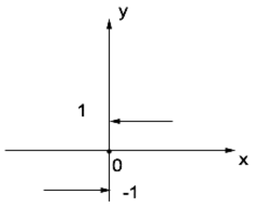
разрывна в каждой точке $X=(-\infty,\infty)$, так как ни в одной точке X она предела не имеет.

Точки разрыва разделяют на два класса – точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода.

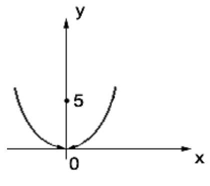
К точкам разрыва первого рода относят те точки существования функции, в которых существуют левый и правый пределы, но они не равны между собой (разрыв называют *скачком*), либо при равенстве левого и правого предела они не равны значению функции в данной точке (их называют точками устранимого разрыва).

Пример.

Скачок: $y=signmx=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$



Устранимый разрыв: $y=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$



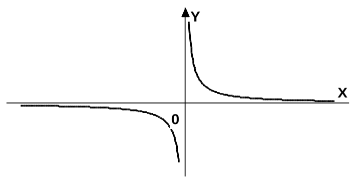
Устранимый разрыв можно устранить путем переопределения функции. В последнем примере следует функцию определить так: $y = x^2$ при всех $x \in R$.

Во всех остальных случаях невыполнения определения непрерывности в точке, говорят, что в точке разрыв *второго рода*. К таким разрывам относят точки, в которых левый и правый пределы таковы, что один, либо оба не существуют, не исключается также равенство ∞ хотя бы одного из них.

Примеры.

а) $y = \sin\frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует

б) $y = \frac{1}{x}$



Здесь $f(-0) = -\infty$, $f(+0) = +\infty$

4. Вычисление некоторых пределов

Опираясь на непрерывность можно вычислить ряд важных пределов, которые используются в решении многих задач.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Имеем $\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to \log_a e$ при $\alpha \to 0$.

Здесь используется непрерывность логарифмической функции, поэтому знак предела перенесен под знак функции.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Обозначим $a^\alpha - 1 = \beta$, получим $\alpha = \log_a(1+\beta)$. Воспользовавшись непрерывностью показательной и логарифмической функции. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\ \Delta.$$

Пример применения этого соотношения. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a$.

Действительно, $n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$. При $\alpha=\dfrac{1}{n}$ получаем 2).

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

Обозначим $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$; $(1+\alpha)^{\mu}=1+\beta$; $\mu\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta)$, $\mu=\dfrac{\ln(1+\beta)}{\ln(1+\alpha)}$

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\cdot\frac{\ln(1+\beta)}{\ln(1+\alpha)}=\left[\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}\right]\cdot\mu$$

В силу непрерывности логарифмической и показательной функций $\beta\to0$ при $\alpha\to0$ и, следовательно, квадратная скобка стремится к 1, согласно пределу 1). Откуда $\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu$.Δ.

§3. Свойства непрерывных функций в точке

Рассмотрим ряд теорем, в которых будут выражены свойства непрерывных функций.

1. Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема. Сумма, разность, произведение, частное (знаменатель не равен нулю), двух непрерывных в данной точке функций, являются непрерывной в этой точке функцией.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы о перестановочности символа предела с символами арифметических операций, а также определения непрерывности.

Рассмотрим, например, доказательство для суммы функций.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ - непрерывны в точке x_0. Тогда непрерывность $F(x)=f(x)+\phi(x)$ доказывается следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)+\varphi(x_0)=F(x_0)$$

Аналогично доказываются остальные случаи.

2. Суперпозиция непрерывных функций

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ непрерывна на множестве T, а $y=f(x)$ на множестве X. Пусть значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы множества X. Тогда функция $f(\varphi(t))$будет непрерывна в $\forall t_0 \in T$

Доказательство. Будем исходить из определения непрерывности, данное на языке приращений: функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Нам следует доказать, что функция $f(\varphi(t))=F(t)$ непрерывна в точке t_0, т.е. что при $(\Delta t \to 0) \Rightarrow (\Delta y \to 0)$. По приращению Δt находим Δx; по Δx находим Δy. В силу непрерывности $x=\varphi(t)$: $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$. В силу непрерывности $y=f(x)$: $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Получаем
$(\Delta t \to 0) \Rightarrow (\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta y \to 0) \Rightarrow$ из $(\Delta t \to 0) \Rightarrow (\Delta y \to 0)$.

Пример. Доказать, что $y=\cos x$ непрерывна в любой точке.

Известно, что $y=\sin x$ - непрерывна.

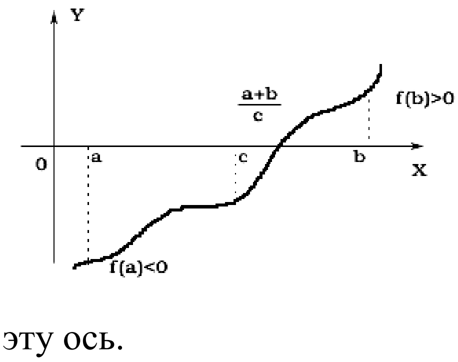
$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ - это суперпозиция двух непрерывных функций. Следовательно, $\cos x$ непрерывна согласно теореме.

§4. Свойства непрерывных функций на отрезке

Теорема о нуле непрерывной функции (1-я теорема Больцано-Коши)

Теорема. Пусть $f(x)$ 1) определена и непрерывна на $[a,b]$,

2) на концах $[a,b]$ принимает значения разных знаков.



Тогда существует такая точка $c \in (a,b)$, что $f(c)=0$.

Геометрический смысл: Если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси OX на другую, то она пересекает эту ось.

Доказательство. Считаем для определенности $f(a)<0$, $f(b)>0$. Делим $[a,b]$ на равные части точкой $\frac{a+b}{2}$. На одном из полученных отрезков значения функции будут разных знаков. Обозначим его $[a_1, b_1]$. (Если в точке деления функция обращается в 0, то доказательство заканчивается, так как полагается $\frac{a+b}{2} = c$ и $f(c) = 0$. Но мы это предполагать не будем сейчас и в дальнейшем).

Отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим и рассуждения продолжаем. Получим последовательность отрезков: $[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

Причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Согласно лемме о вложенных промежутках последовательности концов отрезка сходится к точке c, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Так как $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, то в силу непрерывности

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(c) \le 0.$$

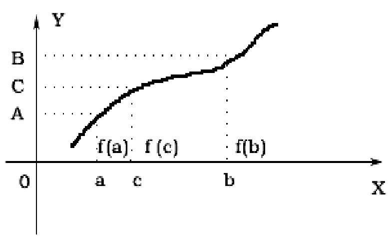
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = f(c) \ge 0.$$

Эти соотношения могут выполняться лишь при $f(c) = 0$. Что и требовалось доказать.

Пример применения. Имеет ли функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ на $[1,3]$ значение, равное нулю? Да: $f(1) < 0$, $f(3) > 0$.

4. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции (2-я теорема Больцано - Коши)

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$



1) задана и непрерывна на отрезке $[a,b]$.
2) $A = f(a)$, $B = f(b)$, $A < B$ (для определенности). Тогда для $\forall C$, $A < C < B$ - найдется такое значение аргумента c, $a < c < b$, что $C = f(c)$

Доказательство. Основано на предшествующей теореме. Построим вспомогательную функцию $\varphi(x)$: $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция удовлетворяет всем требованиям теоремы о нуле непрерывной функции, так как, во-первых, она непрерывна на отрезке $[a,b]$ как разность двух непрерывных функций $f(x)$ и C; во-вторых, на концах отрезка $[a,b]$ она принимает значения разных знаков.

Действительно, $\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$.

Следовательно, найдется такая точка c, которая находится между a, b, в которой $\varphi(c) = 0$: $\varphi(c) = f(c) - C = 0$. Отсюда следует, что $f(c) = C$. Что и требовалось доказать.

5. **Теорема об ограниченности непрерывной функции (1-я теорема Вейерштрасса)**

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда эта функция ограничена, т.е. существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть функция $y = f(x)$ не ограничена. Это значит, что можно указать такую последовательность $\{x_n\} \subset [a,b]$, что $|f(x_n)| \geq n$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, она расположена на отрезке $[a,b]$, то согласно Лемме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x_0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$.

Так как функция $y = f(x)$ задана на отрезке, а отрезок является замкнутым множеством, то это значит, что ему принадлежат все его предельные точки, т.е. $x_0 \in [a,b]$. Тогда согласно определению непрерывности по Гейне имеем $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f\left(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0)$.

$f(x_0)$ - число, так как $y = f(x)$ задана и непрерывна на $[a,b]$.

С другой стороны согласно предположению $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \geq n_k \to \infty$. Пришли к противоречию, что отвергает предположение о неограниченности. Следовательно, функция $y = f(x)$ ограничена.

6. Теорема о наибольшем и наименьшем значении непрерывной функции (2-я теорема Вейерштрасса)

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$. Так как она ограничена, т.е. множество ее значений ограничено, то существуют точные верхняя и нижняя границы значения функции: $M = \sup f(x)$, $m = \inf\left(f(x)\right)$.

Возникает вопрос: имеются ли такие точки на отрезке $[a,b]$, в которых функция $y=f(x)$ принимает значения, точных границ?

Теорема. Если функция $y=f(x)$ задана и непрерывна на $[a,b]$, то на этом отрезке существуют такие точки, в которых функция $y=f(x)$ принимает значения, равные точной верхней и точной нижней границам.

Доказательство. Приведем доказательство для точной верхней границы.

Предположим противное, пусть нет такой точки, в которой функция $y=f(x)$ достигает точной верхней границы M, тогда $M-f(x)>0$.

Построим функцию $\varphi(x)$: $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$.

Эта функция непрерывна на $[a,b]$, так как она является отношением двух непрерывных функций. Отсюда вытекает, что эта функция ограничена, т.е. $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}<\beta$.

Из неравенства найдем выражение функции $f(x)$:

$$M-f(x)>\frac{1}{\beta};\quad f(x)<M-\frac{1}{\beta}.$$

Неравенство указывает, что M не является точной верхней границей, так как $f(x)<M-\dfrac{1}{\beta}<M$. А это противоречит условию, что M точная верхняя граница. Следовательно, наше предположение неверно. Теорема доказана.

Аналогично проводится доказательство для точной нижней границы. Δ.

Определение. $\omega=M-m$ называется колебанием функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

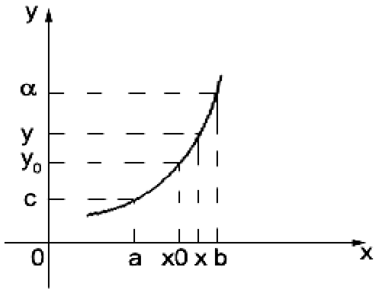
§5. Непрерывность обратных функций. Равномерная непрерывность.

1. Существование и непрерывность обратных функций.

2) Теорема о существовании обратной функции

Если непрерывная функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на X, то существует обратная ей функция $x = \phi(y)$ на Y. (X, Y - некоторые промежутки).

Доказательство. Проведем его для строгого возрастания. Для строгого убывания оно аналогично.



Пусть на X задана непрерывная функция $y = f(x)$, которая, согласно теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, сплошь заполняет некоторый промежуток Y. Согласно этой же теореме, для $y_0 \in Y$ найдется $x_0 \in X$, что $y_0 = f(x_0)$.

В силу строгого возрастания функции такое значение может быть только одно: если x больше или меньше x_0, то y соответственно больше или меньше y_0, т.е. существует соответствие значениям $y \in Y$ значений $x \in X$, которое является однозначной функцией $x = \phi(y)$. Это и есть функция, обратная $y = f(x)$. Она также строго возрастает. Итак, из $\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \Rightarrow \left(Y \xrightarrow{\phi} X\right)$.

3) Теорема. Пусть функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, строго возрастает (убывает) и непрерывна, тогда обратная ей функция $x = \phi(y)$ также непрерывна на $[c, d]$ - множестве значений исходной функции.

Доказательство.

Согласно условиям теоремы, обратная функция $x = \phi(y)$ существует, что следует из предшествующей теоремы. Докажем, что она непрерывна.

Пусть $y = f(x)$ - непрерывна в $\forall x_0$, а $x = \phi(y)$ не является непрерывной в соответствующей точке y_0, т.е. при $\Delta y \to 0$, $\Delta x \not\to 0$.

Это значит, что существует хотя бы одна последовательность $\left\{\Delta y_{n_k}\right\}$, для которой при $\Delta y_{n_k} \to 0$ и $\Delta x_{n_k} \to \alpha \neq 0$.

Тогда из непрерывности функции $y = f(x)$ вытекает:

$$0 = \lim_{n_k \to \infty} \Delta y_{n_k} = \lim_{n_k \to \infty} \left[f\left(x_0 + \Delta x_{n_k}\right) - f(x_0) \right] =$$

$$= f\left(x_0 + \lim_{n_k\to\infty} \Delta x_{n_k}\right) - f(x_0) = f(x_0+\alpha) - f(x_0).$$

$$f(x_0+\alpha) = f(x_0).$$

Однако этого быть не может: нарушается строгое возрастание (убывание) функции $y = f(x)$, т.е. нарушаются условия теоремы. Итак, из $\Delta y \to 0$ необходимо следует $\Delta x \to 0$.

Функция $x = \phi(y)$ - непрерывна. Δ.

2. Равномерная непрерывность

Понятие. Из определения непрерывности функции вытекает, что по $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, что $|y-y_0|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$, можно заметить, что выбор δ зависит от ε и зависит от x_0: $\delta=\delta(x_0,\varepsilon)$.

Возникает вопрос: при каких условиях существует такое δ, которое было бы пригодно для любой точки $x\in[a,b]$, т.е. не зависело бы от x?

Если для заданной функции такое δ существует, то говорят, что функция является равномерно непрерывной на множестве, на котором функция рассматривается. Это свойство имеет точное определение.

Определение. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ равномерно-непрерывна на X, если по $\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\ \ \delta=\delta(\varepsilon)$, что для любых x', $x''\in X$, удовлетворяющих соотношению $|x'-x''|<\delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют соотношению $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Равномерная непрерывность характеризует функцию на всем множестве X. Из равномерной непрерывности вытекает, что если функция равномерно непрерывна, то она непрерывна в любой точке. Это следует из того, что выражение «любая точка» не запрещает ее зафиксировать. Поэтому при ее фиксировании определение равномерной непрерывности совпадает с определением непрерывности в зафиксированной точке.

3. Теорема Кантора.

Теорема. Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, но не является равномерно непрерывной. Это значит при $\forall\varepsilon>0$ и сколь угодно малом δ найдутся такие x', $x''\in[a,b]$, что

$$|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon, \qquad (2)$$

$\left|x' - x''\right| < \delta$. (3)

Выберем в качестве δ убывающую последовательность $\delta_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

По предположению найдутся такие x_n', x_n'', удовлетворяющие неравенству

$$\left|x_n' - x_n''\right| < \frac{1}{n}, \qquad (3)$$

а

$$\left|f\left(x_n'\right) - f\left(x_n''\right)\right| \geq \varepsilon . \qquad (4)$$

Итак, мы получили две последовательности $\left\{x_n'\right\}$ и $\left\{x_n''\right\}$. Из каждой последовательности $\left\{x_n'\right\}$ и $\left\{x_n''\right\}$ по Лемме Больцана – Вейерштрасса можно выделить сходящиеся подпоследовательности $\left\{x_{n_k}'\right\}$ и $\left\{x_{n_k}''\right\}$.

В силу выполнения неравенства (3) эти подпоследовательности будут сходиться в одну точку x_0, и эта точка будет находиться на отрезке $\left[a,b\right]$: $x_0 \in \left[a,b\right]$ в силу замкнутости отрезка. Соответствующие значения $f\left(x_{n_k}'\right)$ и $f\left(x_{n_k}''\right)$ будут сходиться к $f\left(x_0\right)$. Это вытекает из условия непрерывности $f\left(x\right)$ на отрезке. Но с другой стороны должно выполняться неравенство (4), Приходим к противоречию. Это доказывает теорему. Δ.

§6. Основные элементарные функции

В математическом анализе в основном изучаются так называемые элементарные функции: ими выражаются основные законы природы, их используют при решении многих технических задач. [5, 7, 11]

Они являются числовыми и заданы аналитически.

Простейшие элементарные функции. Их графики в прямоугольной декартовой системе координат

1) Показательная функция.

$y = a^x$, $a > 0$

$y = e^x$, $e = 2{,}71828\ldots$ - иррациональное число

Показательная функция $y = a^x$ непрерывна в $\forall$ точке $\alpha \in \left(-\infty, \infty\right)$

Действительно. Берем $\forall\left\{x_n\right\}$, $x_n \to \alpha$. Показываем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\alpha}$.

Пусть r_n такое рациональное число, что

$$r_n - \frac{1}{n} < x_n < r_n + \frac{1}{n}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\alpha}$. В силу произвольности $\{x_n\}$ вытекает непрерывность.

2) Логарифмическая функция.

$y = \log_a x$, $a > 0$

$y = \ln x \qquad a = e$

(обратная показательной)

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ **непрерывна в любой точке** $x_0 \in (0, \infty)$ **как обратная показательной.**

3) $y = x^{\alpha}$ - степенная функция.

a, α - действительны.

Примеры: $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$; $y = x^{\sqrt{3}}$

Так как $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, то степенная функция непрерквно в любой точке (0;+∞).

4) Тригонометрические функции.

$y = \sin x$

Непрерывность $y = \sin x$ в $\forall x_0 \in R$

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \le 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0| \to 0,$$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

$y = \cos x$

Непрерывность $y = \cos x$.

$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ - непрерывна как суперпозиция двух непрерывных функций.

$$y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, \; y = ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Тангaнс и котангенс функции непрерывны согласно теореме о непрерывности частного непрерывных функций.

5) Обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$; $y=arctgx$; $y=arcctgx$ непрерывны согласно теореме о непрерывности обратных функций.

6) Гиперболические функции.

Гиперболический синус $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Гиперболический косинус $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

Гиперболические тангенс $(y=thx)$, котангенс $(y=cthx)$, $thx=\dfrac{shx}{chx}$, $cthx=\dfrac{chx}{shx},\ldots$

Гиперболические функции по свойствам имеют сходство с тригонометрическими. Гиперболические функции непрерывны, так как они образованы из показательных при помощи конечного числа арифметических операций. [5]

§7. Класс всех элементарных функций

Класс всех элементарных функций (Ф) получается при помощи конечного числа арифметических операций над простейшими элементарными функциями, образования сложных функций, обратных функций.

Пример: $y=\dfrac{\cos x+\sqrt{\arcsin x}}{\ln x+x^3}$.

Алгебраические функции, трансцендентные функции

Алгебраической называется такая функция $y=f(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$P_0(x)y^n+P(x)y^{n-1}+\ldots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0 \qquad (1)$$

Уравнение (1) может быть разрешимо или неразрешимо относительно $y=f(x)$, $P_k(x)$ - многочлены.

Пример. Функции $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$ есть алгебраические, так как они удовлетворяют соответственно уравнениям вида (1):

$$y^3-x=0 \ (x-1)y^3-x-1=0$$

Частным случаем алгебраической функции является рациональная функция.

Рациональная функция представляет собой отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}.$$

Многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ называется целой рациональной функцией.

Иррациональная - это функция, выраженная только через рациональные функции и знак радикала.

Пример. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+2x-1}{x^4+1}}$

Функции, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*. К ним относятся тригонометрические, логарифмические, обратные им функции, гиперболические функции.

Теорема. Все элементарные функции непрерывны в свой области определения.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить пределы:

1.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$; 1.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; 1.3. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; 1.4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x+a}{x}$; 1.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$; 1.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{\sin x}$; 1.7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{2x}$; 1.8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$; 1.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10^{x^2}-1}{x^2+x^3}$; 1.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-1}{tgx}$; 1.11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$; 1.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$; 1.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$; 1.14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin 3x}-1}{2x}$; 1.15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{tgx}$; 1.16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1-2x}}{3x}$; 1.17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.; 1.18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{1+\arcsin x}-1}{14x}$.

2. Доказать, что функции непрерывны в указанном множестве.

2.1. $f(x)=x^2-x+3$, $X=(-\infty;+\infty)$. 2.2. $f(x)=sin(3x+2)$, $X=(-\infty;+\infty)$.

2.3. $f(x)=x^2-2x-1$, $X=(-\infty;+\infty)$. 2.4. $f(x)=\cos(2x-1)$, $X=(-\infty;+\infty)$.

2.5. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $X=(-1;+\infty)$.

3. Найти точки разрыва функции и установить их тип. Нарисовать график.

3.1. $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\neq 0, \\ 2, \text{ если } x=0 \end{cases}$;

3.2. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \text{ если } -1\leq x\leq 1, \\ 1-x, \text{ если } 1<x<2 \end{cases}$.

3.3. $f(x)=\begin{cases} 3x, \text{ если } -1\leq x\leq 1, \\ 2x, \text{ если } 1<x\leq 3 \end{cases}$.

3.4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{ если } x\neq 1, \\ 3, \text{ если } x=1 \end{cases}$.

3.5. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, \text{ если } x<0, \\ x, \text{ если } 1\leq x<2, \\ 3, \text{ если } 2\leq x<4 \end{cases}$. 3.6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

3.7.

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, 3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, 4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$.

4. Восстановить непрерывность функции в точке $x=0$.

$a)\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $b)\ f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$, $c)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

$d)\ f(x)=\dfrac{5x^2-3\sin x}{2x}$, $e)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sin x}$.

5. Показать, что уравнение имеет решение на указанном отрезке.

$a)\ x^3+3x+1=0, \quad [-1;0]; \quad b)\ x^4-3x^2+2x-1, \quad [1;2];$

$c)\ x^5-6x^2+3x-7=0, \quad [0;2]; \quad d)\ 3\sin^3 x-5\sin x+1=0, \quad [0;\frac{\pi}{2}];$

$e)\ \cos^4 x+3\cos x+1=0, \quad [0;\pi].$

2-ЧАСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5-ГЛАВА. ПРОИЗВОДНАЯ

§1. Определения производной, её геометрический и физический смысл

Введение к дифферненциальному исчилению (Не для первого чтения)

«Математика изучает формы мышления. В самом общем смысле дифференцирование — определение тенденций процесса, а интегрирование — предсказание будущего по тенденциям. Современное человечество не мыслит себя без интегрирования и дифференцирования» [8, с.12]. О двух основных задачах математического анализа мы уже упоминали. Основные идеи бесконечно малых и бесконечно больших в неявной форме были высказаны в трудах приписываемых ионийской школе: Фалеса Милетского, Анаксимена, школе Пифагора, в апориях Зенона, сочинениях Демокрита, (Левкиппа), аксиоматика Евдокса, а также в достижениях прикладного и теоретического характера Архимеда, теоретическая геометрия Евклида и т.д.

Общее название методов вычисления, исследования задач связанных с определением длин, площадей, объемов применяемых в античной математике было инфинитезимальные методы. Напомним к ним относятся: **метод исчерпывания**, **метод интегральных сумм**, **дифференциальные методы**

Вспомним, что математика древней Греции определяла основной своей задачей обоснование фактов (вычислительные формулы, свойства некоторых фигур), известных еще в Вавилоне, Древнем Египте. Создание теоретической науки (математики: теория чисел, арифметика, геометрия) было самым значительным вкладом античной математики.

В этом пособии нами упоминаемый метод неделимых Демокрита (Левкипа) позволил естественно распространить его на то, что тела можно составить из неделимых (атомов) и тем самым найти длину, площадь или объем какой-либо фигуры. Атомы (неделимые) предполагались той же формы, что и формы фигуры. «Число форм у атомов бесконечно [разнообразно] «по той причине, что оно нисколько не больше такое, чем иное»» [цитируетстя по 11. с.242]. «… вещи же отличаются друг от друга [неделимыми], из которых они состоят, их положением и порядком …» [там же].

1.1. Определение производной

Определение. Предел отношения приращения функции $y = f\left(x\right)$ к приращению аргумента при его стремлении к нулю называется производной функции в данной точке x

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}.$$

Производная функции в точке обозначается одним из символов: $f'\left(x\right)$; y'; y; $\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$; $\dfrac{dy}{dx}$.

Пример: Найти производную функции $y = x^3$ в точке x.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\frac{3x^2\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

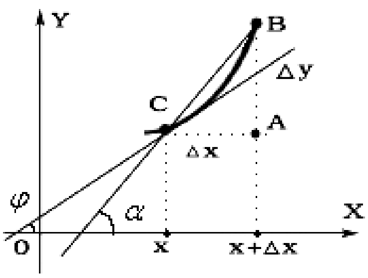
$$y' = 3x^2$$

1.2. Геометрический смысл производной

Введем некоторые геометрические понятия.

Секущая. Пусть задана кривая $y = f\left(x\right)$. *Прямая,* имеющая с этой кривой не менее двух общих точек, называется *секущей.*

Касательная. Пусть задана секущая (S). Прямая, занимающая предельное положение секущей, при стремлении общей точки кривой и секущей к другой общей точке, называется *касательной.*



$AB = \Delta y$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$ α - угол наклона секущей к оси OX. φ - угол наклона касательной к оси OX. При стремлении B по кривой к C $\Delta x \to 0$, $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to tg\varphi$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' = tg\varphi$.

Итак, производная в данной точке равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в этой же точке к положительному направлению оси OX.

1.3. Физический смысл производной

Будем считать, что функция $f(t)$ представляет собою закон движения s, зависящего от времени t, т.е. $s=f(t)$. Тогда $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ - средняя скорость движения, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{df}{dt}$ - мгновенная скорость в данной точке. Отсюда: функция может быть истолкована, как пройденный путь, а производная, как скорость изменения функции в данной точке.

То есть: если функция описывает какой-то процесс, то производная – скорость его изменения в данной точке.

§2.Уравнения касательной и нормали к кривой

Пусть кривая есть график функции $y=f(x)$. Как известно, уравнение прямой, проходящей через точку (x_0,y_0) имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, где k - угловой коэффициент. Для касательной $k=tg\varphi=y'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной к кривой точке (x_0,y_0) имеет вид

$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

Уравнение нормали в той же точке: $y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$.

Пример. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3$ в точке $M(2;8)$.

Решение. $y'=3x^2$, $y'(2)=12$

Касательная: $y-8=12(x-2)$, $y=12x-16$

Нормаль: $y-8=-\frac{1}{12}(x-2)$, $y=-\frac{x}{12}+\frac{49}{6}$

§3. Непрерывность функции, имеющей производную

Теорема. Если функция $y=f(x)$ в данной точке имеет производную, то $y=f(x)$ непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ имеет производную, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$, где $y'(x)$ - число. Из теорем о пределах известно, что если переменная имеет предел, то она может быть представлена в виде суммы предела и бесконечно малой:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ причем при $\Delta x \to 0$ и $\alpha \to 0$

Из этого соотношения вытекает, что $\Delta y = y'\Delta x + \Delta x \cdot \alpha$

А из него следует, что при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а это значит, что функция $y = f(x)$ непрерывна в данной точке. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Функция может быть непрерывной в данной точке, а производная может не существовать.

§4. Правила дифференцирования

Определение Процесс отыскания производных называется *дифференцированием*.

Существует ряд правил дифференцирования. Рассмотрим их. Почти везде используется свойство непрерывности функций, имеющих производную

1) Постоянный множитель выносится за знак производной.

Доказательство этого правила вытекает из определения производной.

Действительно:

$y = c \cdot f(x)$, где $c = const$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \Rightarrow \left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

2) Производная суммы конечного числа слагаемых равна сумме их производных.

Докажем, для двух слагаемых. Пусть $y = \varphi(x) + \psi(x)$. Тогда $\left(\varphi(x) + \psi(x)\right)' = \varphi'(x) + \psi'(x)$.

Действительно, $\Delta\left(\varphi(x) + \psi(x)\right) = \Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x} \Rightarrow \varphi'(x) + \psi'(x) \text{ при } \Delta x \to 0$$

3) Производная произведения:

$$\left(\varphi(x)\cdot\psi(x)\right)'=\varphi'(x)\cdot\psi(x)+\varphi(x)\cdot\psi'(x)$$

Доказательство: Пусть $y=\varphi(x)\cdot\psi(x)$. Найдем Δy.

$$\Delta y=\varphi(x+\Delta x)\cdot\psi(x+\Delta x)-\varphi(x)\cdot\psi(x)+\varphi(x+\Delta x)\cdot\psi(x)-\varphi(x+\Delta x)\cdot\psi(x)=$$
$$=\varphi(x+\Delta x)\cdot\left(\psi(x+\Delta x)-\psi(x)\right)+\psi(x)\cdot\left(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\right)=$$
$$=\Delta\psi(x)\varphi(x+\Delta x)+\Delta\varphi(x)\cdot\psi(x)$$

Поделим левую и правую части полученного выражения на Δx и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\psi(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}\cdot\psi(x)=\psi'(x)\varphi(x)+\varphi'(x)\cdot\psi(x)$$

$$\left(\varphi(x)\psi(x)\right)'==\varphi'(x)\cdot\psi(x)+\varphi(x)\cdot\psi'(x).$$

Легко получить формулу производной произведения любого конечного числа функций:

$$y=u\cdot v\cdot w\quad y'=\left((uv)\cdot w\right)'=(uv)'w+(uv)w'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

Аналогичная формула справедлива для произведения n сомножителей.

4) Производная частного.

Если производные $u=\varphi(x)$ и $v=\psi(x)$ в точке x существуют, и $v\neq 0$, то $y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Доказательство.

$$\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x+\Delta x)=u+\Delta u$$

$$\Delta v=\psi(x+\Delta x)-\psi(x)\Rightarrow\psi(x+\Delta x)=v+\Delta v$$

$$\Delta y=\frac{\phi(x+\Delta x)}{\psi(x+\Delta x)}-\frac{\phi(x)}{\psi(v)}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{\Delta u\cdot v-u\cdot\Delta v}{v^2+v\Delta v}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\Delta v}$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим искомую формулу. Δ

5) Производная сложной функции.

Пусть задана сложная функция $y=f\left(\varphi(x)\right)=f(u),\quad u=\varphi(x)$.

Выведем формулу для нахождения производной этой функции.

Теорема. Пусть: 1) функция $u=\varphi(x)$ в точке x имеет производную $u'_x=\varphi'(x)$;

2) $y=f(u)$ имеет в соответствующей точке $u=\varphi(x)$ производную $y'_u=f'_u(u)$. Тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ в x также будет иметь производную

$$\left(f(\varphi(x))\right)'=f'_u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \text{ или } y'_x=y'_u\cdot u'_x \qquad (1)$$

Доказательство. Придадим x приращение Δx. Пусть Δu соответствующее приращение для $u=\varphi(x)$; Δy - приращение функции $y=f(u)$, вызванное Δu.

$$\Delta u=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=u+\Delta u,$$

по определению производных $y'_u(u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta f(u)}{\Delta u}$, $\quad u'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$.

Эти пределы существуют, согласно условиям теоремы. Причем $\Delta y\to 0$ при $\Delta u\to 0$; $\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Значения пределов не меняются при любом способе стремления и Δu к нулю.

Поэтому будем предполагать, что Δx и $\Delta u\to 0$ не принимают значений, равных нулю. И они те из них, которые соответствуют друг другу. Для них

$$\Delta x\ \Delta f(\varphi(x))=f(\varphi(x+\Delta x))-f(\varphi(x))=f(u+\Delta u)-f(u).$$

Умножая правую часть на $\dfrac{\Delta u}{\Delta u}$, делим полученное равенство на Δx. $(\Delta u\neq 0,\Delta x\neq 0)$

$\dfrac{\Delta f(\varphi(x))}{\Delta x}=\dfrac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Переходя к пределу при $(\Delta x\to 0)$, получим (1) Δ

6) Производная обратной функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет обратную $x=\varphi(y)$ и существует в x_0 производная $f'(x_0)\neq 0$, то обратная функция имеет в соответствующей точке производную, причем $\phi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Дадим в точке y_0 приращение $\Delta y \neq 0$. Тогда, согласно существованию обратной функции, $\Delta x \neq 0$, и при $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$ и наоборот.

