Р. Н. НАЗАРОВ
Б. Т. ТОШПЎЛАТОВ
А. Д. ДУСУМБЕТОВ

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

I қисм

Р. Н. НАЗАРОВ, Б. Т. ТОШПУЛАТОВ,
А. Д. ДЎСУМБЕТОВ

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

I қисм

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика институтлари ва университетларнинг физика ва математика факультетлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тасдиқ этган

ODÜ KUTUBXONASI
№ 278936

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1993

Тақризчилар:

Узбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг мухбир аъзоси, физика-математика фанлари доктори, профессор АЮПОВ Ш. А.;

Физика-математика фанлари номзоди, доцент БЕРДИҚУЛОВ М.;

Хоразм Давлат университети алгебра кафедраси мудири, физика-математика фанлари номзоди, доцент АБДУЛЛАЕВ И.

Ушбу қўлланма педагогика институтлари математика ва физик математика факультетлари «Алгебра ва сонлар назарияси» курси дастури бўйича ёзилган бўлиб, назарий материал аниқ мисоллар билан тушунтирилган.

Қўлланмада тўпламлар ва мулоҳазалар алгебраси, алгебраик системалар, матрицалар, детерминантлар, чизиқли акслантиришлар ва Евклид фазолари каби алгебра курси мавзулари ёритилган.

Китоб педагогика институтлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, университетларнинг талабалари ҳам фойдаланиши мумкин.

Н $\frac{1602030000-170}{353\ (04)\ 93}$ 85—93

© «Уқитувчи» нашриёти, 1993 й.

ISBN 5—645—01913

Академиясининг В. И. Романовский номидаги математика илмий текшириш институти директори, физика-математика фанлари доктори, профессор Ш. А. Аюпов, шу институтнинг катта илмий ходимлари, физика-математика фанлари номзодлари М. А. Бердиқулов, И. Аллаков ва Хоразм Давлат университетининг алгебра кафедраси мудири, доцент И. Абдуллаевларга самимий миннатдорчилигимизни билдирамиз.

Муаллифлар.

I боб. ТУПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК МАНТИҚ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. ТУПЛАМЛАР ВА ҚИСМ ТУПЛАМЛАР

Тўплам энг муҳим математик тушунчалардан биридир. Бу тушунча математика фанига тўпламлар назариясининг асосчиси бўлган немис математиги Георг Кантор (1845—1918) томонидан киритилган.

Тўплам таърифланмайдиган математик тушунча бўлиб, баъзи бир нарсалар, буюмлар, объектларни биргаликда қараш натижасида вужудга келади. Масалан, барча натурал сонларни биргаликда қараш натурал сонлар тўпламини, тўғри чизиқда ётувчи нуқталарни биргаликда қараш шу тўғри чизиқ нуқталари тўпламини беради.

1-таъриф. Тўпламни ташкил этувчи объектлар шу тўпламнинг *элементлари* дейилади.

Тўпламлар одатда латин ёки грек алифбосининг бош ҳарфлари билан, уларнинг элементлари эса шу алифбонинг кичик ҳарфлари билан белгиланади.

Агар A тўплам a, b, c, . элементлардан тузилган бўлса, у $A = \{a, b, c, \quad \}$ кўринишда ёзилади. Тўпламни ташкил этувчи элементлар сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Шу муносабат билан тўпламлар чекли тўплам ёки чексиз тўплам бўлади.

Масалан, $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$ тўпламлар чекли тўплам бўлиб, улар мос равишда битта, иккита, учта элементдан тузилган. Натурал сонлар тўплами, $(0; 1)$ оралиқдаги нуқталар тўплами чексиз тўпламларга мисол бўла олади. Баъзи бир чекли ва барча чексиз тўпламларни ўз элементлари орқали бевосита ёзиш мумкин эмас. Бундай ҳолларда мазкур тўпламлар ўз элементларининг характеристик хоссалари орқали берилади. Агар A тўпламнинг барча элементлари бирор P хоссага эга бўлса, бу тўплам $A = \{x \mid P(x)\}$ каби ёзилади. Масалан: 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$ тенгламанинг илдизлари тўплами $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ кўринишда; 2) рационал сонлар тўплами эса $Q = \{r \mid r = \frac{p}{q}$, бу ерда p ва $q \neq 0$ ихтиёрий бутун сон$\}$ кўринишда белгиланади.

Бирор a элемент қандайдир A тўпламнинг элементи эканлиги $a \in A$ ёки $A \ni a$ каби белгиланади ва a элемент A тўпламга тегишли деб ўқилади. $\in$ белги одатда тегишлилик белгиси деб юритилади. Бирор b элементнинг A тўпламга тегишли эмаслиги $b \overline{\in} A$ ёки $b \notin A$ каби белгиланади. Масалан, $\sqrt{2} \notin A$ ёки $5 \overline{\in} A$.

Айтайлик, бизга бир нечта A, B, C, тўпламлар берилган бўлсин.

2-таъриф. A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламда мавжуд бўлса, ва аксинча, B тўпламнинг ҳар бир элементи A да мавжуд бўлса, A ва B тўпламлар *ўзаро тенг* (бир хил) дейилади ва бу тўпламларнинг тенглиги

$$A = B \tag{1}$$

орқали белгиланади.

Бу таърифдан кўринадики, иккита тўпламнинг тенглиги аслида уларнинг битта тўплам эканлигини билдиради.

Масалан:

1) $A = \{2, 5\}$, $B = \{x \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$ бўлса $A = B$;

2) A — текисликдаги тенг томонли учбурчаклар тўплами, B — шу текисликдаги ички бурчаклари тенг бўлган барча учбурчаклар тўплами бўлса, ўз-ўзидан маълумки, $A = B$ бўлади.

3-таъриф. B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламда мавжуд бўлса, B тўплам A тўпламнинг *қисм тўплами* дейилади ва B нинг қисм тўплам эканлиги $B \subseteq A$ кўринишда белгиланиб, $\subseteq$ белги *сақланишлик белгиси* деб юритилади.

Агар A, B ва C тўпламлар битта тўпламнинг қисм тўпламлари деб қаралса, у ҳолда сақланишлик муносабати қуйидаги асосий хоссаларга эга:

а) $A \subseteq A$;

б) $A \subseteq B$ ва $B \subseteq A$ бўлса, у ҳолда $A = B$ бўлади;

в) $A \subseteq B$ ва $B \subseteq C$ дан $A \subseteq C$ эканлиги келиб чиқади.

4-таъриф. B тўпламнинг барча элементлари A тўпламда мавжуд бўлиб, шу билан бирга A да яна B га тегишли бўлмаган элементлар ҳам мавжуд бўлса, B тўплам A тўпламнинг *хос қисм тўплами* дейилади.

Хос қисм тўплам

$$B \subset A \tag{2}$$

орқали белгиланади.

5-таъриф. Бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам *бўш тўплам* деб аталади ва у $\varnothing$ орқали белгиланади.

6-таъриф. A тўпламнинг ўзи ва $\varnothing$ тўплам шу A тўпламнинг хосмас қисм тўплами дейилади.

A ва B тўпламларнинг тенглигини исботлаш учун

$$A \underline{\cup} B \text{ ва } B \supseteq A$$

эканлиги кўрсатилади.

Бирор A тўплам B тўпламнинг қисм тўплами эканлигини исботлаш деган сўз A нинг ихтиёрий элементи B га тегишли эканлигини кўрсатиш, демакдир.

Тегишлилик $\in$ ва сақланишлик $\underline{\cup}$ муносабатлари бир-биридан фарқ қилади. Масалан, тегишлилик муносабати учун сақланишлик муносабатининг биз юқорида кўриб ўтган учта хоссаси бажарилмайди.

Эслатма. Натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламларини мос равишда N, Z, Q ва R орқали белгилайлик.

Унда мазкур тўпламлар учун $N \subset Z \subset Q \subset R$ муносабатлар ўринлидир.

Исталган n та элементли тўпламнинг барча қисм тўпламлари сони 2^n га тенг. Бу тасдиқни математик индукция принципи асосида исботлаш мумкин.

Ҳақиқатан, бир элементли тўплам иккита қисм тўплам (шу тўпламнинг ўзи ва $\varnothing$ тўплам) га эга; $2=2^1$ бўлганидан $n=1$ учун тасдиғимиз ўринли.

Фараз қилайлик, тасдиқ n та элементли $M_n = \{x_1, x_2,$, $x_n\}$ тўплам учун ўринли бўлсин. M_n тўпламга x_{n+1} элементни қўшиб, биз $n+1$ та элементли $M_{n+1} = \{x_1, x_2,$, $x_n, x_{n+1}\}$ тўпламга эга бўламиз. M_{n+1} тўпламнинг ихтиёрий қисм тўплами ё M_n тўпламнинг қисм тўпламидан, ёки M_n нинг қисм тўпламларига x_{n+1} ни қўшишдан ҳосил бўлган қисм тўпламдан иборат бўлади. Шундай қилиб, M_{n+1} тўпламнинг қисм тўпламлари сони M_n тўплам қисм тўпламлари сонидан икки баравар кўп бўлади. Бошқача қилиб айтганда, M_{n+1} нинг қисм тўпламлари сони $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ та бўлади.

Демак, n та элементли тўпламнинг барча қисм тўпламлари сони 2^n та экан.

Мисоллар. 1. Барча жуфт натурал сонлар тўплами чексиз тўплам бўлади. Бу тасдиқни исботлаш учун исталган n натурал сонга $2n$ жуфт натурал сонни мос қўйиш кифоя.

2. Исталган $n \neq 1$ натурал соннинг туб бўлувчилари тўплами чекли тўпламдир.

3. $0 \leqslant x < 7$ тенгсизликни қаноатлантирадиган бутун сонлар тўпламини қуйидаги икки хил усулда ёзиш мумкин:

а) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

б) $A = \{0 \leqslant x < 7 \mid x \in Z\}$.

4. 5 га бўлиниб, 10 га бўлинмайдиган бутун сонлар тўплами $B = \{10k + 5 \mid k \in Z\}$ чексиз тўплам бўлади.

5. $A = \{a, b, c\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларининг тўплами $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ дан иборат.

Машқлар

1. Чекли ва чексиз тўпламларга мисоллар келтиринг.

2. $-3 < x < 3$ тенгсизликнинг бутун ечимлари тўпламини икки усулда ёзинг.

3. Бирор соннинг барча бутун бўлувчилари ва бутун бўлинувчилари тўплами чекли бўладими?

4. 3 га бўлиниб, 9 га бўлинмайдиган бутун сонлар тўплами чеклими ёки чексизми?

5. $\{1, 2, 3, 4\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларини ёзинг.

2-§. ТЎПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Бу тўпламлардан янги тўплам ҳосил қилиш мумкин. Бу мақсадда тўпламлар устида бажариладиган қуйидаги амалларни киритамиз:

1-таъриф. A ва B тўпламларнинг камида биттасига тегишли бўлган барча элементлардан тузилган C тўплам шу тўпламларнинг *бирлашмаси* дейилади ва $A \cup B$ кўринишда белгиланади.

Юқоридаги таърифга кўра C тўпламни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{ёки} \quad x \in B\}.$$

Тўпламлар бирлашмаси тушунчасини исталган чекли сондаги тўпламлар учун ҳам киритиш мумкин. n та $A_1, A_2,$ A_n тўпламнинг бирлашмаси $A_1 \cup A_2 \cup \qquad \cup A_n =$

$= \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ кўринишда ёзилади.

2-таъриф. A ва B тўпламларнинг барча умумий элементларидан тузилган C тўплам шу тўпламлар *кесишмаси* дейилади ва у $A \cap B$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ бўлса, у ҳолда $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ бўлади.

n та $A_1,\ A_2,\quad ,\ A_n$ тўпламнинг кесишмаси $A_1 \cap$ $\cap A_2 \cap \qquad \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ кўринишда ёзилади.

3-таъриф. A тўпламдан B тўпламнинг *айирмаси* деб A га тегишли, лекин B га тегишли бўлмаган барча элементлардан тузилган тўпламга айтилади ва у $A \setminus B$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ бўлса, у ҳолда $A \setminus B = \{7\}$ бўлади.

4-таъриф. A нинг B да ҳамда B нинг A да бўлмаган элементлари тўплами шу тўпламларнинг *симметрик айирмаси* дейилади ва у $A \Delta B$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ бўлса, $A \Delta B = \{2, 4, 6, 7\}$ бўлади.

A ва B тўпламларнинг айирмаси ва симметрик айирмасини мос равишда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ва } x \notin B\};$$

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ ва } x \notin B\} \cup \{x \mid x \notin A \text{ ва } x \in B\}.$$

5-таъриф. B тўплам A нинг қисм тўплами бўлганда $A \setminus B$ тўплам B ни A гача *тўлдирувчи* тўплам дейилади ва у $\overline{B}$ ёки $C_A B$ орқали ёзилади.

Мисол. $B = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ бўлганда $\overline{B} = \{4, 5\}$ бўлади.

Юқоридаги таърифга асосан $B \cup \overline{B} = A$ бўлади. Агар A тўплам бошқа тўпламнинг хос қисм тўплами деб қаралмаса, у ҳолда унинг тўлдирувчиси $\varnothing$ бўлиб, $\varnothing$ нинг тўлдирувчиси эса A бўлади.

6-таъриф. Ҳар қандай тўпламнинг хос қисм тўплами деб қаралмаган тўплам *универсал* тўплам дейилади ва у U орқали белгиланади.

U универсал тўпламнинг барча қисм тўпламлари тўпламини $T(U)$ орқали белгилаймиз. Бу ҳолда $A \in T(U)$ ни $A \subseteq U$ деб тушунилади. $\varnothing$ ва A тўпламлар учун ҳам $\varnothing \in T(U)$ ва $A \in T(U)$ лар ўринли. $T(U)$ тўпламдан олинган исталган иккита A ва B тўпламлар бирлашмаси, кесишмаси ҳамда $\overline{A}$ ва $\overline{B}$ тўпламлар $T(U)$ нинг аниқланишига асосан яна $T(U)$ га тегишли бўлади. U универсал тўпламнинг барча қисм тўпламлари орасида иккита хосмас қисм тўплам мавжуд бўлиб, улардан бири U нинг ўзи, иккинчиси эса бўш тўплам, қолганлари эса хос қисм тўпламлар бўлади.

U универсал тўплам чекли бўлса, унинг барча қисм тўпламлари ҳам чекли бўлади. U чексиз бўлганда эса унинг қисм тўпламлари чекли ёки чексиз бўлиши мумкин.

Масалан, N натурал сонлар тўпламини олсак, $\{1\}\subset N$, $\{2\}\subset N$, , $\{n\}\subset N$ бўлиб, бу ерда ҳар бир қисм тўплам чекли бўлгани ҳолда $\{1, 3, \quad 2n+1, \quad\}\subset N$, $\{2, 4, \quad 2n, \quad\}\subset N$ да ҳар бир қисм тўплам чексиздир.

Мисоллар. 1. $x\in N$ бўлганда $A=\{x\,|\,x\geqslant 5\}$, $B=\{x\,|\,x\leqslant 7\}$ лар учун: а) $A\cup B$; б) $A\cap B$; в) N га нисбатан $\overline{A}$; г) $\overline{A}\cup B$; д) $\overline{A}\cup\overline{B}$; е) $\overline{A}\cap\overline{B}$; ж) $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$ лар топилсин.

Ечиш. $A=\{x\,|\,x\geqslant 5\}=\{5, 6, 7, \quad\}$ бўлгани учун $\overline{A}=\{1, 2, 3, 4\}$ ва $\overline{B}=\{8, 9, 10, \quad\}$ бўлади. Унда:

а) $A\cup B=\{5, 6, 7, \quad\}\cup\{1, 2, \quad 7\}=N$, $A\cup B=N$;
б) $A\cap B=\{5, 6, 7, \quad\}\cap\{1, 2, \quad 7\}=\{5, 6, 7\}$, $A\cap B=\{5, 6, 7\}$;
в) $\overline{A}=\{1, 2, 3, 4\}$;
г) $\overline{A}\cup B=\{1, 2, 3, 4\}\cup\{1, 2, \quad , 7\}=B$, $\overline{A}\cup B=B$;
д) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 4\}\cup\{8, 9, \quad\}=$
$=\{1, 2, 3, 4, 8, 9, \quad\}$, $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 4, 8, 9. \quad .\}$
е) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1, 2, 3, 4\}\cap\{8, 9, \quad\}=\varnothing$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$;
ж) $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup\{5, 6, 7\}=\{5, 6, 7\}$, $(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)=\{5, 6, 7\}$.

2. $A=\{3k\,|\,k\in N\}$, $B=\{2k\,|\,k\in N\}$ ва $C=\{9k\,|\,k\in N\}$ бўлса: а) $A\cup B$; б) $A\cap B$; в) $A\cap B\cap C$ лар топилсин.

Ечиш.

а) $A\cup B=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}$;
б) $A\cap B=\{6, 12, 18, \quad\}=\{6k\,|\,k\in N\}$, $A\cap B=\{6k\,|\,k\in N\}$;

в) $A \cap B \cap C = \{6, 12, 18, \quad .\} \cap \{9, 18, 27, \quad .\} = \{18, 36, 54, \quad \} = \{18k \mid k \in N\}$,

$$A \cap B \cap C = \{18k \mid k \in N\}.$$

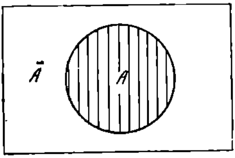
Машқлар

1. $A = \{x - 12 \geqslant 7 \mid x \in N\}$ ва $B = \{x + 15 \leqslant 16 \mid x \in N\}$ тўпламлар учун: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) N га нисбатан $A \overline{\cap B}$; г) $A \Delta B$ лар топилсин.

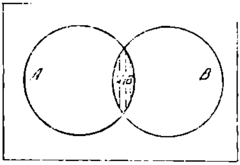
2. $A = \{7k \mid k \in Z\}$, $B = \{3 + k > 5 \mid k \in Z\}$, $C = \{7 - k \geqslant 3 \mid k \in Z\}$ тўпламлар учун: а) $\overline{A \cup B \cup C}$; б) $A \cap (B \cup C)$; в) $A \cup (B \cap C$; г) $A \cup (\overline{B \cap C})$ тўпламларни тузинг.

3-§. ЭЙЛЕР-ВЕНН ДИАГРАММАЛАРИ

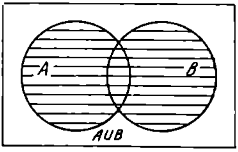
U универсал тўпламни тўғри тўртбурчак билан ва унинг хос қисм тўпламларини шу тўртбурчак ичидаги доиралар билан тасвирлашни қабул қиламиз. Бу ҳолда тўртбурчакнинг штрихланган (1-чизма) бўлаги A қисм тўплам бўлса, штрихланилмаган бўлаги $\bar{A}$ тўлдирувчи тўплам бўлади. Бундан $A \cap \bar{A} = \varnothing$ эканлиги равшан. 1-чизмага асосан қуйидагиларни ёза оламиз:



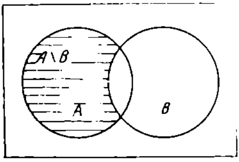
1-расм.



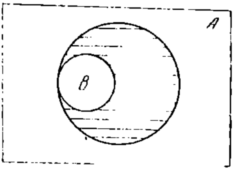
2-расм.



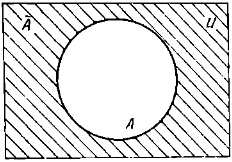
3-расм.



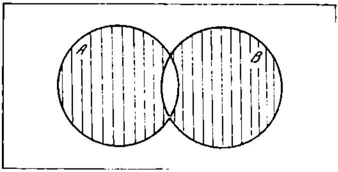
4-расм.



5- расм.



6- расм.



7- расм.

1) $A \cup A = A$; 2) $A \cup \bar{A} = U$.

A ва B қисм тўпламларнинг $A \cap B$ кесишмаси 2-чизмада тасвирланган. Бу кесишма тўртбурчакнинг штрихланган бўлагидан иборат: A ва B нинг бирлашмаси 3-чизмадаги тўртбурчакнинг барча штрихланган бўлагини ташкил қилади.

A тўпламдан B нинг айирмаси 4-чизмада берилган. Бу айирма тўртбурчакнинг штрихланган бўлагидир.

B тўпламни A гача тўлдирувчи тўплам 5-чизмада кўрсатилган. Ниҳоят, A тўпламни U универсал тўпламгача тўлдирувчи тўплам 6-чизмада кўрсатилгандек бўлади.

7-чизмадаги штрихланган қисм A ва B тўпламларнинг симметрик айирмасидир.

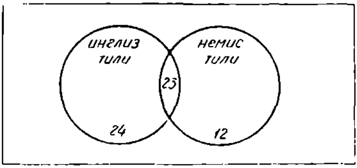
Мана шу усулда учта, тўртта ва ҳ. к. қисм тўпламларнинг кесишмаси ва бирлашмасини Эйлер-Венн доиралари орқали тасвирлаш мумкин. Бундай тасвирлаш одатда Эйлер-Венн диаграммалари деб юритилади. A ва B тўпламлар чекли тўпламлар бўлганда уларнинг элементлари сони мос равишда $n(A)$ ва $n(B)$ каби белгиланади. Бундай ҳолда 3-чизмага асосан

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \qquad (1)$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \qquad (2)$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Хусусий ҳолда, яъни $A \cap$ $\cap B = \varnothing$ бўлганда (1) ва (2) тенгликлар мос равишда $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ва $n(A \cap B) = 0$ кўринишни олади. (1) ва (2) тенгликлар одатда қўшиш ва кўпайтириш қонунлари деб юритилади.

Мисоллар. 1. Математика факультетининг 1 курсида 75 талаба ўқийди. Улардан 47 таси мактабда инглиз тилини, 35 таси немис тилини, 23 таси эса ҳар иккала тилни ўрганган. Курс талабаларидан нечтаси иккала тилни ҳам билмайди?

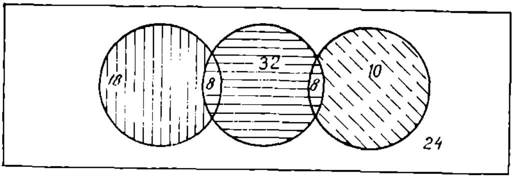


8- расм.

Бу масалани ечиш учун Эйлер-Венн диаграммаларидан фойдаланамиз (8- чизма). Тўғри тўртбурчак сифатида 1 курс талабалари тўпламини оламиз. Бу ерда иккита тўплам кесишмаси 23 та элементдан иборат бўлгани учун фақат инглиз тилини ўрганганлар сони 47—23=24 та, фақат немис тилини ўрганганлар сони 35—23=12 та ва ниҳоят, ҳар иккала тилни билмайдиганлар сони эса 75—(24+23+12)=16 тадан иборат.

2. Математика факультетидан 100 талабани текшириб кўрилганда уларнинг 18 таси фақат немис тилини, 8 таси немис ва француз тилини, 48 таси француз тилини, 8 таси француз ҳамда испан тилини ўрганиши ва ниҳоят 24 таси ҳеч қандай тилни ўрганмаганлиги аниқланди. а) Қанча талаба испан тилини ўрганади? б) Қанча талаба француз тилини ўрганмаслик шарти билан немис ва испан тилини ўрганади? в) Қанча талаба испан тилини ўрганмаганда ва фақат шундагина француз тилини ўрганади?

Ечиш. Аввало Эйлер-Венн диаграммасини тузиб оламиз (9- чизма). Бу ерда ҳар бир доира немис, француз ва испан тилини ўрганувчи талабалар тўпламини,



9- расм.

тўғри тўртбурчак эса текширилган талабалар тўпламини ифодалайди. Учта чет тилдан камида бирини ўрганувчи талабалар сони 100—24=76 тадир. а) Қанча талаба испан тилини ўрганишини аниқлаш учун тил ўрганувчи барча талабалар сони (76) дан немис тили (26) ҳамда фақат француз тили (48—8—8) ўрганувчи талабалар сонини айириб ташлаймиз, унда 76—26—32=76——58=18 ҳосил бўлади.

б) Француз тилини ўрганмасдан испан тилини ўрганувчи талабалар сонини топиш учун тил ўрганувчи талабалар сонидан француз ва фақат немис тилини ўрганувчи талабалар сонини айирамиз. Унда 76—48——18=10 ҳосил бўлади.

в) Испан тилини ўрганмаганда ва фақат шундагина француз тилини ўрганувчи талабалар сонини топиш учун эса тил ўрганувчи барча талабалар сонидан фақат немис тили (18) ва француз ҳамда испан тилини ўрганувчи талабалар сони (8), фақат испан тилини ўрганувчилар сони (10) нинг йиғиндисини айириш керак (9- чизмага қаранг). Демак, бундай талабалар сони 76—(18+8+10)=40 экан.

4-§ ТУПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Бирор U унверсал тўпламнинг қисм тўпламлари учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

1. Исталган иккита A ва B тўпламларнинг кесишма ва бирлашмаси коммутатив бўлади, яъни

$$A \cap B = B \cap A, \qquad (1)$$

$$A \cup B = B \cup \mathrm{A}. \qquad (2)$$

2. Бирлашма ва кесишма амаллари ассоциативдир:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (3)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \qquad (4)$$

(1) ва (2) нинг ўринли эканлиги кесишма ва бирлашманинг таърифидан келиб чиқади. Биз ҳозир (4) тенгликнинг ўринли эканлигини исботлаймиз. $x \in (A \cap B) \cap C$ бўлсин. Унда кесишманинг таърифига асосан $x \in A \cap B$ ва $x \in C$ бўлади. $x \in A \cap B$ бўлгани учун $x \in A$ ва $x \in B$. Демак, $x \in A$ ва $x \in B \cap C$. Охирги тасдиқ эса $x \in A \cap (B \cap C)$ эканлигини билдиради. Шундай қилиб, x элементнинг ихтиёрий эканлигига асосланиб,

$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) \qquad (*)$$

деб оламиз.

Аксинча, $y \in A \cap (B \cap C)$ бўлсин. У ҳолда $y \in A$ ва $y \in B \cap C$ бўлиб, бундан $y \in B$ ва $y \in C$. Демак, $y \in A \cap B$ ва $y \in C$. Охирги иккита муносабатга асосан эса $y \in (A \cap B) \cap C$ дир.

Шундай қилиб,

$$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C \qquad (**)$$

экан. $(*)$ ва $(**)$ ларга асосан (4) нинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

(3) ва (4) тенгликларни исталган чекли сондаги тўпламлар учун ҳам ёзиш мумкин.

3. Учта A, B ва C тўплам устида бажариладиган кесишма ва бирлашма амаллари учун дистрибутивлик қонуни бажарилади:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad (5)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (6)$$

Охирги муносабатлар исталган чекли сондаги тўпламлар учун ҳам бажарилади, яъни

$$A \cup (\bigcap_{i=1}^{k} B_i) = \bigcap_{i=1}^{k} (A \cup B_i), \qquad (7)$$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i). \qquad (8)$$

Битта универсал тўпламнинг барча қисм тўпламлари учун қуйидаги айниятлар ҳам ўринли бўлади:

4. Идемпотентлик қонунлари: $A \cup A = A$, (9)

$A \cap A = A$. (10)

5. Ютилиш қонунлари: $A \cup (A \cap B) = A$, (11)

$A \cap (A \cup B) = A$. (12)

6. де-Морган қонунлари: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, (13)

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \qquad (14)$$

7. $A \cup U = U$.
8. $A \cap U =$ A.
9. Инволюция қонуни: $\overline{\overline{A}} = A$.
10. $\varnothing = U, \quad \overline{U} = \varnothing$.

Бу қонунларнинг биттасини, яъни (5) тенгликни исбот этайлик. $A \cup (B \cap C)$ нинг исталган x элементи камида A га ёки $B \cap C$ га тегишли бўлади. Демак, x элемент A га ёки B ва C ларга тегишли. У ҳолда x элемент $A \cup B$ га га $A \cup C$ га тегишли. Шунинг учун $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ бўлади.

Демак,

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad (15)$$

Аксинча, $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ нинг ҳар бир y элементи $A \cup B$ ва $A \cup C$ га тегишли. Демак, y элемент A га ёки B ва C ларга тегишли. Шу сабабли, y элемент A га ёки $B \cap C$ га тегишли бўлгани учун бу элемент $A \cup (B \cap C)$ га ҳам тегишли. Демак,

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \qquad (16)$$

(15) ва (16) дан (5) тенглик келиб чиқади.

Қолган тенгликларни исботлашни мустақил иш учун қолдирамиз.

Машқлар

1. Қуйидаги тўпламларнинг ҳар иккитаси ва учаласининг ҳам кесишмалари ва бирлашмаларини топинг:

$$A = \{a, b, c\}, \; B = \{d, e, f, g\}, \; C = \{a, f, g, k, e\}.$$

2. Қуйидаги тўпламларнинг ҳар иккитасининг айирмасини аниқланг:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \; B = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \; C = \{1, 2, 3\}.$$

3. $N = \{1, 2, 3, \quad , n, \quad .\}$ натурал сонлар тўплами учун $B = \{3, 6, 9, \quad , 3n, \quad .\}$ қисм тўплам. $\overline{B}$ ни топинг.

4. $A = \{a, b, c, d\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларини ёзиб чиқинг.

5. U универсал тўпламнинг $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, c, d, f, g\}$ қисмлари учун $(A \setminus B) \cap C$ ни аниқланг ва буни Эйлер-Венн диаграммалари билан тасвирланг.

GDİ KÜTÜPHANESİ

6. N универсал тўпламнинг $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 6\}$, $C=\{3, 4, 7, 8\}$ қисмлари берилган. $(A \cap B)\setminus C$ ни аниқланг ва уни Эйлер-Венн диаграммалари билан тасвирланг.

7. N универсал тўпламнинг $A \cap B=\varnothing$ шартни қаноатлантирувчи қисм тўпламлари учун $A \subseteq \overline{B}$, $B \subseteq \overline{A}$ эканлигини исботланг.

8. Қуйидаги тўпламларни Эйлер-Венн диаграммалари ёрдамида ифодаланг:

а) $A \cap B \cap \overline{C}$; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $(\overline{A} \cup B) \cap C$.

9. U тўпламнинг A, B, C қисм тўпламлари учун $A \subset B$, $B \subset C$ бўлса, $A \subset C$ бўладими?

10. 9-мисолдаги шартни қаноатлантирадиган тўпламлардан баъзиларини ёзинг.

11. Q^+ — манфиймас рационал сонлар тўплами, Z^+ — манфиймас бутун сонлар тўплами бўлганда қуйидагиларни аниқланг:

а) $Z^+ \cup Q^+$; б) $Z^+ \cup N$; в) $N \cup R \cup Q$;
г) $N \cup Z$; д) $Z^+ \cap Q^+$; е) $Z^+ \cap N$;
ж) $(N \cap Q) \cup Z^+$; з) $Q \cap R$; и) $(R\setminus Q) \cup N$.

12. 100 та талаба текшириб кўрилганда қуйидагилар аниқланди: улардан 28 таси испан тилини, 30 таси немис тилини, 42 таси француз тилини, 8 таси испан ва немис тилини, 10 таси испан ва француз тилини, 5 таси немис ва француз тилини ва ниҳоят 3 таси ҳар учала тилни ўрганар экан. Қуйидагиларни аниқланг:

а) Қанча талаба бирорта ҳам чет тилини билмайди?

б) Қанча талаба фақат француз тилини ўрганади?

в) Қанча талаба француз тилини ўрганганда ва фақат шундагина немис тилини ўрганади?

Кўрсатма: Эйлер-Венн диаграммаларидан фойдаланинг.

5-§. ТУПЛАМЛАРНИНГ ДЕКАРТ КУПАЙТМАСИ

Иккита бўшмас A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

1-таъриф. A тўплам элементларини биринчи, B тўплам элементларини иккинчи қилиб тузилган барча жуфтликлар тўплами A ва B тўпламларнинг *декарт (тўғри) кўпайтмаси* дейилади ва у $A \times B$ орқали белгиланади.

Бу таърифга асосан $A \times B = \{(x;\ y) \mid x \in A,\ \ y \in B\}$ бўлиб, бу ерда x элемент $(x;\ y)$ жуфтликнинг биринчи компонентаси (ташкил этувчиси), y эса иккинчи компонентаси деб юритилади. Кўп ҳолларда тартибланган жуфтликни узунлиги иккига тенг бўлган *кортеж* деб ҳам юритилади.

Узунлиги n га тенг бўлган кортеж деганда тартибланган $(a_1,\ a_2, \qquad , a_n)$ белгини тушунамиз. Бу ерда n кортеж узунлиги деб юритилади. Кортежлар тўпламида тенглик муносабатини киритиш мумкин.

2-таъриф. Агар иккита $(a_1,\ a_2, \qquad , a_n)$ ва $(b_1,\ b_2, \qquad , b_n)$ кортежларнинг узунликлари ва мос компоненталари ўзаро тенг бўлса, бу кортежлар *тенг* дейилади.

Масалан, $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 2\}$ тўпламлар бир хил. Кортежларда элементлар тартибланган. Шунинг учун $\{1,\ 2,\ 3\} = \{1,\ 3,\ 2\}$, лекин $(1;\ 2;\ 3) \neq (1;\ 3;\ 2)$.

Мисол. $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{4,\ 5,\ 6\}$ бўлсин, унда

$$A \times B = \{(1;\ 4),\ (1;\ 5),\ (1;\ 6),\ (2;\ 4),\ (2;\ 5),\ (2;\ 6)\},$$
$$B \times A = \{(4;\ 1),\ (4;\ 2),\ (5;\ 1),\ (5;\ 2),\ (6;\ 1),\ (6;\ 2)\},$$
$$A \times A = \{(1;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1),\ (2;\ 2)\},$$
$$B \times B = \{(4;\ 4),\ (4;\ 5),\ (4;\ 6),\ (5;\ 4),\ (5;\ 5),\ (5;\ 6),$$
$$(6;\ 4),\ (6;\ 5),\ (6;\ 6)\}$$

бўлади.

Агар A ва B тўпламлар мос равишда m та ва n та элементли тўпламлар бўлса, уларнинг $A \times B$ тўғри кўпайтмаси mn та жуфтликлардан иборат бўлади. Декарт кўпайтма тушунчасини исталган чекли сондаги тўпламлар учун киритиш мумкин.

3-таъриф. Исталган $A_1,\ A_2, \qquad , A_n$ тўпламлар берилган бўлса, $A_1 \times A_2 \times \qquad \times A_n$ декарт кўпайтманинг исталган W қисм тўплами $A_1,\ A_2, \qquad , A_n$ тўпламлар элементлари орасида аниқланган n ўринли *мослик*, n га эса шу W мосликнинг *ранги* дейилади.

Хусусий ҳолда, яъни $A_1 = A_2 = \qquad = A_n = A$ бўлганда W мослик A тўпламда аниқланган муносабат деб юритилади. W муносабат A^n декарт кўпайтманинг ҳар бир элементига A тўпламнинг битта элементини мос қўяди. Бу ерда $A^n = \{(x_1,\ x_2, \qquad , x_n) \mid x_1 \in A,\ \ x_2 \in A, \qquad , x_n \in A\}$ бўлиб, $(x_1,\ x_2, \qquad , x_n)$ узунлиги n га тенг кортеждир.

Декарт кўпайтма коммутатив эмас. Ҳақиқатан, юқорида келтирилган мисолга эътибор берсак, $A \times B \neq B \times A$ бўлади. Агар $((a;\ b);\ c) = (a;\ b;\ c)$ деб шартлашсак, мазкур кўпайтма ассоциатив, яъни $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. Бу тасдиқни машқ сифатида текшириб кўриш мумкин.

6-§. БИНАР МУНОСАБАТЛАР

Биз 5-§ да иккита тўпламнинг декарт (тўғри) кўпайтмаси тартиб билан олинган жуфтликлар тўпламидан иборат эканлигини кўриб ўтган эдик.

1-таъриф. $A \times B$ декарт кўпайтманинг исталган R қисм тўпламига A ва B тўплам элементлари орасида аниқланган *бинар* (икки ўринли) *муносабат* дейилади.

Агар $a \in A$, $b \in B$ бўлиб, $(a;\ b) \in R$ бўлса, a элемент R муносабат ёрдамида b элемент билан боғланган деб ўқилади ёки R муносабат a ва b элементлар учун ўринли деб юритилади ва $a R b$ орқали ёзилади. Мосликлар одатда ρ, R, S, T, . . ҳарфлар орқали белгиланади.

Мисол. Агар a, b лар тўғри чизиқларни ифодаласа, у ҳолда $a \parallel b$, $a \perp b$ бўлиб, $\parallel$, $\perp$ лар бинар муносабатлар бўлади.

Берилган тўпламларнинг ҳар бири чекли тўпламлар бўлса, улар орасидаги мосликни фақатгина жуфтликлар орқали эмас, балки графлар орқали ҳам ифодалаш мумкин.

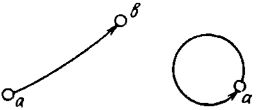
2-таъриф. Текисликдаги чекли сондаги нуқталар ва уларнинг баъзиларини туташтирувчи чизиқлар тўплами ҳосил қилган фигура *граф,* нуқталар графнинг *учлари,* бу учларнинг қандайдир иккитасини туташтирувчи чизиқ графнинг *қирраси* дейилади. Барча қирралари йўналиши стрелка билан кўрсатилган граф *ориентирланган граф* дейилади.

A тўпламдаги R бинар муносабатни граф орқали ифодалаш учун қуйидагича иш тутамиз:

Даставвал A тўпламдаги элементларни нуқталар билан белгилаб чиқамиз, сўнгра $(a;\ b)$ жуфтликлар учун, яъни $(a;\ b) \in R$ $(a \neq b)$ бўлганда a дан b элементга 10-чизмада кўрсатилгандек стрелкали чизиқ ўтказамиз.

$a = b$ бўлса, яъни $(a;\ a) \in R$ га 10-чизмадаги сиртмоқ мос келади. Йўналиши икки томонга стрелка билан кўрсатилган қирра ориентирланмаган граф дейилади (11-чизма).

Энди бинар муносабатларнинг тенглиги, инверсияси ва композицияси тўғрисида тўхталамиз.



10- расм.

11- расм.

3-таъриф. R ва S бинар муносабатлар берилган бўлиб, ихтиёрий x ва y элементлар учун $(x;\ y) \in R$ бўлганда ва фақат шундагина $(x;\ y) \in S$ бўлса, $R = S$ дейилади.

4-таъриф. R ва S муносабатларнинг композицияси (суперпозицияси) деб бирор z элемент учун $(x;\ z) \in S$ ва $(z;\ y) \in R$ шартни қаноатлантирувчи барча $(x;\ y)$ жуфтликлар тўпламига айтилади ва у $R \circ S$ ёки $R * S$ орқали белгиланади.

Таърифга асосан R ва S муносабатлар композициясини $R \circ S = \{(x;\ y) \mid$ шундай z мавжудки, унинг учун xSz ва zRy лар ўринли$\}$ орқали ёзилади.

Мисол.

$$S = \{(5;\ 6),\ (7;\ 8),\ (10;\ 12)\},$$
$$R = \{(6;\ 4),\ (12;\ 3),\ (3;\ 9)\}$$

бўлганда $R \circ S = \{(5;\ 4),\ (10;\ 3)\}$ бўлади.

5-таъриф. $R = \{(x;\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ бўлганда $(y;\ x) \in R$ шартни қаноатлантирувчи барча жуфтликлар тўплами R бинар муносабатнинг *инверсияси* дейилади ва у R^{-1} орқали белгиланади.

Таърифга кўра $R^{-1} = \{(x;\ y) \mid (y;\ x) \in R\}$ бўлади.

Мисол. $R=\{(5;\ 4),\ (6;\ 5),\ (7;\ 6)\}$ бўлганда $R^{-1}=\{(4;\ 5),\ (5;\ 6),\ (6;\ 7)\}$ бўлади.

6-таъриф. R нинг барча жуфтликларидаги биринчи элементлари тўпламига R муносабатнинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва у S_R ёки Dom R орқали белгиланади.

7-таъриф. R нинг барча жуфтликларидаги иккинчи элементлари тўпламига R муносабатнинг *қийматлари тўплами* дейилади ва у ρ_R ёки Im R орқали белгиланади.

$\leftrightarrows$ символ одатда таърифга асосан белгиланишни билдиради. R муносабатнинг аниқланиш ва қийматлари соҳаларини мос равишда $\mathrm{Dom}\ R \leftrightarrows S_R = \{x \mid$ шундай y мавжудки, унинг учун $(x;\ y) \in R\}$, $\mathrm{Im}\ R \leftrightarrows \rho_R = \{y \mid$ шундай x мавжудки, унинг учун $(x;\ y) \in R\}$ каби ёза оламиз.

Бинар муносабатлар жуфтликлар тўпламини ифодалагани учун муносабатларнинг бирлашмаси, кесишмаси ва тўлдирувчи тўпламлари тўғрисида фикр юритиш мумкин.

Мисоллар. 1. n исталган натурал сон бўлганда, $W \subset \{(n;\ n+1)\}$ муносабат бинар муносабат бўлади.

Ҳақиқатан, бирор $(a;\ b)$ жуфтлик W га тегишли, яъни $(a;\ b) \in W$ бўлиши учун $b = a + 1$ бўлиши зарур ва етарлидир. $a + 1$ натурал сон эса a дан бевосита кейин келувчи натурал сондир. Демак, N натурал сонлар тўпламида «. . дан бевосита кейин келишлик» муносабати бинар муносабат экан.

2. m ва n лар бутун сонлар бўлганда $W \subset \{(nm;\ n)\}$ муносабат бутун сонлар тўпламида аниқланган бинар муносабат бўлади.

Ҳақиқатан, агар $a = nm$ бўлса ва фақат шундагина $(a;\ n) \in W$ бўлади. Агар $(a;\ n) \in W$ бўлса, a сон n га бўлинади (n сон a ни бўлади), дейилади ва $n \vdots a$ ёки $a \quad n$ каби белгиланади.

3. Q — рационал сонлар тўпламида аниқланган $=$, $>$, $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ муносабатлари ҳам бинар муносабатлардир.

4. W — барча туб сонлар тўплами бўлсин. Унда исталган натурал сон учун $a \in W$ шарт a нинг туб сон эканлигини билдиради. Демак, $a \in N$ нинг таблиги натурал сонлар тўпламида аниқланган унар муносабат экан.

5. Иккита a ва b натурал сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топиш тернар муносабат бўлади.

Машқлар

1. Ҳақиқий сондан куб илдиз чиқариш неча ўринли муносабат бўлади?

2. Бирор универсал тўпламнинг қисм тўпламлари учун аниқланган бирлашма, кесишма ва тўлдирувчи тўпламларни аниқлашларнинг ҳар бири неча ўринли муносабат бўлади?

3. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ тўпламда a сон b га қолдиқсиз бўлинади муносабати учун граф қуринг.

4. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ бўлса, $A \times B$ ва $B \times A$ ларни аниқланг.

5. $C = \{1; 2\}$ бўлса, 5-мисолдаги A, B ва C лар учун $A \times (B \times C)$ ва $(A \times B) \times C$ ларни тузинг ва $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ эканлигини текширинг.

7- §. БИНАР МУНОСАБАТЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

Бинар муносабатларнинг баъзи бир турлари устида тўхталиб ўтамиз.

I. Рефлексивлик муносабати.

1-таъриф. A тўпламнинг исталган x элементи учун xRx бажарилса (рост бўлса), у ҳолда R муносабат A тўпламда аниқланган *рефлексивлик муносабати* дейилади. Агар A тўпламнинг ҳар қандай элементи учун xRx бажарилмаса, R *антирефлексив*, A тўпламнинг баъзи бир элементлари учун xRx бажарилиб, баъзи бир y элементлари учун yRy бажарилмаса, R A тўпламдаги *рефлексивмас муносабат* дейилади.

Мисоллар. 1. Z бутун сонлар тўпламида $x - y$ айирманинг $m > 0$ бутун сонга қолдиқсиз бўлиниш муносабати рефлексив муносабатдир. Дарҳақиқат, барча $x \in Z$ учун $x - x = 0$ айирма $\cdot m > 0$ га қолдиқсиз бўлинади.

2. R ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган «кичик» (катта) муносабати антирефлексив, чунки ҳар қандай $x \in R$ учун $x < x$ $(x > x)$ доимо бажарилмайди.

3. N тўпламда аниқланган «x ва y нинг энг катта умумий бўлувчиси d га тенг» муносабати рефлексивмас муносабат бўлади. Ҳақиқатан, $x = y = d$ лар учун $(d; d) = d$ бўлгани ҳолда, $x < d$ ва $x > d$ лар учун $(x; x) \neq d$ бўлади.

II. Симметриклик муносабати.

2-таъриф. A тўпламдаги ихтиёрий x ва y элементлар учун xRy муносабатнинг бажарилишидан yRx муносабат ҳам бажарилса, у ҳолда R ни A тўпламдаги *симметрик муносабат* дейилади.

A даги x ва y элементлар учун xRy бажарилиб, лекин y ва x лар учун yRx бажарилмаса, R муносабат A тўпламда *симметрикмас муносабат* дейилади.

3-таъриф. Агар A тўпламдаги ихтиёрий x ва y элементлар учун xRy ва yRx ларнинг ўринли эканлигидан $x = y$ келиб чиқса, у ҳолда R ни A тўпламдаги *антисимметрик муносабат* дейилади.

III. Транзитивлик муносабати.

4-таъриф. A тўпламнинг ихтиёрий x, y ва z элементлари учун xRy ва yRz ларнинг бажарилиши (ростлиги) дан xRz нинг ҳам бажарилиши келиб чиқса, у ҳолда R муносабатга A тўпламдаги *транзитивлик муносабати* дейилади. Агар xRy ва yRz ларнинг ростлигидан xRz нинг ростлиги келиб чиқмаса, R га *транзитивмас муносабат* дейилади.

Мисоллар. 1. Натурал сонлар тўпламида аниқланган қолдиқсиз бўлиниш муносабати транзитив муносабат бўлади.

2. Натурал сонлар тўпламидаги тенгмаслик муносабати транзитив эмас.

Ҳақиқатан $x=4$, $y=9$ ва $z=4$ қийматларда $y \neq z$, лекин $x=z$.

8-§. ТУПЛАМНИ ЭҚВИВАЛЕНТ СИНФЛАРГА АЖРАТИШ

7-§ да бинар муносабатларнинг бир қанча турларини кўриб ўтдик. Баъзи ҳолларда битта тўпламда бинар муносабатларнинг бир қанчаси аниқланган бўлиши мумкин.

1-търиф. Агар A тўпламда аниқланган R бинар муносабат бир вақтнинг ўзида рефлексив, симметрик ва транзитив бўлса, у ҳолда R муносабатга *эквивалентлик муносабати* дейилади.

Эквивалентлик муносабати $\sim$ ёки $\equiv$ каби белгиланади.

Масалан: 1) исталган бўшмас A тўплам элементлари учун аниқланган тенглик муносабати; 2) тўғри чизиқлар (бир текисликда ётувчи) тўпламида аниқланган параллеллик муносабати; 3) учбурчаклар тўпламидаги ўхшашлик муносабати; 4) геометрик фигураларнинг тенгдошлик муносабати эквивалентлик муносабати бўлади.

A тўпламда аниқланган эквивалентлик муносабати шу A тўпламни ўзаро кесишмайдиган синфларга ажратиш тушунчаси билан узвий боғланган.

Биз энди шу тушунчани баён этишга киришамиз.

A тўпламнинг қисм тўпламларини A_α деб белгилаймиз. Бу ерда α сон $\{1, 2, 3, \quad , k\} = I$ тўпламнинг элементидир.

2-таъриф. Агар бўшмас A тўпламнинг A_α ($\alpha \in I$, $I \subseteq$

$\subseteq N$) қисм тўпламлари учун қуйидаги шартлар бажарилса, яъни

а) барча $A_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots)$ қисм тўпламлар бўш эмас;

б) $\alpha \neq \beta$ бўлганда $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$;

в) $A = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ бўлса (бу ерда $\bigcup A_\alpha$ белги барча A_α ларнинг бирлашмасини ифодалайди), A тўплам ўзаро кесишмайдиган A_α қисм тўплам (синф) ларга *бўлакланган (факторизацияланган)* дейилади.

Масалан, барча бутун сонларни 3 га бўлиб, уларни бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқлари бўйича синфларга ажратсак, $Z = \{3k \mid k \in Z\} \cup \{3k+1 \mid k \in Z\} \cup \{3k+2 \mid k \in Z\}$ ҳосил бўлади. Бу ерда $\{3k \mid k \in Z\}$, $\{3k+1 \mid k \in Z\}$ ва $\{3k+2 \mid k \in Z\}$ тўпламлар юқоридаги учта шартни қаноатлантиради.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. *Агар бирор бўш бўлмаган A тўплам элементлари учун ρ эквивалентлик муносабати ўринли бўлса, A тўплам факторизацияланган бўлади ва аксинча, яъни A тўпламнинг ҳар бир факторизацияси шу тўпламдаги бирор эквивалентлик муносабати билан боғланган бўлади.*

Исботи. A тўпламнинг ихтиёрий x элементига ρ муносабат бўйича эквивалент бўлган барча элементлар тўпламини C_x деб белгилаймиз, яъни $C_x = \{y \in A \mid y \rho x\}$.

C_x нинг аниқланишига асосан $C_x \subseteq A$. $x \rho x$ ўринли бўлгани учун $x \in C_x$. Демак, A нинг ҳар бир элементи қандайдир C_x қисм тўпламга тегишли бўлади.

Энди $C_x \cap C_y = \varnothing$ эканлигини кўрсатамиз.

Агар $C_x \cap C_y \neq \varnothing$ бўлса, $C_x = C_y$ бўлади. Бошқача қилиб айтганда, C_x эквивалентлик синфи бўлади. Ҳақиқатан, $C_x \cap C_y \neq \varnothing$ бўлганда C_x ва C_y ларга тегишли бўлган z элемент топилади. Унда $z \in C_x$ бўлгани учун $z \rho x$ рост. Худди шунингдек, $z \in C_y$ бўлганидан $z \rho y$ ҳам ўринли. ρ муносабат транзитив бўлгани учун $x \rho z$ ва $z \rho y$ лардан $x \rho y$ ёки $x \in C_y$ бўлади.

x элемент C_x нинг ихтиёрий элементи эканлигидан

$$C_x \subseteq C_y \qquad (1)$$

дир. ρ муносабат симметрик муносабат бўлгани туфайли $y \rho z$

ва $z\rho y$ муносабатлар ҳам бажарилади. Бу муносабатлар $y \in C_z$ ва $z \in C_y$ эканлигини кўрсатади.

ρ муносабат транзитив бўлгани учун $y\rho z$, $z\rho x$ ларга асосан $y\rho x$ дея оламиз. Охирги муносабатдан эса $y \in C_x$ дир. y элемент C_y нинг ихтиёрий элементи эканлигига асосан

$$C_y \subseteq C_x \tag{2}$$

бўлади. (1) ва (2) дан $C_x = C_y$ лиги келиб чиқади.

Агар a, $b \in C_x$ бўлса, унда $a\rho y$ ва $b\rho y$ лар ўринли. Унда ρ симметрик муносабат бўлганидан $x\rho b$ ўринли бўлади. $a\rho x$ ва $x\rho b$ лардан эса $a\rho b$ ҳосил бўлади. Демак, иккита элемент битта синфга тегишли бўлса, унда улар эквивалент бўлар экан. Худди шунингдек, агар $a\rho b$ бўлса, $a \in C_b$ ва $b \in C_b$ бўлади. Теореманинг биринчи қисми исботланди.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $\{B_\alpha\}$ тўплам $\alpha \in N$, A тўпламнинг қандайдир факторизацияси бўлсин. $x \in B_\alpha$ ва $y \in B_\alpha$ бўлганда ва фақат шундагина $x\rho y$ деб оламиз, бу қисқача

$$y \in B_\alpha \rightleftarrows x\rho y \tag{3}$$

орқали ёзилади.

Унда: 1) ҳар бир $x \in A$ элемент биттагина қисм тўпламга тегишли бўлганидан $x\rho x$ ўринли, яъни ρ муносабат рефлексив;

2) x, $y \in B_\alpha$ ва y, $z \in B_\beta$ (4) бўлса, юқоридаги (3) муносабатга асосан $x\rho y$ ва $y\rho z$ бўлади. Лекин $y \in A$ элемент фақат битта қисм синфга тегишли бўлгани учун $B_\alpha = B_\beta$ дир. Охирги муносабат эса (4) га асосан x, $z \in B_\beta$ эканлигини кўрсатади. (3) муносабатга биноан эса x, $y \in B_\beta$ ни $x\rho z$ деб ёза оламиз. Шундай қилиб, $x\rho y$ ва $y\rho z$ лардан $x\rho z$ нинг ўринли эканлиги ҳосил қилинди. Демак, ρ муносабат транзитив экан; 3) x, $y \in B_\alpha$ эканлиги x ва y нинг битта синфга тегишли эканлигини билдиргани учун $x\rho y$ на $y\rho x$ муносабатлар бажарилади. Демак, ρ муносабат симметрик муносабат бўлади. 1) — 3) лар эса ρ нинг A тўпламдаги эквивалентлик муносабати эканлигини тасдиқлайди. Теорема тўла исбот бўлди.

Бундан сўнг, агар бирор A тўплам ρ эквивалентлик муносабати ёрдамида эквивалентлик синфларига бўлакланган бўлса, бу эквивалентлик синфлар тўпламити биттадан ортиқ аслига эга бўлмаса, бундай акслантиришга *инъектив (ичига) акслантириш* дейилади.

Инъектив акслантиришда A тўпламнинг ҳар хил элементлари B тўпламнинг ҳар хил элементларига ўтади, яъни x, $x_1 \in A$ бўлиб, $x \neq x_1 \Rightarrow f(x) \neq f(x_1)$ эканлиги келиб чиқади.

5-таъриф. Агар $f: A \to B$ акслантириш бир вақтнинг ўзида сюръектив ва инъектив бўлса, бундай акслантиришга *биектив акслантириш* дейилади.

A ва B чекли тўпламлар учун сюръектив акслантиришда $n(A) \geqslant n(B)$, инъектив акслантришда $n(A) \leqslant n(B)$ ва ниҳоят биектив акслантиришда эса $n(A) = n(B)$ бўлади.

Фараз қилайлик, $f: A \to B$ бўлиб, $A_1 \subseteq A$ бўлсин.

6-таъриф. $x \in A_1$ бўлганда, $f(x)$ тасвирларнинг $\{f(x)\}$ тўпламига A_1 тўпламнинг f акслантиришдаги *тасвири* дейилади ва у $f(A_1)$ орқали белгиланади.

7-таъриф. Агар $B_1 \subseteq B$ бўлса, B_1 тўпламнинг *тўла асли* деб B_1 га кирувчи барча элементлар аслларининг тўпламига айтилади ва у $f^{-1}(B_1)$ орқали белгиланади.

$\delta_f \lessgtr \mathrm{Dom}\, f = \{x|$ шундай y мавжудки, унинг учун $(x; y) \in f\}$ ва $\rho_f \lessgtr \mathrm{Im}\, f = \{y|$ шундай x мавжудки, унинг учун $(x; y) \in f\}$ тўпламлар мос равишда функциянинг аниқланиш ва қийматлари соҳаси деб юритилади.

8-таъриф. A тўпламнинг ҳар бир x элементини яна шу x элементга ўтказувчи (акслантирувчи) акслантиришга *айний акслантириш* дейилади ва у $e_A: A \to A$ орқали белгиланади.

Энди акслантиришлар композицияси (суперпозицияси) тўғрисида фикр юритамиз.

Фараз қилайлик, учта бўшмас A, B ва C тўплам берилган бўлиб, улар учун $f: A \to B$ ва $g: B \to C$ акслантиришлар ўрнатилган бўлсин. Мазкур акслантиришлар ёрдамида A ни C га ўтказувчи h акслантиришни тузиш мумкин. Бунинг учун A тўпламнинг ҳар бир x элементига $f(x) \in B$ ни мос қўямиз. Ҳар бир $f(x)$ га эса C тўпламнинг $g(f(x))$ элементини мос қўямиз, яъни қуйидаги схемани ўрнатамиз:

$$x \in A \to f(x) \in B \to g(f(x)) \in C.$$

Агар A тўпламни C га акслантирувчи мосликни h десак, унда $h(x) = g(f(x))$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. $h = g(f(x))$ акслантириш одатда f ва g акслантиришлар композицияси деб юритилади.

Демак, $h(x) = g(f(x))$ функция $f(x)$ ва $g(y)$ функциялар композицияси бўлиши учун қуйидаги иккита шарт бажарилиши керак экан:

1) $h(x)$ нинг аниқланиш соҳаси $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган шундай x_0 элементлардан тузилганки, уларга мос келувчи $f(x_0)$ элементлар $g(y)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади;

2) $h(x)$ нинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлган ихтиёрий нуқтадаги қиймати $f(x)$ ва $g(y)$ ларнинг қийматлари билан қуйидагича боғлангандир: $h(x_0)=g(f(x_0))$.

Шундай қилиб, $h(x)$ нинг x_0 нуқтадаги қийматини топиш учун, аввало $f(x_0)=y_0$ ни топиб, сўнгра $g(y_0)$ ни топиш керак. Ана шу $g(y_0)$ қиймат x_0 нуқтадаги $h(x)$ нинг қиймати бўлади ва бу фикр схематик усулда

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y_0 \arrow[r, "g"] & z_0 = g(y_0) \end{tikzcd}$$

орқали белгиланади.

Мазкур схема қуйидагича ўқилади: «Агар $f(x)$ функция x_0 га y_0 ни, $g(x)$ функция эса y_0 га z_0 ни мос қўйса, у ҳол да $h(x)$ функция x_0 га z_0 ни мос қўяди».

Мисол. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$ бўлсин. Унда схема

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y_0 = x_0^2 \arrow[r] & \sin(x_0^2) \end{tikzcd}$$

кўринишда бўлгани учун $h(x)=\sin(x^2)$ бўлади. Энди аксинча $g(x)=\sin x$ ва $f(x)=x^2$ функциялар композициясини топайлик. Бу композицияни $h_1(x)$ орқали белгиласак, у ҳолда

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "\sin"] \arrow[rr, bend right] & \sin x_0 \arrow[r, "(\ldots)^2"] & (\sin x_0)^2 \end{tikzcd}$$

схема ҳосил қилиниб, бундан $h_1(x)=(\sin x)^2=\sin^2 x$ га эга бўламиз. $\sin x^2 \neq \sin^2 x$ бўлгани учун функциялар композицияси функцияларнинг ёзилиш тартибига ҳам боғлиқ экан, яъни, агар $y=f(x)$ ва $z=g(x)$ функциялар композициясини $(g\circ f)(x)$ десак, $(f\circ g)(x)=g(f(x))$ бўлиб, у $(g\circ f)(x)=f(g(x))$ га тенг эмас экан.

A тўплам бирор тўпламни ўзини-ўзига ўтказувчи функциялар тўплами бўлсин.

9-таъриф. Агар A тўпламдан олинган ихтиёрий иккита $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг композицияси $(fog)(x)$ ҳам шу A тўпламга тегишли бўлса, у ҳолда A тўплам функциялар композициясига нисбатан ёпиқ ёки композиция берилган A тўплам учун ички алгебраик амал дейилади.

Мисол. $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$ чизиқли функциялар берилган бўлсин. Унда $(fog)(x)=c(ax+b)+d=acx+bc+d=a_1x+b_1$ чизиқли функциядир. Демак, чизиқли функциялар тўпламида аниқланган композиция амали ички алгебраик амал экан.

Энди тескари акслантиришлар ҳақида фикр юритамиз.

10-таъриф. Агар $f:A\to B$ ва $g:B\to A$ акслантиришлар берилган бўлиб, $gf:(A\to A)=e_A$ акслантириш ўринли бўлса, g акслантириш f акслантиришга *чап тескари*, $fg:(B\to B)=e_B$ акслантириш ўринли бўлганда эса g акслантириш f га *ўнг тескари акслантириш* дейилади.

Агар $fg=e_B$, $gf=e_A$ бўлса, f акслантириш *тескариланувчан* дейилади ва g акслантириш f га *тескари акслантириш* деб юритилади ва $g=f^{-1}$ орқали белгиланади. Агар $fg=\varepsilon(\varepsilon:x\to x)$ бўлса, у ҳолда f ва g лар ўзаро тескари акслантиришлар дейилади.

Теорема. *$f:A\to B$ акслантириш тескариланувчан бўлиши учун бу акслантириш ўзаро бир қийматли* (биектив) *бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурий шарт. Фараз қилайлик, $f:A\to B$ ва $g:B\to A$ акслантиришлар ўзаро тескари акслантиришлар бўлсин. Унда ўзаро тескари акслантиришлар таърифига асосан $gf=e_A$ ва $fg=e_B$ тенгликлар бажарилади. Энди f акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини текширамиз. Бунинг учун A тўпламдан ихтиёрий x элементни олиб, унга аввал g акслантиришни, сўнгра f акслантиришни татбиқ этсак, $f(g(x))=f(g)(x)=e_B(x)=x$ бўлади. $x=f(g(x))$ тенглик f нинг сюръектив (устига) акслантириш экинлигини кўрсатади.

Энди f нинг инъектив (ичига) акслантириш эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун тескарисини фараз қиламиз, яъни иккита ўзаро тенг бўлмаган $x\in A$ ва $x'\in A$ элементлар бир хил образга эга ($f(x)=f(x')\in B$) бўлсин. У ҳолда $gf(x)=gf(x')=x'$ дан $x=x'$ келиб чиқади. Шундай қилиб, f акслантириш натижасида $f(x)$ ва $f(x')$ образларга мос келувчи аслилари ҳам тенг бўлиб, фаразимиз нотўғри экан. Бундан эса f нинг инъектив акслантириш эканлиги келиб чиқади. Маълумки, инъектив ва сюръектив акслантиришлар биргаликда биектив акслантириш бўлади. Демак, f — биектив акслантиришдир. Худди шу усулда g нинг ҳам биектив акслантириш эканлигини кўрсатиш мумкин (буни мустақил иш сифатида тавсия этамиз).

Етарли шарт. Фараз қилайлик, $f:A\to B$ акслантириш биектив акслантириш бўлсин. Энди унинг тескариланувчи эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $f:A\to B$ биектив акслантириш бўлгани учун B тўпламнинг ҳар бир y элементи ягона $g(y)$ аслига эга. Унда $g:B\to A$ акслантиришни киритамиз ва g нинг f га тескари акслантириш эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $fg=e_B$ ва $gf=e_A$ тенгликлар бажарилишини исботлаймиз. Агар A тўпламдан бирор x элементни олиб, унга f акслантиришни татбиқ этсак, $f(x)\in B$ ҳосил бўлади. g акслантириш B ни A га акслантиради, уларнинг ҳар бири ўзаро бир қийматли бўлгани туфайли $gf(x)=x$ бўлади. Охирги муносабат эса $gf=e_A$ эканлигини билдиради.

Энди B тўпламнинг ихтиёрий y элементини олсак, f нинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигига асосан шундай $x\in A$ топиладики, $y=f(x)$ бажарилади. Унда $g(y)=e_B(x)=$ $=x$ бўлиб, бундан $fg(y)=f(x)=y$ дир. Демак, $f(g(y))=$ $=y$ бўлгани учун $fg=e_B$ тенглик ўринли. Теорема тўла исбот этилди.

Мисоллар. 1. Қуйидаги акслантиришни оламиз: $\varphi:\boldsymbol{Z}\to$ $\to\{0\}$, яъни $x\in\boldsymbol{Z}$ бўлганда $\varphi(x)=0$. Бу акслантириш устига (сюръектив) акслантириш бўлади.

2. $\varphi:N\setminus\{1\}\to P$ бўлиб, P — туб сонлар тўплами. Бу ерда $\varphi(n)$ функция n нинг энг кичик туб бўлувчиси бўлса, мазкур акслантириш ҳам устига акслантириш бўлади.

3. $x\in\boldsymbol{R}$ бўлганда $\varphi(x)=|x|$ бўлса, $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ акслантириш ичига акслантириш бўлади.

4. $\{(x;\ x^2+x+1)\ |x\in\boldsymbol{R}\}$ муносабат бўлиб, $y=f(x)=$ $=x^2+x+1$ функция $x=u$ бўлганда $f(u)=u^2+u+1$ бўлади.

5. $\{(x^2;\ x)|x\in\boldsymbol{Z}\}$ муносабат акслантириш эмас, чунки бу тўплам $(4;\ -2)$ ва $(4;\ 2)$ кўринишлардаги жуфтликларга эга.

6. $\{(x;\ x^2)|x\in\boldsymbol{Z}\}$ муносабат акслантириш, чунки бу муносабатни ифодаловчи тўпламда $y_1\neq y_2$ бўлганда $(x_1;\ y_1)$ ва $(x_1;\ y_2)$ жуфтликлар мавжуд эмас. Бу функция $\boldsymbol{Z}$ тўпламни $\boldsymbol{Z}$ нинг ичига акслантиради.

7. Агар $f(x)=e^x$ бўлса, $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^+$ акслантириш устига (сюръектив) акслантириш бўлади.

8. $f(x)=2x+1$ функция $x\in\boldsymbol{R}$ бўлганда тескарилану́вчан акслантириш бўлади.

Бу фикрни тасдиқлаш учун $f(x_1)=f(x_2)$ муносабатдан $x_1=x_2$ нинг келиб чиқишини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатан, $2x_1+1=2x_2+1$ дан $x_1=x_2$ эканлиги аниқ.

Машқлар

Қуйидаги муносабатлардан қайсилари функция эканлигини аниқланг ва уларнинг аниқланиш соҳаси ва қийматлар тўпламини топинг:

1. $\{(x;\ y)\,|\,x,\ y\in N,\ y=x^2\}$;
2. $\{(x;\ y)\,|\,x,\ y\in N,\ x<y\leqslant x+1\}$;
3. $\{(x;\ y)\,|\,x,\ y\in Z,\ y=x\}$;
4. $\{(x;\ y)\,|\,x,\ y\in N$ ва x сон y ни бўлади$\}$;
5. $\{(x;\ y)\,|\,x,\ y\in R,\ y=a^x,\ a>0\}$.

10-§. ТАРТИБ МУНОСАБАТИ

Математика ва унинг баъзи бир татбиқлари учун тартиб муносабати муҳим аҳамиятга эга. Иккита сонни миқдори бўйича, одамларнинг ёшлари бўйича, китобларни жовонда терилиши бўйича таққослаганда биз тартиб муносабатга дуч келамиз.

1-таъриф. A тўпламда антисимметрик ва транзитив бўлган бинар муносабатга *тартиб муносабати* дейилади. Тартиб муносабати киритилган тўпламга *тартибланган тўплам* дейилади.

Агар A да аниқланган ρ тартиб муносабати: 1) рефлексив бўлса, унга қатъиймас тартиб муносабати; 2) антирефлексив бўлганда эса қатъий тартиб муносабати дейилади.

2-таъриф. A тўпламда аниқланган ρ тартиб муносабати боғланган бўлса, яъни A тўпламнинг ихтиёрий x ва y элементлари учун $x\rho y$ ёки $x=y$, ёки $y\rho x$ муносабатлардан фақат биттаси бажарилса, ρ га *чизиқли тартиб муносабати* дейилади.