Поэтому можно записать $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Перейдя к пределу при $\Delta y \to 0$, будем иметь $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Геометрический смысл.

$$\varphi'(y_0) = tg\beta = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{tg\alpha}.$$

§5. Производные простейших элементарных функций

Отыскание производной любой элементарной функции сводится к отысканию производных простейших элементарных функций и применению правил отыскания производных.

В связи с частой повторяемостью производных от простейших элементарных функций выводят формулы отыскания их производных. В дальнейшем будут доказаны формулы.

1. Производная постоянной величины

$y = f(x) = c$, где $c = const$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, отсюда $c' = 0$.

2. Производная аргумента: $y = x$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, отсюда $x' = 1$.

3. Производная тригонометрических функций.

1) $y = \sin x$ (Вывод повторяем для компактности изложения)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \to \cos x$$

отсюда $(\sin x)' = \cos x$

2) $y=\cos x$

$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, пусть $\frac{\pi}{2}-x=u$, тогда $\cos x=\sin u$

Найдем производную этой сложной функции:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=(\sin u)'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=$$

$$=-\cos u=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x,$$

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

3) $y=tgx$

Для отыскания производной, воспользуемся правилами дифференцирования частного.

$y=tgx$;

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично находится производная функции

4) $y=ctgx$.

$$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

значит $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

5) $y=\sec x$

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x};\quad (\sec x)'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

6) $y=\cos ecx$

$$(\cos ecx)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x};\quad (\cos ex)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

4. Производная логарифмической функции $y=\log_a x$.

Пусть задана функция $y = \log_a x$. Найдем ее производную.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\log_a\left(x + \Delta x\right) - \log_a x\right) = \frac{1}{\Delta x}\log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{x}{x \cdot \Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Найдем предел полученного выражения, при $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Символ предела внесен под знак логарифма в силу непрерывности логарифмической функции.

Известно, что $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, применяя эту формулу, получим $\log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$, отсюда

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}.,\ \text{если } a = e, \text{ то } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Логарифмическая производная

Во многих случаях для отыскания производной от функции $y = f\left(x\right)$, предварительно уравнение логарифмируют. После чего полученное равенство дифференцируют как сложную функцию и из результата находят производную исходной функции.

Путем разрешения полученного уравнения относительно y'.

$\ln y = \ln f\left(x\right)$, $\left(f\left(x\right) > 0\right)$; дифференцируем равенство, помня, что y - функция от x

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))'; \quad y' = y \cdot (\ln f(x))'.$$

Это равенство называется логарифмической производной. Во многих случаях формула удобна в применениях. В дальнейшем будут указаны примеры.

1) Производная степенной функции $y = x^\alpha$, α - вещественное число.

Прологарифмируем эту функцию:

$\ln y = \alpha \ln x$, а затем продифференцируем

$$\frac{y'}{y}=\alpha\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\alpha\cdot\frac{y}{x}$$; подставим значение y

$$y'=\alpha\frac{x^{\alpha}}{x}=\alpha x^{\alpha-1};\ \left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

2) Производная показательной функции.

$y=a^{x}$, $a>0$ прологарифмируем показательную функцию

$\ln y=x\ln a$, а затем продифференцируем

$$\frac{y'}{y}=\ln a,\ y'=y\cdot\ln a=a^{x}\ln a.\ \left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a.$$

3) Производная показательно-степенной функции.

$y=u^{v}$, где u и v - функции от x.

Прологарифмируем показательно-степенную функцию

$\ln y=v\ln u$, а затем продифференцируем

$$\frac{y'}{y}=v'\ln u+v(\ln u)'=v'\ln u+v\frac{u'}{u}$$

$$y'=\frac{u^{v}(u\ln u\cdot v'+v\cdot u')}{u}=u^{v}\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'$$

$$\left(u^{v}\right)'=u^{v}\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'.$$

Пример. $\left(x^{\sin x}\right)'=?$ $\qquad \left(x^{\sin x}\right)'=x^{\sin x}\ln x\cdot\cos x+\sin x\cdot x^{\sin x-1}.$

6. Производные от обратных тригонометрических функций.

1) $y=\arcsin x$

$x=\sin y$. Продифференцируем это равенство, помня, что y - функция x

$$(x)'=(\sin y)';\quad 1=y'\cos y;\quad y'=\frac{1}{\cos y};$$

Выразим $\cos y$ при помощи равенства $x=\sin y$, т.е. через x:

$$y'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^{2}y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}};\ (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}.$$

2) $y=\arccos x$

$$x=\cos y;\quad 1=-y'\sin y;,\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}.$$

3) $y=arctgx$

$x = tgy$; $1 = y' \cdot \frac{1}{\cos^2 y}$; $y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$; $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

4) $y = arcctgx$

$x = ctgy$; $1 = -y' \cdot \frac{1}{\sin^2 y}$; $y' = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$;

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

5) $y = arc\sec x$

$x = \sec y$: возьмем производную от правой и левой частей.

$(x)' = (\sec y)'$; $1 = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \cdot y'$, $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$, так как

$\sec y = \frac{1}{\cos y}$, с $o y = s\frac{1}{x} \rightarrow$ что вытекает из соотношения $x = \sec y = \frac{1}{\cos y}$; отсюда $\sin y = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$. Из всего этого следует, что $(arc\sec x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6) $y = \arccos ecx$

$x = \cos ecy$; $x' = (\cos ecy)'$, $1 = -\frac{\cos y}{\sin^2 y} \cdot y'$

$y' = -\frac{\sin^2 y}{\cos y}$. Из $x = \cos ecy = \frac{1}{\sin y} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{x}$, $\cos y = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$.

Тогда $y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$; $(\arccos ecx)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

7. Производные гиперболических функций

Известно: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Согласно правилам и формулам дифференцирования легко отыскать:

$(shx)' = chx$;

$(chx)' = shx$;

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)' chx - shx(chx)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{ch2x}{ch^2 x};$$

$$(thx)' = \frac{ch2x}{ch^2 x};$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)' shx - (shx)' chx}{sh^2 x} = -\frac{ch2x}{sh^2 x};$$

$$(cthx)' = -\frac{ch2x}{sh^2 x}.$$

Сводная таблица

I. Правила дифференцирования.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 2. $(cu)' = c \cdot u'$;

3. $[u \cdot v]' = u'v + uv'$ 4.

$$[u \cdot v \cdot w \cdots]' = u' \cdot v \cdot w \cdot \ldots + u \cdot v' \cdot w \cdot \ldots + u \cdot v \cdot w' \cdot \ldots + \ldots$$

5. $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ 6. $y = f(u)$, $u = \phi(x)$; $y'_x = f'_u \cdot u'_x$

7. $y = f(x)$, $x = \phi(y)$; $y'_x = \frac{1}{x'_y}$

II. Производные простейших элементарных функций.

1. $[c]' = 0$;

2. $[u^\alpha]' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$;

3. $[\log_a u]' = \frac{u' \cdot \log_a e}{u} = \frac{u'}{u \ln a}$;

4. $[\ln u]' = \frac{u'}{u}$;

5. $[a^n]' = a^u \ln a \cdot u'$;

6. $[e^u]' = e^u \cdot u'$;

7. $[\sin u]' = \cos u \cdot u'$;

12. $[\arccos u]' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13. $[arctgu]' = \frac{u'}{1+u^2}$;

14. $[arcctgu]' = -\frac{u'}{1+u^2}$;

15. $[arc\sec u]' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$;

16. $(arcco\sec u)' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2+1}}$;

17. $[shu]' = chu \cdot u'$;

18. $[chu]' = shu \cdot u'$;

8. $\left[\cos u\right]' = -\sin u \cdot u'$;

9. $\left[tgu\right]' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

10. $\left[ctgu\right]' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

11. $\left[\arcsin u\right]' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u'}}$;

19. $\left[thu\right]' = \dfrac{ch2u}{ch^2 u} \cdot u'$;

20. $\left[cthu\right]' = -\dfrac{ch2u}{sh^2 u} \cdot u'$;

21. $\left(u^v\right)' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$;

22. $\left[\dfrac{1}{u}\right]' = -\dfrac{u'}{u^2}$;

§6. Примеры на применение правил дифференцирования

1. $y = \cos x$ Найдем y'

$$\left(\cos x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(x\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x .$$

2. $y = 3tgx$

$$(3tg\,x)' = 3(tg\,x)' = 3\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = 3 \cdot \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = ;$$

$$= 3 \cdot \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$$

3. $y = x^3 + \cos x$; $\left[x^3 - \cos x\right]' = \left(x^3\right)' - \left(\cos x\right)' = 3x^2 + \sin x$

4. $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$; $\left(\dfrac{x^3}{\cos x}\right)' = \dfrac{(x^3)'\cos x - x^3(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{3x^2\cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$

5. $y = \cos^3 x$; $(\cos^3 x) = |\, u = \cos x \,| = (u^3)'_x = (u^3)'_u \cdot u'_x =$

$= 3u^2 \,|_{u=\cos x} \cdot (\cos x)' = -3\cos^2 x \cdot \sin x$.

6. $y = \arccos x$ $\left(-1 < x < 1; \quad 0 < y < \pi\right)$ Обратная $x = \cos y$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\left(\cos y\right)'} = \frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

§7. Производные высших порядков

Пусть задана на множестве A функция $y = f(x)$. Если существует производная в каждой точке множества A, то существует некоторое множество значений производной. Сама производная становится функцией.

Если она дифференцируема, то можно отыскивать производную от производной.

Производная от производной называется производной 2-ого порядка. Аналогично рассуждая, приходят к производной любого порядка.

Производная n- ого порядка обозначается:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \text{ или } y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Пример:

$y = x^3$. Найти y''-? $y'' = (y')' = (3x^2)' = 6x$.

7.1. Производные высших порядков для некоторых функции

Для многих функций могут быть найдены формулы, по которым отыскиваются производные любого порядка. Рассмотрим некоторые из этих формул

1) $y = x^\alpha$ **.** Найдем формулу для отыскания производной n- ого порядка:

$$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}; \quad y'' = \alpha(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2}, \ \ldots\ldots, \ y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

2) $y = a^x$

$$y' = a^x \ln a \qquad y'' = \alpha^x \ln^2 a; \ \ldots; \ y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

3) $y = \sin x \quad y^{(n)}$ -?

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \ \ldots$$

Можно записать общую формулу, если заметить, что $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и при каждом последующем дифференцировании к аргументу будет прибавляться $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

4) $y = \cos x, \quad y^{(n)}$ - ? Формула для n-ой производной получается аналогично

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

7.2.Формула Лейбница

Пусть задана функция $y = u \cdot v$; $u = u(x)$, $v = v(x)$. Имеют производные до $n+1$ порядка включительно. Лейбниц вывел формулу:

$$\left[u \cdot v\right]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} \qquad (1)$$

Она доказывается методом математической индукции.

$y' = u'v + uv'$; $y'' = u'' + 2u'v' + uv'', \ldots$.

Далее предполагается, что (1) верно для n и доказывается, что формула верна и для $n+1$.

Предполагается, что $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ - сами функции, а $C_n^0 = C_n^n = 1$ при любом n.

Дифференцируем (1) и получаем:

$$\left[u \cdot v\right]^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[u^{(n-i)} v^{(i)}\right]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}$$

Соединяя слагаемые, имеющие одинаковые сомножители $u^{(n+1-i)} v^{(i)}$, и имея в виду, что сумма коэффициентов таких сомножителей будет $C_n^i + C_n^{i-1}$, а также формулу $C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i$, приходим к выводу, что формула (1) верна для $n+1$.

§8. Производные от функций, заданных параметрически

8.1. Понятие функции, заданной параметрически

Если существуют такие функции φ и ψ, что $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(y)$ (1), то говорят, что соотношение (1) является параметрическим заданием функции $y = f(x)$; t - параметр.

Функцию $y = f(x)$ можно трактовать как параметрический заданную функцию, полагая $y = f(t)$, $x = t$.

8.2.Отыскание производной

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями (1).

Найдем $\dfrac{dy}{dx}$. Оно есть отношение дифференциалов. Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\psi(t)}{d\varphi(t)} = \dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)dt}$. Итак,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \tag{3}$$

8.3.Производные высших порядков для функций, заданных параметрически

Укажем принцип нахождения производных высшего порядка. Для отыскания производной 2-го порядка будем дифференцировать равенство (3), имея в виду, что t является функцией от x.

Зависимость t от x, следует из соотношения (1), так как из первого уравнения можно найти t; пусть $t=w(x)$. Подставив полученное значение во второе уравнение, получим $y=f\left(w(x)\right)$.

Дифференцируем $\frac{dy}{dx}$ как сложную функцию.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right]_t'\cdot t_x' \tag{4}$$

Производную t_x' можно найти через функцию $x=\varphi(t)$

Для обратных функций существует формула:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \tag{5}$$

Пользуясь этой формулой можно записать

$$t_x'=\frac{1}{x_t'} \tag{6}$$

Подставим полученное значение t_x' в соотношение (4):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}\right]_t'\cdot\frac{1}{x_t'} \tag{7}$$

Производные третьего порядка отыскиваются по тому же принципу, что и производные второго порядка.

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left\{\left[\frac{\psi(t)}{\phi'(t)}\right]_t'\cdot\frac{1}{x_t'}\right\}_t'\cdot\frac{1}{x_t'} \tag{8}$$

Формула (8) указывает путь нахождения четвертого и последующих порядков.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Найти производную функции по определению

1.1. $y=6x-5$; 1.2. $y = 9x - x^2$; 1.3. $y = x^3 + 1$; 1.4. $y = \cos x$;

1.5. $y = x^2 + 2x - 1$; 1.6. $y = \sqrt{2x+1}$; 1.7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 1.8. $y = tg\,2x$.

2. Дано $f(x)=2x^2+3x+4$. Найти $f'(2)$.

3. Дано $f(x)=\sin 3x$. Найти $f'(\frac{\pi}{3})$.

4. Дано $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Найти $f'(\frac{1}{8})$. Существует ли $f'(0)$?

5. Дано $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$.

6. Дано $f(x) = \sqrt[5]{\sin x}$. Найти $f'(\frac{\pi}{2})$, $f'(0)$.

7. Найти односторонние производные функции в указанных точках

7.1. $f(x) = 3|x-1| + 2, \quad x_0 = 1.$ 7.2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0.$

7.3. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x}, \text{ если } & x \neq 0, \\ 0, \text{ если } & x = 0. \end{cases}$ $x_0=0$.

7.4. $f(x) = |x-2|x^2, \quad x_0 = 2.$

8. Используя правила дифференциалов и проиводных основных функции вычислить производные следующих функции:

8.1. $y = 5 - 6x.$ 8.2. $y = 11x^3 - x^2 - 4x.$

8.3. $y = 3x^{-3} + 2x^{-2}.$ 8.4. $y = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2}.$

8.5. $y = x^{1/4} - 8x^{3/4}.$ 8.6. $y = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}.$

8.7. $y = (3x-2)(7x+4)$. 8.8. $y = \left(6\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)(7x-3)$.

8.9. $y = \dfrac{x-1}{5x+1}.$ 8.10. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

8.11. $y = (1+2x)^{10}$. 8.12. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$.

8.13. $y = 4x^2 - 0{,}5x + 3$. 8.14. $y = x^5 - 4x^3 - x^2$.

8.15. $y=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}$.

8.16. $y=\frac{x^4-7x+3}{x^3}$.

8.17. $y=x^{3/2}-2x^{\frac{2}{3}}$.

8.18. $y=3\sqrt{x}-4x\sqrt[4]{x+2}$.

8.19. $y=(2x+5)(4x+2-3x^2)$.

8.20. $y=(3x^2-\frac{1}{x^3})(\sqrt[3]{x}+x)$.

8.21. $y=\frac{3x+3}{3x+7}$.

8.22. $y=\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x+2}}$.

8.23. $y=(t^4-\frac{1}{t^2}+1)^4$.

8.24. $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.

8.24. $y=\sin x+2\cos x$.

8.25. $y=\frac{\sin x+\cos x}{x}$.

8.26. $y=ctg^2 x$.

8.27. $y=3\cos^2 x-\cos^3 x$.

8.28. $y=\sin(3x+1)$.

8.29. $y=\cos(\sin x)$.

8.30. $y=\sqrt{tg\frac{x}{2}}$.

8.31. $y=x\arccos x$.

8.32. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

8.33. $y=\arccos\frac{2x-1}{2}$.

8.34. $y=\sqrt{1-(arc\cos x)^2}$.

8.35. $y=x^3\ln x$.

8.36. $y=\sqrt{\lg x}$.

8.37. $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$.

8.39. $y=\ln\sin x$.

8.40. $y=\lg(x^2-1)$.

8.41. $y=\frac{\cos x}{x}$.

8.42. $y=\sin^3 x$.

8.43. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$.

8.44. $y=\cos 2x$.

8.45. $y=tg\frac{1}{x}$.

8.46. $y=\sin^2 3x$.

8.47. $y=ctg\sqrt{1-x^2}$.

8.48. $y=(arc\sin x)^3$.

8.49. $y=\frac{x^2}{arctgx}$.

8.50. $y=\arcsin x^2$.

8.51. $y=arc\sin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

8.52. $y=\ln^3 x$.

8.53. $y = x\sin 2x \ln x$. 8.54. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$.

8.55. $y = \ln(x^2 - 4x)$. 8.56. $y = \ln\cos 3x$.

9. Дано $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. Найти $f'(1)$.

10. Дано $f(x) = 5x^2 - 16\sqrt{x} + 7$. Найти $f'(1),\ f'(4),\ f'(\frac{1}{4})$.

11. Найти производную параметрически заданной функции:

11.1. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t. \end{cases}$ 11.2. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + \sin t. \end{cases}$ 11.3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

11.4. $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ 11.5. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ 11.6. $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi. \end{cases}$

11.7. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ 11.8. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t\cos t. \end{cases}$

12. Найти производные высших порядков

12.1. $y = x^6 + e^{2x},\ y''$; 12.2. $y = x\ln x,\ y^{IV}$; 12.3. $y = (2x+5)^3,\ y''$;

12.4. $y = \cos^2 x,\ y'''$; 12.5. $y = e^{-x^2},\ y'''$; 12.6. $y = 5^{\sqrt{x}},\ y''$;

12.7. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ y''$; 12.8. $y = \ln tgx,\ y''$;

12.9. $f(x) = (x+10)^6,\ f'''(2)$; 12.10. $f(x) = e^{2x-1},\ f'''(0)$.

13. Найти производные n – порядка.

13.1. $y = e^{-x}$. 13.2. $y = \sin ax$.

13.3. $y = \cos ax$. 13.4. $y = \sin^2 ax$.

13.5. $y = \ln x$. 13.6. $y = \ln(ax + b)$.

13.7. $y = shx$. 13.8. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

14. Найти производные указанного порядка от функции заданной параметрически:

14.1. $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = 3t^3 \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. 14.2. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14.3. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. 14.4. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14.5. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. 14.6. $\begin{cases} x = arc\sin t, \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14.7. $\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

14.8. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

6-ГЛАВА. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§1. Дифференцируемость, условие дифференцируемости, дифференциал

1.1. Дифференцируемость

Определение. Пусть задана функция $y = f(x)$. Если в точке x_0 приращение этой функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \qquad (1)$$

где A - постоянная, $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая, зависящая от Δx, то $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0

1.2. Условия дифференцируемости

1) Теорема. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

Необходимость. Пусть выполняется (1). Предполагая, что $\Delta x \neq 0$; делим (1) на Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$$

Так как A - число, то производная существует. Она равна A.

Достаточность. Пусть производная существует.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \qquad (2)$$

Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - A = \alpha(\Delta x)$ (3)

$\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$

Из (3) следует: $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, т.е. выполняется (1)

Функция дифференцируема. Δ.

2) Теорема позволяет записать приращение так:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (4).$$

Из теоремы вытекает, что процесс отыскания производной и дифференцируемость – эквивалентны.

Поэтому операцию отыскания производной также называют дифференцируемостью.

3) При $\Delta x = 0$, $\alpha(0)$ не определено.

Тогда, согласно (1) и Δy - не определено.

Условились считать, что $\alpha(0)=0$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=\alpha(0)=0$. Тогда $\alpha(\Delta x)$ - непрерывна в точке $\Delta x=0$.

1.3. Понятие дифференциала

1) Определение. Главная, линейная, относительно Δx, часть приращения $\Delta f(x)$ функции $y=f(x)$ называется *дифференциалом*.

Обозначим дифференциал dy, $df(x)$. Из соотношения (4) следует, что согласно определению –

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (5)$$

Так как второе слагаемое в (4) $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ - бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем (5), dy линейно зависит от Δx и при $f'(x_0)\neq 0$ (5) является главной частью приращения функции $\Delta f(x_0)$. Тогда (4) можно записать так: $\Delta y=dy+0(\Delta x)$.

Это значит:

$$\Delta y\approx dy \qquad (6)$$

Формула (6) используется для вычислений и оценки погрешностей

2) Найдем дифференциал аргумента. Для этого рассмотрим функцию $y=x$

Согласно формуле (5) $dy=1\cdot\Delta x$. Для данной функции $dy=dx$. Тогда $dx=\Delta x$, т.е. dx - константа. Формула (5) может быть записана:

$$dy=f'(x_0)\cdot dx \qquad (7)$$

A - производная может быть представлена как отношение дифференциалов: $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$, следовательно, $\dfrac{dy}{dx}$ не только символ производной, но и отношение дифференциалов.

3) Геометрическая сущность дифференциала

Запишем дифференциал.

$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x=tg\alpha\cdot\Delta x=AB$ (см. рисунок)

Итак, дифференциал – это приращение ординаты касательной. Или еще: это главная часть приращения функции $AD=\Delta y$

§2.Основные формулы отыскания дифференциалов

Отыскание дифференциалов, как производных, называется дифференцированием.

Так как дифференциал dy лишь множителем dx отличается от производной y', то по таблице производных для элементарных функций легко составить таблицу дифференциалов. Для основных функций она такова:

$y=c$	$dy=0$	$y=\sin x$	$dy=\cos x dx$
$y=x^{\alpha}$	$dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$	$y=\cos x$	$dy=-\sin x dx$
$y=\dfrac{1}{x}$	$dy=-\dfrac{dx}{x^2}$	$y=tgx$	$dy=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$
$y=\sqrt{x}$	$dy=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$	$y=ctgx$	$dy=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$
$y=a^x$	$dy=a^x \ln a dx$	$y=\arcsin x$	$dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=e^x$	$dy=e^x dx$	$y=\arccos x$	$dy=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\log_a x$	$dy=\dfrac{\log_a e}{x}dx$	$y=arctgx$	$dy=\dfrac{dx}{1+x^2}$
$y=\ln x$	$dy=\dfrac{dx}{x}$	$y=arcctgx$	$dy=-\dfrac{dx}{1+x^2}$

Правила вычисления дифференциалов

Они таковы:

- $d(cu)=c\cdot du$
- $d(u\pm v)=du\pm dv$
- $d(u\cdot v)=vdu+udv$
- $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

Их легко получить из соответствующих формул для производных. Найдем для примера дифференциал произведения функций.

$$d(u\cdot v)=(u\cdot v)'dx=(u'v+uv')dx=v(u'dx)+u(v'dx)=vdu+udv$$

§3. Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$; $y = f(\varphi(x))$. Назовем u - промежуточным аргументом x - окончательным аргументом.

Свойство инвариантности (неизменности) формулируется так:

Форма дифференциала не меняется является ли функция функцией независимого переменного или сложной функцией.

$$dy = f'_u(u)du = f'_x(\varphi(x))dx \qquad (8)$$

Доказательство. Применяем правило дифференцирования сложной функции:

$$dy = f'_x(\varphi(x))dx = f'_x(u)dx = f'_u(u)\cdot u'_x dx = f'_u(u)du$$

так как $u'_x dx = du$,

то (8) имеет место Δ.

§4. Дифференциал, как источник приближенных формул

Формула (6) , т.е. $\Delta y \approx dy$ имеет ошибку $o(\Delta x)$. Она позволяет приближенно вычислять значения функций и получить ряд приближенных формул.

Из (6) следует:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot \Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x \qquad (9)$$

Формула (9) и является основой приближенного представления функций, а также их вычисления.

§5. Дифференциалы высшего порядка

Так как производная может быть функцией, то можно вводить понятие дифференциала высшего порядка.

Дифференциалом n- ого порядка от функции $y = f(x)$, называется дифференциал первого порядка от дифференциала n-1 ого порядка: $d^n y = d\left(d^{n-1} y\right)$.

Пример:

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = \left(df'(x)\right)\cdot dx = \left(f''(x)dx\right)\cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Обращаем внимание: дифференциал аргумента dx ведет себя как константа. Дифференциал n-ого порядка имеет вид: $d^n y = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$.

Пример. $y = 3x^3 + 2x^2$; $d^2 y = (18x + 4)dx^2$.

На дифференциалы высшего порядка распространяются правила отыскания дифференциалов.

Замечание: Дифференциалы высшего порядка не обладают свойством инвариантности. Это вытекает из следующего:

$y = f(u)$; $u = \varphi(x)$; $dy = f'(u)du$;

$d^2y = d\cdot\left[f'(u)\cdot du\right] = \left[df'(u)\right]du + f'(u)\cdot d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$ и второе слагаемое не равно нулю, так как $u = \varphi(x)$ и $d^2u \neq 0$.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Дано $y=x^2-x+1$. Если $x=3$ и $\Delta x=0{,}01$, то найти Δy и dy.

2. Дано $y=x^3-7x^2+8$. Если $x=5$ и $\Delta x=0{,}01$, то найти Δy и dy.

3. Найти дифференциалы следующих функции:

3.1. $y=\frac{1}{x^2}$. 3.2. $y=\frac{x+2}{x-1}$.

3.3. $y=\ln(1+x^2)$. 3.4. $y=\sin^2 x$.

3.5. $y=arctg\,3x$. 3.6. $y=e^x\cos x$.

3.7. $y=5^{x^2}\arccos\frac{1}{x}$. 3.8. $y=\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

3.9. $y=(1-x-x^2)^3$. 3.10. $y=tg^2x$.

3.11. $y=5^{\ln tgx}$. 3.12. $y=\ln tg(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4})$.

3.13. $y=2^{\frac{1}{\cos x}}$. 3.14. $y=\sqrt{\arcsin x}+(arctgx)^2$.

4. Вычислить приблеженно, используя дифференциал.

4.1. $\sqrt[4]{17}$; 4.2. $0{,}96^3$; 4.3. $e^{0,2}$; 4.4 $\lg 10{,}08$;

4.5. $\sqrt[3]{26{,}97}$; 4.6. $\ln 1{,}01$; 4.7. $\cos 32^0$; 4.8. $\arcsin 0{,}48$.

5. Выразить дифференциал сложной функции через независимую переменную и её дифференциал.

5.1. $y=\sqrt[3]{x^2+5x}$, $x=t^3+2t+1$; 5.2. $y=3^{-\frac{1}{x}}$, $x=\ln tgt$;

5.3. $s=\cos^2 z$, $z=\frac{t^2-1}{4}$; 5.4. $y=arctgv$, $v=\frac{1}{tgt}$;

5.5. $y=e^z$, $z=\frac{1}{2}\ln t$, $t=2u^2-3u+1$.

6. Найти дифференциалы высших порядков.

6.1. $y=\sqrt[3]{x^2}$, d^2y. 6.2.. $y=x^m$, d^3y.

6.3. $y = \ln x, \quad d^3 y.$

6.4. $y = \sin^2 x, \quad d^3 y.$

6.4. $y = arctg(\frac{b}{a} tgx), \quad d^2 y.$

6.5. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}, \quad d^2 y.$

6.7. $y = \ln\frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad d^2 y.$

6.8. $y = e^{2x}, \quad d^n y.$

7-ГЛАВА. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§1. Теоремы о среднем

1.1. Теорема Ролля

Теорема. Пусть функция $y = f\left(x\right)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на $\left[a,b\right]$;

2) имеет производную хотя бы в интервале $\left(a,b\right)$;

3) на концах отрезка имеет равные значения.

Тогда найдется такая точка $c \in \left(a,b\right)$, производная в которой равна нулю: $f'\left(c\right) = 0$.

Доказательство. Так как функция $y = f\left(x\right)$ непрерывна на $\left[a,b\right]$, то согласно теореме Вейерштрасса на $\left[a,b\right]$ она достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений.

Пусть $M = m$. Тогда согласно условию 3). теоремы, функция на $\left[a,b\right]$ является константой $C : y = C$. Поэтому в любой точке $\left[a,b\right]$ $y' = C' = 0$. Утверждение теоремы справедливо.

Пусть $M \neq m$. Тогда внутри интервала существует точка $c \in \left(a,b\right)$, что $f\left(c\right) = M$ (или $f\left(c\right) = m$), так как на концах отрезка значения функции равны. Рассматриваем лишь случай $f\left(c\right) = M$. В связи с этим $\frac{f\left(c-\Delta x\right) - f\left(c\right)}{-\Delta x} \geq 0$. (Пусть $\Delta x > 0$).

При $\Delta x \to 0$ соотношение даст производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(c-\Delta x\right) - f\left(c\right)}{-\Delta x} = f'\left(c\right) \geq 0 \qquad (1)$$

и далее

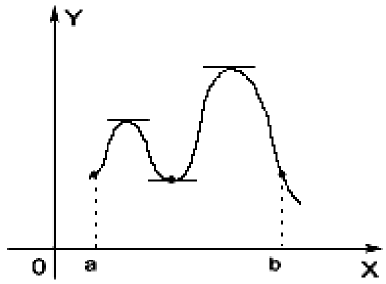
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(c+\Delta x\right) - f\left(c\right)}{\Delta x} = f'\left(c\right) \leq 0 \qquad (2)$$

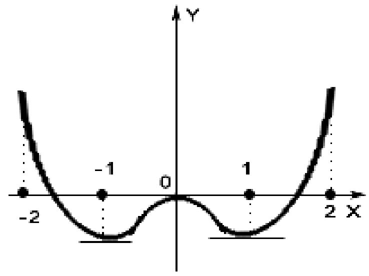
(1) и (2) могут выполняться одновременно лишь при $f'\left(c\right) = 0$. Δ.

Графически теорема означает, что на кривой существуют точки, в которых касательные параллельны оси OX.

Пример. $f\left(x\right) = \frac{x^4}{2} - x^2$ на [-2; 2]

Выполняются все условия теоремы. На (-2; 2) имеются три точки $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$, в которых производная равна нулю.





1.2. Теорема Лагранжа

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям.

1) задана и непрерывна на $[a,b]$;

2) имеет производную хотя бы в интервале (a,b).

Тогда существует точка $c \in (a,b)$, для которой выполняется соотношение:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (1)$$

Доказательство. На $[a,b]$ введем вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Нетрудно проверить, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

1) непрерывна на $[a,b]$;

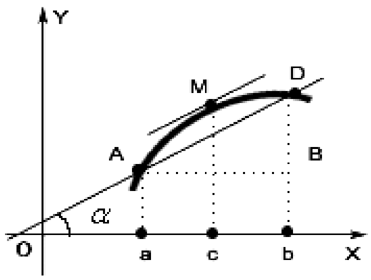
2) дифференцируема на (a,b), так как имеет производную: $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

3) $F(a) = 0$ и $F(b) = 0$.

Следовательно, по теореме Ролля $\exists \; c \in (a,b)$, что $F'(c) = 0$, т.е. $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, т.е выполняется (1). Δ.

Геометрическая интерпретация.

$\exists \; c \in (a,b)$, в которой касательная параллельна секущей, проходящей через точки



$A\big(a, f(a)\big)$, $D\big(b, f(b)\big)$.