Чизиқли бўлмаган тартиб муносабати одатда қисман тартибланганлик муносабати деб юритилади.

Мисоллар. 1. Сонлар (комплекс сонлардан бошқа) тўпламида аниқланган кичик эмаслик ($\geqslant$) муносабати қисман тартиб муносабати бўлади.

2. Натурал сонлар тўпламида аниқланган қолдиқсиз бўлиниш муносабати ҳам қисман тартибланган муносабатдир.

3. Бутун сонлар тўпламида аниқланган қолдиқсиз бўлиниш муносабати эса тартиб муносабати эмас, чунки $a|b, b|a$ эканлигидан ҳар доим $a=b$ келиб чиқмайди.

3-таъриф. Қисман тартибланган A тўпламнинг берилган a элементи учун $a \leqslant x$ $(x \leqslant a)$ муносабат (x ихтиёрий) бажарилса, a га A тўпламнинг энг кичик (энг катта) элементи дейилади.

Қисман тартибланган тўпламлар умуман олганда энг катта ёки энг кичик элементларга эга бўлмаслиги мумкин. Тартиб муносабати одатда $\prec$ орқали белгиланади.

Мисоллар. 1. Миқдорлари бўйича тартибланган ҳақиқий сонлар тўплами энг катта ва энг кичик элементга эга эмас.

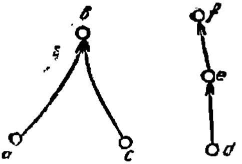
2. Манфиймас ҳақиқий сонлар тўплами эса энг кичик элемент (яъни 0) га эга, лекин энг катта элементга эга эмас.

3. Натурал сонлар тўплами бўлиниш муносабатига нисбатан энг кичик элемент 1 га эга, лекин энг катта элемент мавжуд эмас.

4-таъриф. Агар қисман тартибланган A тўпламнинг a элементидан қатъий катта (қатъий кичик) бўлган элементлари бўлмаса, a га A тўпламнинг максимал (минимал) элементи дейилади (3-таърифга қаранг).

Қисман тартибланган тўпламнинг минимал ва максимал элементларини энг кичик ва энг катта элементлардан фарқлай билиш керак.

Демак, $a \prec x$ бўлганда $a = x$ бўлса, a максимал элемент, $y \prec b$ шартда $y = b$ бўлса, b минимал элемент бўлади.



12-расм.

Қисман тартибланган тўплам бир қанча максимал ёки минимал элементларга эга бўлиши мумкин.

Мисоллар. 1. Қуйидаги графларда «стрелка» учидаги элемент «стрелка» бошланишдаги элементдан «катта» деб олайлик, у ҳолда (12-чизма) графларда b, f лар максимал элементлар, a, c, d лар эса минимал элементлардир.

2. $A = N \setminus \{1\}$ тўпламдаги ихтиёрий a ва b лар учун b/a (b элемент a элементнинг бўлувчиси) бўлса, $b \prec a$ каби ёзилади. Бундай ҳолда барча туб сонлар минимал элементларни ташкил этган ҳолда энг кичик элемент эса мавжуд эмас.

5-таъриф. Агар чизиқли тартибланган A тўпламнинг ихтиёрий B қисм тўплами доимо энг кичик элементга эга бўлса, бундай тўпламга *тўла тартибланган тўплам* дейилади.

Натурал сонлар тўплами тўла тартибланган тўпламга мисол бўла олади.

Эслатма. Берилган тўпламда тартиб тушунчасини бир қанча усулда киритиш мумкин. Масалан, натурал сонлар тўпламида:

1) табиий тартиб $\{1, 2, 3, \ . \ , n, \ . . .\}$;

2) тескари тартиб $\{. \ , n, \ , 3, 2, 1\}$ ларни киритиш мумкин.

$N \subset Q$ бўлгани учун рационал сонлар майдонини ҳам бир неча усулда тартиблаш мумкин.

11-§. МУЛОҲАЗАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Ҳар қандай математик назария ўз объектларига эга бўлиб, у шу объектлар ёрдамида тузиладиган ҳар хил жумлаларни ўрганади. Масалан, мактабда ўрганиладиган алгебра курси тенглама ва тенгсизликлар ҳақидаги жумлалар билан иш кўради. Аниқроқ қилиб айтганда, ҳар қандай математик назария у ёки бу математик жумланинг чин (рост, тўғри), ёлғон (нотўғри) лигини текшириш билан шуғулланади.

1-таъриф. Рост ёки ёлғонлиги ҳақида фикр юритиш (аниқлаш) мумкин бўлган дарак гапларга *жумла* (*мулоҳаза*) дейилади.

Мулоҳазалар назарияси математик мантиқ деб аталувчи фаннинг дастлабки элементар тушунчаларидан бири бўлиб, у қуйидаги усулда қурилади:

1) қаралаётган объектлар (мулоҳазалар) тўплами берилади;

2) объектларнинг баъзи бир хоссалари ва улар орасидаги баъзи бир муносабатлар баён этилади.

Юқоридаги тушунчаларга мулоҳазалар назариясининг бошланғич тушунчалари деб юритилади.

Мулоҳазалар назариясининг бошланғич объектлари содда (оддий) мулоҳазалардан иборатдир. Содда мулоҳазалар латин алифбесининг кичик ҳарфлари a, b, c,... ёки p, q, r,... каби белгиланади.

Ҳар бир содда мулоҳаза рост ёки ёлғон бўлиши мумкин. Мулоҳазаларнинг рост (рост мулоҳаза қиймати 1 орқали белгиланади) ёки ёлғон (ёлғон мулоҳаза қиймати 0 орқали белгиланади) лиги уларнинг мазмунига қараб аниқланади. Кўп ҳолларда рост мулоҳаза (*р*), ёлғон мулоҳаза эса (ё) орқали белгиланади.

Масалан

p «$2 < 3$»
q «5 — туб сон»;
r «$7 + 3 = 18$»;
t «3 — жуфт сон»

лар мулоҳазалар бўлиб, уларда p ва q мулоҳазалар рост, r ва t мулоҳазалар эса ёлғондир.

Математикада ҳар бир теорема мулоҳаза ҳисобланади. Лекин берилган теоремани исботлаш учун унгача ростлиги исботланган бошқа теоремалар, аксиомалар ва бошланғич тушунчалардан фойдаланилади.

Энди мулоҳазалар устида бажариладиган амаллар ҳақида фикр юритамиз.

Содда мулоҳазалардан боғловчи ёки боғловчи сўзлар ёрдамида мураккаб мулоҳазалар ҳосил қилинади. Ўзбек тилидаги «эмас», «ва», «ёки», «... келиб чиқади», «зарур ва етарли» каби боғловчи сўзларга биттадан мантиқий амал мос келади.

Мулоҳазалар устида бажариладиган амаллар қуйидагича аниқланади.

Инкор амали.

2-таъриф. p мулоҳазанинг *инкори* деб p рост бўлганда ёлғон, p ёлғон бўлганда рост бўладиган янги мулоҳазага айтилади.

p мулоҳазанинг инкори $\neg p$ ёки $\bar{p}$ каби кўринишларда белгиланади. Масалан, p: «2 — тоқ сон», ;

$\neg p$: «2 — тоқ сон эмас».

Бу ерда p мулоҳаза ёлғон, $\neg p$ эса ростдир.

Ҳеч қандай мулоҳаза бир вақтда рост ва ёлғон бўлиши мумкин эмас. Бу қоида учинчисини инкор этиш қоидаси деб юритилади. $\neg p$ нинг инкори бўлган $\neg(\neg p)$ мулоҳаза икки каррали инкор деб юритилади.

$\neg\neg p$ ни қуйидагича изоҳлаш мумкин: «p мулоҳаза бажарилмайди дейиш нотўғри». Мазкур фикр эса p нинг ростлигини билдиради, яъни, агар p рост бўлса, $\neg\neg p$ ҳам рост, p ёлғон бўлса $\neg\neg p$ ҳам ёлғондир. Бундан p ва $\neg\neg p$ мулоҳазаларнинг қийматлари бир хил дея оламиз ва бу тасдиқни $\neg\neg p = p$ кўринишда белгилаймиз.

Конъюнкция амали.

3-таъриф. p ва q рост бўлганда ва фақат шундагина рост бўладиган янги мулоҳазага p ва q мулоҳазалар *конъюнкцияси* дейилади ва у $p \wedge q$ орқали белгиланади.

$p_1, p_2, \quad , p_n$ мулоҳазаларнинг дизъюнкцияси ва конъюнкциялари мос равишда $\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i$ ва $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i$ кўринишларда белгиланиб, барча $p_1, p_2, \quad , p_n$ лар рост бўлгандагина $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i$ — — рост, $p_1, p_2, \quad , p_n$ лардан камида биттаси рост бўлганда $\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i$ — рост бўлади, қолган ҳолларда ёлғон бўлади.

Юқорида кўриб ўтганимиздек, ҳар бир мулоҳазага ростлик жадвалидан битта устун мос келиб, бу устун элементлари 1 ёки 0 лардан иборат. Биз бундан сўнг бу устунни қаралаётган мулоҳазанинг қийматлари устуни деб юритамиз.

7-таъриф. Қийматлари устуни бир хил бўлган (устма-уст тушган) мулоҳазалар *ўзаро тенг кучли мулоҳазалар* дейилади.

p ва q мулоҳазаларнинг тенг кучлилиги $p \equiv q$ каби белгиланади.

Масалан, $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ўринли. Бу тенг кучлиликни исботлаш учун қуйидаги ростлик жадвалидан фойдаланамиз:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Бу жадвалнинг учинчи ва олтинчи устунлари бир хил. Демак, $p \Leftrightarrow q$ ва $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ мулоҳазалар тенг кучли.

12-§. МУЛОҲАЗАЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ ФОРМУЛАЛАРИ

Мулоҳазалар алгебрасининг асосий вазифаларидан бири ҳар қандай мураккаб мулоҳазанинг рост ёки ёлғонлигини исботлашдан иборат. Лекин берилган мураккаб мулоҳазадаги содда мулоҳазалар ва уларни боғловчи мантиқ амаллар ортган сари мазкур мулоҳазанинг ростлик жадвалини тузиш қийинлаша боради. Бу қийинчиликни бартараф этиш учун мулоҳазалар алгебрасининг формуласи ва ўзаро тенг кучли формулалар тушунчаларини киритамиз.

1-таъриф. 1) *p, q, r... лар* мулоҳазалар алгебрасининг формулаларидир.

2) Агар p ва q мулоҳазалар алгебрасининг формулалари бўлса, у ҳолда $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ ва $p \Leftrightarrow q$ лар ҳам формула бўлади.

3) Мулоҳазалар алгебраси 1) ва 2) дан бошқа формулаларга эга эмас. Кўп ҳолларда 2) ёрдамида аниқланган формулалар *мураккаб формулалар* деб юритилади.

Ҳар бир мураккаб формуланинг ростлик қиймати (рост ёки ёлғонлиги) унинг таркибидаги элементар мулоҳазаларга эмас, балки уларнинг ростлик қийматларига боғлиқдир. Шунинг учун исталган мураккаб формулага аргументлари рост ёки ёлғон қийматни қабул қилувчи функция деб қараш мумкин.

Маълумки, бундай функция (мантиқий функция) нинг ростлик қиймати ҳам $\{1, 0\}$ тўплам элементидан иборат.

2-таъриф. Аниқланиш ва ўзгариш соҳалари $\{1, 0\}$ тўпламдан иборат бўлган функцияларга *Буль функциялари* дейилади (Д. Буль — англиялик машҳур мантиқчи ва математик).

Бирор мураккаб A формула берилган бўлсин. Бу формула компоненталари (аргументлари) ни $x_1, x_2, \quad , x_n$ орқали белгилаймиз. Унда A формулани биз $A \leqq, A(x_1\ x_2. \quad , x_n)$ кўринишда ёза оламиз.

3-таъриф. $x_i (i = \overline{1, n})$ аргументларнинг ҳар бири қабул қилиши мумкин бўлган барча 1,0 қийматлари тизими (набори) да $A(x_1, x_2, \quad , x_n)$ формулани ифодаловчи мантиқий функция *рост (ёлғон)* қийматга эришса, бу формула *айнан рост (ёлғон) формула* дейилади.

Айнан рост формула одатда I, айнан ёлғон формула эса L каби белгиланади.

Масалан, $A(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrows ((x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \wedge (\neg x_1)) \equiv L$ — айнан ёлғон; $B(x_1\ x_2, x_3) \leftrightarrows ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee (\neg x_1)) \equiv I$ эса айнан рост формула (текшириб кўринг).

Эслатма. $A(x_1, x_2, \quad , x_n)$ формулада n та элементар мулоҳаза бўлса, бу формуланинг ростлик жадвали 2^n та йўл (сатр) дан иборат бўлади (исбот қилинг).

4-таъриф. Агар мулоҳазалар алгебрасининг $K(A_1, A_2,$, , $A_n)$ формуласи пропозиционал ўзгарувчилар қийматларининг ҳеч бўлмаганда битта тизимида 1 қийматни қабул қилса, бундай формула *бажарилувчи* формула дейилади.

Ҳар қандай айнан рост формула бажарилувчи формула бўлади.

$$A(x_1, x_2) \leftrightarrows x_1 \wedge x_2$$

бажарилувчи формуладир.

5-таъриф. Таркибидаги $x_i \, (i = \overline{1, n})$ ўзгарувчиларнинг мумкин бўлган барча қийматлари тизимида $A(x_1, x_2,$, $x_n)$ ва $B(x_1, x_2,$, $x_n)$ формулаларнинг қийматлари устуни бир хил бўлса, бу формулалар *ўзаро тенг кучли* дейилади ва у $A(x_1, x_2,$, $x_n) \equiv B(x_1, x_2,$, $x_n)$ каби белгиланади.

Мулоҳазалар алгебрасида муҳим роль ўйнайдиган бир қанча тенг кучли формулаларни келтирамиз:

1) $\neg \neg A \equiv A$ (икки каррали инкор қонуни);

2) $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (конъюнкциянинг коммутативлиги);

3) $A \vee B \equiv B \vee A$ (дизъюнкциянинг коммутативлиги),

4) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ (конъюнкциянинг ассоциативлиги):

5) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (дизъюнкциянинг ассоциативлиги):

6) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (конъюнкциянинг дизъюнкцияга нисбатан дистрибутивлиги);

7) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C$ (дизъюнкциянинг конъюнкцияга нисбатан дистрибутивлиги);

8) $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$;

9) $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$;

(бу иккала тенг кучлилик Де Морган қонунлари деб юритилади)

10) $A \wedge A \equiv A$ (коньюнкция ва дизъюнкция амалларининг

11) $A \vee A \equiv A$ идемпотентлик қонунлари);

12) $A \wedge I \equiv A$;

13) $A \vee L \equiv A$;

14) $A \wedge \neg A \equiv L$;

15) $A \vee \neg A \equiv I$ (учинчисини инкор этиш қонуни);

16) $A \wedge L \equiv L$;

17) $A \vee I \equiv I$;

18) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ (ютилиш қонуни);

19) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$;

20) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$;

21) $\neg (A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$,

22) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B \vee (\neg A \wedge \neg B)$;
23) $\neg (A \Leftrightarrow B) \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)$.

Юқоридаги асосий тенг кучлиликлардаги ҳар бир формула иккита компонентга боғлиқ функциялардир. Бу тенг кучлиликларни исталган чекли сондаги формулалар учун ёзиш мумкин (ростлик жадваллари ёрдамида ёки мантиқий амаллар ёрдамида юқорида келтирилган тенг кучлиликларни исбот қилинг).

Энди мантиқий (логик) амалларнинг бажарилиш тартиби тўғрисида бир оз тўхталиб ўтамиз.

Агар формуладаги амалларнинг тартиби қавслар ёрдамида кўрсатилмаган бўлса, улар қуйидаги кетмакетликда, яъни инкор, конъюнкция, дизъюнкция, импликация ва энг охирида эквиваленция тартибида бажарилади. Кўп ҳолларда амалларни бажариш кетма-кетлиги қавслар ёрдамида кўрсатилади.

Масалан, $A(x, y, z) \leftrightarrows x \Rightarrow \neg y \wedge z \Leftrightarrow \wedge \neg x \vee y$ формулада амаллар юқорида айтилганидек, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ кетма-кетликда бажарилади. $B(x, y, z) \leftrightarrows (((x \Leftrightarrow z) \Rightarrow x) \vee \neg z) \wedge y$ формулада эса амаллар $\neg$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$ ва $\wedge$ тартибда бажарилади.

Мулоҳазалар алгебраси жуда кўп муҳим амалий татбиқларга эга. Ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналарининг ишлаш жараёни ҳам мулоҳазалар алгебрасига асосланган. Бунинг сабаби шундан иборатки, мулоҳазалар алгебрасидаги учта ва ундан ортиқ алгебраик амалларни доимо иккита алгебраик амалга келтириш мумкин.

Ҳақиқатан, Де Морган қонунлари

$$\neg (x \wedge y) \equiv (\neg x) \vee (\neg y). \qquad (1)$$

$$\neg (x \vee y) \equiv (\neg x) \wedge (\neg y) \qquad (2)$$

га асосан ихтиёрий формуладаги $\neg$ ва $\wedge$ амалларни $\neg$ ва $\vee$ амаллари билан ва аксинча, $\neg$ ва $\vee$ амалларни эса $\neg$ ва $\wedge$ амаллари билан алмаштириш мумкин.

Энди $\Leftrightarrow$ ва $\Rightarrow$ амалларни фақат $\neg$ ва $\wedge$ ($\neg$ ва $\vee$) амаллари билан алмаштириш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$x \vee y \equiv \neg ((\neg x) \wedge (\neg y)), \qquad (3)$$

$$x \wedge y \equiv \neg ((\neg x) \vee (\neg y)) \qquad (4)$$

формулалар ҳамда асосий тенг кучлиликлардан фойдаланамиз. Асосий тенг кучли формулалардан 22) га асосан $x \Leftrightarrow y \equiv$

$\equiv (x\wedge y)\vee((\neg x)\wedge(\neg y))$ ўринли. (3) га асосан эса $(x\wedge y)\vee\vee(\neg x\wedge\neg y)\equiv\neg((\neg(x\wedge y))\wedge(\neg(\neg x\wedge\neg y))$ бўлгани учун $x\Leftrightarrow y\equiv\neg(\neg(x\wedge y)\wedge(\neg(\neg x\wedge\neg y)))$ бўлади. $x\Rightarrow y\equiv\neg x\vee\vee y$ га яна (3) ни татбиқ этсак, $x\Rightarrow y\equiv\neg(\neg(\neg x)\wedge(\neg y))$ ҳосил бўлади. Агар (4) формуладан фойдалансак, мулоҳазалар алгебрасининг ихтиёрий формуласини $\neg$ ва $\vee$ орқали ифодалаш мумкин.

Машқлар

1. A, B, C ва D мулоҳазалар мос равишда 1, 0, 0, 1 бўлганда қуйидаги формулаларнинг ростлик қийматини топинг:

а) $A\vee(B\wedge C)$;
б) $D\Rightarrow(B\wedge C)$;
в) $C\Rightarrow(A\wedge D)$;
г) $A\Rightarrow(C\vee D)$;
д) $A\vee B\Leftrightarrow\neg D$;
е) $(A\Leftrightarrow B)\Rightarrow(\neg A\vee B)$;
ж) $(D\wedge C)\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)$;
з) $(A\wedge\neg B)\vee D\Rightarrow(B\wedge\neg C)$.

2. Қуйидаги формулаларнинг ҳар бири учун ростлик жадвалини тузинг:

а) $A\Rightarrow(A\Rightarrow B)$;
б) $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$;
в) $A\Rightarrow\neg(B\wedge C)$;
г) $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow(A\wedge B)$;
д) $(A\Rightarrow\neg B\wedge C)\vee(\neg A\vee B)$;
е) $(A\vee B)\Rightarrow(A\wedge\neg B)$.

13- §. ПРЕДИКАТЛАР

Мулоҳазалар алгебраси ёрдамида содда мулоҳазалардан мураккаб мулоҳазалар ҳосил қилинишини биз 12- § да кўриб ўтдик. Мулоҳазалар мантиқининг камчиликларидан бири шундан иборатки, унинг ёрдамида объектларнинг хоссалари ва улар орасидаги муносабатларни ёритиш мумкин эмас. Математик мантиқнинг бундай масалалар билан шуғулланадиган қисми одатда предикатлар логикаси (мантиқи) деб юритилади.

1-таъриф. Таркибида эркли ўзгарувчилар қатнашиб, бу ўзгарувчиларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларида мулоҳазага айланадиган дарак гапга *предикат* дейилади.

x объектнинг бирор $\mathscr{P}$ хоссага эга бўлиши $\mathscr{P}(x)$ каби белгиланиб, $\mathscr{P}(x)$ бир ўринли предикат деб юритилади.

Мисоллар. 1. $\mathscr{P}(x)$: «x — туб сон» кўринишдаги предикат берилган бўлсин. Бундай ҳолда $\mathscr{P}(x)$ бир номаълумли функцияни ифодалаб, унинг аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўплами N дан, қийматлари соҳаси мулоҳазалар тўпламидан иборат бўлиб, ҳар бир мулоҳазанинг қийматлари соҳаси эса икки элементли {0, 1} тўпламдан иборат. Бу функция қийматларининг жадвал кўриниши қуйидагичадир:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}(x)$	0	1	1	0	1	0	1	0

2. $E(x)$: «x — жуфт сон» каби предикат берилган бўлсин. Унинг ростлик жадвали

x	1	2	3	4	5	6	7
$E(x)$	0	1	0	1	0	1	0

кўринишда бўлади.

Юқоридаги иккита мисолдан қуйидаги фикрларни айта оламиз.

1. Предикатлар мулоҳаза эмас, лекин x нинг бирор тўпламга тегишли аниқ қийматларида у мулоҳазага айланади.

2. Агар M қандайдир объектлар тўплами бўлса, бу тўпламдаги предикат — хосса деганда биз шу M тўпламда рост ёки ёлғон қийматни қабул қилувчи бир аргументли функцияни тушунамиз.

2-таъриф. M тўпламнинг $\mathcal{P}(x)$ предикатни рост мулоҳазага айлантирувчи D қисм тўпламига $\mathcal{P}(x)$ *предикатнинг ростлик соҳаси* дейилади.

3-таъриф. Агар $\mathcal{P}(x)$ предикат M тўпламнинг барча элементларида рост (ёлғон) қийматни қабул қилса, $\mathcal{P}(x)$ предикат M тўпламда *айнан рост (айнан ёлғон)* дейилади.

4-таъриф. $K(A_1,\quad, A_k;\ a_1,\quad, a_m;\ x_1,\quad, x_s;\ P_1,\quad, P_r)$ формула $P_1,\quad, P_r$ предикатлар T тўпламда камида битта усулда аниқланганда, $x_1,\quad, x_s$ предмет ўзгарувчилар T тўплам элементлари билан камида битта усулда алмаштирилганда ҳамда $A_1,\quad, A_k$ пропозиционал ўзгарувчилар қийматларининг камида битта тизимида 1 қиймат қабул қилса, у ҳолда K формула T тўпламда *бажарилувчи* дейилади. K формула ихтиёрий T тўпламда бажарилувчи бўлса, у ҳолда у бажарилувчи формула дейилади.

Мисоллар. 1. $\mathcal{P}(x)$: «x — мусбат» — предикат N тўпламда айнан рост бўлади.

2. $R(x)$: «$x < 0$» — предикат N тўпламда айнан ёлғон.

3. $E(x)$ «x — жуфт сон» — предикат N тўпламда бажарилувчи предикатдир.

Биз юқорида битта номаълумга (эркли ўзгарувчига) боғлиқ бўлган бир ўринли предикатларни кўриб ўтдик.

Предикат икки, уч, , n ўринли ҳам бўлиши мумкин.

Масалан, Z тўпламда $F(x, y)$ «$x < y$» предикат икки ўринлидир. n ўринли предикат $\mathscr{P}(x_1, x_2, \quad , x_n)$ орқали белгиланиб, бу предикат бирор A тўпламнинг $x_1, x_2,$ x_n элементлари орасидаги $\mathscr{P}$ муносабатни ифодалайди.

Қийматлари A тўпламга тегишли бўлган n ўринли $\mathscr{P}(x_1, x_2, \quad , x_n)$ предикат берилган бўлсин. Объектларнинг ҳар бир тайин $x_1 = a_1 \in A$, $x_2 = a_2 \in A$, $\quad$, $x_n = a_n \in A$ қийматларида $\mathscr{P}(a_1, a_2, \quad a_n)$ мулоҳаза рост ёки ёлғон бўлади.

n ўринли предикатлар учун ҳам айнан рост, айнан ёлғон ёки бажарилувчи предикатлар тушунчасини аниқлаш мумкин.

1, 2, 3, ўринли предикатлар мос равишда унар, бинар, тернар предикатлар дейилади. Ноль ўринли предикат ўзгармас мулоҳазани ифодалайди.

14-§. КВАНТОРЛАР

Биз 13-§ да $\mathscr{P}(x)$ предикат x нинг бирор A тўпламга тегишли аниқ қийматларида мулоҳазага айланишини кўриб ўтдик. Предикатлардан мулоҳаза ҳосил қилишнинг яна иккита усули мавжуд.

Аввал қуйидаги мисолни кўриб чиқайлик:

$x \in N$ бўлганда

$$\mathscr{P}(x) \leftrightarrows «x^2 - 3x + 2 = 0» \qquad (1)$$

бўлсин. Агар (1) предикатни барча $x \in N$ лар учун қарайдиган бўлсак, у ёлғон мулоҳаза бўлиб, баъзи бир $x \in N$ лар учун эса рост мулоҳаза бўлади.

Бирор M тўпламнинг «барча x элементлари учун» деган жумла қисқача $\forall x \in M$, «баъзи бир x элементлар учун» деган жумла эса $\exists x \in M$ орқали белгиланиб, улар мос равишда умумийлик ва мавжудлик кванторлари деб юритилади.

$$(\forall x \in A) f(x) \qquad (2)$$

(қисқача: $\forall x \in f(x)$) белги «A тўпламнинг барча x элементлари учун $f(x)$ предикат рост»,

$$(\exists x \in A) f(x) \qquad (3)$$

(қисқача: $\exists x f(x)$) белги эса «A тўпламнинг шундай x элементи мавжудки, бу элемент учун $f(x)$ предикат рост» деб ўқилади.

(2) ва (3) мулоҳазалар одатда кванторли мулоҳазалар дейилади. $f(x)$ предикат A тўпламнинг барча элементлари учун рост бўлгандагина (2) мулоҳаза рост қийматга эга, $f(x)$ предикат айнан ёлғон ёки бажарилувчи бўлганда, (2) мулоҳаза ёлғон, яъни $\forall x f(x)$ ёлғон бўлади.

$f(x)$ предикат A тўпламнинг барча элементлари учун айнан ёлғон бўлгандагина $\exists x f(x)$ ёлғон бўлади.

Икки, уч, , n ўринли предикатлар воситаси билан ҳам кванторли мулоҳазалар ҳосил қилиш мумкин.

Масалан, $(\forall x \; \forall y) \; f(x; \; y)$ мулоҳаза бирор тўпламнинг «барча x ва барча y элементлари учун $f(x; \; y)$ рост» деб ўқилади. $(\exists x \; \forall y) \; f(x; \; y)$ мулоҳаза эса қаралаётган A тўпламнинг «баъзи x элементлари ва ҳамма y элементлари учун $f(x; \; y)$ рост» деб ўқилади.

Яна қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин: $\forall x \; \exists y f(x, \; y)$, $\exists x \; \exists y f(x, \; y)$, $\forall x \forall y \; \exists z f(x; \; y; \; z)$, $\exists x \; \exists y \exists z f(x; \; y; \; z)$,

Бу кванторли мулоҳазаларнинг ҳар қайсиси айнан рост ёки айнан ёлғон бўлиши мумкин.

Масалан, Z тўпламда $f(x; \; y)$: «x сон y дан кичик» деган предикат воситаси билан тузилган $\forall x \exists y \; f(x; \; y)$ мулоҳаза исталган x ни олганда ҳам шундай y топиладики, улар учун «$x < y$» деган мулоҳаза айнан рост, чунки исталган x учун $y = x + 1$ деб олсак, $x < y$ тенгсизлик бажарилади.

15-§. ПРЕДИКАТЛИ ФОРМУЛАЛАР

Фараз қилайлик, $\mathscr{P}(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар мос равишда A ва B тўпламларда рост бўлиб, A ва B тўпламлар бирор тўпламнинг қисм тўпламлари бўлсин.

Ҳозир шу иккита предикатга мантиқий амалларни татбиқ этиш натижасида ҳосил бўлган янги предикатларнинг ростлик соҳалари билан танишиб ўтамиз.

1. $R_1(x) \leftrightarrows \mathscr{P}(x) \wedge Q(x)$ предикат $\mathscr{P}(x)$ ва $Q(x)$ предикатлар ростлик соҳалари кесишмасида рост бўладиган предикатдир.

2. $R_2(x) \leftrightarrows \mathscr{P}(x) \vee Q(x)$ предикат $\mathscr{P}(x)$ ёки $Q(x)$ ларнинг камида биттаси рост бўладиган соҳада рост бўлади. $R_2(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси $A \cup B$ тўпламдир. A соҳа $\mathscr{P}(x)$ нинг ростлик соҳаси, B эса $Q(x)$ нинг ростлик соҳаси.

3. $R_3(x) \leftrightarrows \neg \mathscr{P}(x)$ предикат $\mathscr{P}(x)$ ёлғон бўлган соҳада рост, $\mathscr{P}(x)$ рост бўлган соҳада эса ёлғондир. Демак, $R_3(x)$ предикат $C_4 A \leftrightarrows \overline{A}$ тўлдирувчи тўпламда рост экан.

4. $R_4(x) \leftrightarrows \mathscr{P}(x) \Rightarrow Q(x)$ предикат фақат $\mathscr{P}(x)$ рост, $Q(x)$ ёлғон бўлган соҳадагина ёлғон, қолган соҳаларда рост бўлади. Бунда ростлик соҳа $\overline{A \cap \overline{B}}$ бўлади.

5. $R_5(x) \leftrightarrows \mathscr{P}(x) \Leftrightarrow Q(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси M нинг шундай қисм тўпламидан иборатки, унда $\mathscr{P}(x)$ ва $Q(x)$ бир вақтда рост, ёки бир вақтда ёлғон бўлади. Бошқача қилиб айтганда, $R_5(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси $(A \cap B) \cup$ $\cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ бўлади.

Мисол. $x \in N$ бўлганда $\mathscr{P}(x)$: «$x > 2$» ва $Q(x)$: «$4|x$» предикатларни ифодаласин. Унда $\mathscr{P}(x) \Leftrightarrow Q(x)$ предикатнинг ростлик соҳаси $A = \{3, 4, 5, \quad \}$, $B = \{4, 8, 12, \quad \} =$ $= \{4k | k \in N\}$, $\overline{A} = \{1, 2\}$, $\overline{B} = \{4k + 1 | k \in N\} \cup \{4k + 2 | k \in$ $\in N\} \cup \{4k + 3 | k \in N\} \cup \{1, 2, 3\}$ тўпламдан иборат бўлгани учун $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = \{1, 2, 4, 8, 12, \quad . \}$ бўлади.

Энди предикатлар логикасининг формулалари ва уларнинг ўзаро тенг кучлилиги ҳақида фикр юритамиз. Қаралаётган предикатларнинг ростлик соҳасини M орқали белгилайлик. M тўпламнинг бизга маълум элементларини $a, b, c,$ ёки

$$a_1, a_2, a_3, \tag{1}$$

орқали белгилаймиз. Унинг номаълум элементларини эса $x, y, z,$ ёки

$$x_1, x_2, x_3, \tag{2}$$

орқали белгилаб, (1) нинг элементларини индивидуал предметлар (предмет ўзгармаслар), (2) нинг элементларини эса предмет ўзгарувчилар деб юритамиз.

1-таъриф. а) M тўпламда аниқланган ҳар қандай мулоҳаза ва предикат предикатлар логикасининг формуласидир.

б) Агар $F_i (i = \overline{1, n})$ формула бўлса, $\forall F_i$, $\exists F_i$ ва $\neg F_i$ лар ҳам формуладир.

в) Агар F ва Φ формула бўлса, $(F \vee \Phi)$, $(F \wedge \Phi)$, $(F \Rightarrow \Phi)$ ва $(\Phi \Rightarrow F)$ лар ҳам предикатлар логикасининг формуласи ҳисобланади.

г) Предикатлар мантиқида а), б), в) формулалардан бошқа формулалар мавжуд эмас.

2-таъриф. Квантор татбиқ этиладиган ўзгарувчилар боғланган ўзгарувчилар, квантор тегишли бўлмаган ўзгарувчилар эса *эркин предмет ўзгарувчилар* дейилади.

Қванторли предикатлардаги предмет ўзгарувчилар эркин ва боғланган ўзгарувчилар бўлиши мумкин.

Масалан, $F \leftrightarrows \exists x \in N (x + y = 5)$ предикатда x боғланган, y эса эркин ўзгарувчидир. Демак, таркибида эркин ўзгарувчи бўлган предикат шу ўзгарувчининг функциясидан иборат, яъни $\exists x \in N (x + y = 5) = F(y)$ бўлади.

Шундай қилиб, предикатлар мантиқининг исталган формуласи ўзгарувчи мулоҳаза, предикат ва эркин номаълумга боғлиқ бўлган функциядир. Масалан, $\Phi \leftrightarrows (\exists x)(\forall y)\mathscr{P}(x; y) \vee \vee Q(z) \vee A$ формулани олсак, у $\mathscr{P}$, Q предикатга A ўзгарувчили мулоҳаза ҳамда эркин номаълумга боғлиқ бўлган функция бўлади.

3-таъриф. Агар битта M соҳада қаралаётган иккита F ва Φ формулаларда: 1) барча ўзгарувчи предикатларни M да аниқланган индивидуал предикатлар билан; 2) ўзгарувчи мулоҳазаларни M даги индивидуал мулоҳазалар билан; 3) эркин предмет ўзгарувчиларни M нинг индивидуал предметлари билан алмаштирганда F ва Φ формулалар бир хил рост ёки ёлғон қийматни қабул қилса, улар M соҳада ўзаро тенг кучли дейилади.

Исталган соҳада тенг кучли бўлган F ва Φ формулалар айнан тенг кучли формулалар дейилади.

Мисол. $\Phi \leftrightarrows (\forall x \in M)(\mathscr{P}(x)) \vee \mathrm{A}$ ва $F \leftrightarrows (\forall x \in M)(\mathscr{P}(x) \vee \mathrm{A})$ формулалар ўзаро тенг кучли. Бу ерда A ўзгарувчи мулоҳаза бўлиб, x боғланган ўзгарувчи бўлганлиги туфайли иккала формула ҳам эркин ўзгарувчига боғлиқ эмас. Демак, Φ ва F ларнинг иккаласи ҳам мулоҳазадир. $\Phi \equiv F$ эканлигини исботлаш учун Φ нинг ростлигидан F нинг ростлигини (ва аксинча) келтириб чиқарамиз.

Фараз қилайлик, Φ рост формула бўлсин. Бундай ҳолда дизъюнкция таърифига асосан M тўпламнинг барча элементлари учун $\mathscr{P}(x)$ ёки A рост. Иккала ҳолда ҳам M тўпламнинг барча элементлари учун $F \leftrightarrows (\forall x \in M)(\mathscr{P}(x) \vee A)$ айнан рост мулоҳаза бўлади. Аксинча, F формула рост бўлса, $\forall x \in M$ учун $\mathscr{P}(x)$ ёки A, ёки ҳар иккаласи рост. Унда $(\forall x \in M)(\mathscr{P}(x) \vee A) \leftrightarrows \Phi$ ҳам рост. Демак, 3-таърифга асосан $F \equiv \Phi$ бўлади. Қуйидаги формулаларнинг ўзаро тенг кучли эканлигини исбот қилинг:

$$(\forall x \in M)(\mathscr{P}(x) \wedge A) \equiv (\forall x \in M)(\mathscr{P}(x)) \wedge A;$$

$$(\exists x \in M)(\mathscr{P}(x) \vee \mathrm{A}) \equiv (\exists x \in M)(\mathscr{P}(x)) \vee A;$$

$$(\exists x\in M)(\mathcal{P}(x)\wedge A)\equiv(\exists x\in M)(\mathcal{P}(x))\wedge A.$$

16-§. МУЛОҲАЗАЛАРНИ МАНТИҚИЙ БЕЛГИЛАР ЁРДАМИДА ЁЗИШ

Математик мулоҳазаларни мантиқий белгилар ёрдамида ёзиш учун одатда чекли сондаги базис предикатлар танлаб олинади. Қолган хосса ва муносабатлар базис предикатлар ҳамда озод номаълумлар ёрдамида тузилган таъриф, теоремалар орқали ифодаланади.

Мисол сифатида $\boldsymbol{Z}$ тўпламда базис предикатлар учун $x+y=z$, $x\cdot y=u$, $x-y=v$ ва $x<y$ предикатларни танлаб оламиз. Ўз-ўзидан маълумки, юқоридаги предикатлар асосий амаллар ва тартиб муносабатини ифодалайди.

Энди юқоридаги базис предикатлар ёрдамида $\boldsymbol{Z}$ тўпламнинг баъзи бир хоссаларини ифодалаймиз.

1. Исталган $a\in Z$ сонни $b\in\boldsymbol{Z}$ сонга қолдиқли бўлиш ҳақидаги теорема қуйидагича ёзилади: $\forall a$, $\forall b\in\boldsymbol{Z}\,(b\neq 0)\Rightarrow\Rightarrow\exists q\,(q\in Z)$, $\exists r\,(a=bq+r)\wedge(r=0)\vee(0<r)\wedge(r<|b|)\,(r\in\boldsymbol{Z})$.

Охирги мулоҳаза бундай ўқилади: «Барча a ва b бутун сонлар учун, агар b нолга тенг бўлмаса, шундай q ва r бутун сонлар топиладики, улар учун $a=bq+r$ бўлиб, r сони 0 га тенг ёки нолдан катта ва $|b|$ дан кичик бўлади».

2. $y|x$, яъни (x сон y га бўлинади) предикатни қуйидагича аниқлаб оламиз:

$$y|x\leftrightarrows\exists q\in\boldsymbol{Z}\ (x=q\cdot y).$$

Мисоллар. 1. Қуйидаги предикатлар берилган бўлсин:

$f(x)$: «x — тўртбурчак»,

$\varphi(x)$: «x — квадрат».

«Баъзи тўртбурчаклар квадратлардир» деган тасдиқ қуйидагича ёзилади:

$$\exists x\,f(x)\Rightarrow\varphi(x).$$

2. Фараз қилайлик, $x\in\boldsymbol{R}$ бўлганда $f(x)$ функция $\boldsymbol{R}$ тўпламда аниқланган ҳақиқий қийматли функция бўлсин. Бундай ҳолда $f(x)$ функциянинг $x=x_0$ нуқтада, $(a;\,b)$ оралиқда узлуксизлиги ва $(a;\,b)$ оралиқда текис узлуксизлиги мос равишда қуйидагича ёзилади:

а) $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз: $\forall(\varepsilon>0)\,\exists(r>0)$

$$\forall(x\in\boldsymbol{R})(|x-x_0|<r\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon);$$

б) $f(x)$ функция $(a;\,b)$ оралиқда узлуксиз: $(\forall c\in(a;\,b)\forall(\varepsilon>0)$

$\exists (r>0)\forall (x\in(a;\ b))(|c-x|<r\Rightarrow|f(c)-f(x)|<\varepsilon)$;

в) $f(x)$ функция $(a;\ b)$ да текис узлуксиз: $(\forall(\varepsilon>0)\exists$ $(r>0)$

$\forall c\in(a;\ b))\ \forall x\in(a;\ b)(|c-x|<r\Rightarrow|f(c)-f(x)|<\varepsilon)$.

Агар б) ва в) ларга эътибор қилсак, улар бир-биридан фақатгина $\forall c\in(a;\ b)$ ифоданинг турган ўрни билан фарқ қилади, холос.

Машқлар

1. 2, 3, 4, 5, . . . , n ўринли предикатларга мисоллар келтиринг.

2. Мактабда ўрганилган математик қонунларни умумийлик ва мавжудлик кванторлари ёрдамида ёзинг.

3. $\mathbf{N}(x)$, $\mathbf{Z}(x)$ $Q(x)$, $\mathbf{R}(x)$ лар мос равишда x нинг натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сон эканлигини билдирсин. Қуйидаги предикатли формулаларни шундай кванторлар билан боғлангки, улар рост мулоҳазалар бўлсин:

а) $\mathbf{Z}(x)\Rightarrow\mathbf{N}(x)$;
б) $\mathbf{N}(x)\Rightarrow\mathbf{Z}(x)$;
в) $\mathbf{Z}(x)\Rightarrow Q(x)$;
г) $\mathbf{R}(x)\Rightarrow Q(x)$;
д) $\mathbf{N}(x)\Rightarrow Q(x)$;
е) $Q(x)\Rightarrow\mathbf{R}(x)$;
ж) $\mathbf{Z}(x)\Rightarrow\mathbf{R}(x)$.

4. «$x^2-y=y^2-x$» предикатни кванторлар билан шундай боғлангки, у рост (ёлғон) бўлсин.

5. $\mathscr{P}(x)$: «x — туб сон»,

$Q(x)$: «x — жуфт сон»,

$S(x;\ y)$: «y сон x сонга бўлинади» каби предикатлар бўлганда, қуйидаги формулаларни ўқинг ва уларнинг рост ёки ёлғонлигини аниқланг:

а) $(\forall x\in\mathbf{Z})(S(2;\ x)\Rightarrow Q(x))$;
б) $(\exists x\in\mathbf{Z})(Q(x)\wedge\Phi(x)\Rightarrow S(2;\ x))$;
в) $(\forall x\in\mathbf{Z})\ \neg\ Q(x)\Rightarrow\neg\ S(x;\ x)$;
г) $(\forall x\in\mathbf{Z})(\mathscr{P}(x)\Rightarrow(\exists y\in\mathbf{Z})(Q(y)\wedge S(x;\ y))$;
д) $\exists x\in\mathbf{Z}\ (Q(x)\wedge\mathscr{P}(x))\wedge\neg\ (\exists x)(Q(x)\wedge\mathscr{P}(x))\wedge(\exists y)(x\neq y\wedge Q(x)\wedge\mathscr{P}(x))$.

17-§. ЎЗАРО ТЕСҚАРИ ТЕОРЕМАЛАР

Математикадаги теорема тушунчаси квантор ва предикат тушунчалари билан узвий боғлиқдир. Теоремадаги шарт ва хулоса қандайдир M тўпламнинг ихтиёрий элементлари учун бажарилиши талаб этилади, яъни $x\in M$ нинг A хоссага эга бўлишидан унинг B хоссага эга бўлиши келиб чиқади. Бу ерда А теореманинг шарти, B эса теореманинг хулосасидир. Предикатлар темасида кўриб ўтганимизга асосан x нинг A хоссага эга бўлиши бир ўринли $A(x)$ предикатни билдирар эди. Демак, кўпчилик теоремаларни

$$(\forall x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x)) \qquad (1)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу ерда умумийлик кванторига боғлиқ бўлган $\forall x \in M$ қисмни теореманинг кириш қисми, $A(x)$ ни (1) теореманинг шарти, $B(x)$ предикатни эса (1) теореманинг хулосаси деб юритилади. Теоремаларни (1) кўринишда ёзиш унинг шарти ва хулосасини осонгина ажратишга имкон беради.

1- теорема. *Учбурчакнинг юзи унинг асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.*

Мазкур теоремада унинг шарти ва хулосаси кўзга яққол ташланиб турмайди. Энди уни қуйидагича ёзамиз:

Агар берилган кўпбурчак учбурчак бўлса, унинг юзи асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.

Қуйидаги белгилашларни киритсак, яъни

M кўпбурчаклар тўплами: x — кўпбурчак,

$A(x)$: «x кўпбурчакнинг томонлари сони учга тенг»,

$B(x)$: «x нинг юзи» ни ифодаловчи предикат бўлса, юқоридаги теоремани $(x$ — учбурчак$) \Rightarrow \left(S_x = \frac{1}{2}ah\right)$ орқали ёза оламиз. Бунда a — учбурчакнинг асоси, h — унинг баландлиги, S_x — учбурчакнинг юзи.

Умуман теорема — «M тўпламнинг ихтиёрий x элементи A хоссага эга бўлса, у ҳолда у B хоссага ҳам эга бўлади» деб ўқилади.

Ҳар бир $(\forall x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x))$ теоремада $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар M соҳада рост мулоҳазалар бўлиб, $B(x)$ мулоҳаза ҳақиқатан $A(x)$ дан келиб чиқади, яъни (1) теореманинг хулосасини ифодалайди. Демак, (1) теоремада $A(x)$ шарт асос вазифасини бажаради. $B(x)$ нинг $A(x)$ дан келиб чиқиши яна шу билан тасдиқланадики, биз (1) теоремани (яъни $B(x)$ нинг ростлигини) исботлашда албатта $A(x)$ нинг ростлигига суянамиз. Бу муҳокама теоремани билдирувчи $A(x) \Rightarrow B(x)$ импликация ихтиёрий $x \in M$ учун айнан рост формула эканлигини кўрсатади. Демак, $A(x) \Rightarrow B(x)$ импликация M тўпламда айнан рост бўлмаса, бу тасдиқ $B(x)$ нинг $A(x)$ дан хулоса бўлиб чиқмаслигини билдиради. Бу ҳолда (1) ифода теоремани билдиради.

Теоремалар одатда тўрт хил бўлади:

1) $(\forall x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x))$ — тўғри теорема;

2) $(\forall x \in M)(B(x) \Rightarrow A(x))$ — тескари теорема;

3) $(\forall x \in M)(\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x))$ — тўғри теоремага қарама-қарши теорема;

4) $(\forall x \in M)(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$ — тескари теоремага қарама-қарши теорема.

Ўз-ўзидан маълумки, $x \in M$ бўлганда x нинг аниқ қийматларида $A(x)$ ва $B(x)$ предикатларнинг ҳар бири фақатгина икки хил — рост ёки ёлғон мулоҳазаларни ифодалаши мумкин. Агар берилган теоремада унинг шарти ва хулосаларнинг ўринларини алмаштирсак, тўғри теоремага тескари теорема ҳосил бўлади.

Юқорида келтирилган тўрт хил теоремалардан баъзи бирлари ўзаро тенг кучлидир.

Иккита мулоҳаза импликацияси таърифига асосан қуйидаги жадвални тўлдирамиз:

$A(x)$	$B(x)$	$\neg A(x)$	$\neg B(x)$	$A(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow B(x)$	$B(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow A(x)$	$\neg A(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \neg B(x)$	$\neg B(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow \neg A(x)$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Бу жадвалдан кўринадики,

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x));$$

$$\forall x(B(x) \Rightarrow A(x)) \equiv \forall x(\neg A(x) \Rightarrow \neg B(x)),$$

яъни тўғри теорема билан тескари теоремага қарама-қарши теорема ва тескари теорема билан тўғри теоремага қарама-қарши теоремалар тенг кучли экан.

Бирор теорема иккинчисига тескари бўлса, бу теоремалар ўзаро тескари теоремалар деб юритилади. Агар ҳар бир теоремада унинг тушунтириш қисми кўрсатилмаса, тескари теорема ўз маъносини йўқотади.

2-теорема. *Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлади.*

Мазкур теоремага тескари $\alpha: \neg B(x)$, β: $A(x)$ теоремани тўғридан-тўғри бир қийматли усулда топиш мумкин эмас. Бунда $A(x)$ берилган тўртбурчак ромб, $B(x)$ ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр.

Ҳақиқатан, агар ромбни тўртбурчаклар тўплами элементи деб қарайдиган бўлсак, диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган ҳар қандай тўртбурчак ҳам ромб бўлавермайди. Агар ромбни параллелограммлар тўпламидан олсак, у ҳолда бу теоремага тескари теорема қуйидагича бўлади:

($\forall Q$, Q — параллелограмм), (Q_1 — ромб) $\Rightarrow$ (Q — нинг диагоналлари перпендикуляр) кўринишни олиб, охирги теорема эса ростдир.

18-§. ЗАРУРИЙ ВА ЕТАРЛИ ШАРТЛАР

Мактаб математика курсидан маълумки, баъзи бир теоремалар етарли, зарур ва етарли ҳамда зарурий шартлар билан боғланган бўлади. Биз ҳозир теоремалар қандай ҳолларда юқоридаги боғловчи сўзлар ёрдамида ифодаланишини кўриб ўтамиз.

Бўшмас M тўплам элементлари учун $A(x)$ ва $B(x)$ предикатлар аниқланган бўлсин. Қуйидаги ўзаро қарама-қарши теоремаларни кўриб ўтайлик.

1. Агар M тўпламнинг баъзи бир x элементлари $A(x)$ хоссага эга бўлса, улар $B(x)$ хоссага ҳам эга бўлади.

2. M тўпламнинг баъзи бир x элементлари $B(x)$ хоссага эга бўлса, улар $A(x)$ хоссага ҳам эга бўлади.

Бу тасдиқларни қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

1. M тўпламнинг $A(x)$ хоссага эга бўлган элементлари $B(x)$ хоссага ҳам эга бўлиши зарур.

2. M тўпламни барча элементларининг $A(x)$ хоссага эга бўлишидан уларнинг $B(x)$ хоссага эга бўлиши келиб чиқади ёки $x \in M$ элементнинг $A(x)$ хоссага эга бўлиши унинг $B(x)$ хоссага эга бўлиши учун етарли.

Масалан, $M \leftrightarrows N$ ва $B(x)$: «x — жуфт сон», $A(x)$: «x сон 4 га қолдиқсиз бўлинади» каби предикатлар берилган бўлсин. Бундай ҳолда

$$(\exists x \in N)(B(x) \Rightarrow A(x)) \tag{1}$$

$$(\forall x \in N)(A(x) \Rightarrow B(x)) \tag{2}$$

тасдиқлар рост бўлади, лекин

$$(\forall x \in N)(B(x) \Rightarrow A(x)) \tag{3}$$

тасдиқ рост эмас. (Масалан, 38 сони, гарчи жуфт сон бўлса-да, 4 га бўлинмайди.) Шундай қилиб, (2) теорема рост бўлганда $A(x)$ предикат $B(x)$ учун етарли шарт, $B(x)$ предикат эса $A(x)$ учун зарурий шарт бўлади. Агар бир вақтнинг ўзида (2) ва (3) теоремалар ўринли бўлса, бундай теоремалар зарур ва етарли шартлар билан боғланган теоремалар деб юритилади.

Қуйидаги ***теорема*** шундай теоремалардан биридир: *Натурал соннинг 9 га бўлиниши учун унинг рақамлари йиғиндиси 9 га бўлиниши зарур ва етарлидир.*

Мисоллар. Қуйидаги тасдиқларни $(\forall x\in M)(A(x)\Rightarrow B(x))$ кўринишда ёзинг:

1. Ҳар қандай мусбат рационал сон бирорта кесманинг узунлигини ифодалайди.

2. Исталган учбурчакнинг баландлиги қарама-қарши томонга ёки унинг давомига перпендикуляр бўлади.

3. Параллелограмм диагоналлари узунликлари квадратлари йиғиндиси унинг тўртта томони узунликлари квадратларининг йиғиндисига тенг.

4. Қуйидаги нуқталар ўрнига зарур, етарли, зарур ва етарли сўзлардан тегишлисини қўйинг:

а) бирор соннинг 6 га бўлиниши учун унинг 3 га бўлиниши...

б) кетма-кетликнинг лимитга бўлиши учун унинг чегараланган бўлиши ...

в) бирор соннинг 5 га бўлиниши учун унинг ноль билан тугаши...

г) берилган учбурчакнинг тўғри бурчакли учбурчак бўлиши учун $a^2+b^2=c^2$ бўлиши.

5. Мактабда ўрганган теоремаларингиздан камида учтасини $(\forall x\in M)(A(x)\Rightarrow B(x))$ кўринишда ёзинг.

Бу тасдиқларнинг қайси бири теорема бўлади? Қайси ҳолларда тескари, қарама-қарши, тескарига қарама-қарши тасдиқлар ўринли бўлади?

19-§. ТЕОРЕМАЛАРНИ ИСБОТЛАШ УСУЛЛАРИ

Бирор фикрнинг рост ёки ёлғонлигини тиклаш учун тўғри хулосага олиб келувчи қоидалар одатда мантиқий қонунлар деб юритилади.

Мантиқий қонунлар билан шуғулланганда айнан формулалар муҳим аҳамият касб этади.

Ҳар қандай айнан ёлғон L формулага айнан рост $\neg L=I$ формула мос келгани учун, биз фақатгина айнан рост формулалар билан шуғулланамиз. Ана шундай формулалардан бири учинчисини инкор этиш қонунидир:

$$\neg p \vee p \equiv I, \qquad (1)$$

яъни иккита ўзаро қарама-қарши p ва $\neg p$ мулоҳазалардан бири доимо рост.

Мазкур қонун p ёки $\neg p$ нинг ростлик қийматига ҳам ва ҳатто уларнинг аниқ мазмунига ҳам боғлиқ эмас. Шунинг учун бу қонундан ихтиёрий мантиқий фикрлаш, исбот ва хулосалаш жараёнида фойдаланиш мумкин.

Мисол. Агар $n \neq 1$ ихтиёрий натурал сон бўлганда p: «n—туб сон», $\neg p$: —n «туб сон эмас» каби мулоҳазалар бўлса, $\neg p \vee p$ рост бўлади. Ҳақиқатан, 1 дан фарқли исталган натурал сон туб ёки мураккаб бўлади.

Зиддият қонуни. Иккита ўзаро қарама-қарши мулоҳазалар бир вақтнинг ўзида рост бўла олмайди. Бошқача қилиб айтганда,

$$\neg(\neg p \wedge p) \equiv I \qquad (2)$$

бўлади. (2) формуланинг айнан ростлиги $\neg p \wedge p$ формуланинг айнан ёлғонлигини билдиради. Бундай ҳолда конъюнкция таърифига биноан p ёки $\neg p$ нинг биттаси ёлғон.

Мисол. «5 — туб сон» — рост;
«5 — мураккаб сон» — ёлғон;
«5 — туб ва мураккаб сон» — ёлғон;
«5 — туб ва мураккаб сон эканлиги ёлғон» — рост.

Математик теорема — ростлиги исботлашдан кейингина аниқланадиган мулоҳазадир.

$(\forall x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x))$ теоремани исботлаш деган сўз тегишли асосларга суяниб, илмий ва мантиқий жиҳатдан тўғри муҳокама қилиш жараёнида $B(x)$ нинг (яъни теоремадаги исботлаш лозим бўлган қисмининг) ростлигини юзага чиқариш демакдир. Биз бундан кейин зарурат бўлмаганда $(\forall x \in M)$ $(A(x) \Rightarrow B(x))$ кўринишдаги теоремани қисқача $A \Rightarrow B$ орқали ёзамиз.

Исботлаш турли усуллар билан олиб борилади. Исботнинг асосий усуллари қуйидагилар:

1) бевосита исботлаш усули;
2) қарама-қаршисини фараз қилиб исботлаш усули;
3) тескарисидан исботлаш усули;
4) тўлиқ математик индукция принципи асосида исботлаш усули.

Бу усулларни математик мантиқ формулалари ёрдамида кўриб ўтамиз.

1. Бевосита исботлаш усулининг моҳияти шундан иборатки, унинг асослари бўлиб A ва $A \Rightarrow B$ мулоҳазалар, хулосаси бўлиб эса B мулоҳаза хизмат қилади. Бошқача қилиб айтганда, теореманинг берилган қисмидан ва «Берилган қисми ўринли бўлса, исботланадиган қисми ҳам ўринли бўлади» деган мулоҳазадан бу теореманинг исботланадиган қисми келтириб чиқарилади. Бундан бевосита исботлаш усулининг формуласи

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \qquad (3)$$

дан иборатдир. (3) формула кўп ҳолларда $\frac{A,\ A \Rightarrow B}{B}$ шаклда ёзилади.

Бу формуланинг доимо ростлигини биламиз. Бунга яна бир марта ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Демак, бевосита исботлаш усули мантиқий жиҳатдан тўғри усул экан. (3) мантиқий қонун одатда (modusponens) модус поненс (ажратиш қоидаси) қонуни деб юритилади.

2. Қарама-қаршисини фараз қилиб исботлаш усулининг моҳияти ушбудан иборат: теореманинг исботланадиган қисми (яъни хулосаси) ёлғон (нотўғри), шу сабабли унинг инкори $\neg B$ рост деб фараз қилинади. Бу фараз ва $A \Rightarrow B$ тасдиқдан $\neg A$ нинг ростлиги келиб чиқади, чунки

$$\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \qquad (4)$$

ёки $\frac{\neg B,\ A \Rightarrow B}{\neg A}$ формула айнан ростдир.

Ҳақиқатан, $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A \equiv \neg (\neg B \wedge (\neg A \vee B)) \vee \vee \neg A \equiv \neg \neg B \vee (A \wedge \neg B) \vee \neg A \equiv I$. Лекин теорема шартига асосан $\neg A$ эмас, балки A рост. Ҳосил бўлган зиддият $\neg B$ рост деган фаразимизнинг нотўғрилигини ва демак, B нинг ростлигини тасдиқлайди.

(4) формула қарама-қаршисини фараз қилиб исботлашнинг формуласини беради ва унинг айнан ростлиги мазкур усулнинг мантиқан тўғри эканлигини билдиради.

3. Тескарисидан исботлаш усули.

Биз 17-параграфда $\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \Rightarrow \Rightarrow \neg A(x))$ эканлигини кўрсатган эдик. Кўп ҳолларда берилган $\forall x (A(x) \Rightarrow B(x))$ теоремани исботлаш анча оғир (ҳатто мумкин эмас) бўлиб, лекин тескари теоремага қарама-қарши теоремани исботлаш анча қулай бўлиши мумкин. Ана шундай ҳолларда берилган теорема ўрнига унга тенг кучли бўлган, тескари теоремага қарама-қарши теорема исботланади.

Мисол сифатида қуйидаги теоремани олайлик. $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ лар векторлар бўлсин.

Теорема. $(\forall \overline{a} \neq \overline{0},\ \forall \overline{b} \neq \overline{0}),$

$$|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}| + |\overline{b}| \Rightarrow \overline{a} \parallel \overline{b}. \tag{5}$$

Тескари теоремага қарама-қарши теорема:

$$(\forall \overline{a} \neq 0,\ \forall \overline{b} \neq 0)(\overline{a} \neq \overline{b} \Rightarrow |\overline{a}+\overline{b}| \not\Rightarrow |\overline{a}| + |\overline{b}|. \tag{6}$$

4. Қарама-қаршисини маъносизликка келтириб исботлаш усули юқорида баён этилган қарама-қаршисини фараз қилиб исботлаш усулининг турларидан бири бўлиб, у қуйидаги маънога эга: бу усул бўйича ҳам A дан келиб чиқадиган B хулоса ёлғон. Демак, унинг $\neg B$ инкори рост деб фараз қилинади. Сўнгра $\neg B \Rightarrow C$ ва $\neg B \Rightarrow \neg C$ тасдиқлар тўғри бўладиган янги хулосанинг мавжудлиги кўрсатилади.

Лекин битта асосдан бир-бирига зид бўлган C ва $\neg C$ оқибатнинг келиб чиқиши маъносиздир. Ана шу маъносизликка асосан $\neg B$ рост деган фараз нотўғри бўлиб, демак, B рост эканлиги тасдиқланади.

Энди бу усулни ифодаловчи мантиқий формуланинг айнан ростлигини кўрсатамиз.

$\neg B \Rightarrow C$ ва $\neg B \Rightarrow \neg C$ маъносизликдан оқибат сифатида B формула келиб чиққанлиги учун мазкур усулни ифодаловчи формула

$$(\neg B \Rightarrow C) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow B$$

ёки

$$\frac{\neg B \Rightarrow \mathrm{C},\ \neg B \Rightarrow {}^{-}C}{B}$$

кўринишда бўлади. Бу формула эса айнан рост.

Ҳақиқатан, $(\neg B \Rightarrow C) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow B \equiv \neg ((B \vee C) \wedge \wedge (B \vee \neg C)) \vee B \equiv \neg (B \vee C) \vee \neg (B \vee \neg C) \vee B \equiv (\neg B \wedge \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C) \vee B \equiv (\neg B \vee \neg B \vee B) \vee (\neg B \vee C \vee B) \wedge \wedge (\neg C \vee \neg B \vee B) \wedge (\neg C \vee C \vee B) \equiv I \wedge I \wedge I \equiv I.$

II боб. АЛГЕБРАИК СИСТЕМАЛАР

20-§. АЛГЕБРАИК АМАЛ ВА АЛГЕБРАЛАР

Ҳозирги замон алгебра фани тўплам ва унинг элементлари учун аниқланган алгебраик амал ва унинг хоссаларини ўргатади.

1-таъриф. Бўш бўлмаган A тўплам берилган бўлсин. $A\times A$ декарт кўпайтмани A тўпламнинг ўзига мос қўювчи $\alpha : A\times A \to A$ акслантиришига A тўпламда аниқланган бинар *алгебраик амал* дейилади.

Бу таърифга асосан, $a, b \in A$ бўлганда тартибланган $(a; b)$ жуфтликка шу A тўпламнинг аниқ битта C элементи мос келгани ҳолда $(b; a)$ жуфтликка $c \in A$ мос келмаслиги мумкин. α акслантириш ёрдамида $(a; b) \in A \times A$ жуфтликка $c \in A$ нинг мос қўйилиши $\alpha(a; b) = c$, $(a; b)\alpha = c$ ёки $a \alpha b = c$ орқали белгиланади.

A тўпламнинг элементлари учун аниқланган бинар (икки ўринли) алгебраик амаллар одатда махсус танланган 0, $\perp$, $\top$, $*$,   белгилар билан белгиланади. Мактаб математикасидан маълумки, $a + b$ ва $a \cdot b$ лар мос равишда a ва b элементларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасини билдиради.

2-таъриф. $A^{n-1} \times A = A^n$ бўлиб, декарт кўпайтманинг тартибланган ҳар бир $(a_1, a_2,\quad , a_n)$ элементига A тўпламнинг ягона a_{n+1} элементи мос қўйилган бўлса, A тўпламда ранги n га тенг бўлган (n ўринли, n — ар) *алгебраик амал аниқланган* дейилади.

n ўринли алгебраик амални α орқали белгиласак, у $(a_1, a_2,$ $, a_n)\alpha = a_{n+1}$ ёки $\alpha(a_1, a_2,\quad a_n) = a_{n+1}$ кўринишларда ёзилади. Баъзи ҳолларда $a_{n+1} \notin A$ бўлиши мумкин. Бундай ҳолда қаралаётган алгебраик амал қисмий алгебраик амал деб юритилади.

Алгебраик амаллар ноль, бир, икки, уч,   , n ўринли бўлиши мумкин ва улар мос равишда нулар, унар, бинар, тернар, n — ар алгебраик амаллар деб юритилади.

A тўпламнинг исталган элементини алоҳида олиш — ноль ўринли алгебраик амалдир. Бир ўринли алгебраик амал деганда A тўпламни ўз-ўзига акслантиришни тушунамиз. Бирор сонлар тўпламида аниқланган $a : b =$

$= c \quad d$ пропорция уч ўринли алгебраик амал бўлади. n та натурал соннинг энг катта умумий бўлувчисини топиш n ўринли алгебраик амалга мисолдир.

Натурал сонлар тўпламида аниқланган «a дан бевосита кейин келади» муносабати бир ўринли алгебраик амалдир.

Битта A тўпламнинг ўзида бир қанча алгебраик амаллар аниқланиши мумкин. Шу амалларни биз f_1, $f_2, \ldots , f_s$ орқали белгилайлик.

3-таъриф. Бўш бўлмаган A тўплам ва унда қаралаётган алгебраик амаллар тўплами Ω дан тузилган $< A, \Omega >$ тартибланган жуфтлик *алгебра* дейилади.

A тўпламда қаралаётган амаллар сони чекли бўлганда бу алгебра $A = < A, f_1, f_2, \quad , f_S >$ кўринишда белгиланиб, узунлиги $s + 1$ га тенг бўлган кортежни ифодалайди. Бу ерда A тўплам қаралаётган алгебранинг асосий тўплами, f_1, $f_2, \quad , f_s$ амаллар эса асосий алгебраик амаллар деб юритилади. f алгебраик амалнинг ранги одатда $r(f)$ орқали белгиланади.

4-таъриф. Агар $r(f_i) = r_i$ $(i = 1, 2, \quad , s)$ бўлса, $(r_1, r_2, \quad , r_s)$ кортеж $< A, f_1 \, f_2 \quad , f_s >$ алгебранинг *тури (типи)* дейилади.

Масалан, $< \boldsymbol{Z}, +, \cdot, - >$ алгебра (2, 2, 2) турли алгебрадир.

$n = 0$ бўлса, $A^\circ \rightarrow A$ операцияга нулар операция дейилиб, у ҳолда нулар операцияга A тўпламнинг ихтиёрий танланган элементи мос қўйилади.

$< N, +, \cdot, 1 >$ алгебра эса (2, 2, 0) турли алгебрадир (1 сон кўпайтириш амалига кўра N даги нейтрал элемент).

Мисоллар. 1) Натурал сонлар тўпламида аниқланган айириш амали бинар алгебраик амал бўлмай, балки қисмий бинар алгебраик амалдир, чунки исталган иккита натурал сон айирмаси ҳар доим ҳам натурал сон бўлавермайди.

2) N тўплам элементлари учун аниқланган $a \alpha b \leftrightarrows a^b$ мослик алгебраик амал бўлади.

3) Бутун сонлар тўпламида сонларни қўшиш, кўпайтириш, айириш амаллари бинар алгебраик амал бўлади.

4) Мулоҳазалар устида бажариладиган (инкор амалидан бошқа) мантиқий амаллар мулоҳазалар тўпламида бинар алгебраик амаллар бўлади.

5) Бирор U универсал тўпламнинг қисм тўпламда-

ри учун бажариладиган бирлашма ва кесишмалар бинар алгебраик амал бўлади.

6) Иккита натурал m ва n соннинг умумий бўлувчисини топиш бинар алгебраик эмас, чунки мазкур сонлар бир нечта умумий бўлувчиларга эга бўлиши мумкин.

7) Иккита векторнинг скаляр кўпайтмаси ҳам бинар алгебраик амал эмас, чунки у векторларнинг скаляр кўпайтмаси вектор бўлмай, балки сондир.

8) Бутун сонлар тўплами $\boldsymbol{Z}$ ва бу тўпламда аниқланган қўшиш, айириш амаллари бўйича $< \boldsymbol{Z}, +, - >$ алгебрани ташкил қилади.

9) $< N, +, \quad >$ алгебра (2,2) турли алгебрадир.

10) Бирор бўш бўлмаган M тўпламнинг барча қисм тўпламлари тўпламини 2^M деб белгилайлик. Бундай ҳолда $< 2^M, \cap, \cup, - >$ алгебра (2, 2, 1) турли алгебра бўлиб, бу ерда $\cap$, $\cup$ ва $-$ лар мос равишда кесишма, бирлашма ва тўлдирувчи тўпламларни билдиради.