Замечания.

1) Формула (1) называется формулой Лагранжа, или формулой конечных приращений.

2) Так как точка c лежит между a и b, то $c = a + \theta(b-a)$, где $0 < \theta < 1$. Тогда (1) можно записать:

$$f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(b-a)\big)(b-a),\ 0 < \theta < 1 \qquad (2)$$

3) Если $a = x$, $b = x + \Delta x$, то (2) имеет вид: $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\cdot \Delta x$, $0 < \theta < 1$.

1. 3. Теорема Коши (обобщенная теорема о конечных приращениях)

Теорема. Пусть 1) $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывны на $[a,b]$;

2) существуют $f'(x)$, $g'(x)$ на (a,b);

3) $g'(x) \neq 0$ в (a,b).

Тогда $\exists\ c \in (a,b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (3)$$

Доказательство. Покажем, что $g(a) \neq g(b)$, т.е. (3) имеет смысл. Действительно, если предположить противное $g(a) = g(b)$, то функция $g(x)$ удовлетворяла бы всем требованиям теоремы Ролля. Тогда $\exists\ c \in (a,b)$, что $g'(c) = 0$. Но этого быть не может согласно требованию 3) теоремы;

Строим вспомогательную функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big[g(x) - g(a)\big]. \qquad (4)$$

Эта функция удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля: 1) Она непрерывна на $[a,b]$; 2) Имеет производную хотя бы на (a,b); 3) $F(a) = F(b) = 0$.

Поэтому $\exists\ c \in (a,b)$, что $F'(c) = 0$.

Так как $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$, то $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0$.

Откуда получаем формулу (3). Δ.

(3) называется формулой Коши, или обобщенной формулой конечных приращений.

Замечание. Формула (3) при $g(x)=x$ превращается в формулу Лагранжа (1).

§2. Формула Тейлора

1) Предположим, что в некоторой точке b имеет место соотношение:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\ldots\frac{f^{n}(a)}{n!}(b-a)^{n}+\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (1)$$

Это возможно, так как можно подобрать такое число M, чтобы (1) имело место.

2) В правой части (1) положим $a=x$. Получим функцию:

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^{2}+\ldots+\frac{f^{n}(x)}{n!}(b-x)^{n}+\frac{M(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (2)$$

3) Эта функция удовлетворяет всем требованиям теоремы Ролля:

Она непрерывна и дифференцируема на $[a,b]$, так как состоит из суммы дифференцируемых функций;

На концах $[a,b]$ она принимает равные значения согласно (1) $\varphi(a)=f(b)$, согласно (4) $\varphi(b)=f(b)$. Поэтому существует производная и точка, в которой эта производная равна нулю: $\varphi'(c)=0$.

4) Находим производную:

$$\varphi'(x)=f'(x)+\frac{f''(x)}{1!}(b-x)-\frac{f'(x)}{1!}+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^{n}-$$
$$-\frac{nf^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^{(n-1)}-\frac{(n+1)M(b-x)^{n}}{(n+1)!}. \qquad (3)$$

Легко заметить, что все члены в правой части (3) взаимно уничтожаются за исключением последнего и третьего с конца.

5) Поставляя в производную точку c, получим $\varphi'(c)=0$, т.е.

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n-\frac{(n+1)M(b-c)^n}{(n+1)!}=0 \text{ или } M=f^{(n+1)}(c).$$

6) Подставим M в (3) и заменив $b=x$, будем иметь:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \qquad (4)$$

$0<a<x$ (полагаем для определенности $0<x$).

Эта формула и называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

в) Остаточный член в форме Пеано.

Из (4) видно, что остаточный член стремится к нулю при $x\to a$ быстрее, чем любой другой. Поэтому (4) можно записать:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+0\left(|x-a|^n\right) \qquad (5)$$

Говорят, что в этой формуле остаточный член записан в форме Пеано.

Формула Маклорена является частным случаем формулы Тейлора, в которой следует положить $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

.Формулы Тейлора и Маклорена широко применяются для исследования функций, для их вычисления и других целей.

Примеры.

1) Разложить функцию $y=e^x$ по формуле Маклорена.

$f^k(x)=\left(e^x\right)^{(k)}=e^x$; $f^{(k)}(0)=1$;

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

2) ***О вычислении e***. Полагаем $x=1$, $n=4$.

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{\theta\cdot 3^5}{5!}, \qquad 0<\theta<1.$$

3) Также можно вычислять тригонометрические функции, логарифмические и т.д.

4) Применяется к вычислениям пределов. Рассмотрим пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{6}x^3 + 0\left(x^3\right) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Здесь использовано представление $\sin x$ по формуле Маклорена: $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$.

§3. Раскрытие неопределенностей (правила Лопиталя).

3.1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Теорема. Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $(a,b]$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3) Существует в $(a,b]$ производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;

4) Существует (конечный или нет) предел: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = k$.

Доказательство.

1) Дополним определение функций $f(x)$ и $g(x)$, положив их при $x = a$ равными нулю $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ будут непрерывными в $[a,b]$.

2) Функции $f(x)$ и $g(x)$ будут удовлетворять всем требованиям теоремы Коши. Значит можно записать:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < x$$

3) Отсюда: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = k$. Δ.

Замечание 1.

- При доказательстве можно считать a - правым концом отрезка. Доказательство не меняется.
- Теорема называется также правилом Лопиталя.
- Правило Лопиталя можно применять многократно.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$. Неопределенность $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(tgx-x)'}{(x-\sin x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{\cos^2 x}-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=2$$

3.2. Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Для раскрытия такой неопределенности применяется аналогичное правило Лопиталя.

Теорема. Пусть:1) функции $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ определены в промежутке $\left(a,b\right]$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\infty$;

3) существуют в $\left(a,b\right]$ конечные производные $f'\left(x\right)$ и $g'\left(x\right)$, причем $g'\left(x\right)\neq 0$;

4) Существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=k. \qquad (1)$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=k$.

1) Докажем теорему для конечного k. Согласно 2) будем считать $f\left(\alpha\right)>0$, $g\left(\alpha\right)>0$.

Так как существует предел (1) (условие 4)), то по $\forall\varepsilon>0$, выберем $\delta>0$, чтобы при $0<\left|a-x\right|<\delta$

$$K-\varepsilon<\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}<k+\varepsilon \qquad (2)$$

Рассмотрим интервал $\left(a,a+\delta\right)\Leftrightarrow\left(a<x<a+\delta\right)$, выберем x_0 так, что $a<x<x_0<a+\delta$.

На промежутке $\left[x,x_0\right]$ строим формулу Коши. Все условия теоремы позволяют это сделать.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

Проведем очевидные преобразования для выделения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}} \tag{4}$$

Выбрав x достаточно близким к a в силу условия 2) теоремы вычитаемые в (4) будут как угодно близки к нулю, так как

$$1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}<1+\varepsilon \tag{5}$$

Подставим (2) и (5) в (4). Получим:

$$(K-\varepsilon)(1-\varepsilon)\le\frac{f(x)}{g(x)}\le(K+\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ (оно может быть сколь угодно малым), согласно (1)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \Delta.$$

Замечания. 1) Без существенных изменений в доказательство можно показать, что теорема верна для $a=\pm\infty$.

2) Теорема верна для случая $K=\infty$. По доказанному $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$.

Откуда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Для следующих функции проверить условия теоремы Ролля.

1.1. $f(x)=x^2-3x+5,\qquad x\in[1;2]$;

1.2. $f(x)=x^3-x^2-x+1,\qquad x\in[-1;1]$;

1.3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+9x+14},\qquad x\in[-7;-2]$;

1.4. $f(x)=\ln\sin x, \qquad x\in[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}].$

2. Удовлетворяет ли функция $f(x)=\sqrt[3]{(x-4)^2}$ заданная на сегменте [0;8] условиям теоремы Ролля. Ответ обоснуйте.

3. Удовлетворяет ли функция $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ заданная на сегменте [-1;1] условиям теоремы Ролля. Ответ обоснуйте.

4. Доказать, что если уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_{n-1}x=0$ положительный корень $x=x_0$, то уравнение $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+...a_{n-1}=0$ имеет положительный корень меньше чем x_0.

5. Дана функция $f(x)=1+x^m(x-1)^n \quad (m,n\in N)$. Не вычисляя производную доказать, что уравнение $f'(x)=0$ имеет хотя бы один корень в интервале (0;1).

6. Доказать, что уравнение x^3-$3x+c$=0 не имеет два различных корня в интервале (0;1).

7. Не вычисляя производную функции $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ определить, сколько действительных корней имеет уравнение $f'(x)=0$. Определить, в каких интервалах они содержатся.

8. Доказать, что уравнение $x^5+x^4+x^2+10x-5=0$ имеет только один положительный корень и он находится в интервале $(0;\frac{1}{2})$.

9. Для следующих функции проверить условия теоремы Лагранжа.

9.1. $f(x)=2\mathrm{x}-x^2, \quad x\in[0;1].$ 9.2. $f(x)=x^3-4x^2+5x, \ x\in[0;3].$

9.3. $f(x)=\sqrt{x}, \quad x\in[0;1].$ 9.4. $f(x)=\ln x, \quad x\in[1;e].$

10. Удовлетворяют ли следующие функции на сегменте [-2;2] условиям теоремы Лагранжа? Ответ обоснуйте.

10.1 $f(x)=\frac{1}{x};$ 10.2 $f(x)=1-\sqrt[5]{x^4}$.

11. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x)=\sin 3x$ на сегменте $[x_1; x_2]$.

12. Написать формулу Лагранжа для функции $f(x)=x(1-\ln x)$ на сегменте $[a;b]$.

13. Функция $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ задана на сегменте [0;2]. Используя теорему Лагранжа найти c.

14. Используя теорему Лагранжа, доказать неравенства:

14.1. $\dfrac{b-a}{b} \le \ln\dfrac{b}{a} \le \dfrac{b-a}{a}$, где $0 < a \le b$.

14.2. $\dfrac{\beta-2}{\cos^2\alpha} \le tg\alpha - tg\beta \le \dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$, где $0 < \alpha \le \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

14.3. $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$, где $a < b$.

15. Для следующих функции проверить условия теоремы Коши.

15.1. $f(x)=x^3$, $\varphi(x)=x^2$, $x\in[1;2]$;

15.2. $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi/2]$;

15.3. $f(x)=\sqrt{x+9}$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $x\in[1;16]$.

16. Для функции $f(x)=x^3$ и $\varphi(x)=x^2+1$ заданных на сегменте [1;2], найти c из теоремы Коши.

17. Для функции $f(x)=x^2$ и $\varphi(x)=x^3$ заданных на сегменте [-1;1] можно ли применять теорему Коши? Ответ обоснуйте.

18. Вычислить пределы, используя правила Лопиталя.

18.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg2x}$.

18.2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$.

18.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-e^{-x}}$.

18.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 6x}$.

18.5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

18.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

18.7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

18.8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tg5x}$.

18.9. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

18.10. $\lim\limits_{x\to +0} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

18.11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)ctgx$.

18.12. $\lim\limits_{x\to 0} ctgx\cdot\ln(x+e^x)$.

18.13. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

18.14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

18.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$.

18.16. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$.

18.17. $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x^2}$.

18.18. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-ctg^2 x}$.

18.19. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

18.20. $\lim_{x\to\infty}(e^x+1)^{\frac{1}{x}}$.

18.21. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$.

18.22. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

19. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ по степеням $x+1$.

20. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ ko‘phadni по степеням $x - 4$.

21. Разложить многочлен $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ по степеням x

22. Написать формулу (n-порядка) Тейлора функции $f(x)=\frac{1}{x}$ в окрестности точки x_0=-1.

23. Написать формулу (n-порядка) Маклорена функции $f(x) = xe^x$.

24. Написать формулу (n-порядка) Тейлора функции $f(x)=\sqrt{x}$ в окрестности точки x_0=4.

25. Написать формулу (n-порядка) Тейлора функции $f(x) = x^3 \ln x$ в окрестности точки x_0=1.

26. Написать формулу ($2n$-порядка) Тейлора функции $f(x) = \sin^2 x$ в окрестности точки x_0=0.

8-ГЛАВА. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

§1. Исследование на монотонность функцию

1.1. Условия постоянства функции

Теорема. Для того чтобы функция $y = f(x)$, дифференцируемая на $[a,b]$ и сохраняющая непрерывность на концах отрезка была постоянной, на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$.

Необходимость. $f(x) = c; \quad \Rightarrow f'(x) = 0$.

Достаточность. Для $\forall x_1, x_2,\ x_1 < x_2$ запишем формулу Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

Так как $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$ - функция постоянна в силу произвольности $x_1, x_2 \in (a,b)$. Δ.

1.2. Условия монотонности функции

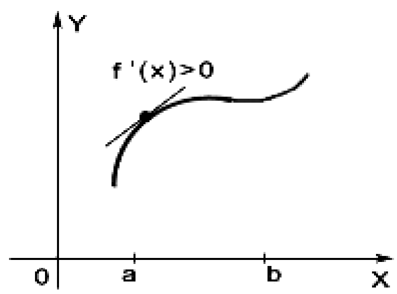
Теорема. Для того, чтобы функция $y = f(x)$, заданная на $[a,b]$, дифференцируемая хотя бы на (a,b) и непрерывная на концах отрезка, строго возрастала (убывала) на $[a,b]$, достаточно, чтобы в любой точке (a,b) $f'(x) > 0$ (< 0).

Доказательство. Для $\forall x_1, x_2$ (пусть $x_1 < x_2$) запишем формулу Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

Так как $x_2 > x_1$, то для того чтобы $f(x_2) > f(x_1)$, достаточно, чтобы $f'(c) > 0$. В силу произвольности точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ вытекает справедливость теоремы. Δ.

Замечание. Условия $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ не являются необходимыми.

Есть такие функции, которые строго возрастают (убывают), а производная в конечном числе точек равняется нулю.

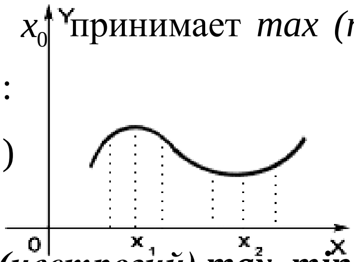


§2. Экстремумы. Необходимое условие экстремума

2.1.Максимумы (max) и минимумы (min) функций. Определения.

Определение. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 принимает *max (min),* если существует $\delta > 0$, что для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$f(x) \le f(x_0) \quad \left(f(x)\right) \ge f(x_0) \qquad (1)$$



Собственный (строгий), несобственный (нестрогий) max, min.

max и *min* объединяют в одно понятие: *экстремум*. Если в (1) сохраняются при $x \ne x_0$ строгие неравенства, то экстремум называется *собственным* (строгим), в противном случае *нестрогим* (несобственным)

2.2. Необходимые условия существования экстремума

Теорема. Если непрерывная функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то необходимо, чтобы в этой точке а) $f'(x_0 = 0)$; б) либо производная не существует.

Доказательство. Предположим, что в точке $x = x_0$ функция имеет *max* и существует производная $f'(x_0)$. Для точек, лежащих слева от x_0 согласно определению *max*:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \ge 0, \qquad (1)$$

справа

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \le 0. \qquad (2)$$

(1) и (2) могут одновременно выполняться при $f'(x_0) = 0$. Доказательство для *min* аналогично.

Точки, в которых производные равны нулю, называются *стационарными.*

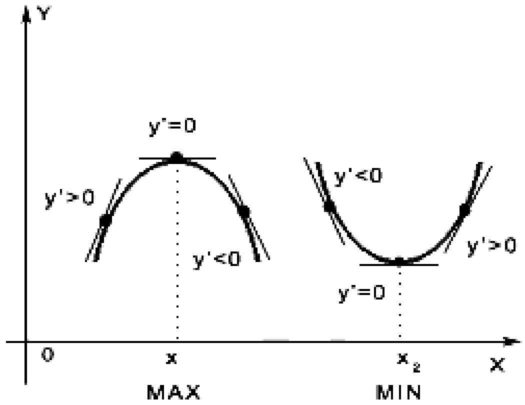
§3. Достаточные условия существования экстремума

Не всегда в стационарных точках или точках отсутствия производной существует экстремум.

Точки, в которых возможен экстремум, часто называют точками *возможного* экстремума, точками «*подозрительными*» на экстремум.

3.1. Достаточные условия, выражаемые производной первого порядка (I способ).

Согласно определению *max,* слева от точки, в которой функция достигает *max,* функция возрастает, а справа – убывает. Для *min* наоборот.



Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и

а) дифференцируема в некоторой δ- окрестности $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, за исключением возможно самой точки x_0;

б) если в $(x_0-\delta, x_0)$ $f'(x)>0$, а в $(x_{0,}x_0+\delta)$ $f'(x)<0$, то в точке x_0 функция имеет *max*;

в) если в $(x_0-\delta, x_0)$ $f'(x)<0$, а в $(x_{0,}x_0+\delta)$ $f'(x)>0$, то в точке x_0 функция имеет *min*;

г) если в окрестности x_0 знак производной не меняется, то функция либо возрастает, либо убывает в этой окрестности.

Доказательство. Очевидным образом вытекает из формулы Лагранжа: $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, которая отдельно рассматривается для $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_{0,}x_0+\delta)$.

3.2. Достаточные условия, выражаемые производной второго порядка (II способ).

Покажем, что значение $f''(x_0)$ позволяет высказать достаточные условия существования и характер экстремума.

Пусть для функции $y = f(x)$ точка x_0 - стационарная и в некоторой ее окрестности $(x_0-\delta,\quad x_0+\delta)$ существует $f''(x)<0$, тогда $f'(x)$ в этой окрестности существует и убывает как функция. Так как $f'(x_0)=0$, то для убывания $f'(x)$ должно выполняться следующее: при $x\in(x_0-\delta, x_0)$ $f'(x)>0$, при $x=x_0$ $f'(x_0)=0$ и при $x\in(x_{0,}x_0+\delta)$ $f'(x)<0$.

Это значит, что знак первой производной меняется так: +, 0, -.

Отсюда: выполняются достаточные условия существования *max,* т.е. выполняется определение *max*.

При $f''(x) < 0$ рассуждения аналогичны. $f'(x)$, являясь непрерывной функцией в силу существования $f''(x)$, убывает и меняет свой знак: -, 0, +, т.е. в точке $x = x_0$ выполняется определение *min*.

Вывод. Если в стационарной точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности существует $f''(x)$, то при $f''(x) < 0$ функция меняет *max*, а при $f''(x) > 0$ - *min*.

3.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Очевидно, что для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, достаточно поступить так.

Найти точки, подозрительные на экстремум

$$x_1,\ldots,x_k \tag{1}$$

Найти значения функции в этих точках

$$f(x_1),\ldots,f(x_k) \tag{2}$$

Найти значения функции на концах отрезка

$$f(a),\ f(b). \tag{3}$$

Из (2) и (3) выбрать наибольшее и наименьшее значения. Они будут решениями задачи.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ на сегменте $[-3;10]$

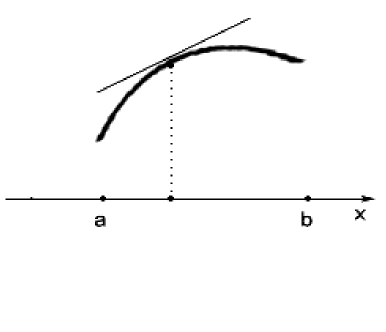
Решение. Находим стационарные точки $f'(x) = 2x - 4,\ 2x - 4 = 0,\ x = 2.$ Определяем значения функции в стационарной точке и на концах отрезка: $f(2) = 4 - 8 + 6 = 2,\quad f(-3) = 9 + 12 + 6 = 27,\quad f(10) = 100 - 40 + 6 = 66.$

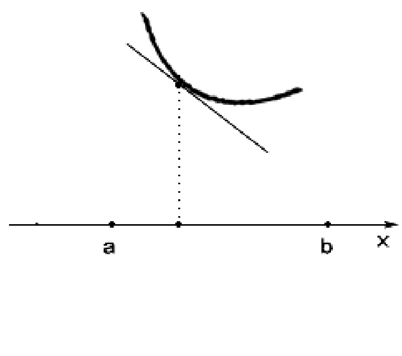
Сравнивая эти значения, заключаем, что $\max\limits_{[-3;10]} f(x) = f(10) = 66;\ \ \min\limits_{[-3;10]} f(x) = f(2) = 2.$

§4. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба

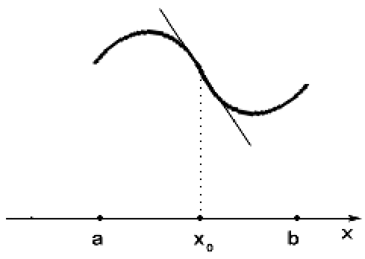
Определение. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b), т.е. имеет касательную в любой точке кривой, не параллельную OY, ($f'(x)$ - конечно (существует)). Будем говорить, что кривая *выпукла,* если все точки кривой находятся под касательной, и *вогнута,* если они находятся над касательной к кривой.

Если в точке x_0 кривая пересекает касательную и выпуклость, переходит в вогнутость (или наоборот), то точка x_0 называется *точкой перегиба*.





Выпуклость   вогнутость



x_0 - точка перегиба

Аналитический способ определения выпуклости и вогнутости точек перегиба.

Теорема. Если в окрестности точки x_0 $f''(x)<0$, то кривая в этой окрестности *выпукла,* при $f''(x)>0$ - *вогнута*. Точка, в которой $f''(x)=0$, а при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, является точкой перегиба.

Доказательство. Пусть y - ордината точек кривой, Y - ординаты касательной. Тогда при $y-Y<0$ в окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ кривая выпукла, при $y-Y>0$ - вогнута.

По формуле Тейлора

$$y=y_0+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(0)}{2}(x-x_0)^2 \tag{4}$$

Уравнение касательной

$$Y=y_0+\frac{y'(x_0)}{1}(x-x_0) \tag{5}$$

Из (4) вычитаем (5)

$$y-Y=\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2 \tag{6}$$

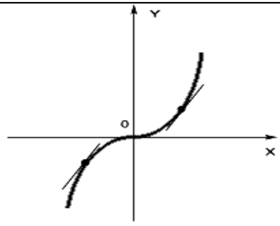
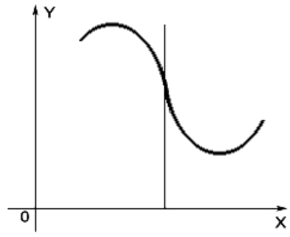
Откуда видно, что знак $y-Y$ зависит от знака $f''(x)$ в некоторой окрестности x_0. Если предположить непрерывность $f''(x)$ в рассматриваемой окрестности, т.е. $f''(c)=f''(x_0)+\alpha$, где α - бесконечно малая, зависящая от малости $x-x_0$.

Поэтому о знаке $f''(x)$ в некоторой окрестности точка x_0 можно судить по знаку $f''(x_0)$.

Ясно, что точкой перегиба является точка, удовлетворяющая уравнению $f''(x)$=0, переходя которую знак $f''(x)$ меняется. Δ.

Пример. Найти области выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба для кривой $y = x^3$.

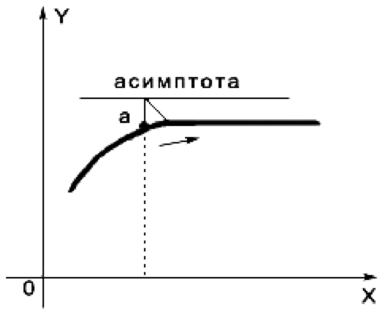
Решение: Отыскиваем вторую производную $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$;

	Область выпуклости: $6x < 0$; $x < 0$ Область вогнутости: $6x > 0$; $x > 0$ Точка перегиба: $x = 0$.	

Замечание. Точкой перегиба может быть точка, в которой $f''(x) = \infty$.

§5. Асимптоты

В исследовании поведения кривых большую роль играют асимптоты.



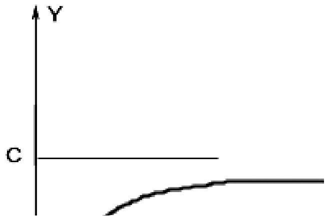
Определение. Пусть задана прямая. Если расстояние от точек кривой до прямой стремится к нулю, при стремлении точек по кривой в бесконечность, то прямая называется *асимптотой* для заданной кривой.

Кривая может пересекать асимптоту. Это не противоречит определению.

Классификация асимптот.

Будем различать три вида асимптот

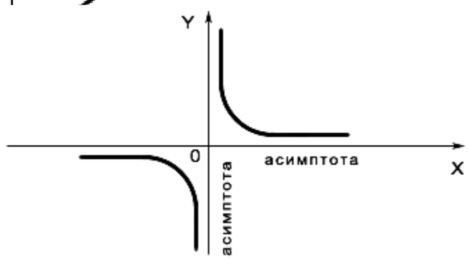
1) Асимптоты параллельные оси OX



Если кривая задана уравнением

$y = f(x)$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, то асимптота $y = c$. Она параллельна OX.

Пример. $y = \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Ось OX - асимптота.

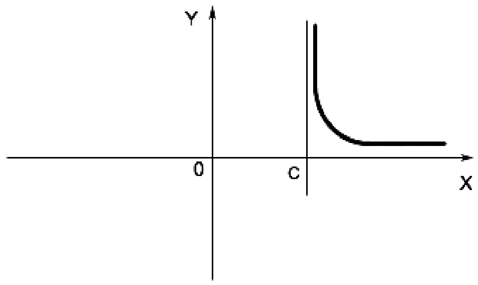


2) Асимптоты параллельные оси OY

Пусть прямая $x = c$ - асимптота.

Признаком существования асимптоты является выполнение соотношения

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.



Пример. $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

Следовательно, ось OY является вертикальной асимптотой. Уравнение этой асимптоты: $x = 0$.

3) Асимптоты общего вида

Для того, чтобы прямая $Y = kx + b$, была асимптотой, достаточно, чтобы

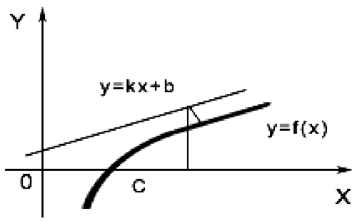
$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = 0 \text{ или } \lim_{x \to \infty} \left(kx + b - f(x) = 0 \right) \qquad (1)$$

Найдем уравнение асимптоты. Разделим на x обе части соотношения (1):

$$\lim_{x \to \infty} \left(k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} \right) = 0 \qquad (2)$$

Так как b - число, то $\dfrac{b}{x} \to 0$. Из соотношения вытекает, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad (3)$$



Найдя k и подставив его значение в соотношение (1), можно найти «b»

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) \qquad (4)$$

Итак, соотношение (3) и (4) дают угловой коэффициент k свободный член асимптоты $Y = kx + b$.

Пример. Найти асимптоты кривой: $y = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$.

Решение. Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$. Из (3) имеем

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5}{x\left(x^4 - 1\right)} = 1$. Из (4) имеем $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^5}{x^4 - 1} - x \right) = 1$.

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1$.

Функция имеет вертикальные асимптоты при $x^4-1=0$ $x=-1,\ \ x=1.$

§6. Построение графиков

Предварительно исследуем функцию $y=f\left(x\right)$. Это исследование используется для построения графиков. Устанавливают следующее:

1) Находится область определения функции;

2) Устанавливается четность или нечетность функции: если функция четная, то график симметричен относительно оси OY, нечетная, то – симметричен относительно начала координат;[8]

3) Отыскиваются экстремумы функции и определяются области возрастания и убывания (слева от *max*, справа от *min* функция возрастает; справа от *max* и слева от *min* - убывает);

4) Устанавливают области вогнутости, выпуклости, точки перегиба;

5) Находятся асимптоты. Результаты исследования объединяют в таблицу. Строят график функции.

Пример: Построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

1) Область определения $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,\ 1\right)\cup\left(1,\ \infty\right)$ в точке 1 и -1 функция претерпевает разрыв 2-го рода. Прямые $x=1$ и $x=-1$ есть вертикальные асимптоты.

2) Эта функция нечетная, так как $y\left(-x\right)=-y\left(x\right)$, следовательно, она симметрична, относительно начала координат.

3) $$y'=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$$y''=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x^3\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)\left[\left(2x^2-3x\right)\left(x^2-1\right)-2x^2\left(x^2-3\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4}$$

---

[8] Дорогой читатель, можно обратить внимание на книжку [20] и почувствовать, что порой дифференциальное исчисление действительно помогает в исследованиях функций, а иногда полезней пользоваться элементарными методами преобразования для построения функций или пакетами прикладных программм.

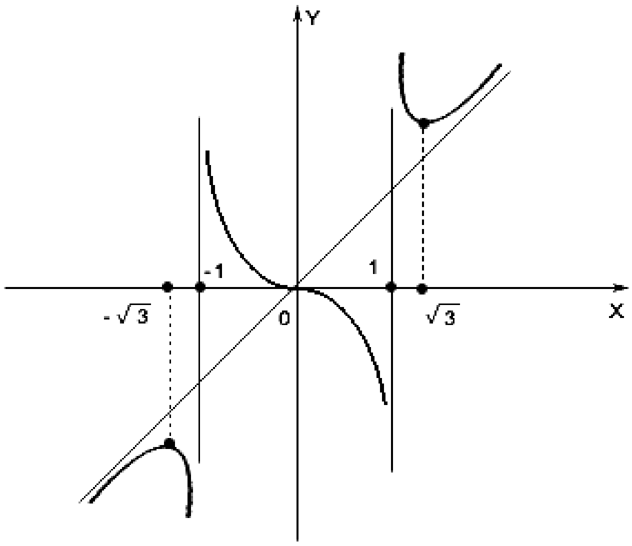
4) $y'=0$ при $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$; при x_1 - экстремума нет. $y''\left(-\sqrt{3}\right)<0$ - *max*.; $y''\left(\sqrt{3}\right)>0$- *min*; $y''\left(0\right)=0$; $y''\left(0-\varepsilon\right)>0$; $y''\left(0+\varepsilon\right)<0$; $x_1=0$ - точка перегиба.

5) Асимптоты.

$x=1,\ x=-1$ - асимптоты, параллельные OY, так как $\lim\limits_{\substack{x\to 1+0\\ k\to 1-0}}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\begin{matrix}+\infty\\ -\infty\end{matrix}$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1+0\\ x\to -1-0}}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\begin{matrix}\infty\\ -\infty\end{matrix}$.

Общая асимптота. $Y=kx+b$, $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x\left(x^2-1\right)}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=0$, $Y=x$.

7) График.



Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Найти интервалы монотонности следующих функции.

1.1. $y=-x^2+10x+7$.

1.2. $y=4x^2+12x+9$.

1.3. $y=x^3-6x^2+9x$.

1.4. $y=(x\text{-}3)^2$.

1.5. $y = x^4 + 8x^3 + 3$.

1.6. $y=\dfrac{1}{(x-5)^2}$.

1.7. $y = \dfrac{2x-3}{x+7}$. 1.8. $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}$.

1.9. $y = xe^{-5x}$. 1.20. $y = x^3 \ln x$.

1.21. $y = \ln(1+x^2)$. 1.22. $y = \ln(1+x^2)-x$.

1.23. $y = x + 2\cos x,\ x \in (0;\pi)$. 1.24. $y = x + \sin x$.

1.25. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. 1.26. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

2. При каких значениях b функция $y = x^2 - bx$ убывает в интервале (-1;1)?

3. При каких значениях a функция $y = \cos x + ax + b$ восрастает в промежутке $(-\infty;+\infty)$?

4. Найти экстремумы функции.

4.1. $y=6x - x^2$. 4.2. $y = 2x^3-3x^2$.

4.3. $y = (1-x^2)^3$. 4.4. $y = (x-1)^2(x-2)^3$.