11) $\boldsymbol{R}$ ҳақиқий сонлар тўплами учун $< \boldsymbol{R}, +, -, \cdot, 1 >$ алгебра (2, 2, 2, 0) турли алгебра бўлади.

Машқлар

1. $a \in \boldsymbol{R}$ бўлганда $f : a \rightarrow |a|$ мослик неча турли алгебра бўлади.

2. N тўпламда $x \cdot y = x^y$ $(\forall x, \quad y \in N)$, яъни даражага кўтариш амали коммутатив бўладими ёки ассоциатив бўладими?

3. Ҳақиқий сонлар тўпламида $x^2 + y^2 = z^2$ шартни қаноатлантирувчи $(x; y; z)$ учликлар тўплами неча турли алгебраик амал эканлигини аниқланг.

21-§. БИНАР АЛГЕБРАИК АМАЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Биз 20-§ да кўриб ўтганимиздек, бирор сонлар тўпламида аниқланган қўшиш, кўпайтириш, даражага кўтариш, айириш ва бўлиш амаллари бинар алгебраик (баъзан қисмий алгебраик) амаллар эди.

Мактаб алгебра курсидан маълумки, қўшиш ва кўпайтириш амаллари коммутатив, ассоциатив ва кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутивдир.

Лекин математикада учрайдиган барча бинар алгебраик амаллар ҳар доим ҳам коммутатив ёки ассоциатив бўлавермайди. Фараз қилайлик, A тўпламда иккита ҳар хил $\top$ ва $\perp$ каби бинар алгебраик амаллар берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар A тўпламнинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $a \top b = b \top a$ тенглик бажарилса, у ҳолда $\top$ бинар алгебраик амал A тўпламда коммутатив дейилади.

Масалан: 1) Сонлар тўпламида аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари коммутатив бўлади; 2) сонлар тўпламида аниқланган даражага кўтариш амали коммутатив эмас, чунки $a^b \neq b^a$.

2-таъриф. A тўпламнинг исталган учта a, b ва c элементи учун $a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\top$ алгебраик амал A тўпламда *ассоциатив* дейилади.

Масалан: 1) Ихтиёрий сонлар тўпламида аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амаллари ассоциативдир; 2) ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган даражага кўтариш амали ассоциатив эмас, чунки $(a^b)^c \neq a^{bc}$ $(\forall a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R})$.

3-таъриф. A тўпламнинг исталган учта a, b ва c элементи учун $a \top (b \perp c) = (a \top b) \perp (a \top c)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $\top$ амал $\perp$ амалга нисбатан *дистрибутив* дейилади.

Масалан: 1) Сонлар тўпламида аниқланган кўпайтириш амали қўшишга нисбатан дистрибутив, чунки $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(\forall a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R})$ тенглик ўринли. Лекин $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$ $(\forall a,\ b,\ c \in \boldsymbol{R})$ бўлгани учун қўшиш амали кўпайтириш амалига нисбатан дистрибутив эмас; 2) 2^M тўпламда аниқланган бирлашма амали кесишмага нисбатан ва аксинча, кесишма амали бирлашма амалига нисбатан дистрибутив бўлади (исботланг).

4-таъриф. Бўш бўлмаган A тўпламда аниқланган $\top$ бинар алгебраик амал ва шу тўпламнинг исталган x ва y элементлари учун $x \top a = y \top a$ $(a \top x = a \top y)$ тенгликдан $x = y$ келиб чиқса, у ҳолда A тўплам элементлари учун $\top$ амалга нисбатан чапдан (ўнгдан) *қисқартириш қонуни ўринли* дейилади.

Агар A тўпламнинг элементлари учун бир вақтнинг ўзида чап ва ўнгдан қисқартириш қонуни ўринли бўлса, A тўпламда қисқартириш қонуни ўринли деб юритилади.

Масалан: 1) 0 ва 1 дан фарқли a сон учун $a^x = a^y$ тенгликдан $x = y$ ҳосил бўлади, яъни даражага кўтариш амали учун чапдан қисқартириш қонуни ўринли;

2) $x^a = y^a$ тенгликда, a тоқ сон бўлса, $x = y$ келиб чиқади, лекин a жуфт сон бўлганда $x = y$ келиб чиқмайди.

Шунинг учун $x^a = y^a$ тенгликда a жуфт сон бўлган ҳол учун ўнгдан қисқартириш қонуни ўринли эмас;

3) исталган сонлар тўпламида кўпайтириш амалига нисбатан ҳар қандай $a \neq 0$ учун чапдан ва ўнгдан қисқартириш қонуни ўринли, яъни $a \cdot x = y \cdot a$ дан $x = y$ ҳосил бўлади.

5-таъриф. Агар A тўпламда шундай e элемент мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x \in A$ учун $e \top x = x$ $(x \top e = x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда e элемент $\top$ амалга нисбатан чап (ўнг) *нейтрал элемент* дейилади.

6-таъриф. A тўпламнинг ихтиёрий x элементи учун $x \top e = e \top x = x$ тенглик ўринли бўлса, e элемент $(e \in A)$ $\top$ амалга нисбатан нейтрал элемент дейилади.

1-теорема. *Агар A тўплам $\top$ амалга нисбатан чап ва ўнг нейтрал элементларга эга бўлса, у ҳолда бу элементлар тенгдир.*

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни A тўплам элементлари учун e' чап нейтрал элемент, e эса ўнг нейтрал элемент бўлиб, $e' \neq e$ бўлсин. e ва e' элементлар ҳамда A тўпламнинг ихтиёрий x ва y элементлари учун

$$e' \top y = y \tag{3}$$

ва

$$x \top e = x \tag{4}$$

ўринли бўлади. (4) тенгликда $x = e'$, (3) да эса $y = e$ деб оламиз. Унда $e' \top e = e$ ва $e' \top e = e'$ ларга биноан $e' = e$ бўлади. Демак, фаразимиз нотўғри экан. Теорема исботланди.

Масалан: 1) 0 ва 1 сонлари $\mathbf{Z}$ тўпламда мос равишда қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан нейтрал элементлардир;

2) $2^x = x$ тенглама ҳеч қандай x учун ўринли бўлмайди. Демак, даражага кўтариш амали чап нейтрал элементга эга эмас;

3) $x^e = x$ тенглик $e = 1$ да бажарилгани учун 1 сони ўнг нейтрал элемент бўлади. Чап нейтрал элемент мавжуд бўлмагани учун даражага кўтариш амали нейтрал элементга эга эмас;

4) исталган f, g акслантиришлар композицияси учун айний акслантириш нейтрал элемент бўлади.

Фараз қилайлик, $\top$ бинар алгебраик амал A тўпламда аниқланган бўлиб, бу амал учун e нейтрал элемент мавжуд бўлсин.

7-таъриф. Агар A тўпламнинг a ва $\bar{a}$ элементлари учун $\bar{a} \top a = e$ бўлса, $\bar{a}$ элемент a га нисбатан чап симметрик элемент, a эса $\bar{a}$ га нисбатан *ўнг симметрик элемент* дейилади.

Масалан, $\boldsymbol{R}$ ҳақиқий сонлар тўпламида a сон қўшиш амалига нисбатан $-a$ га симметрик, $a \neq 0$ элемент кўпайтириш амалига нисбатан a^{-1} га симметрикдир.

8-таъриф. Агар A тўпламнинг a ва $\bar{a}$ элементлари учун $\bar{a} \top a = a \top \bar{a} = e$ тенглик ўринли бўлса, $\bar{a}$ элемент a га симметрик элемент, a ва $\bar{a}$ лар эса *ўзаро симметрик элементлар* дейилади.

Агар a элементга симметрик $\bar{a}$ элемент мавжуд бўлса, a тескариланувчан элемент дейилади.

2-теорема. *Агар A тўпламда аниқланган $\top$ бинар алгебраик амал ассоциатив ва a элемент тескариланувчан бўлса, унда a га симметрик элемент ягона бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, иккита ҳар хил x ва y элемент $\top$ бинар алгебраик амал бўйича битта a элементга симметрик бўлсин, яъни $a \top x = e = x \top a$ ва $a \top y = y \top a = e$.

$\top$ бинар алгебраик амал ассоциатив бўлганидан қуйидагини ёза оламиз: $x = x \top e = x \top (a \top y) = (x \top a) \top y = e \top y = y$. Демак, $x = y$ экан.

Машқлар

1. Z тўпламда шундай $\top$, $\perp$ алгебраик амалларни топингки, уларда $\top$ амал ассоциатив ва коммутатив бўлгани ҳолда, $\perp$ га нисбатан дистрибутив бўлмасин.

2. $\boldsymbol{R}$ да шундай алгебраик амал киритингки, ўнгдан ҳам, чапдан ҳам қисқартириш қонуни ўринли бўлмасин.

22-§. ҚИСМ АЛГЕБРАЛАР. АЛГЕБРАЛАРНИНГ ГОМОМОРФЛИГИ ВА ИЗОМОРФЛИГИ

Баъзи бир алгебралар ва уларнинг элементлари ўхшаш хоссаларга эга бўлиши мумкин.

Масалан, $\boldsymbol{R}$ — ҳақиқий сонлар тўплами, $\boldsymbol{R}+$ эса мусбат ҳақиқий сонлар тўплами бўлганда $\boldsymbol{R} = < \boldsymbol{R}, +, 0 >$ $\boldsymbol{R}' = < \boldsymbol{R}^{+}, \cdot, 1 >$ алгебраларнинг ҳар бирида биттадан бинар ва биттадан нулар алгебраик амаллар аниқланган бўлиб, улар учун

1) $x + y = y + x$ $(\forall x,\ y \in \boldsymbol{R})$;	1′) $x \cdot y = y \cdot x$ $(\forall x,\ y \in \boldsymbol{R}+)$;
2) $x + 0 = x$ $(\forall x \in \boldsymbol{R},\ \exists\, 0 \in \boldsymbol{R})$;	2′) $x \cdot 1 = x (\forall x \in \boldsymbol{R}^{+},\ \exists\, 1 \in \boldsymbol{R}+)$;
3) $x + y = 0$ $(\forall x \in \boldsymbol{R},\ \exists\, y \in \boldsymbol{R})$;	3′) $x \cdot y = 1$ $(\forall x \in \boldsymbol{R}+, \exists\, y \in \boldsymbol{R}^{+})$

каби «ўхшаш» хоссалар ўринли. Алгебраларнинг бундай «ўхшаш» хоссалари уларнинг изоморфлик тушунчаси билан узвий боғлангандир. Алгебраларнинг изоморфлик тушунчасини баён қилишдан олдин бир хил турли алгебралар устида тўхталиб ўтамиз.

Иккита бўш бўлмаган A ва A' тўплам берилган бўлиб, уларда мос равишда чекли сондаги $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ ва $F' = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_l\}$ алгебраик амаллар аниқланган бўлсин. Бу ерда f_i $(i = \overline{1, k})$ ва f'_j $(j = \overline{1, l})$ алгебраик амалларнинг барчаси ҳар хил ўринли ёки баъзи бирлари бир хил ўринли, бошқалари эса ҳар хил ўринли бўлиши мумкин. Юқорида эслатганимиздек, f_i ёки f'_j ларнинг баъзилари ноль ўринли алгебраик амаллар бўлса, улар мос равишда A ёки A' тўпламнинг айрим элементларини ифодалаши мумкин.

1-таъриф. A ва A' тўпламда аниқланган алгебраик амаллар сони тенг бўлиб, A тўпламда аниқланган f_i $(i=\overline{1,k})$ алгебраик амалларнинг ранги билан A' тўпламда аниқланган ва $f_i \in F$ амалларга мос келувчи $f'_j \in F'$ алгебраик амалларнинг ранглари ўзаро тенг бўлса, $A = <A, F>$, $A' = <A', F'>$ алгебралар *ўзаро бир хил турли алгебралар* дейилади.

Шу таърифга асосан биз юқорида кўриб ўтган $< R, +, 0 >$ ва $(R+, \quad 1 >$ алгебралар бир хил турли алгебралардир.

2-таъриф. Агар A алгебранинг асосий A тўплами чекли (чексиз) бўлса, у ҳолда $A = < A, F >$ алгебра ҳам *чекли (чексиз) алгебра* дейилади.

А тўпламнинг бирор бўш бўлмаган B қисм тўпламини олайлик.

3-таъриф. Агар $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ бўлганда $f_i (b_1, \ldots, b_n) \in B$ бўлса, у ҳолда B тўплам $f_i \in F$ амалларга нисбатан ёпиқ дейилади.

Масалан, $Z = < Z, +, \cdot, 0,1 >$ алгебра берилган бўлсин. $N \subset Z$ бўлиб, $\forall a, b \in N$ учун $a + b \in N$, $a \cdot b \in N$ бўлганидан N тўплам «+» ва «·» амалларига нисбатан ёпиқ бўлади.

4-таъриф. $A \subset B$ бўлиб, $A = < A, F >$, $B = < B, F' >$ алгебралар учун $r (f_i) = r (f'_j)$ ва $f_i (a_1, a_2, \ldots, a_m) = f_j (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ $(\forall a_1, a_2, \ldots, a_m \in A)$ шартлар бажарилса, бу ҳолда A алгебра B алгебра учун *қисм алгебра (алгебраости)* дейилади (бунда m сон f_j амалнинг ранги, f_i амал A алгебранинг f_j га мос келувчи бир амали).

Масалан, $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ \ldots\}$ бўлганда $N = < N, +, \ >$ алгебра $< Z, +, \cdot >$ алгебра учун қисм алгебра бўлади. Лекин $< N_0, \ - >$ тартибланган жуфтлик $< Z, \ - >$ алгебра учун қисм алгебра бўлмайди, чунки натурал сонлар тўплами айириш амалига нисбатан ёпиқ эмас.

Энди алгебраларнинг гомоморфлиги ва изоморфлиги ҳақида фикр юритамиз.

5-таъриф. Бир хил турли $\mathrm{A} = < A, F >$ ва $\mathrm{A}' = < A', F' >$ алгебралар берилган бўлиб, A тўпламни A' тўпламга бир қийматли акслантирувчи шундай $\varphi : A \to \mathrm{A}'$ акслантириш мавжуд бўлиб, унинг учун $\varphi \ (f_i \ (a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_i' \ (\varphi \ (a_1), \ \varphi \ (a_2), \ \ldots, \varphi \ (a_n))$ тенглик A тўпламнинг барча элементлари учун бажарилса, у ҳолда A алгебра A' алгебрага *гомоморф аксланган* дейилади (бунда n сон f_i амалнинг ранги).

Масалан, $\forall \ a \in R$ учун $\varphi \ (a) = |a|$ акслантириш $< R, \ >$ алгебрани $< R_0^+, \ >$ алгебрага гомоморф акслантиради, бу ерда R_0^+ манфиймас ҳақиқий сонлар тўплами.

A алгебранинг A' алгебрага гомсморфлиги $\mathrm{A} \simeq \mathrm{A}'$ орқали белгиланади. Агар $A \simeq \mathrm{A}'$ бўлса, у ҳолда A' алгебра A алгебранинг гомоморф образи деб юритилади.

6-таъриф. Агар A алгебранинг A' алгебрага φ гомоморф аксланиши биектив акслантириш бўлса, у ҳолда A алгебра A' алгебрага *изоморф* дейилади ва алгебралар изоморфлиги $\mathrm{A} \cong \mathrm{A}'$ орқали белгиланади.

Масалан, $< R^+, \cdot, 1 > \cong < R, +, 0 >$. Ҳақиқатан, $a \in R^+$ бўлганда $\varphi \ (a) = \log_2 a$ акслантиришни олсак, R^+ тўплам R тўпламнинг устига бир қийматли аксланади ҳамда $\log_2 \ (a \cdot b) = \log_2 a + \log_2 b$ ва $\log_2 1 = 0$ бўлгани учун R да бинар ва нулар алгебраик амаллар сақланади.

Энди $\psi \ (a) = 2^a$ кўринишдаги акслантириш ёрдамида $< R, +, 0 >$ алгебра $< R^+, \cdot, 1 >$ алгебра устига аксланади. Бундан ташқари $\varphi \ (\psi \ (a)) = \varphi \ \psi \ (a)$, $\log_2 2^a = a$ га асосан $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi = e$ айний акслантириш бўлгани учун φ акслантириш изоморф акслантиришдир.

Бўш бўлмаган A тўпламда бир қанча алгебраик амаллар билан биргаликда қандайдир муносабатлар ҳам аниқланган бўлиши мумкин. Масалан, Z тўплам элементлари учун кичиклик, катталик, қолдиқсиз бўлинишлик, бир нечта соннинг энг катта умумий бўлувчиси ва бошқа муносабатлар аниқланган. Бўш бўлмаган A тўпламда аниқланган муносабатлар $w_1, w_2, \ \ldots, w_s$ лардан иборат бўлса, $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ каби белгилашни киритамиз.

Бўш бўлмаган A тўплам, унда аниқланган $F = \{f_1, f_2,$., $f_n\}$ алгебраик амаллар ва $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,$., $\omega_s\}$ муносабатларнинг тартибланган учлиги алгебраик система деб айтилади ва у $< A, F, \Omega >$ орқали белгиланади.

Масалан, $N = < N, +, \quad < >$ алгебраик система бўлади.

Тартибланган $<$ A, $\Omega >$ жуфтлик эса баъзан модел деб юритилади. Масалан, $N = < N, < >$ — модел бўлади.

Биз бундан сўнг алгебраларнинг турлича кўринишларидан иборат бўлган группа, ҳалқа, майдон, чизиқли фазо, чизиқли алгебра ва бошқа тушунчалар билан шуғулланамиз.

Машқлар

1. $N = < N, + >$ алгебрани $H = \{1, -1\}$ бўлганда $N' = < H, \cdot >$ алгебрага гомоморф акслантиринг.

2. $Q = < Q^+, \quad >$ алгебрани $< Z, + >$ алгебрага гомоморф акслантиринг.

3. $Q = < Q \setminus \{0\}, \cdot >$ алгебрани ўз-ўзига неча усулда изоморф акслантириш мумкин?

4. $Q = < Q, +, \quad >$ алгебра $R = <R, +, \quad >$ алгебра учун қисм алгебра бўладими?

5. $R = < R, +, \cdot >$ алгебра чексиз кўп қисм алгебрага эга эканлигини исботланг.

6. Агар f_1, f_2, f_3 лар мос равишда айириш, қолдиқсиз бўлиниш ва квадрат илдиз чиқариш каби амаллар бўлса: а) $< N, f_1 >$; б) $< Z, f_2 >$; в) $< Q, f_3 >$; г) $< R, f_3 >$ лар алгебра бўладими?

7. N, Z, Q ва R тўпламларнинг шундай N_1, Z_1, Q_1, R_1 қисм тўпламларини топингки, улар учун: а) $< N_1, f_1 >$; б) $< Z_1, f_2 >$; в) $< Q_1, f_3 >$ ва г) $< R_1, f_3 >$ лар алгебрани ташкил этсин.

8. $B \subset Z$ қандай бўлганда $< Z, + >$ алгебрани $< B, + >$ алгебрага изоморф акслантирувчи φ акслантириш мавжуд? Агар мавжуд бўлса, уни аниқланг.

23-§. НАТУРАЛ СОНЛАР СИСТЕМАСИ

Биз алгебраик системалар темасини кўриб ўтганимизда унинг асосий тўплами исталган элементлардан тузилган бўлиши мумкин деган эдик. Агар қаралаётган системаларнинг асосий тўплами элементлари сонлардан иборат бўлса, бундай системалар одатда сонли системалар деб юритилади.

Бу курсда асосан натурал, бутун, рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар системалари билан шуғулланилади. Сонли системаларни қуришнинг асосий иккита усули мавжуд. Улар конструктив ва аксиоматик усуллардир. Бу иккала усул ҳам тўплам тушунчасига асосланган бўлиб, дастлаб натурал, сўнгра рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар системалари қаралади.

Конструктив усулнинг моҳияти шундан иборатки, янги қурилаётган система аввалдан маълум ҳисобланган тушунча ёрдамида баён этилади. Масалан, натурал сонлар системаси учун бошланғич тушунча тўплам ҳисобланса, рационал сонлар системаси учун бошланғич тушунча натурал сонлар системасидир ва ҳ. к.

Сонлар системаларини аксиоматик усулда қуришда эса ҳар бир системанинг асосий хоссалари аксиомалар ёрдамида берилади.

Энди натурал сонлар системасини аксиоматик усулда баён этамиз. Бунинг учун асосий бошланғич муносабат сифатида «*b* элемент *a* элементдан бевосита кейин келади» муносабати ва бу муносабат учун ўринли бўлган аксиомалар системасини оламиз.

Таъриф. Бирор бўшмас *N* тўпламнинг *a* ва *b* элементлари учун «*b* элемент *a* элементдан бевосита кейин келади» муносабати ўринли бўлиб, мазкур тўплам элементлари учун қуйидаги тўртта аксиома бажарилса, у ҳолда *N* тўпламнинг элементлари *натурал сонлар* дейилади:

1) ҳеч қандай натурал сондан кейин келмайдиган 1 сони мавжуд (агар *a* дан бевосита кейин келадиган элементни a' десак, бу аксиомада $a' \neq 1$ кўринишда ёзилади);

2) исталган *a* натурал сон учун ундан бевосита кейин келадиган натурал сон ягонадир, яъни

$$(a = b) \Rightarrow (a' = b') \quad (\forall\, a, b \in N);$$

3) 1 сонидан бошқа ихтиёрий натурал сон битта ва фақат битта натурал сондан кейин келади, яъни

$$(a' = b') \Rightarrow (a = b) \quad (\forall\, a, b \in N);$$

4) агар натурал сонлар тўпламининг исталган *M* қисм тўплами: а) 1 ни ўз ичига олса; б) ихтиёрий *a* элементнинг *M* да бўлишидан a' нинг ҳам *M* да бўлиши келиб чиқса,

M қисм тўплам *N* натурал сонлар тўплами билан устма-уст тушади, яъни

$$\forall\ (M \subseteq N)\ ((1 \in M) \wedge ((a \in M \Rightarrow a' \in M)) \Rightarrow M = N$$

(индукция аксиомаси).

Юқоридаги аксиомаларни дастлаб Италия математиги Пеано (1858 — 1932) таклиф этгани учун улар Пеано аксиомалари деб юритилади.

Индукция аксиомасининг моҳияти қуйидагидан иборат: $(\forall n \in N)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$ теоремани исботлаганда аввало унинг $n = 1$ учун ростлиги кўрсатилади. Сўнгра берилган теорема $n = k$ учун тўғри деб фараз қилиниб, унинг $n = k + 1$ учун ростлиги исботланади. Шундан кейин теорема исталган n натурал сон учун тўғри деб ҳисобланади. Теоремаларни бу усулда исботлаш математик индукция принципи асосида исботлаш усули деб юритилади. Шу усулнинг тўғрилигини исбот қиламиз.

1-**теорема** (математик индукция принципи). *Агар бирор $B(n)$ тасдиқ $n = 1$ учун рост бўлиб, унинг $n=k$ да ростлигидан $n = k + 1$ учун ҳам ростлиги келиб чиқса, $B(n)$ тасдиқ исталган натурал сон учун ҳам рост бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $M \subseteq N$ тўплам $B(n)$ тасдиқ рост бўлган барча натурал сонлар тўплами бўлсин. У ҳолда теорема шартига асосан: а) $1 \in M$, чунки $n = 1$ учун теорема рост; б) $n = k \in M$ бўлсин, яъни $B(k)$ тасдиқ k натурал сон учун рост бўлсин. У ҳолда теорема шартидан $B(k')$ рост, демак, $k' \in M$ натурал сон k дан бевосита кейин келувчи сон бўлганидан M тўплам учун 4) аксиоманинг а) ва б) шартлари ўринли. Демак, тасдиқ исталган натурал сон учун рост.

Математик индукция принципига мисоллар келтирамиз.

$$1.\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

тенглик n нинг ҳар қандай натурал қийматида тўғри эканлигини исботланг.

Ҳақиқатан ҳам, $n = 1$ бўлса, $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, $1^2 = 1$ бўлиб, (1) тенглик тўғри.

Бу ерда $A(r)$ тасдиқ деганда дастлабки r та натурал сон квадратларининг йиғиндисини тушунамиз. Математик индукция принципига асосан $A(r)$ рост деб олинади, яъни

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \quad . r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \qquad (2)$$

тенглик тўғри бўлади. Энди $A\ (r)$ нинг ростлигидан фойдаланиб, $A\ (r+1)$ нинг ростлигини кўрсатамиз. Бунинг учун (2) тенгликнинг иккала қисмига $(r+1)^2$ ни қўшамиз:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2+(r+1)^2=$$

$$=\frac{r\ (r+1)\ (2r+1)}{6}+(r+1)^2=\frac{r\ (r+1)\ (2r+1)+6\ (r+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{(r+1)\ (r\ (2r+1)+6\ (r+1))}{6}=\frac{(r+1)\ (2r^2+r+6r+6)}{6}=$$

$$=\frac{(r+1)\ (2r^2+7r+6)}{6}=\frac{(r+1)\ (r+2)\ (2r+3)}{6}.$$

Демак,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(r+1)^2=\frac{(r+1)\ (r+2)\ (2r+3)}{6}. \qquad (3)$$

Бу тенглик $A\ (r+1)$ тасдиқни ифодалайди, чунки (1) даги n ни $r+1$ билан алмаштирсак, (3) ҳосил бўлади. Демак, (1) тенглик барча натурал сонлар учун ўринли экан.

$$2.\ \ 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\ (n+1)}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

тенглик n нинг ҳар қандай натурал қийматида тўғри эканлигини исботланг.

(4) тенгликнинг тўғрилигини математик индукция принципига асосан исботлайлик.

1) $n=1$ да $1^3=\left(\frac{1\ (1+1)}{2}\right)^2$ тенглик тўғри, яъни $A\ (1)$ рост.

2) Фараз қилайлик, $A\ (r)$ рост, яъни

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+r^3=\left(\frac{r\ (r+1)}{2}\right)^2 \qquad (5)$$

тенглик тўғри бўлсин.

$A\ (r)$ нинг ростлигига асосланиб, $A\ (r+1)$ нинг ростлигини кўрсатамиз. Бунинг учун (5) тенгликнинг иккала томонига $(r+1)^3$ ни қўшамиз:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+r^3+(r+1)^3=$$

$$=\left(\frac{r\ (r+1)}{2}\right)^2+(r+1)^3=(r+1)^2\left(\frac{r^2}{4}+r+1\right)=$$

$$=\frac{(r+1)^2}{4}\cdot(r^2+4r+4)=\left(\frac{(r+1)\ (r+2)}{2}\right)^2.$$

Демак, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + r^3 + (r + 1)^3 = \left(\frac{(r + 1)\ (r + 2)}{2}\right)^2$.

Бу тенглик (4) даги n ни $r + 1$ билан алмаштирилганлигини ифодалайди. Демак, (4) тенглик исталган n натурал сон учун тўғри экан.

3. Биномиал теорема.

Мактаб математикаси курсидан қуйидаги айниятларнинг ўринли эканлиги маълум:

$$(a + b)^0 = 1;$$
$$(a + b)^1 = a + b;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a + b)^4 = (a + b)^2\ (a + b)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Энди биз олдимизга $n > 4$ бўлганда $(a + b)^n$ нинг коэффициентларини ҳисоблашни мақсад қилиб қўямиз.

Агар юқоридагиларга эътибор берсак, $a + b$ иккиҳаднинг ҳар хил даражалари ёйилмасида a ва b лар қуйидаги коэффициентлар билан қатнашади:

$n = 0$ да 1
$n = 1$ да 1 1
$n = 2$ да 1 2 1
$n = 3$ да 1 3 3 1
$n = 4$ да 1 4 6 4 1
$n = 5$ да 1 5 10 10 5 1

($n = 0$ ҳол умумийликни бузмаслик учун олинади)

Бу схемага *Паскаль учбурчаги* дейилади. Мазкур учбурчакдаги ҳар бир сон ўзидан юқорида турган (чап ва ўнгда) иккита соннинг йиғиндисига тенг.

Масалан, $(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^3b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$.

Агар Паскаль учбурчагининг n-сатрида турувчи сонларни мос равишда $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \quad, C_n^n$ орқали белгиласак, $C_n^0 = C_n^n = 1$ ва юқорида эслагганимиздек

$$C_n^{r+1} = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r \tag{6}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Демак,

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n \tag{7}$$

тенглик ўринли. (7) тенгликни *Ньютон биноми* дейилади.

(7) тенгликнинг ўнг томони биномиал ёйилма, чап томони бином, унинг коэффициентлари эса биномиал коэффициентлар

дейилади. C_n^m биномиал коэффициент қуйидагича ҳисобланади:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ .\ \ .\ m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (8)$$

(8) формулада $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot.\ \ .\cdot n$, $0! = 1$ деб тушунилади.

(7) формуланинг тўғрилигини n бўйича индукция методи асосида исбот қиламиз. Бу формуланинг $n = 1, 2, 3$ ларда ўринли эканлигини юқорида кўриб ўтдик. Фараз қилайлик, бу тасдиқ даража кўрсаткичи n дан катта бўлмаган даражалар учун ўринли бўлсин. Унда (7) муносабатнинг иккала томонини $a+b$ га кўпайтирамиз:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n\cdot(a+b) = a^n(a+b) + \ldots +$$
$$+ C_n^k a^{n-k} b^k (a+b) + \quad . + b^n (a+b) = a^{n+1} +$$
$$+ a^n b + \quad + C_n^{k-1} a^{n+2-k} b^{k-1} + .\ \ . +$$
$$+ C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k + C_n^k a^{n+1-k} b^k + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} +$$
$$+ \quad . + ab^n + b^{n+1}.$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлагандан сўнг $a^{n+1-k} b^k$ бирҳад олдидаги коэффициент

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\times$$
$$\times\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k,\ C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$

дан иборат бўлади. Шундай қилиб, (7) формула $a+b$ икқиҳаднинг $n+1$ даража кўрсаткичи учун ҳам ўринли экан. Математик индукция принципига асосан мазкур формула исталган $n\in N$ учун рост деган хулосага келамиз.

4. A ва B чекли тўпламлар бўлиб, A тўплам m та элементдан, B тўплам n та элементдан иборат бўлсин.

а) A тўпламни B нинг ичига инъектив акслантиришлар сони (биз уни A_n^m деб белгилаймиз) $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ .\ .\ (n-(m-1))$ та эканлигини исботланг.

б) A ни B нинг ичига мумкин бўлган барча акслантиришлар сони n^m та эканлигини исботланг.

Исботи. а) $m < n$ бўлиши шарт, акс ҳолда A тўплам B нинг ичига инъектив аксланмайди. Исботни m бўйича индукция методи асосида олиб борамиз. $m = 1$ да $A_n^1 = n$ бўлиб, тасдиқ рост. Энди ушбу тасдиқни $m = k$ да ўринли деб, унинг $m = k + 1$ учун тўғрилигини исботлаймиз. n элементли тўпламга $k + 1$ элементли тўпламнинг барча ички инъектив акслантиришларини ҳосил қилиш учун шу n элементли тўпламнинг барча k элементли ички инъектив акслантиришларининг ҳар бирига $n - k$ та элементларни кетма-кет бирлаштириб чиқиш керак.

Натижада n элементли тўпламга k элементли тўпламнинг ички акслантиришлар сони $n - k$ марта ортади, яъни $A_n^{k+1} = A_n^k\,(n - k) = n\,(n - 1)\,(n - 2)\quad(n - (k - 1))\,(n - k)$. A_n^k акслантиришларнинг барчаси ҳар хил бўлгани учун A_n^{k+1} та акслантиришларнинг ҳам барчаси ҳар хил бўлади.

Шундай қилиб, математик индукция принципига асосан $A_n^m = n\,(n - 1)\,.\quad.\,(n - (m - 1))$ экан.

б) M тўпламни B нинг ичига мумкин бўлган барча акслантиришлар сонини M_n^m деб белгилаймиз. 1) Агар M тўплам бир элементли тўплам бўлса, бу элемент B нинг барча элементларига аксланиши мумкин. Демак, $M_n^1 = n$ бўлади. Шундай қилиб, тасдиқ $m = 1$ учун рост.

2) Тасдиқни $m = k - 1$ элементли M_1 тўплам учун рост деб фараз қиламиз, яъни $M_n^{k-1} = n^{k-1}$ бўлсин, у ҳолда тасдиқни $m = k$ элементли M тўплам учун исбот қиламиз. Ҳақиқатан, k элементли M тўпламни B тўплам ичига мумкин бўлган барча $k - 1$ элементли M_1 қисм тўпламлари акслантиришларидан k элементли акслантиришлари (яъни M тўпламни B нинг ичига акслантиришлари) ни ҳосил қилиш учун $k - 1$ элементли M_1 қисм тўпламга a_k элементни қўшамиз. У ҳолда $M = M_1 \cup \{a_k\}$ ўринли бўлиб, $M_1 \cap \{a_k\} = \varnothing$ бўлади. M_1 қисм тўпламнинг ҳар бир акслантиришига $\{a_k\}$ нинг n та акслантириши мос келгани учун (чунки a_k элемент B нинг исталган элементига аксланиши мумкин), k элементли M тўпламнинг барча ҳар хил акслантиришлари сони $M_n^k = M_n^{k-1} \cdot n = n^{k-1} \cdot n = n^k$, яъни $M_n^k = n^k$ га тенг бўлади.

Машқлар

1. n элементли тўпламнинг барча m элементли қисм тўпламлари сони $C_n^m = \dfrac{n\,(n - 1)\,(n - 2)\,.\,.\,.\,(n - (m - 1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 :\quad m}$ формула билан аниқланишини исботланг.

2. n элементли тўпламнинг ўз-ўзига ўзаро бир қийматли акслантиришлари (ўрнига қўйишлари) сони $P_n = n!$ формула билан ҳисобланишини исботланг.

3. Қуйидаги тенгликлар n нинг ҳар қандай натурал қийматларида тўғри эканлигини исботланг:

а) $1+2+3+\ ..+n=\frac{n\ (n+1)}{2}$;

б) $1+3+5+\qquad+(2n+1)=(n+1)^2$.

в) $1^2+3^2+5^2+\quad .+(2n+1)^2=\frac{(n+1)\,(2n+1)\,(2n+3)}{3}$;

г) $1^3+3^3+5^3+\qquad+(2n+1)^3=(n+1)\,(2n^2+4n+1)$;

д) $1+2q+3q^2+.\quad+nq^{n-1}=\frac{1-(n+1)\,q+nq^{n+1}}{(1-q)^2}$.

4. Мактаб математика курсидаги қайси теоремалар математик индукция принципи асосида исботланади?

24-§. ГРУППАЛАР

Баъзи бир алгебраик системалардаги алгебраик амалларнинг хоссалари мактаб математикаси курсида кўриб ўтилган қўшиш ва кўпайтириш амаллари хоссаларига яқин хоссаларга эга бўлади. Бундай алгебраик системалар қаторига группа, ҳалқа, майдон, чизиқли фазо ва чизиқли алгебралар киради. Ҳозирги замон алгебрасининг асосий вазифаларидан бири юқорида санаб ўтилган алгебраик системаларнинг асосий хоссаларини ўрганишдан иборат. Бу системаларнинг энг соддаси группадир. Энди шу тушунчани баён этишга киришамиз.

Битта бинар $\top$ ва битта унар * алгебраик амалларга эга бўлган бўш бўлмаган G тўплам берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар G тўпламда қуйидаги аксиомалар бажарилса, у ҳолда $<G,\ \top,\ *>$ алгебра *группа* дейилади:

1) $(\forall\, a, b, c \in G)\ a \top (b \top c) = (a \top b) \top c$, яъни $\top$ бинар алгебраик амал ассоциатив;

2) $(\forall\, a \in G, \exists\, e \in G)\ a \perp e = a = e \top a$, яъни $\top$ алгебраик амалга кўра ҳар бир $a \in G$ элемент учун ўнг ва чап e нейтрал элемент мавжуд;

3) $(\forall\, a \in G, \exists\, a^* \in G)\ a \top a^* = e = a^* \top a$, яъни исталган $a \in G$ учун ўнг ва чап симметрик элемент мавжуд.

$\top$ бинар алгебраик амал G тўпламда группа ҳосил қилувчи амал деб юритилади ва у G тўпламнинг исталган a ва b элементларидан тузилган тартибланган $(a;\ b)$ жуфтликка ягона $c \in G$ элементни мос қўяди.

2-таъриф. Агар $< G, \top, * >$ группа бўлиб, группанинг таърифидаги $(\forall a, b \in G)\ a \top b = b \top a$ коммутативлик шарти ҳам бажарилса, у ҳолда $< G, \top, * >$ группа $\top$ бинар алгебраик амалга нисбатан *коммутатив группа* ёки *абель группаси* дейилади.

Группа таърифида учрайдиган G тўплам ва унда қаралаётган бинар алгебраик амалнинг танланишига қараб бир қанча группаларни ҳосил қилиш мумкин.

3-таъриф. Агар G тўплам элементлари $\top$ бинар алгебраик амалга нисбатан ассоциатив бўлса, $< G, \top >$ алгебра ярим группа дейилади.

Масалан, N тўплам қўшиш ва кўпайтириш амалларининг ҳар бирига нисбатан ярим группадир.

Нейтрал элементга эга бўлган ярим группа *моноид* деб аталади.

Масалан, $< N, \cdot, 1 >$ моноид бўлади.

$\top$ бинар алгебраик амални оддий кўпайтириш амали билан алмаштирсак, ҳосил бўлган группа *мультипликатив* группа деб аталади. Бундай ҳолда $a \cdot b$ га a ва b элементларнинг кўпайтмаси дейилади.

Кўпайтириш амалига кўра нолдан фарқли a элементга симметрик бўлган элемент a^{-1} орқали белгиланади ва бу элемент a га тескари элемент дейилади.

Кўпайтириш амалига нисбатан нейтрал элемент 1 орқали белгиланади.

$\top$ бинар алгебраик амални қўшиш амали билан алмаштирсак, группа аксиомалари қуйидаги кўринишни олади:

1. $(\forall a, b, c \in G)\ a + (b + c) = (a + b) + c$, яъни G тўпламдаги ихтиёрий учта элементни қўшиш ассоциатив.

2. $(\forall a \in G, \exists 0 \in G)\ a + 0 = a$, яъни G тўпламда нейтрал элемент ноль мавжуд.

3. $(\forall a \in G, \exists (-a) \in G)\ a + (-a) = 0$, яъни G тўпламнинг ихтиёрий a элементи учун қарама-қарши элемент мавжуд.

$< G, +, 0 >$ группанинг ихтиёрий a ва b элементлари учун $a + b = b + a$ бўлгани сабабли $< G, +, 0 >$ алгебра коммутатив группа бўлади.

Қўшиш амалига нисбатан қаралаётган бундай группалар *аддитив* группалар деб аталади.

4-таъриф. $< G, \top, * >$ группанинг бирор M қисм тўплами $< G, \top, * >$ даги алгебраик амалга нисбатан группа ташкил этса, M га $< G, \top, * >$ группанинг қисм группаси дейилади.

Теорема. $< G, \top, * >$ *группанинг қисм тўплами*

$< G, \top, * >$ *да қисм группа ташкил этиши учун қуйидаги иккита шарт бажарилиши зарур ва етарли:*

1. $h \top h' \in M$ $(\forall h, h' \in M)$;
2. $\forall h \in M \Rightarrow h^{-1} \in M$

(M нинг исталган h элементига тескари бўлган h^{-1} элемент ҳам M га тегишли).

Исботи. M тўплам группа бўлса, $M \subset < G, \top, * >$ юқоридаги иккита шарт албатта бажарилади.

Фараз қилайлик, юқоридаги иккита шарт бажарилсин. У ҳолда $\forall h \in < G, \top, * >$ учун $h \top h^{-1} \in M$ бўлади. $M \subset < G, \top, * >$ бўлгани учун исталган $h, h', h'' \in M$ лар учун $h \top (h' \top h'') = (h \top h') \top h''$ тенглик бажарилади. Демак, M группа. $< G, \top, * >$ группанинг қисм группалари тўплами бўш тўплам эмас, чунки $< G, \top, * >$ нинг ўзи ва унинг бирлик (нейтрал) элементидан тузилган $\{e\}$ группалар $< G, \top, * >$ учун қисм группа бўлади.

Мисоллар.

1. Барча бутун сонлар тўплами $\mathbf{Z}$ нинг элементлари учун қўшиш амали аниқланганлиги сабабли бу тўпламда аддитив группанинг барча аксиомалари бажарилади. Нейтрал элемент 0, a учун симметрик элемент $(-a)$ дан иборат. Шунинг учун $< \mathbf{Z}, + >$ аддитив группадир.

2. $< \mathbf{Z}, \quad >$ группа бўлмайди, чунки $< \mathbf{Z}, \quad >$ алгебра учун группанинг таърифидаги 3-аксиома бажарилмайди. Дарҳақиқат, $a \neq \pm 1$ бўлганда $a^{-1} \notin \mathbf{Z}$.

3. Q — барча рационал сонлар тўплами бўлганда $< Q, + >$ алгебра аддитив группа бўлади.

4. $< Q, \quad >$ алгебра группа бўлмайди, чунки бу алгебра учун $a = 0$ бўлганда группанинг таърифидаги 3-аксиома бажарилмайди.

5. $< Q \setminus \{0\}, \quad >$ алгебра мультипликатив группа бўлади.

6. $< Q \setminus \{0\}, + >$ алгебра группа бўлмайди, чунки бу алгебрада аддитив группанинг таърифидаги 2-аксиома бажарилмайди.

Машқлар

Қуйидаги тўпламлар уларда аниқланган алгебраик амалларга нисбатан группа ҳосил қилиш-қилмаслигини аниқланг:

1. а) Йўналиши бир хил бўлган векторлар тўплами векторларни қўшиш амалига нисбатан;

б) фазода ихтиёрий йўналишдаги векторлар тўплами векторларни қўшиш амалига нисбатан;

в) барча жуфт сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан;

г) $\{1, -1\}$ тўплам кўпайтириш амалига нисбатан;

д) барча ҳақиқий сонлар тўплами қўшиш ёки кўпайтириш амалига нисбатан;

е) $a + b\sqrt{3}$ ($a = b \neq 0$, $\forall\, a, b \in Q$) кўринишдаги сонлар тўпламининг кўпайтириш амалига нисбатан Абель группаси эканлигини исботланг.

2. O нуқта атрофида бажарилган барча фазовий бурилишлар тўплами бурилишларни кўпайтиришга нисбатан коммутатив бўлмаган группа ташкил қилишини исботланг.

25-§. ГРУППАНИНГ СОДДА ХОССАЛАРИ

1-*хосса.* Исталган группада нейтрал элемент бир қийматли усулда аниқланади ва группанинг исталган элементи учун ягона тескари (симметрик) элемент мавжуд бўлади (исботланг, 21-§ га қаранг).

2-*хосса.* Ҳар қандай мультипликатив группада бўлиш муносабати ўринли, яъни исталган a ва b элементлар учун шундай x ва y элементлар топиладики, улар учун $a \cdot x = b$ ва $y \cdot a = b$ тенгламалар ягона ечимларга эга бўлади.

Исботи. $a \cdot x = b$ тенгламани чапдан a^{-1} га кўпайтирсак, бир томондан $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)\,x = ex = x$, иккинчи томондан эса $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$ ларга эга бўламиз. Бу икки муносабат $x = a^{-1}b$ бўлгандагина ўринлидир. $x = a^{-1}b$ элемент $a \cdot x = b$ тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан, $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})\,b = e \cdot b = b$, $a^{-1}b$ ечим $a \cdot x = b$ тенглама учун ягона ечим бўлади. Агар бирор c ҳам $a \cdot x = b$ нинг ечими бўлса, у ҳолда $c = a^{-1}b$ бўлади. Ҳақиқатан, $c = ec = (a^{-1}a)\,c = a^{-1}(ac) = a^{-1}b$, $c = a^{-1}b$ бўлади.

Худди шу усулда $y \cdot a = b$ тенгламанинг $y = ba^{-1}$ дан иборатлигига бевосита юқоридаги усулда текшириш йўли билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

3-*хосса.* Исталган группада элементларни чап ва ўнг томондан қисқартириш қонуни ўринли (исботланг, 21-§ га қаранг).

4-*хосса.* Группанинг a^{-1} элементига тескари элемент a нинг ўзидан иборат.

Исботи. a^{-1} га тескари элементни $(a^{-1})^{-1}$ десак, группа таърифидаги 3-аксиомага биноан $(a^{-1})\ (a^{-1})^{-1} = e$ бўлади. 1-хоссанинг иккинчи қисмига асосан $a^{-1} \cdot a = e$. Охирги икки тенгликдан $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot a$. Ҳосил бўлган тенгликка ўнгдан қисқартириш қонунини қўлласак, $(a^{-1})^{-1}=a$ келиб чиқади.

Шундай қилиб $a\cdot b=e$ бўлганда a ва b лар бир-бирига тескари элементлар бўлиб, бу ерда $a=b^{-1}$ ва $b=a^{-1}$ бўлар экан.

Эслатма. Агар қаралаётган бинар алгебраик амал қўшиш амалидан иборат бўлса, аддитив группада ягона ноль элемент (1-хосса), ҳар бир x элемент учун ягона қарама-қарши (^-x) элемент (1-хоссанинг иккинчи қисми) мавжуд, ниҳоят мазкур группада $a+x=b$ тенглама (2-хосса) ягона $x=b—a$ ечимга эга бўлади.

5-*хосса.* $<G,\cdot,^{-1}>$ группанинг ихтиёрий n та элементи шу группада аниқланган алгебраик амалга нисбатан ассоциатив бўлади.

Исботи. Исботни кўпайтириш амалига нисбатан олиб борамиз. Бунинг учун математик индукция принципидан фойдаланамиз. 1) $n=1,2$ бўлганда исботнинг ҳожати йўқ. $n=3$ ҳол эса 2-аксиомада берилган. 2) Фараз қилайлик, тасдиқ $n=k$ учун рост бўлсин, яъни n та кўпаювчининг кўпайтмаси қавсларнинг қўйилиш тартибига боғлиқ бўлмасин. Унда $a_1,\ a_2,\ \ .,\ a_n$ элементлар кўпайтмасини қисқача $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ кўринишда ёза оламиз. $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a_{n+1} та элементнинг қандайдир қавсларга боғлиқ бўлган кўпайтмасини a деб белгилаймиз. $n+1$ та элемент кўпайтмасини ҳар бир қавсда n дан ортиқ бўлмаган кўпайтувчилар кўпайтмаси шаклида (индуктив фаразимизга биноан) ёза оламиз, яъни $a=(a_1\cdot\cdot a_2\times.\ \ .a_k)\cdot a_{k+1}\cdot\ \ .a_n\cdot a_{n+1}$ бўлиб, бу ерда натижа қавсларга боғлиқ бўлмагани туфайли охирги кўпайтмани $a=\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\cdot\prod\limits_{i=k+1}^{n+1} a_i$ орқали белгилаймиз. $\prod\limits_{i=k+1}^{n+1} a_i$ кўпайтмада кўпайтувчилар сони n дан катта эмас. Демак, бу кўпайтмани $\prod\limits_{i=k+1}^{n+1} a_i=$ $=(\prod\limits_{i=k+1}^{n} a_i)\ a_{n+1}$ кўринишда ёза оламиз. Энди ассоциативлик қонунини учта элемент, яъни $\prod\limits_{i=1}^{k} a_i\ \prod\limits_{i=k+1}^{n} a_i$ ва a_{n+1} ларга қўллаймиз. У ҳолда $a = \prod_{i=1}^{k} a_i \, ((\prod_{i=k+1}^{n} a_i) \, a_{n+1}) = (\prod_{i=1}^{k} a_i \prod_{i=k+1}^{n} a_i) a_{k+1}$ ҳосил бўлади. Яна индукция принципига биноан $\prod_{i=1}^{k} a_i \prod_{i=k+1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$ ҳосил қилиниб, ҳар биридаги кўпайтувчилар сони n дан ортиқ бўлмагани учун $a = (\prod_{i=1}^{n} a_i) \, a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} a_i$ га эга бўламиз.

6-*хосса*. $a_1, a_2, \quad ., a_k \in G$ элементларнинг $a_1 \cdot a_2 \quad a_k$ кўпайтмасига тескари бўлган элемент $a_k^{-1} \quad a_2^{-1} a_1^{-1}$ бўлади.

Ҳақиқатан,

$$(a_1 \cdot a_2 \quad a_k) \cdot (a_k^{-1} \cdot a_{k-1}^{-1} \quad . \, a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 \, . \quad a_{k-1}) \cdot (a_k \cdot a_k^{-1}) \cdot (a_{k-1}^{-1} \quad a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 \, . \quad a_{k-1}) \, e \cdot (a_{k-1}^{-1} \quad a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) = (a_1 \cdot a_2 \quad . \, a_{k-2}) \times$$

$$\times \, (a_{k-1} \cdot a_{k-1}^{-1}) \cdot (a_{k-2}^{-1} \, . \quad . \, a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) = (a_1 \cdot a_2 \quad . \, a_{k-2}) \times$$

$$\times \, e \cdot (a_{k-2}^{-1} \, . \quad . \, a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) = \qquad = a_1 \cdot a_1^{-1} = e,$$

$$(a_1 \cdot a_2 \quad . \, a_k) \, (a_k^{-1} \quad . \, a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}) = e.$$

Шундай қилиб, $(a_1 \cdot a_2 \quad . \, a_k)^{-1} = a_k^{-1} \quad . \, a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}$ бўлади.

Хусусий ҳолда $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

7-*хосса*. $\underbrace{a \cdot a \quad . . \, a}_{n}$ кўпайтмани a^n кўринишда ёзиб, уни a элементнинг n-даражаси деб юритамиз. Шунингдек, $a^{-1} \cdot a^{-1} \, . \quad a^{-1} = (a^{-1})^n$ ни $(a^{-1})^n = a^{-n}$ орқали ёзамиз. Бу ҳолда a^{-1} нинг n-даражасига эга бўламиз. Энди $\forall a \in < G, \top, * >$ учун $a^0 = e$ $(a \neq 0)$ деб қабул қиламиз. Демак, $< G, \top, * >$ группанинг ихтиёрий элементининг исталган бутун даражаси яна $< G, \top, * >$ нинг элементини ифодалайди.

Қуйидаги тенгликларни исботлаш осон: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$. Бунда m ва n исталган бутун сонлар. Фақат ўрин алмашинувчи a ва b элементлар учунгина $(a \cdot b)^n = a^n \, b^n$ дир (исботланг). a^n ва a^{-n} лар ўзаро тескари элементлардир, чунки

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = e, \ a^n \cdot a^{-n} = e.$$

Элементларининг сони чекли бўлган группага чекли группа ва элементларининг сони чексиз кўп бўлган группага чексиз группа дейилади. Группа элементлари сонига бу группанинг тартиби деб айтилади. Аддитив группада n та элементнинг йиғиндиси $x_1 + x_2 + \quad . + x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ орқали белгиланади. Бу ерда $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + \sum\limits_{k=1}^{m} x_{k+n} = \sum\limits_{k=1}^{m+n} x_k$ умумлашган ассоциатив қонуни ўринли бўлиб, унинг ҳам исботи индукция методи асосида олиб борилади.

Агар $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ йиғиндида барча қўшилувчилар ўзаро тенг бўлса, уни $x + x + \quad + x = nx$ орқали ёзамиз. Бу ерда шуни алоҳида таъкидлаш лозимки, кўп ҳолларда n сони қаралаётган группага тегишли бўлмаслиги мумкин. nx элемент одатда x нинг n карралиси деб юритилади.

Яна қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

1) $nx + mx = (n + m)\ x$;

2) $m\ (nx) = mnx$;

3) $mx - nx = (m - n)\ x$

(исботланг).

26-§. ҲАЛҚА ВА УНИНГ СОДДА ХОССАЛАРИ

Биз «Группалар» назарияси билан танишганимизда, қаралаётган тўплам элементлари учун битта бинар ва битта унар алгебраик амаллар ўринли эди. Энди бўш бўлмаган R тўплам элементлари учун иккита бинар алгебраик амал (биз уларни қисқача «кўпайтириш» ва «қўшиш» деб юритамиз) ва битта унар алгебраик амал (исталган a элемент учун симметрик бўлган элементнинг мавжудлиги) ўринли деб қараймиз.

1-таъриф. R тўпламнинг элементлари учун иккита бинар алгебраик амал, яъни «+» ва «·» амаллари аниқланган бўлиб, бу тўпламда қуйидаги аксиомалар бажарилса, у ҳолда $<R+, \cdot>$ алгебра *ярим* ҳалқа дейилади:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad (\forall\ a,\ b,\ c \in R)$;

2) $a + b = b + a \quad (\forall\ a,\ b \in R)$;

3) $(a + x = b + x) \Rightarrow (a = b) \wedge (x + a = x + b) \Rightarrow (a = b)$ $(\forall\ a,\ b,\ x \in R)$;

4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $(\forall\ a,\ b,\ c \in R)$;

5) $(a + b)\ c = ac + bc,\ c\ (a + b) = ca + cb$ $(\forall\ a,\ b,\ c \in R)$.

Агар юқоридаги аксиомалар билан биргаликда $ab = ba$ $(\forall\ a,\ b \in R)$ бўлса, у ҳолда R ярим ҳалқа коммутатив дейилади. R тўплам чекли бўлганда R ярим ҳалқа ҳам чекли деб юритилади.

R тўпламнинг исталган a элементи учун $a+0=0+a=a$ бўлса, 0 элементга R тўпламнинг ноль элементи, $\forall\ a \in R$ учун $ae = a$ ва $ea = a$ бўлса, e элементга R ярим ҳалқанинг бирлик элементи дейилади.

$N = \{1, 2, 3, \quad ., n, \quad .\}$ тўплам учун тузилган $< N, +, \quad >$ алгебра натурал сонларнинг ярим ҳалқаси бўлади. Бу ярим ҳалқа бирлик элементга эга бўлган коммутатив ярим ҳалқадир.

2-таъриф. $< N, +, \cdot, < >$ алгебраик системага натурал сонлар системаси дейилади.

Эслатма. Кўп ҳолларда натурал сонлар тўплами сифатида $N_0 = \{0,\ 1,\ 2, \quad ., n, \quad \}$ тўплам қаралади. Мазкур тўплам қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ноль ва бирлик элементларга эга. Юқорида кўриб ўтганимиздек $N_0 = N \cup \{0\}$ тўпламда қўшиш ва кўпайтириш амаллари аниқланган ва ягонадир. Мазкур амаллар коммутатив ва ассоциатив. Кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутивдир.

3-таъриф. Агар R тўплам кўпайтириш ва қўшиш амалларига нисбатан ёпиқ бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилса, яъни

1) $< R, + >$ — аддитив группа;

2) $< R, \quad >$ — ярим группа;

3) кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив, яъни

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca \ (\forall\ a,\ b,\ c \in R)$$

бўлса, у ҳолда $< R, +, \quad >$ система *ҳалқа* дейилади.

Агар юқоридаги шартлар билан биргаликда яна

4) $ab = ba (\forall\ a,\ b \in R)$ бўлса, у ҳолда $< R, + , \quad >$ система коммутатив ҳалқа дейилади.

Исталган R ҳалқа элементлари учун аниқланган кўпайтиришнинг айиришга нисбатан дистрибутивлик қонуни ҳам бажарилади, яъни $a(b - c) = ab - ac$, $(b - c)a = ba - ca$ лар ўринли бўлади. Ҳақиқатан, $c + (b - c) = b$ тенгликнинг иккала томонини чапдан a га кўпайтирсак, $ac + a(b - c) = ab$

ҳосил бўлади. Охирги тенгликнинг иккала томонига $-ac$ элементни қўшсак, $a(b-c)=ab-ac$ ҳосил бўлади.

Энди ҳалқанинг таърифидан келиб чиқадиган баъзи бир содда *хоссалар* билан танишиб ўтамиз:

1° R ҳалқа аддитив группа бўлгани учун у ягона ноль элементга ва ҳар бир элемент учун $-a$ орқали белгиланувчи ягона қарама-қарши элементга эга. R ҳалқада $a+x=b$ тенглама ягона ечимга эга (21-§ га қаранг).

2°. Учта элементни қўшишдаги ўринли бўлган ассоциативлик қонунини исталган n та элемент учун ёзиш мумкин, яъни

$$a_1+a_2+\qquad+a_k=\sum_{i=1}^{k}a_i \tag{1}$$

йиғинди қандайдир қавслар орқали ёзилган бўлса, бу йиғинди қавсларнинг қўйилиш тартибига боғлиқ эмас.

3°. Агар $a_1=a_2=\qquad=a_n=a$ бўлса, (1) йиғиндини a элементнинг n карралиси кўринишида қуйидагича ёзиш мумкин: $na=\underbrace{a+a+\ .\quad+a}_{n}.$

Бундан фойдаланиб, $na+ma$ йиғинди $na+ma=$ $=\underbrace{a+a+\ \dots+a}_{n}+\underbrace{a+a+\ \dots+a}_{m}=\underbrace{a+a+\ \dots+a}_{n+m}=$ $=(n+m)a$, $na+ma=(n+m)a$ кўринишда ёзилади. na кўпайтмани ҳалқанинг иккита элементи кўпайтмаси деб қараш мумкин эмас.

Агар R ҳалқа бирлик e элементга эга, яъни $\forall a\in R$, $\exists e\in R$, $a\cdot e=a$ бўлса, у ҳолда $na=n(ea)=nea$ тенглик бажарилгани сабабли, $ne\in R$ бўлади.

4°. a га қарама-қарши бўлган $-a$ элементнинг n карралиси $\underbrace{(-a)+(-a)+\qquad+(-a)}_{n}=(-n)a=-na$ бўлади. $(n+m)a=na+ma$ тенгликдан $m=-n$ бўлганда $(n+(-n))a=(n-n)a=na-na=0$ элемент ҳам ҳосил қилинади, яъни $0\cdot a=0$ тенглик доимо ўринли.

Биз охирги тенгликни ҳосил қилишда a га ҳеч қандай шарт қўймадик.

4-таъриф. $a\neq 0$, $b\neq 0$ бўлганда $a\cdot b=0$ бўлса, a ва b лар *нолнинг бўлувчилари* дейилади.

Бу тушунчалардан қуйидагини ёза оламиз: нолнинг бўлувчисига эга бўлмаган ҳалқада кўпайтманинг нолга тенг бўлиши учун кўпайтувчилардан камида биттаси нолга тенг бўлиши зарур.

Лекин бу тасдиқнинг тескариси умуман тўғри эмас, яъни кўпайтувчиларнинг бирортаси ҳам нолга тенг бўлмаганда, кўпайтма нолга тенг бўлиши мумкин.

Мисол. (—1; 1) оралиқда узлуксиз бўлган функциялар тўплами қўшиш ва кўпайтириш амалига нисбатан ҳалқа бўлади (текшириб кўринг). Биз мазкур функциялардан иккитасини қуйидаги усулда оламиз:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{агар } x>0, \\ 0, & \text{агар } x\leqslant 0; \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x>0, \\ x, & \text{агар } x\leqslant 0. \end{cases}$$

Ўз-ўзидан маълумки, бу функцияларнинг ҳар бири нолдан фарқли, лекин уларнинг кўпайтмаси $f(x)\times\times\varphi(x)=0$ бўлади.

Юқоридаги мисолга биноан ҳалқа нолнинг бўлувчиларига эга бўлар экан.

27-§. ҚИСМ ҲАЛҚА ВА ҲАЛҚА ХАРАКТЕРИСТИКАСИ

1-таъриф. R ҳалқанинг бирор M қисм тўплами R да аниқланган иккита бинар алгебраик амалга нисбатан ҳалқа ташкил этса, M тўплам R ҳалқанинг *қисм ҳалқаси* дейилади.

Масалан, барча жуфт сонлар тўплами барча бутун сонлар ҳалқасининг қисм ҳалқаси бўлгани ҳолда, барча бутун сонлар ҳалқаси ўз навбатида барча рационал сонлар ҳалқасининг қисм ҳалқаси бўлади.

Қуйидаги теорема R ҳалқада бирор M қисм тўпламнинг ҳалқа ташкил қилиш ёки қилмаслигини аниқлашда муҳим роль ўйнайди.

Теорема. R ҳалқанинг бирор бўш бўлмаган M қисм тўплами ҳалқа бўлиши учун бу тўплам ихтиёрий a ва b элементлар билан биргаликда уларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмасини ўзида сақлаши зарур ва етарли.

Исботи. Етарлилиги. M ҳалқа бўлсин. M да теоремадаги шартлар бажарилади ва $M\subset R$ бўлгани учун M қисм ҳалқа бўлади.

Зарурлиги. Фараз қилайлик, $\forall a,\ b\in M$ бўлганда $a+b\in M$, $a-b\in M$ ва $a\cdot b\in M$ бўлсин. M нинг қисм ҳалқа эканлигини кўрсатамиз. Шундай қилиб, M да иккита бинар алгебраик амал аниқланган. Энди M нинг аддитив группа эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун M да

$$a + x = b \qquad (1)$$

тенгламанинг ягона ечимга эга эканлигини кўрсатиш кифоя. Теорема шартидан $a \in M$, $b \in M \Rightarrow b - a = c \in M$ ва R тўпламда аниқланган айириш амалининг хоссасига асосан $a + (b - a) = b$ ёки $a + c = b$ тенгликлар ўринли бўлади. Бу ерда $c = b - a$. Бу эса (1) тенгламанинг ечимидир. Демак, M тўплам R ҳалқанинг қисм ҳалқаси экан. Ҳалқанинг таърифига кўра бу ечим ягона.

Эслатма. $a + b = a - (-b)$ бўлгани учун теоремадаги биринчи шартни, яъни $a + b \in M$ шартни олмасдан, қолган иккита шарт билан чеклансак ҳам M қисм ҳалқа бўлади.

Исталган R ҳалқа учун $\{0\}$ ва R ҳалқанинг ўзи қисм ҳалқалар бўлади. Бу қисм ҳалқалар, одатда R ҳалқанинг хос қисм ҳалқалари деб юритилади. Шундай қилиб, исталган R ҳалқа учун қисм ҳалқалар тўплами бўш бўлмайди.

Энди ҳалқа характеристикаси тўғрисида сўз юритамиз.

Фараз қилайлик, R бирлик элементга эга бўлган ҳалқа бўлсин. Биз ўз олдимизга бирлик $e \neq 0$ элементни ўз ичига олувчи ва R нинг бирлик элементини ўз ичига олувчи барча қисм ҳалқалари учун ҳам қисм ҳалқа бўладиган, яъни энг кичик қисм ҳалқани топиш вазифасини қўямиз. Бу қисм ҳалқа ўзида e ни ичига олгани учун у $-e$ ни ҳам ўз ичига олади. У ҳолда $ne = \underbrace{e + e + \ldots + e}_{n}$ ва $-ne = \underbrace{(-e) + (-e) + \ldots + (-e)}_{n}$ лар ҳам мазкур ҳалқага тегишли бўлади. Сўнгра $ne - me = (n - m)e$, $(ne) \cdot (me) = nme$ бўлгани учун e элементнинг бутун карралилари тўплами яна ҳалқа бўлади. Агар биз бу қисм ҳалқани R_1 десак, у R ҳалқадаги e бирлик элементни ўз ичига олган энг кичик қисм ҳалқа бўлади. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $n \neq 0$ бўлганда $ne \neq 0$;

б) $n \neq 0$ бўлганда $ne = 0$.

$n \in N$ бўлиб, натурал сонларнинг исталган қисм тўплами доимо энг кичик элементга эга бўлганидан б) шартни қаноатлантирувчи энг кичик m сони топилади.

2-таъриф. Агар $m \neq 0$ да $me \neq 0$ бўлса, R_1 ҳалқа ноль характеристикали, $m \neq 0$ да $me = 0$ бўлса, R_1 га m *характеристикали ҳалқа* дейилади.

Сонли ҳалқаларнинг барчаси ноль характеристикали ҳалқадир.

Мисоллар. 1. $\{a + b\sqrt{p}\}$ тўплам коммутатив ҳалқа бўлади (бу ерда p — туб сон, a, $b \in \mathbf{Z}$).

Ҳақиқатан, а) $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \boldsymbol{Z}$ бўлганда

$$(a_1 + b_1\sqrt{p})(a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1a_2 + b_1b_2p) + (a_1b_2 + $$
$$+ a_2b_1)\sqrt{p} = a' + b'\sqrt{p}$$

бўлиб, бу ерда

$$a' = a_1a_2 + b_1b_2p,\ b' = a_1b_2 + a_2b_1, \qquad b' \in \boldsymbol{Z};$$

б) $(a_1 + b_1\sqrt{p}) - (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{p} = $ $= c + d\sqrt{p}$; бу ерда $c = a_1 - a_2$, $d = b_1 - b_2$, $c, d \in \boldsymbol{Z}$. Демак, $\{a + b\sqrt{p} \mid a,\ b \in \boldsymbol{Z}\}$ — ҳалқа.

2. R ҳалқанинг ихтиёрий иккита хосмас қисм ҳалқалари (агар шундайлари мавжуд бўлса) кесишмаси яна R учун хосмас қисм ҳалқа эканлигини исботланг.

3. Қуйидаги ҳалқани кўрамиз: барча бутун сонларни қандайдир $m > 0$ сонга бўлиб, уларни ҳосил бўлган қолдиқлар бўйича эквивалентлик синфларга ажратамиз, яъни иккита a ва b бутун сонларни m га бўлганда ҳосил бўлган қолдиқлар бир хил бўлганда ва фақат шундагина улар ўзаро эквивалент деб юритилади. Бу синфлар $C_0, C_1, \quad . C_{m-1}$ бўлсин. Унда $\boldsymbol{Z}/_{(m)} = \{C_0, C_1, \quad , C_{n-1}, \quad , C_{m-1}\}$ синфлар тўплами ҳосил қилиниб, бу ерда $C_k = \{mq + k\}$ кўринишга эга. Энди $\boldsymbol{Z}/_{(m)}$ тўпламдаги иккита элементни қўшиш ва кўпайтириш қоидаларини қуйидагича киритамиз:

$$C_k + C_p = \begin{cases} C_{k+p}, \text{ агар } k + p < m, \\ C_d, \text{ агар } k + p \geqslant m,\ k + p = mq + d \text{ бўлса;} \end{cases}$$

$$C_k \cdot C_p = \begin{cases} C_{kp}, \text{ агар } kp < m; \\ C_t, \text{ агар } kp \geqslant m,\ kp = mq + t \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу амалларнинг бир қийматли ва бажарилувчан эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун $\boldsymbol{Z}/_{(m)}$ коммутатив ҳалқа бўлади. $k < m$ бўлганда $C_k \cdot C_1 = C_k$ эканлигидан C_1 бу ҳалқа учун бирлик элементдир. Бундан ташқари $mC_1 = C_m = C_0$ эканлигига биноан бу ҳалқа m характеристикали ҳалқага мисол бўлади. $M = \{(a;\ b) \,/\, a,\ b \in \boldsymbol{Z}\}$ тўплам учун қўшиш ва кўпайтириш амалларини қуйидагича киритинг:

1) $(a;\ b) + (c;\ d) = (a + c;\ b + d)$;
2) $(a;\ b) \cdot (c;\ d) = (a \cdot c;\ b \cdot d)$.