4.5. $y = \dfrac{x}{9-x^2}$. 4.6. $y = \dfrac{x+1}{x^2+8}$.

4.7. $y = \dfrac{x^4+48}{x}$. 4.8. $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$.

4.9. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-6}}$. 4.10. $y = (x^2-8)e^x$.

4.11. $y = \sqrt[3]{x^2}e^x$. 4.12. $y = x\ln x$.

4.13. $y = \dfrac{x}{2} - arctgx$. 4.14. $y = \cos x - \sin x$.

4.15. $y = x - \ln(1+x)$. 4.16. $y = x - \ln(1+x^2)$.

4.17. $y = xe^{x-x^2}$. 4.18.

$$y = (x^2-2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$$

5. При каких значениях a и b функция $y = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b$ будет иметь только одну экстремальную точку. Ответ обоснуйте.

6. При каких значениях параметра a функция $y = x^2 - 4ax - a^4$ будет иметь минимум?

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в указанных сегментах

7.1. $y=-3x^2+4x-8,\ \ x\in[0;1]$. 7.2. $y=x^3+3x^2-9x-7,\ \ x\in[-4;3]$.

7.3. $y=\sqrt{25-x^2},\ \ x\in[-4;4]$. 7.4. $y=x+3\sqrt[3]{x},\ \ x\in[-8;1]$.

7.5. $y=\dfrac{2x^3}{x^2-9},\ \ x\in[4;6]$. 7.6. $y=\dfrac{x}{4+x^2},\ \ x\in(-\infty;+\infty)$.

7.7. $y=x\ln^2 x,\ \ x\in[\frac{1}{e};e]$. 7.8. $y=\dfrac{1}{\cos x},\ \ x\in(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$.

7.9. $y=\arccos x^2,\ \ x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}]$. 7.10. $y=\ln x-2arctgx,\ \ x\in[1;+\infty)$.

7.11. $y=2tgx-tg^2x,\ \ x\in[0;\frac{\pi}{2})$. 7.12. $y=e^{2x}-e^{-2x},\ \ x\in[-2;1]$.

7.13. $y=|x|,\ \ x\in[-1;1]$. 7.14. $y=[x],\ \ x\in[0;2]$.

7.15. $y=\{x\},\ \ x\in[-1;1]$. 7.16. $y=\dfrac{1}{\cos x},\ \ x\in[-1;1]$.

8. Найти наибольшее значение функции на заданном промежутке:

8.1. $y=\ln x-x,\ x\in(0;+\infty)$; 8.2. $y=2tgx-tg^2x,\ x\in(-\pi/2;\ \pi/2)$;

8.3. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3},\ \ x\in(-\infty;+\infty)$; 8.4. $y=\dfrac{-x}{x^2+1},\ \ x\in[-5;0)$.

9. Найти наименьшее значение функции на заданном промежутке:

9.1. $y=3x+2ctgx,\ \ x\in(0;\pi/2)$; 9.2. $y=x\ln x-x\ln 5,\ \ x\in(1;5]$;

9.3. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1},\ \ x\in(-\infty;+\infty)$; 9.4. $y=x\left(\dfrac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2,\ \ x\in(0;\pi)$.

10. Представить число *a* в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

11. Найти длины сторон прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса *R* так, что обна из его сторон лежит на диаметре окружности.

12. В данный круговой сектор радиуса *R* вписать прямоугольник наибольшей площади (угол сектора равен α). Вычислить значение этой площади.

13. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найти его радиус, высоту и объем.

14. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшей боковой поверхности. Найти его радиус, высоту и объем.

15. Найти длину высоты прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

16. Найти координаты точки М, лежащей на графике функции $y=1+\cos x$ при $0\le x\le\pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

17. В фигуру, ограниченную линиями $y=3x$ и $y=x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие - на параболе. Найти эту площадь.

18.Для следующих функции найти интервалы вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика.

18.1. $y=x^3-3x^2-9x+9$.

18.2. $y=x^2+x^4$.

18.3. $y=\dfrac{x}{x^2+9}$.

18.4. $y=x\sqrt[3]{x^2}(x+8)$.

18.5. $y=\dfrac{x-5}{x+7}$.

18.6. $y=\dfrac{x^3+8}{x}$.

18.7. $y=5+\sqrt[3]{x-4}$.

18.8. $y=e^{\sin x},\ x\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$.

18.9. $y=\ln(1+x^2)$.

18.10. $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a},\quad (a>0)$.

18.11. $y=x\,arc\,tgx$.

18.12. $y=e^{arctgx}$.

19. Показать, что у кривой $y(x^2+a^2)=a^2(a-x)$ имеется три точки перегиба лежащие на одной прямой.

20. Показать, что у кривой $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеется три точки перегиба лежащие на одной прямой.

21. При каких значениях a график функции $y=x^3+ax^2+1$ будет иметь точку перегиба с абсциссой $x=1$?

22. При каких значениях a график функции $y=e^x+ax^3$ будет иметь точку перегиба?

23. При каких значениях a и b точка $M(1,3)$ является точкой перегиба графика функции $y=ax^3+bx^2$?

24. Найти точки перегиба кривой $\begin{cases} x=t^2, \\ y=3t+t^3 \end{cases}$.

25. Найти точки перегиба кривой $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \sin t \end{cases}$ egri chiziqning burilish nuqtalarining toping.

26. Найти асимптоты графика функции:

26.1. $y = \dfrac{1}{x+5}$.

26.2. $y = \dfrac{3}{(x-4)^2}$.

26.3. $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

26.4. $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$.

26.5. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-6}}$.

26.6. $y = \sqrt{1+x^2} + 2x$.

26.7. $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$.

26.8. $y = xe^x$.

26.9. $y = xe^{\frac{2}{x}}$.

26.10. $y = x\ln(e + \dfrac{1}{x})$.

26.11. $y = x\,\mathrm{arc\,tg}x$.

26.12. $y = \ln(1-x^2)$.

27. Найти асимптоты графика функции, заданной параметрически:

27.1. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \dfrac{t}{1+t} \end{cases}$

27.2. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^2} \end{cases}$

27.3. $\begin{cases} x = \dfrac{2e^t}{t-1}, \\ y = \dfrac{t\,e^t}{t-1} \end{cases}$

28. Провести полное исследование и построить график функции:

28.1. $y = 2x^4 - x^2 + 1$.

28.2. $y=x^5-x^3-2x$.

28.3. $y=36x\,(x-1)^3$.

28.4. $y = (x^2-1)^3$.

28.5. $y = \dfrac{2x+1}{x+5}$.

28.6. $y = \dfrac{1}{x^2+4}$.

28.7. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

28.8. $y = \dfrac{8}{16-x^2}$.

28.9. $y = \dfrac{x^2+6}{x^2-1}$.

28.10. $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

28.11. $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

28.12. $y = x^2 - \dfrac{8}{x}$.

28.13. $y = \sqrt{x} - 2x$.

28.14. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x}$.

28.15. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

28.16. $y = \dfrac{x}{e^x}$.

28.17. $y = e^{-x^2}$.

28.18. $y = e^{x^2}$.

28.19. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

28.20. $y = x^2\, e^{\frac{1}{x}}$.

28.21 $y = x^3 e^{-4x}$.

28.22. $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$.

28.23. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

28.24. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$.

28.25. $y = (1 + \dfrac{1}{x})^x$.

28.26. $y = \ln\cos x$.

28.27. $y = x + \sin x$.

28.28. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

28.29. $y = x - 2\, arc\, tgx$.

28.30. $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

28.31. $y = 2|x| - x^2$.

28.32. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

28.33. $y = \ln\sin x$.

28.34. $y = \cos x - \ln\cos x$.

28.35. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$

28.36. $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi, \\ y = t^3 - 6arctgt \end{cases}$

28.37. $\rho = a\sin 3\varphi,\ a > 0$.

28.38. $\rho = atg\varphi,\ a > 0$.

28.39. $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ \ a > 0$.

28.40. $\rho = a(1 + \sin\varphi),\ \ a > 0$

.

ЧАСТЬ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

9-ГЛАВА. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

§1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла

В разделе математического анализа «Неопределенный интеграл», рассматривается задача, обратная задаче дифференцирования[9]. Это значит, что если в дифференциальном исчислении по функции $F(x)$ находилась ее производная $f(x)$, то в разделе «неопределенный интеграл» по заданной производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$, будет находиться функция $F(x)$.

Пример. $f(x)=x^3$. Тогда $F(x)=\frac{x^4}{4}$, так как $\left(\frac{x^4}{4}\right)=x^3$.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функций $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если на (a,b) справедливо тождество $F'(x)=f(x)$.

Нахождение первообразной функции $F(x)$ для функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ обозначается $\int f(x)dx$. Символ « $\int$ » - называется интегралом. В примере $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}$. Функция $f(x)$- называется подынтегральной функцией, а $f(x)\,dx$ - называется подынтегральным выражением.

Нетрудно заметить что, если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то она не является единственной. Например в предыдущем примере в качестве первообразных можно взять следующие функции: $F(x)=\frac{x^4}{4}+2,\quad F(x)=\frac{x^4}{4}-5$ или $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$ (где С-произвольная по-

[9] Принято так считать при дифференцировании первого порядка, но абсолютизировать эту фразу в тексте не стоит, лучше задуматься и обратиться к книгам [5, 8,9, 10-13, 17, 18, 23, 24]

стоянная), так как $\left(\frac{x^4}{4}+C\right)' = x^3$. Можно доказать, что функциями вида $\frac{x^4}{4}+C$ исчерпываются, все первообразные для функции x^3.

Теорема. Если $F(x)$ и $G(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на отрезке $\left[a,b\right]$, то разность между ними равна постоянному числу.

Определение. Функция $F\left(x\right)+C$ называется *неопределенным интегралом* для $f\left(x\right)$. Итак $\int(x)dx = F(x)+C$.

Для нашего примера результат следует записать так: $\int x^3dx = \frac{x^4}{4}+C$.

§2. Основные свойства неопределенного интеграла

Из определения неопределенного интеграла следуют следствия:

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если

$$F'(x) = f(x), \text{ то } \left(\int(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$$

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральном выражению $d(\int(x)dx) = f(x)dx$.

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольной постоянной $\int dF(x) = F(x)+C$.

Теорема. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или конечного числа функций равен алгебраической сумме их интегралов.

В случае двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$\int[\,f_1(x)+\,f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Теорема. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a = const$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

Замечание. Выполнение последних равенств понимается с точность до произвольной постоянной.

Пример: $\int 5x^6dx = 5\int x^6dx = \frac{5}{7}x^7 + C$.

Простейшие правила вычисления неопределенных интегралов

Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$,

$a \neq 0,\ a - const.$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$, $\quad b - const.$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$,

$a \neq 0,\ b - const$.

Пример 1. $\int \dfrac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + C$.

Пример 2. $\int \sin\dfrac{x}{3}dx = -3\cos\dfrac{x}{3} + C$.

Пример 3. $\int \dfrac{dx}{\cos^2(3x+4)} = \dfrac{1}{3}tg(3x+4) + C$.

§3.Таблица интегралов

Составим таблицу интегралов для основных элементарных функций. Эта таблица строится при помощи определения интеграла.

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

Эта формула пригодна как для $x > 0$, так и для $x < 0$. Для $x > 0$ она очевидна.

Пусть $x < 0$, то $-x > 0$, тогда получим:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x} = \ln(-x) + C.$$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

Правильность этой таблицы проверяется при помощи дифференцирования.

§4. Методы интегрирования

4.1.Метод замены переменной.

Рассмотрим $\int f(u)du$. Положим $u=\varphi(x)$, тогда

$$f(u)du = f(\varphi(x))d\varphi(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx. \qquad (1)$$

Соотношение выполняется в силу инвариантности первого дифференциала. Соотношение (1) перепишем так:

$$f(u)du = \psi(x)dx. \qquad (2)$$

Так как выполняется (2), т.е. равны дифференциалы, то равны и их неопределенные интегралы.

$$\int f(u)du = \int \psi(x)dx. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что при помощи подстановки подынтегральное выражение может быть преобразовано в другое выражение. Новый интеграл может оказаться легко вычисляемым и это используется при интегрировании.

Результат интегрирования должен быть выражен через первоначальную переменную.

Из подстановки $u=\phi(x)$ можно определить x; пусть $x=\omega(u)$, тогда из (3) следует, что:

$$\int f(u)du = \int \psi(x)dx = \Phi(x)+C = \Phi(\omega(u))+C = F(u)+C. \qquad (4)$$

Справедливость (4) проверяется его дифференцированием согласно (2) на основании инвариантности формы первого дифференциала.

Пример: Найти $\int (1-x)^{100}dx$.

$$\int (1-x)^{100}dx = \begin{vmatrix} 1-x=t \\ dx=-dt \end{vmatrix} = -\int t^{100}dt = -\frac{t^{101}}{101}+C = -\frac{(1-x)^{101}}{101}+C.$$

4.2. Интегрирование по частям

Выведем формулу, по которой интеграл от одного выражения приводится к интегралу от другого выражения, что во многих случаях дает возможность вычислить интеграл.

Рассмотрим функции $u=u(x)$, $v=v(x)$.

$$d(u\cdot v) = udv + vdu.$$

Проинтегрируем это соотношение

$\int d(u\cdot v)=\int udv+\int vdu$;

$\int udv=u\cdot v-\int vdu$.

Это и есть формула интегрирования по частям.

Пример: Найти

$$\int x\cos xdx=\begin{vmatrix} dv=\cos xdx, v=\sin x \\ u=x, \quad du=dx \end{vmatrix}=x\sin x-\int \sin xdz=x\sin x+\cos x+C.$$

1. $\int P(x)e^{x}dx$, $P(x)$ - многочлен ($P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$).
2. $\int P(x)\ln xdx$.
3. $\int e^{ax}\sin xdx, \qquad \int e^{ax}\cos x$.

Рекуррентное соотношение (пример применения).

При помощи формулы интегрирования по частям может быть выведена важная для дальнейшего формула.

Вычислить интеграл: $J_n=\int\frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^n}$.

Положим: $dt=dv \quad \frac{1}{\left(a^2+t^2\right)^n}=u$, тогда

$$du=-n\left(a^2+t^2\right)^{-(n+1)}(2t)dt=-\frac{2ntdt}{\left(a^2+t^2\right)^{n+1}}, v=t.$$

$$\int\frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^n}=\frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^n}+\int\frac{2nt^2dt}{\left(a^2+t^2\right)^{n+1}}=\frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^n}+2n\int\frac{\left[\left(t^2+a^2\right)-a^2\right]dt}{\left(a^2+t^2\right)^{n+1}}=$$

$$\frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^n}+2n\left[\int\frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^n}-\int\frac{a^2}{\left(a^2+t^2\right)^{n+1}}dt\right];$$ Используем обозначение $J_n=\int\frac{dt}{\left(a^2+t^2\right)^n}$. Тогда

$$J_n=\frac{t}{\left(a^2+t^2\right)^n}+2nJ_n-2a^2nJ_{n+1}.$$

Разрешим это соотношение относительно J_{n+1}: $J_{n+1}=\frac{t}{2a^2n\left(a^2+t^2\right)}+\frac{2n-1}{2a^2n}J_n$.

Последнее называется рекуррентным соотношением для нахождения интеграла J_n.

При $n=1$ интеграл вычисляется: зная интеграл J_1 по рекуррентной формуле находим J_2; зная J_2, находим J_3 и т.п.

Пример: *1)*

$$J_1=\int\frac{dt}{a^2+t^2}=\begin{vmatrix}t=az,\\ dt=adz\end{vmatrix}=\int\frac{adz}{a^2(1+z^2)}=\frac{1}{a}arctgz+C=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C.;$$

2) $J_2=\frac{t}{2a^2\left(a^2+t^2\right)}+\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C\right).$

§5. Интегрирование рациональных функций.

Существуют некоторые классы функций, для которых операция интегрирования может быть проведена до конца. К такому классу относятся рациональные функции.

$R(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_0}$, где a_i,b_j - вещественные числа, m,n - натуральные.

Рассмотрим интеграл $\int R(x)dx=\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx$.

Если показатели степени m,n многочленов $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ таковы, что $n\geq m$, то для осуществления операции интегрирования выделяют целую часть, путем деления числителя на знаменатель, т.е.

$$\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx=\int P_2(x)dx+\int\frac{P_3(x)dx}{Q_3(x)} . \qquad (1)$$

Причем первый интеграл соотношения (1) легко вычисляется, как сумма интегралов от степенных функций. Следовательно, дело сводится к вычислению интеграла, от правильной рациональной дроби.

5.1.Вычисление интеграла от элементарных дробей

$$\int\frac{Adx}{x-a}; \qquad (I)$$

$$\int \frac{Adx^n}{(x-a)}, \ \ n \geq 2 \ ; \qquad \text{(II)}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx, \ q-\frac{p^2}{4}>0; \qquad \text{(III)}$$

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx \, , \ q-\frac{p^2}{4}>0; \qquad \text{(IV)}$$

назовем интегралами от элементарных дробей.

К этим интегралам фактически сводится вычисление интеграла от правильной рациональной дроби.

5.2. Вычисление интегралов (I) - (II).

(I) $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C \, ;$$

(II) $$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C \, .$$

5.3. Вычисление интеграла (III)

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p+\dfrac{2N}{M}-P}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+P)}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{MP}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

. (2)

Представим знаменатель в виде суммы квадратов двух величин:

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2 . \qquad (3)$$

Сделаем замену:

$$x+\frac{p}{2} = t\, ; \qquad (4)$$

$$dx = dt\, ; \qquad (5)$$

$$q-\frac{P^2}{4} = a^2; \ \left(q-\frac{P^2}{4}>0\right). \qquad (6)$$

Замену (4) и (6) подставим в (3) и, воспользовавшись соотношением (5), получим:

$$J = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C\, . \qquad (7)$$

Итак, интеграл (III) вычислен; вместо t и a следует подставить их значения, взятые из (4) и (6) и подставить все в (7) и (2):

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+P}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

5.4. Вычисление интеграла (IV)

Снова, как и при вычислении интеграла (III), в числителе и подынтегральном выражении формируем дифференциал основания степени знаменателя.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+P)+\left(2\frac{N}{M}-P\right)}{\left(x^2+px+q\right)}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+P}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx +$$

$$+\left(N-\frac{MP}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}. \qquad (8)$$

Первый интеграл вычисляется как интеграл от степенной функции.

Рассмотрим второй интеграл: $J_1 = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}$.

В этом интеграле делаем точно такие же преобразования, как и в интеграле (2).

Применяя замену (4), (5), (6), приходим к интегралу:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m} = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}. \qquad (9)$$

Интеграл (9) вычисляется по рекуррентному соотношению.

Вычислим интеграл (9) и, сделав обратную замену согласно (4) и (6), подставляем его в правую часть соотношения (8). Элементарный интеграл (IV) становится вычисленным.

5.5. Вычисление интеграла от правильной рациональной дроби

Рассмотрим вычисление интеграла.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \qquad (1)$$

где $\frac{P(x)}{Q(x)}$, есть правильная дробь.

Это значит, что P и Q многочлены, причем показатель числителя меньше показателя знаменателя.

Правильная дробь, как известно из высшей алгебры, разлагается на сумму элементарных дробей, и это разложение зависит от разложения знаменателя на множители. Оно имеет вид:

$$Q = \ldots (x-a)^m \ldots (x^2+px+q)^n \ldots \qquad (2)$$

Множители вида $(x-a)$ соответствуют вещественным корням многочлена, множители вида (x^2+px+q) соответствуют комплексно-сопряженным корням.

Тогда (считаем это известным):

$$\frac{P}{Q} = \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n} + \ldots \quad (3)$$

Подставив разложение (3) в интеграл (1), интегрирование правильной дроби сводим к интегрированию элементарных дробей. Таким образом, интегрируются рациональные функции.

5.6. Метод неопределенных коэффициентов

Разложение правильной дроби P/Q на сумму элементарных дробей вида (3) производят при помощи метода неопределенных коэффициентов, сущность которого состоит в следующем.

После того, как найдено разложение многочлена Q в виде (2) записывают соотношение (3), где коэффициенты A_i, M_k, N_k - буквы, которые должны быть определены.

Правая часть соотношения (3) приводится к общему знаменателю, после чего приравниваются числители левой и правой частей. Получают тождество. Поэтому в числителе приравниваются коэффициенты левой и правой частей, стоящие при одинаковых степенях x. Этим самым получается система уравнений для отыскания неопределенных коэффициентов.

Уравнений берется столько, сколько следует определить неизвестных. Эта система не может быть противоречива, так как доказывается, что разложение (3) возможно.

Пример: $\int \frac{x+1}{x^2(x^2+1)}dx$.

Это интеграл от правильной дроби.

Разложим подынтегральную функцию на сумму элементарных дробей, используя метод неопределенных коэффициентов.

$$\frac{x+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Правую часть приводим к общему знаменателю. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x числителей левой и правой частей равенства.

$$x+1=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(CxD)x^2$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A+C=0 \\
x^2 & B+D=0 \qquad\qquad C=-1,\ D=-1 \\
x^1 & A=1 \\
x^0 & B=1
\end{array}$$

$$\int\frac{x+1}{x^2(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-arctgx+C=$$

$$=\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x}-arctgx+C.$$

§6. Интегрирование иррациональных функций

6.1. Интеграл от рациональной функции, зависящей от аргумента и дробно-линейной иррациональности.

Выражение $\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}$, где p и q $|q\neq 0|$ - целые,

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - вещественные числа – называется дробно-линейной иррациональностью.

Пример: $\sqrt[7]{\left(\frac{3x-2}{5x-1}\right)^4}$.

Рассмотрим интеграл:

$$\int R\left[x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{x}},\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{l}{s}},\ldots\right]dx \qquad (1)$$

Символ R указывает, что над x и дробно-линейными иррациональностями производятся арифметические действия.

Интеграл (1) приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки:

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^{\lambda}, \qquad (2)$$

где λ - НОК чисел $q,s,\ldots$

Убедимся, что это так. В силу (2)

$$\left(\frac{dx+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}=t^{v_1},\left(\frac{dx+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{s}}=t^{v_2},\ldots,. \qquad (3)$$

Из соотношения (2) находим x:

$$\alpha x+\beta=t^{\lambda}\gamma x+t^{\lambda}\delta$$

$$x=\frac{t^{\lambda}\delta-\beta}{\alpha-t^{\lambda}\gamma}. \qquad (4)$$

Отсюда вытекает, что x является рациональной функцией от t. Из соотношения (4) находим dx:

$$dx=g(t)dt, \qquad (5)$$

$g(t)$ - рациональная функция.

Подставляя значение (4), (3) и (5) в интеграл (1), получим:

$$\int R\left[\left(\frac{t^{\lambda}\delta-\beta}{\alpha-t^{\lambda}\gamma}\right),t^{v_1},t^{v_2}\cdots\right]g(t)dt \qquad (6)$$

Так как суперпозиция рациональных функций, есть функция рациональная, то интеграл является интегралом от рациональной функции: $\int R_1(t)dt$. Интеграл же от рациональной функции всегда вычисляется.

Пример. $J=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l}\frac{1-x}{1+x}=t^2,1-x=t^2+xt^2\\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt\end{array}\right|=$

$$=-\int t\frac{\frac{4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=-\int\frac{dt}{(1+t^2)(1-t^2)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{1}{2}arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

.

6.2. Интегрирование биноминальных дифференциалов

Выражение $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ - называется биноминальным дифференциалом. В нем a и b - некоторые вещественные числа, m, n, p - некоторые рациональные числа. Интеграл от биноминального дифференциала $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, как доказал П.Л. Чебышев, интегрируется (в элементарных функциях) в трех случаях.

Укажем эти случаи и запишем подстановки, которые приводят к интегралам от рациональных функций.

1. p - целое.

Тогда применяется подстановка: $x=t^{\lambda}$, где λ - НОК знаменателей рациональных чисел m и n.

2. Выражение $\frac{m+1}{n}$ - есть целое число.

Тогда применяется подстановка: $\sqrt[\beta]{a+bx^n}=t$, где β - знаменатель p.

3. Выражение $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число. Тогда применяется подстановка $\sqrt[\lambda]{\frac{a+bx^n}{x^n}}=t$, где λ - знаменатель p.

Проверить, что указанные подстановки рационализируют интегралы, можно непосредственно.

Пример. $J=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$

$m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}, \frac{m+1}{n}+p=0$. Поэтому

$$\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}}=t,\ \sqrt[4]{1+x^4}=xt,\ x=\frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}}\,dx=-\frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4-1)^5}}dt.\ \text{Тогда}$$

$$J=\int\frac{\sqrt[4]{t^4-1}}{t}\frac{(-t^3)}{\sqrt[4]{(t^4-1)^5}}dt=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

6.3. Подстановки Эйлера

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x_1\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \qquad (1)$$

Эйлер предложил три подстановки, которые рационализируют интеграл (1):

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\cdot x\pm t$, либо $t\pm\sqrt{a}\cdot x, a>0$; (2)

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}\pm xt$, $c>0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$, α - корень трехчлена ax^2+bx+c.

В качестве доказательства проведем рационализацию (1) лишь при помощи одной какой-нибудь подстановки, скажем (2), так как пригодность других подстановок проверяется аналогично.

Из соотношения (2) находим x. Для этого равенства (2) возведем в квадрат

$$ax^2+bx+c=ax^2\pm2\sqrt{a}\cdot xt+t^2;$$

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp2\sqrt{a}\cdot t}. \qquad (3)$$

Подставим x в (2) и найдем при помощи новой переменной рациональное выражение радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{b\mp2\sqrt{a}\cdot t}\pm t. \qquad (4)$$

Вычисляем dx (см. (3))

$$dx=\frac{2t\left(b\mp2\sqrt{a}\cdot t\right)\pm2\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{\left(b\mp2\sqrt{a}\cdot t\right)^2}dt. \qquad (5)$$

Выражения (3), (4) и (5) подставим в (1). Получим интеграл от рациональной функции.

$$\int R_1(t)dt = F(t) + C.$$

Этот интеграл вычисляется. Результат выражают через первоначальную переменную.

Пример. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Применим 1-ую подстановку Эйлера.

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x; \quad x = \frac{z^2 \mp a^2}{2z}; \qquad dx = \frac{z^2 \pm a^2}{2z^2}dz;$$

$$\sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{z^2 \pm a^2}{2z};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{\left(z^2 \pm a^2\right)2zdz}{2z^2\left(z^2 \pm a^2\right)} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Эту формулу обычно включают в таблицу интегралов.

§7. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим методы интегрирования интегралов типа

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \qquad (1)$$

где $R(\sin x, \cos x)$ рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

7.1. Универсальная подстановка.

Покажем, что постановка

$$tg\frac{x}{2} = t \qquad (2)$$

всегда рационализирует (1). Для этого выразим $\sin x$, $\cos x$, dx через t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}};$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad (3)$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad (4)$$

Из соотношения (2) находим x:

$$\frac{x}{2} = arctgt, \; x = 2arctgt;$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \qquad (5)$$

Подставляем (3), (4), (5) в (1). Получаем интеграл от рациональной функции

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt \;. \;\Delta.$$

Пример.

$$\int\frac{dx}{1+\cos x} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t, x = 2arctgt \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ 1+\cos x = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}dt = t + C = tg\frac{x}{2} + C.$$

Здесь использованы подстановка (2), соотношения (3) и (5).

7.2. Некоторые другие подстановки

Во многих случаях для рационализации интеграла (1) целесообразно применять другие подстановки.

а) Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализация (1) осуществляется подстановкой $\cos x = t$;

б) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализация (1) осуществляется подстановкой $\sin x = t$;

в) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то рационализация (1) осуществляется подстановкой $tgx = t$.

Пример.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \left|\sin x = t\right| = \int t^2\left(1-t^2\right)dt = \int t^2 dt - \int t^4 dt == \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Вычисление интеграла

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \qquad (7)$$

Для рационализации (7) возможно применить а) или в) из пункта 3, если m,n - натуральные и хотя бы одно нечетное. Если m è n - натуральные четные числа, применяют метод понижения степеней при помощи тригонометрических тождеств:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Вычисление интегралов от произведения $\sin \alpha x$ и $\cos \beta x$ различных аргументов

Для вычисления таких интегралов будем пользоваться следующими тригонометрическими тождествами:

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha-\beta\right)x + \sin\left(\alpha+\beta\right)x\right]$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)x + \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right] \qquad (8)$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)x - \cos\left(\alpha+\beta\right)x\right]$$

При помощи формул (8) интегралы от произведения приводят к интегралам от суммы тригонометрических функций, которые вычисляются известными методами.

Пример.

$$\int \cos 5x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 7x dx + \frac{1}{2}\int \cos 3x dx = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{6}\sin 3x + C.$$

7.3. К вопросу о не интегрируемости некоторых функций

Не всякая функция может быть проинтегрируема в виде элементарной функции.

Примеры: $\int \frac{e^x}{x}dx, \int e^{-x^2}dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx$

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Воспользовавшись основной таблицей интегралов и простейшими правилами интегрирования найти интегралы:

1.1. $\int (x^4 - 4x^3 + 2x)dx$. 1.2. $\int (2t^3 + 6t^3)dt$.

1.3. $\int (x-1)(x+4)dx$. 1.4. $\int x^2(x+1)(5x-3)dx$.

1.5. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{x})dx$. 1.6. $\int (\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2})dx$.

1.7. $\int (\sqrt{x\sqrt{x}} + x\sqrt{x})dx$. 1.8. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$.

1.9. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt{x}}dx$. 1.10. $\int 2^x dx$.

1.11. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$. 1.12. $\int a^x e^x dx$.

1.13. $\int (2e^x - \sqrt[3]{x^2})dx$. 1.14. $\int (10^x - 2\sin x)dx$.

1.15. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$. 1.16. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}dx$.

1.17. $\int tg^2 x dx$. 1.18. $\int ctg^2 x dx$.

1.19. $\int \sin^2 \frac{x}{2}dx$. 1.20. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$.

1.21. $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}$. 1.22. $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$.

2. Вычислить интегралы.

2.1. $\int (x+1)^{14}dx$. 2.2. $\int \sqrt{8-2x}\,dx$.

2.3. $\int \sqrt[5]{(3x+1)^2}\,dx$. 2.4. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

2.5. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$. 2.6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.7. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. 2.8. $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

2.9. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$. 2.10. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

2.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 2.12. $\int \frac{(arctgx)^2 dx}{1+x^2}$.

2.13. $\int \frac{dx}{arc\sin^3 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$. 2.14. $\int \cos 3x\,dx$.

2.15. $\int \sin(2x-1)\,dx$.

2.16. $\int \cos(1-2x)\,dx$.

2.17. $\int e^x \sin e^x dx$.

2.18. $\int \frac{dx}{2x-1}$.

2.19. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

2.20. $\int ctg\, dx$.

2.21 $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

2.22. $\int \frac{\sin 2xdx}{1+\cos^2 x}$.

2.23. $\int e^{2x}dx$.

2.24. $\int e^{-3x}dx$.

2.25. $\int e^{\sin x}\cos xdx$.

2.26. $\int xe^{x^2}dx$.

2.27. $\int e^{-x^3}x^2dx$.

2.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2.29. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

2.30. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

2.31. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$.

2.32. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$.

3.Методом интегрирования по частям найти интегралы:

3.1. $\int x\sin 2xdx$.

3.2. $\int x\cos xdx$.

3.3. $\int xe^x dx$.

3.4. $\int xarctgxdx.$

3.5. $\int \arccos xdx$.

3.6. $\int arctg\sqrt{x}dx$.

3.7. $\int x^2e^{-x}dx$.

3.8. $\int x^3e^x dx$.

3.9. $\int x^3\sin xdx$.

3.10. $\int x^2\cos^2 xdx$.

3.11. $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

3.12. $\int x^2\ln(1+x)dx$.

4. Применяя подходящие подстановки, найти следующие интегралы:

4.1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

4.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

4.3. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$.

4.4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

4.5. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

4.6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+(x+1)}dx$.

4.7. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

4.8. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}$.

4.9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$

4.10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

5. Интегрировать простейшие дроби:

5.1. $\int \frac{dx}{2x+1}$. 5.2. $\int \frac{dx}{1-3x}$.

5.3. $\int \frac{dx}{x^2+10x+3}$. 5.4. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$.

5.5. $\int \frac{x-4}{x^2+x-12}dx$. 5.6. $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx$.

5.7. $\int \frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx$. 5.8. $\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx$.

5.9. $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$. 5.10. $\int \frac{dx}{(3x-1)^2}$.

5.11. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$. 5.12. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$.

6. Найти интегралы дробно-рациональных функции:

6.1. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)}dx$. 6.2. $\int \frac{7x+12}{(x-1)(3x+1)}dx$.

6.3. $\int \frac{5x-10-x^2}{x^2-4x+3}$. 6.4. $\int \frac{x^2-72}{x(x+4)(x-3)}dx$.

6.5. $\int \frac{x^4-16x^3+5x+8}{x^3-16x}dx$. 6.6. $\int \frac{6+8x-x^2}{x^3+3x^2+2x}dx$.

6.7. $\int \frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}dx$. 6.8. $\int \frac{x^2+5x+9}{(x-2)^3}dx$.

6.9. $\int \frac{x^3-10x+25}{x^2(x-5)^2}dx$. 6.10. $\int \frac{3x^3-7x^2+6x}{(x-1)^2(1-2x)}dx$.

6.11. $\int \frac{4x^2-5\text{x}+9}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$. 6.12. $\int \frac{x^2-7x-6}{(x^2+9)(x-3)}dx$.

6.13. $\int \frac{5x^4-x^3+4x^2+8}{x^3-8}dx$. 6.14. $\int \frac{x^3-7x^2-3}{x^2(x^2+4)}dx$.

6.15. $\int \frac{x^3-12x^2-3x}{(x^2-2x+2)(x^2-1)}dx$. 6.16. $\int \frac{4x^3+3x^2-17x}{(x^2+2x+2)(x^2+9)}dx$.

6.17. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$. 6.18. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

7. Найти интегралы иррациональных функции:

6.1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$. 7.2. $\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$.

7.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}}$. 7.4. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

7.5. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$. 7.6. $\int \frac{dx}{(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt{x}}$.

7.7. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}dx$. 7.8. $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

7.9. $\int \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}}dx.$ 7.10. $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}\cdot\frac{dx}{x}$.

8. Вычислить интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (подстановки Эйлера).

8.1 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$. 8.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

8.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$. 8.4. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx$.

8.5. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 8.6. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}$.

9. Вычислить интегралы от биномиального дифференциала $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$:

9.1. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$. 9.2. $\int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}dx$.

9.3. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. 9.4. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$.

9.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. 9.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

9.7. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. 9.8. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)}\,dx$.

10. Вычислить интегралы от тригонометрических выражении:

10.1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$. 10.2. $\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x}dx$.

10.3. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$. 10.4. $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$.

10.5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. 10.6. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$.

10.7. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x}$. 10.8. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$.

10.9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

10.10. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

10.11. $\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$.

10.12. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

10.13. $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$.

10.14. $\int \sin^5 x\, dx$.

10.15. $\int \cos^7 x dx$.

10.16. $\int \sin 3x \sin 7x dx$.

10.17. $\int \sin 2x \sin 9x dx$.

10.18. $\int \sin 4x \sin 5x \sin 7x dx$.

10.19. $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

10.20. $\int \sin 2x \sin 3x \cos 5x\, dx$.

10-ГЛАВА. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

Рассмотрим две задачи, которые приводят к понятию определенного интеграла. [13, 18, 22]

1.1. Площадь криволинейной трапеции.

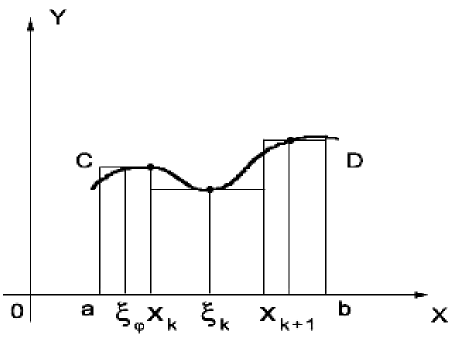
Определение. Фигура на плоскости, ограниченная осью OX, двумя прямыми, параллельными оси OY, и графиком функции $f(x)\geq 0$, называется *криволинейной трапецией*. (Криволинейная трапеция рассматривается и для $f(x)\leq 0$, определение аналогично).

Найдем площадь криволинейной трапеции.

Решение: Разобьем отрезок $[a,b]$ точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b. \tag{1}$$

На отрезке $[a,b]$ получим систему элементарных отрезков $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$. Длина k - того элементарного отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k=\overline{0,n-1}$. На k-том элементарном отрезке выберем произвольную точку ξ_k $\left(k=\overline{0,n-1}\right)$, и в этой точке проведем ординату $f(\xi_k)$. Построим сумму



$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k. \tag{2}$$

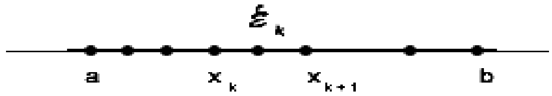
Это площадь ступенчатой фигуры, состоящей из, очевидным образом, построенных четырехугольников (см. рис.). Площадь ступенчатой фигуры σ, приближенно равна площади криволинейной трапеции J. Если устремить к нулю Δx_k, то площадь ступенчатой фигуры будет приближаться к площади криволинейной трапеции. Очевидно, что

$$J = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{x=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \text{, где } \lambda = \max_k \Delta x_k. \tag{3}$$

Соотношение (3) дает площадь криволинейной трапеции. К суммам вида (3) приводят и другие задачи.

1.2. Вычисление работы переменной силы.

Пусть вдоль отрезка $[a,b]$ действует переменная сила $f(x)$. Вычислим ее работу. Решается эта задача аналогично предшествующей. Производится разбиение отрезка $[a,b]$, точками (1):



Считается, что вдоль отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ сила $f(\xi_k)$ - постоянна. Тогда работа на элементарном отрезке равна $f(\xi_k)\Delta x_k$, $(k=0\,,1,.\;n,-\;)$. Приближенное значение работы на всем отрезке равно $A \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Точное значение работы равно пределу вида (3).

§2. Определение определенного интеграла

В связи с тем, что ряд задач различных наука, в частности и математики приводят к нахождению пределов вида (3), в математическом анализе существует целый раздел, изучающий пределы (3). Этот раздел называется определенным интегрированием.

Основным понятием этого раздела является понятие определенного интеграла, абстрактное определение которого дается следующим образом.

Определение: Пусть на отрезке $[a,b]$ задана ограниченная функция $f(x)$. Произведем $\forall$ разбиение отрезка точками.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b. \qquad (1)$$

Длину отрезка разбиения обозначим Δx_k, $(k = 0,1\ldots n-1)$, $\lambda = \max \Delta x_k$.

На k-том отрезке разбиения выберем произвольную точку ξ_k и образуем сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Она называется интегральной суммой, либо интегральной суммой Римана.

Предел этой суммы при $\lambda \to 0$, если он существует и не зависит от выбора разбиения (3) и выбора ξ_k, называется *определенным интегралом* и обозначается:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4)$$

Числа b, a - называются соответственно верхним и нижним пределами интегрирования.

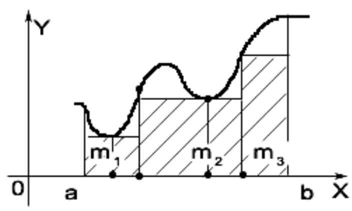
Выражение $f(x)dx$ - называется подынтегральным.

Сравнивая это определение с задачами, рассмотренными выше, можно сказать, что *определенный интеграл с геометрической точки зрения может быть интерпретирован, как площадь криволинейной трапеции.*

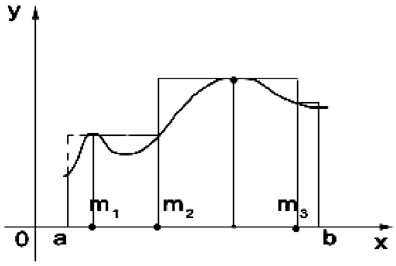
Физических интерпретаций определенного интеграла существует много, одна их них рассмотрена нами: определенный интеграл – есть работа переменной силы вдоль отрезка $[a,b]$.

§3. Теорема существования определенного интеграла. Суммы Дарбу

В решении вопроса о существовании определенного интеграла важную роль играют интегральные суммы вида:



$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad (1)$$



$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \qquad (2)$$

которые называются нижней и верхней суммами Дарбу.

m_k - нижняя грань $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$,

M_k - верхняя грань $f(x)$ на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$

Свойства сумм Дарбу.

а) Из определения сумм Дарбу вытекает, что

$$s \le \sigma \le S, \qquad (3)$$

так как при данном разбиении интегральных сумм Римана существует бесконечное множество, в зависимости от выбора точек ξ_k, а суммы Дарбу не меняются.

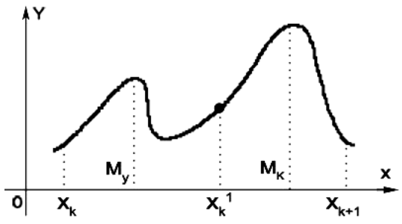
б) При увеличении количества точек разбиения, нижние суммы Дарбу могут лишь увеличиться, а верхние – лишь уменьшиться.

Для доказательства этого свойства предположим, что дополнительно выбрана лишь точка x': $x_k < x' < x_{k+1}$. Рассмотрим член, содержащий эту точку в сумме Дарбу.

Доказательство свойства приведем для верхней суммы Дарбу.

$M_k\left(x_{k+1} - x_k\right)$ - первоначальный вид члена суммы Дарбу.

$\overline{M}_k\left(x' - x_k\right) + \overline{\overline{M}}_k\left(x_{k+1} - x'\right)$ - вид, после добавлении точки.



Легко видеть, что $\overline{M}_k, \overline{\overline{M}}_k \le M_k$

Отсюда вытекает, что

$\overline{M}_k\left(x' - x_k\right) + \overline{\overline{M}}_k\left(x_{k+1} - x'\right) \le M_k\left(x_{k+1} - x_k\right)$

Обозначим s_1, S_1 - нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для первоначального разбиения, а s_2, S_2 - для разбиения с дополнительными точками. Тогда при новом разбиении, получаемом прибавлением точек разбиения: $S_2 \le S_1$.

Аналогичное свойство доказывается и для нижней суммы Дарбу:

в) Любая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу, принадлежащей даже другому разбиению.

Доказательство. Произведем разбиение отрезка. Согласно определению сумм Дарбу:

$$s_1 \le S_1 \qquad (4)$$

Произведем второе разбиение:

$$s_2 \le S_2 \qquad (5)$$

Второе разбиение наложим на первое. Получим третье разбиение, в котором количество точек не менее, чем в первом и втором разбиениях. Имеем

$$s_3 \le S_3 \qquad (6)$$

Согласно второму свойству сумм Дарбу и (6)

$$s_1 \le s_3 \le S_3 \le S_2 \qquad (7)$$

Из (7) следует, что

$$s_1 \le S_2 \qquad (8)$$

4) Нижний и верхний интеграл Дарбу.

Из свойств сумм Дарбу вытекает, что множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху любой верхней суммой Дарбу. Поэтому существует

$$\sup s = J_* \qquad (9)$$

А множество верхних сумм Дарбу ограничены снизу любой нижней суммой Дарбу, т.е. существует

$$\inf S = J^* \qquad (10)$$

Выражение (9) называют нижним интегралом Дарбу, а (10) верхним интегралом Дарбу.

5) Формулировка и доказательство теоремы существования.

Теорема: Для того, чтобы определенный интеграл от функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[a,b]$, существовал, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, что при $\lambda < \delta$

$$S - s < \varepsilon . \qquad (11)$$

Доказательство необходимости. Будем предполагать, что интеграл существует: это значит, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J$ или на языке $\varepsilon - \delta$:

$$J - \varepsilon < \sigma < J + \varepsilon . \qquad (12)$$

Так как верхняя и нижняя суммы Дарбу S и s являются соответственно точной верхней и точной нижней границами σ, причем

$$s \le \sigma \le S , \qquad (13)$$

то для данного разбиения существуют такие τ, что S и s могут как угодно мало отличаться от σ и даже совпадать с ним.

Поэтому, совмещая соответственно (12) и (13), получаем

$$J - \varepsilon < s \le \sigma \le S < J + \varepsilon . \qquad (14)$$

Отсюда следует выполнимость соотношения (11), т.е.

$S - s < \varepsilon$ при $\lambda < \delta$.

Доказательство достаточности.

Так как выполняются соотношения (9) и (10), то

$$s \le J_* \le J^* \le S' . \qquad (15)$$

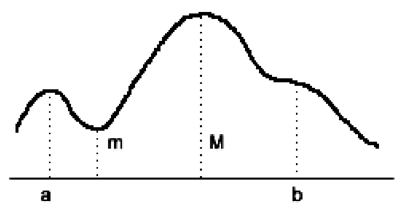
Это значит, что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ $J_* = J^* = J$.

Поэтому $s \le J \le S$. А так как $s \le \sigma \le S$, то из $S - s < \varepsilon$ при $\lambda < \delta$ будет $|J - \sigma| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = J$. Δ.

6) Выражение условий теоремы через колебание функции.

Колебанием функции, на отрезке, называется разность между наибольшим M и наименьшим m значениями функции на этом отрезке.

$\omega = M - m$.



Если m и M не существует, то колебание выражается через $\sup\limits_{[a,b]} f$ и $\inf\limits_{[a,b]} f$

$$\omega = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

Обозначим через ω_k колебание функции на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$.

Это значит, что $\omega_k = M_k - m_k$.

Тогда $S - s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$.

Необходимые и достаточные условия существования интеграла могут быть выражены так:

$S - s = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$, если $\lambda < \delta$.

(Выбор всех величин указан выше).

§4. Классы интегрируемых функции

4.1.Интегрируемость непрерывных функций.

Теорема. Непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции интегрируемы.

Доказательство.

Так как функция непрерывна на замкнутом отрезке $[a,b]$, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке. Это значит, что по что для любых двух x', x'', удовлетворяющих соотношению $|x' - x''| < \delta$, соответствующие значения функции удовлетворяют соотношению $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Произведем разбиение $[a,b]$ таким образом, чтобы $\Delta x_k < \delta$. Так как функция непрерывна, то на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ существуют x'_k, x''_k, в которых функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений $f(x'_k) = M_k$, $f(x''_k) = m_k$ и $M_k - m_k = \omega_k < \delta$.

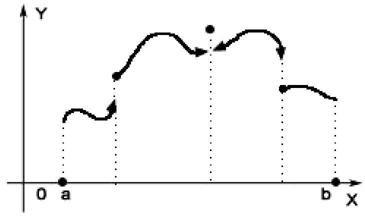
Тогда

$$S - s = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon(b-a). \qquad (1)$$

Но это и есть выполнение необходимого и достаточного условия интегрируемости, так как, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $b - a$ не влияет на малость (1), и, следовательно, выполняются требования теоремы существования интеграла. Теорема доказана.Δ.

4.2. Об интегрируемости разрывных и монотонных функций.

Теорема. Если ограниченная на $[a,b]$ функция непрерывна, на нем, за исключением конечного числа точек разрыва, то она интегрируема на $[a,b]$.



Доказательство. Пусть $y = f(x)$ ограничена $|f(x) \le \Omega|$ и имеет на $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода. Произведем разбиение $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Пусть ℓ элементарных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ покрывают точки разрыва. Здесь учитывается и тот случай, когда точки разрыва совпадают с границами отрезков. По $\forall \varepsilon > 0$ выберем $0 < \delta < \varepsilon$ так, чтобы длина Δx_k была меньше δ. Сумму $\sum\limits_i \omega_i \Delta x_i$ в теореме существования интеграла разобьем на две:

а) $\sum\limits_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'}$ и б) $\sum\limits_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''}$.

В а) суммирование производится по всем отрезкам, лежащим вне тех, которые покрывают точки разрыва.

В б) суммирование производится по тем, которые покрывают все точки разрыва.

Оценим эти суммы:

Для а) оценка осуществляется также, как и в теореме о существовании интеграла для непрерывной функции:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon (b-a).$$

Для б): так как в точках разрыва колебание функции $\omega_{i''} \le \Omega$, то

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} \le \Omega \cdot \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \ell \cdot \varepsilon .$$

Тогда $S - s = \sum\limits_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon (b-a) + \Omega \ell \cdot \varepsilon = \varepsilon \left[(b-a) + \Omega \ell \right]$.

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, а $\left[(b-a) + \Omega \ell \right]$ конечно, то $S - s \to 0$ при $\lambda \to 0$, т.е. функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода на $[a,b]$ - интегрируема. Δ.

Теорема. Монотонная ограниченная функция на $[a,b]$ интегрируема.

Доказательство. Колебание $f(x)$ на элементарном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ будет $\omega_x = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ (доказательство проведем для монотонно возрастающей функции).

Зададим $\forall \varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon / \left[f(b) - f(a) \right]$. Как только $\Delta x_k < \delta$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \cdot \Delta x_k < \delta \sum_{k=0}^{n-1} \left[f(x_{k+1}) - f(x_k) \right] = \delta \left[f(b) - f(a) \right] =$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \left[f(b) - f(a) \right] = \varepsilon$$
.

Следовательно, выполняются условия существования интеграла. Δ.

Замечание. Изменение значений интегрируемой функции в конечном числе точек не отразится ни на существовании, ни на величине интеграла. Это является следствием теорем.

§5. Свойства определенного интеграла

Свойства определенного интеграла в основном вытекают из определения интеграла.

1) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

При доказательстве этого свойства рассматривается интегральная сумма:

$$\sum_{k=0}^{n-1} kf(\xi_k)\Delta x_k = k\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

Переходя к пределу в соотношении (1) при $\lambda \to 0$, получим справедливость 1-го свойства.

2) $\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b fdx \pm \int_a^b gdx.$

Это свойство также вытекает из определения интеграла, так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[f(\xi_k) \pm g(\xi_k) \right] \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \pm \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\Delta x_k \quad . \qquad (2)$$

Переход к пределу убеждает в справедливости высказанного утверждения.

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Если поменять местами верхний и нижний пределы интегрирования, то значение интеграла меняется на противоположное. Доказательство этого свойства вытекает из рассмотрения интегральной суммы.

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_k - x_{k+1}), \tag{3}$$

в которой суммируются произведения $f(\xi_k)(x_k - x_{k+1})$, вместо $f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ - выражения отличаются знаком. Следовательно, и (3) меняет знак. Поэтому свойство (3) имеет место.

4) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

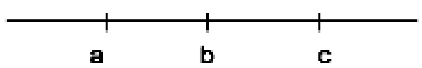
Доказательство свойства 4 также вытекает из определения интеграла. ($\Delta x_k = 0$ при всех k)

5) Пусть $a < c < b$, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Доказательство этого свойства производится при помощи интегральных сумм. Так как пределы интегральных сумм не зависят от способа разбиения $[a,b]$, то всегда разбиение производится так, чтобы «c» было точкой разбиения

$$\sum_a^b f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_a^c f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_c^b f(\xi_k)\Delta x_k .$$

В силу существования интеграла пределы интегральных сумм существуют. Переходя к пределу, получим справедливость свойства. Заметим, что это свойство справедливо, если точка c находится и вне отрезка.



$$\int\limits_a^c = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c; \qquad \int\limits_a^b = \int\limits_a^c - \int\limits_b^c = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b.$$

Здесь предполагается существование интеграла на $[a,c]$.

6) Если функция $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство этого свойства вытекает из рассмотрения интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_n \ge 0.$$

Переходя к пределу, получим справедливость свойства 6.

7) Если $f(x) \le \phi(x)$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \phi(x)dx$.

Доказательство: $\phi(x) - f(x) \ge 0$, Отсюда

$$\int_a^b [\phi(x) - f(x)]dx \ge 0;$$

$$\int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0; \quad \int_a^b \phi(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx.$$

что и требовалось доказать.

8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Будем предполагать, что оба интеграла существуют, тогда свойство вытекает из перехода к пределу в неравенстве $\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|\Delta x_k$.

Следует отметить, что для доказательства свойства, вообще говоря, достаточно предположить существование интеграла от функции $f(x)$. Доказательство этого опустим.

§6.Теоремы о среднем значении

6.1. Случай интегрируемой функции f(x)

Теорема. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует, то $\exists \mu$, такое что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{1}$$

Доказательство. На $[a,b]$ в силу ограниченности функции $f(x)$

$$m \le f(x) \le M. \tag{2}$$

Проинтегрировав неравенства, согласно свойству 7 получим, что

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx;$$

Поэтому

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \ . \qquad (3)$$

Покажем, что

$$\int_a^b dx = b-a . \qquad (4)$$

Действительно, при любом разбиении и, следовательно, переходя к пределу при $\lambda \to 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b-a \Rightarrow \int_a^b dx = b-a . \qquad (5)$$

Неравенство (3) можно записать так

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a). \qquad (6)$$

Отсюда вытекает, что

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \Rightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (7)$$

А из (7) вытекает (1). Что и требовалось доказать.Δ.

Случай непрерывной функции.

Согласно (7) $m \le \mu \le M$. Так как выполняется (2) и функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то согласно теореме о промежуточных значениях непрерывной функции, найдется

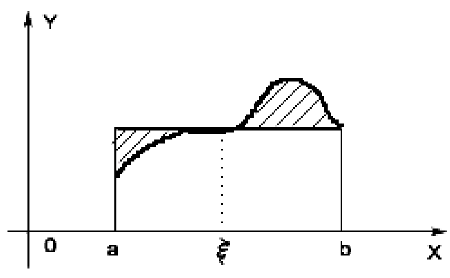
$\xi(a \le \xi \le b)$, что $f(\xi) = \mu$.

Подставив μ в (1), получим

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \ . \qquad (8)$$

Это и есть выражение теоремы и среднем значении для непрерывной функции. Δ.

Геометрическая интерпретация случая 2, состоит в следующем.



Левая часть соотношения (8) представляет площадь криволинейной трапеции, а правая часть, как легко видеть, есть площадь прямоугольника, основанием которого является отрезок $[a,b]$, а высотой – значение функции в некоторой точке ξ. Эти площади равны между собой.

Соотношения (6) и (8) используются для оценки интегралов.

6.2. Обобщенная теорема о среднем

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $-\infty < m \le f(x) \le M < +\infty$, $g(x)$ - не меняет своего знака. Тогда

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx. \qquad (1)$$

Либо $\exists\mu$, что $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$,

где

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то $\exists\xi$, такое что

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \qquad (3)$$

Доказательство. Неравенства $m \le f(x) \le M$ умножаем на (полагаем для определенности $g(x) \ge 0$) $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Интегрируя полученное соотношение, будем иметь (1). Из него вытекает (2) и (3). (см. предыдущую теорему).

§7. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда для любой точки $x \in [a,b]$ будет существовать интеграл $\int_a^x f(t)dt$.

Если точка x - переменная, то интеграл будет являться функцией от верхнего предела интегрирования:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (4)$$

Теорема. Если определенный интеграл существует на $[a,b]$, то $\int\limits_a^x f(t)dt=\Phi(x)$ является непрерывной функцией верхнего предела интегрирования.

Доказательство. На отрезке $[a,b]$ возьмем точки $x,\ \ x+\Delta x$.

Составим разность

$$\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x). \qquad (5)$$

$$\int\limits_a^{x+\Delta x}-\int\limits_a^x=\int\limits_a^x+\int\limits_x^{x+\Delta x}-\int\limits_a^x=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Согласно теореме о среднем значении $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\mu\left[(x+\Delta x)-x\right]=\mu\cdot\Delta x$. Следовательно,

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\mu\cdot\Delta x. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) и следует, что интеграл с переменным верхним пределом непрерывен на $[a,b]$, так как при $\Delta x\to 0$ и $\forall x\in[a,b]$

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\Delta\Phi(x)\to 0.$$

§8. Основная теорема дифференциального и интегрального исчисления

Теорема. Если подынтегральная функция $f(x)$ в определенном интеграле $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ с переменным верхним пределом непрерывна, то интеграл является *первообразной* для функции $f(x)$.

Доказательство. Согласно определению первообразной функции нам следует доказать, что

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt=f(x).$$

Из теоремы о среднем значении для непрерывной функции $f(x)$ следует

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\cdot\Delta x,\ x\le\xi\le x+\Delta x.$$

Поделим это равенство почтенно на Δx: $\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)$.

Перейдем к пределу, при $\Delta x \to 0$.

Левая часть полученного при этом соотношения есть производная от функции $\Phi(x)$, по определению, правая часть будет стремиться к $f(x)$, так как $x \le \xi \le x+\Delta x$ и $f(\xi) \to f(x)$, $\Delta x \to 0$, в связи с тем, что функция $f(x)$ непрерывна. Следовательно, производная $\Phi'(x)$ - существует. Теорема доказана. Δ.

Мы убедились в том, что интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная и производная от него по верхнему пределу равна подынтегральной функции, взятой в точке x.

§9.Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интгерала

9.1. Формула Ньютона-Лейбница.

Известно, что для $f(x)$ первообразных бесконечное множество, и они отличаются друг от друга лишь на произвольную постоянную. Следовательно, если функция $\int\limits_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ есть первообразная, а $F(x)$- некоторая другая первообразная, то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

Так как

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \tag{2}$$

то, подставляя (2) в (1), получим

$$F(x) + C = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{3}$$

В соотношении (3) положим $x = a$:

$$F(a) + C = \int\limits_a^a f(t)dt = 0. \tag{4}$$

Из (4) получаем $C = -F(a)$ и поставив C в (3) получим:

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (5)$$

Вместо x - в соотношении (5) подставим b. Тогда

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) . \qquad (6)$$

Формула (6) называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Пример. $\int_0^1 x^4 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{0}{5}=\frac{1}{5}$.

9.2. Замена переменных в определенном интеграле

Рассмотрим: $\int_a^b f(x)\,dx$, $a \le x \le b$.

Положим $x=\phi(t)$ и пусть при $a \le x \le b$, $\alpha \le t \le \beta$, причем $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$.

Покажем, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt . \qquad (1)$$

Действительно, подынтегральные выражения левой и правой частей соотношения (1) равны между собой согласно свойству инвариантности формы первого дифференциала, т.е.

$$f(x)\,dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt . \qquad (2)$$

Отсюда следует, что первообразные для дифференциалов, стоящих в левой и правой частях соотношения (2), равны между собой с точностью до произвольного слагаемого:

$$F(x)=\Phi(t). \qquad (3)$$

Из соотношения (3) согласно (2) следует, что

$$\Phi(t)=F(\phi(t)). \qquad (4)$$

Отсюда вытекает, что $F(b)-F(a)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$ или $F(b)-F(a)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$.

Из (1) вытекает, что не меняя значения интеграла, можно делать замену переменной по формуле $x=\varphi(t)$ (рассуждения при доказательстве (1) проводятся слева направо), либо по формуле $\phi(t)=z$ (справа налево).

Пример. $\int\limits_0^1 (1-x)dx = \begin{vmatrix} 1-x=t, \\ dx=-dt, \end{vmatrix} = -\int\limits_1^0 t^{10}dt = -\left.\dfrac{t^{11}}{11}\right|_1^0 = \dfrac{1}{11}..$

9.3. Формула интегрирования по частям

Рассмотрим, каким образом употребляется формула интегрирования по частям для вычисления определенных интегралов.

Формула интегрирования по частям имеет вид (для неопределенного интеграла)

$$\int udv = vu - \int vdu. \qquad (1)$$

Так как в соотношении (1), можно считать, что правая часть является первообразной для интеграла, стоящего в левой части, то согласно формуле Ньютона-Лейбница соотношение (1) может быть записано так:

$$\int\limits_a^b udv = \left(uv - \int vdu\right)\Bigg|_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b vdu$$

или

$$\int\limits_a^b udv = uv\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (2)$$

Пример. $\int\limits_1^2 x\ln xdx = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_1^2 - \dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 \dfrac{x^2}{x}dx = 4\ln 2 - \dfrac{x^2}{4}\Bigg|_1^2 = 4\ln 2 - \dfrac{3}{4}.$

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Используя определение определенного инг=теграла вычислить (.е. вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k\to 1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$)

1.1. $\int\limits_0^1 xdx$ (Указание: делить отрезок [0; 1] на n равных частей и брать $\xi_k = \dfrac{k}{n}$).

1.2. $\int_0^1 x^2 dx$ (Указание: делить отрезок [0; 1] на n равных частей и брать $\xi_k = \frac{k}{n}$).

1.3 $\int_a^b e^x dx$ (Указание: делить отрезок [0; 1] на n равных частей и брать $\xi_k = \frac{k-1}{n}$).

1.4. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ (Указание: делить отрезок [0; 1] на n равных частей и брать $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}\ x_k}$).

1.5. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (Указание: делить отрезок [1;2] на *n* частей с помощью точек образующую геометрическую прогрессию и в качестве ξ_k брать левый конец отрезак $[x_{k-1}, x_k]$).

2. Используя свойства определенного интеграла, сравните интегралы:

2.1. $\int_0^1 xdx$ и $\int_0^1 x^2 dx$; 2.2. $\int_1^2 xdx$ и $\int_1^2 x^2 dx$;

2.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$; 2.4. $\int_0^1 e^x dx$ и $\int_0^1 e^{x^2} xdx$;

2.4. $\int_0^1 2^{x^2} dx$ и $\int_0^1 2^{x^3} dx$; 2.6. $\int_1^2 \ln \mathrm{xdx}$ и $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$;

2.7. $\int_3^4 \ln xdx$ *и* $\int_3^4 (\ln x)^2 dx$. 2.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$;

3. Используя свойства определенного интеграла доказать неравенства:

3.1. $\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5}$; 3.2. $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$;

3.3. $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$; 3.4. $0 < \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2} dx < 9{,}5$;

3.5. $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e^2$; 3.6. $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{x^2+2} < 1.$

4. Вычислить производную по x:

4.1 $y = \int_0^x \sin t\, dt,$ 4.2. $y = \int_x^5 \sqrt{1+t^2} dt,$ 4.3. $y = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt,$

4.4. $y = \int_2^{e^x} \frac{\sin t}{t} dt,$ 4.5. $y = \int_{x^2}^1 e^{nt}\, dt,$ 4.6. $y = \int_x^{x^2} \ln^2 t dt.$

5. Вычислить интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

5.1. $\int_2^3 x^2 dx.$ 5.2. $\int_1^{16} \sqrt{x} dx.$ 5.3. $\int_{1/3}^1 \frac{dx}{x^2}.$

5.4. $\int_1^8 (4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}) dx.$ 5.6. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx.$ 5.7. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

5.8. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx.$ 5.9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx.$ 5.10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx.$

5.11. $\int_0^{6\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+36}.$ 5.12. $\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}.$ 5.13. $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}.$

5.14. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^4-9}.$ 5.15. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} ctg 2x dx.$ 5.17. $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$

6. Вычислить определенный интеграл с помощью замены переменной:

6.1. $\int_1^4 \frac{dx}{(1+2x)^2}.$ 6.2. $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}.$ 6.3. $\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^2 \frac{dx}{\sqrt{16-3x^2}}.$

6.4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{3^x}{1+9^x} dx.$ 6.5. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx.$ 6.6. $\int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

6.7. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx.$ 6.8. $\int_0^2 \sqrt{(4-x^2)^3} dx.$ 6.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx.$

7. Вычислить интегралы интегрированием по частям:

7.1. $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

7.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$.

7.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos xdx$.

7.4. $\int_0^1 arctgxdx$.