Қуйидагиларни исботланг:

1. M тўплам — ҳалқа бўлади.

2. $A = \{(a;\ 0)/a \in \boldsymbol{Z}\}$ ва $B = \{(0;\ b)/b \in \boldsymbol{Z}\}$лар M нинг қисм ҳалқалари бўлади.

3. M ҳалқа нолнинг бўлувчиларига эга.

4. M, A ва B ларнинг бирлик элементлари устма-уст тушмайди.

28-§. ГОМОМОРФ ВА ИЗОМОРФ ҲАЛҚАЛАР

Иккита бўш бўлмаган R ва R' тўпламлар берилган бўлиб, улардан биринчиси $(+)$ ва $(\cdot)$ амалларига нисбатан, иккинчиси эса $\oplus$ ва $\odot$ амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этсин. Биз бу ҳалқаларни ҳам мос равишда R ва R' деб белгилаймиз.

1-таъриф. Агар шундай $\varphi: R \rightarrow R'$ акслантириш учун қуйидаги иккита шарт бажарилса, яъни

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \quad (\forall\ a,\ b \in R);$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b) \quad (\forall\ a,\ b \in R)$$

тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда R ҳалқа R' ҳалқага *гомоморф* дейилади.

$\varphi: R \rightarrow R'$ акслантиришда R нинг барча элементлари образини $\varphi(R)$ орқали белгилаймиз. $\varphi(R) \subset R'$ тўплам одатда $\varphi: R \rightarrow R'$ гомоморфликнинг образи деб юритилади. Қуйидаги теорема ўринли:

1-*теорема. R ҳалқа R' ҳалқага гомоморф аксланганда, яъни $\varphi: R \rightarrow R'$ бўлса,*

1) *R нинг ноль элементи R' нинг ноль элементига;*

2) *R даги ихтиёрий a элементга қарама-қарши бўлган $-a$ элемент R' даги a^{-1} га қарама-қарши бўлган $(-a)^{-1}$ элементга;*

3) *агар R ҳалқа e бирлик элементга эга бўлса, бу элемент R' нинг e' бирлик элементига аксланади.*

Исботи. 1) $R \ni a \xrightarrow{\varphi} \bar{a} \in R'$ бўлсин. У ҳолда R ҳалқада ноль элемент мавжудлигидан $a + 0 = a$ бўлади. Лекин R ҳам ҳалқа бўлгани учун унда $a + x = b$ тенглама ягона ечимга эга. Демак, R' да

$$\bar{a} \oplus \bar{u} = \bar{a} \qquad (1)$$

тенглама ҳам ягона ечимга эга. (1) тенгламани қаноатлантирувчи ечим R' ҳалқа учун ноль элемент бўлади. Ҳақиқатан, $a + 0 = a$ тенгликка φ акслантиришни татбиқ этсак, $\varphi(a + 0) = \varphi(a)$ ҳосил бўлади. Лекин $\varphi(a) = \bar{a}$ ҳамда $\varphi(a +$

$+0)=\varphi(a)\oplus\varphi(0)=\varphi(a)$ бўлганлигидан $\varphi(0)=0$ бўлади. Биз бундан сўнг $\bar{u}$ ни $\bar{0}$ деб белгилаймиз.

2) Энди $-a\in R$ элементнинг $-\bar{a}$ га аксланишини кўрсатамиз: $-a+a=0$ учун $\varphi(-a+a)=\varphi(-a)\oplus\varphi(a)==0$ ёки $-\bar{a}+\bar{a}=\bar{0}\in R'$

3) Агар R бирлик элементга эга бўлса, $\varphi(a\cdot e)=\varphi(a)\odot\odot\varphi(e)$, $a\cdot e=a$ ҳамда $\varphi(a\cdot e)=\varphi(a)=\bar{a}$ шартларга асосан $\bar{a}\odot\bar{e}=\bar{a}$ бўлиб, $\bar{e}$ бирлик элементдир.

2-**теорема**. *Исталган ҳалқанинг гомоморфлик образи яна ҳалқа бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, R ҳалқа бўлиб, R' да икки бинар алгебраик амал аниқланган бўлсин. Теорема шартига кўра R нинг ҳар бир a элементига R' нинг қандайдир $\bar{a}$ элементи мос келади, яъни шундай φ акслантириш натижасида $\varphi(a)=\bar{a}$ бўлади. R' нинг ҳалқа эканлигини кўрсатиш учун ундан қандайдир $\bar{a}$, $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ элементларни олиб, улар учун ҳалқанинг барча аксиомалари ўринли эканлигини кўрсатамиз. Биз шулардан қуйидаги иккитасини кўрсатамиз:

1. $\bar{a}\odot(\bar{b}\oplus\bar{c})=\bar{a}\odot\bar{b}\oplus\bar{a}\odot\bar{c}$ ўринли бўлади. Ҳақиқатан, R ҳалқа бўлгани учун $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ тенглик ўринли. Бундан ташқари $\varphi:R\to R'$ акслантириш гомоморф акслантириш бўлганидан $\varphi(a\cdot(b+c))=\varphi(ab+ac)$ тенгликнинг чап томони $\bar{a}\odot(\bar{b}\oplus\bar{c})$ бўлиб, ўнг томони эса $\bar{a}\odot\bar{b}\oplus\bar{b}\odot\bar{c}$ ни беради. У ҳолда $\bar{a}\odot(\bar{b}\oplus\bar{c})=\bar{a}\odot\bar{b}\oplus\bar{a}\odot\bar{c}$. Демак, R' да кўпайтириш амали қўшиш амалига нисбатан дистрибутив экан.

2. $\bar{a}\oplus\bar{x}=\bar{b}$ тенглама R' да ягона ечимга эга. Бунинг учун $\bar{b}$ ва $\bar{a}$ ларнинг b ва a аслилари учун $a\oplus x=b$ тенгламани ечиш кифоя. Сўнгра φ гомоморфликка асосан $\bar{a}\oplus\oplus\bar{x}=\bar{b}$ ҳосил бўлади ва унинг ечими $a+x=b$ тенглама ечимининг образидан иборатдир.

3-таъриф. R ҳалқани R' ҳалқага гомоморф акслантирувчи $\varphi:R\to R'$ акслантириш R нинг ҳар хил элементларини R' нинг ҳар хил элементларига ўтказса, яъни $\forall\ a, b\in R$ учун $a\neq b\Rightarrow\varphi(a)\neq\varphi(b)$ бўлса, φ акслантириш R ни R' га *изоморф акслантириш* дейилади. R ҳалқанинг R' га гомоморфлиги $R\simeq R'$ орқали, изоморфлиги эса $R\cong R'$ орқали белгиланади.

Исталган изоморф акслантириш гомоморф акслантириш бўлгани учун $\varphi:R\to R'$ изоморф акслантиришда юқорида келтирилган теоремалар ўринли бўлади.

R ҳалқани ўз-ўзига изоморф акслантириши R ҳалқанинг *автоморфизми* дейилади.

Бундан ташқари, агар $\varphi(R) \subset R'$ бўлса, φ акслантириш ичига акслантириш, $\varphi(R) = R'$ бўлганда эса устига гомоморф акслантириш деб юритилади.

Мисол. $a,\ b \in Q$ бўлганда $a + b\sqrt{3}$ кўринишдаги сонлар тўпламини $Q[\sqrt{3}]$ орқали белгилайлик. У ҳолда $< Q[\sqrt{3}],\ +,\ -,\ \ ,\ 1 >$ алгебра ҳалқа бўлади ва $\varphi(a + b\sqrt{3}) = a - b\sqrt{3}$ акслантириш $Q[\sqrt{3}]$ ҳалқани ўз-ўзининг устига акслантиради. Мазкур акслантириш тегишли элементларни қўшиш ва кўпайтиришда ҳам сақланади.

Ҳақиқатан, агар $x = a + b\sqrt{3},\ y = c + d\sqrt{3}$ десак, $\varphi(x) = a - b\sqrt{3},\ \varphi(y) = c - d\sqrt{3}$ бўлади ҳамда

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi[(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3})] = (ac - 3cd) - (ad + bc)\sqrt{3},$$

$$\varphi(x)\varphi(y) = (a - b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3}),$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

$$\varphi(x + y) = \varphi[(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3})] = \varphi[(a + c) + (b + d)\sqrt{3})] = (a + c) - (b + d)\sqrt{3} = (a - b\sqrt{3}) + (c - d\sqrt{3}) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

тенгликлар ўринлидир.

Демак, φ акслантириш $Q[\sqrt{3}]$ ҳалқанинг автоморфизмидан иборат экан.

Машқлар

1. $Z \simeq Z/_{(m)}$ эканлигини кўрсатинг.

2. $a,\ b \in Q$ бўлганда $\{a + b\sqrt{2}\}$ ва $\{a + b\sqrt{3}\}$ ҳалқалар изоморф бўладими?

3. Иккита чекли ҳалқа ўзаро изоморф бўлса, уларнинг элементлари сони тўғрисида нима дейиш мумкин?

29-§. МАЙДОН ВА УНИНГ СОДДА ХОССАЛАРИ

1-таъриф. Камида иккита ҳар хил элементга эга бўлган $\mathcal{P}$ коммутатив ҳалқа элементлари учун $a \neq 0$ бўлганда

$$a\cdot x=b \qquad (1)$$

тенглама ягона ечимга эга бўлса, бундай ҳалқа *майдон* дейилади.

Энди майдоннинг таърифидан келиб чиқадиган баъзи бир содда *хоссалар* билан танишиб ўтамиз.

1°. Исталган майдон коммутатив ҳалқа бўлганидан коммутатив ҳалқанинг элементлари учун ўринли бўлган барча хоссалар (исталган $a\in\mathscr{P}$ учун $-a\in\mathscr{P}$ нинг мавжуд ва ягоналиги, ягона ноль элементнинг мавжудлиги, n та элементни кўпайтиришнинг ассоциативлиги, a элемент учун $\pm na$ каррали элементларнинг мавжудлиги ва бошқалар) майдон элементлари учун ҳам бажарилади.

2°. Исталган $\mathscr{P}$ майдонда бирлик элемент мавжуд ва ягонадир (исботланг).

3°. $\mathscr{P}$ майдоннинг нолдан фарқли исталган a элементи учун тескари a^{-1} элемент мавжуд ва ягонадир.

Исботи. Майдон таърифидаги (1) тенгликда $b=e$ десак, $ax=e$ бўлиб, $x=a^{-1}$ дир. $a\neq 0$ учун тескари a^{-1} элементнинг ягоналиги мультипликатив группа элементи учун ягона тескари элементнинг мавжудлигини исботлаш каби исботланади (21-§ га қаранг).

4°. Майдон нолнинг бўлувчиларига эга эмас.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз, яъни майдон нолнинг бўлувчиларига эга бўлсин. Унда $a\neq 0$ бўлганда

$$ax=0 \qquad (2)$$

тенглама ечими ҳам нолдан фарқли бўлиши керак. (2) нинг иккала томонини чапдан a^{-1} га кўпайтирамиз: $a^{-1}\,ax=0\Rightarrow ex=0\Rightarrow x=0$. Бу эса (2) тенгламанинг нолмас ечимга эга эканлигига зиддир. Демак, фаразимиз нотўғри экан. Шундай қилиб, майдон нолнинг бўлувчиларига эга эмас экан.

Ўз-ўзидан маълумки, майдонда $e\neq 0$, яъни бирлик элемент ноль элемент билан устма-уст тушмайди. Лекин ҳалқаларда бўлгани каби майдонлар ҳам ноль ва p характеристикали бўлиши мумкин.

Таъриф. Агар $n\in N$ бўлганда $ne=0$ тенглик ҳар қандай n учун бажарилмаса, бундай майдон ноль характеристикали майдон дейилади.

Агар $n\neq 0$ бўлганда $ne=0$ бажарилса, у ҳолда $p=\min n$ деб белгилаймиз ва қаралаётган майдон p характеристикали майдон дейилади.

Барча сонли майдонлар ноль характеристикали бўлади. (Исботланг.) $Z/_{(2)}$ майдон икки характеристикали бўлади.

Чунки $\boldsymbol{Z}/_{(2)} = \{c_0, c_1\}$ бўлиб, $c_1 \neq 0$, лекин $c_1 + c_1 = 2c_1 = c_0$ дир. Бу майдон баъзан $GF(2)$ орқали белгиланади.

Мисоллар.

1. Рационал ва ҳақиқий сонлар ҳалқаси майдон бўлади.

2. a, $b \in Q$ бўлганда $\{a + b\sqrt{2}\}$ тўплам майдон бўлади.

Бунинг учун $c \neq 0$, $d \neq 0$ бўлганда $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})^{-1} = m + n\sqrt{2}$ эканлигини кўрсатиш керак. Чунки $\{a + b\sqrt{2}\}$ тўпламнинг коммутатив ҳалқа ташкил этишлиги бизга маълум. Ҳақиқатан,

$$(a + b\sqrt{2})\cdot(c + d\sqrt{2})^{-1} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = m + n\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})^{-1} = m + n\sqrt{2}$$

бўлиб, бу ерда $m = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2}$, $n = \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}$.

3. $\boldsymbol{Z}/_{(2)}$ ва $\boldsymbol{Z}/_{(3)}$ ҳалқалар майдон бўлади.

$\boldsymbol{Z}/_{(3)}$ нинг майдон эканлигини кўрсатамиз. Маълумки, $\boldsymbol{Z}/_{(3)}$ $\{c_0, c_1, c_2\}$ бўлиб, бу ерда элементларни қўшиш ва кўпайтириш қуйидагича аниқланар эди:

+	c_0	c_1	
			c_2
		c_2	c_0
		c_0	

	c_0		c_2
	c_0	c_0	c_0
	c_0	c_1	
	c_0	c_2	c_1

Демак, $c_i + c_j \in \boldsymbol{Z}/_{(3)}$ ва $c_i \cdot c_l \in \boldsymbol{Z}/_{(3)}$ экан. Бу тўпламда $c_k \cdot x = c_e$ ($k \neq 0$, $e = 0, 1, 2$) тенглама доимо ягона ечимга эга.

4. $\boldsymbol{Z}/_{(4)} = \{c_0, c_1, c_2, c_3\}$ майдон бўлмайди, чунки у нолнинг бўлувчиларига эга. Дарҳақиқат, $c_2 \neq c_0$, лекин $c_2 \cdot c_2 = c_0$.

5. Коэффициентлари рационал сонлардан иборат бўлган

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \qquad + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

кўринишдаги кўпҳадлар берилган бўлсин. Q майдонда ечимга эга бўлмаган тенгламалар (масалан, $x^2 + 1 = 0$) мавжуд бўлгани учун $\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \qquad + b_n x^n \neq 0$ дея оламиз. Энди $\varphi(x) \neq 0$ бўлганда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ кўринишдаги функциялар тўпламини $Q(x)$ деб белгилаймиз. $Q(x)$ да қўшиш ва кўпайтириш амалларини қуйидагича киритамиз:

1) $\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi(x)}{h(x)} = \frac{f(x) \cdot h(x) + \varphi(x) \cdot \psi(x)}{\varphi(x) \cdot h(x)}$ $(\varphi(x) \neq 0,\ h(x) \neq 0)$,

2) $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \frac{\psi(x)}{h(x)} = \frac{f(x)\,\psi(x)}{\varphi(x)\,h(x)}$ $(\varphi(x) \neq 0,\ h(x) \neq 0)$.

Демак, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi(x)}{h(x)} \in Q{=}(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{h(x)} \in Q(x)$ экан. $Q(x)$ да ҳар бир $\frac{f(x)}{h(x)} \neq 0$ учун тескари элемент мавжуд.

Ҳақиқатан, $\frac{f(x)}{h(x)} \cdot \rho(x) = \frac{g(x)}{d(x)}$ нинг $(d(x) \neq 0,\ \varphi(x) \neq 0,$ $f(x) \neq 0)$ иккала томонини $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^{-1}$ га кўпайтирсак, $\rho(x) = \frac{g(x) \cdot \varphi(x)}{d(x) \cdot f(x)} \in Q(x)$ эканлиги маълум бўлади.

Демак, $Q(x)$ майдон экан. Бу майдон, одатда нисбатлар (рационал функциялар) майдони деб юритилади.

Машқлар

Қуйидаги тўпламлар майдон ташкил қиладими?

1. Барча натурал сонлар тўплами.

2. a, $b \in Q$ бўлганда $a + b\sqrt{3}$ кўринишдаги сонлар тўплами.

3. p туб сон ва a, $b \in Z$ бўлганда барча $a + b\sqrt{p}$ кўринишдаги сонлар тўплами.

4- $Z/_{(p)} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, . \quad , \overline{p-1}\}$ тўплам. Бу ерда $r = 0, 1, 2, \quad , p - 1$ деганда бирор $m \in Z$ сонни p сонга бўлишдан ҳосил бўлган қолдиқни тушунамиз.

30-§. ҚИСМ МАЙДОН

1-таъриф. $\mathscr{P}$ майдоннинг камида иккита ҳар хил элементига эга бўлган Q қисм тўплами $\mathscr{P}$ да аниқланган қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан майдон ташкил этса, Q га $\mathscr{P}$ нинг *қисм майдони* ($\mathscr{P}$ да қисм майдон) дейилади.

Теорема. $\mathscr{P}$ майдоннинг камида иккита ҳар хил элементига эга бўлган Q қисм тўплами $\mathscr{P}$ да қисм майдон ҳосил қилиши учун

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) } a-b\in Q,\ a\cdot b\in Q\ (\forall a,\ b\in Q); \\ \text{б) } a^{-1}\in Q\ (0\neq a,\ \forall a\in Q \end{array}\right\} \quad (1)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Исботи. 1. Q қисм майдон бўлса, (1) шарт албатта бажарилади.

2. (1) шарт бажарилган ҳолда, Q нинг майдон ҳосил қилишини исботлаймиз.

а) шартга асосан $a\in Q$ бўлгани учун $a-a=0\in Q$ бўлиб, Q да ноль элемент мавжуд. Яна шу а) шарт бўйича $\forall a\in Q$, $0-a=-a\in Q$ дан Q да a га қарама-қарши элемент мавжуд. Энди $\forall a,\ b\in Q$ ни олсак, $-b\in Q$ бўлганидан $a-(-b)=a+b$ га келамиз. Шундай қилиб, $\forall a,\ b\in Q$ учун $a+b\in Q$ ва $a\cdot b\in Q$, яъни Q тўплам элементлари учун иккита бинар алгебраик амал аниқланган. Q тўплам $\mathscr{P}$ нинг қисм тўплами бўлиб, $< P,\ +,\ \cdot,\ 0 >$ коммутатив ҳалқа бўлгани учун $< Q,\ +,\ \cdot,\ 0 >$ алгебра $< P,\ +,\quad 0 >$ нинг қисм ҳалқаси бўлади.

б) шартга мувофиқ $\forall a\in Q$ $(a\neq 0)$ учун $a^{-1}\in Q$ бўлганидан, яна а) га асосан, $a\cdot a^{-1}=e\in Q$ келиб чиқади. Натижада $< Q,\ +,\quad 0 >$ нинг майдон эканлиги тасдиқланади.

Ҳар бир $\mathscr{P}$ майдон ўзининг қисм майдони эканлиги равшан. Шу сабабли $\mathscr{P}$ майдонга шу $\mathscr{P}$ нинг хос қисм майдони деймиз. $\mathscr{P}$ дан фарқли ҳар бир $Q\subset\mathscr{P}$ қисм майдон хосмас қисм майдон деб аталади.

Энди қуйидаги таърифни берамиз:

2-таъриф. Ҳеч қандай хосмас қисм майдонга эга бўлмаган майдонга *минимал* (ёки *туб*) *майдон* дейилади.

Теорема. *Исталган $\mathscr{P}$ майдоннинг барча қисм майдонлари кесишмаси минимал қисм майдон бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $\mathscr{P}$ майдон k та $\mathscr{P}_1,\ \mathscr{P}_2,\ \ldots,\ \mathscr{P}_k$ қисм майдонга эга бўлсин. Аввал $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2\cap\cdot\ \cdot\cap\mathscr{P}_k=\mathscr{P}'$ нинг қисм майдон эканлигини кўрсатамиз. Кесишманинг таърифига асосан $a\in\mathscr{P}_i$ ва $b\in\mathscr{P}_i$ $(i=\overline{1,\ k})$ бўлгандагина $a\in\mathscr{P}'$ ва $b\in\mathscr{P}'$ бўлади. $\mathscr{P}_i$ лар майдон бўлгани учун $a+b\in\mathscr{P}_i$ ва $a\cdot b\in\mathscr{P}_i$ $(i=\overline{1,\ k})$. Унда яна кесишманинг таърифига асосан $a+b\in\mathscr{P}'$ ва $a\cdot b\in\mathscr{P}'$ бўлади. Бундан ташқари $a\in\mathscr{P}$ дан

$a^{-1}\in\mathscr{P}_i$ эканлигига асосан, $a^{-1}\in\mathscr{P}'$ дир. Демак, $\mathscr{P}'$ майдон экан.

Энди $\mathscr{P}'$ нинг туб майдон эканлигини кўрсатамиз. $\mathscr{P}'$ қисм майдон барча $\mathscr{P}_i\,(i=\overline{1,k})$ қисм майдонларнинг кесишмасидан иборат бўлгани учун $\mathscr{P}'\subseteq\mathscr{P}_i$ ва $\mathscr{P}'\subseteq\mathscr{P}$ дир.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни қандайдир Q' ҳам $\mathscr{P}$ нинг туб қисм майдони бўлсин. У ҳолда $Q''=\mathscr{P}'\cap Q'$ майдон яна $\mathscr{P}$ нинг қисм майдонларидан бирини ташкил этади ва бу ерда $Q''\subseteq\mathscr{P}'$ ва $Q''\subseteq Q'$ дир. Лекин $\mathscr{P}'$ ва Q' лар $\mathscr{P}$ нинг туб қисм майдонлари эканлигига биноан охирги муносабатдан $\mathscr{P}'=Q'=Q''$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

3-таъриф. Қуйидаги хоссаларга эга бўлган Q тўпламга *рационал сонлар майдони* дейилади:

1) $Z\subset Q$, яъни барча бутун сонлар Q да сақланади;

2) Q — майдон;

3) Z тўпламдаги сонларни қўшиш ва кўпайтириш бинар алгебраик амаллар Q даги қўшиш ва кўпайтириш амаллари билан устма-уст тушади;

4) Q — туб майдон.

Q майдоннинг элементлари рационал сонлар деб аталади.

Мактаб математика курсидан маълумки, исталган рационал сон $\frac{m}{n}$ кўринишга эга бўлиб, бунда $\forall m,\ n\in Z\ (n\neq 0)$ бўлади. Рационал сонлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) $\frac{m}{n}=\frac{k}{l}\Leftrightarrow ml=nk\quad(n\neq 0,\ l\neq 0)$;

2) $\frac{m}{n}+\frac{k}{l}=\frac{ml+nk}{nl}\qquad(n\neq 0,\ l\neq 0)$;

3) $\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{mk}{nl}\qquad(n\neq 0,\ l\neq 0)$;

4) $\frac{m}{n}:\frac{k}{l}=\frac{ml}{nk}\qquad(n\neq 0,\ k\neq 0,\ l\neq 0)$.

$m=\frac{m\cdot n}{n}$ бўлгани учун $Z\subset Q$ эканлиги келиб чиқади. Биз буни таърифда ҳам эслатиб ўтганмиз.

29-параграфда баён этилган барча хоссалар рационал сонлар майдони учун ҳам бажарилиб, Q нинг бирлик элементи 1 дан, ноль элементи эса 0 дан иборатдир. $0\neq a\in Q$ бўлганда $a\cdot 1=0$ тенглик бажарилмаганлиги учун Q ноль характеристикали майдон бўлади.

31-§. ТАРТИБЛАНГАН МАЙДОНЛАР

Биз майдоннинг аксиоматик таърифини берганимизда унинг элементларига ҳеч қандай чекланишлар (шартлар) қўймаган эдик. Бу элементлар учун фақатгина иккита бинар алгебраик амал ва бир қанча аксиомалар бажарилиши талаб қилинар эди, холос.

Энди майдонда мусбат элемент тушунчасини киритайлик.

$\succ$ — тартиб муносабати бўлсин.

Агар $< A, +, \cdot, 1 >$ тартибланган майдоннинг a элементи учун $a+a \neq a$ ва $a+a \succ a \, (a \succ a+a)$ шартлар бажарилса, у ҳолда a элементни шу майдоннинг *мусбат (манфий) элементи* дейилади.

1-таъриф. Агар $\mathscr{P}$ майдон элементлари учун мусбат бўлишлик хоссаси (биз бу хоссани $\succ 0$ орқали белгилаймиз) аниқланган бўлиб, унинг учун қуйидаги аксиомалар бажарилса, $< P, +, \cdot, 0, 1, \succ > \leftrightarrows \mathscr{P}$ системага *тартибланган майдон* дейилади:

1) $\mathscr{P}$ майдоннинг исталган a элементи учун $a \succ 0$, $a = 0$, $-a \succ 0$ шартлардан фақатгина биттаси бажарилади;

2) $a \succ b$, $b \succ c \, (\forall a, b, c \in \mathscr{P})$ бўлса, у ҳолда $a \succ c$ бўлади;

3) агар $a \succ 0$, $b \succ 0$ бўлса, $a+b \succ 0$ ва $a \cdot b \succ 0$ бўлади.

2-таъриф. Агар $-a \succ 0$ бўлса, a га манфий элемент дейилади.

3-таъриф. $a, b \in \mathscr{P}$ нинг $a-b$ айирмаси мусбат бўлса, a элемент b элементдан *катта* дейилади ва $a \succ b$ орқали белгиланади, бундай ҳолда b элемент a дан *кичик* деб юритилади ва у $b \prec a$ орқали ёзилади.

Агар $a-b$ айирма манфий элементни ифодаласа, a элемент b элементдан кичик бўлади. Чунки бундай ҳолда $b-a = -(a-b)$ элемент мусбат бўлгани учун $b \succ a$ ёки $a \prec b$. $a-b=0$ дан $a=b$ бўлиши ўз-ўзидан маълум.

1-*теорема.* *Тартибланган майдоннинг a мусбат элементи 0 дан катта ва манфий b элементи 0 дан кичикдир.*

Исботи. $a-0=a$ мусбат бўлгани учун $a \succ 0$. Шунингдек, $0-b=-b$ нинг мусбатлигидан $0-b \succ 0$ ёки $-b \succ 0$ келиб чиқади.

Агар $a \prec b$ муносабатда a элемент b нинг чап томонида ва b элемент a нинг ўнг томонида туради деб шартлашсак, ҳамма мусбат элементлар 0 нинг ўнг томонида ва барча манфий элементлар эса 0 нинг чап томонида жойлашган бўлади. Бундай тартибланиш, одатда табиий усулда тартибланиш деб юритилади.

Тартибланган $\mathscr{P}$ майдондаги элементнинг модули деганда қуйидагини тушунамиз:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Кўпайтма ва йиғиндининг модули қуйидаги шартларга бўйсунади:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad |a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Бу хоссаларни чекли сондаги элементлар учун ҳам ёзиш мумкин. $|a|^2 = a^2 = |-a|^2 \geqslant 0$ муносабат ўринли бўлиб, бу ерда $(a = 0) \Leftrightarrow (a^2 = 0)$ бўлади.

e элемент $\mathscr{P}$ майдоннинг бирлик элементи. $e = e \cdot e = e^2$ бўлгани туфайли e мусбат, $ne = \underbrace{e + e + \ldots + e}_{n}$ йиғинди n та мусбат элементнинг йиғиндиси бўлгани учун $ne > 0$. Демак, $n = ne = 0$ тенглик ҳеч вақт бажарилмагани учун тартибланган майдон доимо ноль характеристикали майдон бўлади.

Натурал сонларни мусбат, уларга қарама-қарши сонларни манфий деб юритсак, бутун сонлар ҳалқаси Z ни фақатгина бир хил усулда (яъни табиий усулда) тартиблаш мумкин бўлади. Бундай ҳолда барча манфий сонлар нолнинг чап томонида, барча натурал сонлар нолнинг ўнг томонида жойлашади.

4-таъриф. Агар R ҳалқа ($\mathscr{P}$ майдон) элементлари учун Архимед аксиомаси деб аталувчи, яъни исталган a ва $b > 0$ сонлар учун шундай $n \in N$ сон топиладики, натижада $nb > a$ бўлади, деб аталувчи аксиома бажарилса, R ҳалқа ($\mathscr{P}$ майдон) га *Архимед маъносида тартибланган ҳалқа (майдон)* дейилади.

Майдон доимо бирлик элементга эга бўлгани сабабли Архимед аксиомаси майдон учун $(\forall a \in \mathscr{P}, \exists n \in N)\, ne > a$ кўринишга эга бўлади.

2-теорема. *Бутун сонлар ҳалқаси ва рационал сонлар майдони Архимед маъносида тартибланган бўлади.*

Исботи. Аввало Z нинг Архимед маъносида тартибланган эканлигини кўрсатамиз. a ва $b > 0$ бутун сонлар берилган бўлсин. Агар $a \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда $1 \cdot b = b > a$ бўлади. Агар $a > 0$ бўлса, у ҳолда a ва b натурал сонлар учун $n = a + 1$ деб олиш кифоя. Унда $nb > a$ бажарилади. Демак, Z Архимед маъносида тартибланган ҳалқа экан.

Энди Q нинг Архимед маъносида тартибланган эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, a исталган рационал сон бўлиб, $b > 0$ бўлсин.

Бунда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $a \leqslant 0$ бўлсин, бундай ҳолда $1 \cdot b = b > a$ бажарилади;

2) $a > 0$ бўлсин. $a \in Q$ бўлгани учун уни $a = \frac{k}{l}$ $(l \neq 0)$ кўринишда ифодалаш мумкин. $a > 0$ эканлигидан k ва l ларнинг иккаласи ҳам бир хил ишорали бўлади. $c \neq 0$ учун $\frac{k}{l} = \frac{k \cdot c}{l \cdot c}$ шартга асосан k ва l нинг ишораларини доимо мусбат деб ҳисоблаш мумкин. Демак, $l \geqslant 1$ деб қараш мумкин. Айтайлик, $a = \frac{k}{l}$, $b = \frac{m}{s} > 0$ бўлсин. У ҳолда $nb = \frac{n \cdot m}{s}$ бўлиб, $k \cdot s = n \cdot m \cdot l$ шартни қаноатлантирувчи n_0 учун $n_0 b = a$ тенглик ўринли. Лекин $(n_0 + 1) ml > ks$ бўлгани туфайли охирги тенгсизликдан $(n_0 + 1) \frac{m}{s} > \frac{k}{l}$ келиб чиқади. Сўнгги тенгсизлик эса $(n_0 + 1) b > a$ эканлигини билдиради. Теорема исбот бўлди.

32-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР СИСТЕМАСИ

Биз рационал сонлар майдонининг Архимед маъносида тартибланган майдон эканлигини кўрсатдик. Лекин бу майдонда

$$x^2 - 2 = 0 \tag{1}$$

кўринишдаги квадрат тенглама ечимга эга эмас. Шунинг учун Q майдонни кенгайтириш масаласини қўямиз. Бу кенгайтма шундай бўлиши керакки, у Q майдонни ўз ичига олиши ҳамда унда (1) кўринишдаги тенгламалар ечимга эга бўлиши керак. Бунинг учун фундаментал кетма-кетликлар тушунчасидан фойдаланамиз.

Фараз қилайлик, тартибланган $\mathscr{P}$ майдон ҳамда элементлари шу майдонга тегишли бўлган $a_1, a_2, \quad , a_n, \quad = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$; $b_1, b_2, \quad b_k, \quad = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $n = n_0(\varepsilon)$ натурал сон мавжуд бўлсаки, $p > n_0$ ва $q > n_0$ номерлар учун $|a_p - a_q| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетликни *фундаментал* ёки *Коши кетма-кетлиги* дейилади.

1-теорема. *Исталган яқинлашувчи кетма-кетли фундаментал кетма-кетлик бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $a_n \in \mathscr{P}$ ва $a \in \mathscr{P}$ бўлганд $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ бўлсин.

Яқинлашувчи кетма-кетликнинг таърифига асосан исталган $\varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathscr{P})$ учун шундай $n_0 \in N$ мавжудки, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик $n > n_0(\varepsilon)$ шартни қаноатлантирувчи барч $n \in N$ лар учун бажарилади. Агар $p > n_0$, $q > n_0$ бўлса, абсолют қийматнинг хоссасига биноан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$|a_p - a_q| = |a_p - a + a - a_q| \leqslant |a_p - a| +$$

$$+ |a_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Шундай қилиб, $|a_p - a_q| = \varepsilon$ бўлгани учун $\{a_n\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади.

Лекин $a_i \in \mathscr{P} (i = 1,\ 2,\ 3, \quad)$ бўлганда барча фундаментал кетма-кетликлар лимити яна $\mathscr{P}$ майдонга тегишли бўлавермайди. Масалан, геометриядаги умумий ўлчовдош ва умумий ўлчовдош бўлмаган кесмалар тушунчаларини олайлик. Агар кесмалар умумий ўлчовдош бўлса, уларнинг узунликлари $\frac{m}{n}$ рационал сон билан ўлчанади ва аксинча, ҳар бир $\frac{m}{n}$ рационал сонга бир жуфт умумий ўлчовдош кесмалар мос келади. Лекин квадратнинг томони билан унинг диагонали умумий ўлчовдош бўлмаган кесмалардир. Шунинг учун квадрат диагонали узунлиги унинг томони узунлиги орқали ҳеч қандай рационал сон билан ифодаланмайди.

Шунингдек, элементлари рационал сонлардан иборат бўлган $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлса, у ҳар доим ҳам рационал сон бўлавермайди.

2-таъриф. $\mathscr{P}$ тартибланган майдон бўлиб, унинг элементларидан тузилган ҳар қандай фундаментал кетма-кетликнинг лимити яна майдонга тегишли бўлса, $\mathscr{P}$ га *тўла майдон* дейилади.

Масалан, рационал сонлар майдони тўла эмас.

3-таъриф. Агар $\mathscr{P}$ Архимед маъносида тартибланган ва тўла майдон бўлса, ундай майдонга *узлуксиз майдон* дейилади.

4-таъриф. Камида иккита ҳар хил элементга эга бўлган тўплам элементлари учун қуйидаги аксиомалар бажарилса, $< R, +, \cdot, > \rightleftarrows R$ системага ҳақиқий сонлар системаси дейилади:

1) R тўплам Q майдонни ўзида сақловчи майдондир;

2) $\forall a, b \in R$ учун қуйидаги уч ҳолдан фақатгина биттаси ўринли:

$$a > b, \ a = b \text{ ёки } -a > b;$$

3) $\forall a > 0, \ \forall b > 0 \ (\forall a, b \in R)$ учун $(a + b > 0) \wedge (a \cdot b > 0)$;

4) исталган $a \in R$ ва $b > 0$ учун шундай $n \in N$ топиладики, натижада $nb > a$ бўлади (Архимед аксиомаси);

5) элементлари R га тегишли бўлган $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментал кетма-кетлик R га тегишли лимитга эга.

Бу аксиомалардан қуйидагилар аниқланади:

1. $Q \subset R$ бўлгани учун R нинг бирлик элементи Q нинг бирлик элементи билан устма-уст тушади, шунинг учун уни 1 деб белгилаймиз. Бундай ҳолда $a \neq 0$ учун $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ бўлади.

2. 1) аксиомага асосан R майдон бўлгани учун унда майдоннинг барча хоссалари (29-параграфга қаранг) бажарилади.

3. 2) ва 3) аксиомалар R нинг тартибланган майдон эканлигини кўрсатади.

4. 4) аксиомага асосан R Архимед маъносидаги тартибланган майдондир.

5. 4) ва 5) аксиомалар R нинг тўла ва узлуксиз майдон эканлигини кўрсатади.

Машқлар

1. Агар a, b, c ва d лар ҳақиқий сонлар бўлса, қуйидагиларни исботланг:

а) $a < b$ бўлганда $a + c < b + c$;

б) $a > b$ бўлганда $c - a < c - b$;

в) $a < b$ бўлиб, $c < 0$ бўлса, $ac > bc$; $c > 0$ бўлганда эса $ac < bc$;

г) $a > 0$ бўлса, $\frac{1}{a} > 0$ бўлади.

2. Рационал сонлар майдонида $x^2 - p = 0$ тенглама (p — туб сон) ечимга эга эмаслигини исботланг.

3. $x^2 - p = 0$ тенглама ҳақиқий сонлар майдонида ечимга эга эканлигини исботланг.

4. Элементлари рационал сонлардан иборат бўлган $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, кетма-кетликлар тўпламини F деб белгилайлик. $\{a_k - b_k\}_{k=1}^{\infty}$ нолга яқинлашувчи кетма-кетлик бўлса, $\{a_k\}\,\rho\,\{b_k\}$ деб оламиз. Шундай шартда ρ нинг эквивалентлик муносабати эканлигини исботланг.

33-§. КОМПЛЕКС СОНЛАР МАЙДОНИ

Мактаб математика курсидан маълумки,

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

тенглама ҳақиқий сонлар майдонида ечимга эга эмас. Шунинг учун биз ўз олдимизга $R = < R, +, \cdot, 0, 1 >$ майдонни шундай кенгайтириш масаласини қўямизки, натижада у кенгайтмада (1) тенглама ечимга эга бўлсин. R майдонни ўз ичига олувчи кенгайтма майдонни қуришнинг бир қанча усуллари мавжуд. Ҳозир шу усуллардан биттасини баён қиламиз.

Бунинг учун аввало исталган $a \in R$ ҳақиқий сонга $(a;\ 0)$ жуфтликни мос қўямиз. Энди $b \in R$ бўлганда $(a;\ b)$ тартибланган жуфтликлар тўпламини C деб белгилаймиз ҳамда бу тўплам элементлари учун тенглик муносабатини, қўшиш ва кўпайтириш каби бинар алгебраик амалларни мос равишда қуйидаги аксиомалар ёрдамида киритамиз:

1) $(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)\ (\forall\ (a;\ b),\ (c;\ d) \in C)$;
2) $(a;\ b) + (c;\ d) = (a + c;\ b + d)\ (\forall (a;\ b),\ (c;\ d) \in C)$;
3) $(a;\ b) \cdot (c;\ d) = (ac - bd;\ ad + bc)\ (\forall (a;\ b),\ (c;\ d) \in C)$.

Юқоридаги аксиомалар $\{(a;\ b) \mid a,\ b \in R\}$ тўпламнинг жуфтликларни қўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ эканлигини кўрсатади.

1-теорема. *$\{(a;\ b) \mid a,\ b \in R\}$ тўплам коммутатив ҳалқа бўлади.*

Исботи. Аввало $C = \{(a;\ b) \mid a,\ b \in R\}$ тўпламнинг аддитив группа эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, бу тўпламда

а) $(a;\ b) + (c;\ d) = (c;\ d) + (a;\ b)$;
б) $((a;\ b) + (c;\ d)) + (e;\ f) = (a;\ b) + ((c;\ d) + (e;\ f))$;
в) $(a;\ b) + (0;\ 0) = (a;\ b)$;
г) $(a;\ b) + (-a;\ -b) = (0;\ 0)$

шартлар бажарилгани учун $< C, + >$ алгебра аддитив группадир. Энди C тўпламнинг элементлари учун

$$(a;\ b)((c;\ d) + (e;\ f)) = (a;\ b)(c;\ d) + (a;\ b)(e;\ f) \qquad (2)$$

тенгликнинг бажарилишини кўрсатамиз.

(2) тенгликнинг чап томонига аввал 2) аксиомани, сўнгра 3) аксиомани қўлласак,

$$(a;\ b)((c;\ d)+(e;\ f))=(ac+ae-bd-bf;\ ad+af+bc+be) \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. Энди (2) нинг ўнг томонига аввал 3) аксиомани, сўнгра 2) аксиомани қўллаймиз:

$$(ac-bd;\ ad+bc)+(ae-bf;\ af+be)=(ac-ae-bd-bf;\ ad+af+bc+be). \qquad (4)$$

(3) ва (4) нинг ўнг томонлари тенг бўлгани учун (2) тенглик ўринлидир. Шундай қилиб $<C,\ +,\ \cdot>$ алгебра коммутатив ҳалқа экан. (Кўпайтириш амалининг коммутатив эканлигини исботланг.)

2-теорема. *$<C,\ +,\ \cdot>$ алгебра майдон бўлади.*

2-теоремани исботлаш учун $<C,\ +,\ \cdot>$ нинг бирлик элементга эга эканлигини ҳамда унинг ҳар қандай нолдан фарқли элементининг тескариланувчи эканлигини кўрсатиш кифоя. Исталган $(a;\ b)$ жуфтлик учун $(a;\ b)(1;\ 0)=(a-0;\ b+0)=(a;\ b)$ бўлганидан $(1;\ 0)$ жуфтлик $<C,\ +,\ \cdot>$ ҳалқанинг бирлик элементидир. Биз уни 1 деб юритамиз.

Энди $a\neq 0$ ёки $b\neq 0$ учун $(a;\ b)$ элементнинг тескариланувчи эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$(a;\ b)(x;\ y)=1 \qquad (5)$$

тенгламани ечиш кифоя. 3) аксиома ёрдамида (5) ни

$$(ax-by;\ ay+bx)=1=(1;\ 0) \qquad (6)$$

орқали ёзиб оламиз. Энди 1) аксиомани қўлласак,

$$\begin{cases} ax-by=1, \\ bx+ay=0 \end{cases} \qquad (7)$$

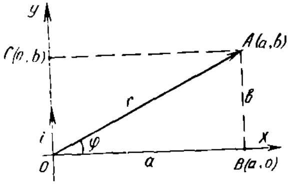
система ҳосил бўлади. $\left(\frac{a}{a^2+b^2};\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ жуфтлик (7) системанинг ечимидир. Демак, $<C,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1>$ алгебра майдон экан. Ана шу майдон комплекс сонлар майдони деб юритилади. Бу майдон одатда C ҳарфи билан белгиланади ва у ўзида ҳақиқий сонлар майдонини сақлайди, чунки юқорида биз эслатиб ўтганимиздек, $b=0$ да $(a;\ 0)$ жуфтликлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламини ифодалайди. Энди $\alpha=(a;\ b)$ жуфтликни 2) аксиомадан фойдаланиб,

$$\alpha=(a;\ b)+(0;\ 0)=(a+0;\ 0+b)=(a;\ 0)+(0;\ b)=$$
$$=a(1;\ 0)+b(0;\ 1),\quad \alpha=a(1;\ 0)+b(0;\ 1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $(0; 1) = i$ десак, $\alpha = a + bi$ кўринишни олади. Бунда a ва b сонлар ҳақиқий сонлар бўлиб, a сон α соннинг ҳақиқий қисми, b эса α соннинг мавҳум қисми, i мавҳум бирлик дейилади. Агар $a = 0$, $b \neq 0$ бўлса, bi га соф мавҳум сон дейилади.

34-§. КОМПЛЕКС СОННИНГ ТРИГОНОМЕТРИК ШАКЛИ ВА ГЕОМЕТРИК ТАСВИРИ

$\alpha = a + bi$ комплекс сонни текисликдаги декарт координаталари системасида $A(a; b)$ нуқта билан тасвирлаш қабул қилинган. У ҳолда $a = a + 0 \cdot i$ ҳақиқий сон абсцисса ўқида ётувчи $B(a; 0)$ нуқта билан, $bi = 0 + bi$ мавҳум сон ордината ўқида ётувчи $C(0; b)$ нуқта билан тасвирланади (13-чизма). $0 = 0 + 0 \cdot i$ сонга мос келувчи нуқта координата боши бўлади. Масалан, $\alpha = -3 + 4i$, $\beta = 5$, $\gamma = -7i$ сонлар мос равишда $A_1(-3; 4)$, $B_1(5; 0)$ ва $C_1(0; -7)$ нуқталар билан тасвирланади.

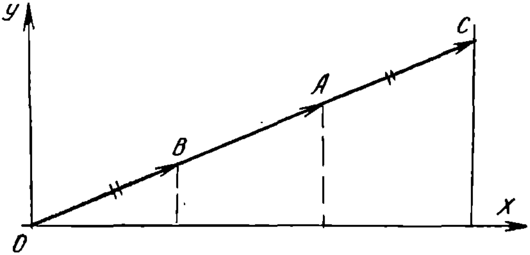


13- чизма.

Бундай тасвирлашда абсцисса ўқи — ҳақиқий ўқ ва ордината ўқи — мавҳум ўқ деб юритилади. $\alpha = a + bi$ комплекс сонни боши координата бошида ва учи $A(a; b)$ нуқтада ётувчи вектор билан ҳам тасвирлаш мумкин. Бу ҳолда ҳақиқий сонлар, ҳақиқий ўқда ётувчи векторлар билан ва мавҳум сонлар мавҳум ўқда ётувчи векторлар билан тасвирланиши равшан. Умуман айтганда, комплекс сонлар тўплами билан текисликдаги барча нуқталар тўплами орасида биектив акслантириш мавжуд.

$\alpha = a + bi$ комплекс соннинг геометрик тасвирини ифодаловчи векторнинг узунлиги бу комплекс соннинг модули дейилади ва у $r = |\alpha| = |a + bi|$ кўринишда белгиланади. $r = |\alpha|$ ни Пифагор теоремаси бўйича 13-чизмадаги тўғри бурчакли AOB учбурчакдан топамиз. Бунда $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ бўлади. Масалан, $\alpha = -3 + 4i$, $\beta = \sqrt{5} - i\sqrt{7}$ сонларнинг модуллари мос равишда $r_1 = |\alpha| = \sqrt{9 + 16} = 5$, $r_1 = 5$ ва $r_2 = |\beta| = \sqrt{5 + 7} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $r_2 = 2\sqrt{3}$ га тенг. Нолдан фарқли ҳар бир комплекс соннинг модули мусбат билан топиладиган $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ вектордан иборат бўлади (14-чизма).

$\triangle AOC$ дан $|\vec{OC}| < |\vec{OA}| + |\vec{AC}| = |\vec{OA}| + |\vec{OB}|$ ёки $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ келиб чиқади.



15- чизма.

2-ҳол. $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ векторлар бир тўғри чизиқда ётгани ҳолда бир хил йўналган бўлсин (15-чизма).

$|\vec{OB}| = |\vec{AC}|$ бўлади.

$|\vec{OC}| = |\vec{OA}| + |\vec{OB}| = |\vec{OA}| + |\vec{AC}|$ тенгликдан $|\vec{OC}| = |\vec{OA}| + |\vec{AC}|$ ёки $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ ҳосил бўлади.

3-ҳол. $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ векторлар бир тўғри чизиқда ётиб, қарама-қарши йўналишга эга бўлсин (16-чизма).

Бу ҳолда $|\vec{OC}| = ||\vec{OA}| - |\vec{OB}||$ ёки $|\alpha + \beta| = ||\alpha| - |\beta||$, лекин $|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ бўлгани учун $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ ни ҳосил қиламиз.

Учала ҳолни бирлаштириб, $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$ тенгсизликка эга бўламиз.

16-

Тўла математик индукция принципи воситаси билан бу тенгсизлик қуйидагича умумлаштирилади:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \quad + |\alpha_n|.$$

Шундай қилиб, комплекс сонлар йиғиндисининг модули қўшилувчилар модулларининг йиғиндисидан катта эмас.

Иккита α ва β комплекс сон айирмасининг модулини ҳисоблаш масаласи қуйидагича ечилади: $\alpha-\beta=\gamma$ деб белгиласак, бундан $\alpha=\gamma+\beta$ ҳосил бўлади. Демак, $|\alpha|=|\gamma+\beta|\leqslant|\gamma|+|\beta|$. Бу тенгсизликдан $|\gamma|\geqslant|\alpha|-|\beta|$ ёки

$$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta| \qquad (8)$$

келиб чиқади.

Иккинчи томондан $|\alpha-\beta|=|-(\beta-\alpha)|=|\beta-\alpha|$ бўлади. (8) га асосан эса $|\beta-\alpha|\geqslant|\beta|-|\alpha|=-(|\alpha|-|\beta|)$ бўлади. Демак,

$$|\alpha-\beta|\geqslant-(|\alpha|-|\beta|). \qquad (9)$$

(8) ва (9) дан

$$|\alpha-\beta|\geqslant||\alpha|-|\beta|| \qquad (10)$$

ҳосил қилинади. Булардан ташқари $|\alpha+\beta|=|\alpha-(-\beta)|\geqslant|\alpha|-|-\beta|=|\alpha|-|\beta|$ дан $|\alpha+\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|$ бўлади.

Биз юқорида эслатиб ўтганимиздек, ҳар бир $\alpha=x+yi$ комплекс сонга текисликда битта $M(x;\ y)$ нуқта мос келади ва аксинча. Шунинг учун текисликнинг ҳар бир $(x;\ y)$ нуқтасига $\alpha=x+yi$ комплекс сонни мос қўйиш ўзаро бир қийматли акслантиришни ифодалайди.

Фақат мавҳум қисмининг ишораси билан фарқ қиладиган комплекс сонлар ўзаро қўшма комплекс сонлар дейилади.

Кўп ҳолларда ҳар бир нуқтаси қандайдир комплекс сонни ифодаловчи текислик комплекс текислик деб юритилади.

Комплекс текисликда ихтиёрий иккита ўзаро қўшма $\alpha=x+yi$ ва $\bar{\alpha}=x-yi$ комплекс сонлар Ox ўққа нисбатан симметрик жойлашган бўлади. Ўзаро қарама-қарши бўлган z ва $-z$ комплекс сонлар координата бошига нисбатан симметрикдир.

Энди комплекс сонларнинг геометрик жойланишига оид баъзи бир мисолларни кўриб ўтамиз.

1-мисол. z комплекс сон учун

$$|z+2-i|=|z+4i| \qquad (11)$$

тенгликни қаноатлантирувчи комплекс сонларга мос келувчи нуқталар комплекс текисликда қандай жойлашган бўлади?

Ечиш. (11) тенгликни $|z-(-2+i)|=|z-(-4i)|$ орқали ёзиб оламиз. Маълумки, $|z_1-z_2|$ модул иккита z_1 ва z_2 комплекс сонга мос келувчи нуқталар орасидаги масофани билдиради. Шунга кўра (11) тенгликнинг чап ва ўнг томонлари $z = x + yi$ комплекс сонга мос келувчи $A(x; y)$ нуқтадан $M(-2; 1)$ ва $N(0; -4)$ нуқталаргача бўлган масофаларнинг ўзаро тенглигини билдиради. Демак, (11) тенгликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами MN кесманинг ўрта перпендикулярини ифодалар экан.

2-мисол. Комплекс текисликнинг қайси нуқталарига мос келувчи комплекс сонлар учун

$$2 < |z + 2 - 3i| \leqslant 4 \qquad (12)$$

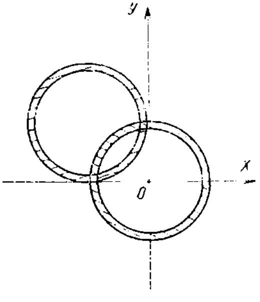
тенгсизлик ўринли бўлади?

Ечиш. $z_1 = z + 2 - 3i$ десак, (12) тенгсизлик

$$2 < |z_1| \leqslant 4 \qquad (13)$$

кўринишни олади.

Координаталари $|z_1| > 2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар маркази координата бошида ва радиуси 2 га тенг бўлган доиранинг ташқи нуқталаридир. Координаталари $|z_1| \leqslant 4$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар эса маркази координата бошида ва радиуси 4 га тенг бўлган доиранинг барча нуқталаридан иборат. Шундай қилиб, координаталари (13) тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар маркази координата бошида бўлган, радиуслари эса мос равишда 2 ва 4 га тенг бўлган концентрик айланалардан ҳосил қилинган ҳалқа нуқталаридан иборат бўлиб, ички айлана нуқталари (17-чизма) бу тўпламга тегишли эмас.



17-чизма.

$z = z_1 - 2 + 3i$ тенгликка биноан координаталари $z = x + yi$ комплекс сонга мос келувчи нуқталар z_1 га мос келувчи нуқталарни 2 бирлик чапга ва 3 бирлик юқорига суриш натижасида ҳосил бўлади. Натижада биз излаган нуқталар маркази (—2;3) нуқтада, радиуслари мос равишда 2 ва 4 га тенг бўлган концентрик айланалар ёрдамида ҳосил қилинган ҳалқада ётади (ички айлана нуқталари бу тўпламга кирмайди).

3-мисол. Координаталари

$$\log_2(1+|z^2-i|)+\log_{16}\frac{1}{(1+|z^2+i|)^4}=0 \qquad (14)$$

тенгламани қаноатлантирувчи комплекс сонлар текисликда қандай жойлашган бўлади?

Ечиш. $\log_{16}\frac{1}{(1+|z^2+i|)^4}=-\log_{16}(1+|z^2+i|)^4=$

$=-\frac{1}{4}\log_2(1+|z^2+i|)^4=-\log_2(1+|z^2+i|)$

бўлгани учун (14) тенгламани

$$\log_2(1+|z^2-i|)=\log_2(1+|z^2+i|)$$

ёки $|z^2-i|=|z^2+i|$ кўринишда ёзиб оламиз.

Энди $z=x+iy$ десак, охирги тенгламадан

$$(x^2-y^2)^2+(2xy-1)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy+1)^2 \qquad (15)$$

ҳосил бўлади. (15) тенглама эса:

а) $x=0$ ва y ихтиёрий сон;

б) $y=0$ ва x ихтиёрий сон бўлгандагина ўринли бўлади. Шундай қилиб, координаталари (14) тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами: а) мавҳум ўқ, б) ҳақиқий ўқ нуқталаридан иборат экан.

36-§. КОМПЛЕКС СОНДАН ИЛДИЗ ЧИҚАРИШ

Комплекс сонлардан илдиз чиқариш масаласи Муавр формуласи ёрдамида ижобий ҳал қилинади. Ҳақиқатан, бизга $\alpha=a+bi$ комплекс сон берилган бўлсин. Уни $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ шаклга келтириб оламиз. Эндиги мақсад шундай $\beta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ комплекс сонни топишдан иборатки, унинг учун

$$\beta^n=\alpha \qquad (1)$$

тенглик бажарилсин. (1) тенгликни

$$(\rho(\cos\theta+i\sin\theta))^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

ёки

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

шаклда ёзиб оламиз. Бу ерда иккита тригонометрик шаклдаги комплекс сонларнинг тенглигига эгамиз. Шу сабабли уларнинг модуллари тенг бўлиб, аргументлари эса бир-биридан $2k\pi(k\in Z)$ га фарқ қилади. Демак, $\rho^n=r$ ва $n\theta=\varphi+2k\pi$ тенгликлар ўринли. Бу тенгликлардан

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (2)$$

ҳосил бўлади.

Модуль мусбат ҳақиқий сонни тасвирлагани сабабли, биз $\rho = \sqrt[n]{r}$ нинг мусбат ҳақиқий қийматинигина оламиз. Топилган (2) қийматларни (1) га қўйиб,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right. \qquad (3)$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу формулада k ихтиёрий бутун сон. Лекин k га

$$k = 0, 1, 2, \qquad , n - 1 \qquad (4)$$

қийматларнигина бериш кифоя. Чунки бу қийматларда (3) нинг ўнг томони n та ҳар хил комплекс сонни беради. Бунга сабаб шуки, k нинг қиймати 1 га ортса, θ аргументнинг қиймати $\frac{2\pi}{n}$ га ортади. Энди $n \geqslant 2$ бўлгани учун $\frac{2\pi}{n}$ сон $\cos\theta$ ва $\sin\theta$ ларнинг давридан кичик эканлиги равшан. Шу сабабли $\cos\theta$ нинг (шунингдек, $\sin\theta$ нинг ҳам) бирин-кетин турган ҳар икки қиймати тенг эмас. Энди k — ихтиёрий бутун сон учун ($k = nq + r$, $0 \leqslant r \leqslant n - 1$) $\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} =$

$$= \cos\frac{\varphi + 2(nq + r)\pi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2q\pi\right) = \cos\frac{\varphi + 2r\pi}{n},$$

$$\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \cos\frac{\varphi + 2r\pi}{n}$$

ни ҳосил қиламиз. Бунда r нинг қиймати (4) сонларнинг биридан иборат. Худди шунга ўхшаш $\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \sin\frac{\varphi + 2r\pi}{n}$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, α комплекс сондан ҳосил қилинган n-даражали илдизлар n та ҳар хил қийматларга эга. Улар (3) дан k нинг (4) қийматларида ҳосил бўлади.

3) илдиз $k = 0$ ва $k = n$ лар учун бир хил қийматни ифодалагани сабабли, k га $k = 1, 2, \qquad n$ қийматларни ҳам бера оламиз.

Мисоллар. 1. $\alpha = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ комплекс сондан 3-даражали илдизларни чиқаринг.

Бунинг учун аввало α ни тригонометрик шаклга келтирамиз:

$$r = \sqrt{2 + 2} = 2, \ r = 2; \ \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Демак, $\varphi = 135^\circ$ ёки $\frac{3\pi}{4}$ Энди (3) га мувофиқ:

$$\alpha_k = \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0,1,2.$$

1) $k = 0$, $\alpha_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $k = 1$, $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$;

3) $k = 2$, $\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

2. $\beta_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} +$

$+ i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$,

бунда $r = 1$ бўлгани учун

$\beta_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, $\beta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\beta_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = -\beta_0$, $\beta_1 =$
$= -\beta_0$;

$\beta_1 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. $\gamma_k = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + \right.$
$\left. + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$.

1) $k = 0$, $\gamma_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$, $\gamma_0 = 1 +$
$+ i\sqrt{3}$;

2) $k = 1$, $\gamma_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$, $\gamma_1 = -2$;

3) $k=2$, $\gamma_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$, $\gamma_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

α комплекс сондан 2-даражали (квадрат) илдиз чиқарилганда иккита илдиз ҳосил бўлиб, улардан бири α_0 бўлса, иккинчиси $\alpha_1=-\alpha_0$ бўлади. Ҳақиқатан,

$$\alpha=\sqrt{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right)$$

(k=0,1) дан ушбуларни топамиз:

$$\alpha_0=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\alpha_1=\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)=-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=-\alpha_0.$$

$\alpha=1$ сондан n-даражали илдиз чиқариш формуласи қуйидагича:

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}(k=\overline{1,n}),\qquad(5)$$

чунки $r=1$ да $\varphi=0$ бўлиб, $\sqrt[n]{r}=\sqrt[n]{1}=1$ бўлади.

Масалан, $\alpha=1$ бўлса $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ дан

$$\alpha_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\alpha_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\alpha_3=\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}=1,\ \alpha_3=\alpha_0=1.$$

$\alpha=-1$ дан n-даражали илдиз

$$\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{(1+2k)\pi}{n}+i\sin\frac{(1+2k)\pi}{n}$$
$$(k=\overline{1,n})$$

формула ёрдамида чиқарилади.

Комплекс сондан квадрат илдиз чиқаришнинг иккинчи усули билан танишайлик.

Алгебраик шаклдаги комплекс сондан чиқарилган квадрат илдизни ҳам алгебраик шаклда излаймиз, яъни

$$\sqrt{a+bi}=x+yi,\qquad(6)$$

бунда x ва y лар номаълум ҳақиқий сонлардир. $a+bi$ дан чиқарилган квадрат илдизнинг таърифига асосан, $(x+yi)^2=a+bi$ ёки $x^2-y^2+2xyi=a+bi$. Иккита комплекс соннинг тенглиги шартига кўра $x^2 - y^2 = a^2$ ва $2xy = b$. Иккала тенгламани квадратга кўтариб, $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = a^2$ ва $4x^2y^2 = b^2$ ларга эга бўламиз. Буларни қўшсак, $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2$ ёки $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ бўлади. Бунда $x^2 + y^2$ мусбат ҳақиқий сонни ифодалагани учун квадрат илдизни плюс ишораси билан олдик. Энди $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ва $x^2 - y^2 = a$ тенгламани аввал қўшиб, сўнгра айириб,

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \text{ ва } y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

ларни ҳосил қиламиз. Булардан эса

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}. \qquad (7)$$

Равшанки, $a + \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$ ва $-a + \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$ дир. Шу сабабли, (7) илдизлар ҳақиқий сонларни тасвирлайди. x ва y ларнинг ишораларини аниқлашда қуйидагиларни эътиборга оламиз:

а) $b > 0$ қийматда $2xy = b$ га биноан $xy > 0$ дир. Демак, бу ҳолда x ва y ларни бир хил ишора билан олишимиз лозим.

б) $b < 0$ қийматда эса $xy < 0$. Шу сабабли x ва y ларни ҳар хил ишора билан олиш керак.

Шундай қилиб, $b > 0$ ва $b < 0$ ларга мос қуйидаги иккита формула ҳосил бўлади:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right) \qquad (8)$$

($b > 0$ учун);

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right) \qquad (9)$$

($b < 0$ учун).

(8) ва (9) формулага $a + bi$ дан квадрат илдиз чиқариш формулалари дейилади.

37- §. ИККИ ҲАДЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Икки ҳадли тенгламаларнинг умумий кўриниши

$$u^n - a = 0 \qquad (1)$$

дан иборат бўлиб, бунда a — нолдан фарқли ихтиёрий комплекс сон. Бу тенгламани исталган $\sqrt[n]{a}$ илдиз қаноатлантиради: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n - a = a - a = 0$. Демак, (1) тенгламанинг n та ҳар хил илдизи мавжуд. Улар

$$u_k = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\left(k = \overline{1, n-1}\right)$$

формула ёрдамида топилади.

$$x^n - 1 = 0 \qquad (2)$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама ушбу n та ҳар хил илдизга эга:

$$x_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\left(k = \overline{1, n}\right)\cdot \qquad (3)$$

(1) тенгламанинг битта тайин u_k илдизини (2) тенгламанинг ҳамма n та x_1, x_2, , x_n илдизига кўпайтирсак, (1) нинг ҳамма n та илдизлари ҳосил бўлади. Чунки, $u_k \cdot x_i$ сон (1) ни қаноатлантиради, яъни $(u_k x_i)^n - a = u_k^n x_i^n - a = a \cdot 1 - - a = 0$, $(u_k x_i)^n - a = 0$. Демак, (1) тенгламанинг барча ечимларини топиш учун унинг бирорта ечимини топиб, уни 1 нинг барча n-даражали илдизларига кетма-кет кўпайтириш кифоя экан.

Мисол. $u^3 - i = 0$ тенгламани ечайлик. Бу тенглама илдизларининг бири $u_2 = -i$ бўлиб, у $u_k = \sqrt[3]{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$ формуладан $k=2$ қийматда ҳосил қилинади. Берилган тенгламанинг ҳамма илдизларини топиш учун $x^3 - 1 = 0$ нинг ҳамма илдизларини оламиз:

$$x_1 = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_2 = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 =$$

$$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3 = \sqrt[3]{1} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1, \quad x_3 = x_0 = 1.$$

Уларни u_2 га кўпайтириб, қуйидаги илдизларни ҳосил қиламиз:

$$u_0 = -i x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \; u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$u_1 = -i x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad u_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$u_2 = -ix_3 = -i, \quad u_2 = -i.$$

Машқлар

1. 1 нинг n-даражали илдизлари тўплами кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилишини исботланг.

2. 1 нинг n-даражали илдизлари тўпламининг геометрик тасвири қандай тўпламни ифодалайди?

3. z комплекс сон $|z + 2 - i| = |z + 4i|$ тенгламани қаноатлантиради. Шу тенглама илдизларига мос келувчи нуқталар текисликда қандай жойлашган бўлади?

4. $\log_2(1 + |z^2 - i|) + \log_{16} \frac{1}{(1 + |z^2 + i|)^4} = 0$

тенгламани қаноатлантирувчи комплекс сонларга мос келувчи нуқталар текисликда қандай жойлашган бўлади?

5. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи комплекс сонларга мос келувчи нуқталар текисликда қандай жойлашган эканлигини аниқланг:

а) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2;$

б) $|i - 1 - 2z| \geqslant 9;$

в) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26;$

г) $|z - i| = |z + i| = |z - 1 + i|;$

д) $|z + 2 + i| = |z - 1 - 4i|$

6. Қуйидаги алгебраик шаклдаги комплекс сонларни тригонометрик шаклга келтириб, сўнгра Муавр формуласини қўлланг:

а) $(1 + i)^{10}$; б) $(1 - i)^{16}$; в) $(\sqrt{3} + i)^{20}$; г) $(\sqrt{3} - i)^{30}$; д) $(1 + \cos\alpha + i \sin\alpha)^n$.

7. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $\sqrt[7]{1+i}$; б) $\sqrt[10]{\sqrt{3}+i}$; в) $\sqrt[10]{-1}$;

г) $\sqrt[5]{1}$; д) $\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$; е) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$.

Шундай қилиб, йўналишга эга бўлган кесма, яъни вектор тушунчасини қуйидаги маънода кенгайтирдик:

а) V тўпламнинг элементлари бўлган векторлар фақатгина йўналишга эга бўлган кесмалар эмас, балки ихтиёрий табиатли элементлар бўлиши мумкин;

б) $\mathscr{P}$ майдон фақатгина ҳақиқий сонлар майдони эмас, балки ихтиёрий майдон бўлиши мумкин.

3) ва 4) аксиомалар векторлар фазосининг скаляр миқдорига ҳамда векторга нисбатан чизиқли эканлигини кўрсатади. Шунинг учун вектор фазо кўпинча чизиқли фазолар ҳам деб юритилади. $\mathscr{P}$ майдон ҳақиқий (комплекс) сонлар майдони бўлса, V фазо ҳақиқий (комплекс) сонлар майдони устидаги фазо деб юритилади.

Энди вектор фазонинг таърифидан келиб чиқадиган қуйидаги хоссалар билан танишиб ўтамиз:

1° Аввало 1) аксиомага биноан V чизиқли фазо аддитив группа бўлганидан у ягона $\bar{0}$ элементга эга. Бундан ташқари V нинг ҳар бир $\bar{x}$ эламенти учун ягона $-\bar{x}$ қарама-қарши элемент мавжуд.

2°. $$0\cdot\bar{x}=\bar{0}\quad(\forall\bar{x}\in V,\ \exists 0\in\mathscr{P}).$$

Ҳақиқатан, V нинг исталган $\bar{x}$ элементи учун $0\cdot\bar{x}=(0+0)\bar{x}=0\cdot\bar{x}+0\cdot\bar{x}$ бўлади. $0\cdot\bar{x}=0\cdot\bar{x}+0\cdot\bar{x}$ тенгликнинг иккала томонига $-0\ \bar{x}$ ни қўшамиз. Унда $\bar{0}=0\cdot\bar{x}$ ҳосил бўлади. Бу тенгликнинг чап томонидаги $\bar{0}\in V$, ўнг томонидаги $0\in\mathscr{P}$.

3°. $$\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}\quad(\forall\alpha\in\mathscr{P},\ \bar{0}\in V).$$

Ҳақиқатан, $\alpha\cdot\bar{0}=\alpha\cdot(\bar{0}+\bar{0})=\alpha\cdot\bar{0}+\alpha\cdot\bar{0}$ ўринли. Охирги тенгликнинг иккала томонига $-\alpha\cdot\bar{0}$ ни қўшамиз. Унда $0=\alpha\cdot\bar{0}$ ҳосил бўлади.