7.5. $\int_{-1}^0 \arccos xdx$.

7.6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

7.7. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$.

7.8. $\int_{-2}^2 (1-x)\sin \pi xdx$.

7.9. $\int_0^{e-1} \ln(1+x)dx$.

7.10. $\int_1^2 x\log_2 xdx$.

8. Найти среднее значение функции на указанном сегменте:

8.1. $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, [1;4];

8.2. $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$, [1;1,5];

8.3. f(x)=$\sin^2$x, [1;π];

8.4. $f(x)=\frac{2}{e^x+1}$, [1;2].

11-ГЛАВА. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

а) Вводим обозначения:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx; \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx; \qquad (3)$$

Если пределы (1), (2), (3) существуют, то $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называют несобственными интегралами 1-го рода, а также *сходящимися*. В противном случае – *расходящимися*.

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ - называется абсолютно сходящимися, если сходится $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$. То же относительно (2) и (3).

Из определения следует, что несобственный интеграл 1-го рода является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла с переменной границей интегрирования.

б) Пример. Исследовать, для каких $\alpha>0$ сходится интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Решение.

Пусть $\alpha\neq1$ $\int_1^b\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)$. (6)

Пусть $\alpha=1$ $\int_1^b\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^b=\ln b$. (7)

Из (6), (7) вытекает:

при $\alpha > 1$ $\quad \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\frac{1}{\alpha-1}$ интеграл сходится.

при $\alpha < 1$ $\quad \lim\limits_{b\to\infty}-\int\limits_1^b \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=\infty$ интеграл расходится.

при $\alpha = 1$ $\quad \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b \lim\limits_{b\to\infty}\ln b=\infty$ интеграл расходится.

§2. Интегралы от разрывных функций

а) Определение. Пусть функция $f\left(x\right)$, заданная на $\left[a,b\right]$, в точке b имеет разрыв второго рода, равный ∞.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ как предел интегральных сумм не существует.

Но, если $\lim\limits_{\varepsilon\to c}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx$ существует, то $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ называют несобственным интегралом 2-го рода, а также *сходящимся*.

В противном случае – *расходящимся*.

Если точками разрыва являются a либо $c\left(a<c<b\right)$, то рассмотрение таково:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

б) Пример 2. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ разрыв при $x=1$ на отрезке интегрирования $\left[0,1\right]$.

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\arcsin\left(1-\varepsilon\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

.

Интеграл *существует, сходится*.

Если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

§3. Признаки сходимости несобственных интегралов

Для выяснения сходимости интегралов пользуются сравнением данного несобственного интеграла с другими несобственными интегралами, сходимость или расходимость которых известна.

Сформулируем признаки сходимости.

Теорема *1.* Пусть на $[a,+\infty)$ $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $0 \le g(x) \le f(x)$.

Тогда а) если $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^\infty g(x)dx$;

б) если $\int_a^\infty g(x)dx$ расходится, то $\int_a^\infty f(x)dx$ также расходится.

Доказательство элементарно. Мы его опустим.

Пример 3. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2dx}{\sqrt{x^7+x^4}}$. (8)

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^7+x^4}} \le \frac{x^2}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{x^{3/2}} \text{ в } 1 \le x < \infty.$$

Но $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится. Следовательно, сходится и исходный интеграл согласно теореме 1.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $\phi(x)$ в $[a,b)$ непрерывны и $0 \le g(x) \le f(x)$, а при $x=b$ имеют разрыв. Тогда:

а) При $\int_a^b f(x)dx$ сходящимся сходится и $\int_a^b g(x)dx$.

б) При $\int_a^b g(x)dx$ расходящимся расходится и $\int_a^b f(x)dx$.

Доказательство элементарно. Мы его опустим.

§4. Абсолютно сходящиеся интегралы

Покажем, что если интеграл сходится абсолютно, т.е.

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx < +\infty, \tag{9}$$

то сходится интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Действительно, $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Отсюда следует

$$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|. \tag{10}$$

А из (9) и теоремы 1 вытекает, что

$$\int_0^{\infty} \left(f(x) + |f(x)| \right) dx < +\infty. \tag{11}$$

Т.е. интеграл сходится. Далее,

$$f(x) = \left[f(x) + |f(x)| \right] - |f(x)|;$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\infty} \left[f(x) + |f(x)| \right] dx - \int_a^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{12}$$

В силу (9) и (11) правая часть (12) – число, следовательно, утверждение доказано, т.е. существует предел $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

Признаки сходимости.

а) Пример, рассмотренный в пункте 2 дает возможность сформулировать признак сходимости:

Если: $|f(x)| \le \dfrac{M}{x^{\alpha}}$ $\alpha > 1$, интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится *абсолютно*.

При $f(x) \ge \dfrac{M}{x}$ (x - достаточно велико), интеграл расходится.

б) Аналогичный признак можно сформулировать для разрывной функции (см. пример из пункта 3).

Пусть $f(x)$ неограничен в точке b. Тогда в интервале $(b-\varepsilon, b)$, $\varepsilon_0 \forall$, если $\exists \alpha < 1$, что $|f(x)| \le \dfrac{M}{(b-x)^{\alpha}}$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно; при $f(x) \ge \dfrac{M}{b-x}$, $M > 0$ - расходится.

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. 1.2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$. 1.3. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$. 1.4. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1.5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. 1.6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. 1.7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$ 1.8. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

1.9. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx$. 1.10. $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx$.

2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

2.1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$. 2.2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 2.3. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 2.4. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.5. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$. 2.6. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. 2.7. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$. 2.8. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

2.9. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 2.10. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$. 2.11. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$. 2.12. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

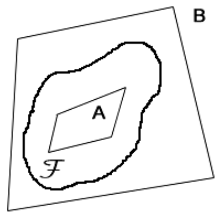
3. Используя теоремы сравнения исследовать на сходимость интегралы:

3.1. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 3.2. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

3.3. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$. 3.4. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^5)^2}}$.

12-ГЛАВА. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§1. Определение площади плоской фигуры. Квадрируемость



Прежде чем вычислять площадь фигуры, дадим ее определение. Исходными положениями будут являться наши представления о площадях четырехугольников и треугольников, известные нам из курса элементарной математики. Поэтому, считаем известным способ вычисления площадей многоугольников, лежащих на плоскости, так как они состоят из треугольников и четырехугольников. [11, 19, 22]

Определение. Пусть задана плоская фигура Γ. Будем рассматривать все возможные многоугольники, вписанные в эту фигуру. Площадь любого из них обозначим через A. Будем также рассматривать всевозможные многоугольники, описывающие данную фигуру, а площадь любого из них обозначим через B.

Точную верхнюю границу множества площадей многоугольников, вписанных в фигуру, обозначим:

$$\sup A = P_* \qquad (1)$$

и назовем ее *внутренней площадью фигуры*.

Обозначим точную нижнюю границу множества площадей многоугольников, описывающих фигуру, через

$$\inf B = P^* \qquad (2)$$

и назовем ее *внешней площадью данной фигуры*.

Заметим, что внутренняя и внешняя площади всегда существуют, так как множество площадей вписанных многоугольников – ограничено сверху (хотя бы площадью любого описанного многоугольника), а описанных – ограничено снизу площадью любого вписанного многоугольника.

Определение. Если

$$P_* = P^* = P, \qquad (3)$$

то будем говорить, что фигура имеет площадь, равную P. Такая фигура называется *квадрируемой*.

Существуют необходимые и достаточные условия квадрируемости. Они формулируются так:

Теорема. Для того чтобы фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы по $\forall \varepsilon > 0$ можно было указать такие вписанные и описанные многоугольники, чтобы их площади A и B, удовлетворяли соотношению $B - A < \varepsilon$.

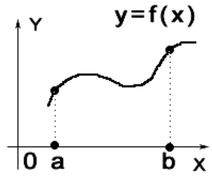
Доказательство. *Необходимость*. Так как $P_* = P^* = P$, согласно определению точной верхней P_* и нижней P^* граней при заданном $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B$ и A, что $B - A < P^* + \varepsilon - (P_* - \varepsilon) = 2\varepsilon$.

Достаточность. Предполагаем $B - A < \varepsilon$. Тогда $P^* - P_* \le B - A < \varepsilon \Rightarrow P_* = P^* = P$. Δ.

Сущность этой теоремы состоит в том, что «площадь кривой», ограничивающей фигуру, должна равняться нулю.

§2. Вычисление площади фигуры при помощи определенного интеграла

Нами было выяснено, что с геометрической точки зрения определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции.



$$\int_a^b f(x)dx = S .$$

Площадь более сложной фигуры, чем криволинейная трапеция, вычисляют при помощи разбиения такой фигуры на криволинейные трапеции. При этом надо иметь в виду, что криволинейная трапеция, находящаяся под осью OX, дает интеграл с отрицательным знаком, так как функция имеет отрицательный знак. Поэтому при вычислении площади такой криволинейной трапеции, интеграл следует брать по модулю.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

$$x^2 = \sqrt{x},\ x^4 = x,\ x(x^3 - 1) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

§3. Формула вычисления площади фигуры при параметрическом задании кривой

Пусть кривая задана параметрически. Это значит, что: $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, причем если $\alpha \le t \le \beta$, то $a \le x \le b$. Следовательно $P=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$.

Пример. Найти P - круга, если

$x=R\cos t$;

$y=R\sin t$; $0\le t\le 2\pi$.

Решение.

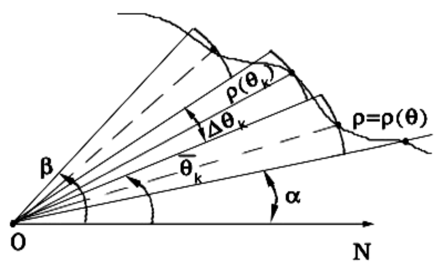
$$P=\left|\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt\right|=\left|-R^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 tdt\right|=\left|-\frac{R^2}{2}\int\limits_6^{2\pi}(1-\cos 2t)dt\right|=\left|-\frac{R^2}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right|=$$

$$=\left|-\frac{R^2}{2}(2\pi-0)\right|==\left|-\pi R^2\right|=\pi R^2.$$

Замечание. Знак «-» при интегрировании получается в связи с тем, что при $0\le t\le 2\pi$, x меняется от R до 0.

§4. Площадь фигуры в полярной системе координат

За основу вычисления площади фигуры в полярной системе координат принимают площадь криволинейного сектора. Для вычисления площади криволинейного сектора раствор угла делят на n частей и проводят лучи, получают элементарные секторы.



В k-ом элементарном секторе выбирают произвольно угол $\overline{\theta}_k$ и проводят луч под этим углом до пересечения с кривой. Получают радиус-вектор $\rho\left(\overline{\theta}_k\right)$. Этим радиус-вектором проводят дугу окружности до пересечения с соседними лучами. Получают элементарный круговой сектор, площадь которого равна $\frac{1}{2}\rho^2\left(\overline{\theta}_k\right)\Delta\theta_k$.

Вся площадь криволинейного сектора приближенно равна сумме площадей элементарных круговых секторов.

$$P\approx\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\rho^2\left(\overline{\theta}_k\right)\Delta\theta_k \quad . \qquad (1)$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta\theta_k \to 0$, так как соотношение (1) – интегральная сумма, получим

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta)\,d\theta . \qquad (2)$$

Пример. Найти площадь P круга.

Выведем уравнение окружности. Для этого введем такую систему координат: полярная ось совпадает с OX, полюс – с началом координат. Тогда $\frac{\rho}{2R} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, отсюда $\rho = 2R\sin\theta$.

Воспользуемся формулой (2)

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2 \sin^2\theta d\theta = \frac{4R^2}{2\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta = R^2\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Таким образом $P = \pi R^2$.

§5. Вычисление объёмов тел

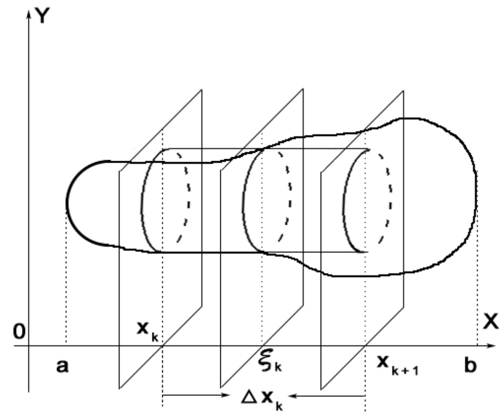
Понятие объёма тела вводится аналогично площади плоской фигуры.

5.1. Вычисление объема тела в декартовой системе координат

Рассмотрим в декартовой системе координат некоторое кубируемое тело.

Пусть концевые точки тела имеют абсциссы a и b. Произведем разбиение отрезка $[a,b]$ точками:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.



Через каждую точку деления проведем плоскость, перпендикулярную оси OX. На отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ $\left(k = 0, \overline{n-1}\right)$, выберем произвольную точку ε_k и проведем через нее плоскость, перпендикулярную оси OX. Эта плоскость пересечет тело. Получим в сечении некоторую фигуру, которую спроектируем на соседние плоскости, проходящие через точки x_k, x_{k+1}. Эти проекции, совместно с отрезками проектирующих лучей образуют прямой цилиндр.

При $k=0,1,2,\ldots,n-1$ получаем n цилиндров, приближенно представляющих тело. Обозначим площадь сечения через $Q(\varepsilon_k)$. Вычислим объем ΔV_k цилиндра. Известно, что

$$\Delta V_k = Q(\varepsilon_k)\Delta x_k . \qquad (1)$$

Суммируя все такие объемы, получим, что объем тела

$$V \approx \sum_{k=0}^{n-1} Q(\varepsilon_k)\Delta x_k . \qquad (2)$$

Если функция Q непрерывна, то при $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$ соотношение (2) дает точное значение объема в виде интеграла, – предела интегральной суммы, –

$$\int_a^b Q(x)dx . \qquad (3)$$

Этот интеграл существует, так как функция $Q(x)$ по предположению, непрерывна.

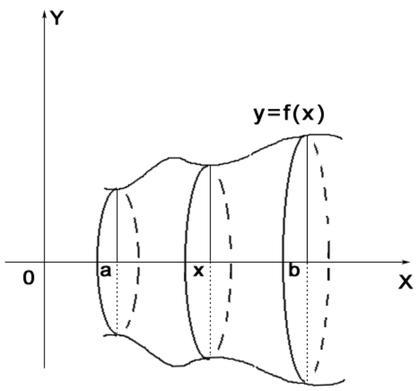
5.2. Объем тела вращения

При помощи формулы (3) выводится формула вычисления объема тела вращения.

Пусть дана криволинейная трапеция в декартовой системе координат.

Задача. Найти объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции вокруг оси OX.

Для этого необходимо найти функцию $Q(x)$. В точке x ордината $f(x)$ является радиусом вращения точки кривой вокруг оси OX. Следовательно, сечение в точке x - это круг, площадь которого равен:

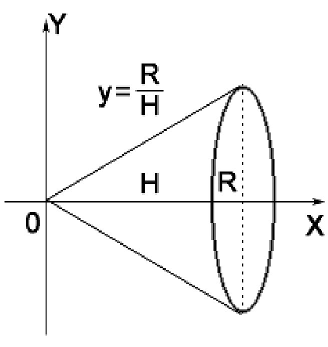


$$Q(x) = \pi f^2(x) . \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx . \qquad (5)$$

Пример. Найти объем конуса, высота которого H, радиус основания R.



Для решения выберем систему координат как указано на рисунке. Запишем уравнение образующей. Оно имеет вид: $y = \frac{R}{H} x$.

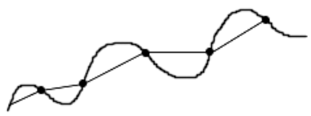
Тогда объем конуса вычисляется так:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^H = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

§6. Длина кривой

Определение длины кривой. Спрямляемость.

При определении длины кривой считают, что метод определения длины отрезка известен.

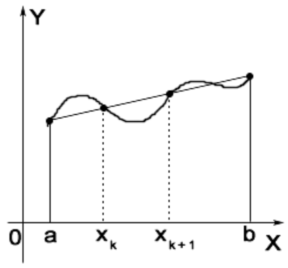


Пусть задана кривая, впишем в эту кривую ломаную линию. Обозначим длину ломаной через P_n.

Пусть $\lim\limits_{\ell \to 0} P_n = P$, где $\ell = \max$ длина звена ломанной. Этот предел и называется *длиной кривой*.

Если кривая имеет длину, то ее называют с*прямляемой*.

6.1. Вычисление длины кривой. Вывод формул



Доказательство будем проводить, опираясь на определение длины кривой.

Пусть кривая $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и через соответствующие точки на кривой проведем ломанную.

Длина отрезка ломанной $\ell_k \left(k = \overline{0, n-1}\right)$, вычисляется по известной из аналитической геометрии, формуле:

$$\ell_k = \sqrt{\left(x_{k+1} - x_k\right)^2 + \left(f\left(x_{k+1}\right) - f\left(x_k\right)\right)^2}.$$

Ко второму слагаемому применим формулу Лагранжа:

$$f\left(x_{k+1}\right) - f\left(x_k\right) = f'(\varepsilon_k)\left(x_{k+1} - x_k\right).$$

Имея в виду, что $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$, получим, что $\ell_k = \sqrt{1 + \left[f'(\varepsilon_k)\right]^2} \Delta x_k$. Тогда

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ell_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left[f'(\varepsilon_k) \right]^2} \Delta x_k . \qquad (2)$$

Устремляя $\lambda = \max \ell_k \to 0$ и, переходя к пределу в соотношении (2), получим точное значение длины кривой. В пределе (2) дает интеграл, так как (2) есть интегральная сумма.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx . \qquad (3)$$

Формула (3) можно записать, если функция задана параметрически, а также и в полярной системе координат.

а) параметрическое задание кривой.

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\}, \quad y'_x = \psi'_x(t) = \frac{\psi'_t(t)}{\phi'_t(t)} .$$

Имея в виду, что $dx = d\phi(t) = \phi'(t) dt$ и если $a \le x \le b$, то $\alpha \le t \le \beta$, и соотношение (3) можно записать так

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{\psi'^2(t)}{\phi'^2(t)}} \phi'(t) dt \quad \text{или}$$

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} \cdot dt ; \qquad (4)$$

б) кривая задана в полярной системе координат.

Для того, чтобы получить формулу вычисления длины кривой в полярной системе координат, следует воспользоваться формулами перехода из полярной в декартовую систему координат.

$$\left. \begin{aligned} x &= \phi(t) = \rho \cos t \\ y &= \psi(t) = \rho \sin t \end{aligned} \right\} \qquad (5)$$

Подставляя соотношения (5) в (4), получаем длину кривой в полярной системе координат. Неотложные выкладки приводят к формуле $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \cdot dt$.

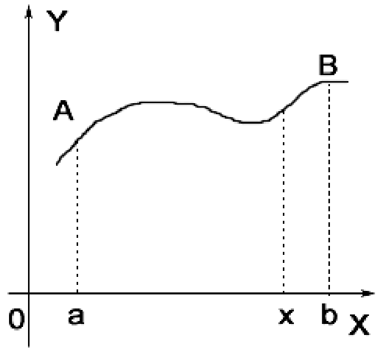
6.2. Дифференциал дуги

1) Определение дифференциала дуги.

Пусть задана кривая $y = f(x)$. Будем рассматривать дугу этой кривой, у которой начальная точка фиксирована, а конечная - переменная.

Тогда длина дуги на $[a, x]$ может быть записана так

$$S = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx, \qquad (1)$$



S - переменная величина, зависящая от x. Найдем дифференциал этой переменной величины. Так как длина дуги выражается интегралом с переменным верхним пределом, то

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx. \qquad (2)$$

Соотношение (2) называется *дифференциалом дуги*.

Выражение через дифференциалы переменных. Геометрическая сущность.

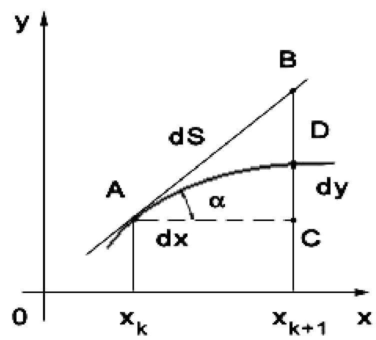
Дифференциал дуги может быть выражен в другой форме:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

или

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}; \qquad (3)$$

Из соотношения (3) легко выяснить геометрическую сущность дифференциала дуги:



$AC = \Delta x = dx$; $CD = \Delta y$;

$BC = dy$;

$AB = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dS$;

dy - есть приращение ординаты касательной;

dS - есть гипотенуза треугольника, катетами которого служат dx, dy.

Из треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{dy}{dS}, \ \cos\alpha = \frac{dx}{dS}.$$

α - угол между касательной в заданной точке и OX. Его называют также углом наклона кривой в данной точке x.

3) Дифференциал дуги в других системах координат.

Формула (3) позволяет представить дифференциал дуги в том случае, когда кривая задана параметрический или в полярной системе координат.

а) Пусть

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3), получим

$$dS = \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} \cdot dt \quad (5).$$

б) Пусть кривая задана в *полярной* системе координат, т.е.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos t \\ y &= \rho \sin t \end{aligned}\right\} \rho = \rho(t). \quad (6)$$

При помощи уравнений (6), которые дают задание кривой уже в параметрическом виде, из (5) либо (3) получим дифференциал дуги при задании кривой в полярной системе координат:

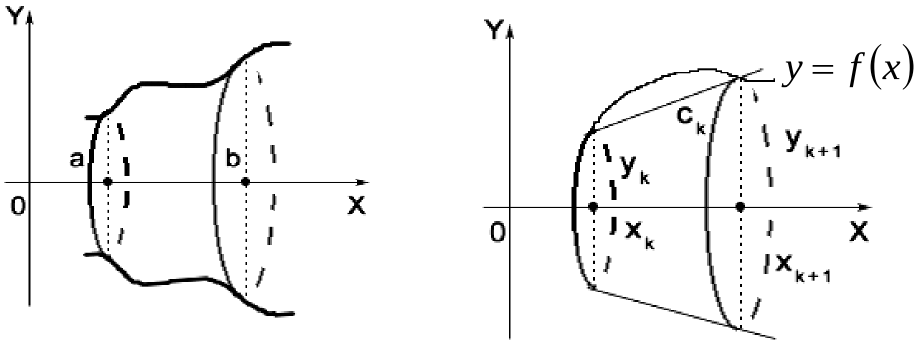
$$dS = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} \cdot dt.$$

§7. Площадь поверхности тела вращения

Разместим кривую так, чтобы ось вращения совпала с осью OX, а ось OY находилась в плоскости оси вращения и кривой. Пусть $f(x) \geq 0$.

7.1. Боковая поверхность усеченного конуса.

Для решения задачи, рассмотрим усеченный конус. Примем за известную формулу вычисления площади боковой поверхности усеченного конуса.



$$\omega_k = \frac{2\pi y_k + 2\pi y_{k+1}}{2} \cdot C_k = 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \cdot C_k.$$

Будем считать, что C_k есть некоторая хорда кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$; функция $f(x)$ - непрерывна.

Тогда согласно свойству непрерывной функции между x_k, x_{k+1} найдется точка ξ_k $\left(x_k \le \xi_k \le x_{k+1}\right)$ такая, что

$y\left(\xi_k\right) = \dfrac{y_k + y_{k+1}}{2}$, так как $y_k \le \dfrac{y_k + y_{k+1}}{2} \le y_{k+1}$ $\left(y_k \le y_{k+1}\right)$

(согласно теореме о промежуточном значении непрерывной функции).

В связи с этим

$$\omega_k = 2\pi \cdot y\left(\xi_k\right) \cdot C_k \ . \qquad (1)$$

Так как C_k может опять быть вычислена как длина отрезка, то

$$\omega_k = 2\pi \cdot y\left(\xi_k\right) \cdot \sqrt{\left(x_{k+1} - x_k\right)^2 + \left(y_{k+1} - y_k\right)^2} \ .$$

К выражению $y_{k+1} - y_k$ применим формулу Лагранжа:

$$y_{k+1} - y_k = y'\left(\xi'_k\right)\Delta x_k \ . \qquad (2)$$

Подставим в ω_k:

$$\omega_k = 2\pi \cdot y\left(\xi_k\right) \cdot \sqrt{1 + y'^2\left(\xi'_k\right)} \cdot \Delta x_k . \qquad (3)$$

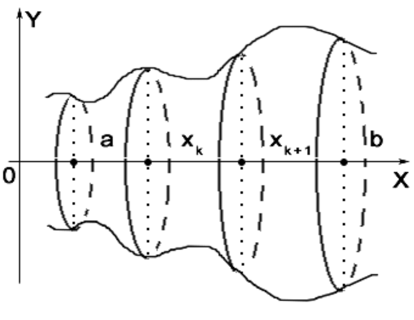
Соотношение (3) дает значение площади боковой поверхности усеченного конуса.

7.2. Вычисление площади поверхности при помощи поверхности вращения ломанной.

Дальнейшие рассуждения проводим так:

Разобьем отрезок $\left[a, b\right]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и в соответствующих точках кривой вписываем ломанную линию.

При вращении ломанная опишет поверхность, которая будет состоять из суммы боковых поверхностей усеченных конусов. Площадь боковой поверхности тела вращения ломанной будет равна



$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi y\left(\xi_k\right)\sqrt{1 + y'^2\left(\xi'_k\right)}\Delta x_k . \qquad (5)$$

Обозначим через $\lambda = \max\limits_k \Delta x_k$. Переходя к пределу в соотношении (5) при $\lambda \to 0$, получим, что

$$W = 2\pi \int_a^b y\left(x\right)\sqrt{1 + y'^2\left(x\right)}dx . \qquad (6)$$

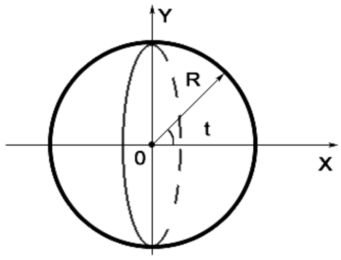
Так как $\sqrt{1 + y'^2\left(x\right)}dx = dS$, то формулу (6) можно записать так:

$$W = 2\pi \int_a^b y(x)dS \quad . \qquad (7)$$

Если интеграл (7) существует, то будем говорить, что площадь поверхности тела вращения существует и определяется при помощи формулы (7).

Пример. Найти поверхность сферы.

Для решения задачи достаточно отыскать значение площади полусферы, получаемой вращением четверти круга вокруг оси OX .



Будем рассматривать случай параметрического задания окружности.

$x = R\cos t,$

$y = R\sin t.$

$$W = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\sqrt{R^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}dt =$$

$$= 4\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = -4\pi R^2 \cos t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2.$$

[22, 23, 24, Т.2.]

§8. Центр тяжести. Теоремы Гульдина

8.1. Механические приложения определенного интеграла

Координаты центра тяжести системы материальных точек.

Задача определения координат центра тяжести плоских фигур решается, опираясь на задачу определения центра тяжести системы материальных точек, координаты которых известны.

Пусть задана система материальных точек, т.е. система масс

m_k , $k = \overline{1,n}$, и $M_k\left(-\bar{x}_k, y_k\right)$ - точки их расположения.

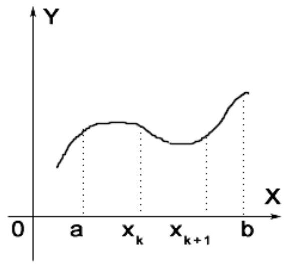
Тогда, как известно, абсцисса и ордината центра тяжести будут равны соответственно:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=1}^{\bar{n}} m_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}; \qquad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{x=1}^{\bar{n}} m_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \tag{2}$$

8.2. Центр тяжести материальной кривой

Пусть на плоскости задан некоторый отрезок материальной кривой. Разобьем отрезок точками на элементарные отрезки. На $[a,b]$, получим соответствующую систему точек:



$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Длину элементарного отрезка кривой обозначим:

$\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$.

Будем считать, что плотность масс вдоль кривой задается функцией $\rho(x)$.

Выберем произвольную точку ξ_k на элементарном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Масса m_k - ого элементарного отрезка материальной кривой выражается приближенно $m_k \approx \rho(\xi_k)\Delta s_k$.

Значение m_k подставим в формулы (1) и (2)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) x_k \cdot \Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \cdot \Delta s_k}; \tag{3}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) y_k \cdot \Delta s_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \cdot \Delta s_k}. \tag{4}$$

Пусть $\lambda = \max \Delta s_k$. Ввиду того, что (3), (4) есть интегральные суммы, то, переходя к пределу при $\lambda \to 0$ в соотношениях (3), (4), получим:

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\rho(x)ds}{\int_a^b \rho(x)ds}. \tag{5}$$

Если плотность постоянна - $\rho = const$, то (5) будет (ρ - сокращается):

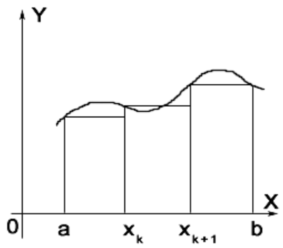
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y\rho(x)ds}{\int_a^b \rho(x)ds}. \quad (6)$$

8.3. Определение центра тяжести некоторой материальной плоской фигуры

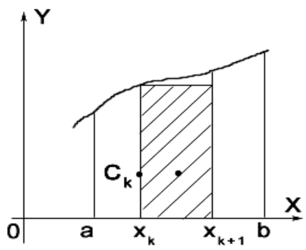
Разобьем отрезок $[a,b]$ точками

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Впишем при помощи этих точек в криволинейную трапецию ступенчатую фигуру. Рассмотрим прямоугольный четырехугольник, опирающийся на отрезок $[x_k, x_{k+1}]$, а высота его - $\bar{y}_k$. Будем считать, что центр тяжести этого прямоугольника имеет координаты:



$C_k\left(x_k, \frac{1}{2}y_k\right)$, хотя фактически он имеет координаты $\left(x_k + \frac{\Delta x}{2},\ \frac{1}{2}y_k\right)$. Отбрасывание $\frac{\Delta x_k}{2}$ не повлияет на результат, так как в дальнейших выкладках $\frac{\Delta x_k}{2}$ дает бесконечно малую второго порядка.



Масса k - ого четырехугольника равна $m_k = \rho y_k \cdot \Delta x_k$. Тогда, согласно формулам (1) и (2) можно заметить, что

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho x_k y_k \cdot \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho y_k \cdot \Delta x_k}; \quad (7)$$

$$\overline{y} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} y_k y_k \rho \cdot \Delta x_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho y_k \cdot \Delta x_k}. \qquad (8)$$

Вынесем за знак суммы и сократим; затем перейдем в этих соотношениях к пределу при $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max_k \Delta x_k$), получим:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}; \qquad (9)$$

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b y^2dx}{2\int_a^b ydx}. \qquad (10)$$

8.4. Теорема Гульдина

Теорема 1. Площадь поверхности вращения некоторой кривой вокруг оси, находящейся в плоскости кривой и не пересекающей ее, равна длине кривой, умноженной на длину окружности, которую описывает центр тяжести кривой при вращении.

Доказательство.

Будем предполагать, что ось вращения совпадает с осью OX. Это не меняет общности рассуждений. Тогда доказательство теоремы 1 вытекает из формулы (6):

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b yds}{\int_a^b ds}.$$

Умножим левую и правую части равенства (6) на 2π: $2\pi\overline{y} \cdot \int_a^b ds = 2\pi\int_a^b yds$.

Последнее совпадает с формулировкой теоремы. Δ.

Теорема 2. Объем тела вращения фигуры вокруг оси, не пересекающей эту фигуру и лежащей с ней в одной плоскости, равен площади этой фигуры, умноженной на длину окружности, которую описывает центр тяжести фигуры при вращении.

Доказательство.