4°. Агар $\alpha\cdot\bar{x}=\bar{0}$ бўлса, ёки $\alpha=0$, ёки $\bar{x}=\bar{0}$ бўлади. Ҳақиқатан, агар $\alpha\neq 0$ бўлса, унда α^{-1} мавжуд. Демак, $\alpha^{-1}(\alpha\bar{x})=0\Rightarrow(\alpha^{-1}\alpha)\bar{x}=\bar{0}\Rightarrow\bar{x}=\bar{0}$. Энди $\bar{x}\neq\bar{0}$ бўлсин. $\bar{x}=(x_1, x_1, \quad , x_n)$ да $\bar{x}_i\neq\bar{0}$ бўлсин. У ҳолда $\alpha\bar{x}=\bar{0}$ бўлади. Бундан $\alpha=0$ бўлади.

5° Агар $\alpha\bar{x}=\alpha\bar{y}$ бўлиб, $\alpha\neq 0$ бўлса, $\bar{x}=\bar{y}$ бўлади. Бу тасдиқни исботлаш учун $\alpha\bar{x}=\alpha\bar{y}$ нинг иккала томонига $-\alpha\bar{y}$ ни қўшамиз. Унда $\alpha\bar{x}-\alpha\bar{y}=\bar{0}\Rightarrow\alpha(\bar{x}-\bar{y})=\bar{0}$ тенгликнинг иккала томонини α^{-1} га кўпайтирсак, $\bar{x}-\bar{y}=\bar{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ ҳосил бўлади ёки 4) хоссага биноан эса $\alpha \neq 0$ бўлгани учун $\bar{x} - \bar{y} = \bar{0}$. Демак, $\bar{x} = \bar{y}$.

Юқорида кўриб ўтилган чизиқли фазо баъзан $V = <V, +, \omega_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}>$ орқали белгиланади, бу ерда $\omega_\lambda : \bar{x} \to \lambda \bar{x}$.

Мисоллар. 1. $a_i \in R (i = \overline{1,n})$ бўлганда узунлиги n га тенг бўлган $(a_1, a_2, \quad ., a_n)$ кортежлар тўпламини оламиз ва бу тўпламни R^n ёки R_n орқали белгилаймиз. R^n тўпламнинг элементлари учун тенглик муносабати, иккита элементни қўшиш ва векторни сонга (скаляр)га кўпайтириш қоидаларини мос равишда қуйидагича киритамиз:

$$1)\ a_i = b_i \Leftrightarrow (a_1, a_2, \quad , a_n) = (b_1, b_2, \quad , b_n) \quad (i = \overline{1, n});$$

$$2)\ (a_1, a_2, \quad , a_n) + (b_1, b_2, \quad b_n) \rightleftarrows (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \quad , a_n + b_n);$$

$$3)\ \alpha(a_1, a_2, \quad , a_n) \rightleftarrows (\alpha a_1, \alpha a_2, \quad \alpha a_n).$$

R^n тўпламда вектор фазонинг барча аксиомалари бажарилади. Бу тўплам учун $\bar{0} = (0, 0, \quad 0)$ ва $-\bar{a} = (-a_1, -a_2, \quad , -a_n)$ лар мос равишда ноль ва $\bar{a}$ га қарама-қарши векторни ифодалайди. R фазонинг элементлари одатда n ўлчовли векторлар, $\bar{a} = (a_1, a_2, \quad a_i, \quad a_n)$ вектордаги $a_i \in R$ элемент эса $\bar{a}$ векторнинг i-координатаси деб юритилади. $i (i = \overline{1, n})$-координатаси 1 дан, қолган координаталари ноллардан иборат бўлган $\bar{e}_1 = (1,0, \quad , 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, \quad 0)$, $\bar{e}_n = (0,0, \quad , 1)$ векторлар *орт* ёки *бирлик векторлар* дейилади. R^n фазо одатда n ўлчовли векторларнинг арифметик фазоси деб юритилади.

2. Уч ўлчовли фазодаги геометрик векторлар (йўналган кесмалар)нинг V_3 тўплами векторларни қўшишнинг маълум қоидасига нисбатан, R ҳақиқий сонлар майдони устидаги вектор фазони ифодалайди.

3. Коэффициентлари R сонлар майдони элементларидан иборат, даражалари эса n сондан катта бўлмаган $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n$ кўпҳадлар тўплами кўпҳадларни қўшиш ва кўпҳадларни сонга кўпайтириш амалига нисбатан шу R майдон устидаги вектор фазо бўлади. Кўпҳадлар тўпламининг ноль вектор вазифасини ҳамма коэффициентлари 0 га тенг $f(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \quad + 0 \cdot x + 0$ кўпҳад бажаради. $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad +$

$+a_{n-1}x+a_n$ га қарама-қарши элемент $-f(x)=-a_0x^n-$ $-a_1x^{n-1}- \quad -a_{n-1}x-a_n$ бўлади.

Қолган аксиомаларнинг бажарилиши ҳам юқоридагидек текширилади.

4. Даражалари фақат n га тенг бўлган кўпҳадлар тўплами векторлар фазосини ташкил этмайди, чунки иккита кўпҳадни қўшганда йиғинди кўпҳад даражаси n дан кичик бўлиб қолиши мумкин.

5. Даражалари n дан катта бўлмаган ва барча коэффициентлари мусбат сонлардан иборат бўлган кўпҳадлар тўплами ҳам векторлар фазоси бўлмайди, чунки бундай кўпҳадни манфий сонга кўпайтирилса, унинг барча коэффициентлари манфий сонлардан иборат бўлади.

Машқлар

1. R — ҳақиқий сонлар тўплами учун $<R, +, \cdot, 0, 1>$ алгебра қуйидаги майдонлар устида чизиқли фазони ташкил этадими:

а) Q; б) R; в) C (C — барча комплекс сонлар тўплами)?

2. $<C, +, \cdot, 0, 1>$ алгебра Q, R ва C майдонлар устида чизиқли фазо ташкил этишини аниқланг.

3) $<Q, +, \cdot, 0, 1>$ алгебра қандай сонлар майдони устида чизиқли фазо бўлади?

39-§. ҚИСМ ФАЗОЛАР

Группа, ҳалқа ва майдон каби вектор фазолар учун ҳам қисм фазо тушунчасини киритиш мумкин.

1-таъриф. $\mathcal{P}$ майдон устида аниқланган V вектор фазонинг бирор L қисм тўплами V да аниқланган алгебраик амалларга нисбатан вектор фазосини ташкил этса, L га V фазонинг *қисм фазоси* дейилади.

Теорема. *V вектор фазонинг бирор L қисм тўплами қисм фазо бўлиши учун, қуйидаги иккита шартнинг бажарилиши зарур ва етарли:*

а) $(\forall\bar{x}, \bar{y}\in L)\ \bar{x}-\bar{y}\in L$;

б) $(\forall\bar{x}\in L, \forall\alpha\in\mathcal{P})\ \alpha\bar{x}\in L$.

Исботи. Зарурлиги. L вектор фазо бўлса, унда а) ва б) шартларнинг бажарилиши равшан (вектор фазо таърифига биноан). Бундан ташқари $L\subset V$ экани берилган. Шунинг учун L қисм фазодир.

Етарлилиги. а) ва б) шартлар ўринли бўлсин. Унда

$\bar{x}\in L$ эканлигидан $\bar{x}-\bar{x}=\bar{0}\in L$ эканлиги келиб чиқади. Сўнгра $\bar{0}\in L$ ва $\bar{x}\in L$ эканлигига ва а) шартга асосан $\bar{0}-\bar{x}=-\bar{x}\in L$ бўлади. Энди $\bar{x}, \bar{y}\in L$ бўлса, $-\bar{y}\in L$ ҳамда яна а) шартга асосан $\bar{x}-(-\bar{y})=\bar{x}+\bar{y}\in L$ бўлади.

Шундай қилиб, $L\subset V$ тўпламда вектор фазонинг барча шартлари (қолганларини текшириб кўринг) бажарилади. Шунинг учун L тўплам V фазонинг қисм фазосидир.

V вектор фазонинг бир нечта қисм фазолари кесишмаси яна қисм фазо бўлади. (Исбот қилинг.)

Энди V вектор фазо векторларининг бирор A тўпламини оламиз. Шу A тўпламни ўзида сақловчи барча қисм фазолар кесишмаси $\subset$ муносабати бўйича энг кичик қисм фазо бўлади. Бошқача қилиб айтсак, $A\subset L_1$, $A\subset L_2$, $A\subset L_n$ бўлиб, $L=\prod_{i=1}^{n} L_i$ бўлса, L қисм фазо A ни ўз ичига олувчи энг кичик қисм фазо бўлади. Ана шу фазога A тўплам векторларига тортилган чизиқли қобиқ дейилади. Биз бу тушунчага кейинроқ яна қайтамиз.

V фазонинг ўзи ва $\{0\}$ тўпламлар V фазонинг қисм фазосидир. Бу икки фазо одатда V нинг *хос* қисм фазолари, қолган қисм фазолар эса V нинг *хосмас* қисм фазолари деб аталади.

Мисоллар. 1. $\mathcal{P}$ майдон устидаги даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳадларнинг V фазосига тегишли, даражалари $m\leqslant n$ шартни қаноатлантирувчи $F(x)$ кўпҳадлардан иборат W тўплам V нинг қисм фазосини ифодалайди.

Ҳақиқатан, $\forall F(x),\ \Phi(x)\in W$ учун дар$F(x)\leqslant m\leqslant n$ ва дар $\Phi(x)\leqslant m$ бўлгани сабабли $F(x)+\Phi(x)\in W$ ва $\alpha F(x)\in W$ бўлади, чунки дар$(F(x)+\Phi(x))\leqslant m\leqslant n$ ва дар $F(x)\leqslant m\leqslant n$. Бунда дар $f(x)$ деганда $f(x)$ нинг даражаси тушунилади.

2. Бир, икки ва уч ўлчовли векторларнинг R^1, R^2, R^3 фазолари учун $R^1\subset R^2\subset R^3$ муносабатлар ўринлидир.

Машқлар

1. $\boldsymbol{R}^+$ — мусбат ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Бу тўплам элементлари учун қўшиш ва $x\in\boldsymbol{R}$ ни $\lambda\in R$ га кўпайтириш амалларини қуйидагича киритамиз:

а) $(\forall x,\ y\in\boldsymbol{R}^+)\ x+y\rightleftarrows x\cdot y$;

б) $(\bar{x}\in\boldsymbol{R}^+,\ \lambda\in R)\ \lambda\bar{x}\rightleftarrows x^{\lambda}$

1) $\boldsymbol{R}^+$ нинг вектор фазо эканлигини исботланг;

2) $\boldsymbol{R}^+$ нинг бирлик ва $x\in\boldsymbol{R}^+$ га қарама-қарши элементлари қандай кўринишга эга?

2. $<C, +, -, 0, 1>$ чизиқли фазо (C — комплекс сонлар майдони устида) учун қисм фазо бўладиган вектор фазодан бир нечтасини ёзинг.

3. R_3 фазода бирор текисликка параллел бўлган барча векторлар тўплами чизиқли фазо бўладими?

4. C ва Q тўпламлар берилган бўлиб, «+» иккита комплекс сонни қўшиш, ω_λ эса $z = a+bi$ комплекс сонни $\lambda \in Q$ га кўпайтириш бўлганда $<C, +, -, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in Q\}>$ алгебра Q нинг устидаги чизиқли фазо бўладими?

40-§. ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ЧИЗИҚЛИ БОҒЛАНИШИ

Қуйидаги иккита векторни олайлик:

$$\bar{a}_1 = (1, 2, -1), \quad \bar{a}_2 = (2, 4, -2).$$

Агар бу векторларнинг биринчисини —2 га кўпайтириб, иккинчи векторга қўшсак, $-2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{0}$ вектор ҳосил бўлади.

1-таъриф. $\mathcal{P}$ сонлар майдони устида қурилган V вектор фазонинг чекли сондаги

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad , \bar{a}_k \tag{1}$$

векторлари учун камида биттаси нолдан фарқли шундай α_1, α_2, $\quad \alpha_k$ сонлар топилсаки, улар учун ушбу

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \cdot \quad . + \alpha_k\bar{a}_k = \bar{0} \tag{2}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда (1) система чизиқли боғланган система дейилади. Агар (2) тенглик фақат, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ бўлгандагина бажарилса, у ҳолда (1) система чизиқли *эркли (боғланмаган) система* дейилади.

2-таъриф. Агар исталган $k_i (i = \overline{1, m})$ сонлар учун

$$\bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \quad . + k_m\bar{a}_m \tag{3}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\bar{a}$ вектор $\bar{a}_i$ ($i = \overline{1, m}$) векторлар орқали чизиқли ифодаланади ($\bar{a}$ вектор $\bar{a}_i$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат) дейилади.

$\bar{a} = (6,4,4)$ вектор $\bar{a}_1 = (1,2,3)$, $\bar{a}_2 = (3,2,1)$ ва $\bar{a}_3 = (1,-2,-3)$

векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат. Ҳақиқатан, $2\bar{a}_1 + 1\cdot\bar{a}_2 + 1\cdot\bar{a}_3 = \bar{a}$ тенглик ўринли, чунки

$$2\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = 2(1,2,3) + (3,2,1) + (1, -2, -3) = (6, 4,4) = \bar{a}.$$

V фазодаги чекли векторлар системасининг чизиқли боғланиши қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. (1) векторлар системасининг: а) камида битта вектори ноль вектордан иборат бўлса; б) қандайдир иккита вектори пропорционал бўлса, бу система чизиқли боғланган бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан, агар $\bar{a}_k=\bar{0}(1\leqslant k\leqslant m)$ десак, (1) системанинг k-векторини $\alpha\neq 0$ га, қолган векторларини эса нолларга кўпайтирсак, $0\cdot\bar{a}_1+0\cdot\bar{a}_2+\quad+\alpha\cdot\bar{0}+\quad+0\cdot\bar{a}_m=\bar{0}$ бўлади. Энди

$$\bar{a}_i=\beta\bar{a}_j \qquad (4)$$

бўлиб, бу ерда $\beta\neq 0$ бўлсин.

Бундай ҳолда (1) системанинг i-векторини 1 га, j-векторини эса $-\beta$ га, қолган векторларни эса 0 га кўпайтириб, натижаларни қўшсак, (4) га асосан $0\cdot\bar{a}_1+.\ .+0\cdot\bar{a}_{i-1}+1\cdot\bar{a}_i+0\cdot\bar{a}_{i+1}+.\ .+(-\beta\bar{a}_j)+\quad+0\cdot\bar{a}_m=\bar{0}$ га эришамиз.

2-хосса. Агар (1) система чизиқли боғланган бўлса, исталган $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \quad \bar{b}_k$ система учун

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad \bar{a}_m, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \quad ,\bar{b}_k \qquad (5)$$

система ҳам чизиқли боғланган бўлади.

Исботи. (1) система чизиқли боғланган бўлганлиги туфайли $\exists\alpha_i\neq 0$ учун $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\quad+\alpha_m\bar{a}_m=\bar{0}$ тенглик бажарилади. У ҳолда $\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\quad.+\alpha_m\bar{a}_m+0\cdot\bar{b}_1+0\cdot\bar{b}_2+.\quad+0\cdot\bar{b}_m=\bar{0}$ тенглик ўринли бўлганидан (5) система ҳам чизиқли боғлангандир.

3-хосса. Берилган *V* фазода (1) система чизиқли боғланмаган бўлса, унинг ҳар қандай қисм системаси (система бўлаги) ҳам чизиқли боғланмаган бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик,

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad \bar{a}_k\ (1\leqslant k\leqslant m) \qquad (6)$$

система (1) нинг қисми бўлиб, у чизиқли эркли бўлмасин, яъни (5) система (1) чизиқли боғланган системани ифодаласин. Унда 2-хоссага асосан $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad , \bar{a}_k, \bar{a}_{k+1}, \quad \bar{a}_m$, яъни (1) система ҳам чизиқли боғланган бўлади. Бу эса берилган хосса шартига зид. Демак, фаразимиз нотўғри.

3-таъриф. V фазонинг (2) базис векторлари учун (3) тенглик ўринли бўлса, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ кортежга $\overline{a}$ векторнинг (2) базисга нисбатан *координаталар сатри* дейилади.

Биз кейинроқ координаталар сатрини ҳар қандай вектор учун (берилган базисга нисбатан) ягоналигини кўрсатамиз.

Агар 2-таърифни қаноатлантирувчи (1) система чекли бўлмаса, у ҳолда бундай вектор фазога чексиз ўлчовли вектор фазо деб аталади.

(1) система V нинг базиси бўлса, V фазо k ўлчовли фазо дейилади. V фазонинг ўлчови $\dim V$ орқали белгиланади.

4-таъриф. Чекли векторлар системасининг ранги деб ундаги чизиқли боғланмаган векторларнинг максимал сонига айтилади.

1-теорема. *R^n фазонинг исталган $n+1$ та вектори ўзаро чизиқли боғланган бўлади.*

Исботи. $\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,$ $\overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ векторлар системаси чизиқли боғланмаган бўлади. Ҳақиқатан, $\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ вектор ноль векторни ифодалаши учун $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлиши керак. Энди R^n нинг исталган $n+1$ та вектори ортлар орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатамиз.

Исталган ноль бўлмаган $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ векторни оламиз. Юқорида кўриб ўтганимиздек $\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{e}_n$ бўлади. Бундан $\overline{a} = -\alpha_1\overline{e}_1 - \alpha_2\overline{e}_2 - \ldots - \alpha_n\overline{e}_n = \overline{0}$ келиб чиқади. Охирги тенглик $n+1$ та $\overline{a}, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ векторнинг чизиқли боғланган эканлигини кўрсатади. Натижада $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ ортлар R^n арифметик фазонинг базисини ташкил этади.

2-теорема. *V вектор фазонинг ихтиёрий вектори (2) базис векторлар системаси орқали ягона усулда чизиқли ифодаланади.*

Исботи. V чизиқли фазода (2) система базис бўлса, унда базиснинг таърифига асосан, исталган $n+1$ та вектор чизиқли боғланган бўлади. Демак, камида биттаси нолдан фарқли шундай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ сонлар мавжудки, улар учун

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n}+\alpha_{n+1}\overline{x_i}=\overline{0}\quad (i=\overline{1,k})\qquad (3')$$

тенглик бажарилади. Ўз-ўзидан маълумки, (3′) тенгликда $\alpha_{n+1}\neq 0$, акс ҳолда

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+.\quad.+\alpha_n\overline{a_n}=\overline{0}\qquad (4)$$

бўлиб, (4) тенглик (2) системанинг базис эканлигига зид келади. (3′) тенгликнинг иккала томонини α_{n+1} га бўлиб ва $(n+1)$- ҳаддан бошқа ҳадларни қарама-қарши ишора билан ўнг томонга ўтказиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\overline{x_i}=h_1\overline{a_1}+h_2\overline{a_2}+\qquad+h_n\overline{a_n}\qquad (5)$$

(5) да $h_k=-\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}$ $(k=\overline{1,n})$ бўлади.

Энди (5) чизиқли ифодаланишнинг бир қийматли (ягона) эканлигини исботлаймиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни $\overline{x_i}$ вектор учун (5) дан фарқли камида яна битта

$$\overline{x_i}=\beta_1\overline{a_1}+\beta_2\overline{a_2}+.\quad.+\beta_n\overline{a_n}\qquad (6)$$

чизиқли ифодаланиш мавжуд бўлсин.

(5) тенгликдан (6) ни ҳадлаб айирамиз. У ҳолда

$$(h_1-\beta_1)\overline{a_1}+(h_2-\beta_2)\overline{a_2}+\quad..+(h_n-\beta_n)\overline{a_n}=\overline{0}\qquad (7)$$

тенглик ҳосил бўлади. (2) векторлар системаси чизиқли боғланмаган бўлгани туфайли (7) тенглик фақат ва фақат барча коэффициентлар нолга тенг бўлгандагина бажарилади. Демак, $h_k=\beta_k(k=\overline{1,n})$ тенгликлар ўринли. Теорема исбот бўлди.

Шундай қилиб, R^n фазо чексиз кўп векторлар системаларига эга бўлиб, уларнинг ҳар бири n та ўзаро чизиқли боғланмаган векторлар системасидан иборат экан.

Эслатма. Бу китобда кўпроқ чекли ўлчовли фазолар билан шуғулланамиз. Чекли фазонинг n ўлчови бу фазо базисини ташкил этувчи векторлар сонига тенглигини кўрдик. Алгебрада яна чексиз ўлчовли фазолар ҳам қаралади. Чексиз ўлчовли фазонинг ҳар қандай базиси ҳам чексиздир, яъни чексиз кўп чизиқли боғланмаган векторлардан тузилган системадир.

Масалан, R майдон устидаги $f(x)$ кўпҳадлар фазоси чексиз ўлчовли фазодан иборат. $1,\ x,\ x^2,\qquad,\ x^n,$ система бу фазонинг базисини тасвирлайди.

Машқлар

1. (0, 1, 1) (1, 0,1), (1, 1, 0) векторлар системасининг рангини топинг.

2. L_1 ва L_2 лар R^n нинг қисм фазолари бўлиб, $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ бўлса, $\dim L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$ тенглик ўринли бўладими?

3. $\overline{a}, \overline{b}$ ва $\overline{c}$ векторлар системаси R^3 нинг базиси бўлганда $\overline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \overline{c}, \overline{b} + \overline{c}$ векторлар системаси ҳам базис бўлишини исботланг.

4. $\overline{a}_1 \ \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k, \quad , \overline{a}_s$ система V фазонинг базиси бўлганда $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad , \alpha \overline{a}_k, \quad , a_s$ система ҳам V нинг базиси эканлигини исботланг (бу ерда $\alpha \neq 0$ скаляр миқдор).

42- §. Векторлар системасининг эквивалентлиги

R^n фазо векторларининг қуйидаги иккита системаси берилган бўлсин:

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad , \overline{a}_r, \tag{1}$$

$$\overline{b}_1, \overline{b}_2, \quad \overline{b}_s.$$

1- таъриф. (2) системанинг ҳар бир b_i вектори (1) система орқали чизиқли ифодаланса, (2) *система* (1) *система орқали чизиқли ифодаланади* дейилади.

Бирор системанинг иккинчи бир система орқали чизиқли ифодаланиш муносабати транзитивдир. Ҳақиқатан, учинчи

$$\overline{c}_1, \overline{c}_2, \quad \overline{c}_t \tag{3}$$

система (2) орқали чизиқли ифодаланади деб фараз қилсак, ушбу тенгликлар бажарилади:

$$\overline{b}_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \overline{a}_j \quad (i = \overline{1, s}), \tag{4}$$

$$\overline{c}_k = \sum_{i=1}^{s} \beta_{ki} \overline{b}_i \quad (k = \overline{1, t}). \tag{5}$$

$\overline{b}_i$ нинг (4) даги ифодасини (5) га қўйиб, қуйидагига келамиз:

$$\overline{c}_k = \sum_{i=1}^{s} \beta_{ki} \left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \overline{a}_j \right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{s} \beta_{ki} \alpha_{ij} \right) \overline{a}_j = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{ki} \overline{a}_j,$$

$$\overline{c}_k = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{kj} \overline{a}_j.$$

Бу тенглик (3) системанинг (1) система орқали чизиқли ифодаланишидир.

Шундай қилиб, (3) система (2) орқали, (2) эса (1) орқали чизиқли ифодаланса, (3) система (1) орқали чизиқли ифодаланади.

2-таъриф. Иккита векторлар системасидан биринчиси иккинчиси орқали ва аксинча, иккинчиси биринчиси орқали чизиқли ифодаланса, бундай векторлар системаларига *эквивалент векторлар системалари (эквивалент системалар)* дейилади.

Векторлар системаларининг эквивалентлик муносабати ҳам транзитивдир, чунки (1) ва (2)лар ўзаро, (2) ва (3) лар ўзаро эквивалент бўлса, у ҳолда (1) система (3) системага эквивалентдир.

1- теорема. Агар $\overline{c}$ вектор (1) система орқали чизиқли ифодаланса ва (1) система (2) системага эквивалент бўлса, у ҳолда $\overline{c}$ вектор (2) система орқали чизиқли ифодаланади.

Исботи. $\overline{c} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{a}_i$ ва $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} \overline{b}_j$ тенгликлардан

$$\overline{c} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} \overline{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} \alpha_i \left(\sum_{i=1}^{r} \beta_{ij}\right) \overline{b}_j = \sum_{j=1}^{s} \delta_i \overline{b}_j,\ \overline{c} = \sum_{j=1}^{s} \delta_j \overline{b}_j$$

тенгликка келамиз. Бунда α_i, β_{ij} ва δ_j лар скаляр миқдорлар, яъни $\mathcal{P}$ майдоннинг элементларидир.

2- теорема. *(1) система чизиқли эркли бўлиб, у (2) система орқали чизиқли ифодаланса, (1) нинг векторлари сони (2) нинг векторлари сонидан катта бўлмайди, яъни $r \leqslant s$ тенгсизлик бажарилади.*

Исботи. $r > s$ деб фараз қилайлик. Теорема шартига кўра

$$\overline{a}_i = \mu_{i1} \overline{b}_1 + \mu_{i2} \overline{b}_2 + \cdot \quad + \mu_{is} \overline{b}_s = \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} \overline{b}_j. \qquad (6)$$

Координаталари μ_{i1}, μ_{i2}, , μ_{is} сонлардан иборат бўлган r та s ўлчовли қуйидаги векторларни оламиз:

$$\overline{c}_i = (\mu_{i1}, \mu_{i2}, \quad , \mu_{is}) \ (i = \overline{1, r}).$$

$r > s$ бўлгани сабабли R^s фазода бу векторлар чизиқли боғланган. Демак, камида биттаси нолдан фарқли $k_1, k_2, \ldots, k_s$ сонлар мавжуд бўлиб, улар учун $\sum_{i=1}^{r} k_i\bar{c}_i = \sum_{i=1}^{r} k_i(\mu_{i1},\mu_{i2},$

$\mu_{is}) = \sum_{i=1}^{r}(k_i\mu_{i1}, k_i\mu_{i2} \qquad , k_i\mu_{is}) = \bar{0}$ тенглик бажарилади. Бунда векторларнинг йиғиндиси $\bar{0}$ вектор ва бу векторлар чизиқли боғланмаган бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\mu_{i1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} k_i\mu_{i2} = 0, \ \ldots \ , \sum_{i=1}^{r} k_i\mu_{is} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\mu_{ij} = 0 \ (j = \overline{1, s}) \tag{7}$$

бўлади.

(6) ва (7) ларга асосан, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\bar{a}_i = \sum_{i=1}^{r} k_i\left(\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}\bar{b}_j\right) = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r} k_i\mu_{ij}\right)\bar{b}_j = \sum_{j=1}^{s}(0\cdot\bar{b}_j) = \bar{0}.$$

Бу тенглик эса (1) системанинг чизиқли эрклилигига зид келади. Шу сабабли $r \leqslant s$ тенгсизлик бажарилади.

1-*натижа*. Иккита эквивалент (1) ва (2) векторлар системасининг ҳар бири чизиқли эркли система бўлса, уларнинг векторлари сони тенг, яъни $r = s$ бўлади.

Исботи. 1-теоремага асосан, бир томондан $r \leqslant s$ ва иккинчи томондан $s \leqslant r$ бўлади. Бундан $r = s$ келиб чиқади.

2-*натижа*. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad , \bar{a}_m$ системанинг максимал r ва s та векторларидан тузилган иккита чизиқли боғланмаган қисм системасини олсак, $r = s$ бўлади.

Исботи. Берилган

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \qquad , \bar{a}_m \tag{8}$$

системанинг максимал r та векторидан тузилган битта чизиқли эркли қисм системасини

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \qquad , \bar{a}_r (r \leqslant m) \tag{9}$$

дейлик.

(8) системанинг ҳар бир вектори (9) орқали чизиқли ифодаланади. Аксинча, (9) система (8) нинг чизиқли комбина-

циясидан иборат, чунки (9) нинг ҳар бир $\bar{a}_i(i=\overline{1,r})$ вектори (8) орқали қуйидагича чизиқли ифодаланади:

$$\bar{a}_i = 0\cdot\bar{a}_1 + 0\cdot\bar{a}_2 + \quad . + 0\cdot\bar{a}_{i-1} + 1\cdot\bar{a}_i +$$
$$+ 0\cdot\bar{a}_{i+1} + \quad + 0\cdot\bar{a}_m.$$

Шундай қилиб, (8) ва (9) системалар эквивалент системалардир.

(8) нинг максимал s та векторидан тузилган иккинчи чизиқли эркли қисм системасини

$$\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \quad , \bar{a}_{is} \ (s \leqslant m) \tag{10}$$

орқали белгиласак, юқоридаги муҳокамага асосан, (8) ва (10) системалар, у ҳолда (9) ва (10) системалар эквивалент системалар бўлиб, 1- натижага мувофиқ, $r = s$ бўлади. Демак, $r = m$ шартда $s = m$ бўлиб, (9) ва (10) лар битта системани билдиради.

3- натижа. Эквивалент бўлган

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2 \quad , \bar{a}_s, \tag{11}$$

$$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \quad , \bar{b}_t \tag{12}$$

векторлар системаларининг ранглари тенг.

Исботи. (11) ва (12) ларнинг k ва l рангларини аниқловчи чизиқли боғланмаган қисм системалари

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2 \quad , \bar{a}_k \ (k \leqslant s), \tag{13}$$

$$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \quad , \bar{b}_l \ (l \leqslant t) \tag{14}$$

бўлсин. (11) ва (12) системалар — эквивалент.

2- теоремага кўра, (11) система (13) орқали чизиқли ифодаланади, (13) нинг ҳар бир $\bar{a}_i$ вектори эса (11) орқали $\bar{a}_i = 0\cdot\bar{a}_1 + \quad + 1\cdot\bar{a}_i + .\ . + 0\cdot\bar{a}_s$ кўринишда ифодаланади. Худди шунга ўхшаш (12) ва (14) системаларнинг эквивалентлиги кўрсатилади. Эквивалентлик муносабати транзитив бўлгани сабабли, (13) ва (14) системалар эквивалентдир. У ҳолда 1- натижага асосан $k = l$ эканлиги келиб чиқади.

43- §. ИЗОМОРФ ЧИЗИҚЛИ ФАЗОЛАР

Айтайлик, $\mathscr{P}$ майдон устидаги чекли ўлчовли иккита V ва V' чизиқли фазолар берилган бўлсин.

Таъриф. Агар V ва V' чизиқли фазолар орасида шундай φ акслантириш манжуд бўлиб, у V нинг ҳар бир $\bar{x}$ векторини V' нинг битта $\bar{x}'$ векторига (шу билан бирга V нинг ҳамма векторларини V' нинг ҳамма векторларига) ўзаро бир қийматли акслантирса ва қуйидаги шартлар бажарилса, V ва V' фазолар ўзаро *изоморф чизиқли фазолар* дейилади:

1) $\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}'$ ва $\bar{y} \xrightarrow{\varphi} \bar{y}'$ бўлса, $\bar{x} + \bar{y} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}' + \bar{y}'$ бўлади. Бунда $\bar{x} + \bar{y} \in V$, $\bar{x}' + \bar{y}' \in V' (\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \bar{x}', \bar{y}' \in V')$;

2 $\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}'$ бажарилганда $\alpha\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \alpha\bar{x}'$ бажарилади. Бунда $\alpha\bar{x} \in V$, $\alpha\bar{x}' \in V'$ $(\forall \alpha \in \mathscr{P}, \bar{x} \in V, \bar{x}' \in V')$.

V ва V' чизиқли фазоларнинг изоморфлиги $\cong$ орқали белгиланади.

***Теорема**. $\mathscr{P}$ майдон устидаги n ўлчовли исталган иккита V ва V' чизиқли фазолар изоморфдир.*

Исботи. V ва V' ларнинг базисларини мос равишда

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \quad , \bar{e}_n, \tag{1}$$

$$\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \quad , \bar{e}'_n \tag{2}$$

орқали белгилайлик ва V нинг ҳар бир $\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + + \quad . + \alpha_n\bar{e}_n$ векторига V' нинг мос координаталари тенг бўлган $\bar{x}' = \alpha_1\bar{e}'_1 + \alpha_2\bar{e}'_2 + \quad . + \alpha_n\bar{e}'_n$ векторини мос қўямиз:

$$\bar{x} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \quad . + \alpha_n\bar{e}_n \xrightarrow{\varphi} \bar{x}' = \alpha_1\bar{e}'_1 + \alpha_2\bar{e}'_2 + . \quad . + + \alpha_n\bar{e}'_n, \tag{3}$$

бунда $\alpha_i \in \mathscr{P}$. Бу акслантириш ўзаро бир қийматлидир, чунки яна

$$\bar{y} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \quad + \beta_n\bar{e}_n \xrightarrow{\varphi} \bar{y}' = = \beta_1\bar{e}'_1 + \beta_2\bar{e}'_2 + \quad . + \ldots + \beta_n\bar{e}'_n \tag{4}$$

акслантиришни олиб, $\bar{x} = \bar{y}$ десак, $\alpha_i = \beta_i (i = \overline{1, n})$ келиб чиқади. У ҳолда $\bar{x}' = \bar{y}'$ бўлади.

(3) акслантириш изоморфизм таърифининг иккала шартини қаноатлантиради. Ҳақиқатан.

$$\bar{x} + \bar{y} = (\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + . \quad . + \alpha_n\bar{e}_n) + +(\beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \quad + \beta_n\bar{e}_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_2} + \cdot \quad + (\alpha_n + \beta_n)\, e_n \xrightarrow{\varphi}$$

$$\rightarrow (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_1'} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_2'} + \cdot \quad + (\alpha_n + \beta_n)\overline{e_n'} =$$

$$= (\alpha_1 \overline{e_1'} + \alpha_2 \overline{e_2'} + \quad + \alpha_n \overline{e_n'}) + (\beta_1 \overline{e_1'} + \beta_2 \overline{e_2'} + \ldots + \beta_n \overline{e_n'}) =$$

$$= \overline{x'} + \overline{y'}$$

$$\overline{x} + \overline{y} \xrightarrow{\varphi} \overline{x'} + \overline{y'}, \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x'} + \overline{y'}$$

$\forall\, \alpha \in \mathscr{P}$ учун $\alpha\, \overline{x} = \alpha\alpha_1 \overline{e_1} + \alpha\alpha_2\, \overline{e_2} + . \quad . + \alpha\alpha_n \overline{e_n} \xrightarrow{\varphi}$

$$\rightarrow \alpha\alpha_1 \overline{e_1'} + \alpha\alpha_2 \overline{e_2'} + \quad . + \alpha\alpha_n \overline{e_n'} = \alpha\overline{x'}, \quad \alpha\overline{x} = \alpha\overline{x'}.$$

Шундай қилиб, $V_n \cong V_n'$ бўлади. (3) акслантиришдан қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\overline{0} = 0 \cdot \overline{e_1} + 0 \cdot \overline{e_2} + \quad + 0 \cdot \overline{e_n} \xrightarrow{\varphi}$$

$$\rightarrow 0 \cdot \overline{e_1'} + 0 \cdot \overline{e_2'} + \quad .. + 0 \cdot \overline{e_n'} = \overline{0}',$$

$$\overline{0} \xrightarrow{\varphi} \overline{0}'.$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdot \quad = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \quad = \alpha_n = 0, \quad \alpha_i = 1$$

қийматларда: $\overline{x} = \overline{e_i} \xrightarrow{\varphi} \overline{x'} = \overline{e_i'}$.

Демак, (1) базис векторлари мос равишда (2) базис векторларига акслanади.

Мисол. Ҳақиқий сонлар майдони устидаги векторларнинг уч ўлчовли R^3 фазоси ва даражалари 2 дан юқори бўлмаган $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ кўпҳадларнинг уч ўлчовли R_3' фазолари изоморфдир.

Буни исботлаш учун $\overline{e_i} \xrightarrow{\varphi} \overline{x^{i-1}}$ $(i = 1, 2, 3)$ акслантиришни ўрнатиш кифоя.

$$\overline{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{\varphi} f(x),$$

$$\overline{b} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \xrightarrow{\varphi} g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

У ҳолда

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_0 \overline{e_1} + \alpha_1 \overline{e_2} + \alpha_2 \overline{e_3}) + (\beta_0 \overline{e_1} + \beta_1 \overline{e_2} + \beta_2 \overline{e_3}) =$$

$$= (\alpha_0 + \beta_0)\, \overline{e_1} + (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_2} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_3} \xrightarrow{\varphi} (\alpha_0 + \beta_0) +$$

$$+ (\alpha_1 + \beta_1)x + (\alpha_2 + \beta_2)x^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) +$$

$$+ (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2) = f(x) + g(x),$$

$$\bar{a} + \bar{b} \xrightarrow{\varphi} f(x) + g(x)$$

ва

$$\alpha \bar{a} = \alpha\alpha_0 \bar{e}_1 + \alpha\alpha_1 \bar{e}_2 + \alpha\alpha_2 \bar{e}_3 \xrightarrow{\varphi} \alpha\alpha_0 + \alpha\alpha_1 x + \alpha\alpha_2 x^2 = \alpha f(x),$$

$$\alpha \bar{a} \xrightarrow{\varphi} \alpha f(x)$$

бўлади. Бунда α_0, α_1, α_2, α лар ҳақиқий сонлар.

44- § ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ЧИЗИҚЛИ ҚОБИҒИ

Биз қисм фазолар темасида V_n чизиқли фазонинг чекли сондаги қисм фазолари кесишмаси $L = \bigcap\limits_{i=1}^{n} L_i$ яна V нинг қисм фазоси бўлишини айтиб ўтган эдик, L қисм фазо бўлгани учун у

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ \ldots, \bar{a}_n \qquad (1)$$

вектор лар системаси билан биргаликда уларнинг

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n \quad (\forall \lambda_i \in \mathcal{P}) \qquad (2)$$

кўринишдаги барча чизиқли комбинацияларини ҳам ўзида сақлайди. (2) кўринишдаги ифодани $\mathcal{P}$ майдон устидаги V чизиқли фазонинг *чизиқли қобиғи* дейилади.

Биз бундан кейин бу чизиқли қобиқни $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n)$ орқали белгилаймиз ва унинг баъзи бир хоссалари билан қуйида танишиб ўтамиз.

1- теорема. *Агар*

$$\bar{b}_1, \bar{b}_2, \qquad \bar{b}_m \qquad (3)$$

системанинг ҳар бир вектори (1) *система орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда*

$$L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \qquad \bar{b}_m) \subset L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \qquad \bar{a}_n) \qquad (4)$$

бўлади.

Исботи. Фараз қилайлик,

$$\bar{b}_k = \alpha_{k1}\bar{a}_1 + \alpha_{k2}\bar{a}_2 + \qquad + \alpha_{kn}\bar{a}_n \quad (k = \overline{1, m}) \qquad (5)$$

бўлсин. Бундай ҳолда $L(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \quad ., \overline{b}_m)$ нинг ихтиёрий $\overline{x}$ вектори

$$\overline{x} = \beta_1\overline{b}_1 + \beta_2\overline{b}_2 + \qquad + \beta_m\overline{b}_m = \beta_1(\alpha_{11}\overline{a}_1 +$$
$$+ \alpha_{12}\overline{a}_2 + \qquad + \alpha_{1n}\overline{a}_n) + \beta_2(\alpha_{21}\overline{a}_1 +$$
$$+ \alpha_{22}\overline{a}_2 + \qquad + \alpha_{2n}\overline{a}_n) + \qquad + \beta_m(\alpha_{m_1}\overline{a}_1 +$$
$$+ \alpha_{m_2}\overline{a}_2 + . \qquad + \alpha_{mn}\overline{a}_n) \in L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \qquad \overline{a}_n)$$

бўлади. Бу эса $L(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \qquad \overline{b}_m) \subseteq L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \qquad \overline{a}_n)$ эканини билдиради.

Бўш тўпламнинг чизиқли қобиғи $\{0\}$ тўпламдан иборат деб олинади.

2-теорема. *Агар (1) системанинг ранги r га тенг бўлса, $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad , \overline{a}_n)$ чизиқли қобиқ r ўлчовли бўлади.*

Исботи. (1) системанинг рангини аниқловчи қисм системани

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \qquad \overline{a}_r \tag{5}$$

орқали белгилаймиз. Унда базиснинг таърифига асосан (1) системанинг исталган вектори (5) орқали чизиқли ифодаланади. У ҳолда 1-теоремага асосан, $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad , \overline{a}_r, \quad , \overline{a}_n) \subseteq L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, . . \quad , \overline{a}_r)$ бўлади ҳамда $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad , \overline{a}_r, \overline{a}_{r+1}, \quad , \overline{a}_n)$ да исталган $r+k(k=\overline{1, n-r})$ та вектор чизиқли боғланган бўлгани туфайли $L(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad , \overline{a}_n)$ ҳам r ўлчовли қисм фазодир.

Мисоллар. 1. $\mathscr{P}$ сонлар майдони устида аниқланган, даражалари n дан катта бўлмаган $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, \quad)$ кўпҳадларнинг V_{n+1} фазосидан $M = \{1, x, x^2, \quad , x^m\}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ системани оламиз. Бу системадан тузилган $L(M)$ чизиқли қобиқ элементлари $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ $(a_k \in \mathscr{P}, k = \overline{1, n})$ кўринишдаги кўпҳадлардан тузилган қисм фазони ифодалайди. Агар $m < n$ бўлса, $L(M) \subset V_{n+1}$ ва $m = n$ бўлганда эса $L(M) = V_{n+1}$ бўлади, чунки иккинчи ҳолда M система V_{n+1} фазонинг базисини ташкил этади.

2. $\overline{a}, \overline{b}$ ва $\overline{c}$ векторлар (бу ерда $\overline{a} \neq \overline{0}$) битта тўғри чизиқда ётса $L(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = L(\overline{a})$ бўлади.

3. $\bar{a}$, $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ векторлар компланар бўлмаган векторлар бўлиб, $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ бўлса, $L(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})=L(\bar{a}, \bar{b})$ бўлади (исботланг).

Машқлар

1. Агар $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m, \bar{b}$ система чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ система чизиқли эркли бўлганда ва фақат шундагина $\bar{b}\in L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m)$ эканлигини исботланг.

2. Агар $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k\in L(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$ ва $k>m$ бўлса, у ҳолда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ системанинг чизиқли боғлиқ эканлигини кўрсатинг.

45-§. ҚИСМ ФАЗОЛАРНИНГ ЙИҒИНДИСИ ВА ТЎҒРИ ЙИҒИНДИСИ

Айтайлик, A чизиқли фазо ва $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лар унинг қисм фазолари бўлсин. Маълумки, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i=B$ ҳам A чизиқли фазонинг қисм фазоси бўлади. Қисм фазолар кесишмаси тушунчаси орқали уларнинг йиғиндиси ва тўғри йиғиндиси тушунчалари мавжуд.

1-таъриф. $\bar{x}_1\in A_1, \bar{x}_2\in A_2, \ldots, \bar{x}_n\in A_n$ бўлганда

$$\bar{x}_1+\bar{x}_2+\ldots+\bar{x}_n \tag{1}$$

кўринишдаги барча йиғиндилар тўпламига $A_1, A_2, \ldots, A_n$ қисм *фазолар йиғиндиси* дейилади ва у

$$A_1+A_2+\ldots+A_n \tag{2}$$

орқали белгиланади.

Мисол. A чизиқли фазо сифатида R^3 (уч ўлчовли вектор фазо) даги барча чизиқли эркли векторлар тўпламини оламиз. A_1 сифатида xOy текисликка параллел бўлган барча чизиқли эркли векторлар фазосини, A_2 сифатида xOz текисликка параллел бўлган барча чизиқли эркли векторлар фазосини оламиз. Бу ҳолда A_1 ва A_2 ларнинг йиғиндиси A фазони беради. $A_1\cap A_2$ эса Ox ўққа параллел бўлган чизиқли эркли векторлар тўпламидан иборатдир.

Ҳақиқатан, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ лар мос равишда Ox, Oy, Oz ўқларга параллел бўлган базис векторлар бўлса, A фазонинг ихтиёрий $\bar{x}$ вектори $\bar{x} = a\bar{i} + b\bar{j} + \overline{dk}$ кўринишда бўлиб, бу ерда $a\bar{i} + b\bar{j} \in A_1$, $c\bar{i} + d\bar{k} \in A_2$ бўлади.

2-таъриф. Агар (2) қисм фазонинг ҳар бир вектори ягона усулда (1) кўринишда ифодаланса, (2) йиғиндига $A_i (i = \overline{1, n})$ қисм фазоларнинг *тўғри йиғиндиси* дейилади ва у $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ орқали белгиланади.

1- теорема. *$A_i (i = \overline{1, n})$ қисм фазоларнинг ҳар бири қолган қисм фазолар йиғиндиси $A_1 + A_2 + \quad + A_{i-1} + A_{i+1} + \quad + A_n$ билан ягона ноль умумий элементга эга бўлса ва фақат шундагина (2) йиғинди $A_i (i = \overline{1, n})$ қисм фазоларнинг тўғри йиғиндиси бўлади.*

Исботи. Зарурлиги. $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \quad + \bar{x}_n \in A_1 + A_2 + \quad + A_n$ бўлиб, $\bar{x}$ вектор $\bar{y}_i \in A_i (i = \overline{1, n})$ бўлганда $\bar{x} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \quad + \bar{y}_n$ кўринишга эга бўлиб, $\bar{x}_i \neq \bar{y}_i$ бўлсин. Бундай ҳолда $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \quad + \bar{x}_n = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \quad + \bar{y}_n$ тенгликдан $\bar{x}_1 - \bar{y}_1 = (\bar{y}_2 - \bar{x}_2) + (\bar{y}_3 - \bar{x}_3) + \quad + (\bar{y}_n - \bar{x}_n) \in A_1 \cap (A_2 + A_3 + \quad + A_n)$ ни ҳосил қиламиз. $\bar{x}_1 \neq \bar{y}_1$ бўлса, $A_1 \cap (A_2 + A_3 + \quad + A_n) \neq \{0\}$ бўлади. Худди шу усулда $\bar{x}_i - \bar{y}_i = (\bar{y}_1 - \bar{x}_1) + \quad + (\bar{y}_{i-1} + \bar{x}_{i-1}) + (\bar{y}_{i+1} - \bar{x}_{i+1}) + \quad + (\bar{y}_n - \bar{x}_n) \in A_i \cap (A_1 + A_2 + \quad . + A_{i-1} + A_{i+1} + \quad + A_n)$ муносабатга биноан, $x_i \neq y_i$ бўлса, $A_i \cap (A_1 + A_2 + \quad + A_{i-1} + A_{i+1} + \quad . + A_n) \neq \{0\}$ деган хулосага келамиз. Демак, (2) тўғри йиғинди бўлмаса, $A_i \cap (A_1 + A_2 \quad + A_{i-1} + A_{i+1} + \quad . + A_n) = \{0\}$ шартлар бир вақтда бажарилмас экан.

Етарлилиги. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $A_i \cap (A_1 + A_2 + \quad + A_{i-1} + A_{i+1} + \quad + A_n) \neq \{0\}$ бўлсин. Бундай ҳолда $x \in A_1 + A_2 + \quad + A_n$ нинг (1) кўринишда ягона усулда тасвирланмаслигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, бир томондан $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \quad + \bar{x}_n$ бўлиб, яъни (1) ўринли бўлгани ҳолда, иккинчи томондан нолдан фарқли $\bar{a}_i \in A_i \cap (A_1 + A_2 + \quad . + A_{i-1} + A_{i+1} + . \quad + A_n)$ вектор учун шундай $\bar{a}_1 \in A_1$, $\bar{a}_2 \in A_2$, $\quad , \bar{a}_{i-1} \in A_{i-1}$, $a_{i+1} \in A_{i+1}$, $\quad , a_n \in A_n$ векторларни топиш мумкинки, натижада $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \quad + \bar{x}_i + \quad + \bar{x}_n = (\bar{x}_1 + \bar{a}_1) + (\bar{x}_2 + \bar{a}_2) + \quad + (\bar{x}_{i-1} + \bar{a}_{i-1}) + (\bar{x}_i - \bar{a}_i) + \quad + (\bar{x}_n + \bar{a}_n)$ тенглик бажарилади. Бунинг учун $\bar{a}_i = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \quad + \bar{a}_{i-1} + \bar{a}_{i+1} + \quad + \bar{a}_n$ деб олиш кифоя. Демак, (2) йиғинди тўғри йиғинди бўлмайди. Теорема тўла исбот бўлди. $A_1 \oplus A_2 \oplus \quad \oplus A_n = V_n$ бўлган ҳол муҳим аҳамиятга эга. Бундай ҳолда V_n фазо A_i қисм фазоларнинг тўғри йиғиндисига ёйилган деб юритилади ҳамда $\dim V_n = \sum_{i=1}^{n} \dim A_i$ тенглик бажарилади.

Машқлар

1. Исталган R^3 фазо бир ўлчовли учта ўзаро перпендикуляр бўлган фазоларнинг тўғри йиғиндисидан иборатдир. Фазодаги ихтиёрий нуқта координаталари Ox, Oy ва Oz ўқлардаги нуқталар координаталари орқали бир қийматли усулда аниқланишини кўрсатинг.

2. R^3 да берилган учта қисм фазодан ихтиёрий иккитасининг тўғри йиғиндиси бўлган қисм фазога мисол келтиринг.

3. $\alpha, \beta, \quad, \rho \in R$ ва $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \quad, \bar{e}_n$ орт векторлар бўлганда $\{\alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + \quad + \rho \bar{e}_n\} = V_n$ тенглик ўринли бўладими?

4. Агар A чизиқли фазо A_1, A_2 қисм фазоларнинг тўғри йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда: а) $A_1 \cap A_2 = \{0\}$; б) $\dim A = \dim A_1 + \dim A_2$ эканлигини исботланг.

46-§. ЧИЗИҚЛИ КЎПХИЛЛИКЛАР

$\mathcal{P}$ майдон устидаги n ўлчовли V фазонинг W қисм фазоси ва V фазога тегишли $\bar{x}_0$ вектор берилган бўлсин. W нинг исталган $\bar{y}$ вектори учун $\bar{z} = \bar{x}_0 + \bar{y}$ кўринишдаги векторлар тўпламини H билан белгилаймиз.

1-таъриф. $\bar{x}_0 + W = \{\bar{x}_0 + \bar{y} \mid \bar{x}_0 \in V\}$ тўпламга W қисм фазонинг $\bar{x}_0$ векторга силжишидан ҳосил бўлган чизиқли кўпхиллик дейилади ва у $H = \bar{x}_0 + W$ орқали белгиланади.

Бу тенглик шуни кўрсатадики, W нинг ҳамма векторларига $\bar{x}_0$ векторни қўшсак, H нинг ҳамма $\bar{z}$ векторлари ҳосил бўлади.

1- ***теорема.*** *H кўпхиллик V нинг қисм фазосини тасвирлаши учун $\bar{x}_0 \in W$, яъни $H = W$ шарт бажарилиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлиги. H кўпхиллик қисм фазони тасвирласа, H да $\bar{0}$ ноль вектор мавжуд бўлиб, демак, қандайдир $\bar{z}$ вектор учун $\bar{z} = \bar{x}_0 + \bar{y} = \bar{0}$ бажарилади, бундан $\bar{x}_0 = -\bar{y} \in W$ келиб чиқади. У ҳолда W қисм фазо қўшиш амалига нисбатан группа эканини назарда тутиб, группанинг таърифига кўра $H = \bar{x}_0 + W = W$, $H = W$ ни ҳосил қиламиз.

Етарлилиги. $\bar{x}_0 \in W$ бажарилса, H қисм фазо экани равшан, чунки группанинг хоссасига асосан $H = \bar{x}_0 + W = W$, $H = W$ бўлади.

Натижа. H кўпхиллик V нинг қисм фазоси бўлмаслиги учун $\bar{x}_0 \notin W$ шарт бажарилиши зарур ва етарли.

Умуман, V нинг битта қисм фазосини турли $\bar{x}_0$, $\bar{x}'_0$, $\bar{x}''_0$, $\in V$ векторлар бўйлаб силжитишда турли H, H', H'', кўпхилликлар ҳосил бўлади. $\bar{x}_0 + W$ кўпхилликка тегишли ихтиёрий $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ векторларнинг айирмаси W қисм фазога тегишли бўлади. Ҳақиқатан, $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{z}$, $\bar{y} = \bar{x}_0 + \bar{z}_1$, бунда $\bar{z}$, $\bar{z}_1 \in W$ эканлигидан $\bar{x} - \bar{y} = (\bar{x}_0 + \bar{z}) - (\bar{x}_0 + \bar{z}_1) = \bar{z} - \bar{z}_0 \in W$ бўлади.

2- ***теорема.*** *Ихтиёрий иккита $\bar{x}_0 + W$ ва $\bar{y}_0 + W$ кўпхиллик умумий элементга эга бўлмайди ёки улар устма-уст тушади.*

Исботи. Айтайлик, $\bar{x}_0 + W$ ва $\bar{y}_0 + W$ кўпхилликлар умумий $\bar{x}$ элементга эга бўлсин. У ҳолда $\bar{x}_0 - \bar{x} \in W$ ва $\bar{y}_0 - \bar{x} \in W$ бўлади. Қуйидаги тенгликларни ёзамиз: $\bar{x}_0 + W = \bar{x} + ((\bar{x}_0 - x) + W)$, $\bar{y}_0 + W = \bar{x} + ((\bar{y}_0 - \bar{x}) + W)$. Бундаги $(\bar{x}_0 - \bar{x}) + W$ ва $(\bar{y}_0 - \bar{x}) + W$ қўшилувчилар W билан устма-уст тушади.

Демак, юқоридаги иккита кўпхиллик $\bar{x} + W$ кўпхилликка тенг бўлади, яъни берилган кўпхилликлар устма-уст тушади.

3- ***теорема.*** *V вектор фазонинг W ва W' қисм фазолари берилган бўлсин. У ҳолда*

$$H_1 = \bar{x}_1 + W, \quad H_2 = \bar{x}_2 + W' \tag{1}$$

кўпхилликлар устма-уст тушиши учун W ва W' лар *устма-уст тушиши ва* $\overline{x}_1-\overline{x}_2\in W$ *бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлиги. $H_1=H_2=H$ бўлсин. $\forall\,\overline{x}\in H$ векторни қуйидаги кўринишларда ёзамиз: $\overline{x}=\overline{x}_1+\overline{y}$ ва $\overline{x}=\overline{x}_2+\overline{y}'$ Бунда $\overline{y}\in W$, $\overline{y}'\in W'$ бўлиб, $\overline{x}_1+\overline{y}=\overline{x}_2+\overline{y}'$ тенгликдан

$$\overline{y}'=(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+\overline{y} \qquad (2)$$

тенглик келиб чиқади. Агар $\overline{x}$ вектор H да ўзгарса, у ҳолда $\overline{y}'$ вектор W' қисм фазода ўзгаради.

Демак, ҳар бир $\overline{y}'\in W'$ га $\overline{y}\in W$ топилиб, натижада (2) ўринли бўлади.

Хусусий ҳолда, $\overline{y}'=\overline{0}$ бўлса, у ҳолда $\overline{y}=-(\overline{x}_1-\overline{x}_2)$ бўлади. Бундан кўринадики, $\overline{x}_1-\overline{x}_2\in W$ экан.

Лекин (2) дан $W'\subseteq W$ муносабат бажарилади. Шунга ўхшаш мулоҳаза $W\subseteq W'$ муносабатга олиб келади.

Шундай қилиб, $W=W'$ ва $\overline{x}_1-\overline{x}_2\in W$

Етарлилиги. $W=W'$ ва $\overline{x}_1-\overline{x}_2\in W$, яъни $H_1=\overline{x}_1+W$, $H_2=\overline{x}_2+W'$, $\overline{x}_1-\overline{x}_2\in W$ бўлсин. Ихтиёрий $\overline{x}\in H_1$ векторни $\overline{x}=\overline{x}_1+\overline{y}$ (бунда $\overline{y}\in W$) кўринишда ёзамиз. Бундан $\overline{x}=(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+(\overline{x}_2+\overline{y})=\overline{x}_2+[(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+\overline{y}]$, $\overline{x}_1-\overline{x}_2\in W$ ва $\overline{y}\in W$ бўлгани учун ва W нинг қисм фазолигидан $(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+\overline{y}\in W$ бўлади.

Демак, $\overline{x}\in H_2$, яъни $H_1\subseteq H_2$ муносабат ўринли. Шунга ўхшаш $H_2\subseteq H_1$ ни исбот қиламиз.

Бу муносабатлардан $H_1=H_2$ тенгликка эга бўламиз.

Натижа. $H=\overline{x}_0+W$ чизиқли кўпхиллик ўлчови W қисм фазо ўлчови билан устма-уст тушади, яъни $\dim H=\dim W$ R^3 фазода тўғри чизиқлар бир ўлчовли, текисликлар эса икки ўлчовли чизиқли кўпхилликлардир.

47-§. СКАЛЯР КУПАЙТМАГА ЭГА БУЛГАН ФАЗОЛАР

Вектор фазога таъриф берганимизда биз фақатгина $\mathcal{P}$ майдон, векторлар тўплами ва аксиомалардан фойдаланган эдик. Агар вектор фазо элементлари учун уларнинг скаляр кўпайтмаси тушунчасини киритсак, ҳар хил табиатли вектор фазо ҳосил бўлади. Ҳозир шундай фазоларнинг биттаси билан танишиб ўтамиз.

Комплекс сонлар майдони устида аниқланган V векторлар фазоси берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар V фазонинг ҳар бир жуфт $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ элементларига уларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталувчи ягона $(\overline{x}, \overline{y})$ ҳақиқий сон мос қўйилган бўлиб, бу мослик учун:

1) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;

2) $(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{z}) + (\overline{y}, \overline{z})$;

3) $(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda(\overline{x}, \overline{y})$ (бу ерда λ — ихтиёрий ҳақиқий сон);

4) $(\overline{x}, \overline{x}) \geqslant 0$ ($\overline{x} = \overline{0}$ бўлса, $(\overline{x}, \overline{x}) = 0$ бўлади) аксиомалар

бажарилса, у ҳолда V *фазо скаляр кўпайтмага эга бўлган фазо* дейилади.

Юқоридаги аксиомалардан скаляр кўпайтманинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

а) $(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = (\overline{y} + \overline{z}, \overline{x}) = (\overline{y}, \overline{x}) + (\overline{z}, \overline{x}) = (\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{z})$;

б) $(\overline{x}, \lambda\overline{y}) = (\lambda\overline{y}, \overline{x}) = \lambda(\overline{y}, \overline{x}) = \lambda(\overline{x}, \overline{y})$.

2-таъриф. Агар V фазонинг исталган $\overline{x} \neq \overline{0}$ элементи учун $(\overline{x}, \overline{x}) \neq 0$ бўлса, V фазода аниқланган скаляр кўпайтма *хосмас скаляр кўпайтма* дейилади.

3-таъриф. Агар V фазонинг исталган $\overline{x}$ ва $\overline{y}$ элементлари учун $(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ бўлса, $(\overline{x}, \overline{y})$ га V да *ноль скаляр кўпайтма* дейилади.

Биз бундан сўнг фақатгина хосмас скаляр кўпайтмага эга бўлган фазолар билангина шуғулланамиз.

4-таъриф. Агар V фазонинг исталган $\overline{x} \neq \overline{0}$ вектори учун $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$ бўлса, бундай фазога *унитар фазо* дейилади.

Мисоллар. 1. Компонентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган ва узунлиги n га тенг бўлган кортежлар тўпламини R^n орқали белгилаймиз. Бу тўпламнинг ихтиёрий $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n)$ ва $\overline{y} = (\beta_1, \beta_2, \quad \beta_n)$ элементлари учун қўшиш ва $\lambda \in R$ сонга кўпайтиришни мос равишда $\overline{x} + \overline{y} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \quad , \alpha_n + \beta_n)$, $\lambda\overline{x} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \quad , \lambda\alpha_n)$ орқали киритсак, R^n чизиқли фазо бўлади.

Энди R^n да скаляр кўпайтмани $(\overline{x}, \overline{y}) = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \quad + \alpha_n \cdot \beta_n$ орқали киритсак, бу скаляр кўпайтма унитар фазонинг барча аксиомаларини қаноатлантиради (текшириб кўринг).

2. $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган барча ҳақиқий функциялар тўпламини $C[a; b]$ орқали белгилаймиз. Бу тўпламда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ векторлар учун қўшиш ва кўпайтиришни қуйидагича киритамиз: $\bar{x}=f(t)$, $\bar{y}=\varphi(t)$ бўлганда $\bar{x}+\bar{y}=f(t)+\varphi(t)$, $\lambda\bar{x}=\lambda f(t)$ бўлсин.

Агар $C[a; b]$ тўпламда $(\bar{x}, \bar{y})$ скаляр кўпайтмани $(\bar{x}, \bar{y})=\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$ кўринишда киритсак, $C[a; b]$ ҳам унитар фазо бўлади.

Битта фазонинг ўзида скаляр кўпайтмани ҳар хил усулда киритиш мумкин. Масалан, $C[a; b]$ фазода скаляр кўпайтмани $(\bar{x}, \bar{y})=\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)\psi^2(t)\,dt$ орқали кирита оламиз. Бу ерда $\psi^2(t)$ $[a; b]$ кесмада нолдан фарқли ихтиёрий узлуксиз функция.

48-§. ОРТОГОНАЛ ВЕКТОРЛАР СИСТЕМАСИ

1-таъриф. Агар унитар фазонинг иккита $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ вектори учун $(\bar{x}, \bar{y})=0$ бўлса, у ҳолда $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ векторлар *ортогонал векторлар* дейилади.

Бу таърифдан, хусусий ҳолда, $\bar{x}=\bar{0}$ векторнинг исталган векторга ортогоналлиги улардан камида биттаси нолга тенглиги ёки улар орасидаги бурчак $\frac{\pi}{2}$ дан иборатлигини билдиради, чунки бу фазода $(\bar{x}, \bar{y})=|\bar{x}|\ |\bar{y}|\cos(\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$. R^n ва $C[a; b]$ фазоларда иккита векторнинг ортогоналлик шартлари мос равишда $\alpha_1\ \beta_1+\alpha_2\ \beta_2+\qquad+\alpha_n\ \beta_n=0$, $\int\limits_a^b f(t)\varphi(t)\,dt=0$ тенгликлар ёрдамида аниқланади.

2-таъриф. Агар V вектор фазонинг бирор

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\qquad,\ \bar{a}_n \qquad (1)$$

векторлари системасининг исталган икки элементи ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда (1) система *ортогонал векторлар системаси* дейилади.

Масалан, n ўлчовли R фазода $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\qquad \bar{e}_n$ система ортогонал системадир ($\bar{e}_i\ (i=\overline{1, n})$ — орт векторлар).

3-таъриф. Агар ортогонал система қаралаётган фазонинг базиси бўлса, бундай системага *ортогонал базис* дейилади.

Масалан, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \qquad \bar{e}_n$ система R^n фазонинг ортогонал базисидир.

49- §. ОРТОГОНАЛЛАШ ЖАРАЁНИ

Ҳақиқий сонлар майдони устида аниқланган n ўлчовли V фазо нинг ихтиёрий

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \qquad , \bar{g}_n \tag{1}$$

базисига асосланиб,

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \qquad \bar{e}_n \tag{2}$$

ортогонал базисни тузиш жараёни билан танишамиз. Бу ерда (1) дан (2) ни ҳосил қилиш *ортогоналлаш жараёни* дейилади. У қуйидагидан иборат: тузиладиган (2) ортогонал базиснинг биринчи $\bar{e}_1$ векторини $\bar{e}_1 = \bar{g}_1$ деб оламиз; $\bar{g}_1 \neq \bar{0}$ бўлганидан $\bar{e}_1 \neq \bar{0}$ бўлади. Энди, иккинчи $\bar{e}_2$ векторни $\bar{e}_2 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{g}_1 = \bar{g}_2 + \alpha \bar{e}_1$ шаклда олиб, α сонни шундай аниқлайликки, натижада

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + (\bar{e}_1, \bar{g}_2 + \alpha \bar{e}_1) = 0 \tag{3}$$

бўлсин, яъни $\bar{e}_1$ ва $\bar{e}_2$ векторлар ортогонал бўлсин. Аввало $\bar{e}_2 \neq \bar{0}$ эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, (1) базис системани ташкил этганидан унинг $\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\}$ қисм системаси ҳам чизиқли боғланмаган бўлади. Шунинг учун $\bar{e}_2 \neq \bar{0}$.

(3) тенгликдан $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$ бўлгани учун $(\bar{e}_1, \bar{g}_2) + \alpha (\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0$ бўлади. Охирги тенгликдан эса

$$\alpha_1 = -\frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \tag{4}$$

топилади.

Энди (2) системанинг $\bar{e}_3$ векторини, β_1 ва β_2 ларни номаълум сон сифатида қараб, $\bar{e}_3 = \bar{g}_3 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_1 \bar{e}_1$ кўринишда излаймиз.

β_1 ва β_2 ларни шундай танлаш лозимки, натижада $(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$ ва $(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$ бўлсин, яъни

$$(\bar{e}_1, \bar{g}_3 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_1\bar{e}_1) = 0, \tag{5}$$

$$(\bar{e}_2, \bar{g}_3 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_1\bar{e}_1) = 0 \tag{6}$$

тенгликлар бажарилсин. Охирги иккита тенгликдан эса

$$(\bar{e}_1, \bar{g}_3) + \beta_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2) + \beta_1(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0,$$

$$(\bar{e}_2, \bar{g}_3) + \beta_2(\bar{e}_2, \bar{e}_2) + \beta_1(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0$$

ва $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = (\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0$ бўлганидан $\beta_1 = -\frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}$ ва $\beta_2 = -\frac{(\bar{e}_2, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)}$лар келиб чиқади. Мана шу жараённи охиригача давом эттириб, (2) ортогонал базисга келамиз. Бу базис қуйидаги векторлардан тузилган бўлади:

$$\bar{e}_1 = \bar{g}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{g}_2 - \frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_2)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \cdot \bar{e}_1,$$

$$\bar{e}_3 = \bar{g}_3 - \frac{(\bar{e}_2, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)} \cdot \bar{e}_2 - \frac{(\bar{e}_1, \bar{g}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \cdot \bar{e}_1,$$

$$\bar{e}_n = \bar{g}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\bar{e}_i, \bar{g}_n)}{(\bar{e}_i, \bar{e}_i)} \cdot \bar{e}_i.$$

50-§. ҚИСМ ФАЗОНИНГ ОРТОГОНАЛ ТЎЛДИРУВЧИСИ

1-теорема. *V_n вектор фазонинг ихтиёрий $\bar{x}$ вектори шу фазонинг*

$$\bar{y}_1, \ \bar{y}_2, \quad , \bar{y}_m \tag{1}$$

векторларига ортогонал бўлса, у ҳолда бундай $\bar{x}$ вектор (1) векторлар системасининг исталган чизиқли комбинацияси $\alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2 + \quad + \alpha_m\bar{y}_m$ га ҳам ортогонал бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан,

$$(\bar{x}, \alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2 + \ . \quad + \alpha_m\bar{y}_m) = \alpha_1(\bar{x}, \bar{y}_1) + \alpha_2(\bar{x}, \bar{y}_2) +$$
$$+ \quad + \alpha_m(\bar{x}, \bar{y}_m) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \ . \quad + \alpha_m \cdot 0 = 0.$$

Маълумки, ҳамма чизиқли $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i$ комбинацияларнинг W тўплами $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \quad , \bar{y}_m$ системанинг $L(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ \ . , \bar{y}_m)$

чизиқли қобиғидан иборат бўлиб, у V фазонинг қисм фазосини ташкил этади. Шундай қилиб, $\overline{x}$ вектор W қисм фазонинг ҳар бир $\overline{y} = \sum_{i=1}^{m} C_i y_i$ векторига ортогоналдир. Бундай ҳолда $\overline{x}$ вектор W қисм фазога *ортогонал вектор* дейилади.

Мисол. Геометрик векторларнинг R^3 фазосини олсак, Ox ўқда ётувчи исталган $\overline{x}$ вектор yOz текисликдан иборат бўлган W қисм фазога ортогоналдир.

Айтайлик, W тўплам V вектор фазонинг бирор қисм фазоси бўлсин. W қисм фазога ортогонал ҳамма $\overline{x}$ векторлар тўпламини L орқали белгилайлик.

2-теорема. *L тўплам V фазонинг қисм фазосидир.*

L тўплам учун қисм фазо бўлишлик шартларини текширамиз. Ҳақиқатан, $\forall \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in L$, $\forall \overline{y} \in W$ учун $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2, \overline{y}) = (\overline{x}_1, \overline{y}) - (\overline{x}_2, \overline{y}) = 0 - 0 = 0$ бўлади. Шу сабабли $\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \in L$.

$(\alpha \overline{x}, \overline{y}) = \alpha(\overline{x}, \overline{y}) = \alpha \cdot 0 = 0 (\forall \alpha \in R, \forall \overline{x} \in L, \forall y \in W)$.

Демак, $\alpha \overline{x} \in L$.

L қисм фазо W қисм фазосининг ортогонал тўлдирувчиси дейилади ва у $W^{\perp}$ орқали белгиланади.

Юқоридаги мисолда W қисм фазога ортогонал ҳамма векторлар Ox ўқда ётади ва улар $W^{\perp}$ қисм фазосини ташкил этади.

$\overline{x}$ вектор V нинг қисм фазосини ташкил этмайдиган бирор F тўпламига (V нинг қисм тўпламига) ҳам ортогонал бўлиши мумкин. У ҳолда $\overline{x}$ вектор $W = \text{lin}(F)$ қисм фазога ҳам ортогонал бўлади.

IV БОБ. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ ВА МАТРИЦАЛАР

51-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИ

Геометрия курсидан маълумки, берилган тўғри чизиқ R^1, R^2 ёки R^3 фазоларга тегишли бўлишидан қатъи назар унинг тенгламасида қатнашадиган номаълумлар доимо биринчи даражада бўлади. R^n фазода берилган чизиқли тенгламанинг умумий кўриниши

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

кўринишда бўлиб, бунда a_i, $b \in \mathscr{P}$ ($\mathscr{P}$ сонлар майдони) бўлиб, x_i $(i = \overline{1,n})$ номаълумлар дейилади.

1-таъриф. (1) тенгламани тўғри сонли тенгликка айлантирувчи $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ арифметик векторга (1) нинг *ечими* дейилади.

Бошқача қилиб айтганда, $x_i = \alpha_i$ $(i = \overline{1,n})$ сонлар (1) тенгламани қаноатлантиради. Масалан, $3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2$ тенгламанинг ечимларидан бири (1, 1, 1, 1) арифметик вектордан иборат.

Биз бундан сўнг n номаълумли m та чизиқли тенгламалар системалари билан шуғулланамиз. Бундай система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлиб, бунда a_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, b_j лар бирор $\mathscr{P}$ сонлар майдонига тегишли сонлардир, x_i лар эса номаълумлардан иборат. a_{ij} сонлар (2) даги номаълумлар олдидаги коэффициентлар, b_j лар эса озод ҳадлар деб аталади. a_{ij} сон (2) системадаги i-тенгламанинг j-қўшилувчи ҳадида қатнашган x_j номаълумларнинг коэффициентини ифодалайди. Энди қуйидаги векторларни оламиз:

$$\overline{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j = \overline{1,n}) \text{ ва } \overline{b}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (i = \overline{1,m}).$$

Иккита векторнинг ўзаро тенглиги ва векторни сонга кўпайтириш қоидаларига биноан, (2) системани қуйидагича вектор кўринишда ёзиш мумкин:

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \qquad + x_n\overline{a}_n = b. \qquad (2')$$

(2′) тенглама (2) тенгламалар системасининг векторли формада ёзилишини ифодалайди.

Ўз-ўзидан маълумки, барча $a_{ij} = 0$ бўла олмайди, чунки бундай ҳолда биз тенгламалар системаларига эга бўла олмаймиз. Лекин $\forall\, b_i = 0$ бўлиши мумкин. Бундай ҳолда (2) система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad . + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad . + a_{2n}x_n = 0, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

кўринишни олади.

(2) системадаги m ва n лар учун $m = n$ ёки $m \neq n$ бўлиши мумкин.

2-таъриф. Агар (2) системада нолдан фарқли b_i $(i = \overline{1,m})$ мавжуд бўлса, бу система бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системаси, барча $b_i = 0$ $(i = \overline{1,m})$ бўлганда ҳосил бўладиган (3) система эса бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси дейилади. Кўп ҳолларда (3) система бир жинсли бўлмаган (2) *системага мос бир жинсли система* деб ҳам юритилади.

3-таъриф. (2) системанинг ҳар бир тенгламасини тўғри сонли тенгликка айлантирувчи $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \quad ., \alpha_n)$ арифметик векторга (2) *системанинг ечими* дейилади.

Чизиқли тенгламалар системалари ҳар доим ҳам ечимга эга бўлавермайди.

Масалан,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$$

система ечимга эга эмас.

4-таъриф. Ечимга эга бўлган система *ҳамжойли (биргаликда)*, ечимга эга бўлмаган система эса *ҳамжойсиз (биргаликда бўлмаган)* система дейилади.

Ҳамжойли системаларнинг ўзи яна икки қисмга, яъни аниқ ва аниқмас системаларга бўлинади.

5-таъриф. Ягона ечимга эга бўлган система аниқ система, ечимларининг сони чексиз кўп бўлган система эса *аниқмас система* дейилади.

Масалан,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$$

система (1, 2, — 1) кўринишдаги ягона ечимга эга.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

система чексиз кўп ечимга эга. Улардан бири (1,2,—1) бўлади.

Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси доимо ҳамжойли системадир, чунки (0,0, ... ,0) вектор (3) нинг ҳар бир тенгламасини тўғри сонли тенгликка айлантиради.

Биз бундан кейин ёзувни қисқартириш мақсадида (2) ва (3) системаларни мос равишда

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \qquad + a_{in}x_n = b_i \ (i = \overline{1,m}),$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \qquad + a_{in}x_n = 0 \ (i = \overline{1,m})$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \ (i = \overline{1,m})$$

кўринишларда ёзамиз.

52- §. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАЛАРИНИНГ НАТИЖАЛАРИ

Коэффициентлари ва озод ҳадлари бирор $\mathscr{P}$ сонлар майдонига тегишли бўлган

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = c_c \ (i = \overline{1,m}) \qquad (1)$$

ва

$$b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \quad . + b_{jn}x_n = d_j \ (j = \overline{1,k}) \qquad (2)$$

чизиқли тенгламалар системалари берилган бўлсин. Бу тенгламалар системалари ечимлари тўпламини мос равишда A ва B орқали белгилайлик. Юқоридаги тенгламалар системаларига эътибор берсак, улардаги тенгламалар сони ҳар хил бўлиши мумкин бўлгани ҳолда ($m \neq k$ бўлиши мумкин) улардаги номаълумлар сони тенг эканлигини кўрамиз.

1-таъриф. Агар берилган системалар ҳамжойли бўлиб, (1) системанинг ҳар бир ечими (2) системанинг ҳам ечими бўлса, (2) система (1) *системанинг натижаси* дейилади.

Таърифга асосан, (1) ва (2) системалар алоҳида-алоҳида ҳамжойли бўлиб, (2) система (1) нинг натижаси бўлса, $A \subseteq B$ бўлади, яъни (1) нинг ечимлари тўплами A (2) нинг ечимлари тўплами B учун қисм тўплам ҳисобланади.

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Кейинги система дастлабки системанинг натижаси бўлади, чунки дастлабки система аниқ система бўлиб, у (1, 2, 1) ечимга эга бўлгани ҳолда берилган системанинг натижаси аниқмас система бўлиб, унинг ечимларидан бири (1, 2, 1) бўлади.

Кўп ҳолларда n та номаълумли тенгламалар системасини ечиш учун тенгламалар ва номаълумлар сонини имкони борича камайтириш мақсадга мувофиқ бўлади. Лекин янги ҳосил бўлган система берилган системанинг натижаси бўлиши керак. Берилган системанинг натижаси битта тенгламадан иборат бўлиб қолиши ҳам мумкин.

2-таъриф. Агар

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \qquad + k_nx_n = c \qquad (3)$$

тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳади мос равишда (1) система коэффициентлари ва озод ҳадларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, яъни шундай s_i $(i=\overline{1,m})$ сонлар топилсаки, натижада улар учун

$$k_t = s_1a_{1t} + s_2a_{2t} + \quad . + s_ma_{mt} = \sum_{p=1}^{m} s_pa_{pt} \quad (t=\overline{1,n}),$$

$$c = s_1c_1 + s_2c_2 + \quad + s_mc_m = \sum_{p=1}^{m} s_pc_p$$

тенгликлар бажарилса, (3) тенглама (1) *системанинг натижаси* дейилади.

Мисол.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -12 \end{cases}$$

система учун $2x_1 + 0\cdot x_2 - 11x_3 = -31$ тенгламанинг коэффициентлари ва озод ҳади берилган система коэффициентлари ва озод ҳадлари орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{aligned} 2 &= (-1)\cdot 4 + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 5; \\ 0 &= (-1)\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 + 2\cdot 2, \\ -11 &= (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot(-7), \\ -31 &= (-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 2 + 2\cdot(-12). \end{aligned}$$

Бундан кўринадики, берилган система ечими (1, 2, 3) ўз натижасининг ечимларидан бири бўлади.

3-таъриф. Агар (2) система (1) нинг натижаси ва аксинча, (1) система (2) нинг натижаси бўлса, бундай системалар *ўзаро эквивалент (тенг кучли)* системалар дейилади.

Масалан,

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

системалар ўзаро тенг кучлидир, чунки уларнинг ҳар бири аниқмас системалар бўлиб, ечимлар тўпламлари устма-уст тушади.

2-таърифга асосан қуйидагини ёза оламиз:

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Rightarrow A \equiv B.$$

Исталган иккита ҳамжойли бўлмаган системалар ҳам ўзаро тенг кучли бўлади, чунки уларнинг ечимлари тўпламлари $\varnothing$ тўпламлардан иборат.

Энди берилган системага тенг кучли системани ҳосил қилиш усуллари ҳақида фикр юритамиз. Бунинг учун (1) системани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \qquad + a_{kn}x_n = c_k, \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n = c_m. \end{cases} \qquad (4)$$

4-таъриф. (4) системада; 1) бирор k-тенгламасининг ҳар икки томонини нолдан фарқли α сонга кўпайтириш;

2) системадаги ихтиёрий иккита тенгламанинг ўринларини алмаштириш;

3) системанинг ихтиёрий иккита тенгламасини мос равишда $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ сонлара кўпайтириб натижаларини кўшиш;

4) барча коэффициентлари ва озод ҳадиноллардан иборат бўлган (агар шундай ҳол бўлса) тенгламани ташлаб юбориш каби алмаштиришлар бажарилса, у ҳолда (4) *система устида элементар алмаштиришлар бажарилган* дейилади.

Теорема. *Элементар алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлган система берилган системага тенг кучли система бўлади.*

Исботи. Система учун элементар алмаштиришларнинг 3) ҳолини кўрсатиш билан чегараланамиз. Фараз қилайлик, (4) системанинг

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = c_s \ (1 \leqslant s \leqslant m) \qquad (4')$$

ва

$$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{tn}x_n = c_t \ (1 \leqslant t \leqslant m) \qquad (5$$

тенгламалари берилган бўлиб, уларни мос равишда $\alpha \neq 0$ ва $\beta \neq 0$ сонларга кўпайтириб, натижаларини қўшишдан ҳосил бўлган тенглама

$$(\alpha a_{s1} + \beta a_{t1}) x_1 + (\alpha a_{s2} + \beta a_{t2}) x_2 + \qquad + \\ + (\alpha a_{sn} + \beta a_{tn}) x_n = \alpha c_s + \beta c_t \qquad (6)$$

бўлсин. Бу тенгламани (4) системанинг (5) тенгламаси ўрнига ёзсак, у ҳолда (4) га эквивалент бўлган

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdot + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad \cdot + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \\ (\alpha a_{s1} + \beta a_{t1})\, x_1 + \quad \cdot + (\alpha a_{sn} + \beta a_{tn})\, x_n = \alpha c_s + \beta c_t), \\ \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \quad (7)$$

система ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан, (4) ва (7) системалар бир-биридан фақат t-тенглама билан фарқланади, қолган тенгламалари эса бир хил. Шу сабабли (4) ва (7) системаларнинг фақатгина t-тенгламалари тўғрисида гапирамиз.

(4) нинг ҳар бир ечими (4) ва (5) ларни қаноатлантиргани (тўғри сонли тенгликка айлантиргани) учун бу ечим (6) тенгламани ҳам қаноатлантиради (2-таърифга асосан). Бу ечим (7) нинг ҳам ечими бўлади. Аксинча, (7) системанинг ихтиёрий ечими (6) ва (4) ларни қаноатлантиргани учун у (5) ни ҳам қаноатлантиради, яъни бу ечим (4) учун ҳам ечимдир.

Агар бирор $(\alpha_1, \alpha_2, \ ., \alpha_n)$ вектор (4) ни қаноатлантирмаса, у (4) ва (7) учун ҳам ечим бўлмайди. Борди-ю, бу вектор (4) ни қаноатлантириб, лекин (5) ни қаноатлантирмаса, у (7) ни ҳам қаноатлантирмайди, чунки (4) ва (7) нинг ечими албатта (5) нинг ҳам ечими бўлади.

Шундай қилиб (4) ва (7) лар ё ҳамжойли бўлиб, уларнинг бўш бўлмаган ечимлари тўпламлари устма-уст тушади, ёки ҳамжойли бўлмаган бўлиб, иккаласининг ҳам ечимлари тўплами бўш тўпламдан иборат бўлади.

Демак, (4) ва (7) системалар эквивалент системалар бўлади. Теорема исбот этилди. Биз бундан сўнг системаларнинг эквивалентлигини $\sim$ белги орқали ёзамиз. Масалан, $(4) \sim (7)$.

53-§. БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ НОЛМАС ЕЧИМЛАРИ

51-§ да кўриб ўтганимизга биноан, исталган бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси доимо ноль ечимга эга бўлар эди. Биз энди ўз олдимизга бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси қайси ҳолларда нолмас ечимга эга бўлади, деган саволни қўямиз.

***Теорема.** n та номаълумли m та бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси $m < n$ бўлганда нолмас ечимга эга бўлади.*

Исботи. Коэффициентлари бирор $\mathcal{P}$ сонлар майдонига тегишли бўлган

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = 0, \\ \cdot \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = 0 \end{cases} \tag{1}$$

система берилган бўлсин.

(1) системани икки векторнинг тенглик шартидан фойдаланиб,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right) = (0, 0, \ldots, 0) \tag{2}$$

кўринишда ёза оламиз. (2) нинг чап томони ҳар бири m ўлчовли n та $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ $(j = \overline{1,n})$ вектор (яъни R^m фазо элементлари) йиғиндисини, ўнг томони эса ноль векторни ифодалайди. Шунинг учун (2) дан қуйидаги ҳосил бўлади:

$$x_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) + \ldots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) = \overline{0}$$

ёки

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + \ldots + x_n\overline{a}_n = \overline{0}. \tag{3}$$

Охирги икки тенгликда ўнг томондаги $\overline{0}$ ноль векторни, x_i $(i = \overline{1,n})$ лар эса қандайдир сонларни ифодалайди. Энди x_i $(i = \overline{1,n})$ ларнинг барчаси бир вақтда нолга тенг эмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, 42-§ даги 1-теоремага биноан, R^m фазода исталган $n > m$ та векторлар системаси чизиқли боғланган бўлар эди. Демак, камида биттаси нолдан фарқли шундай α_i $(i = \overline{1,n})$ сонлар мавжудки, $x_i = \alpha_i$ бўлганда (3) тўғри сонли тенгликларни ифодалайди. Бу эса (1) системанинг нолмас ечимга эга эканлигини тасдиқлайди. Теорема исботланди.

матрицалар номдош матрицалар деб юритилади. Фақат номдош матрицаларгина тенг бўлиши мумкин. A нинг ҳар бир a_{ij} элементи B нинг унга мос b_{ij} элементига тенг бўлса, бу иккита номдош матрица тенг, яъни $A = B$ бўлади. Демак, i ва j лар учун $a_{ij} \neq b_{ij}$ бўлса, A ва B лар тенгмас матрицалар бўлади. A ва B матрицаларнинг тенг эмаслиги $A \neq B$ орқали белгиланади. Номдош бўлмаган матрицалар умуман тенгмас деб ҳисобланади.

A матрицанинг сатрлари m та n ўлчовли горизонтал

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ \bar{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ & \\ \bar{a}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned} \tag{1}$$

векторларни, устунлари эса n та m ўлчовли вертикал векторларни ташкил этади. Бу векторларни горизонтал векторлардан фарқ қилиш учун

$$\begin{aligned} \bar{a}^1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \\ \bar{a}^2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \\ & \\ \bar{a}^n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned} \tag{2}$$

кўринишларда белгилаймиз.

2-таъриф. Горизонтал $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ векторлар системасининг ранги матрицанинг *сатрли ранги* деб, вертикал $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^n$ векторлар системасининг ранги матрицанинг устунли ранги деб аталади.

3-таъриф. Матрицадаги сатр векторлар системасининг рангига *матрицанинг ранги* дейилади.

Матрица рангини аниқлаш учун элементар алмаштиришлар тушунчаси муҳим аҳамиятга эга.

4-таъриф. Матрица устида элементар алмаштиришлар деб қуйидаги алмаштиришларга айтилади:

1) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштириш;

2) сатр (устун) элементларини нолдан фарқли сонга кўпайтириш;

3) сатр (устун) элементларини нолдан фарқли исталган сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун)нинг мос элементларига қўшиш;

4) барча элементлариноллардан иборат бўлган сатр (устун)ни матрицадан ташлаб юбориш.

1-теорема. Элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди.

Исботи. Элементар алмаштиришларни, масалан, сатрларга татбиқ этайлик.

1) матрицанинг ихтиёрий иккита сатрининг ўринларини алмаштириш горизонтал векторлар системасида иккита векторни ўзаро ўрин алмаштиришга олиб келади. Бу эса векторлар системанинг рангини ўзгартирмайди;

2) матрицадаги ихтиёрий сатрнинг ҳамма элементларини $\alpha \neq 0$ сонга кўпайтириш горизонтал векторлар системасининг бирор векторини $\alpha \neq 0$ га кўпайтиришдан иборат. Бунинг натижасида векторлар системасининг ранги ўзгармайди. Ҳақиқатан,

$$\overline{b}_1, \overline{b}_2, \quad ., \overline{b}_i, \quad ., \overline{b}_s \tag{1}$$

векторлар системаси чизиқли эркли (боғланган) бўлса,

$$\overline{b}_1, \overline{b}_2 . \quad \alpha \overline{b}_i, \quad ., \overline{b}_s \tag{2}$$

система ҳам чизиқли эркли (боғланган) бўлади, чунки (1) чизиқли эркли бўлгани ҳолда (2) ни чизиқли боғланган десак, у ҳолда камида биттаси нолдан фарқли бўлган α_1, α_2, α_i, ., α_s сонлар учун бажариладиган

$$\alpha_1\overline{b}_1 + \alpha_2\overline{b}_2 + . \quad . + \alpha_i (\alpha \overline{b}_i) + \quad + \alpha_s\overline{b}_s =$$

$$= \alpha_1\overline{b}_1 + \alpha_2\overline{b}_2 + . \quad + (\alpha \alpha_i)\, \overline{b}_i + \quad . + \alpha_s\overline{b}_s = \overline{0}$$

тенглик (1) нинг чизиқли боғланганлигини кўрсатади. Агар (1) чизиқли боғланган бўлса, камида биттаси нолдан фарқли бўлган α_1, α_2, α_n сонлар учун $\alpha_1\overline{b}_1 + \alpha_2\overline{b}_2 + \quad + \frac{\alpha_i}{\alpha} \cdot \alpha \overline{b}_i + + \ldots + \alpha_s\overline{b}_s = \alpha_1\overline{b}_1 + . \quad . + \alpha_i b_i + \quad + \alpha_s\overline{b}_s = \overline{0}$ тенглик бажарилади. Охирги тенглик эса (2) нинг ҳам чизиқли боғланган эканлигини кўрсатади;

3) матрицанинг j-сатрини α сонга кўпайтириб, i-сатрига қўшиш

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \quad ., \overline{a}_i, \quad ., \overline{a}_j, . \quad \overline{a}_m \tag{3}$$

системадаги $\overline{a}_j$ векторни α га кўпайтириб, $\overline{a}_i$ векторга қўшишдан иборат. Буни бажариш натижасида

$$\bar{a}_1, \quad ., (\bar{a}_i + \alpha \bar{a}_j), \quad ., \bar{a}_j, \quad ., \bar{a}_m \qquad (4)$$

система ҳосил бўлади. (4) нинг $\bar{a}_i + \alpha \bar{a}_j$ дан бошқа ихтиёрий вектори (3) орқали қуйидагича чизиқли ифодаланади:

$$\bar{a}_k = 0 \cdot \bar{a}_1 + \quad . + 1 \cdot \bar{a}_k + \quad . + 0 \cdot \bar{a}_m .$$

$\bar{a}_i + \alpha \bar{a}_j$ вектор (3) система орқали қуйидагича чизиқли ифодаланади:

$$\bar{a}_i + \alpha \bar{a}_j = 0 \cdot \bar{a}_1 + \quad + 1 \cdot \bar{a}_i + . \quad . + \alpha \bar{a}_j + \\ + \quad . + 0 \cdot \bar{a}_m .$$

Аксинча, (3) нинг $\bar{a}_i$ дан бошқа ҳар бир $\bar{a}_k$ вектори (4) орқали $\bar{a}_k = 0 \cdot \bar{a}_1 + . \quad . + 1 \cdot \bar{a}_k + \quad + 0 \cdot \bar{a}_m$ кўринишда ифодаланади. $\bar{a}_i$ векторнинг (4) орқали чизиқли ифодаланиши қуйидагича бўлади:

$$\bar{a}_i = 0 \cdot \bar{a}_1 + \ldots + 1 \cdot (\bar{a}_i + \alpha \bar{a}_j) + \quad . + (-\alpha) \bar{a}_j + \\ + . \quad . + 0 \cdot \bar{a}_m .$$

Шундай қилиб, (3) ва (4) системалар эквивалентдир. Бунга асосан 42-§ даги 3-натижа бўйича (3) ва (4) системаларнинг ранглари тенг бўлади.

2-теорема. *Ҳар бир матрицанинг сатрли векторлари ранги унинг устунли векторлари рангига тенг.*

Исботи.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Матрицанинг n ўлчовли горизонтал векторлари ва m ўлчовли вертикал векторлари қуйидагилардан иборат:

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad ., \bar{a}_r, \quad ., \bar{a}_m, \qquad (5)$$

$$\bar{a}^1, \bar{a}^2, \quad ., \bar{a}^s, \quad ., \bar{a}^n. \qquad (6)$$

(5) системанинг сатрли рангини аниқловчи чизиқли эркли векторларини

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \qquad (7)$$

кўринишда, (6) системанинг устунли рангини аниқловчи чизиқли эркли векторларини

$$\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^s \tag{8}$$

кўринишда оламиз. (7) ва (8) системаларнинг худди шу хилда жойлашишига A нинг сатрларини ўзаро ва устунларини ўзаро ўрин алмаштириш билан эришиш мумкин. Бунинг натижасида 1-теоремада исботланганидек, A нинг сатрли ва устунли ранглари ўзгармайди. Шундай қилиб A матрицанинг сатрли ранги r га ва устунли ранги s га тенгдир.

Энди $r = s$ эканлигини кўрсатиш лозим. $r < s$ деб фараз қилайлик. (7) векторлар $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}, \ldots, a_{in})$ кўринишга эга. (8) векторлар $\bar{a}^j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj})$ кўринишга эга. (7) векторларнинг биринчи s та координаталаридан фойдаланиб, қуйидаги s та номаълумли r та бир жинсли чизиқли тенгламалар системасини тузамиз: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{is} x_s = 0$ $(i = \overline{1,r})$. $r < s$ га асосан, бу система $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ кўринишдаги нолмас ечимга эга. Демак,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{is}\alpha_s = 0 \ (i = \overline{1,r}) \tag{9}$$

тенгликлар ўринли. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ ечим

$$a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{ks} x_s = 0 \ (k = \overline{r+1,m})$$

системани ҳам қаноатлантиради. Ҳақиқатан, $(\bar{a}_{r+1}, \bar{a}_{r+2}, \ldots, \bar{a}_m)$ горизонтал векторларнинг ҳар қайсиси (7) система орқали чизиқли ифодаланиши, яъни $\bar{a}_k = \mu_{1k}\bar{a}_1 + \mu_{2k}\bar{a}_2 + \ldots + \mu_{rk}\bar{a}_r$ бўлиши бизга маълум. Буни мукаммал ёзсак, $\bar{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$ бўлгани учун

$$(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}) = (\mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \ldots + \mu_{rk}a_{r1},$$
$$\mu_{1k}a_{12} + \mu_{2k}a_{22} + \ldots + \mu_{rk}a_{r2}, \ldots, \mu_{1k}a_{1n} +$$
$$+ \mu_{2k}a_{2n} + \ldots + \mu_{rk}a_{rn})$$

келиб чиқади. Демак, векторларнинг тенглик шартига асосан

$$a_{k1} = \mu_{1k}a_{11} + \mu_{2k}a_{21} + \ldots + \mu_{rk}a_{r1},$$
$$a_{k2} = \mu_{1k}a_{12} + \mu_{2k}a_{22} + \ldots + \mu_{rk}a_{r2},$$

$$a_{ks}=\mu_{1k}a_{1s}+\mu_{2k}a_{2s}+\ldots+\mu_{rk}a_{rs},$$
$$a_{ks+1}=\mu_{1k}a_{1s+1}+\mu_{2k}a_{2s+1}+\ldots+\mu_{rk}a_{rs+1}$$

$$a_{kn}=\mu_{1k}a_{1n}+\mu_{2k}a_{2n}+\ldots+\mu_{rk}a_{rn}$$

бўлади, бунда $k=\overline{r+1,n}$. Бу тенгликларнинг биринчи s тасини ($s=n$ бўлган ҳолда, ҳаммасини) мос равишда α_1, α_2, ..., α_s ларга кўпайтириб, натижаларни ҳадма-ҳад қўшсак, (9) га асосан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\ldots+a_{ks}\alpha_s=$$
$$=\mu_{1k}(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1s}\alpha_s)+\mu_{2k}(a_{21}\alpha_1+$$
$$+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2s}\alpha_s)+\ldots+\mu_{rk}(a_{r1}\alpha_1+a_{r2}\alpha_2+\ldots+$$
$$+a_{rs}\alpha_s)=\mu_{1k}\cdot 0+\mu_{2k}\cdot 0+\ldots+\mu_{rk}\cdot 0=\overline{0},$$
$$a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\ldots+a_{ks}\alpha_s=\overline{0}. \qquad (10)$$

(9) ва (10) тенгликлар (8) системанинг чизиқли боғланганлигини кўрсатади. Ҳақиқатан, (9) ва (10) ларга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\alpha_1\overline{a}^1+\alpha_2\overline{a}^2+\ldots+\alpha_s\overline{a}^s=\alpha_1(a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1})+$$
$$+\alpha_2(a_{12},a_{22},\ldots,a_{m2})+\ldots+\alpha_s(a_{1s},a_{2s},\ldots,a_{ms})=$$
$$=(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1s}\alpha_s,\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2s}\alpha_s,$$
$$a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\ldots+a_{ms}\alpha_s)=(0,0,\ldots,0)=\overline{0},$$
$$\alpha_1\overline{a}^1+\alpha_2\overline{a}^2+\ldots+\alpha_s\overline{a}^s=\overline{0}.$$

Аммо, бу (8) нинг чизиқли эркинлигига зиддир. Шу сабабли $r<s$ бўлиши мумкин эмас. Демак, $r\geqslant s$. Энди (5) ва (6) системаларнинг ўринларини алмаштириб, юқоридаги каби мулоҳазаларни такрорласак, $r>s$ нинг бўлиши мумкин эмаслигига ишонч ҳосил қиламиз. У ҳолда $r\leqslant s$. Шундай қилиб, $r\leqslant s$ ва $r\geqslant s$ эканлигидан $r=s$ бўлади.

55-§. ПОҒОНАЛИ МАТРИЦАЛАР

Мазкур темани баён этишдан олдин матрицаларнинг рангини аниқлашни аниқ мисолларда кўриб ўтайлик.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицада биринчи сатрин 2 га ва иккинчи сатрин —3 га кўпайтириб, биринчини иккинчига қўшсак, сўнгра яна биринчи сатрин 5 га, учинчи сатрин 3 га кўпайтириб, натижаларни қўшсак,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади.

Бу матрицада иккинчи сатрни 1 га, учинчини 5 га кўпайтириб, иккинчини учинчига қўшсак,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Яна

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицани олиб, юқоридаги сингари алмаштиришларни бажарсак,

$$C \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D, \; C \to D$$

ҳосил бўлади.

Икки А ва С матрицага қўлланилган алмаштиришларнинг моҳияти қуйидагидан иборат: m сатрли матрица берилган ҳолда биринчи ва иккинчи сатрларни, ундан кейин биринчи ва учинчи сатрларни, ..., ниҳоят, биринчи ва m-сатрларни шундай сонларга кўпайтирамизки, тегишли сонга кўпайтирилган биринчи сатрни навбат билан бошқа ҳамма сатрларга қўшганимизда иккинчи сатрдан бошлаб биринчи устун элементлари нолларга айланади. Сўнгра иккинчи сатр ёрдамида кейинги ҳамма сатрлар билан яна шундай алмаштиришларни бажарамизки, учинчи сатрдан бошлаб, иккинчи устун элементлари нолларга айланади. Ундан кейин тўртинчи сатрдан бошлаб учинчи устун элементлари нолларга айланади ва ҳ. к. Шу йўсинда бу жараён охиригача давом эттирилади.

Агар матрицанинг қандайдир сатрлари бошқа сатрлари орқали чизиқли ифодаланган бўлса, у ҳолда шу алмаштиришлар натижасида, бундай сатрларнинг ҳамма элементлари ноллага (яъни бундай сатрлар ноль сатрларга) айланади.

Бирорта элементи нолдан фарқли сатрни нолмас сатр деб атасак, юқоридаги алмаштиришлардан кейин ҳосил бўлган матрицанинг ранги нолмас сатрлар сонига тенг бўлади, чунки бундай сатрлар чизиқли эркли сатрларни билдиради.

Юқорида қўлланилган алмаштиришлар матрицани элементар алмаштиришлардан иборат бўлгани учун, улар матрицанинг рангини ўзгартирмайди. Шу сабабли, биринчи мисолда $r(A)=r(B)=3$ бўлади, чунки B да учта нолмас сатр бор. Иккинчи мисолда эса $r(C)=r(D)=2$ бўлади.

1-таъриф. Нолмас сатрларга эга A матрицада ҳар қандай k-нолмас сатрнинг биринчи нолдан фарқли элементи $(k-1)$-нолмас сатрнинг биринчи нолдан фарқли элементидан ўнгда турса, у ҳолда A *поғонали матрица* дейилади.

Масалан, қуйидагилар поғонали матрицалардир:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 18 & 3 & 0 & -7\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$C=(0\ \ 0\ \ 6\ \ 0\ \ 1),\quad D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Юқоридаги муҳокамалардан қуйидаги хулосага келамиз: поғонали матрицанинг ранги унинг нолмас сатрлари сонига тенг. Ихтиёрий матрицанинг рангини аниқлаш учун уни юқорида кўрсатилган қоида бўйича элементар алмаштириб, T поғонали матрицага келтирамиз. У ҳолда $r(A)=\text{r}(T)$ бўлади.

Масалан, юқоридаги мисолларда $r(A)=3$, $r(B)=5$, $r(C)=1$, $r(D)=1$ бўлади.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ -4 & 2 & 0 & -6\\ 6 & -3 & 0 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Демак, $r(M)=1$. Бунда M даги биринчи сатрни 2 ва -3 га кўпайтириб, мос равишда, иккинчи ва учинчи сатрларга қўшдик.

56-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ҲАМЖОЙЛИЛИК АЛОМАТИ

$\mathcal{P}$ сонлар майдони устидаги чизиқли тенгламалар системалари ва уларнинг ечимлари учун матрица тушунчаси муҳим аҳамиятга эга. Мазкур тушунчалар орасида узвий боғланиш мавжуд. Ана шу боғланишларни баён этишга киришамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \qquad . \qquad\qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин.

Номаълумларнинг a_{ij} коэффициентларидан ва b_i озод ҳадлардан қуйидаги иккита матрицани тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

A матрица (1) системанинг асосий матрицаси, B га (1) системанинг кенгайтирилган матрицаси дейилади.

B матрицанинг ранги A матрица рангидан кичик эмаслиги равшан, чунки B да A нинг ҳамма устунлари мавжуд.

Теорема. (1) *система ҳамжойли система бўлиши учун унинг асосий ва кенгайтирилган матрицаларининг ранглари тенг бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлиги. (1) системани ҳамжойли десак, у $(\alpha_1\ \alpha_2, \quad , \alpha_n)$ ечимга эга бўлади. Бу ечим (1) системанинг ҳамма тенгламаларини тўғри сонли тенгликка айлантиради:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \qquad + a_{in}\alpha_n = b_i \quad (i = \overline{1, m}). \qquad (2)$$

(2) тенгликлар шуни билдирадики, B матрицанинг сўнгги $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ устуни олдинги n та устунларни ифодаловчи

$$\overline{a}^1 = (a_{11}, a_{21}, \quad , a_{m1}),$$
$$\overline{a}^2 = (a_{12}, a_{22}, \quad , a_{m2}),$$

$$\overline{a}^n = (a_{1n}, a_{2n}, \quad . , a_{mn})$$

векторлар орқали чизиқли ифодаланади, чунки бу векторларни мос равишда α_1, α_2, $\quad$, α_n сонларга кўпайтириб қўшсак, (2) га асосан

$$\alpha_1 \overline{a}^1 + \alpha_2 \overline{a}^2 + \ldots + \alpha_n \overline{a}^n = \overline{b} \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. Демак, A ва B матрицаларнинг

$$\overline{a}^1. \ \overline{a}^2, \ldots, \overline{a}^n \qquad (4)$$

ва

$$\overline{a}^1, \overline{a}^2, \quad .. \overline{a}^n, \overline{b} \qquad (5)$$

вертикал векторлари системалари эквивалентдир. Демак, 42- § даги 3- натижага асосан A ва B матрицаларнинг ранглари тенг, яъни

$$r(A) = r(B).$$

Етарлилиги. $r(A) = r(B) = k$ берилган бўлсин. A матрицанинг, яъни (4) вертикал векторларнинг рангини аниқловчи қисм системани

$$\overline{a}^1, \overline{a}^2, \quad , \overline{a}^k \qquad (6)$$

дейлик. B нинг ранги ҳам k га тенг бўлганидан, (6) система (5) нинг ҳам рангини аниқловчи система бўлиб хизмат қилади. У ҳолда (5) нинг $\overline{b}$ вектори (6) система орқали ва демак, (4) система орқали чизиқли ифодаланади, яъни α_1, α_2, $\quad$, $\alpha_n \in \mathscr{P}$ сонлари мавжуд бўлиб, $\alpha_1 \overline{a}^1 + \alpha_2 \overline{a}^2 + + \alpha_n \overline{a}^n = \overline{b}$ тенглик бажарилади. Бундан эса, икки векторнинг тенглик шартига асосан $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \quad + a_{in}\alpha_n = b_i \ (i = \overline{1, m})$ тенгликларга келамиз. Шундай қилиб, (1) система $(\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n)$ ечимга эга, яъни (1) система ҳамжойли система бўлади. Бу теорема *Кронекер — Капелли* теоремаси дейилади.

57-§. НОМАЪЛУМЛАРНИ КЕТМА-КЕТ ЙЎҚОТИШ УСУЛИ БИЛАН ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ЕЧИШ

Чизиқли тенгламалар системаларини ечишнинг бир неча усули мавжуд. Улардан бири номаълумларни кетма-кет йўқотиш усулидир. Мазкур усулдан биринчи марта немис математиги К. Гаусс фойдалангани учун бу усул *Гаусс усули* деб ҳам юритилади.

Қуйидаги n та номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n = a_2, \\ \quad \cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n = a_m. \end{cases} \tag{1}$$

Бунда $a_{ij} \in \mathscr{P}$, $a_j \in \mathscr{P}$ бўлгани ҳолда $m = n$, $m > n$, $m < n$ бўлиши мумкин. $a_{ij}\,(i = \overline{1, m})$ лардан камида биттаси нолдан фарқли, акс ҳолда номаълумлар сони n дан кичик бўлар эди. Фараз қилайлик, $a_{11} \neq 0$. (1) системанинг биринчи тенгламасини кетма-кет $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, , $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ сонларга кўпайтириб, натижаларни мос равишда системанинг иккинчи, учинчи, . . , m-тенгламаларига қўшамиз. Унда (1) га эквивалент бўлган қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \qquad + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad b_{22}x_2 + b_{23}x_2 + \qquad + b_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \qquad + b_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \qquad\qquad \cdot \\ \qquad\qquad b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \qquad + b_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1'}$$

Бунда

$$b_{\mu i} = a_{\mu i} - \frac{a_{1\mu}}{a_{11}} \cdot a_{\mu 1},\ b_\nu = a_\nu - \frac{a_1}{a_{11}} \cdot a_{\nu 1}\,(\nu = \overline{2, m};$$

$$\mu = \overline{2, n},\quad i = \overline{2,\ n}).$$

(1′) системанинг бир қисми бўлган янги

$$\begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \qquad + b_{2n}x_n = b_2, \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \qquad + b_{3n}x_n = b_3, \\ \quad \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \qquad\quad \cdot \;\; \cdot \\ b_{k2}x_2 + b_{k3}x_3 + \qquad + b_{kn}x_n = b_k \end{cases} \tag{2}$$

системани қараймиз. (2) системада $k \leqslant m$ бўлади, чунки барча коэффициентлари ва озод ҳади нолга тенг бўлган баъзи бир тенгламалар системадан ташлаб юборилади.

Агар биз (2) системани ечиб, $x_2, x_3, \quad , x_n$ ларнинг сон қийматларини (1′) га қўйсак, (1) системанинг дастлабки тенгламасидан x_1 нинг сон қийматини топа оламиз. Унда (1) система ечилган бўлади.

Энди (2) системадан x_2 номаълумни йўқотамиз. Бунинг учун $b_{22} \neq 0$ деб фараз қилиб, (2) нинг биринчи тенгламасини кетма-кет $-\frac{b_{32}}{b_{22}}, -\frac{b_{42}}{b_{22}}, \quad , -\frac{b_{k2}}{b_{22}}$ ларга кўпайтириб, натижаларни шу системанинг иккинчи, учинчи, k-тенгламаларига кетма-кет қўшамиз. Унда

$$\begin{cases} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \quad , + b_{2n}x_n = b_2, \\ \quad c_{33}x_3 + \quad , + c_{3n}x_n = b_3^1, \\ \quad c_{43}x_3 + \quad , + c_{4n}x_n = b_4^1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \quad c_{l3}x_3 + \quad , + c_{ln}x_n = b'_l \end{cases} \qquad (2')$$

система ҳосил бўлиб ($l \leqslant k$), у (2) га эквивалентдир. (2′) системанинг бир қисми бўлган

$$\begin{cases} c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + \quad + c_{3n}x_n = b'_3, \\ c_{43}x_3 + c_{44}x_4 + \quad + c_{4n}x_4 = b'_4, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{l3}x_3 + c_{l4}x_4 + \quad + c_{ln}x_n = b'_l \end{cases} \qquad (3)$$

(3) системадаги номаълумлар сони (2′) системадаги номаълумлар сонидан ҳеч бўлмаганда битта кам. Биз (3) системани ечсак, (2′) системани ҳам еча оламиз. Номаълумларни юқоридаги усулда кетма-кет йўқотиб, охирида қуйидаги уч ҳолдан фақатгина бирига дуч келишимиз мумкин:

1. Номаълумларни кетма-кет йўқотиш жараёнида (1) системанинг бирорта тенгламаси

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \quad + 0 \cdot x_n = d \qquad (4)$$

бўлиб, бу ерда $d \neq 0$ кўринишда бўлиши мумкин.

2. Системанинг энг сўнгги (коэффициентлари нолдан фарқли) тенгламасининг номаълумлари сони иккитадан кичик эмас.

3. Энг сўнгги тенглама бир номаълумли бўлиши мумкин.

(4) кўринишдаги тенглама одатда зиддиятли тенглама деб юритилади. (4) тенгламани номаълумларнинг ҳеч қандай сон қийматлари тўғри тенгликка айлантира олмайди. Шунинг учун бундай ҳолда (1) система ечимга эга бўлмайди.

2) ҳолда (1′) система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \qquad + a_{1n}x_n = a_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \qquad + b_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \qquad + c_{3n}x_n = c_3, \\ \\ \qquad\qquad l_{tn-1}x_{n-1} + l_{tn}x_n = l_t \end{cases} \tag{5}$$

кўринишни олади, бу ерда a_{11}, b_{22}, , l_{tn-1}, l_{tn} лар нолдан фарқлидир.

(5) система (1) нинг натижаси бўлгани учун (5) нинг ҳар бир ечими (1) нинг ҳам ечими бўлади. (5) системага эътибор қилсак, у трапеция шаклини ифодалайди. Шунинг учун бундай система трапециясимон система деб юритилади. Унинг энг охирги

$$l_{tn-1}x_{n-1} + l_{tn}x_n = l_t \tag{6}$$

тенгламаси чексиз кўп ечимга эга бўлганидан (5) ва демак, (1) система ҳам чексиз кўп ечимга эгадир.

Эслатма. (5) системанинг охирги тенгламаси иккита номаълумга боғлиқ бўлиши шарт эмас. 3) ҳолда (5) системага яна битта

$$l_{t+1n}x_n = l_{t+1} \tag{7}$$

шаклдаги тенглама бирлаштирилади.

(7) тенглама, $l_{t+1n} \neq 0$ бўлгани учун, ягона ечимга эга. (7) дан x_n нинг $x_n = \alpha_n$ сон қийматини топамиз ва бу сон қийматни (6) га қўйиб, $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$ ни топамиз. Кейин (5) системанинг қолган тенгламаларидан x_{n-2}, x_{n-3}, , x_2, x_1 ларга мос келувчи α_{n-2}, α_{n-3}, , α_2, α_1 ларни топамиз. Натижада (1) система $(\alpha_1, \alpha_2, \quad, \alpha_n)$ кўринишдаги ягона ечимга эга бўлади. Системанинг охирги кўриниши унинг учбурчак кўриниши деб юритилади.

Хулоса: Агар номаълумларни кетма-кет йўқотиш натижасида:

а) системанинг бирор тенгламаси зиддиятли тенгламага айланса, у ҳолда (1) система ечимга эга бўлмайди;

б) система трапециясимон шаклга келса, (1) система чексиз кўп ечимга эга бўлади;

в) система учбурчак шаклга келтирилса, у ҳолда (1) система ягона ечимга эга бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+y-2z=-2, \\ 5x+2y-7z=-12 \end{cases} \qquad (1)$$

системани Гаусс усули билан ечинг.

Биринчи тенгламани —2 га кўпайтириб, иккинчи тенгламага қўшсак ва яна биринчи тенгламани —5 га кўпайтириб, учинчисига қўшсак,

$$\begin{cases} x-y+z=2, \\ 3y-4z=-6, \\ 7y-12z=-22 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги иккинчи тенгламани —7 га ва учинчисини 3 га кўпайтириб, учинчига қўшиш натижасида

$$\begin{cases} x-y+\quad z=2, \\ \quad 3y-4z=-6, \\ \qquad -8z=-24 \end{cases} \qquad (2)$$

система келиб чиқади. Шу билан алмаштиришлар тугаб, (2) системанинг учинчи тенгламасидан z нинг ягона $z=3$ қийматини топамиз. Бу қийматни иккинчи тенгламага қўйиб, $3y-4\cdot 3=-6$, $y=2$ қийматни ҳосил қиламиз. $y=2$ ва $z=3$ қийматларни биринчи тенгламага қўйиш билан x нинг ҳам ягона $x=1$ қийматини топамиз. Шундай қилиб, (2) система ва демак, унга эквивалент (1) система ҳам ягона (1, 2, 3) ечимга эга экан. Бундан (1) нинг аниқ система эканлиги кўринади.

2. Ушбу

$$\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ 2x+y-z=7, \\ x+y-z=4, \\ 3x-y+z=8, \\ x+y+z=6 \end{cases} \qquad (3)$$

системани Гаусс усули билан ечинг.

Биринчи тенгламани 2 га, иккинчисини —1 га кўпайтириб, иккинчига қўшамиз; биринчини 1 га ва учинчини —1 га кўпайтириб, учинчига қўшамиз; биринчини 3 га ва тўртинчини —1 га кўпайтириб, тўртинчига қўшамиз; биринчини 1 га ва бешинчини —1 га кўпайтириб, бешинчига қўшамиз. Натижада

$$\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ -5y+7z=-3, \\ -3y+4z=-2, \\ -5y+8z=-2, \\ -3y+2z=-4 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз.

Бунда иккинчи тенгламани —3 га ва учинчини 5 га кўпайтириб, учинчига қўшамиз; иккинчини —1 га ва тўртинчини 1 га кўпайтириб, тўртинчига қўшамиз; иккинчини —3 га ва бешинчини 5 га кўпайтириб, бешинчига қўшамиз. Натижада

$$\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ -5y+7z=-3, \\ -z=-1, \\ z=1, \\ -11z=-11 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз.

Бу системанинг учинчи тенгламасини —1 га кўпайтириб, бешинчисини —11 га қисқартирсак,

$$\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ -5y+4z=-3, \\ z=1 \end{cases}$$

системага келамиз. Шу билан алмаштиришлар тугайди. Сўнгги системани (2) система сингари ечиб, ягона (3, 2, 1) ечимни топамиз. Демак, (3) аниқ система бўлиб, унинг ягона ечими (3, 2, 1) дир.

3. Ушбу

$$\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+y-2z=-2, \\ x+2y-3z=-4 \end{cases} \qquad (4)$$

системани ечинг.

(4) да элементар алмаштиришларни бажариб,

$$\begin{cases} x-y+z=2, \\ -3y+4z=6, \\ -3y+4z=6 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системада иккинчи ва учинчи тенгламалар битта тенгламани ифодалагани учун (4) га эквивалент қуйидаги система келиб чиқади:

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ \quad -3y + 4z = 6. \end{cases} \tag{5}$$

(5) да бошқа алмаштиришни бажариш мумкин эмас, чунки иккинчи тенглама билан биргаликда қараладиган кейинги тенгламалар йўқ. Иккинчи тенгламадан $-3y = 6 - 4z$ ни ҳосил қилиб, параметр (ёки озод номаълум) деб аталган z га ихтиёрий қиймат берамиз. Масалан, $z = 3$ бўлса, унга мос $-3y = 6 - 4 \cdot 3$, $y = 2$ ни топамиз. Буларни биринчи тенгламага қўйиб, $x = 2 + y - z = 2 + 2 - 3 = 1$, $x = 1$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (6) нинг, демак, (4) нинг ҳам (1, 2, 3) ечимини топдик. Агар z га бошқа, масалан, $z = -6$ қийматни берсак, (5) ва, демак, (4) учун (—2, —10, —6) ечимни топамиз ва ҳ. к. Бундан маълум бўладики, (4) система чексиз кўп ечимларга эга бўлиб, аниқмас система бўлади.

4. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -5 \end{cases} \tag{6}$$

системани ечинг.

(6) да тегишли элементар алмаштиришларни бажариб,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ \quad -x_2 + 0 \cdot x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

системага келамиз. Буни бошқа алмаштириш мумкин эмас. x_4 ва x_5 параметр (озод номаълум) ларга ихтиёрий $x_4 = 2$ ва $x_5 = 5$ қийматлар бериб, $x_3 = 2$ ни, сўнгра $x_2 = 1$ ни, ундан кейин $x_1 = 1$ ни топамиз. Демак, (6) аниқмас система бўлиб, унинг чексиз кўп ечимларидан бири (1, —1, 2, 2, 3) бўлади.

5. Ушбу

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x + y - 2z = -2, \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \tag{7}$$

системани ечинг.

(7) да маълум элементар алмаштиришларни бажариб,

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ -3y + 4z = 6, \\ \qquad 0 = 3 \end{cases} \qquad (8)$$

системага эга бўламиз. Бу системадаги охирги

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$$

тенгламани ҳеч қандай сонлар қаноатлантирмайди. Демак, (8) система ва шу сабабли (7) система ҳам ҳамжойсиз система бўлиб, ечимлари йўқдир.

Мисолларда кўрилган ҳолларга қараб, юқорида келтирилган хулосани янада ойдинлаштирамиз.

Номаълумларни кетма-кет йўқотиш натижасида берилган система учбурчак ёки трапеция шаклдаги системага келса, бу берилган системанинг ҳамжойлилигини кўрсатади. Агар элементар алмаштиришлар натижасида нотўғри $0=\lambda$ ($\lambda \neq 0$) тенглик ҳосил бўлса, бундай система ҳамжойсиз система бўлади.

58-§. БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ БИЛАН БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ ЕЧИМЛАРИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

Коэффициентлари ва озод ҳадлари бирор $\mathscr{P}$ сонлар майдонига тегишли бўлган бир жинсли бўлмаган қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \qquad + a_{in}x_n = b_i \quad (i = \overline{1,m}). \qquad (1)$$

Бу системанинг ҳамма b_i озод ҳадлари ўрнига нолларни олиш билан ҳосил қилинган бир жинсли

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \qquad + a_{in}x_n = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

система (1) га мос бир жинсли система деб юритилган ҳолда, (1) ни (2) га нисбатан асосий система деб аталади.

Аввало бир жинсли система ечимларининг баъзи хоссаларини кўриб ўтамиз.

(2) системанинг ҳар бир (α_1, α_2, α_n) кўринишдаги ечимини $\mathscr{P}$ майдон устидаги R^n фазонинг n ўлчовли вектори деб қараш мумкин. Шу сабабли, исталган иккита (α_1, α_2, , α_n) ва (β_1, β_2, , β_n) ечимни қўшиш, шунингдек α ($\alpha \in \mathscr{P}$) сонни система ечимига кўпайтириш мумкин, яъни

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \qquad + a_{in}\alpha_n = 0,$$
$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \qquad + a_{in}\beta_n = 0,$$
$$a_{i1}(\alpha\alpha_1) + a_{i2}(\alpha\alpha_2) + \qquad + a_{in}(\alpha\alpha_n) = 0$$

бўлади.

1. (2) система ечимларидан исталган иккитасининг

$$(\alpha_1, \alpha_2, \qquad \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \qquad \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \qquad, \alpha_n + \beta_n)$$

йиғиндиси яна (2) нинг ечими бўлади. Ҳақиқатан,

$$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 + \beta_2) + \qquad + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \qquad + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \qquad + a_{in}\beta_n) = 0 + 0 = 0.$$

2. $\alpha \in \mathscr{P}$ соннинг (2) система ечимига кўпайтмаси

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \qquad, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \qquad, \alpha\alpha_n)$$

яна (2) нинг ечимидир. Ҳақиқатан,

$$a_{i1}(\alpha\alpha_1) + a_{i2}(\alpha\alpha_2) + \qquad + a_{in}(\alpha\alpha_n) = \alpha(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \qquad + a_{in}\alpha_n) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

3. (2) нинг ҳар бир $(\alpha_1, \alpha_2, \qquad, \alpha_n)$ ечими билан бирга $-(\alpha_1, \alpha_2, \qquad, \alpha_n) = (-\alpha_1, -\alpha_2, \qquad -\alpha_n)$ ҳам (2) нинг ечими бўлади, чунки

$$a_{i1}(-\alpha_1) + a_{i2}(-\alpha_2) + \qquad + a_{in}(-\alpha_n) = -(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \qquad + a_{in}\alpha_n) = (-1)\cdot 0 = 0.$$

Демак,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \qquad \alpha_n) - (\beta_1, \beta_2, \qquad \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \qquad \alpha_n) + (-\beta_1, -\beta_2, \qquad -\beta_n) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \qquad \alpha_n - \beta_n)$$

ҳам ечимдан иборат.

Агар (2) системанинг ҳамма ечимлари тўпламини $\mathscr{W}$ билан белгиласак, 39-§ даги теоремага асосан, бу тўплам R^n фазонинг қисм фазосини ташкил этади.

Энди қуйидаги теоремани исботлаймиз:

Теорема. *(1) асосий системанинг* $(\mu_1, \mu_2, \qquad, \mu_n)$ *ва* $(\upsilon_1, \upsilon_2, \qquad, \upsilon_n)$ *ечимларидан тузилган* $(\mu_1 - \upsilon_1, \mu_2 - \upsilon_2, \qquad, \mu_n - \upsilon_n)$ *айирма вектор (1) га мос (2) системанинг* *ечимини ифодалайди. (1) асосий системанинг* $(\mu_1, \mu_2, \quad , \mu_n)$ *ечими билан (1) га мос (2) системанинг* $(\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n)$ *ечимидан тузилган* $(\mu_1+\alpha_1, \mu_2+\alpha_2, \quad \mu_n+\alpha_n)$ *йиғинди вектор яна (1) нинг ечими бўлади.*

Исботи.

$$a_{i1}(\mu_1-\upsilon_1)+a_{i2}(\mu_2-\upsilon_2)+\quad+a_{in}(\mu_n-\upsilon_n)=$$
$$=(a_{i1}\mu_1+a_{i2}\mu_2+\quad+a_{in}\mu_n)-(a_{i1}\upsilon_1+a_{i2}\upsilon_2+\quad+$$
$$+a_{in}\upsilon_n)=\bar{b}_i-\bar{b}_i=\bar{0}.$$

Сўнгра

$$a_{i1}(\mu_1+\alpha_1)+a_{i2}(\mu_2+\alpha_2)+\quad+a_{in}(\mu_n+\alpha_n)=$$
$$=(a_{i1}\mu_1+a_{i2}\mu_2+\quad+a_{in}\mu_n)+(a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\quad+$$
$$+a_{in}\alpha_n)=\bar{b}_i+\bar{0}=\bar{b}_i.$$

(1) нинг битта $(\mu_1, \mu_2, \quad , \mu_n)$ ечимига (2) нинг ҳар хил $(\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n)$ ва $(\beta_1, \beta_2, \quad \beta_n)$ ечимларини қўшсак, (1) нинг ҳар хил $(\mu_1+\alpha_1, \mu_2+\alpha_2, \quad , \mu_n+\alpha_n)$ ва $(\mu_1+\beta_1, \mu_2+\beta_2, \quad , \mu_n+\beta_n)$ ечимлари ҳосил бўлади, чунки $\alpha_k\neq\beta_k$ га кўра $\mu_k+\alpha_k\neq\mu_k+\beta_k$ бўлади.

Шундай қилиб, бир жинсли бўлмаган системанинг ҳамма ечимларини ҳосил қилиш учун унинг битта $(\nu_1, \upsilon_2 \quad , \upsilon_n)$ ечимига унга мос бир жинсли системанинг ҳамма ечимларини қўшиб бориш кифоя.

Натижа. **Бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системасининг ечимлари тўплами чизиқли кўпхилликни ташкил этади.**

Ҳақиқатан, агар бир жинсли бўлмаган (1) системанинг бирор ечимини $\bar{x}_0=(\mu_1, \mu_2, \quad , \mu_n)$, (1) га мос бир жинсли система ечимлари тўпламини W, (1) нинг барча ечимлари тўпламини эса H орқали белгиласак, юқоридагиларга асосан W ва H орасида $H=\bar{x}_0+W$ кўринишдаги боғланиш ўринли. Бунда H тўплам W қисм фазони $\bar{x}_0$ векторга суриш натижасидир.

59-§. БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ ФУНДАМЕНТАЛ ЕЧИМЛАРИ СИСТЕМАСИ

Олдинги параграфда кўриб ўтганимиздек,

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\quad+a_{in}x_n=0 \tag{1}$$

бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг ечимлар тўплами V арифметик фазонинг бирор W қисм фазосини ташкил этади.

1-**таъриф.** W қисм фазонинг базасини ташкил этувчи исталган векторлар системаси (1) *системанинг фундаментал ечимлар системаси* дейилади.

Базис векторлар системасининг таърифига асосан

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \qquad , \bar{a}_r \tag{2}$$

система (1) нинг фундаментал ечимлар системаси бўлиши учун қуйидаги иккита шарт бажарилиши керак:

1) (2) система чизиқли эркин бўлади;

2) (1) системанинг ихтиёрий ечими (2) орқали чизиқли ифодаланади.

Бирор арифметик фазонинг базасини ташкил этувчи системалар чексиз кўп бўлса-да (41-§ га қаранг), уларнинг ҳар биридаги векторлар сони ўзаро тенг эди. Бу тушунчалардан фойдаланиб, (1) системанинг ихтиёрий ечимини (биз уни $\bar{a}$ деб белгилаймиз)

$$\bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \qquad + k_r\bar{a}_r \tag{3}$$

шаклда ифодалаш мумкин. Бу ерда $k_i \in \mathscr{P}(i = \overline{1, r})$ бўлгани учун (3) ечим (1) системанинг умумий ечимини топиш формуласини ифодалайди. Энди фундаментал ечимлар системасини топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун (1) системани

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1'}$$

кўринишда ёзиб олиб, унга Гаусс усулини татбиқ этамиз. Бир жинсли система доимо ҳамжойли бўлгани туфайли бир неча марта элементар алмаштиришларни бажаргандан сўнг (1′) система ўзига эквивалент бўлган

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1r}x_r + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = 0, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \quad + c_{2r}x_r + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3r}x_r + c_{3r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{3n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

кўринишдаги системага келади. Бунда $c_{kk} \neq 0$ $(k = \overline{1, r})$ ва

(4) даги тенгламалар сони r номаълумлар сони n дан кичик. Акс ҳолда (4) система нолмас ечимларга эга бўлмас эди (51-§ га қаранг). (4) система r та тенглама ва $(n-r)$ та номаълумдан иборатдир. Шу туфайли биз $x_{r+1}, x_{r+2}, \quad ,$ x_n ларни озод номаълумлар деб, уларга исталган сонли (камида биттаси нолдан фарқли) қийматларни бера оламиз.

Фараз қилайлик, $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = x_{r+3} = \quad = x_n = 0$ бўлсин. Унда (4) системадан $x_r, x_{r-1}, \quad , x_1$ кетма-кетликда барча номаълумларга мос сонли қийматларни топа оламиз. Параметрларнинг юқоридаги қийматларига мос келувчи (1′) системанинг ечими $\overline{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_r, 1, 0, \quad , 0)$ бўлади. Энди $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = \quad = x_n = 0$ деймиз. Унда яна (4) системадан x_i ларга мос келувчи қандайдир β_i $(i = \overline{1,r})$ сонларни топамиз. Натижада (4) системанинг $\overline{a}_{r+2} = (\beta_1, \beta_2, \quad , \beta_r, 0, 1, 0, \quad , 0)$ иккинчи ечимини топа оламиз.

Шу жараённи давом эттириб, $(n-r)$ та қадамдан сўнг (4) система (демак, (1) система)нинг

$$\begin{cases} \overline{a}_{r+1} = (\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_r, 1, 0, \quad , 0), \\ \overline{a}_{r+2} = (\beta_1, \beta_2, \quad , \beta_r, 0, 1, \quad 0), \\ \overline{.} \quad . \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \overline{a}_n = (\gamma_1, \gamma_2, \quad , \gamma_r, 0, 0, \quad 1) \end{cases} \tag{5}$$

ечимларини топамиз. Энди (5) ечимлар системаси (1′) нинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этишини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат: 1) (5) ечимлар системаси ўзаро чизиқли боғланмаган, чунки бу векторларнинг координаталаридан тузилган

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 & \alpha_r & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 \, \beta_2 & \beta_r & 0 & 1 & 0 \\ & & . & . & . \\ \gamma_1 \, \gamma_2 & \gamma_r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицада чизиқли боғланмаган $(n-r)$ та сатр ва $(n-r)$ та устун мавжуд (ўнг қисмда жойлашган матрица); 2) энди (1′) нинг исталган $\overline{a} = (v_1, v_2, \quad , v_r, v_{r+1}, \quad , v_n)$ ечимининг (5) орқали чизиқли ифодаланишини кўрсатамиз.

Қуйидаги векторни оламиз:

$$\bar b = v_{r+1}\bar a_{r+1} + v_{r+2}\bar a_{r+2} + \qquad + v_n \bar a_n. \qquad (6)$$

$\bar a_{r+1}$, $\quad$, $\bar a_n$ векторлар (1′) системанинг ечимлари бўлгани туфайли уларнинг исталган чизиқли комбинацияси ҳам (1′) нинг ечими бўлиши бизга маълум. Демак, (6) тенглик билан аниқланувчи вектор ҳам ечим бўлади. (5) белгилашларга асосан векторнинг охирги $r+1$, $r+2$, $\quad$, n координаталари мос равишда v_{r+1}, v_{r+2}, $\quad$ v_n ларга тенг, чунки, масалан, $v_n\bar a_n = (v_n\gamma_1, v_n\gamma_2, \quad v_n\gamma_n, 0, \quad, v_n)$ бўлганидан $\bar b$ векторнинг n-координатаси v_n га тенг. Демак, $\bar a$ ва $\bar b$ векторларнинг $r+1$, $r+2$, .., n-координаталари устма-уст тушар экан. Бундай ҳолда $\bar a - \bar b$ айирма векторнинг охирги $(n-r)$ та координаталари ноллардан иборат. $\bar a$ ва $\bar b$ лар (1) нинг ечими бўлгани туфайли $\bar a - \bar b$ ҳам ечим бўлиши бизга маълум. Иккинчи томондан, агар (4) системадаги x_{r+1}, x_{r+2}, $\quad$, x_n ларни ноллар билан алмаштирсак, у ҳолда $c_{kk} \neq 0$ бўлгани учун $x_k = 0$ $(k=\overline{1,r})$ бўлади. Демак, $\bar a - \bar b = \bar 0$ ёки $\bar a = \bar b$ бўлиб, ихтиёрий олинган $\bar a$ вектор ҳам $\bar a_{r+1}$, $\bar a_{r+2}$, $\quad$, $\bar a_n$ ечимларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади. Шундай қилиб, (5) система (1′) тенгламалар системасининг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

(5) системадаги ечимлар сони $n-r$ та бўлганидан (1′) система фундаментал ечимлар системасидаги ечимлар ҳам $(n-r)$ та вектордан иборат.

1-*натижа.* Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари системасида ечимлар сони номаълумлар сони билан система матрицаси рангининг айирмасига тенг.

2-*натижа.* n та номаълумли m та бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг ечимлари тўплами $n-r$ ўлчовли векторлар фазосини ташкил этади.

Ҳақиқатан, бир жинсли системанинг фундаментал ечимлари сони $p=n-r$ га тенг бўлганидан ҳамда бир жинсли системанинг исталган ечимларининг чизиқли комбинацияси ана шу системанинг ечими эканлигидан мазкур ечимлар системаси қандайдир векторлар фазосини ташкил этади. Векторлар фазосидаги чизиқли боғланмаган векторларнинг максимал сони (яъни фундаментал ечимларни ташкил этувчи векторлар сони) $n-r$ бўлгани учун бу фазо $n-r$ ўлчовлидир.

Мисол.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - \ \ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

системанинг фундаментал ечимлар системасини топинг.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Иккинчи сатрни 3 га кўпайтириб, иккинчини биринчидан, сўнгра биринчини 2 га кўпайтириб, учинчини биринчидан айирамиз, у ҳолда

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицанинг учинчи сатрини иккинчидан айирамиз, у ҳолда

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. Бу матрицадаги ноль бўлмаган сатрлар сони 2 та.

Демак, матрицанинг ранги 2 га тенг. Шунинг учун берилган системанинг биринчи иккита тенгламасини ечамиз. У ҳолда берилган системадан

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = x_3 + x_4, \\ x_1 - \ \ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases} \qquad (7)$$

системани ҳосил қиламиз.

x_3 ва x_4 параметрлар иккита бўлгани учун фундаментал система иккита ечимдан тузилади. Параметрларга аввал $x_3 = 5$ ва $x_4 = 0$, сўнгра $x_3 = 0$ ва $x_4 = 5$ қийматларни берамиз. Параметрларнинг биринчи қийматларида (7) дан

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_1 - \ \ x_2 = 5 \end{cases}$$

система келиб чиқади. Бу системани ечиб, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ ларни топамиз. Параметрларнинг иккинчи қийматларида (7) дан

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечиб, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ ларни топамиз. Демак, фундаментал ечимлар системаларининг биттаси (3, —2, 5, 0), (—1, 4, 0, 5) бўлади ва берилган системанинг умумий ечими $\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ бўлиб, бу ерда $\alpha_1 = 3c_1 - c_2$, $\alpha_2 = -2c_1 + 4c_2$, $\alpha_3 = 5c_1$, $\alpha_4 = 5c_2$ (c_1, $c_2 \in Z$) тенгликлар билан аниқланади ёки $\bar{a} = c_1(3, -2, 5, 0) + c_2(-1, 4, 0, 5)$ бўлади.

Машқлар

1.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

системанинг умумий ва фундаментал ечимлари системасини топинг.

2. $\alpha_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$,
$\alpha_2 = (0, 0, -1, 1, 0)$,
$\alpha_3 = (4, 0, 0, -6, 2)$

ечимлар системаси

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

система учун фундаментал ечимлар системаси бўладими?