Не меняя общности рассуждений, будем предполагать, что ось вращения совпадает с осью OX . Тогда доказательство теоремы вытекает из формулы (10):

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b ydx}.$$

Умножая равенство на 2π , получим: $2\pi\overline{y}\cdot\int_a^b ydx = \pi\int_a^b y^2 dx$.

Это соотношение совпадает с формулировкой теоремы, так как правая часть соотношения есть объем тела вращения, а левая часть есть произведение длины окружности, которую описывает центр тяжести фигуры при вращении, на площадь фигуры. Δ .

Упражнения и задачи для самостоятельной работы

1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функции и прямыми:

1.1. $y=x^2$, $y=0$, $x=-1$ и $x=4$; 1.2. $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$ и $y=0$;

1.3. $y=6x-x^2$, $x=-1$, $x=3$; 1.4. $y=x^2-4x+3$, $y=0$, $x=0$ и $x=4$;

1.5. $y=2x$, $y=5x$, $x=2$ и $x=6$; 1.6. $y=\frac{3}{x}$, $x+y-4=0$;

1.7. $y=3x-x^2$, $5x-y-8=0$; 1.8. $y^2=16x$, $y=x$

1.9. $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$; 1.10. $x=y^2(y-1)$, $x=0$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функции:

2.1. $y=8x-x^2$ и $y=x^2+18x-12$; 2.2. $y=2+4x-x^2$ и $y=x^2-2x+2$;

2.3. $y=x^2-1$ и $y=-x^2+1$; 2.4. $y=x^2$ и $y=x^{1/3}$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2+y^2=16$ и прямой va $x+y-4=0$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2+y^2=8$ и параболой $y^2=2x$.

5. Найти площадь фигуры ограниченной эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t\text{-}\sin t)$, $y=a(1\text{-}\cos t)$ и осью абсцисс.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x=2a\cos t\text{-}a\sin 2t$, $y=2a\sin t\text{-}a\sin 2t$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\sin 2\varphi$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho^2 = a(1+\cos\varphi)$.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho = 2a(2+\cos\varphi)$.

13. Найти длину дуги кривой $y^2=x^3$ от точки $A(0:0)$ до точки $B(5,\ 5\sqrt{5}$).

14. Найти длину дуги кривой $y=ln\sin x$, (от $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{\pi}{2}$).

15. Найти длину дуги цепной линии $y = ch\frac{x}{a}$ (от x=0 до x=b).

16. Найти длину дуги параболы $y^2=2px$ от вершины до точки $M(x,y)$.

17. Найти длину окружности $x^2+y^2=R^2$.

18. Найти длину астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

19 Найти длину дуги кривой y=lnx от точки $(\sqrt{3};\ln\sqrt{3})$ до точки ($\sqrt{8};\ln\sqrt{8}$).

20. Найти длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

21. Найти длину одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

22. Найти длину дуги гиперболической спирали $\rho\varphi = 1$ (от $\varphi = \frac{3}{4}$ до $\varphi = \frac{4}{3}$).

23. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

24. Найти длину окружности $\rho = 5\sin\varphi$.

25. Трапеция ограниченная прямыми $y=x/2$, x=4, x=6, y=0 вращается вокруг оси Ох. Найти объем тела, которое при этом получается.

26. Фигура ограниченная параболой $y=\frac{x^2}{4}$ и прямыми y=1, y=5 вращается вокруг оси ординат. Найти объем тела, которое при этом получается.

27. Фигура ограниченная параболой y^2=4x и прямой x=4 вращается вокруг оси ординат. Найти объем тела, которое при этом получается.

28. Криволинейная трапеция ограниченная параболой $y=x^2-4$ и осью абсцисс вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела, которое при этом получается.

29. Фигура ограниченная гиперболой $x^2-y^2=4$ и прямыми y=-2, y=2 вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела, которое при этом получается.

30. Фигура ограниченная параболой $y=2x-x^2$ и осью абсцисс вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела, которое при этом получается.

31. Фигура ограниченная окружностью $x^2+y^2=18$ и параболой $y=\frac{x^2}{3}$ вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела, которое при этом получается..

32. Окружность $x^2+(y-b)^2=r^2$ ($b>r$) вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

33. Фигура ограниченная параболами $y=3-x^2$ и $y=x^2+1$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

34. Астроида $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

35. Эллипс $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

36. Фигура ограниченная одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью абсцисс вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

37. Астроида $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

38. Криволинейная трапеция ограниченная кубической параболой $y=x^3$ и прямыми x=0 и $x=\frac{1}{2}$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объем тела вращения.

39. Отрезок прямой y=3x от точки с абсциссой x=1 до точки с абсциссой x=3 вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь поверхности вращения.

40. Дуга параболы y^2=2x от точки с абсциссой x=0 до точки с абсциссой x=2 вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь поверхности вращения.

41. Дуга косинусоиды y=cos$x$ от точки с x=-$\frac{\pi}{2}$ и до точки с x=$\frac{\pi}{2}$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь поверхности вращения.

42. Окружность x=$r$cos$t$, y=$r$sin$t$ вращается вокруг диаметра. Найти площадь поверхности сферы.

43. Астроида x=$a$cos^3t, y=$a$sin^3t вращается вокруг оис абсцисс. Найти площадь поверхности вращения.

44. Одна арка циклоиды x=a(t-sin$t$), y=a(1-cos$t$) вращается вокруг оис абсцисс. Найти площадь поверхности вращения.

45. Окружность x^2+(y-b)^2=r^2 (b>r) вращается вокруг оси абсцисс. Найти площадь поверхности вращения.

46. Кардиоида $\rho = a(1+\cos\varphi)$ вращается вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности вращения.

47. Окружность $\rho = 2\sin\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности вращения.

48. Лемниската Бернулли $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности вращения.

49. Найти статический момент полу эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (y \geq 0)$ относительно оси Оx.

50. Найти цент тяжести полукруга $x^2 + y^2 = r^2 \quad (y \geq 0)$.

51. Найти центр тяжести части астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, заключенной в первой четверти.

52. Найти центр тяжести дуги цепной линии $y = ch\frac{x}{a}$, заключенной очками с абсциссами x_1=-a и x_2=a.

53. Найти центр тяжести дуги циклоиды x=a(t-sin$t$), y=a (1-cos$t$) (от t=0 до t=2π).

54. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. С помощью теоремы Гульдина найти а) объем тела вращения; б) найти площадь поверхности вращения.

55. Фигура ограниченная первой аркой циклоиды *x=a(t-sint), y=a(1-cost)* и осью абсцисс вращается вокруг оси ординат. С помощью теоремы

Гульдина найти а) объем тела вращения; б) найти площадь поверхности вращения. [21, 24]

Дополнительные материалы

1. Простейшие преобразования графиков функций

1.1. Параллельный перенос, или сдвиг.

Пусть имеем график функции y=f(x).

Задача. Построить график функции y=f(x–a), a>0.

Для любой точки $M_0(x_0,y_0)$ графика y=f(x–a) точка $M_1(x_0–a, y_0)$ (точка $M_0(x_0,y_0)$, смещенная на "a" единиц влево), принадлежит графику y = f(x).

Если точка $M_2(x_2,y_2)$ принадлежала графику y=f(x), то точка $M_3(x_2+a,y_2)$, являющаяся точкой $M_2(x_2,y_2)$, смещенной на "a" единиц вправо, принадлежит графику y=f(x–a). Это означает, что график функции y=f(x–a) получается из графика y=f(x) смещением на "a" единиц вправо.

Очевидно, что при отрицательном "a" смещение – влево на $|a|$ единиц.

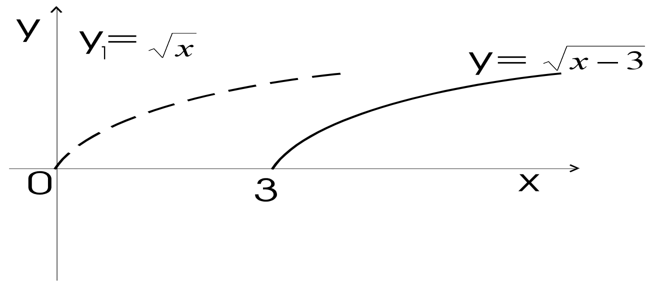
Замечание. Тот же результат можно получить, если смещать ось Oy на

"a" единиц влево (a – положительно),

"a" единиц вправо (a – отрицательно).

Пример. Построить график y = $\sqrt{x-3}$.

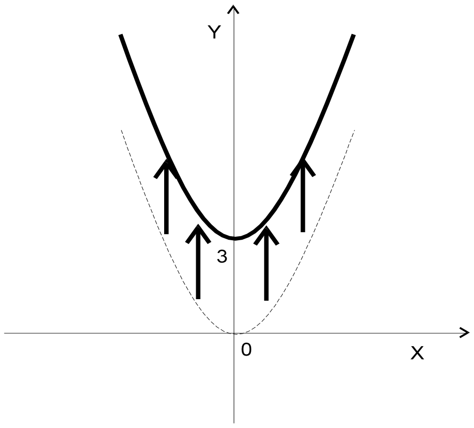
Исходным графиком является график функции y_1=$\sqrt{x}$. График, который требуется построить, получится при сдвиге исходного графика y_1 на 3 единицы вправо.



Пусть имеем функцию y = f(x), требуется построить график y = f(x)+b. Если b положительно, то сдвиг происходит на b единиц вверх. Если b отрицательно, то сдвиг на $|b|$ единиц вниз.

Упражнение. Доказать последнее утверждение.

Пример. Построить график функции y = x^2 + 3. Исходным возьмем график функции $y_1 = x^2$ и сдвинем его на 3 единицы вверх.



Если функция F(x,y)=0 задана неявно и произведено одновременно два сдвига на "a" единиц вдоль оси 0x и на "b" единиц вдоль оси Oy, то уравнение изменяется следующим образом:

F(x,y) = 0 → F (x–a, y–b) = 0 (*Упражнение*).

1.2. Деформация (растяжение, сжатие вдоль осей)

График функции y=*k*f(x) получается из графика y=f(x) растяжением от оси Ox (вдоль оси Oy) в "*k*" раз.

Уточним, что значит растяжение в "*k*" раз для произвольного "*k*":

$k > 1$ – растяжение в k раз;

$k = 1$ – без изменения;

$0 < k < 1$ – сжатие в "*k*" раз;

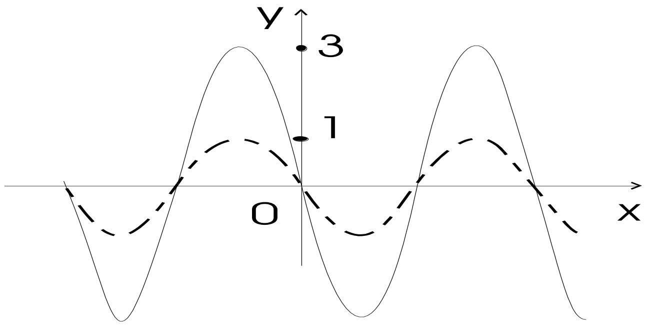
$-1 < k < 0$ – растяжение в "$1/|k|$" раз (т.е. сжатие в "*k*" раз) и отражение относительно оси 0x.

$k = -1$ - отражение относительно оси Ox;

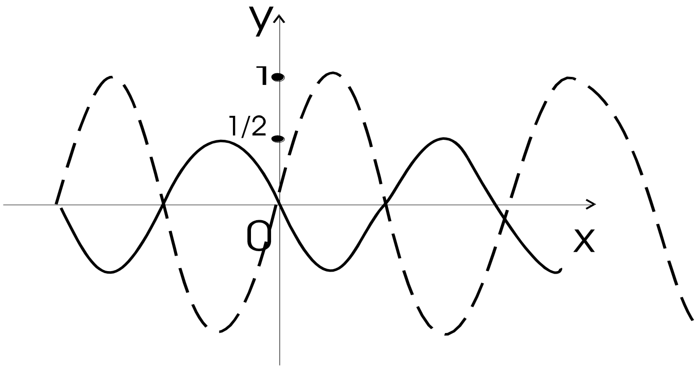
$k < -1$ - растяжение в "$|k|$" раз от оси Ox и отражение относительно оси Ox.

Примеры.

1. Построить график функции y = 3f(x), если известен график y = f(x)



2. Построить график функции $y=-\frac{1}{2}f(x)$ для исходного графика y =



f(x).

График функции y=f(wx) получается из графика y=f(x) сжатием к оси Oy в "w" раз:

w > 1 – сжатие в "w" раз;

w = 1 – без изменения;

0<w<1 – растяжение в "1/w" раз;

–1<w<0 – растяжение в "1/│w│" раз и отражение относительно оси Oy;

w=–1 – отражение относительно оси Oy;

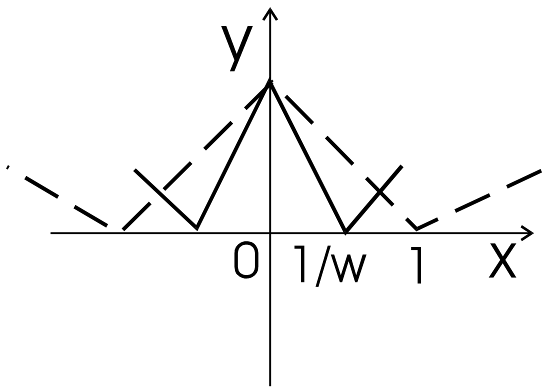
w<–1 – сжатие в │w│ раз и отражение относительно оси Oy.

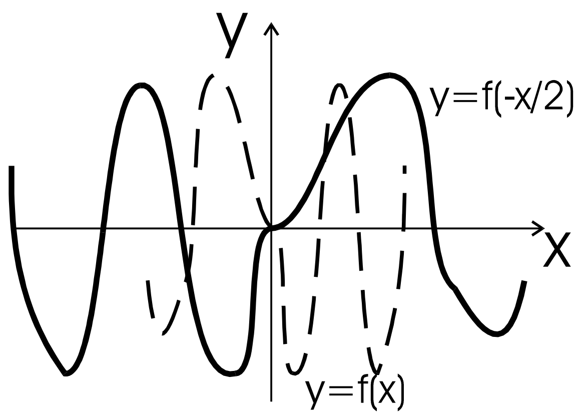
Пример. Построить графики функций:

1) y = f(2x);

2) y = f(–x/2),

если дан график функции y=f(x)





Упражнение. Рассмотрите самостоятельно, сформулировать и доказать правила построения графиков

y = f(–x);

y = –f(x);

$y = f(wx+w_0)$;

y = Af(x)+B;

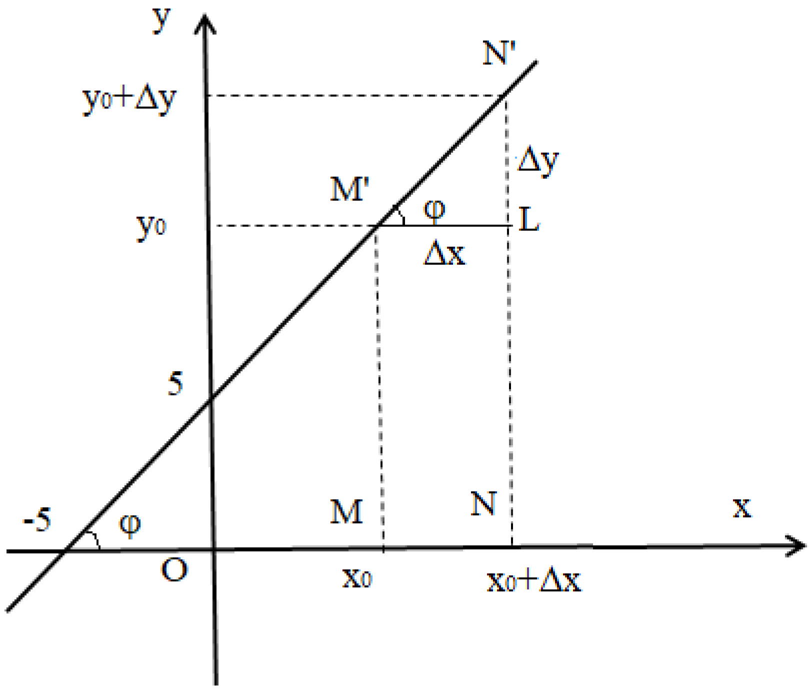
y = Af(wx+w$_0$)+B,

если известен исходный график функции y = f(x).

Это частные случаи деформаций, и комбинаций простейших преобразований графиков, имеющие важные приложения.

Рассмотрим еще один случай переноса и преобразования графика функции по оси абсцисс и оси ординат.

Пусть хорошо нам известная функция $y = x$ перенесена по оси абсцисс на пять единиц влево, если мы рассматриваем график как $y = (x+5)$ или на пять единиц вверх по оси ординат, если – $y = x+5$, т.е. функция имеет вид $y = x+5$, в в данном случае её график имеет вид:



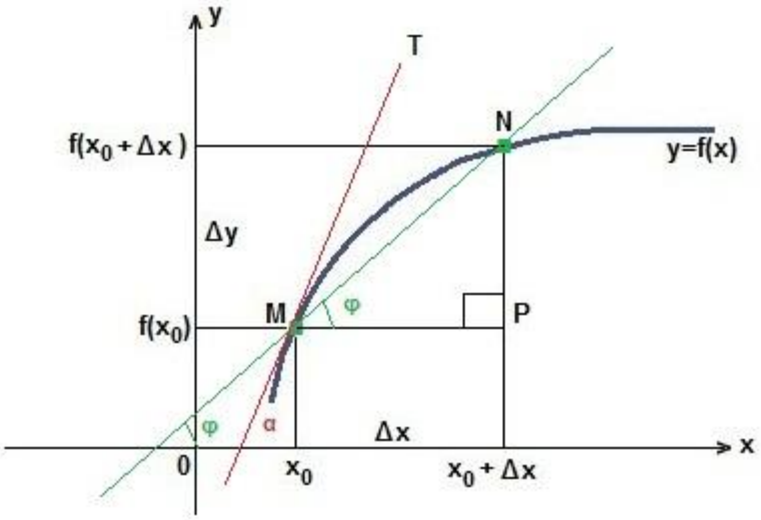
Выберем на чертеже точку с абсциссой $M(x_0,0)$и рассмотрим какую-нибудь следующую точку $N(x_0+\Delta x,0)$, тогда на графике функции (прямой) мы соответственно получим точки $M'(x_0,y_0)$ и $N'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Исходный чертеж, совершив несколько построений (проведем отрезок $M'L$) преобразуем к виду:

Какие изменения на чертеже можно заметить теперь? Во-первых, по построению образовался прямоугольный треугольник $M'LN'$, катеты которого соответственно равны величинам Δx и Δy. Во-вторых, все прямоугольные треугольники, рассматриваемого чертежа подобны и отношения катетов равно $tg\varphi$, ($\frac{LN'}{M'L} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$). И, в-третьих, $tg\varphi = 1$.

Упражнение.

Чему равна **величина** угла в прямоугольном треугольнике $M'LN'$, если гипотенуза его лежит на прямой, задаваемой уравнением $y = kx + b$. [4, 5, 11,13, 14]

Обратите внимание на следующий чертеж. Как бы Вы назвали прямую MT? Результатом каких перемещений возникает эта прямая? Если устремить точку N по графику функции $y = f(x)$ к точке M, то какие положения займет прямая (секущая) MN? Что же происходит с Δx при $N \to M$?



Верно ли утверждение «Форма определяет содержание» или, создавая формулу некоторого явления мы, как это делали Галилей, Декарт, Гюйгенс и Ньютон, подытоживаем физическое явление?

«… познание, посредством которого я усматриваю, что такое ничто, или мгновение, или покой, не менее истинно, чем то, посредством которого я разумею, что такое существование, или длительность, или движение. И данный способ понимания будет содействовать тому, чтобы мы в последствии получали возможность сказать, что все остальные вещи, которые мы познаем из простых природ: так, если я вынесу суждение о том, что какая-либо фигура не находится в движении, я скажу, что моя мысль является некоторым образом составленных из фигур и покоя… » [цитируется по 11, с 164, (Лейбниц, с.119-120)]. Прочитав этот отрывок из «Правила для руководства ума» великого мыслителя, вынесете суждение о покое или движении мысли возникших у Вас, когда решали задачу №2 этого упражнения.

В некой лаборатории проводился эксперимент. Были сделаны измерения необходимых параметров. Результаты измерения одного из параметров сведены в таблицу:

1.0083	1.0124	1.0101	1.0110	1.0097	1.0092	1.0101	1.0087	1.0079	1.0071

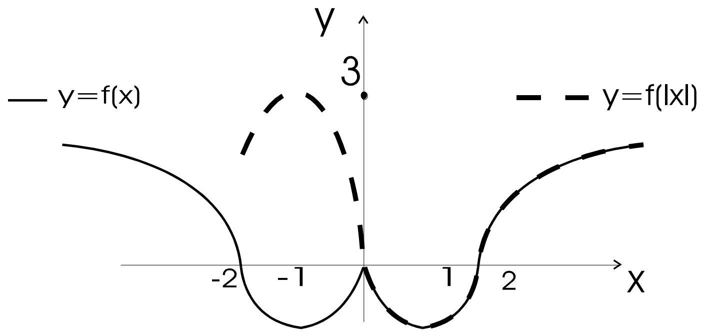
Определите среднюю величину параметра. Далее укажите величины приращения для каждого измерения, считая среднюю величину истинным результатом. Можно ли указать среднюю величину приращений? Если да, то укажите её.

1.3. Построение графиков функций, аналитическое выражение которых содержит модуль.

Построение графика $y = f(|x|)$

Пусть имеем график функции $y = f(x)$. Ветвь графика данной функции в полуплоскости $x<0$ отбрасываем, а ветвь в полуплоскости $x>0$ оставляем и зеркально отражаем относительно оси Оу

Пример. Дан график функции $y = f(x)$. Построить $y = f(|x|)$:

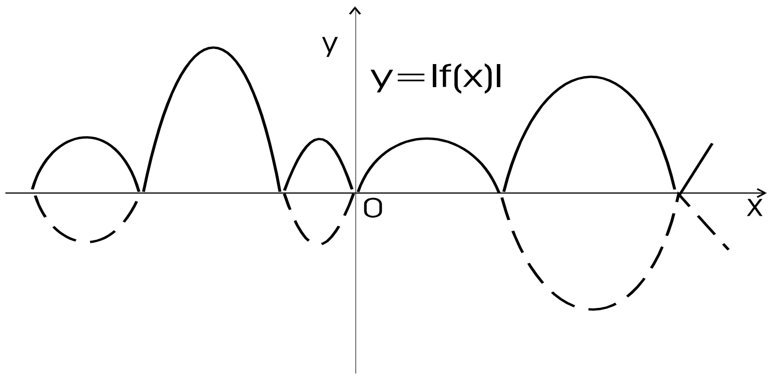


Построение графика $y = |f(x)|$.

По определению модуля, имеем равенство: $y = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$

Пусть имеем график функции $y=f(x)$. Ветвь графика в полуплоскости $y>0$ оставляем, а остальное отобразим симметрично относительно оси Ох.

Пример. Построить график $y=|f(x)|$, если дан график $y = f(x)$



Построение графика уравнения $|y| = f(x)$.

По определению модуля имеем:

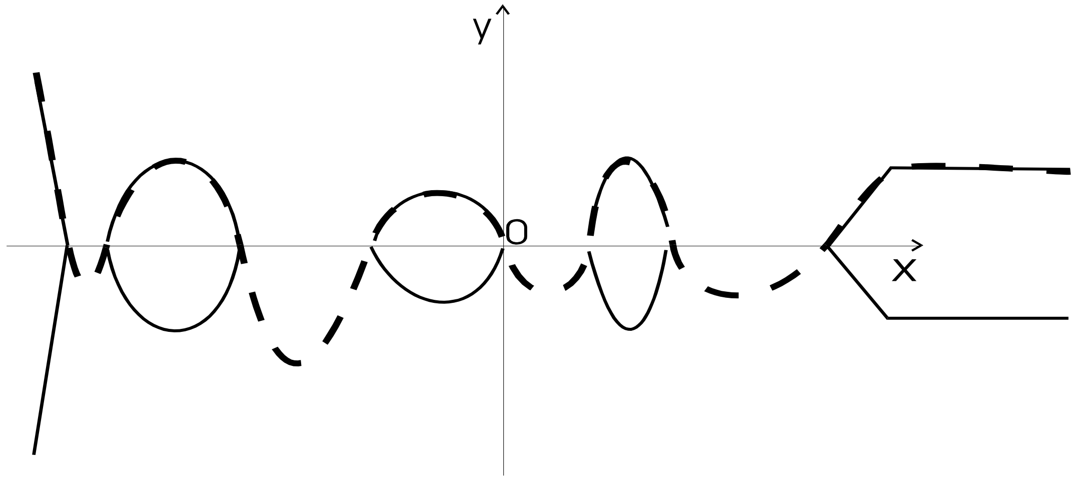
$$|y| = \begin{cases} y, & y > 0, y = f(x), \\ -y, & y < 0, y = f(x). \end{cases}$$

Это значит, что если x такое, что f(x)>0, то графику принадлежат точки (x, f(x)) и (x, –f(x)). Если f(x)<0, то ни одна точка с абсциссой x не принадлежит графику.

Таким образом, часть графика y=f(x), расположенную выше оси Ox оставляем, а часть исходного графика, находящуюся ниже оси Ox, отбрасываем.

К оставшейся части графика добавляем ей симметричную относительно оси OX.

Пример. Построить график $|y|$= f(x), если дан график y=f(x):



1.4. Построение графика сложной функции *y = f(φ(x))*

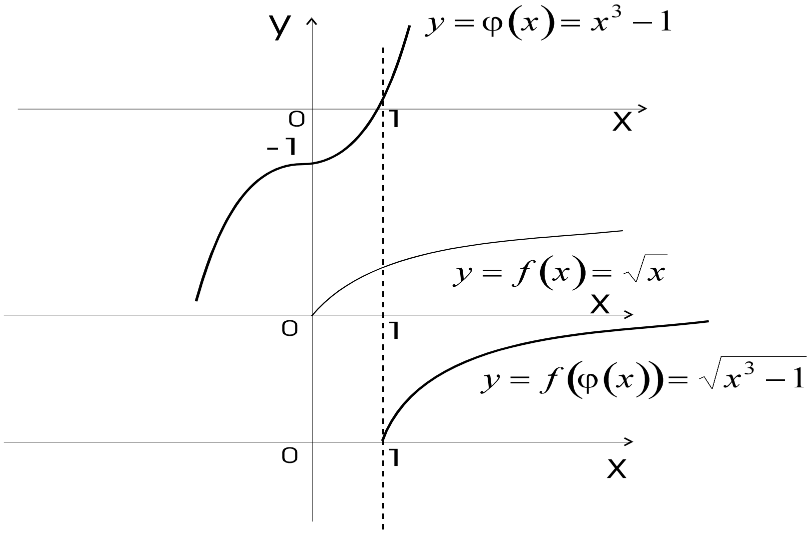
Находим область определения сложной функции, ее граничные значения.

Строим график функции y=φ(x), отмечаем на графике нули, определяем точки разрыва, граничные точки и 2–3 промежуточные точки.

3. Производим операции, определяющие функцию f, над ординатами соответствующих характеристических точек $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, т.е. находим $f(\varphi(x_i)) = y_i$, $i = \overline{1,n}$.

4. График сложной функции строим под графиком функции $\varphi = \varphi(x)$.

Пример. Построить график функции y = $\sqrt{x^3 - 1}$.



Построение графиков функций на данном этапе изучения материала сводится к оптимальному представлению аналитического выражения цепочкой последовательных простейших преобразований.

Пример. Построить график функции

y = $\left|\sqrt{4|x| + 4} - 3\right| + 1.$

Разложим аналитическое представление функции y=y(x) в цепочку простейших преобразований:

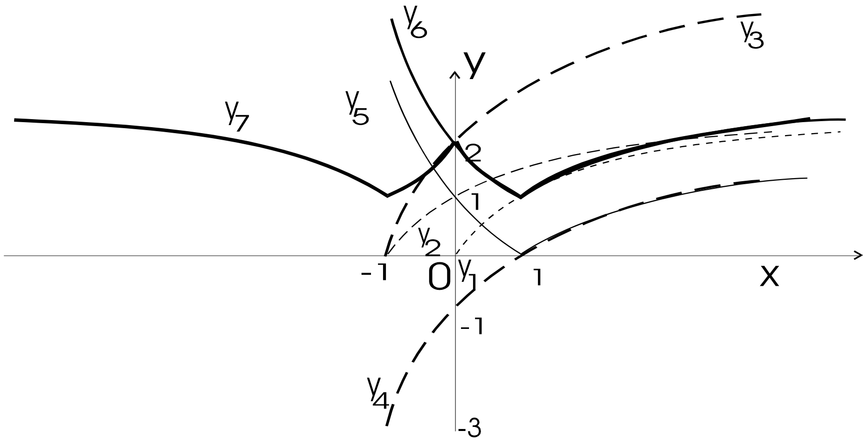
$y_1 = \sqrt{x}$; $y_2 = \sqrt{x+1}$; ; $y_3 = 2\sqrt{x+1}$;

$y_4 = 2\sqrt{x+1} - 3$; $y_5 = \left|2\sqrt{x+1} - 3\right|$;

$y_6 = \left|2\sqrt{x+1} - 3\right| + 1$;

$y_7 = \left|2\sqrt{|x|+1} - 3\right| + 1 = \left|\sqrt{4|x| + 4} - 3\right| + 1.$

Полученные графики изобразим на рисунке:



Интересно рассмотреть построение графика дробно-линейной функции

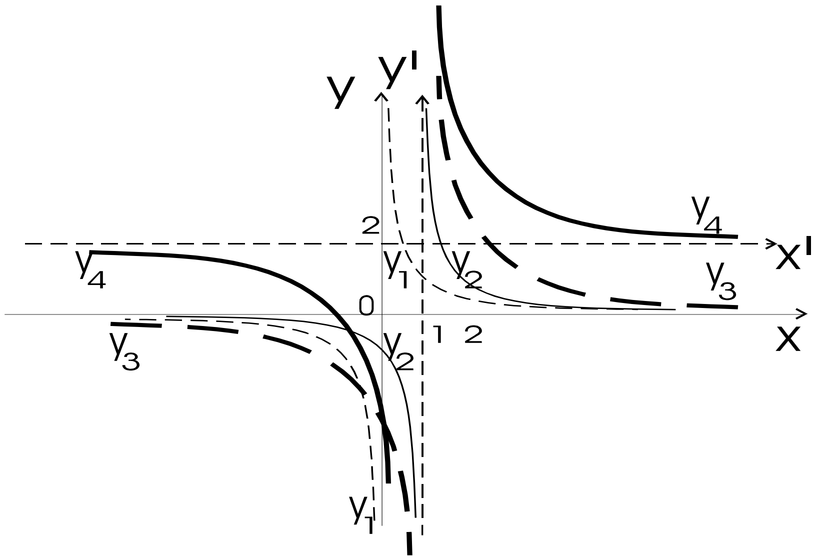
y = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (a, b, c, d$\in$**R**, a$\neq$0, c$\neq$0).

Пусть, например, $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

Выделим главную часть: $y = \dfrac{(2x-2)+2+3}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \dfrac{5}{x-1}$

Тогда последовательность простейших преобразований выглядит следующим образом: $y_1 = \dfrac{1}{x}$, $y_2 = \dfrac{1}{x-1}$, $y_3 = \dfrac{5}{x-1}$,

$$y_4 = 2 + \frac{5}{x-1} = \frac{2x+3}{x-1} = y.$$



В произвольном случае при делении числителя на знаменатель дробь y = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r|l} ax+b & cx+d \\ \cline{2-2} -\left(ax+\dfrac{ad}{c}\right) & \dfrac{a}{c} \\ \hline b-\dfrac{ad}{c} & \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{ax+b=\frac{a}{c}\left(cx+d\right)+\frac{bc-ad}{c}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\left(cx+d\right)+\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}}$$

Можно переобозначить: $B=\dfrac{a}{c};\ K=\dfrac{bc-ad}{c^2};\ A=-\dfrac{d}{c}$,

тогда $y=B+K\cdot\dfrac{1}{x-A}=Kf\,(x-A)+B$, где исходный график y=f(x)=1/x.