V БОБ ДЕТЕРМИНАНТЛАР

60-§. МАТРИЦАЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Биз бу бобда матрицалар устида бажариладиган амаллар, уларнинг хоссалари, қайси ҳолларда берилган матрица учун тескари матрица мавжудлиги каби масалалар билан шуғулланамиз. Матрица тушунчасидан фойдаланиб, чизиқли тенгламалар системасининг ечимларини топишда муҳим аҳамиятга эга бўлган детерминантлар тушунчасини киритамиз. Элементлари $a_{ij}\in\mathscr{P}(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ сонлардан тузилган матрица баъзан $\|a_{ij}\|$ орқали белгиланади. Фақат номдош матрицалар учун қўшиш қоидаси аниқланган. $\mathscr{P}$ майдон устидаги исталган икки номдош матрицани қўшиш қуйидаги қоида бўйича бажарилади:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & a_{2n} \\ & \\ a_{m1}\,a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11}\,b_{12} & b_{1n} \\ b_{21}\,b_{22} & b_{2n} \\ & \\ b_{m1}\,b_{m2} & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Демак, йиғинди матрицанинг $\|a_{ij}+b_{ij}\|$ элементлари қўшилувчи матрицаларнинг мос a_{ij} ва b_{ij} элементлари йиғиндиларига тенг бўлиб, йиғиндини тасвирловчи матрица қўшилувчилар билан номдош бўлади.

Матрицаларни қўшиш коммутатив ва ассоциатив эканлиги равшан, чунки бу амал матрицаларнинг элементларини, яъни сонларни қўшишдан иборат. Шундай қилиб, исталган матрицалар учун

$$A+B=B+A,\quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

тенгликлар бажарилади. Ҳамма элементлари ноллардан иборат матрица ноль матрица деб аталади ва у 0 орқали белгиланади. 0 матрица билан номдош ҳар қандай A матрица учун $A+0=0+A=A$ бўлади. Матрицани (-1) сонга кўпайтириш амали қуйидагича аниқланади:

$$(-1)\cdot A=-A=-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & & -a_{2n} \\ & & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бу матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицага қарама-қарши матрица дейилади ва $A+(-A)=0$ бўлади. $A+(-B)$ йиғинди $A-B$ кўринишда ёзилиб, у A ва B матрицаларнинг айирмаси дейилади. Матрицаларни айириш амали қуйидагича бажарилади: $A-B=$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & & a_{2n}-b_{2n} \\ & & & \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Хусусий ҳолда $A-A=0$, $A-0=A$, $0-A=-A$ бўлади.

Натижа. Номдош матрицалар тўплами аддитив группа бўлади.

Энди матрицаларни кўпайтириш қоидасини кўрайлик.

Фақат $m\times n$ кўринишдаги матрицани $n\times k$ кўринишдаги матрицага кўпайтириш мумкин, бошқача айтганда, фақат n устунли матрица n сатрли матрицага кўпайтирилади. Кўпайтмада $m\times k$ кўринишли матрица ҳосил бўлади, яъни

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}.$$

$A_{m\times n}$ матрица (m, n) турли матрица дейилади. $A_{m\times n}$ ва $B_{n\times k}$ матрицаларни кўпайтириш қоидаси қуйидагидан иборат: $A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}$ кўпайтманинг ҳар бир C_{ij} элементини ҳосил қилиш учун $A_{m\times n}$ нинг i-сатридаги элементларни $B_{n\times k}$ нинг j-устунидаги мос элементларга кўпайтириб, натижалар қўшилади, яъни

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1i} + a_{i2} b_{2j} + \qquad + a_{in} b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Шундай қилиб,

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & A_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2k} \\ & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} a_{1l} b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{1l} b_{l2} & & \sum_{l=1}^{n} a_{1l} b_{lk} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{2l} b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{2l} b_{l2} & & \sum_{l=1}^{n} a_{2l} b_{lk} \\ & & & \\ \sum_{l=1}^{n} a_{ml} b_{l1} & \sum_{l=1}^{n} a_{ml} b_{l2} & & \sum_{l=1}^{n} a_{ml} b_{lk} \end{pmatrix} =$$

$$= C_{m\times k}$$

бўлади.

Хусусий ҳолда, квадрат матрицаларни кўпайтириш учун уларнинг турлари бир хил бўлиши талаб қилинади.

Кўпайтма ҳам худди шу турдаги квадрат матрицани ифодалайди.

Масалан,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & -8 \\ 9 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -22 & 14 & 4 \\ -1 & -14 & 32 \\ 38 & 1 & -4 \end{pmatrix} = C,$$

$$A \cdot B = C.$$

Иккитадан ортиқ матрицаларни ҳам кўпайтириш мумкин. Масалан, учта матрица қуйидаги схема бўйича кўпайтирилади:

$$(A_{m\times n} \cdot B_{n\times k}) \cdot C_{k\times p} = D_{m\times k} \cdot C_{k\times p} = X_{m\times p}.$$

Мисол.

$$\left((1\ \ 2\ \ -3)\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0 & 5 & -2\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=(0\ \ -9)\begin{pmatrix}0 & 5 & -2\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}=(-9\ \ -27\ \ -72).$$

Қуйидаги теорема матрицаларни кўпайтириш ассоциатив эканини тасдиқлайди.

Теорема. *Учта A, B, C матрица учун AB ва BC кўпайтмалар матрицалар бўлса, у ҳолда $(AB)\cdot C$ ва $A\cdot(BC)$ кўпайтмалар ҳам матрицалар бўлиб, $(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$ тенглик бажарилади.*

Исботи. A, B, C лар мос равишда (m, n), (n, k), (k, p) турли матрицалар бўлсин. У ҳолда $A\cdot B$ кўпайтма $(m, n)\cdot(n, k) = (m, k)$ турли ва BC кўпайтма $(n, k)\cdot(k, p) = (n, p)$ турли бўлиши равшан. У ҳолда $(AB)\cdot C$ кўпайтма $(m, k)\cdot(k, p) = (m, p)$ турли ва $A\cdot(B\cdot C)$ кўпайтма ҳам $(m, n)\cdot(n, p) = (m, p)$ турли бўлиб, уларнинг турлари бир хил бўлади.

Энди $(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$ тенгликнинг бажарилишини, яъни $(AB)\cdot C$ ва $A\cdot(BC)$ матрицаларнинг умумий u_{ij} ва v_{ij} элементлари ўзаро тенг эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, AB нинг умумий элементи

$$d_{i\beta}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}b_{\alpha\beta}\ \ (i=\overline{1,m},\ \beta=\overline{1,k}) \qquad (1)$$

ва BC нинг умумий элементи

$$d_{ij}=\sum_{\beta=1}^{k}b_{i\beta}c_{\beta j}\ \ (j=\overline{1,p}) \qquad (2)$$

бўлади.

(1) ва (2) ларга биноан $(AB)\cdot C$ ва $A\cdot(BC)$ ларнинг умумий элементлари мос равишда

$$u_{ij}=\sum_{\beta=1}^{k}d_{i\beta}c_{\beta j}=\sum_{\beta=1}^{k}\ \sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta j},$$

$$v_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}d_{\alpha j}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}\sum_{\beta=1}^{k}b_{\alpha\beta}c_{\beta j}=$$

$$=\sum_{\beta=1}^{k}\ \sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}b_{\alpha\beta}c_{\beta j}$$

бўлади. Шундай қилиб, $u_{ij} = v_{ij}$. Демак, $(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$.

Натижа. Турлари бир хил бўлган квадрат матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан ярим группа бўлади.

Ҳақиқатан, бу тўпламда матрицаларни кўпайтириш амали аниқланган ва у ассоциатив бўлгани учун мазкур тўплам ярим группадир.

Мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (6 \;\; 4 \;\; 1) \text{ бўлса,}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot(6 \;\; 4 \;\; 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}\cdot(6 \;\; 4 \;\; 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ 48 & 32 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (6 \;\; 4 \;\; 1)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 12 & 3 \\ -12 & -8 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ 48 & 32 & 8 \end{pmatrix}$$

тенгликларга кўра $(AB)\,C = A\,(BC)$ бўлади.

Умуман, матрицаларни кўпайтириш коммутатив эмас. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

матрицалар учун

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & -5 & -11 \\ 2 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

$AB \neq BA$. Чунки AB ва BA матрицалар номдош бўлмаган матрицалардир.

Худди шунингдек,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

номдош матрицалар учун

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ -22 & 4 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & -38 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

бўлиб, бунда ҳам $AB \neq BA$ экан.

Берилган $\alpha \in \mathscr{P}$ сонни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицага кўпайтириш деб, бу сонни A нинг ҳамма элементларига кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган матрицага айтилади, яъни

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \ldots & \alpha a_{2n} \\ & \cdot & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \ldots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Биринчидан, $\alpha A = A\alpha$ эканлиги равшан. Иккинчидан, (3) тенглик матрицадаги ҳамма элементларнинг α умумий кўпайтувчисини матрица белгиси ташқарисига чиқариш мумкинлигини кўрсатади. Номдош матрицалар учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\alpha\ (A+B) = \alpha A + \alpha B;$$
$$\alpha\ (A-B) = \alpha A - \alpha B;$$
$$(\alpha+\beta)\ A = \alpha A + \beta A;$$
$$(\alpha-\beta)\ A = \alpha A - \beta A;$$
$$(\alpha\beta)\ A = \alpha\ (\beta A).$$

Натижа. Номдош матрицалар тўплами берилган сонлар майдони устида чизиқли фазони ташкил этади.

61- §. ТЕСКАРИ МАТРИЦА

n-тартибли квадрат матрицанинг бош диагонали элементлари 1 лардан ва қолган ҳамма элементлари 0 лардан иборат ушбу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишдаги матрица *бирлик матрица* дейилади ва у E орқали белгиланади.

n-тартибли исталган A квадрат матрица учун $AE= = EA = A$ эканлигига ишонч ҳосил қилиш осон.

1-**таъриф.** Бирлик матрицадан элементлар алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлган матрица *элементар матрица* дейилади.

Қуйидагилар иккинчи тартибли элементар матрицалардир:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{pmatrix}$$

Бу ерда $\forall \alpha \in \mathscr{P}$ $(\alpha \neq 0)$.

Исталган тартибли бирлик матрица сатрлари (устунлари) чизиқли боғланмаган бўлгани учун элементар матрицаларнинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғланмаган бўлади. Чунки элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди (54-§).

Қуйидаги n-тартибли квадрат матрицани олайлик:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг горизонтал

$$\bar{a}_1 = (a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}),$$
$$\bar{a}_2 = (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}),$$
$$\bar{a}_n = (a_{n1},\ a_{n2},\ \ldots,\ a_{nn})$$

векторлари, яъни сатрлари чизиқли эркли ёки чизиқли боғланган бўлиши мумкин. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицанинг сатрлари чизиқли боғланган, чунки учинчи сатр қолган икки сатрнинг чизиқли комбинациясидан иборат, яъни

$$2 = (-4)\cdot 1 + 1\cdot 6,\ 5 = 1\cdot 2 + 1\cdot 3,\ 1 = 1\cdot(-1) + 1\cdot 2.$$

E бирлик матрицанинг сатрлари чизиқли эркли, чунки улар фазонинг $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n$ ортларидир.

2-**таъриф**. Барча сатр векторлари чизиқли эркли матрица *хосмас (айнимаган) матрица*, барча сатр векторлари чизиқли боғланган матрица *хос (айниган) матрица* деб аталади.

3-**таъриф**. A матрица учун $AB = BA = E$ тенгликни қаноатлантирувчи B матрица мавжуд бўлса, у ҳолда B ни A га *тескари матрица* дейилади ва у A^{-1} кўринишда белгиланади.

3-таърифдаги B ўрнига A^{-1} қўйсак, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ бўлади.

1-теоремс. *Матрицанинг сатр векторларидан бири қолган сатр векторлари орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда уни ихтиёрий матрицага кўпайтиришдан ҳосил бўлган кўпайтма матрицанинг ҳам худди ўша номерли сатр вектори қолган сатр векторлари орқали чизиқли ифодаланади.*

Исботи. A матрица берилган бўлиб, унинг биринчи сатри қолганлари орқали чизиқли ифодаланади деб фараз қилайлик, яъни

$$a_{1j} = \alpha_2 a_{2j} + \alpha_3 a_{3j} + \quad + \alpha_n a_{nj} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

бўлсин. Ихтиёрий $B = \|b_{ij}\|$ матрицанинг A га кўпайтмаси $AB = C = \| c_{ij}\|$ бўлиб, матрицалар кўпайтмаси таърифи ва (1) га асосан

$$c_{1j} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \; . . + a_{1n}b_{nj} = \left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_{i1}\right) b_{1j} +$$

$$+ \left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_{i2}\right) b_{2j} + \quad + \left(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_{in}\right) b_{nj} = \alpha_2 \; (a_{21}b_{1j} +$$

$$+ . \; . + a_{2n}b_{nj}) + \alpha_3 \; (a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + \ldots + a_{3n}b_{nj}) +$$

$$+ . \; . + \alpha_n \; (a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + . \; . + a_{nn}b_{nj}) = \alpha_2 c_{2j} +$$

$$+ \alpha_3 c_{3j} + \ldots + \alpha_n c_{nj} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i c_{ij}, \; c_{1j} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i c_{ij}$$

керакли натижани оламиз, бу ерда

$$c_{ij} = a_{ij} b_{1i} + a_{i2} b_{2j} + \quad . + a_{in} b_{nj} \; (i = \overline{2,n}; \; j = \overline{1,n}).$$

2-теорема. *Хос матрицага тескари матрица мавжуд эмас.*

Исботи. Фараз қилайлик, A хос матрица бўлсин. У ҳолда унинг сатр векторлари чизиқли боғланганлиги сабабли, бу сатр векторлардан бири қолганлари орқали чизиқли ифодаланади. У ҳолда 1-теоремага мувофиқ, AA^{-1} кўпайтманинг ҳам ўша сатр вектори қолганлари орқали чизиқли ифодаланади. $AA^{-1}=E$ бўлганлиги сабабли, бу тасдиқ E нинг сатр векторлари чизиқли эркли бўлишига зид келади.

Демак, фақат хосмас квадрат матрицалар учунгина тескари матрицалар мавжуд бўлади.

3-теорема. *Хосмос квадрат A матрицани элементар алмаштиришлар ёрдамида бирлик матрицага келтириш мумкин.*

Исботи. A хосмас матрицанинг ҳамма сатрлари нолмас сатрлардан иборат, шу сабабли ҳар бир сатрда нолдан фарқли камида битта элемент мавжуд. A матрица қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементар алмаштиришларни фақатгина сартлар устида бажариб, A ни бирлик матрицага келтириш мумкинлигини кўрсатамиз.

a_{k1} $(k=\overline{1,n})$ сонлардан қайси бири нолдан фарқли бўлса, ўша элемент жойлашган сатрни (a_{k1} лардан бир қанчаси нолдан фарқли бўлса, шу элементлар жойлашган ихтиёрий сатрни) биринчи сатр билан алмаштирамиз. Шундай қилиб, $a_{11}\neq 0$ дея оламиз. Агар биринчи устунда a_{11} дан бошқа нолдан фарқли элементлар бўлса, уларни биринчи сатр элементлари ёрдамида ноларга айлантирамиз.

Натижада A матрица

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\ \cdot\, a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdot\ \cdot\, b_{3n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots b_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишга келади. Энди $b_{22}\neq 0$ деб фараз қилиб, B нинг иккинчи сатрини $-\frac{b_{32}}{b_{22}}, -\frac{b_{42}}{b_{22}}, \ldots \quad -\frac{b_{n2}}{b_{22}}$ ларга кўпайтириб, натижаларни мос равишда 3, 4, ., n-сатрларга қўшсак, B матрица

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdot & \cdot\, a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23}\cdot & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdot\, c_{3n} \\ & & & \\ 0 & 0 & c_{n3} & \cdot\, c_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади. Бу жараённи яна $n-2$ марта такрорласак, C матрица

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot\, 1 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdot\cdot\, b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdot\cdot\, c_{3n} \\ & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\, c_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишни олади. Энди матрицанинг биринчи сатрини $\frac{1}{a_{11}}$ га, иккинчи сатрини $\frac{1}{b_{22}}$ га, , n-сатрини $\frac{1}{c_{nn}}$ га кўпайтирсак,

$$M=\begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{13}\cdot\cdot\cdot & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23}\cdot & \cdot\, d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot\, d_{3n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. M матрицада n-сатрни $-d_{1n}$, $-d_{2n}$, ., $-d_{n-1n}$ ларга кўпайтириб, натижаларни мос равишда 1, 2, $n-1$-сатрларга, сўнгра $(n-1)$-сатрни $-d_{1n-1}$, $-d_{2n-1}$, $-d_{n-2\ n-1}$ ларга кўпайтириб, натижаларни мос равишда 1, 2, ., $n-2$-сатрларга ва ниҳоят иккинчи сатрни $-d_{12}$ га кўпайтириб, натижани биринчи сатрга қўшсак, матрица ушбу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .\,0 \\ 0 & 1 & 0 & .\,0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади. Охирги матрица эса E (бирлик) матрицадир.

Мисол.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

хосмас матрицани бирлик матрицага келтирайлик. Аввало A нинг биринчи сатрини —3 га кўпайтириб, натижани иккинчи сатрга, кейин биринчи сатрни яна — 2 га кўпайтириб, натижани учинчи сатрга қўшамиз. Унда

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада учинчи сатрни —1 га кўпайтириб, уни иккинчи сатр билан алмаштирамиз. Натижада

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрицани ҳосил қиламиз. Энди C матрицада иккинчи сатрни биринчи сатрга, учинчи сатрни иккинчи сатрга қўшсак,

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрица ва ниҳоят D матрицадаги учинчи сатрни — 1га кўпайтириб, биринчи сатрга кўшсак,

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу эса бирлик матрицадир.

4-теорема. *Хосмас матрицага тескари матрица мавжуд ва ягонадир.*

Исботи. Матрицадаги сатр алмаштиришларни чапдан бирор матрицага кўпайтириш деб қараш мумкин.

S матрица (m, n) турли матрица бўлиб, унинг фақат битта элементи 1, қолган элементлари 0 бўлсин. 1 элемент i-сатр, j-устунда турувчи сон бўлсин.

$S\cdot A$ (бунда A (n, k) турли матрица) кўпайтма матрицада i-сатр A даги j-сатр билан устма-уст тушади. Қолган барча сатрлар 0 лардан иборат бўлади. Масалан,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

У ҳолда $i=2$, $j=3$ бўлади.

$$S\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$S \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Энди

$$S' = \begin{array}{cccccccc}
 & & & i & & j & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
i & & & 0 & \cdots & 1 & & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
j & & & 1 & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}, \quad S'' = \begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & & \\
i & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots \\
 & & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & 1
\end{array}$$

$$S'' = \begin{array}{cccccccc}
 & & & & i & & & \\
 & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & & \\
i & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \alpha & \cdots & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & \vdots & \ddots & & \\
 & & & & \vdots & & 1 &
\end{array}$$

кўринишдаги S', S'', S''' матрицаларни текширамиз.

S' матрицада бош диагоналнинг $n-2$ та элементи 1 га ва бу диагоналдан ташқарида яна иккита элемент 1 га, қолган элементлари нолга тенг.

S'' матрицада бош диагоналнинг битта элементи α га, қолганлари 1 га ва бош диагоналдан ташқари барча элементлар 0 га тенг. S''' матрицада бош диагонал элементлари 1 га, ундан ташқарида битта элемент α га, қолган барча элементлар 0 га тенг.

Бу тушунчаларга асосланиб қуйидаги *хулосаларга* келамиз:

1) $S'A$ матрица A матрицадаги i ва j-сатрларнинг ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлади;

2) $S''A$ матрица A матрицанинг i-сатрини α сонга кўпайтириш натижасида ҳосил бўлади;

3) $S'''A$ матрица A матрицадаги j-сатрни α сонга кўпайтириб, i-сатрга қўшиш натижасида ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, A матрицада ихтиёрий элементар сатр алмаштиришларни A матрицага чапдан бирор ёрдамчи матрицаларни (S', S'', S''') кўпайтириш натижасида ҳосил қилиш мумкин.

Бу тушунча ва 3-теоремага асосан қуйидаги *хулосага* келамиз: Агар хосмас A матрицани чапдан $S_1, S_2, \ldots, S_p$ хосмас матрицаларга кўпайтирсак, у ҳолда бирлик E матрицани ҳосил қиламиз, яъни $S_p\ (.\ .\ (S_2\ (S_1 \cdot A))\quad .) = E$ бўлади. Бунда $S_1, S_2, \quad S_p$ лар S', S'', S''' кўринишдаги матрицалар.

Матрицаларни кўпайтириш амали ассоциатив хоссага эга бўлгани учун охирги тенгликдаги қавсларни ташлаб юбориш мумкин. Шунинг учун $S_p \quad S_2 \cdot S_1 \cdot A = E$ бўлади. $S_p \quad S_2 \cdot S_1$ кўпайтмани B орқали белгилаймиз ва охирги тенгликни

$$B \cdot A = E \qquad (1)$$

кўринишда ёзамиз. (1) дан кўринадики, ихтиёрий хосмас A матрица бирор B матрицага тескари бўлади.

B матрица ҳам хосмас (акс ҳолда унга тескари матрица мавжуд бўлмайди) бўлгани учун унга тескари бирор C матрица мавжуд бўлади, яъни

$$C \cdot B = E. \qquad (2)$$

(2) тенгликнинг иккала томонини ўнгдан A матрицага кўпайтирамиз: $(CB)\ A = E \cdot A$ ёки $C\ (BA) = A$. (1) тенгликка асосан $C = A$ бўлади. Бундан $A \cdot B = E$ бўлади.

Демак, B матрица A матрица учун изланган тескари матрица бўлади.

Энди берилган хосмас матрицага ягона тескари матрица мавжудлигини кўрсатайлик. Тескарисини фараз қиламиз. A га тескари бўлган камида иккита B ва C матрицалар мавжуд бўлсин. B ва C ларнинг тенг эканлигини кўрсатайлик. Ҳақиқатан, B матрица A га тескари матрица бўлгани учун

$$AB = BA = E \qquad (3)$$

бўлади.

C матрица ҳам A га тескари матрица бўлгани учун

$$A \cdot C = E \qquad (4)$$

тенглик ўринли. (4) нинг иккала томонини чапдан B га кўпайтирамиз ва (3) дан фойдаланамиз: $B\ (AC) = BE = B$, $(BA) \cdot C = E \cdot C = C$, $B\ (AC) = (BA) \cdot C$ ёки $B \cdot E = E \cdot C$. Бу эса $B = C$ демакдир.

Матрицалар кўпайтмаси коммутатив бўлмагани учун берилган хосмас матрицага тескари бўлган матрицани топиш пайтида мазкур матрицада элементар алмаштиришларни фақат сатрлар бўйича бажариш керак.

Элементлари бирор $\mathscr{P}$ майдонга тегишли бўлган барча (n, n) турли хосмас матрицалар тўпламини $GL(n, \mathscr{P})$ орқали белгилаймиз.

5-теорема. *$< GL(n, \mathscr{P}), \cdot >$ алгебра группа бўлади.*

Исботи. 60-§ да кўриб ўтганимиздек, а) учта A, B ва C матрицалар кўпайтмаси ассоциатив; б) иккита (n, n) турли хосмас матрицалар кўпайтмаси яна хосмас матрицадир(1-теоремага қаранг); в) 4-теоремага кўра ҳар бир хосмас матрица учун ягона тескари матрица мавжуд; г) ҳар қандай бирлик матрица хосмас матрица бўлади.

Бу шартларнинг бажарилиши (n, n) турли хосмас матрицалар тўпламининг кўпайтириш амалига нисбатан группа эканлигини кўрсатади.

Энди хосмас A матрицага тескари бўлган B матрицани топишнинг қуйидаги усулини баён қиламиз.

A ва E матрицаларни ёнма-ён, яъни ушбу

$$A/E=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12}\cdot & & \cdot a_{1n} & 1 & 0\,. & & .\,0 \\ a_{21} & a_{22}\,. & .\,. & a_{2n} & 0 & 1\,. & .\,. & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & \cdot a_{nn} & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

кўринишда ёзиб, A нинг устида қандай элементар алмаштиришлар бажарилса, E нинг устида ҳам ўша элементар алмаштиришларни бажариш керак. Бу жараённи A матрица ўрнида бирлик матрица ҳосил бўлгунча давом эттириб,

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & .\,0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right)$$

кўринишдаги матрицани ҳосил қиламиз. Бу матрицанинг ўнг қисмида A га тескари B матрица ҳосил бўлди, яъни E/A^{-1} бўлди.

Мисол.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

хосмас матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг.

$$A/E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

матрицанинг A даги биринчи ва E даги иккинчи устунларнинг ўринларини алмаштирамиз.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Биринчи устунни —2 га ва 1 га кўпайтириб, иккинчи ва учинчига қўшамиз. У ҳолда

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада иккинчи устунни —2 га кўпайтириб, биринчи устунга ва иккинчи устунни —6 га кўпайтириб, учинчи устунга қўшамиз. У ҳолда

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада учинчи устунни иккинчи устунга, кейин эса биринчи устунга қўшамиз ва ушбу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

матрицани ҳосил қиламиз. Бу матрицадаги учинчи устунни —1 га кўпайтирсак,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

матрица ҳосил бўлади. Демак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

бўлади. Ҳақиқатан, $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times$

$$\times\begin{pmatrix}-8 & -5 & 6\\ 18 & 11 & -13\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 6\\ 18 & 11 & -13\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Машқлар

1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

матрицаларнинг кўпайтмасини топинг. Мазкур кўпайтмадан қандай хулоса чиқариш мумкин?

2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

матрицаларнинг n-даражалари қандай матрицани ифодалайди?

3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 4\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

бўлса, $AB-BA$ ни ҳисобланг.

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ матрица учун тескари бўлган матрицани топинг.

62-§. МАТРИЦАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Бирор $\mathcal{P}$ сонлар майдони устидаги n та номаълумли, n та чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

кўринишда берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & . a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицани (1) системанинг матрицаси дейилади. Айтайлик, A — хосмас матрица бўлсин. У ҳолда (1) нинг чап томонида A матрицани

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрицага кўпайтиришдан келиб чиқадиган n та сатрли ва 1 устунли матрицанинг элементлари, ўнг томонида эса

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

матрицанинг элементлари туради деб қараш мумкин. Шу сабабли ва иккита матрицанинг тенглик шартига асосан, (1) ни ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & . a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

ёки қисқача

$$AX = B \qquad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (2) га *матрицали тенглама* дейилади.

A га тескари A^{-1} матрица мавжуд бўлганидан (2) нинг ечими

$$X = A^{-1}B \qquad (3)$$

кўринишда бўлади.

Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

бўлса, $AX = B$ тенгламани ечайлик. A матрица хосмас матрица бўлгани учун унга тескари A^{-1} матрица мавжуд. A^{-1} ни 61-параграфда кўрсатилган усул билан топамиз:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Демак, (3) га кўра:

$$x_1 = 6\cdot 2 + (-1)\cdot 9 + (-1)\cdot 2 = 1, \quad x_1 = 1,$$
$$x_2 = (-1)\cdot 2 + 1\cdot 9 + (-1)\cdot 2 = 5, \quad x_2 = 5,$$
$$x_3 = (-3)\cdot 2 + 1\cdot 9 + 0\cdot 2 = 3, \quad x_3 = 3$$

бўлиб, берилган тенгламанинг ечими $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ экан.

63-§. ЎРНИГА ҚЎЙИШЛАР ГРУППАСИ

Фараз қилайлик, n та элементга эга бўлган A тўплам берилган бўлсин. Бу элементларни $1, 2, 3, \ldots, n$ сонлар орқали номерлаб чиқайлик. Унда элементлар табиати бизни қизиқтирмагани учун бу тўпламни $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ кўринишда ёзиш мумкин.

1-таъриф. A тўпламни ўзига биектив (ўзаро бир қийматли) акслантиришга *ўрнига қўйиш* дейилади.

n та элементли A тўпламда $n!$ (n факториал деб ўқилади ва $n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n$) та ўрнига қўйишлар мавжуд.

Охирги тасдиқни қуйидагича исботлаймиз. Фараз қилайлик, n та катакчалар берилган бўлсин. Уларни $1, 2, 3, \ldots, n$ сонлари ёрдамида номерлаш мумкин. Энди катакчаларни неча хил усулда номерлаш мумкин деган масалани қарайлик.

Биринчи катакчани 1 дан n гача бўлган сонлар ёрдамида, яъни n усулда номерлаш мумкин.

Иккинчи катакчани номерлаш учун бизнинг ихтиёримизда $n-1$ та сон қолади. Демак, уни $n-1$ усулда номерласак бўлади. Шундай қилиб, биринчи ва иккинчи катакчаларни ҳаммаси бўлиб $n(n-1)$ та усулда номерлаш мумкин.

Учинчи катакчани номерлаш учун $n-2$ та сон қолгани учун уни $n-2$ та усулда, дастлабки учта катакни эса ҳаммаси бўлиб $n(n-1)(n-2)$ та усулда номерлаш мумкин. Бу жараённи давом эттирсак, охирги катакчани фақат 1 усулда номерлаш мумкин. Бу тушунчалардан барча n та катакчани эса $n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ та усулда номерлай оламиз.

Шундай қилиб, A тўпламни барча биектив акслантиришлари $n!$ та ўрнига қўйишларни ифодалар экан.

Ўрнига қўйишлар одатда s, t, ... ҳарфлар орқали белгиланади.

Агар s ўрнига қўйиш деганда 1 нинг қандайдир i_1 га, 2 нинг i_2 га, 3 нинг i_3 га, ..., n нинг i_n га ўтишини тушунсак, уни қисқача $s = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n\end{pmatrix}$ $(i = \overline{1,n})$ белги ёрдамида ёзамиз. Шундай қилиб, ҳар бир ўрнига қўйиш чекли тўпламни ўзига-ўзини акслантиришдан иборат экан. Бу ерда $1 \to i_1$, $2 \to i_2, \dots, n \to i_n$ мосликлар ўринли.

Энди A тўпламнинг элементларидан тузилган

$$t = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n\end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишни олиб, иккита ўрнига қўйишнинг тенглиги тушунчасини киритайлик.

2-таъриф. Агар $i_k = j_k$ $(k = \overline{1,n})$ бўлса, s ва t ўрнига қўйишлар *ўзаро тенг* дейилади ва у $s = t$ орқали ёзилади.

Мисол.

$$s = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1\end{pmatrix} \text{ ва } t = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишлар ўзаро тенгдир.

Агар юқоридаги сатрнинг бирор рақами учун $i_k \neq j_k$ бўлса, $s \neq t$ деб юритилади.

Ўрнига қўйишларнинг ихтиёрий сатридаги элементлар сони шу ўрнига қўйишнинг тартибини белгилайди.

3-таъриф. A тўпламнинг ҳар бир i элементини яна i ўтказувчи e акслантиришга *айний ўрнига қўйиш* дейилади ва $e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n\end{pmatrix}$ орқали белгиланади.

A тўпламнинг барча ўзаро бир қийматли акслантиришлар (ўрнига қўйишлари) тўпламини S_n орқали белгилайлик. S_n тўпламнинг иккита элементи кўпайтмаси тушунчасини киритамиз.

Иккита s ва t ўрнига қўйишлар кўпайтмаси деганда аввал s, сўнгра t ўрнига қўйишларнинг бажарилишини тушунамиз. Масалан,

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\ t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

бўлса,

$$s\cdot t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

$s\cdot t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ бўлади. Чунки $1\to 2$, $2\to 2$ бўлганидан $1\to 2$; $2\to 3$, $3\to 4$ бўлгани учун $2\to 4$ бўлади; $3\to 4$ ва $4\to 1$, у ҳолда $3\to 1$; $4\to 1$ ва $1\to 3$, у ҳолда $4\to 3$ бўлади.

Энди $t\cdot s$ ни топайлик:

$$t\cdot s=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ t\cdot s=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Юқоридаги иккита кўпайтмадан $s\cdot t\neq t\cdot s$ экан, деган хулосага келамиз, яъни ўрнига қўйишлар кўпайтмаси коммутатив эмас.

Теорема. *А чекли тўпламнинг барча ўрнига қўйишлар тўплами мультипликатив группа бўлади.*

Исботи. 1. 9-§ да кўриб ўтганимиздек, иккита акслантиришлар композицияси яна акслантириш бўларди. Шунга асосан иккита n-тартибли ўрнига қўйишлар кўпайтмаси яна n-тартибли ўрнига қўйиш бўлади.

2. S_n даги исталган s ўрнига қўйишни айний ўрнига қўйиш (яъни e) га кўпайтирсак, кўпайтма s га тенг бўлади. Чунки $k\to i_k$ бўлганда $i_k\to i_k$ бўлади. Демак, $k\to i_k$ бўлади. Шунинг учун $e\cdot s=s$ бўлади.

3. S_n тўпламнинг исталган s ўрнига қўйиши учун s^{-1} орқали белгиланувчи тескари ўрнига қўйиш мавжуд. Дарҳақиқат,

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$$

ўрнига қўйишнинг биринчи ва иккинчи сатрлари ўринларини алмаштирсак, $s^{-1}=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & i_3 & \cdot & i_n\\ 1 & 2 & 3 & . & n\end{pmatrix}$ ҳосил бўлиб, уларнинг кўпайтмаси

$$s\cdot s^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & . & n\\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & i_3 & \cdot\cdot & i_n\\ 1 & 2 & 3 & & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n\\ 1 & 2 & 3 & . & . n\end{pmatrix}=e$$

бўлади.

4. s, t, k ўрнига қўйишлар кўпайтмаси ассоциатив бўлади (исботланг).

Демак, S_n тўплам элементлари кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ, бирлик элементга эга, ихтиёрий s элемент учун унга тескари s^{-1} элемент мавжуд ва кўпайтириш ассоциатив эканлигини кўрсатдик. Демак, ўрнига қўйишлар тўплами группа экан.

n-тартибли ўрнига қўйишлар группаси баъзан n-даражали симметрик группа деб ҳам юритилади ва у $< S_n, \cdot, e >$ орқали белгиланади.

64-§. ЖУФТ ВА ТОҚ ЎРНИГА ҚЎЙИШЛАР

1, 2, 3, , n рақамлардан тузилган

$$a_1\ a_2\ a_3 \qquad a_n \qquad (1)$$

ўрин алмаштириш берилган бўлсин. (1) да $a_1 < a_2 < \quad . < < a_n$ шарт бажарилиши мумкин. Агар шу шарт бажарилмаса, (1) ўрин алмаштириш *инверсия* (тартибсизлик) га эга деб юритилади. Демак, (1) ўрин алмаштиришда a_i $(i = \overline{1, n})$ нинг ўнг томонида a_i дан кичик нечта рақам турган бўлса, a_i шунча инверсия ташкил этади дейилади. Агар a_i нинг ўнг томонида a_i дан кичик битта ҳам рақам турган бўлмаса, a_i инверсия ташкил этмайди дейилади.

1-таъриф. (1) ўрин алмаштиришдаги инверсия ташкил этувчи барча рақамларнинг инверсиялари йиғиндиси (1) ўрин алмаштиришнинг *инверсияси* дейилади.

Ҳар бир ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сонини аниқлаш масаласи муҳим бўлиб, уни қуйидаги мисолларда кўриб ўтамиз.

Масалан, 5261743 ўрин алмаштиришда нечта инверсия борлигини аниқлайлик. Бунинг учун ҳамма рақамларини чапдан ўнгга томон кўздан кечириб, улар томонидан ташкил этилган инверсиялар йиғиндисини тузамиз. Бу ҳолда 5 рақам тўртта инверсия ташкил этади, чунки унинг ўнг томонида ундан кичик тўртта рақам бор. Худди шунга ўхшаш, 2 рақам битта инверсия, 6 рақам учта инверсия ҳосил қилади. 1 рақам инверсия ташкил этмайди, 7 рақам иккита ва 4 рақам битта инверсия ташкил этади, 3 рақам инверсия ташкил этмайди. Шундай қилиб, 5261743 ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сони $4+1+3+2+1=11$ га тенг. Худди шундай усулда 3261745 ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сони 8 та эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. 1, 2, 3, , n

рақамларнинг 1 2 3 n ўринлаштиришини нормал ўрин алмаштириш дейилади. Унда инверсиялар йўқ, шунинг учун нормал ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сони 0 га тенг бўлади. Энг кўп инверсияларга эга бўлган ўрин алмаштириш 1 2 3 . n ўрин алмаштиришни тескари тартибда жойлаштириб тузилган $n(n-1)(n-)$ 3·2·1 ўрин алмаштириш бўлади. Ундаги инверсиялар сони ушбуга тенг:

$$(n-1)+(n-2)+\qquad +2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

Масалан, 1234567 ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сони 0 га тенг. 7654321 ўрин алмаштиришда эса $\frac{7\cdot 6}{2}=21$ та инверсия бор.

2-таъриф. Инверсиялар сони жуфт ёки тоқ бўлишига қараб, ўрин алмаштиришни ҳам мос равишда жуфт ёки тоқ ўрин алмаштириш дейилади.

Масалан, 614253 — жуфт ўрин алмаштириш (8 та инверсияга эга) ва 634251 — тоқ ўрин алмаштириш (11 та инверсияга эга).

3-таъриф. Ўрин алмаштиришдаги исталган икки рақамнинг ўрнини алмаштириш *транспозиция* дейилади.

Ўрин алмаштиришда a ва b элементларни ўрин алмаштириш билан бажарилган транспозиция $(a;\ b)$ кўринишда белгиланади. 1, 2, 3, ..., n рақамларнинг иккита ҳар хил ўрин алмаштиришида бир хил $(a;\ b)$ транспозицияни бажарсак, яна ҳар хил ўрин алмаштиришни ҳосил қилишимиз равшан, чунки бу икки янги ўрин алмаштиришлар тенг десак, улар битта ўрин алмаштиришни ифодалайди. Битта ўрин алмаштиришда яна $(a;\ b)$ транспозицияни бажариб, ҳеч қачон аввалги иккита ҳар хил транспозицияга ўта олмаймиз. Бу айтилганлардан кўринадики, 1, 2, 3, ..., n ларнинг ҳамма $n!$ та ўрин алмаштиришида бир хил $(a;\ b)$ транспозицияни бажариш ана шу $n!$ та ҳар хил ўрин алмаштиришни беради.

Масалан, 1, 2, 3 рақамларнинг 123, 132, 231, 213, 312, 321 ўрин алмаштиришларида (1; 3) транспозицияни бажарсак, яна ўша 321, 312, 213, 231, 132, 123 ўрин алмаштиришлар ҳосил бўлади.

1-теорема. Битта транспозиция натижасида ўрин алмаштиришнинг жуфт-тоқлиги ўзгаради.

Исботи. 1. Аввал ўрин алмаштиришда ёнма-ён турган k ва l рақамлар ўринларини алмаштирайлик. У ўрин алмаштиришни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$AklB, \tag{2}$$

бу ерда A орқали k дан олдин турган, B орқали эса l дан кейин турган рақамлар ўрин алмаштиришларини белгиладик. (2) ва (k; l) транспозицияни бажариб,

$$AlkB \tag{3}$$

ўрин алмаштиришга ўтамиз.

Маълумки, (k; l) транспозиция A ўрин алмаштиришдаги исталган a рақамнинг инверсияларига таъсир этмайди, чунки (2) да a нинг ўнг томонидаги k ва l рақамлар (3) да ҳам a нинг ўнг томонидалигича қолади. Бу транспозиция B ўрин алмаштиришдаги исталган рақамнинг ҳам инверсияларига таъсир этмайди, чунки b нинг инверсиялари унинг ўнг томонидаги рақамлар билангина аниқланади.

Шундай қилиб, (2) дан (3) га ўтишда l ва k лар орасида битта инверсия пайдо бўлиши ёки, аксинча, йўқолиши мумкин. Ҳақиқатан, $k<l$ шартда (3) да l рақам k билан битта инверсия ташкил этади ва демак, (2) дан (3) га ўтишда ўрин алмаштиришнинг инверсиялари сони биттага ортади; $k>l$ шартда эса (2) дан (3) га ўтишда k нинг l билан ташкил этган битта инверсияси йўқолади, яъни ўрин алмаштиришнинг инверсиялари сони биттага камаяди. Бундан кўрамизки, (k; l) транспозиция натижасида ўрин алмаштиришнинг жуфттоқлиги ўзгаради.

2. Энди ўрин алмашинувчи k ва l рақамлар орасида m та c_1, c_2, c_3, . ., c_m рақам турган деб, яъни ўрин алмаштириш

$$Ak\, c_1\, c_2 \,.\quad c_m l\, B \tag{4}$$

кўринишга эга деб фараз қиламиз ва (4) даги инверсиялар сони t га тенг бўлсин. Бу ўрин алмаштирищдан (k;l) транспозиция орқали

$$Al\, c_1\, c_2 \qquad c_m\, kB \tag{5}$$

ўрин алмаштиришга ўтиш талаб қилинади. Бунинг учун (5) ни (4) дан қуйидагича ҳосил қилишимиз мумкин: k ни кетма-кет c_1 сўнгра c_2, ундан кейин c_3 ва ҳ. к. c_m ва энг охирида l билан ўрин алмаштирсак,

$$A\, c_1\, c_2 \ldots c_m\, l \cdot k\, B \qquad (6)$$

ўрин алмаштиришга келамиз. Шундай қилиб, (4) да ёнма-ён турган рақамлардан $m + 1$ марта транспозиция бажариб, (6) га ўтамиз. Худди шунга ўхшаш, (6) да l ни кетма-кет c_m, сўнгра c_{m-1} ва ҳ. к. энг кейин c_1 билан ўрин алмаштирсак, (5) ҳосил бўлади. Бунда ҳам (5) ни ҳосил қилиш учун (6) да ёнма-ён турган рақамлардан m марта транспозиция бажарган бўламиз. Демак, (4) да ёнма-ён турган рақамлардан $(m + 1) + m = 2m + 1$ марта, яъни тоқ сон марта транспозициялар бажарсак, (5) ўрин алмаштириш келиб чиқади. Натижада (5) ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сони $t + 2m + 1$ та бўлади. t ва $2m + 1$ сонларнинг жуфт-тоқлиги ҳар хил.

Мисол. Жуфт 614253 ўрин алмаштиришда (1; 3) транспозицияни бажарсак, тоқ 634251 ўрин алмаштириш ҳосил бўлади.

2-теорема. *1, 2, 3, . . . , n рақамларнинг $n!$ та ўрин алмаштиришларидан $\frac{n!}{2}$ таси жуфт ва $\frac{n!}{2}$ таси тоқдир.*

Исботи. Жуфт ўрин алмаштиришлар сонини p билан, тоқ ўрин алмаштиришлар сонини q билан белгиласак, $p + q = n!$ бўлади. Ҳамма ўрин алмаштиришларда бир хил $(a; b)$ транспозицияни бажариш билан яна ўша $n!$ ўрин алмаштиришларнинг ўзи келиб чиқишини биламиз. Бунинг натижасида 1-теоремага мувофиқ, жуфт ўрин алмаштиришлар тоқ ўрин алмаштиришларга ва тоқлари, аксинча, жуфтларига ўтади, демак, энди жуфт ўрин алмаштиришлар сони q га ва тоқларининг сони p га тенг бўлиб қолади. Шу сабабли $p = q$ дир. Шундай қилиб, $2p = n!$ да $p = \frac{n!}{2}$ га келамиз.

1, 2, 3, . . . , n рақамларнинг исталган $s = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$ ўрнига қўйишига мурожаат қиламиз, бунда $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ва $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ лар юқоридаги n та рақамнинг қандайдир ўрин алмаштиришларидан иборат. s даги юқори сатрнинг инверсиялари сонини μ билан, пастки сатрнинг инверсиялари сонини ν билан белгилайлик.

3-таъриф. $\mu + \nu$ йиғиндининг жуфт ёки тоқ бўлишига қараб, ўрнига қўйиш *жуфт ёки тоқ ўрнига қўйиш* деб аталади.

Таърифдан кўринадики, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ва $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

сатрларнинг иккаласи жуфт ёки иккаласи тоқ ўрин алмаштиришларни ифодаласа, s ўрнига қўйиш жуфт бўлади. Сатрлардан бири жуфт, иккинчиси тоқ ўрин алмаштиришни ифодаласа, у ҳолда, s ўрнига қўйиш тоқ бўлади.

Жуфт ўрнига қўйиш мусбат ишорага, тоқ ўрнига қўйиш эса манфий ишорага эга дейилади.

Мисоллар. 1. $S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ўрнига қўйиш жуфтдир, чунки юқори сатр 8 та ва пастки сатр 6 та инверсияга эга, яъни $8 + 6 = 14$ жуфт сондир.

2. $t = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ўрнига қўйиш жуфт ўрнига қўйиш бўлади, чунки юқори сатрда 11 та ва пастки сатрда 9 та инверсия мавжуд, яъни $11 + 9 = 20$ жуфт сондир.

3. $u = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ тоқ ўрнига қўйиш, чунки юқори сатр 9 та ва пастки сатр 12 та инверсияга эга, яъни $9 + 12 = 21$ тоқ сондир.

3-теорема. *1, 2, 3, , n рақамларнинг $n!$ та ўрнига қўйишларидан $\frac{n!}{2}$ таси жуфт ва $\frac{n!}{2}$ таси тоқдир.*

Исботи. Ҳамма ўрнига қўйишларнинг юқори сатрларини нормал 1 2 3 n шаклда ёзиб чиқсак, пастки сатрлари ҳамма $n!$ та ҳар хил ўрин алмаштиришларни ифодалайди. Ҳар бир ўрнига қўйишнинг юқори сатрида 0 та инверсия бўлгани учун, ўрнига қўйишнинг жуфт-тоқлиги пастки сатрдаги инверсияларнинг ν сони билан аниқланади, чунки $0 + \nu = \nu$. Энди пастки сатрларнинг $\frac{n!}{2}$ таси жуфт ва $\frac{n!}{2}$ таси тоқ ўрин алмаштиришлар бўлгани учун n-тартибли ўрнига қўйишларнинг ҳам $\frac{n!}{2}$ таси жуфт ва $\frac{n!}{2}$ таси тоқ бўлади.

Масалан, 1, 2, 3 рақамларининг 6 та ўрнига қўйишларидан: $\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$ лари жуфт ва $\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$ лари тоқ.

4-теорема. *Жуфт ўрнига қўйишлар тўплами ўрнига қўйишларни кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилади.*

Исботи. n-тартибли жуфт ўрнига қўйишлар тўпламини S_n^* орқали белгилаймиз.

1) $\forall t \in S_n^*, \ \forall S \in S_n^* \Rightarrow St \in S_n^*$, демак, жуфт ўрнига

қўйишлар тўпламида кўпайтириш амали бинар алгебраик амалдир;

2) исталган учта ўрнига қўйишлар кўпайтмаси яна жуфт бўлади;

3) бирлик ўрнига қўйишлар жуфт ўрнига қўйиш бўлади;

4) $\forall S$ жуфт бўлса, унинг сатрларини алмаштиришдан ҳосил бўлган S^{-1} ҳам жуфтдир.

Демак, S_n^* группа бўлади.

Натижа. Тоқ ўрнига қўйишлар тўплами группа эмас, чунки бирлик ўрнига қўйиш тоқ эмас.

Машқлар

1. Қуйидаги ўрнига қўйишларни кўпайтиринг:

а) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\4\,2\,3\,2\,4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\3\,1\,2\,1\,2\end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix}a\,b\,c\,d\,c\\a\,b\,d\,b\,c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\,b\,c\,d\,e\\c\,d\,c\,a\,b\end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\2\,3\,1\,2\,1\,2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\2\,3\,1\,2\,1\,6\end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix}1\,2\,3 & & n\\ i_1\,i_2\,i_3 & .\,. & i_n\end{pmatrix}$ ўрнига қўйиш жуфт бўлиши учун $i_1\ i_2 \qquad i_n$ жуфт ўрин алмаштириш бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

65-§. КВАДРАТ МАТРИЦА ДЕТЕРМИНАНТИ

Таъриф. n-тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадрат матрицанинг *детерминанти* деб $n!$ та ҳадларнинг

$$\sum^{n!}(-1)^{\nu} a_{1\beta_1}\, a_{2\beta_2} \qquad a_{n\beta_n} \tag{1}$$

кўринишдаги йиғиндисига айтилиб, бу йиғинди қуйидаги талабларни қаноатлантиради:

1) (1) йиғиндидаги ҳар бир

$$(-1)^{\nu} a_{1\beta_1}\, a_{2\beta_2} \qquad a_{n\beta_n} \tag{2}$$

ҳад матрицанинг ҳар бир сатри ва ҳар бир устунидан фақат биттадан олинган $a_{1\beta_1}$ $a_{2\beta_2}$ $a_{n\beta_n}$ элементлар кўпайтмасига тенг;

2) $(-1)^{\nu} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2}$ $a_{n\beta_n}$ ҳаднинг биринчи 1, 2, 3, , n индекслари $a_{1\beta_1}$, $a_{2\beta_2}$, , $a_{n\beta_n}$ элементлар турган сатрлар номерларини, иккинчи β_1, β_2, , β_n индекслари эса бу элементлар турган устунлар номерларини билдиради ва шу билан бирга, иккинчи индекслар 1, 2, 3, . , n рақамларнинг қандайдир ўрин алмаштиришларини ифодалайди;

3) (1) йиғиндидаги ҳамма $n!$ та ҳадларнинг иккинчи β_1, β_2, . . , β_n индекслари бир ҳаддан иккинчи ҳадга ўтиб бориш билан 1, 2, 3, , n рақамлардан мумкин бўлган барча $n!$ та ўрин алмаштиришларни тузиб боради;

4) (2) ҳаднинг биринчи 1, 2, 3, . . , n ва иккинчи β_1, β_2,. , β_n индекслари $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & \beta_n \end{pmatrix}$ ўрнига қўйишни туэгани ҳолда, кўрсаткич бу ўрнига қўйишдаги пастки сатр инверсиялари сонини билдиради.

Шундай қилиб, (1) йиғиндида иккинчи индекслари жуфт ўрин алмаштиришларни ташкил этувчи $\frac{n!}{2}$ та ҳад $((-1)^{\nu} = +1$ бўлганидан) ўз ишоралари билан, иккинчи индекслари тоқ ўрин алмаштиришларни ташкил этувчи $\frac{n!}{2}$ та ҳад эса $((-1)^{\nu} = -1$ бўлганидан) қарама-қарши ишоралар билан олинади.

(1) йиғинди n-тартибли детерминант дейилади, у

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

кўринишда белгиланади ва унинг горизонтал қаторлари сатрлар, вертикал қаторлари эса устунлар деб аталади. a_{ij} ларни детерминант элементлари дейилади, бунда биринчи i индекс a_{ij} элемент турган сатрнинг номерини, иккинчи j индекс эса шу элемент турган устуннинг номерини билдиради. a_{11}, a_{22}, , a_{nn} элементлар детерминантнинг биринчи (бош) диагонал элементларини, a_{1n}, a_{2n-1}, , a_{n1} . элементлар эса унинг иккинчи бош (қўшимча) диагонал элементларини ташкил этади; n-тартибли детерминант n^2 та элементдан тузилади.

Шундай қилиб, юқоридаги 4 та хоссага эга бўлган ва квадрат матрицалар тўпламини ҳақиқий сонлар тўпламига ўтказувчи φ акслантиришга n-тартибли матрицанинг детерминанти дейилар экан.

Натижа. A квадрат матрицанинг D детерминантини

$$D = \sum_{\rho \in S_n} (-1)^{\nu} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \qquad a_{\alpha_n n}. \tag{3}$$

йиғинди шаклида ҳам ифодалаш мумкин, бунда ҳамма ҳадларнинг иккинчи $1, 2, \quad , n$ номерлари нормал ҳолда жойлашган бўлиб, биринчи $\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n$ номерлари ҳамма $n!$ ўрин алмаштиришларни тузади ва ν кўрсаткич $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$ ўрнига қўйишлардаги инверсиялар сонини, ρ эса $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \quad , \alpha_n$ ўрин алмаштиришнинг ҳар хил ўзгаришларини, S_n эса ўрин алмаштиришлар тўпламини билдиради.

Таърифга асосан, иккинчи тартибли детерминант қуйидагига тенг;

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\rho \in S_2} (-1)^{\nu} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

чунки β_1, β_2 ўрин алмаштириш битта 12 жуфт ва битта 21 тоқ ўрин алмаштиришни беради. Биз буни (1) йиғинди асосида ҳосил қилдик. (3) йиғинди асосида ҳам худди шунинг ўзи келиб чиқади:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\rho \in S_2} (-1)^{\nu} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Бундан иккинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш қоидасини ҳосил қиламиз. Иккинчи тартибли детерминант биринчи диагонал элементлари кўпайтмасидан иккинчи диагонал элементлари кўпайтмасининг айирмасига тенг.

Мисол.

$$\begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (-9) \cdot 6 - (-5) \cdot 3 = -54 + 15 = -39,$$

$$\begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -39.$$

Детерминант таърифидан учинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш учун ушбу қоида келиб чиқади. (1) йиғиндига кўра

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\rho \in S_3} (-1)^{\nu} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} a_{3\beta_3} = \tag{4}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - $$
$$- a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33},$$

чунки $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ўрин алмаштириш учта жуфт 123, 231 312 ва учта тоқ 321, 132, 213 ўрин алмаштиришни билдиради.

(3) йиғиндига қараб учинчи тартибли детерминантни ҳисоблашнинг қуйидаги қоидасини келтириб чиқарамиз:

Биринчи диагонал элементлари кўпайтмасининг ва асослари шу диагоналга параллел бўлган тенг ёнли иккита учбурчак учларидаги элементлар кўпайтмасининг йиғиндисини тузамиз. Сўнгра, иккинчи диагонал элементлари кўпайтмасининг ва асослари шу диагоналга параллел тенг ёнли иккита учбурчак учларидаги элементлар кўпайтмаларининг йиғиндисини тузиб, биринчи йиғиндидан иккинчисини айирамиз.

Бу қоидага 3-тартибли детерминантни ҳисоблашнинг *учбурчак қоидаси* деб юритилади.

(3) йиғинди бўйича ҳам худди шу қоидага келамиз. Ҳақиқатан,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\rho \in S_3} (-1)^{\nu} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} a_{\alpha_3 3} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} -$$
$$- a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}.$$

шаклга эга бўлади. Шундай қилиб, D_1 нинг ҳар бир ҳади D нинг мос ҳадини — 1 га кўпайтиришдан ҳосил бўлади деган хулосага келамиз.

Мисол.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 12-30-24-4-60-36=-142,$$

$$D=-142,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} =60+4+36+30-12+24=142,\ D_1=142.$$

Энди, D_1 да иккита сатр (ёки иккита устун) нинг ўринларини алмаштирсак ва уни D_2 орқали белгиласак, у ҳолда $D_2 = D$ бўлади. Ҳақиқатан, $D_2=-D_1=-(-D)=(-1)^2D = D$ келиб чиқади. Шунингдек, $D_3=-D_2=-D$ ва ҳ.к. Умуман, D нинг иккитадан сатр ёки устунларини ўрин алмаштириш жараёнида ҳосил бўладиган D_m детерминант учун $D_m=(-1)^m D$ ёки

$$D=(-1)^m D_m \qquad (5)$$

тенглик ўринли.

Натижа. Иккита сатри (ёки устуни) бир хил бўлган детерминант нолга тенг (исботланг).

Мисол.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} =60-15+8-60+15-8=0,\ D=0.$$

3-хосса. Детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) даги элементлари m умумий кўпайтувчига эга бўлса, m ни детерминант белгиси ташқарисига чиқариш мумкин.

Исботи. D_1 детерминантнинг i-сатр элементлари умумий m кўпайтувчига эга бўлсин.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \\ ma_{i1} & ma_{i2} & ma_{in} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p\in S_n}(-1)^{v} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \ldots ma_{i\beta_i} \ldots a_{n\beta_n}.$$

Йиғиндининг ҳамма ҳадларидаги m умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқарсак, ўнг томондаги йиғинди

$$m\sum_{\rho\in S_n}(-1)^{\nu} a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\dots a_{n\beta_n}$$

кўринишни олади. Демак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ ma_{i1} & ma_{i2} & ma_{in} \\ & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

тенглик ўринли.

Натижа. Детерминантнинг бирор сатри (устуни) бошқа сатр (устун)га пропорционал бўлса, бу детерминант нолга тенг (исботланг).

4-хосса. n-тартибли детерминантда i-сатр элементлари m та қўшилувчининг йиғиндиларидан иборат бўлса, яъни

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ \sum\limits_{k=1}^{m} a_{i1}^{(k)} & \sum\limits_{k=1}^{m} a_{i2}^{(k)} & \sum\limits_{k=1}^{m} a_{in}^{(k)} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

бўлса, D детерминант m та n-тартибли D_1, D_2, , D_m детерминантлар йиғиндисига тенг. Бу детерминантларнинг i-сатрлари мос равишда D даги i-сатрни ифодаловчи йиғиндиларнинг 1, 2, . , m қўшилувчиларидан тузилади, қолган сатрлари эса D детерминантдагидек бўлади.

Исботи. Агар

$$\begin{array}{lll} a_{i1}^{(1)} = a_{i1},\ a_{i2}^{(2)} = b_{i1}, & , & a_{i1}^{(k)} = c_{i1}; \\ a_{i2}^{(1)} = a_{i2},\ a_{i2}^{(2)} = b_{i2}, & & a_{i2}^{(k)} = c_{ik} \\ \cdot \qquad\qquad \cdot & & \cdot \\ a_{in}^{(1)} = a_{in},\ a_{in}^{(2)} = b_{i2}, & & a_{in}^{(k)} = c_{in} \end{array}$$

десак, у ҳолда D детерминант

$$D=\sum_{\rho\in S_n}(-1)^{\nu}a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\qquad(a_{i\beta_i}+b_{i\beta_i}+\qquad+c_{i\beta_i})\quad a_{n\beta_n}$$

йиғиндига тенг бўлади. Бу йиғинди эса қуйидаги m та қўшилувчилар йиғиндисига ёйилади:

$$\sum_{\rho\in S_n}(-1)^{\nu}a_{1\beta_1}\,a_{2\beta_2}\qquad a_{i\beta_i}\qquad a_{n\beta_n}+\sum_{\rho\in S_n}(-1)^{\nu}a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}$$

$$b_{i\beta_i}\ldots a_{n\beta_n}+\qquad+\sum_{\rho\in S_n}(-1)^{\nu}a_{1\beta_1}a_{2\beta_2}\qquad c_{i\beta_i}\quad a_{n\beta_n}.$$

Ҳосил бўлган йиғиндилар 4-хоссада айтилган D_1, D_2, D_m детерминантларни ифодалайди.

Мисол.

$$\begin{vmatrix}2-3 & 1 & 4\\ 1+5 & 2 & -1\\ 3+2 & 3 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 3 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & 1 & 4\\ 5 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}.$$

Ҳақиқатан, $(2-3)\cdot2\cdot5+(3+2)\cdot1(-1)+(1+5)\cdot3\cdot4-$
$$-(3+2)\cdot2\cdot4-(2-3)\cdot3\cdot(-1)-(1+5)\cdot1\cdot5=$$
$$=-10-5+72-40-3-30=-16,$$
$$20-3+12-24+6-5)+(-30-2+60-16-9-$$
$$-25)=6-22=-16.$$

$$\begin{vmatrix}1+2 & 4-7\\ 3-1 & 5+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -7\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -7\\ -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Икки томон бир хил натижани беради, яъни

$$(1+2)(5+1)-(4-7)(3-1)=3\cdot6+3\cdot2=24,$$
$$(5-12)(1+21)+(10+4)+(2-7)=$$
$$=-7+22+14-5=24.$$

Натижа. Детерминантда бирор сатр (устун)нинг элементларини қандайдир сонга кўпайтириб, бу кўпайтмаларни бошқа сатр (устун)нинг мос элементларига қўшсак, детерминант ўзгармайди (исботланг).

67-§. МИНОР ВА АЛГЕБРАИК ТУЛДИРУВЧИЛАР

Тартиби 3 дан катта бўлган детерминантларни ҳисоблашнинг тайёр формуласи (таърифидан бўлак) мавжуд эмас. Шунинг учун юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш пайтида уларнинг тартибларини пасайтириш муҳимдир. Ҳозир шу масалани баён этишга киришамиз.

Қуйидаги таърифни берамиз:

1-таъриф. n-тартибли детерминантнинг исталган r та сатри ва r та устунини ($1 \leqslant r \leqslant n-1$) ўчириб, уларнинг ўчирилган жойларидаги кесишган элементларни берилган детерминантдагидек тартибда олиб, бу элементлардан r-тартибли детерминант тузсак, бу детерминант берилган детерминантнинг *r-тартибли минори* деб аталади.

2-таъриф. Детерминантда r та сатр ва r та устунни ўчириб, ўчирилмасдан қолган элементлардан берилган детерминантдагидек тартибда олиб, $(n-r)$-тартибли детерминант тузсак, у детерминант *r-тартибли минорга қўшимча минор* дейилади.

Мисол.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

детерминантда биринчи ва бешинчи сартларни, учинчи ва тўртинчи устунларни ўчирайлик. Ўчиришдаги кесишган жойлардаги элементлардан тузилган

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

иккинчи тартибли детерминант берилган детерминантнинг 2-тартибли минори дейилади. Детерминантдаги ўчирилмай қолган элементлардан

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

детерминантни тузайлик. Бу детерминант юқорида ҳосил қилинган 2-тартибли минорга қўшимча минор дейилади.

Хусусий ҳолда, $r = 1$ бўлиши, яъни D детерминантда битта сатр ва битта устун ажратилиши мумкин. У вақтда ажратилган сатр ва устуннинг кесишган жойида биттагина элемент турган бўлиб, M минор биттагина элементдан тузилади. Уни 1-тартибли минор деб атаймиз. Бу ҳолда $\overline{M}$ қўшимча минор $(n-1)$-тартибли бўлади.

Агар i-сатр ва j-устун ажратилса, уларнинг кесишган жойида a_{ij} элемент тургани учун, $M = a_{ij}$ бўлади. Бу ҳолда қўшимча минор $\overline{M_{ij}}$ кўринишда белгиланиб, a_{ij} элементнинг минори дейилади. Масалан, юқоридаги 5-тартибли детерминантда a_{34} элементнинг минори

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}$$

бўлиб, у D дан a_{34} элемент турган учинчи сатр ва тўртинчи устунни ўчириш орқали ҳосил қилинди.

3-таъриф. D детерминантдаги r-тартибли M минорнинг шу детерминантда иштирок этган сатр ва устунлар номерларини мос равишда k_1, k_2, , k_r ва l_1, l_2, , l_r деб белгиласак, у ҳолда $(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_r+l_1+l_2+\ldots+l_r}$ даражанинг $\overline{M}$ қўшимча минорга кўпайтмаси *M минорнинг алгебраик тўлдирувчиси* (ёки *M минорга мос алгебраик тўлдирувчи*) дейилади.

Алгебраик тўлдирувчини A орқали белгиласак, таърифга кўра,

$$A = (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_r+l_1+l_2+\ldots+l_r}\,\overline{\overline{M}}$$

бўлади. M минор битта a_{ij} элементни ифодалаганда, бу элементнинг алгебраик тўлдирувчиси A_{ij} орқали белгиланиб, у ҳолда $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$ бўлади.

Мисол. Ушбу

$$M = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

минор юқоридаги 5-тартибли детерминант 1,5 номерли сатрлар ва 3, 4 номерли устунлар иштирокида тузилгани учун унинг алгебраик тўлдирувчиси

$$A = (-1)^{1+5+3+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} \end{vmatrix}$$

бўлади.

a_{34} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси эса қуйидагидан иборат:

$$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -\overline{M}_{34} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Бундан кейин, D детерминантни ифодаловчи $\sum\limits_{p \in S_n} (-1)^{v} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2}$

$a_{n\beta_n}$ йиғиндининг ҳар бир $(-1)^{v} a_{1\beta_1}\ a_{2\beta_2} \qquad a_{n\beta_n}$ ҳадини қисқача D нинг ҳади деб ҳам айтамиз.

1-теорема. *D детерминантдаги M минорнинг исталган ҳадини шу минорга мос A алгебраик тўлдирувчининг исталган ҳадига кўпайтирсак, D нинг ҳади ҳосил бўлади, яъни MA кўпайтманинг исталган ҳади D нинг ҳадидан иборат.*

Исботи. Биз n-тартибли D детерминантда r-тартибли минорни ва унга мос $(n-r)$-тартибли A алгебраик тўлдирувчини олиб, қуйидаги иккита ҳолни текширамиз.

1-ҳол. M минор D нинг юқори чап бурчагида, $\overline{M}$ қўшимча минор эса унинг пастки ўнг бурчагида жойлашган, яъни

$$D = \left|\begin{array}{cc|cc}
a_{11} & a_{1r} & a_{1r+1} & \\
\multicolumn{2}{c|}{\cdot} & & \\
\multicolumn{2}{c|}{M} & & \\
 & & a_{rr+1} & a_{rn} \\
a_{r1} & & & \\
 & & a_{r+1r+1} & a_{r+1n} \\
a_{r+11} & a_{r+1r} & \multicolumn{2}{c}{\overline{M}} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
a_{n1} & a_{nr} & a_{nr+1} & a_{nn}
\end{array}\right|$$

бўлсин. M минорнинг A алгебраик тўлдирувчиси қуйидагига тенг:

$$A = (-1)^{(1+2+\ldots+r)+(1+2+\ldots+r)} \cdot \overline{M} =$$
$$= (-1)^{2(1+2+\ldots+r)} \overline{M}, \quad A = \overline{M}.$$

M минорнинг исталган ҳади

$$(-1)^{p} a_{1\beta_1} a_{2\beta_2} \qquad a_{r\beta_r} \tag{1}$$

кўринишга эга, бунда p кўрсаткич $\beta_1, \beta_2, \quad , \beta_n$ ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сонидан иборат. $A = \overline{M}$ алгебраик тўлдирувчининг исталган ҳади эса

$$(-1)^q a_{r+1\beta_{r+1}} a_{r+2\beta_{r+2}} \qquad a_{n\beta_n} \tag{2}$$

кўринишга эга бўлиб, бунда q кўрсаткич β_1, β_2, β_n ўрин алмаштиришдаги инверсиялар сонидан иборат. β_1, β_2, .., β_n ўрин алмаштиришда $p+q$ та инверсия мавжуд, чунки (1) нинг элементлари (2) нинг элементларидан кичик бўлгани сабабли (1) даги рақамлар (2) дагилар билан инверсия ташкил этмайди. Шу сабабли юқоридаги иккита (1) ва (2) ҳаднинг кўпайтмаси худди D нинг ҳадини беради.