Теперь будем рассматривать абстракцию от абстракции.

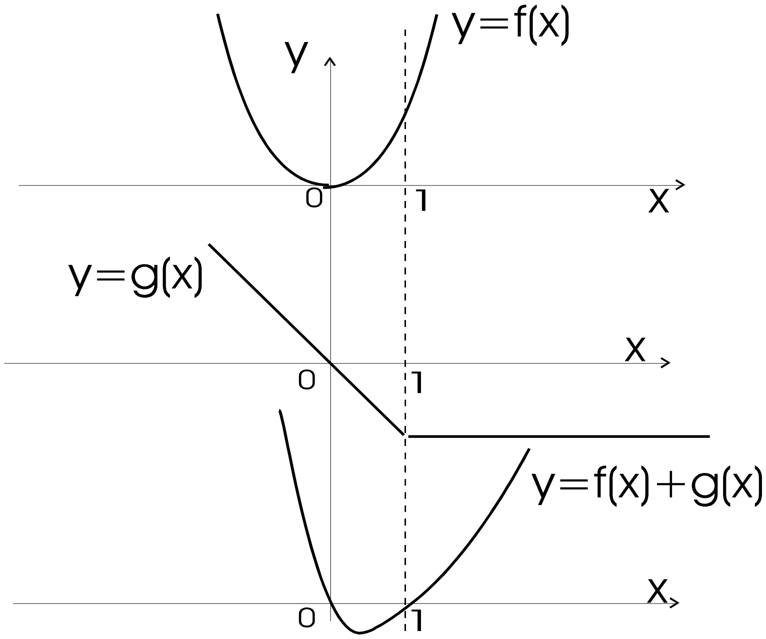
Объектом изучения будут функции и действия над ними.

Мы будем рассматривать не множества элементов, а классы функций.

Построение графиков суммы двух функций, если графики исходных функций заданы.

Пусть имеем графики функций y=f(x) и y=g(x). Требуется построить график функции y=f(x)+g(x).

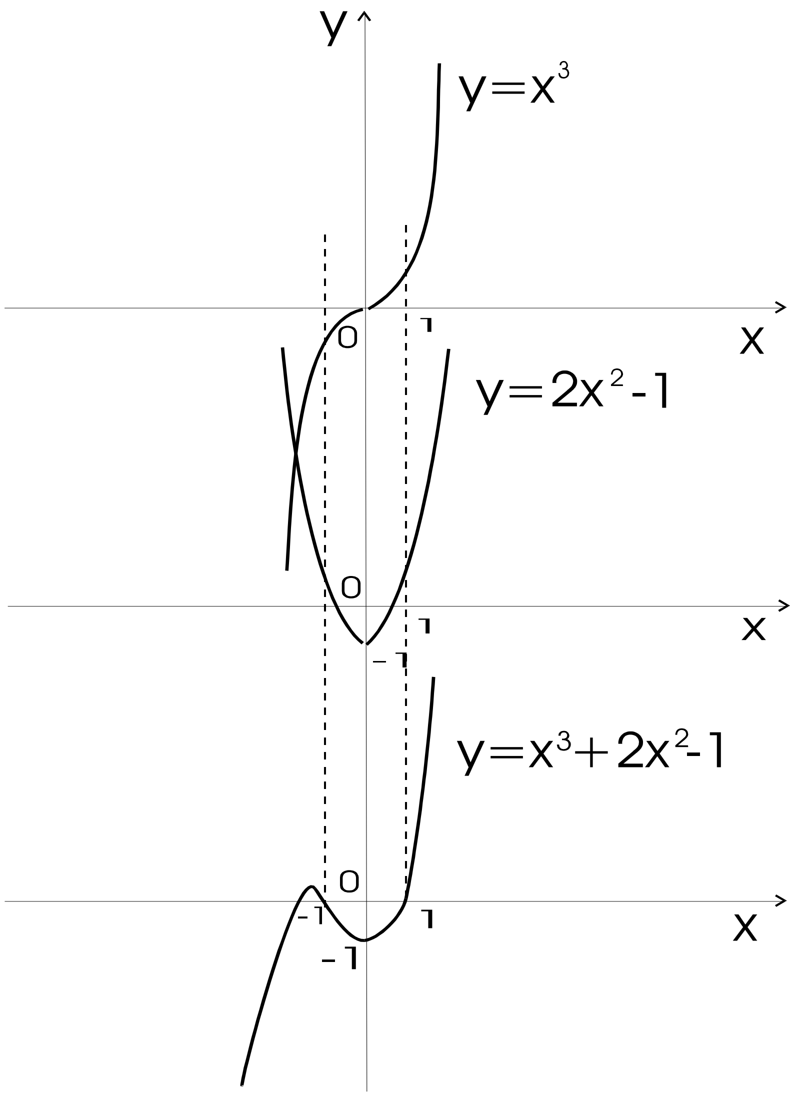
Расположим системы координат первого и второго графика друг над другом. График результирующей функции расположим под вторым графиком.



Определим общую для двух заданных функций область определения. Укажем характеристические и граничные точки, если таковые имеются. Для каждой абсциссы произведем сложение соответствующих ординат.

Так мы получим график суммы двух графиков поточечно. Построение графика разности, произведения, частного двух графиков функций выполняют аналогично (сформулировать и обосновать соответствующие правила в качестве *упражнения*).

Пример. Построить график функции $y=x^3+2x^2-1$.



2.Упражнение

1. С помощью простейших преобразований постройте следующие графики функций:

1.1. $y = x^3 - 2$; 1.2. $y = (x-2)^3$; 1.3. $y = -2x^3$; 1.4. $y = 2(x-2)^3 - 2$;

1.5. $y = (3x)^3$; 1.6. $y = 2(3x-2)^3 - 2$.

*Замечание. Графики н*екоторых из предложенных в упражнении функций можно построить несколькими способами. В качестве упражнения найдите максимальное число способов построения графиков функций.

Укажите на графики функций, которые можно считать непрерывными из тех, что использованы в лекции.

2. Вычислить приращение функции в указанных точках:

2.1. $f(x) = 2x+1, \quad x=-1, \Delta x = 0,2$; 2.2. $f(x) = x^3+1, \quad x=-1, \Delta x = 0,1$;

2.3. $f(x)=\begin{cases} 2, & x<1 \\ 1, & x=1, \\ -1, & x>1 \end{cases}$ $\quad x=-1, \Delta x=0,5$.

3. Найти приращение функции Дирихле $D(x)=\begin{cases} 0, & x - \text{иррациональное число} \\ 1, & x - \text{рациональное число} \end{cases}$ в точке x если а) точка x рациональное число, б) точка x иррациональное число.

4. Доказать, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $f(x)$ имела в каждой точке приращение тождественно равное нуль, является $f(x)\equiv c, \text{где } c - const$.

5. Доказать, что если приращение непрерывной функции зависит только от Δx, и не зависит от x, т.е. $f(x+\Delta x)-f(x)=\varphi(\Delta x)$ для $\forall\, x\in D(f(x))$, то $f(x)$ является линейной и $\varphi(\Delta x)=a(\Delta x)$. Замечание, считается что линейная функция имеет стандартный вид $f(x)=ax+b, \quad \text{где } a,b - const$.

6. Можно ли построить функцию $f(x)$ такую, что приращение в каждой точке которой равно одному и тому же числу $c, \text{где} \quad c\neq 0$.

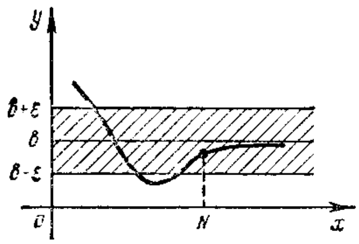
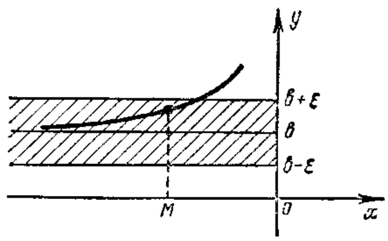
7. Доказать, что при равномерном движении точки по прямой её средняя скорость на каждом отрезке $[t, t+\Delta t]$ одна и та же.

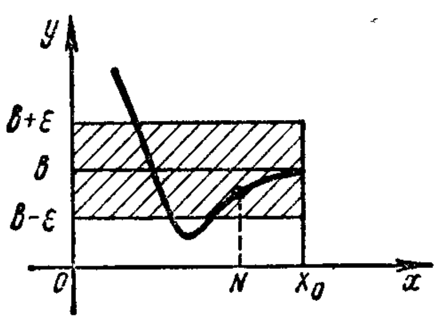
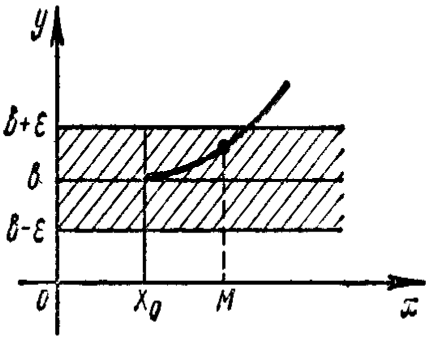
8. Средняя скорость $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ движения точки по прямой равна $2t+\Delta t$, причем известно, что $s(0)=0$. Найти закон движения. [10, 20]

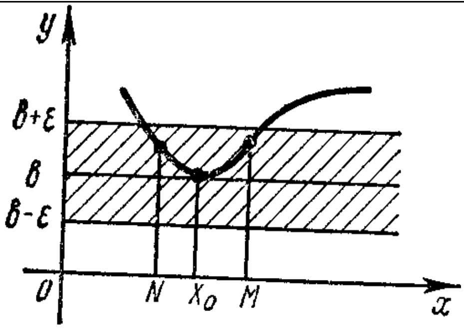
2. Упражнение для повторения теории.

1. При изучение нижеследующей таблицы приведите примеры иллюстрирующие данные понятия в таблице:

Предел функций	**Определение**	**Образ**

1. Предел функции при $x \to +\infty$	*Число* b *называется пределом функции y=f(x) при* $x \to +\infty$*, если каково бы ни было положительное число* ε*, можно найти такое число N, что для всех x, больших N, выполняется неравенство* $\lvert f(x)-b \rvert < \varepsilon$. Символически записывается: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x > N \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x) - b \rvert < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$	
2. Предел функции при $x \to -\infty$	*Число* b *называется пределом функции y=f(x) при* $x \to -\infty$*, если каково бы ни было положительное число* ε*, можно найти такое число M, что для всех x ,меньших M, выполняется неравенство* $\lvert f(x)-b \rvert < \varepsilon$. Символически записывается: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x < M \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x) - b \rvert < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$	
3. Предел функции при $x \to x_0$	Предел слева $x \to x_0 - 0$	

	Число b *называется пределом функции y=f(x) при* $x \to x_0$ *слева, если каково бы ни было положительное число* ε, *можно найти такое число N (меньшее* x_0*), что для всех x,* $N < x < x_0$, *выполняется неравенство* $\lvert f(x)-b \rvert < \varepsilon$. Символически записывается: $\forall \varepsilon > 0, \exists N : N < x_0,$ $\forall x : N < x < x_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x) - b \rvert < \varepsilon$ Обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$	а) 
	Предел справа $x \to x_0 + 0$ *Число* b *называется пределом функции y=f(x) при* $x \to x_0$ *справа, если каково бы ни было положительное число* ε, *можно найти такое число M (больше* x_0*), что для всех x,* $x_0 < x < M$, *выполняется неравенство* $\lvert f(x)-b \rvert < \varepsilon$. Символически записывается: $\forall \varepsilon > 0, \exists M : M > x_0,$ $\forall x : x_0 < x < M \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x) - b \rvert < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b \cdot$	

	Предел в точке: *Число* b *называется пределом функции y=f(x) при* $x \to x_0$ *, если каково бы ни было положительное число* ε *, можно найти такие числа M, N (N<* x_0 *<M), что для всех x,* $N < x < M$ *, выполняется неравенство* $\lvert f(x)-b\rvert < \varepsilon$ *.* Символически записывается: $\forall \varepsilon > 0, \exists M, N : N < x_0 < M,$ $\forall x : N < x < M \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x) - b \rvert < \varepsilon$. Обозначается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Общее определение. *Число* b *называется пределом функции y=f(x) при* $x \to x_0$ *, если каково бы ни было положительное число* ε *, существует такое* $\delta(\varepsilon)$ *(дельта зависящее от эпсилон), что для всех x,* $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ *, выполняется неравенство* $\lvert f(x)-b\rvert < \varepsilon$ *.* Символически записывается: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall x : \lvert x - x_0 \rvert < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x) - b \rvert < \varepsilon$	

2. Аналогично пункту 1 приведите примеры из заданных выше Вам заданий на вычисление пределов функций, при этом проведите классификацию соответстующую таблицам этого задания, там где необходимо провести доказательство проведите его.

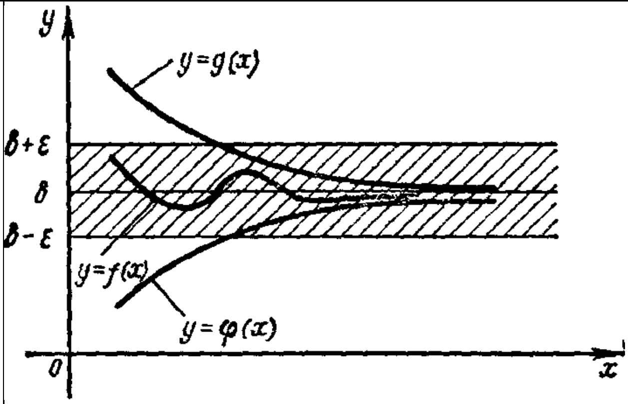
Определение	Функция *y=f(x)* называется *бесконечно малой*

б.м.ф.	при $x \to +\infty$, если ее предел при $x \to +\infty$ равен нулю. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x > N \Rightarrow \left\| f(x) \right\| < \varepsilon$. *(См замечание)*
Теорема 1	*Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми функциями (при $x \to +\infty$), то и их гумма $\varphi(x)+\psi(x)$ также является бесконечно малой функцией (при $x \to +\infty$).*
Теорема 2	*Если функция y=f(x) имеет предел при $x \to +\infty$, то она ограничена на некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.* ***Следствие.* Бесконечно малая функция (при** $x \to +\infty$ *ограничена (при $x \to +\infty$).*
Теорема 3	*Если функция y = f (x) имеет предел, отличный от нуля (при $x \to +\infty$*, то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ *ограничена (на некотором бесконечном интервале).*
Теорема 4	*Произведение бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$) на функцию ограниченную (при $x \to +\infty$) является функцией бесконечно малой.* Следствие 1. *Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из только что доказанной теоремы вытекает, что произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.* Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.*
Теорема 5	*Частное от деления функции f(x) бесконечно малой при $x \to +\infty$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x \to +\infty$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*
Определение б.б.ф.	Функция *y=f(x)* называется *бесконечно большой* при $x \to +\infty$, если для любого положительного числа *L* можно подобрать такое число *N(L)*, что

	для всех значений $x>N$ выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)\right|>L$. $\forall L>0, \exists N\left(L\right), \forall x: x>N \Rightarrow \left|f\left(x\right)\right|>L$
Теорема 6	*Если функция f (x) является бесконечно большой при $x \to +\infty$, то функция* $1/f\left(x\right)$ *— бесконечно малая при $x \to +\infty$.*
Теорема 7	*Если функция f(x), не обращающаяся в нуль, есть бесконечно малая при $x \to +\infty$, то 1/f (x)— бесконечно большая функция при $x \to +\infty$.*

3. Проведите доказательства нижеследующих теорем, обратите внимание на некоторые особенности в их формулировках:

	Основные теоремы о пределах
Теорема 1	*Если функция f(x) имеет предел (при $x \to +\infty$), равный b, то ев можно представить как. сумму числа b и, бесконечно малой функции $\alpha\left(x\right)$ (при $x \to +\infty$).*
Теорема 2 *(Обратная)*	*Если функцию f (x) можно представить как сумму числа b и некоторой бесконечно малой функции $\alpha\left(x\right)$ ($x \to +\infty$), то число b является пределом функции f (x) (при $x \to +\infty$).*
Теорема 3	*Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi\left(x\right)=c$, *то функции* $f\left(x\right)\pm\varphi\left(x\right)$ *тоже имеют пределы при $x \to +\infty$, причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)\pm\varphi\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)\pm\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)=b\pm c$ *т. е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.* **Замечание.** Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.
Теорема 4	*Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=b$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi\left(x\right)=c$, *то функции* $f\left(x\right)\cdot\varphi\left(x\right)$ *тоже имеют пределы при $x \to +\infty$, причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)\cdot\varphi\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi\left(x\right)=b\cdot c$ *т. е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.*

	Следствие. *Постоянный множитель можно выносить зазнак предела, т. е.* $\lim\limits_{x\to+\infty} k\cdot f(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *где* k *— постоянный множитель.* Замечание. *Теорема справедлива для любого конечного числа сомножителей.* **Следствие**. *Предел степени равен степени предела, т.е.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left[f(x)\right]^n\right\}=\left[\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right]^n$.
Теорема 5	*Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$, $c\neq 0$, *то* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}$, *т.е. предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.*
Теорема 6	 *Пусть даны три функции φ (x), f(x) и g(x), удовлетворяющие неравенствам φ (x)≤ f(x)≤ g(x) для достаточно больших значений x. Если функции φ(x) и g(x) имеют один и тот же предел* $x\to+\infty$, *то и функция f (x), заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций φ(x) и g(x).*
Теорема 7	*Если функция* $y=f(x)\geq 0$ *для всех достаточно больших значений x и при* $x\to+\infty$ *имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным.*

Сравнение бесконечно малых функций.

Определение	Функции *φ(x)* и $\psi(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка* малости при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен нулю.
Определение	Функции *φ(x)* называется *бесконечно малой более высокого порядка малости при* $x \to +\infty$, *чем* $\psi(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$.
Определение	Функции *φ(x)* называется *бесконечно малой более низкого порядка малости при* $x \to +\infty$, *чем* $\psi(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\infty$.
Определение	Функции *φ(x)* называется *несравнимыми бесконечно малыми при* $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ не существует ($\neg\exists$) и не равен бесконечности.
Определение	Функции *φ(x)* и $\psi(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$.

Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях (б.м. ф.)

Теорема 1.	*Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т.е. если* $\varphi(x)\sim\varphi_1(x) \quad \wedge \quad \psi(x)\sim\psi_1(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$.
Теорема 2.	*Бесконечно малые функции φ (x) и ψ (x) эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем φ(x) и ψ(x).*
Теорема 3.	*Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

Не обязательные упражнения Предельные переходы и их приложения. Исчисление песчинок и многое про древность.

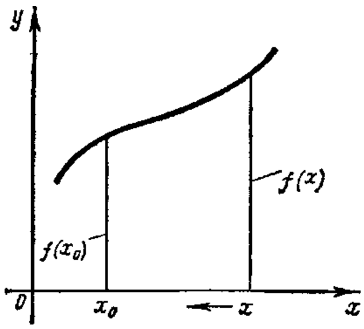
1. Могло ли в философии Демокрита и Левкиппа появится понятие бесконечно малой величины? а в философии Платона?

2. Могло ли возникнуть понятие бесконечно малой величины в философиях древнего Китая?

3. . Понятие непрерывности в античности. [8, 9, 11, 12, 14-16, 22]

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ (формальная часть для первого прочнетия в институте)

1. Непрерывность функции в точке.

Определение 1	*Функция называется непрерывной в точке* x_0*, если:* *1) функция определена в точке* x_0 *и в некоторой ее окрестности, содержащей эту точку;* *2) функция имеет предел при* $x \to x_0$*; 3) предел функции при* $x \to x_0$ *равен значению функции в точке* x_0 *:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$	
Определение 2 *(непрерывность в точке а по Гейне*	*Функция f(x) называется непрерывной в точке а, если для любой сходящейся к а последовательности значений аргумента* $x_1, x_2, x_3, \dots x_n, \dots$ *соответствующая последовательность значений функции f* (x_1)*, f* (x_2)*, ..., f* (x_n)*, ... сходится к числу f (a).*	
Определение 3 *(непрерывность в точке а по Коши).*	*Функция f(x) называется непрерывной в точке* ***а****, если для -любого положительного числа* ε *найдется отвечающее ему положительное число* δ *такое,*	

	что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $\left|x-a\right|<\delta$, *справедливо неравенство* $\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<\varepsilon$, *т.е.* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\left(\varepsilon\right)\ \forall x:\left|x-a\right|<\varepsilon\Rightarrow$ $\Rightarrow\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<\varepsilon$	
Определение 4	*Функцияf(x), для которой справедливо равенство* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f\left(x\right)=0$, *называется непрерывной (в точке* x_0*).*	

Замечание. Данные четыре определения непрерывности функции в точке эквивалентны.

2. **Классификация точек разрыва функции.**

1°. Устранимый разрыв. *Точка* ***a*** *называется точкой устранимого разрыва функции y=f(x), если предел функции f(x) в точке a существует, но в точке a функция f(x) либо не определена, либо имеет частное значение f (**a**), отличное от предела f(x) в этой точке.*

Из определения следует, если функция *f (x)* имеет в точке а устранимый разрыв, то этот разрыв можно устранить, не изменяя при этом значений функции в точках, отличных от *a.* Для этого достаточно положить значение функции в точке и равным ее предельному значению в этой точке.

2°. **Разрыв первого рода.** *Точка* ***a*** *называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке функция f(x) имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы*, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0}f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to a-0}f\left(x\right)$

3°. Разрыв второго рода. *Точка* ***a*** *называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция f (x) не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов или если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.*

Определение. *Функция f(x) называется кусочно непрерывной на сегменте [a, b], если эта функция определена всюду на сегменте [a, b], непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода и, кроме того, имеет правый предел в точке a и левый предел в точке b.*

Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на интервале (или на бесконечной прямой), если $f(x)$ кусочно непрерывна на любом принадлежащем этому интервалу (или бесконечной прямой) сегменте.

Упражнение. Среди лекций этого курса найдите графики тех функций, которые:

A) непрерывны на всей области их определения;

B) непрерывны, на некоторых отрезках;

C) разрывны в бесконечном числе точек.

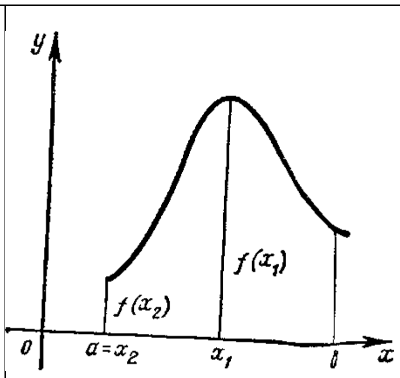
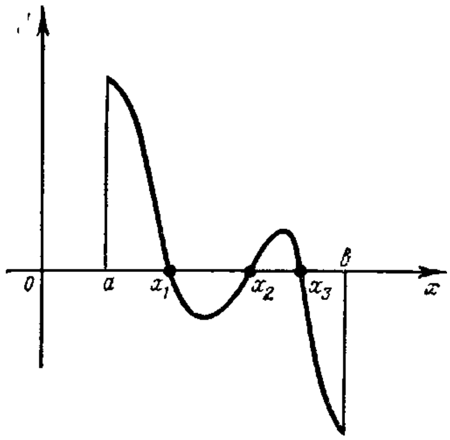
3. **Операции над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций.**

Теорема 1.	*Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $\psi\left(x_0\right) \neq 0$, то функция $\varphi(x) / \psi(x)$ непрерывна в точке x_0.*
Теорема 2.	*Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi\left(x_0\right)$, то сложная функция $y = f\left[\varphi\left(x\right)\right]$ непрерывна в тачке x_0.*
Теорема 3.	*Элементарные функции непрерывны на своей области определения или всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*
Утверждение.	*Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительное {отрицательное} значение, то она остается положительной {отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0*

4. **Свойства функций непрерывных на отрезке (сегменте).**

Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента, т. е, в точках a и b соответственно справа и слева.

<table>
<tr>
<td>Теорема 1.</td>
<td>Если функция f(x) непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на этом сегменте.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Теорема 2.</td>
<td>Если функция y=f(x) непрерывна на сегменте $[a,b]$, и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется по крайней мере одна точка, в которой функция равна нулю.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Теорема 3 (теорема о промежуточных значениях).</td>
<td>Пусть функция непрерывна на сегменте $[a,b]$, и f(a)=A, f (b)= B. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри этого сегмента такая точка c, что f (c) = C.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Место для комментарии для решающих или изучающих</td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
</table>

Замечание. если функция на отрезке имеет хотя бы одну точку разрыва, то утверждения теорем 2 и 3 перестают быть верными.

Упражнение.

1. Доказать, что функции $y = x\sin\frac{1}{x}$, $y = x^2\sin\frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеют устранимый разрыв.

Тест. Предел функций и непрерывность функций

1.1. Среди графиков, приведенных на рис. 1.1, указать ВСЕ, соответствующие формуле

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

1.2. Среди графиков, приведенных на рис. 1.1, указать ВСЕ, соответствующие формуле

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$

1.3. Среди графиков, приведенных на рис. 1.1, указать ВСЕ, соответствующие формуле

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$

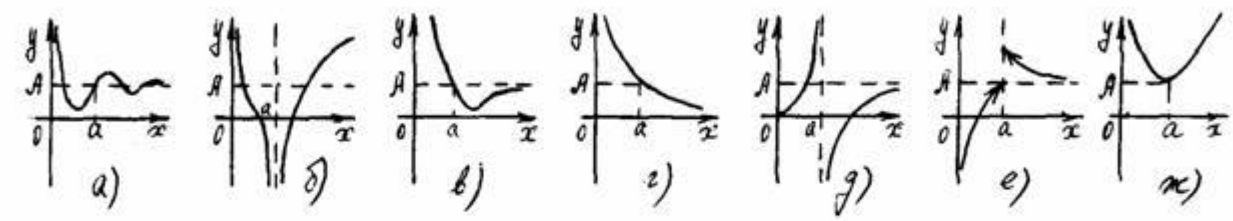
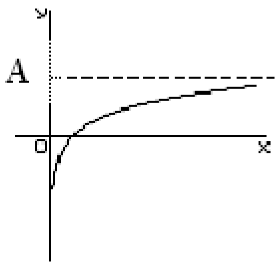


Рисунок 1.1

1.4. Указать ВСЕ утверждения, справедливые для графика функции, изображенного на рис.



а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, г) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0$, д) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +0$

е) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -0$, ж) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = -\infty$, з) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = A$, и) $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = +\infty$.

1.5. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -5$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ равен:

1) -5 2) 5 3) 0 4) не существует
5) среди приведенных ответов нет верного

1.6. 1.5. Если $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+0} \frac{4}{f(x)}$ равен:

1) -4 2) 4 3) $-\infty$ 4) $+\infty$ 5) 0

1.7. Если $\lim\limits_{x\to4-0} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to4-0} \frac{x}{f(x)}$ равен:

1) -4 2) 0 3) ∞ 4) *не существует* 5) 0

1.8. Если $\lim\limits_{x\to3} f(x) = A$ и f(x) – четная, то $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = A$ равен:

а) 3; б) – 3; в) 0; г) А; д); -А; е) не существует.

1.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to4} \frac{x-4}{\sin(4-x)}$.

а) 1; б) – 1; в) 0; г) $-\infty$; д) не существует.

1.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(4-x)}{x-4}$

а) 1; б) – 1; в) 0; г) – ∞ ; д) $+\infty$; е) не существует.

1.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to4} \left(1 + \frac{x-4}{\sin(4-x)}\right)$:

а) 1; б) – 1; в) 0; г) ∞ ; д) не существует, е) среди предложенных нет верного ответа.

1.12. Дано $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -10^{10}$. Укажите ВСЕ верные утверждения:

а) $f(x)$ ограничена в окрестности точки $x = 2$; б) $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to 2$;

в) $\dfrac{f(x)}{2} \to 10^{-5}$ при $x \to 2$; г)) $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to 2$.

1.13. Известно, что при $x \to 2$ $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ – бесконечно малые, а также и $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 10^{10}$. Какое из следующих утверждений верно при $x \to 2$?

а) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$эквивалентны; б) $\alpha(x)$ более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$:

в) $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$; г) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости.

1.14. Известно, что при $x \to x_0$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны ($\alpha(x) \cong \beta(x)$), Какое из следующих утверждений верно при $x \to x_0$?

а) $\alpha(x)$ более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$; б) $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$; в) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости; г) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ нельзя сравнивать.

1.15. При $x \to x_0$ укажите ВСЕ верные утверждения:

а) $\sin(x - x_0) \sim x$; б) $\sin(x - x_0) \sim (x - x_0)$; в) $x - \sin(x - x_0) \sim x_0$; г) $\sin\dfrac{1}{(x - x_0)} \sim \dfrac{1}{(x - x_0)}$.

1.16. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - 2\sin\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

а) 1; б) – 1; в) e; г) e^{-2} ; д) e^{2}.

Литература

1. Claudia Canuto, Anita Tabacco Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.-435p.
2. Larson R., Edwards Bruce H. Calculus. Ninth Edition. Cengage Learning. 2010. 1334 p.
3. Toshmetov O‘, Turgunbayev R. Matematik analizdan misol va masalalar to‘plami. 1-q. TDPU. 2006 y.-140 b.
4. Айгнер М., Циглер Г. Доказателства из Книги. Лучшие доказательства со времен Евклида и до наших дней. М.: “Мир”, 2006. – 256 с.
5. Арнольд В.И. Математическое понимание природы. – 3-е изд., стериотип. – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с.
6. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: «Высшая школа». 1999 г. – 695 стр.
7. Босс В. Лекции по МАТЕМАТИКЕ. Анализ. М: Едиториал УРСС. – 216 с.
8. Вейль Г. Матеатическое мышление. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
9. Данциг Тобиас. Числа – язык науки. М.: Техносфера. – 304 с.
10. Демидович Б.П.., «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Учеб. Пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель» ООО «Издательство АСТ», 2003 г – 558 [2] ст.
11. Жаров В.К., Матвеев О.А., Панкратов А.С. Пособие по математике для будущих философов и любознательных школьников. Учбное пособие. – М.: Изд-во “Янус-К”, 2016. – 284 с.
12. Манин Ю.И. Математика как метафора. – М.: МЦНМО, 2008. – 400 с.
13. Романовский В.И. Введение в анализ. Избранные труды т.1. Ташкент: Изд-во АНУзССР, 1959. –500 с.
14. Клиффорд У.
15. Купиллари А. Математика – это просто! Доказательства. М.: Техносфера, 2006. – 304 с.
16. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Тт1-2. Т.1. М.: «Наука», 1967. – 704 с.
17. Петраков И.С. Математика для любознательных. М.: “Просвещение”, 2000. – 256 с.

18. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 1 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г. – 416 стр.

19. Срогац Стeвен Удолвольствие от *X*. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2014. – 304 с.

20. Столин А.В. Комплексные упражнения по математике с рашениями 7-11 классы.–Х.: ИМП “Рубикон”, 1995. – 240 с.

21. Хайрер Э., Ваннер Г. Математический анализ в свете его истории. М.: Научный мир, 2008. – 396 с.

22. Реньи Альфред. Диалоги о математике. М.: “МИР”– 96 с.

23. Стюарт Иэн Величайшие математические задачи. – М.: Альпина нон-фикшн, 2015. – 460 с.

24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Тт1-3., Т. 1. М.: Наука, 1966.– 608 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