2-ҳол. M минор D нинг қандайдир k_1, k_2, , k_r номерли сатрлари ва l_1, l_2, , l_r номерли устунларини ишғол этади ва $k_1 < k_2 < \quad < k_r$, $l_1 < l_2 < \,..\, < l_r$ тенгсизликлар бажарилади, деб фараз қилайлик. Иккинчи ҳолни биринчи ҳолга қуйидагича келтирамиз: k_1-сатрни ўзидан юқоридаги $(k_1 - 1)$ та сатр билан бирма-бир ўрин алмаштириб, биринчи сатрга кўчирамиз; k_2-сатрни эса ўзидан юқоридаги $(k_2 - 2)$ та сатр билан бирма-бир ўрин алмаштириб, иккинчи сатрга кўчирамиз ва ҳ.к., энг охирида, k_r-сатрни юқоридаги $(k_r - r)$ та сатр билан ўрин алмаштириб, r-сатрга кўчирамиз. Натижада

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 2) + \quad . + (k_r - r) = (k_1 + k_2 + \\ + \qquad + k_r) - (1 + 2 + \qquad + r)$$

марта ўрин алмаштиришдан кейин M минор D нинг юқори қисмига ўтади. Худди шунга ўхшаш, устунларни ўзаро $(l_1 + l_2 + \qquad + l_r) - (1 + 2 + \quad . + r)$ марта ўрин алмаштириш натижасида l_1, l_2, . , l_r-устунларни мос равишда, биринчи, иккинчи, , r-ўринларга келтирамиз. Демак, иккитадан сатр ёки устунларни

$$(k_1 + k_2 + \qquad + k_r + l_1 + l_2 + \qquad + l_r) - \\ - 2(1 + 2 + \qquad r)$$

марта ўрин алмаштиришлар натижасида D дан ҳосил бўлган янги детерминантда M минор юқори чап бурчакни, $\overline{M}$ қўшимча минор эса пастки ўнг бурчакни ишғол этади. Шу билан бирга, детерминантларнинг иккинчи хоссасига асосан

$$D = (-1)^{(k_1 + k_2 + \dots + k_r + l_1 + l_2 + \dots + l_r) - 2(1+2+ \dots + r)} \cdot \overline{D} = \\ = (-1)^{k_1 + k_2 + \quad + k_r + l_1 + l_2 + \dots + l_r} \cdot \overline{D} \tag{3}$$

муносабат бажарилади.

Биринчи ҳолга кўра M нинг исталган ҳадини $\overline{M}$ нинг исталган ҳадига кўпайтирсак, $\overline{D}$ нинг ҳади ҳосил бўлади. Энди (3) га мувофиқ, M нинг исталган ҳадини

$$(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_r+l_1+l_2+\dots+l_r}\ \overline{M} = A$$

нинг исталган ҳадига кўпайтириш D нинг ҳадини беради.

2-теорема *(Лаплас теоремаси). n-тартибли D детерминантда танланган r та ихтиёрий сатр (ёки устун) лардан ҳамма r-тартибли минорларни тузиб ва уларни мос алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб, бу кўпайтмалар қўшилса, ҳосил бўлган йиғинди D детерминантга тенг бўлади.*

Исботи. D детерминантда қандайдир r та $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ сатрни танлаб, улардан тузиладиган ҳамма r-тартибли минорларни M_1, M_2, ... , M_t ва уларга мос алгебраик тўлдирувчиларни A_1, A_2, ... , A_t орқали белгилайлик. У ҳолда

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_tA_t \tag{4}$$

тенгликни исботлашимиз лозим. 1-теоремага асосан, ҳар бир $M_i A_i$ кўпайтманинг ҳадлари D нинг ҳадларидан иборат. Шу билан бирга ҳеч қайси икки M_iA_i ва M_jA_j кўпайтма бир хил ҳадларга эга эмас, чунки M_i ва M_j минорлар бир-биридан камида битта устун билан фарқ қилади.

Энди (4) нинг ўнг томонида $n!$ та ҳад борлигини кўрсатамиз. Ҳар бир M_i минор r-тартибли детерминант сифатида $r!$ та ҳадга ва шунингдек, A_i алгебраик тўлдирувчи $(n-r)$-тартибли детерминант сифатида $(n-r)!$ та ҳадга эга. Шу сабабли $M_i \cdot A_i$ кўпайтмада $r!(n-r)!$ та ҳар хил ҳад мавжуд. Демак $\sum\limits_{i=1}^{t} M_iA_i$ йиғиндидаги ҳамма ҳар хил ҳадлар сони $r!(n-r)!t$ га тенг. Энди, t нинг қийматини аниқлаймиз. Ажратилган r та сатр ҳамда D да мавжуд бўлган n та устунлар ёрдамида тузиладиган r-тартибли M_i минорлар сони n элементли тўпламдан ажратилган r элементли қисм тўпламлар сонига тенг бўлиб, у $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ формула ёрдамида ҳисобланади

Шундай қилиб, (4) нинг ўнг томонида

$$r!(n-r)!t = r!(n-r)!\,\frac{n!}{r!(n-r)!} = n!$$

та ҳад мавжуд бўлиб, бу билан (4) тенглик тасдиқланади.

(4) тенглик D детерминантнинг r-тартибли минорлари бўйича ёйилмаси дейилади.

Мисол.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни 2-тартибли минорлар бўйича ёйлик. Масалан, биринчи ва иккинчи сатрларни танлаб, бу икки сатр ва тўрт устундан $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ та 2-тартибли минорлар тузамиз. Улар қуйидагилардан иборат:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 23.$$

Бу минорларга мос алгебраик тўлдирувчилар қуйидагиларга тенг:

$$(-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$(-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -23, \quad (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$(-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4, \quad (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Демак,

$$D = 7 \cdot 10 + (-1)(-1) + 14(-23) + (-11)(-2) + $$
$$+ (-7) \cdot 4 + 23(-5) = 70 + 1 - 322 + 22 - 28 -$$
$$- 115 = -372. \quad D = -372.$$

68-§. ДЕТЕРМИНАНТНИ САТР ЁКИ УСТУН ЭЛЕМЕНТЛАРИ БЎЙИЧА ЁЙИШ

Лаплас теоремасида $r = 1$ бўлса, яъни D детерминантда битта i-сатр ажратилса, у ҳолда M_1, M_2, , M_t минорлар, биринчи тартибли минорлар сифатида, шу i-сатрнинг a_{i1}, a_{i2}, , a_{in} элементларидан иборат бўлади. A_1, A_2, , A_t алгебраик тўлдирувчилар бу вақтда a_{i1}, a_{i2}, . , a_{in} элементларнинг A_{i1}, A_{i2}, , A_{in} алгебраик тўлдирувчиларига айланади ва 67-§ даги (4) тенглик

$$D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \qquad + a_{in} A_{in}$$

кўринишни олади. Бу йиғинди D детерминантнинг i-сатр элементлари бўйича ёйилмаси дейилади.

Шундай қилиб, i-сатрнинг a_{i1}, a_{i2}, , a_{in} элементларини ўзининг A_{i1}, A_{i2}, , A_{in} алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб (ёки j-устуннинг a_{1j}, a_{2j}, , a_{nj} элементларини ўзининг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб) қўшсак, ҳосил бўлган йиғинди D детерминантга тенг бўлади.

Мисол.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

детерминантни аввал иккинчи сатр, сўнгра учинчи устун элементлари бўйича ёйлик:

$$D = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (4 + 12 -$$

$$- 60 - 32 - 15 + 6) + 3(8 + 6 - 16 + 12) +$$

$$+ 2(10 + 2 - 20 - 8) + 5(-30 + 40 - 15 - 16) =$$

$$= -85 + 30 - 32 - 285 = -372, \quad D = -372.$$

$$D = 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-5 + 6 - 25 + 4) + 2(10 + 2 - 20 - 8) +$$

$$+ 4(6 + 5 - 8 - 12 - 20 + 1) + 3(12 - 20 - 50 + 2) =$$

$$= -60 - 32 - 112 - 168 = -372, \quad D = -372.$$

1-натижа. Детерминантда i-сатр (ёки j-устун) нинг a_{ij} дан бошқа ҳамма элементлари 0 бўлса, у ҳолда $D = a_{ij}\cdot A_{ij}$ бўлади.

Исботи. Детерминантни i-сатр(ёки j-устун) элементлари бўйича ёйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D = 0 \cdot A_{i1} + \qquad + a_{ij} A_{ij} + \qquad + 0 \cdot A_{in} = a_{ij} A_{ij}$$

ёки

$$D = 0 \cdot A_{1j} + \qquad + a_{ij} A_{ij} + \qquad + 0 \cdot A_{nj} = a_{ij} A_{ij}.$$

2-натижа. Бош диагоналнинг бир томонида фақат ноллар бўлган детерминант бош диагонал элементларининг кўпайтмасига тенг.

Исботи. Ушбу

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & .0 \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант берилган бўлсин, бунда бош диагоналнинг юқоридаги ҳамма элементлари нолга тенг. D ни биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб:

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & . & 0 \\ & & & . \\ a_{n2} & a_{n3} & . & . \, a_{nn} \end{vmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз. Ўнг томондаги детерминантни яна биринчи сатр элементлари бўйича ёйиб, қуйидагига келамиз:

$$D = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & . & .\,0 \\ & & . \\ a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ва ҳ. к. Бу жараённи охиригача давом эттириб,

$$D = a_{11} a_{22} \, . \qquad a_{nn}$$

га эга бўламиз.

Хусусий ҳолда:

$$n\left\{ \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1. \end{vmatrix}}_{n} \right. = 1^n = 1 \text{ ва } \begin{vmatrix} -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ & . & & \\ 0 & 0 & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ . & . & & & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1}{2}}$$

бўлади, чунки n, $n-1$, $n-2$, . устунларни 1, 2, 3, . . . устунлар билан алмаштирганда бу детерминант ўз ишорасини $(-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+2+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ марта алмаштириб, бош диагонал элементлари 1 дан, қолган элементлари эса ноллардан иборат детерминантга айланади.

Теорема. *D детерминантнинг битта сатри (устуни) даги элементларни бошқа сатр (устун)даги мос элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб. натижаларни қўшсак, йиғинди нолга тенг бўлади, яъни*

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\quad+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j) \tag{1}$$

$$a_{1k}A_{1l}+a_{2k}A_{2l}+\quad+a_{nk}A_{nl}=0 \quad (k\neq l) \tag{2}$$

Исботи. Масалан, (1) нинг тўғрилигини кўрсатайлик. D детерминантни j-сатр элементлари бўйича ёямиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\quad .+a_{jn}A_{jn}. \tag{3}$$

A_{j1}, A_{j2}, , A_{jn} алгебраик тўлдирувчиларга j-сатр элементлари кирмайди (чунки бу алгебраик тўлдирувчиларни тузишда маълумки, j-сатр ўчирилади). Энди, (3) тенглик (айният) нинг икки томонида a_{j1}, a_{j2}, , a_{jn} элементлар ўрнига мос равишда a_{i1}, a_{i2}, , a_{in} ларни оламиз.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\, a_{1n} \\ & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\, a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\quad+a_{in}A_{jn}.$$

Бу детерминант нолга тенг, чунки унинг икки сатри бир хилдир.

(2) тенглик ҳам худди шундай исботланади.

69-§. МАТРИЦА МИНОРЛАРИ

(m, n) турли қуйидаги матрица берилган бўлсин:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} & . \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} & . \; a_{2n} \\ & \\ a_{m1} \; a_{m2} \; . & . \; a_{mn} \end{bmatrix}$$

Агар $m \leqslant n$ бўлса, бу матрица элементларидан r-тартибли $(1 \leqslant r \leqslant m)$ минорлар тузиш мумкин.

54, 55-параграфларда матрица рангини аниқлашнинг иккита усулини баён этган эдик. Ҳозир матрица рангини аниқлашнинг яна бир усули тўғрисида тўхталиб ўтамиз.

1-теорема. A матрицанинг ранги унинг нолдан фарқли минорларидан энг юқори тартиблисининг тартибига тенг.

Исботи. Нолдан фарқли энг юқори тартибли D минор A матрицанинг юқори чап бурчагида жойлашган деб фараз қиламиз.

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{lllll} a_{11} & & . \, a_{1r} & a_{1r+1} & . \, a_{1n} \\ & .D & & & \\ a_{r1} & & . \, a_{rr} & a_{rr+1} & . \, a_{rn} \\ a_{r+11} & & a_{r+1r} & a_{r+1r+1} & . \, . \, a_{r+1n} \\ & & & & \\ a_{m1} & & a_{mr} & a_{mr+1} & . \, a_{mn} \end{array} \right)$$

Акс ҳолда сатрларни ўзаро ва устунларни ўзаро ўрин алмаштириб, D ни шу айтилган жойга келтириш мумкин, бундан A нинг ранги ўзгармайди (52-параграфга қаранг).

А матрицанинг s-сатри $(s = \overline{r+1, m})$ биринчи r та сатрлари орқали чизиқли ифодаланади. Буни исботлаш мақсадида қуйидаги $(r+1)$-тартибли детерминантларни қараймиз:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & . \, a_{1r} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2r} & a_{2i} \\ .D & & . \\ a_{r1} & . \, a_{rr} & a_{ri} \\ & & . \\ a_{s1} & . \, a_{sr} & a_{si} \end{vmatrix},$$

бунда

$$i = 1,\ 2, \qquad , n,\ s = r + 1,\ r + 2, \qquad , m.$$

Ҳамма Δ_i детерминантлар нолга тенг. Ҳақиқатан, $i \leqslant r$ қийматларда Δ_i нинг иккита сатри тенг бўлиб, $\Delta_i = 0$ келиб чиқади; $i > r$ қийматларда эса Δ_i детерминантлар A матрицанинг $(r + 1)$-тартибли минорларини ифодалайди, бу ҳолда ҳам Δ_i нолга тенг бўлади.

Δ_i ни охирги устун элементлари бўйича ёямиз:

$$a_{1i} A_{1s} + a_{2i} A_{2s} + \qquad + a_{ri} A_{rs} + D a_{si} = 0, \qquad (1)$$

бунда a_{1i}, a_{2i}, , a_{ri} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари $a_{sk} (k = \overline{1, r})$ га боғлиқ бўлгани учун уларни A_{1s}, A_{2s}, , A_{rs} орқали белгиладик. $D \neq 0$ га мувофиқ, (1) тенгликларни a_{si} га нисбатан еча оламиз.

$$a_{si} = \beta_{1s} a_{1i} + \beta_{2s} a_{2i} + \qquad + \beta_{rs} a_{ri} \ (i = \overline{1, n},\ s = \overline{r + 1, m}). \qquad (2)$$

(2) тенгликлар A нинг s-сатри биринчи r та сатрлари орқали чизиқли ифодаланганини кўрсатади.

Демак, A матрицанинг горизонтал векторлари системасида чизиқли эркли векторларнинг максимал сони r га тенг бўлганидан, A нинг ранги ҳам r га тенг бўлади.

Энди детерминантнинг нолга тенг бўлишининг зарурий ва етарли шартини баён этамиз.

2-теорема. *Детерминант нолга тенг бўлиши учун унинг сатрлари (устунлари) чизиқли боғланган бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. 1.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминант нолга тенг бўлсин. У ҳолда n-тартибли квадрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги n дан кичик бўлади, чунки унинг энг юқори тартибли D минори нолга тенг. Шу сабабли, 1-теоремага биноан, A нинг ва демак, D нинг ҳам горизонтал векторлари ёки сатрлари чизиқли боғлангандир.

2. D нинг сатрлари чизиқли боғланган бўлса, бу сатрлардан бирини қолганлари орқали ноль сатрга айлантириш мумкин.

Демак, бу алмаштиришлар воситасида ҳосил қилинган детерминантнинг сатрларидан бири ноль-сатрни ифодалагани учун $D'=0$ бўлиб, детерминантларнинг 4-хоссасидан келиб чиқадиган натижа бўйича $D'=D$ тенглик ўринли ва шу сабабли, $D=0$ бўлади.

n-тартибли детерминантлар n-тартибли квадрат матрицаларни қандайдир сонлар тўпламига бир қийматли акслантиришдан иборат бўлганлиги учун детерминантлар ҳам матрицалар каби кўпайтирилишини эслатиб ўтамиз. A матрицанинг детерминати $|A|$ орқали белгиланади.

3-теорема. *Агар A ва B матрицалар n-тартибли квадрат матрицалар бўлса, у ҳолда бу матрицалар кўпайтмасининг детерминанти кўпайтувчилар детерминантларининг кўпайтмасига тенг, яъни*

$$|A\cdot B|=|A|\ \ |B| \tag{5}$$

тенглик ўринли.

Исботи. Агар A матрица бирлик матрица бўлса, (5) тенглик ўринли. Ҳақиқатан, $EB=B$. Шунинг учун $|E\cdot B|=$ $=|B|=1\ \ |B|=|E|\cdot|B|$ бўлади.

Лемма. *Агар A'' матрица A' матрицадан битта элементар сатр алмаштириш ёрдамида ҳосил қилинган бўлса,*

$$|A'\cdot B|=|A'|\cdot|B| \tag{6}$$

тенгликдан

$$|A''B|=|A''|\,|B| \tag{7}$$

тенглик келиб чиқади.

Исботи. A'' матрица A' матрицадан қуйидаги элементар алмаштиришлардан биттаси орқали ҳосил бўлсин:

а) сатрларнинг ўрнини алмаштириш;

б) ихтиёрий сатрни нолдан фарқли k сонга кўпайтириш;

в) битта сатрга бошқа сатрни ихтиёрий сонга кўпайтириб қўшиш.

Матрицаларни кўпайтириш қоидасига асосан $A''B$ матрица $A'B$ матрицадан мос элементар алмаштириш натижасида ҳосил бўлади.

а) Элементар алмаштириш бажарилсин, у ҳолда

$$|A''| = -|A'|, \quad |A''B| = -|A'B| \qquad (8$$

тенглик ўринли (иккита сатрни алмаштирганда детерминант) — 1 га кўпаяди);

б) элементар алмаштириш бажарилсин, у ҳолда

$$|A''| = k|A'|, \quad |A''B| = k \cdot |A'B| \qquad (9)$$

тенглик ўринли;

в) элементар алмаштириш бажарилса,

$$|A''| = |A'|, \quad |A''B| = |A'B| \qquad (10)$$

тенглик бажарилади.

(8), (9) ёки (10) тенгликларнинг ҳар бирини (6) билан бирлаштирсак, (7) тенгликка эга бўламиз.

Агар A матрица а), б), с) элементар алмаштиришлар ёрдамида бирлик матрицадан ҳосил қилинган бўлса, леммадан ва $|EB| = |E| \cdot |B|$ тенгликдан (5) тенглик келиб чиқади.

Бирлик матрицадан элементар алмаштиришлар ёрдамида A матрица ҳосил бўлса, A матрица хосмас матрица бўлади.

A матрица хос матрица бўлсин, яъни унинг сатрлари чизиқли боғланган. Хос матрицага тескари матрица мавжуд эмаслигидан, A матрица сатрлари орасида қандай чизиқли боғланиш бўлса, у ҳолда AB матрица сатрлари орасида ҳам шундай чизиқли боғланиш мавжуд бўлади.

AB матрица ҳам хос матрица бўлади.

Демак, $|A| = 0$ ва $|AB| = 0$ тенгликлардан $|AB| = |A| \cdot |B|$ тенглик ўринли бўлади.

Тўла математик индукция принципи асосида (5) тенглик умумлаштирилади, яъни $|A_1 \cdot A_2 \ldots A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_k|$. Агар $A_1 = A_2 = \quad = A_k = A$ бўлса, $|A^k| = |A|^k$ бўлади.

Маълумки, фақат хосмас квадрат матрицага тескари матрица мавжуд ва ягона. Биз 61- § да бундай матрицага тескари матрицани топишнинг битта усули билан танишган эдик. Ҳозир биз иккинчи усулни кўриб ўтамиз.

Қуйидаги n-тартибли хосмас квадрат матрица берилган бўлсин:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A нинг сатрлари чизиқли эркли. Шу сабабли бу матрица детерминанти нолдан фарқли, яъни

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Ушбу

$$B=\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdot & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdot & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdot & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ & \cdot & & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\cdot A'$$

матрицани тузамиз. Бунда A_{ij} лар a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини ифодалайди. A' матрица одатда A га тиркалган (қовушган) матрица деб ҳам аталади.

B матрица A га тескаридир. Ҳақиқатан, $AB=C$ бўлса, C нинг бош диагоналидаги ҳар бир c_{ii} элементи қуйидагига тенг бўлади:

$$c_{ii}=a_{i1}\frac{A_{i1}}{|A|}+a_{i2}\frac{A_{i2}}{|A|}+\ldots+a_{in}\frac{A_{in}}{|A|}=$$

$$=\frac{a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}}{|A|}=\frac{|A|}{|A|}=1,\ c_{ii}=1.$$

Қолган ҳамма c_{ij} $(i\neq j)$ элементлари учун эса 68-параграфдаги (1) тенгликка асосан

$$c_{ij}=\frac{a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\ldots+a_{in}A_{jn}}{|A|}=\frac{0}{|A|}=0,\ c_{ij}=0$$

келиб чиқади. Демак, $A\cdot B=E$. Худди шу усулда $BA=E$

эканлигини текшириш мумкин. Шундай қилиб, $B = A^{-1}$ ва $A = B^{-1}$.

Мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топайлик. Бу ерда

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 24 - 75 + 8 - 20 - 10 + 72 = -1,$$

$$|A| = -1.$$

Элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари қуйидагилар:

$$A_{11} = 7,\ A_{21} = 20,\ A_{31} = 19,\ A_{12} = 1,\ A_{22} = -2,$$

$$A_{32} = -2,\ A_{13} = 6,\ A_{23} = -17,\ A_{33} = -16.$$

Демак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -20 & -19 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 17 & 16 \end{pmatrix}$$

$A \cdot A^{-1} = E$ ва $A^{-1} A = E$ тенгликлар бажарилади.

Детерминантларни ҳисоблашнинг турли усуллари бор. Бу усулларда детерминантларнинг асосий хоссаларидан фойдаланиш, детерминантни минорлар бўйича, хусусий ҳолда сатр ёки устун элементлари бўйича ёйиш қоидаларини қўллаш алоҳида роль ўйнайди. Умуман, детерминантлар хилма-хил бўлгани учун, уларни ҳисоблаш усуллари ҳам жуда кўп хилдир. Фақат айрим махсус детерминантларнигина ҳисоблаш усуллари олдиндан берилиши мумкин. Қуйида баъзи детерминантларни ҳисоблаш усуллари билан танишиб ўтамиз:

1. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонларга нисбатан қуйидаги n-даражали детерминантни (Вандермонд детерминантини) ҳисоблаймиз:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdot & a_2^{n-1} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Биринчи устундан бошлаб ҳар бир устунни $-a_1$ га кўпайтириб, ўзидан кейингисига қўшамиз. У вақтда

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & . & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ 1 & a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & . & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ & & . & . & . \quad . \quad . \\ 1 & a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & . & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & . \; . & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ . & . & . \; . & . \quad . \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1) \;.\;.\; (a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-2} \\ & & & . \\ 1 & a_n & . \; . & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ҳосил бўлади. Ўнг томонда тартиби $(n-1)$ га тенг ва a_2, a_3, ., a_n ларга нисбатан V_{n-1} детерминант турганини кўрамиз. Юқорида V_n га нисбатан қилинган ишни V_{n-1} га нисбатан такрорласак,

$$V_{n-1} = (a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots(a_n-a_2) \begin{vmatrix} 1 & a_3 & a_3^2 & . \; . & a_3^{n-3} \\ 1 & a_4 & a_4^2 & \dots & a_4^{n-3} \\ & & . & & . \; . \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-3} \end{vmatrix}$$

келиб чиқади. Ўнг томонда яна $(n-2)$-тартибли ва a_3, a_4, ., a_n ларга нисбатан V_{n-2} детарминант вужудга келганини кўрамиз ва ҳ. к. Бу жараённи давом эттириб, энг охирида

$$V_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots$$
$$(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1}) = \prod_{i>j>1}^{n} (a_i-a_j)$$

ни ҳосил қиламиз.

2. Ушбу

$$D = \begin{vmatrix} a-x & a & a & a & a \\ a & a-x & a & a & a \\ a & a & a-x & a & a \\ a & a & a & a-x & a \\ a & a & a & a & a-x \end{vmatrix}$$

детерминантни ҳисобланг. Бешинчи устунни ҳамма олдинги устунлардан айирамиз (яъни — 1 га кўпайтириб қўшамиз), у ҳолда

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & -x & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -x & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -x & a \\ x & x & x & x & a-x \end{vmatrix}$$

детерминантга эга бўламиз.

1, 2, 3, 4- сатрларни 5- сатрга қўшиб, қуйидаги детерминантни ҳосил қиламиз:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & -x & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -x & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & -x & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a-x \end{vmatrix}$$

Бу детерминантда бош диагоналнинг пастидаги ҳамма элементлари 0 лардан иборат бўлгани учун бу детерминант бош диагонали элементларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$(5a-x)\cdot(-x)^4 = 5ax^4 - x^5.$$

Шу кўринишдаги n- тартибли D детерминант берилган бўлса, у ҳолда $D = (-1)^{n-1}(nax^{n-1} - x^n)$ бўлади.

Машқлар

1. Қуйидаги детерминантларни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c & -d \\ x & 0 & y & 0 \\ -a & b & -c & d \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \frac{x_3}{x_3-1} & \frac{x_4}{x_4-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$

2. Ушбу n-тартибли детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b & & b \\ b & a & b & b & & b \\ b & b & a & b & & b \\ b & b & b & a & & b \\ & & & & & . \\ b & b & b & b & & a \end{vmatrix}$$

70-§. КРАМЕР ФОРМУЛАСИ

n та номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1s}x_s + \cdot \quad \cdot + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad + a_{2s}x_s + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \qquad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad + a_{ns}x_s + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Номаълумларнинг a_{ij} коэффициентларидан тузилган

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1s} & . \, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \quad . \, a_{2s} \, . & . \, a_{2n} \\ & & . \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{ns} \, . & . \, a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантни (1) система детерминанти дейилиб, у нолдан фарқли бўлсин.

(1) системани ечиш учун унинг биринчи тенгламасини A_{1s} алгебраик тўлдирувчига, иккинчи тенгламасини A_{2s} га, . ., n-тенгламасини A_{ns} га кўпайтириб, натижаларни ҳадма-ҳад қўшсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$(a_{11}A_{1s}+a_{21}A_{2s}+\ldots+a_{n1}A_{ns})\,x_1+(a_{12}A_{1s}+a_{22}A_{2s}+\ldots+a_{n2}A_{ns})\,x_2+\ldots+(a_{1s}A_{1s}+a_{2s}A_{2s}+\ldots+a_{ns}A_{ns})\,x_s+\ldots+(a_{1n}A_{1s}+a_{2n}A_{2s}+\ldots+a_{nn}A_{ns})\,x_n=b_1A_{1s}+b_2A_{2s}+\ldots+b_nA_{ns}. \qquad (2)$$

(2) тенгликдан ушбулар келиб чиқади: x_s номаълумнинг коэффициенти D детерминантга тенг, қолган коэффициентлар эса нолга тенг (68-§ га қаранг). (2) нинг ўнг томонидаги йиғинди D детерминантнинг s-устун элементлари ўрнига мос равишда $b_1, b_2, \ldots, b_n$ озод ҳадларни қўйиш билан ҳосил қилинган, яъни

$$D_s=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантни ифодалайди, чунки D_s ни s-устуннинг $b_1, b_2, \ldots, b_n$ элементлари бўйича ёйсак, (2) нинг ўнг томони келиб чиқади. Шундай қилиб, (2) тенглик $Dx_s=D_s(s=\overline{1,n})$ га тенг. Бундан

$$x_s=\frac{D_s}{D}\quad(s=\overline{1,n}) \qquad (3)$$

ҳосил бўлади.

3) тенгликларни *Крамер формуласи* деб айтилади.

(3) формулаларнинг суратларидаги D_1 детерминант D нинг биринчи устунини, D_2 эса D нинг иккинчи устунини, ..., D_n детерминант эса D нинг n-устунини озод ҳадлар устуни билан алмаштириш натижасида келиб чиқадиган детерминантлардир.

(3) система (1) системанинг ечимини билдиради. Ҳақиқатан, (1) системани ташкил этувчи исталган

$$a_{s1}x_1+\ldots+a_{ss}x_s+\ldots+a_{sn}x_n=b_s$$

тенгламага (3) қийматларни қўйсак, чап томонда

$$\frac{1}{D}\,(a_{s1}D_1+\ldots+a_{ss}D_s+\ldots+a_{sn}D_n) \qquad (4)$$

йиғинди ҳосил бўлади. Бу ерда

$$D_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1},$$

$$\cdot$$

$$D_s = b_1A_{1s} + b_2A_{2s} + \dots + b_nA_{ns},$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$$

$$D_n = b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn}$$

эканини назарда тутсак, (4) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\frac{(a_{s1}A_{11} + \dots a_{sn}A_{1n})\, b_1 + \dots + (a_{s1}A_{s1} + \dots + a_{sn}A_{sn})\, b_s +}{D} \times$$

$$\times \frac{+ \dots + (a_{s1}A_{n1} + \dots + a_{sn}A_{nn})\, b_n}{1} =$$

$$= \frac{0 \cdot b_1 + \dots + D \cdot b_s + \dots + 0 \cdot b_n}{D} = \frac{Db_s}{D} = b_s \quad (s = \overline{1,n}).$$

Мисол.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

системани ечинг.

Ечиш.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 18 - 1 - 12 - 4 + 3 = 12,$$

$$D = 12 \neq 0.$$

$D \neq 0$ бўлгани учун берилган система ягона ечимга эга.

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 3 - 16 + 9 + 2 = 12,$$

$$D_1 = 12;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 4 - 9 + 1 + 16 = 24, \quad D_2 = 24;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 27 - 1 + 12 + 6 + 12 = 36,$$

$$D_3 = 36.$$

Демак, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{12} = 1$, $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{24}{12} = 2$, $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{36}{12} = 3$, $x_3 = 3$.

Шундай қилиб, берилган системанинг ечими (1, 2, 3) бўлади.

Теорема. *n та номаълумли n та бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси нолмас ечимга эга бўлиши учун бу системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. 1.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \ (i = \overline{1,n}) \tag{5}$$

система $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нолмас ечимга эга бўлса,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = 0 \ (i = \overline{1,n}) \tag{6}$$

тенгликлар бажарилади. Бу тенгликлардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered}(a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n;\ a_{21}\alpha_1 + \ldots + a_{2n}\alpha_n;\\ a_{n1}\alpha_1 + \ldots + a_{nn}\alpha_n) = (0;\ 0;\ \ldots\ 0),\\ \alpha_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) + \alpha_2(a_{12}, a_{22}, \ldots\ a_{n2}) +\\ + \ldots + \alpha_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Бу тенглик система детерминанти

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

нинг устунлари чизиқли боғланган эканини кўрсатади. У ҳолда 69-параграфнинг 2-теоремасига мувофиқ, D детерминант нолга тенг бўлади.

2. $D = 0$ деб фараз қилсак, 69-§ нинг 2-теоремасига асосан, D нинг устунлари чизиқли боғланган бўлади. Шу сабабли камида биттаси нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонлар учун (3) ёки (7) ва демак, (6) бажарилади. Бу эса (5) системанинг $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ нолмас ечимга эга эканини тасдиқлайди.

Мисол.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

система (1, —1, 1) нолмас ечимга эга. Шу сабабли

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 - 8 + 1 - 4 + 12 = 0,\ D = 0.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

система учун

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 15 - 16 - 12 + 1 + 40 = 0,\ D=0.$$

Демак, система нолмас ечимларга эга. Бу ечимларни, масалан, номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули билан топамиз: 1) иккинчи тенгламани 2 га кўпайтириб, биринчидан айирамиз; 2) биринчини 3 га ва учинчини 2 га кўпайтириб, яна биринчидан айирамиз, яъни

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ -5x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 0 + 0 = 0. \end{cases}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

системани ечамиз. $x_2 = -2x_3$ да $x_3 = 1$ бўлса, $x_2 = -2$ бўлади. $2x_1 = -x_2 + 4x_3$ дан $2x_1 = 6$, $x_1 = 3$ ни топамиз.

Демак, системанинг битта нолмас ечими (3, —2, 1) бўлади.

Машқлар

1. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$

система нолмас ечимларга эга бўлиши учун унинг коэффициентлари ўзаро қандай боғланган бўлиши керак?

2. a нинг қандай қийматларида

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

система нолмас ечимга эга бўлади?

3. Қандай шартларда $M_i\ (x_i;\ y_i)$ нуқталар $y = ax^2 + bx + c$ параболага тегишли бўлади?

4. $n > 2$ бўлганда

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & . & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & & 1 + x_2y_n \\ & . & & \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & & 1 + x_ny_n \end{vmatrix} = 0$$

эканлигини кўрсатинг.

VI БОБ. ЧИЗИҚЛИ АКСЛАНТИРИШЛАР ВА ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИ

71-§. ВЕКТОР ФАЗОЛАРНИНГ ЧИЗИҚЛИ АКСЛАНТИРИШИ

Биз III бобда вектор фазо билан танишиб ўтдик. Энди олдимизга қуйидаги масалани қўямиз: $\mathscr{P}$ сонлар майдонида аниқланган турли вектор фазолар орасида қандай муносабатлар бўлиши мумкин?

U вектор фазони V вектор фазога акслантирувчи φ акслантириш берилган бўлсин. Агар шундай акслантириш мавжуд бўлса, биз уни $\varphi: U \to V$ орқали белгилаймиз.

Мазкур акслантиришда U нинг барча векторлари V нинг векторларига аксланади (барчасига бўлиши шарт эмас). U вектор фазонинг ихтиёрий $\overline{x}$ элементига φ акслантириш ёрдамида V вектор фазодан мос келувчи векторни $\overline{y}$ деб белгилаймиз. Бу мослик $\varphi: \overline{x} \to \overline{y}$; $\overline{x} \overset{\varphi}{\to} \overline{y}$; $\varphi \overline{x} = \overline{y}$; $\overline{y} = \varphi(\overline{x})$ кўринишларда белгиланади.

1-таъриф. $\mathscr{P}$ сонлар майдонида аниқланган U вектор фазони V вектор фазога акслантирувчи φ акслантириш учун қуйидаги иккита шарт

$$1)\ \varphi\ (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \varphi \overline{x}_1 + \varphi \overline{x}_2;$$
$$2)\ \varphi\ (\lambda \overline{x}) = \lambda \varphi \overline{x}\ (\lambda \in \mathscr{P})$$

бажарилса, *U вектор фазо V вектор фазога чизиқли аксланади* дейилади.

U фазони V фазога чизиқли акслантиришлар тўплами $\mathrm{Hom}(U, V)$ орқали белгиланади.

U вектор фазони ўз-ўзига акслантириш U фазода аниқланган оператор дейилади.

Операторлар f, φ, ψ, ҳарфлар орқали белгиланиб, улар чизиқли акслантиришларнинг хусусий ҳолидан иборат, яъни 1-таърифда $U = V$ бўлади. Шунинг учун V фазонинг барча операторлари тўплами ҳам $\mathrm{Hom}\ (V, V)$ бўлади.

2-таъриф. U вектор фазони ўз-ўзига чизиқли акслантириш *U фазода аниқланган чизиқли оператор* дейилади.

φ гомоморфизм (чизиқли акслантириш) таъсирида $\varphi \overline{x} = \overline{y}$ бўлса, $\overline{y}$ вектор $\overline{x}$ векторнинг *образи* (тасвири), $\overline{x}$ эса $\overline{y}$ векторнинг *прообрази* (асли) деб юритилади. $\overline{x} \in U$ бўлганда $\varphi\bar{x}\in V$ векторлар тўплами одатда φ акслантиришнинг *образи* деб юритилади ва $\operatorname{im}\varphi$ ёки φU орқали белгиланади.

Шуни алоҳида қайд қиламизки, $\varphi\bar{x}$ символ икки маънога эга:

1) бу символ $\bar{x}$ векторга φ акслантиришни қўллаш жараёнидир;

2) мазкур акслантирищнинг натижасини, яъни $\bar{x}$ векторнинг образини билдиради.

Мисоллар. 1. Ҳар бир комплекс сонни вектор деб қарасак, комплекс сонлар тўплами комплекс сонлар майдони устидаги вектор фазо бўлади.

Ҳақиқий сонлар тўпламини ҳам вектор фазо деб қараш мумкин. Энди $\varphi:\alpha\to|\alpha|$ акслантиришни ўрнатсак, бу акслантириш C фазони R фазога чизиқли акслантирмайди. Дарҳақиқат, а) $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$; б) $\{|\alpha|\}$ тўплам вектор фазо эмас.

2. Агар $\varphi:\alpha\to\bar{\alpha}$ акслантиришни қарайдиган бўлсак, бу акслантириш комплекс сонлар майдони устида чизиқли оператор бўлади. Чунки бу ерда чизиқли операторнинг иккала шарти ҳам бажарилади.

Машқ

Чизиқли акслантиришлар таърифидаги иккита шартни битта $\varphi(k_1\bar{x}_1+k_2\bar{x}_2)=k_1\varphi\bar{x}_1+k_2\varphi\bar{x}_2$ шарт билан алмаштириш мумкин эканлигини исботланг, бу ерда $k_1, k_2\in\mathcal{P}$.

72-§. ЧИЗИҚЛИ АКСЛАНТИРИШЛАР МАТРИЦАСИ

Фараз қилайлик, бирор φ чизиқли акслантириш берилган бўлиб, у n ўлчовли U_n вектор фазони m ўлчовли V_m вектор фазога ўтказсин. U_n ва V_m фазоларнинг базислари мос равишда $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ ва $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \quad, \bar{f}_m$ бўлсин.

Агар $\bar{e}_i\in U_n\,(i=\overline{1,n})$ векторларга акслантиришни татбиқ этганда ҳосил бўлган векторни $\varphi\bar{e}_i\in V_m$ орқали белгиласак, бу векторларни V_m нинг базис векторлари орқали чизиқли ифодалаш мумкин, яъни

$$\varphi\bar{e}_i=a_{1i}\bar{f}_1+a_{2i}\bar{f}_2+\qquad+a_{mi}\bar{f}_m$$

ёки

$$\varphi\bar{e}_i=\sum_{k=1}^{m}a_{ki}\bar{f}_k\quad(i=\overline{1,n}).\tag{1}$$

(1) тенгликлардаги a_{ki} коэффициентлардан

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицани тузамиз. Ана шу матрицага φ акслантиришнинг U_n фазо базисини V_m фазо базисига акслантиргандаги матрица деб юритилади.

Энди масалани қуйидагича қўямиз. U_n фазонинг ихтиёрий $\bar{x}$ вектори координаталари билан унинг $\varphi : U_n \to V_m$ акслантириш натижасида ҳосил қилинган $\bar{y} = \varphi \bar{x}$ прообрази координаталари орасида қандай боғланиш мавжуд? Бу саволга жавоб бериш учун

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i \quad \text{ва} \quad \bar{y} = \varphi \bar{x} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \bar{f}_k$$

векторларни оламиз. У ҳолда

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \bar{f}_k = \varphi \bar{x} = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi \bar{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki} \bar{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \alpha_i\right) \bar{f}_k,$$

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \alpha_i\right) \bar{f}_k \qquad (2)$$

бўлиб, бу ерда α_i, β_i ва a_{ki} лар қандайдир $\mathcal{P}$ сонлар майдони элементларидир.

Булардан ташқари, V_m фазонинг ихтиёрий $\bar{y}$ векторини $\bar{f}_1, \bar{f}_2,$ $\bar{f}_m$ базис орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\bar{y} = \beta_1 \bar{f}_1 + \beta_2 \bar{f}_2 + \qquad + \beta_m \bar{f}_m. \qquad (3)$$

(2) ва (3) тенгликларда $\bar{f}_1, \bar{f}_2,$ . . , $\bar{f}_m$ ларнинг мос коэффициентларини тенглаштириб (иккита векторнинг тенглиги шартидан) қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \qquad + a_{1n} \alpha_n, \\ \beta_2 = a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + \qquad + a_{2n} \alpha_n, \\ \\ \beta_m = a_{m1} \alpha_1 + a_{m2} \alpha_2 + \qquad + a_{mn} \alpha_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Демак, $\varphi : U_n \to V_m$ акслантириш берилган бўлса, уни ихтиёрий $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i \in U_n$ векторга татбиқ қилишдан ҳосил бўлган ҳар қандай $\bar{y} = \varphi \bar{x} \in V_m$ векторни аниқлаш мумкин экан. (4) тенгликлар $\bar{x} \in U_n$ ва унинг прообрази бўлган $\varphi \bar{x} \in V_m$ ларнинг мос равишда $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \quad , \bar{e}_n$ ва $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \quad \ldots, \bar{f}_m$ базислардаги координаталари орасидаги боғланишни ифодалайди. Агар (4) тенгликларни матрица кўринишида ёзадиган бўлсак,

$$Y = AX \tag{5}$$

ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, биз юқорида кўриб ўтганимизга биноан ҳар бир $\varphi : U_n \to V_m$ чизиқли акслантиришга битта (m, n) турли матрица келар экан.

Энди масалани аксинча қўямиз.

Ҳар бир (m, n) турли $\|a_k\| (k = \overline{1, m};\ i = \overline{1, n})$ матрицага мос келувчи бирор $\varphi : U_n \to V_m$ чизиқли акслантириш мавжудми? Бу савол ижобий жавобга эга.

Ҳақиқатан, агар $\|a_{ki}\|$ матрица берилган бўлса, ихтиёрий $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$ вектор учун $\bar{y} = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \bar{f}_k$ векторни (4) формулалар ёрдамида аниқлай оламиз. Энди $\varphi : \bar{x} \to \bar{y}$ акслантиришни киритамиз. Бу акслантириш чизиқли бўлади. Ҳақиқатан:

1) агар $\varphi \bar{x} = \bar{y}$ бўлса, $\varphi(\alpha \bar{x}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha \beta_k \bar{f}_k = \alpha \sum_{k=1}^{m} \beta_k \bar{f}_k =$ $= \alpha \varphi \bar{x}$, $\varphi(\alpha \bar{x}) = \alpha \varphi \bar{x}$ ўринли;

2) $\bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{e}_i$, $\bar{x}'_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i \bar{e}_i$, $\bar{x}_1 + \bar{x}'_1 = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \alpha'_i) \bar{e}_i$,

$\varphi \bar{x}_1 = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \bar{f}_k$, $\varphi \bar{x}'_1 = \sum_{k=1}^{m} \beta'_k \bar{f}_k$ ларга биноан,

$$\varphi (\bar{x}_1 + \bar{x}'_1) = \sum_{k=1}^{m} (\beta_k + \beta'_k) \bar{f}_k = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \bar{f}_k + \sum_{k=1}^{m} \beta'_k \bar{f}_k =$$

$= \varphi \bar{x}_1 + \varphi \bar{x}'_1$, $\varphi (\bar{x}_1 + \bar{x}'_1) = \varphi \bar{x}_1 + \bar{x}'_1$ ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, $\varphi : \bar{x} \to \bar{y}$ акслантириш чизиқли акслантиришнинг иккала шартини ҳам қаноатлантиргани туфайли бу акслантириш чизиқлидир. Демак, n ўлчовли U_n фазони m ўлчовли V фазога ўтказувчи чизиқли акслантиришлар тўплами билан (m, n) турли матрицалар тўплами орасида ўзаро бир қийматли акслантириш мавжуд экан.

1-натижа. Битта чизиқли операторга битта квадрат матрица мос келади ва аксинча.

73-§. ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

1-таъриф. Агар U_n фазонинг иккита φ ва ψ чизиқли операторлари учун $\varphi\overline{x} = \psi\overline{x}$ тенглик U_n фазонинг исталган $\overline{x}$ вектори учун бажарилса, φ ва ψ *операторлар ўзаро тенг* дейилади.

Бирор U_n фазода иккитадан кам бўлмаган чизиқли операторлар аниқланган бўлса, бу операторларнинг йиғиндиси, айирмаси ҳақида гапириш мумкин.

U_n фазода φ ва ψ чизиқли операторлар берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар U_n фазонинг исталган $\overline{x}$ вектори учун $f\overline{x} = \varphi\overline{x} + \psi\overline{x}$ тенглик бажарилса, f оператор φ ва ψ операторлар *йиғиндиси* дейилади ва $f = \varphi + \psi$ орқали ёзилади.

Чизиқли операторлар йиғиндиси яна чизиқли оператор бўлади.

Ҳақиқатан, агар φ операторга мос келувчи матрицани A, ψ операторга мос келувчи матрицани B ва f операторга мос келувчи матрицани C орқали белгиласак, у ҳолда $C = A + B$ тенглик ўринли бўлади. Чизиқли операторлар учун

1) $\varphi + \psi = \psi + \varphi$;

2) $\varphi + (\psi + f) = (\varphi + \psi) + f$;

3) $\varphi + \theta = \varphi$

тенгликлар ўринлидир. $\varphi - \psi$ айирма ҳам худди шу усулда аниқланади (текшириб кўринг).

3-таъриф. $\alpha \in \mathscr{P}$ бўлиб, U_n фазода берилган операторлар учун $(\alpha\varphi)\overline{x} = \alpha\varphi\overline{x}$ тенглик U_n фазонинг исталган $\overline{x}$ элементи учун бажарилса, у ҳолда $\alpha\varphi$ га *φ операторнинг α скаляр миқдорга кўпайтмаси* дейилади.

2-натижа. $\mathscr{P}$ сонлар майдони устида берилган чизиқли операторлар тўплами чизиқли фазо бўлади.

4-таъриф. Агар φ операторга бирор $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \quad , \overline{e}_n$ базисга нисбатан A квадрат матрица мос келса, A матрицанинг ранги *φ чизиқли операторнинг ҳам ранги* дейилади.

Чизиқли операторлар орасида $\forall\ \overline{x} \in U_n$ учун $\varphi\overline{x} = \overline{x}$ ва $\varphi\overline{x} = 0$ каби операторлар мавжуд бўлса, улар мос равишда айний (бирлик) ва ноль операторлар деб аталади. Бирлик оператор ε, ноль оператор эса $\overline{0}$ орқали белгиланиб, уларга мос равишда бирлик, яъни E ва ноль $||0_{ij}||$ матрицалар тўғри келади.

Баъзи ҳолларда U_n фазонинг нолмас векторлари φ оператор таъсирида ноль векторга аксланиши мумкин.

5-таъриф. U_n фазонинг φ оператор ёрдамида нолга аксланувчи барча элементлари тўпламига *φ операторнинг ядроси* дейилади ва у Кег φ орқали белгиланади.

1-теорема. *φ чизиқли операторлар ядроси шу оператор қаралаётган фазонинг қисм фазоси бўлади.*

Исботи. $\overline{x}_1 \in$ Кег φ, $\overline{x}_2 \in$ Кег φ бўлганда $\varphi\overline{x}_1 = \overline{0}$ ва $\varphi\,\overline{x}_2 = \overline{0}$ ҳамда φ чизиқли оператор бўлгани учун

1) $\varphi(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \varphi\overline{x}_1 - \varphi\,\overline{x}_2 = \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$, $\varphi(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \overline{0}$;

2) $\varphi(\lambda\,\overline{x}) = \lambda\varphi\,\overline{x} = \lambda\cdot\overline{0} = \overline{0}$, $\varphi(\lambda\,\overline{x}) = \overline{0}$ эканлигидан $\overline{x}_1 = -\overline{x}_2 \in$ Кег φ, $\lambda\overline{x} \in$ Кег φ бўлади. Демак, Кег φ U_n фазонинг қисм фазосидир.

6-таъриф. φ чизиқли оператор ядросининг ўлчовига шу *операторнинг дефекти* дейилади.

2-теорема. *Агар U_n фазода аниқланган φ чизиқли оператор матрицасининг ранги r га тенг бўлса,* Кег φ *ядронинг ўлчови $n - r$ га тенг бўлади.*

Исботи. Фараз қилайлик, $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e}_i \in$ Кег φ бўлсин. Кег φ нинг барча векторлари нолга аксланганидан 72-параграфдаги (4) тенгликлар системаси

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \qquad + a_{in}\alpha_n = 0 \ (i = \overline{1, m}) \tag{1}$$

кўринишни олади.

Аксинча, координаталари бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг нолмас ечимини ифодаловчи барча векторлар Кег φ га тегишли бўлади. Шундай қилиб, Кег φ ядронинг ўлчови (1) системанинг чизиқли боғланмаган ечимлари сонига (яъни фундаментал система ечимлари сонига) тенг экан. Маълумки, (59- § га қаранг) бундай ечимлар сони $n - r$ га тенгдир. Бу ерда r сон φ операторга мос келувчи A матрица рангини билдиради.

3-теорема. *Агар $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \quad , \overline{e}_n$ векторлар системаси фазонинг базиси ва $\overline{f}_1, \overline{f}_2, . \quad , \overline{f}_n$ лар шу фазонинг ихтиёрий векторлари бўлса, унда шундай ягона φ опера-*

тор мавжудки, у $\bar e_1, \bar e_2, \quad , \bar e_n$ *базис системани* $\bar f_1, \bar f_2, \quad , \bar f_n$ *ларга ўтказади.*

Исботи. $\forall \bar x \in U_n$ учун $\bar e_1, \bar e_2, \quad , \bar e_n$ базисда

$$\bar x = \alpha_1 \bar e_1 + \alpha_2 \bar e_2 + \ldots + \alpha_n \bar e_n \qquad (2)$$

бир қийматли ифодаланиши мавжуд. $\bar x$ векторга

$$\varphi \bar x = \alpha_1 \bar f_1 + \alpha_2 \bar f_2 + \quad . + \alpha_n \bar f_n \qquad (3)$$

векторни мос қўямиз. (3) формула бўйича аниқланган $\varphi \bar x$ вектор U_n вектор фазода тўла аниқланган бўлади, чунки φ мослик U_n да алмаштириш бўлади. $\bar x = \bar e_1 = 1 \cdot \bar e_1 + 0 \cdot \bar e_2 + . \quad + + 0 \cdot \bar e_n$ бўлса, $\varphi \bar e_1 = \bar f_1$, шунингдек $\varphi \bar e_2 = \bar f_2, \quad , \varphi \bar e_n = \bar f_n$ тенгликлар ўринли бўлади. Шундай қилиб, φ алмаштириш $\bar e_1, \bar e_2, \quad , \bar e_n$ векторларни мос $\bar f_1, \bar f_2, \quad \bar f_n$ векторларга алмаштиради.

Энди φ алмаштиришнинг чизиқли эканлигини кўрсатамиз. $\lambda \bar x = \lambda \alpha_1 \bar e_1 + \lambda \alpha_2 \bar e_2 + \quad + \lambda \alpha_n \bar e_n$ вектор учун (3) формула бўйича

$$\varphi (\lambda \bar x) = \lambda \alpha_1 \bar f_1 + \lambda \alpha_2 \bar f_2 + \quad + \lambda \alpha_n \bar f_n = \lambda \varphi \bar x,$$

$$\varphi (\lambda \bar x) = \lambda \varphi \bar x; \quad \bar y \in U_n, \ \bar y = \beta_1 \bar e_1 + \beta_2 \bar e_2 + \quad + \beta_n \bar e_n$$

бўлсин. $\bar x + \bar y = (\alpha_1 + \beta_1) \bar e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \bar e_2 + \quad + (\alpha_n + \beta_n) \bar e_n$ йиғинди вектор учун (3) формулага асосан:

$$\varphi (\bar x + \bar y) = (\alpha_1 + \beta_1) \bar f_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \bar f_2 + \quad + (\alpha_n + \beta_n) \bar f_n =$$
$$= (\alpha_1 \bar f_1 + \alpha_2 \bar f_2 + \quad + \alpha_n \bar f_n) + (\beta_1 \bar f_1 + \beta_2 \bar f_2 + \quad +$$
$$+ \beta_n \bar f_n) = \varphi \bar x + \varphi \bar y, \quad \varphi (\bar x + \bar y) = \varphi \bar x + \varphi \bar y.$$

Чизиқли алмаштиришнинг ягоналигини исботлаймиз.

$\psi e_i = \bar f_i \ (i = \overline{1, n})$ иккинчи чизиқли алмаштириш мавжуд бўлсин.

ψ чизиқли акслантириш бўлгани учун ихтиёрий

$$\bar x = \alpha_1 \bar e_1 + \alpha_2 \bar e_2 + \quad + \alpha_n \bar e_n.$$

$$\psi \bar x = \psi (\alpha_1 \bar e_1 + \alpha_2 \bar e_2 + \quad + \alpha_n \bar e_n) = \alpha_1 \psi \bar e_1 + \quad +$$

$+\alpha_n \psi \bar{e}_n = \alpha_1 \bar{f}_1 + \alpha_2 \bar{f}_2 + \qquad + \alpha_n \bar{f}_n = \varphi \bar{x}$, $\psi \bar{x} = \varphi \bar{x}$, яъни $\psi = \varphi$ бўлади.

Мисоллар. 1. $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ тўғри бурчакли декарт координата системасининг бирлик векторлари бўлсин. $\bar{x}$ векторга φ операторнинг татбиқи сифатида $\bar{x}$ векторнинг бирор текисликдаги ортогонал проекциясини тушунамиз. Мазкур оператор чизиқли оператор бўлади (текшириб кўринг). $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ базисга нисбатан $\varphi \bar{e}_1 = \bar{e}_1$, $\varphi \bar{e}_2 = \bar{e}_2$, $\varphi \bar{e}_3 = \bar{e}_3$ бўлгани учун бу оператор матрицаси

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ бўлади.}$$

2. Даражаси n дан юқори бўлмаган кўпҳадларнинг фазосини қарайлик. Бу фазонинг базиси сифатида

$$\bar{e}_0 = 1, \quad \bar{e}_1 = x, \quad \bar{e}_2 = \frac{x^2}{2!}, \qquad \bar{e}_n = \frac{x^n}{n!} \tag{5}$$

ни ва оператори сифатида берилган кўпҳаднинг ҳосиласини тушунамиз. Унда $\varphi \bar{e}_0 = 0$, $\varphi \bar{e}_1 = 1$, $\varphi \bar{e}_2 = \bar{e}_1$, $\varphi \bar{e}_3 = \bar{e}_2$, . $\varphi \bar{e}_n = \bar{e}_{n-1}$ бўлгани учун бу операторнинг (5) базисга нисбатан матрицаси

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлади.

Машқлар

1. Даражалари n дан юқори бўлмаган кўпҳадларнинг фазоси, базиси сифатида

$$1,\ x\ x^2,\ x^3, \qquad x^n \tag{6}$$

векторлар, оператор сифатида эса мазкур кўпҳаднинг биринчи тартибли ҳосиласи тушунилса, бу операторнинг (6) базисга нисбатан матрицаси топилсин.

2. $\varphi : f(x) \to f''(x)$ ($f''(x)$ белги $f(x)$ нинг иккинчи тартибли ҳосиласини билдиради) операторнинг (6) базисга нисбатан матрицаси қандай бўлади?

Мисоллар. 1. V_3 фазода $\bar{x}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{x}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{x}_3 = (1, 1, 1)$ векторларни $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ базисга нисбатан мос равишда $\bar{y}_1 = (2, 3, 5)$, $\bar{y}_2 = (1, 0, 0)$, $\bar{y}_3 = (0, 1, -1)$ векторларга ўтказувчи операторнинг матрицаси топилсин.

Ечиш. Аввало $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ва $\bar{x}_3$ ларни $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ лар орқали қуйидагича ифодалаб оламиз:

$$\bar{x}_1 = (0, 0, 1) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{x}_2 = (0, 1, 1) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3,$$

$$\bar{x}_3 = (1, 1, 1) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3.$$

Бундан кўринадики, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ векторларни базис векторларга ўтказувчи матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

дан иборат, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ векторларни базис векторларга ўтказувчи матрица эса

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ни ташкил этади. Энди биз шундай X матрицани топишимиз керакки, у A ни B га ўтказсин, яъни қуйидаги тенглик бажарилсин:

$$XA = B.$$

Охирги тенгликни $X = B \cdot A^{-1}$ орқали ёза оламиз. Бу ерда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

эканлигидан

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

бўлади.

2. $\overline{x}_1 = (0, 0, 1)$, $\overline{x}_2 = (0, 1, 1)$, $\overline{x}_3 = (1, 1, 1)$ базисга нисбатан шу векторларнинг ўзини $\overline{y}_1 = (2, 3, 5)$, $\overline{y}_2 = (1, 0, 0)$, $\overline{y}_3 = (0, 1, -1)$ ларга ўтказувчи Y_3 да аниқланган чизиқли операторнинг матрицаси топилсин.

Ечиш. A матрица учун шундай Y матрицани топиш кераккиِ A матрица Y ни B га ўтказсин, яъни $AY = B$ тенглик ўринли бўлсин. Бундан $Y = A^{-1}B$ топилади.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлгани учун

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлади.

3. $f(x) = ae^x + be^{-x}$ кўринишдаги барча функцияларнинг икки ўлчовли фазосини оламиз. Бу фазо базислари сифатида $\overline{e}_1 = e^x$, $\overline{e}_2 = e^{-x}$ лар ва $\overline{f}_1 = \mathrm{ch}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\overline{f}_2 = \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ларни танлаймиз. Унда

$$\overline{f}_1 = \frac{1}{2}\overline{e}_1 + \frac{1}{2}\overline{e}_2, \ \overline{f}_2 = \frac{1}{2}\overline{e}_1 - \frac{1}{2}\overline{e}_2$$

ёки

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

бўлиб, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ бўлади.

Агар $\overline{f} = f(x)$ нинг координаталарини (1) ва (2) базисларга нисбатан мос равишда a, b ва a', b' десак, улар қуйидагича боғланган бўлади:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Машқлар

1. V_2 фазода (яъни текисликда) ўзаро перпендикуляр бўлган $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ ортларни базис деб қараб, янги $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ сифатида $\overline{e}_1$ ва $\overline{e}_2$ ларни мос равишда α бурчакка буриш тушунилганда ихтиёрий вектор координаталари эски ва янги базислар орқали қандай боғланади?

2. V_4 фазода $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4$ базисдан

$$\overline{e}_1' = (1,\ 1,\ 0,\ 0), \qquad \overline{e}_2' = (1,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$\overline{e}_3' = (1,\ 0,\ 0,\ 1) \qquad \overline{e}_4' = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

базисга ўтганда ихтиёрий вектор координаталари қандай формула асосида ўзгаради?

3. V_3 фазонинг $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ базисидан $\overline{x}_1 = (1,\ 1,\ 1),\ \overline{x}_2 = (1,\ 1,\ 1),\ \overline{x}_3 = (2,\ 1,\ 0)$ базисга ўтганда:

а) $\overline{a}_1 = (2,\ 3,\ 1)$; б) $\overline{a}_2 = (1,\ 2,\ -1)$; в) $\overline{a}_3 = (1,\ 1,\ 1)$ векторлар координаталари қандай ўзгаради?

75-§. ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРНИНГ ТУРЛИ БАЗИСЛАРДАГИ МАТРИЦАЛАРИ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ

Фазонинг иккита

$$\overline{e}_1,\ \overline{e}_2, \qquad \overline{e}_n, \tag{1}$$
$$\overline{f}_1,\ \overline{f}_2, \qquad ,\ \overline{f}_n \tag{2}$$

базиси ва битта φ чизиқли операторини оламиз. Бу φ операторнинг (1) ва (2) базислардаги матрицалари

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & a_{2n} \\ & \\ a_{n1}\,a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ва } B = \begin{pmatrix} b_{11}\,b_{12} & b_{1n} \\ b_{21}\,b_{22} & b_{2n} \\ & \\ b_{n1}\,b_{n2} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

бўлсин. Бу матрицаларни аниқловчи тенгликлар қисқача бундай ёзилади:

$$\begin{cases} \varphi\overline{e}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}\overline{e}_i \ (k = \overline{1, n}), \\ \varphi\overline{f}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ik}\overline{f}_i \ (k = \overline{1, n}). \end{cases} \tag{3}$$

(2) базисни (1) базис орқали чизиқли ифодалаймиз:

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = c_{11}\overline{e}_1 + c_{21}\overline{e}_2 + \qquad + c_{n1}\overline{e}_n, \\ \overline{f}_2 = c_{12}\overline{e}_1 + c_{22}\overline{e}_2 + \qquad + c_{n2}\overline{e}_n, \\ . \\ \overline{f}_n = c_{1n}\overline{e}_1 + c_{2n}\overline{e}_2 + \qquad + c_{nn}\overline{e}_n. \end{cases} \tag{4}$$

(4) системанинг

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \\ c_{21} & c_{22} & \\ & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицаси хосмасдир. Ҳақиқатан, 61-§ даги, 1,3,4-теоремаларга биноан хосмас матрицалар кўпайтмаси хосмас матрица бўлади. Шунинг учун C матрица ҳам хосмас бўлади. 73-§ даги 3-теоремага асосан ягона ν чизиқли оператор мавжуд бўлиб, у (1) базис векторларини (4) векторларига акслантиради:

$$\nu\overline{e}_i = \overline{f}_i \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{5}$$

(5) нинг иккала томонига φ операторни татбиқ этамиз. Натижада $\varphi\nu\overline{e}_i = \varphi\overline{f}_i$ ҳосил бўлади.

Охирги тенгликларнинг ўнг томонидаги $\varphi\overline{f}_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ ларни (3) билан алмаштирсак, $\varphi\nu\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\overline{f}_i$ келиб чиқади. Агар $\overline{f}_i\left(i = \overline{1, n}\right)$ ларнинг ўрнига (4) ни қўйсак, натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\varphi\nu\overline{e}_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\nu\overline{e}_i. \tag{6}$$

ν нинг $|C|$ детерминанти 0 дан фарқли бўлгани сабабли, ν га тескари ν^{-1} оператор мавжуд бўлиб, уни (6) векторга татбиқ этамиз:

$$\nu^{-1}\varphi\overline{e}_k = \nu^{-1}\sum_{i=1}^{n} b_{ik}\nu\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\nu^{-1} b_{ik}\nu\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\nu^{-1}\nu\overline{e}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\varepsilon\overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\overline{e}_i, \tag{7}$$

$\nu^{-1}\varphi\overline{e}_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\overline{e}_i$ (ε—бирлик оператор).

Бир томондан $\nu^{-1}\varphi\nu$ операторнинг (1) базисдаги матрицаси $C^{-1}AC$ бўлиб (чунки $\nu^{-1}\to C^{-1}$, $\varphi\to A$ ва $\nu\to C$), иккинчи томондан, (7) га мувофиқ, бу операторнинг (1) базисидаги матрицаси B бўлганлиги сабабли

$$B = C^{-1}AC \tag{8}$$

бўлади. Бунда C ни (2) базисдан (1) базисга ўтиш матрицаси дейилади.

Таъриф. (8) тенглик билан боғланган A ва B матрицалар *ўхшаш матрицалар* дейилади.

Мисол. Уч ўлчовли арифметик V фазонинг

$$\bar e_1 = (1,0,0),\ \bar e_2 = (0,1,0),\ \bar e_3 = (0,0,1),$$
$$\bar f_1 = (1,1,1),\ \bar f_2 = (1,2,1),\ \bar f_3 = (2,-1,1)$$

базисларини ва $\varphi\,(a_1, a_2, a_3) = (a_1, 2a_2, 3a_3)$ операторни оламиз. Бу операторнинг биринчи базисдаги матрицаси

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

бўлиб, иккинчи базиснинг биринчи базис орқали чизиқли ифодаси қуйидагидан иборат:

$$\begin{aligned} \bar f_1 &= \bar e_1 + \bar e_2 + \bar e_3, \\ \bar f_2 &= \bar e_1 + 2\bar e_2 + \bar e_3, \\ \bar f_3 &= 2\bar e_1 - \bar e_2 + \bar e_3. \end{aligned}$$

Демак,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ва } C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

лардан иборат бўлгани учун φ операторнинг иккинчи базисдаги матрицаси

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 \\ -5 & -3 & -7 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

бўлади.

76-§. ЎЗАРО ТЕСКАРИ ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАР

$\mathscr{P}$ майдон устидаги V_n фазо ва унинг

$$\bar e_1, \bar e_2, \quad , \bar e_n \tag{1}$$

базиси берилган бўлсин. φ чизиқли операторни ва унинг (1) базисдаги

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицасини оламиз. Бу матрицанинг

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминанти A га мос φ операторнинг ҳам детерминанти дейилади.

1-таъриф. $|A|$ детерминант нолдан фарқли бўлганда φ чизиқли оператор *хосмас оператор*, $|A| = 0$ бўлса φ *хос оператор* деб аталади.

2-таъриф. φ чизиқли оператор учун шундай ψ чизиқли оператор мавжуд бўлиб,

$$\varphi\psi = \psi\varphi = \varepsilon \qquad (2)$$

тенглик бажарилса, ψ ни φ га *тескари оператор* дейилади.

(2) тенгликдан қуйидагини топамиз: $\bar{x} \in V_n$ вектор учун $(\varphi\psi)\bar{x} = \varepsilon\bar{x} = \bar{x}$. Энди $\psi\bar{x} = \bar{y}$ бўлса, у ҳолда $(\varphi\psi)\bar{x} = \varphi(\psi\bar{x}) = \varphi\bar{y} = \bar{x}$ бўлади, яъни φ оператор $\bar{y}$ ни $\bar{x}$ га акслантирса, тескари ψ оператор, аксинча, $\bar{x}$ ни $\bar{y}$ га акслантиради.

Теорема. *Чизиқли операторга тескари оператор мавжуд бўлиши учун унинг хосмас оператор бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Зарурлиги. φ га тескари ψ оператор мавжуд бўлса, $\varphi\psi = \varepsilon$ бажарилади. У ҳолда $\varphi \to A$, $\psi \to B$, $\varepsilon \to E$ ларга асосан, $\varphi \cdot \psi = \varepsilon \Rightarrow A \cdot B = E$. Бунда A, B, E лар квадрат матрицалар бўлади. Матрицалар кўпайтмасининг детерминанти бу матрицалар детерминантларининг кўпайтмасига тенг бўлгани учун $|A|\ \ |B| = |E| = 1$ тенгликдан $|A| \neq 0$, яъни φ хосмас оператор эканлиги келиб чиқади.

Етарлилиги. φ хосмас оператор, яъни $|A| \neq 0$ бўлса, A га тескари

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ & & & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

матрица мавжуд бўлади.

Энди A^{-1} матрицага мос ψ чизиқли операторни олсак, $\varphi\psi \to AA^{-1} = E$ га мувофиқ $\varphi\psi = \varepsilon$, яъни φ га тескари ψ оператор мавжудлиги маълум бўлади.

φ га тескари ψ оператор $\psi = \varphi^{-1}$ кўринишда белгиланади. φ оператор ўз навбатида φ^{-1} га тескари, чунки $\varphi^{-1}\varphi \to A^{-1}A = E$ мослик $\varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ га олиб келади.

A га тескари A^{-1} матрицанинг ягоналигидан φ га тескари φ^{-1} оператор ҳам ягона деган хулосага келамиз.

φ ва φ^{-1} лар ўзаро тескари чизиқли операторлар дейилади.

Натижа. Хосмас чизиқли операторлар тўплами операторлар композицияси (кўпайтириш амали) га нисбатан группа ташкил қилади (исботланг).

Хосмас чизиқли операторлар тўплами ҳосил қилган группа одатда $GL(n)$ орқали белгиланади. $GL(n)$ нинг қисм группалари қуйидаги турларга бўлинади:

1) чекли қисм группалар;

2) дискрет қисм группалар (элементлари сони саноқли бўлган қисм группалар). Бундай қисм группага текисликнинг координата боши атрофида $k\varphi$ ($k \in Z$) бурчакларга буришдан ҳосил бўлган группа мисол бўлади (бу ерда φ бурчак π бурчак билан ўлчовдош бўлмаган бурчакдир);

3) узлуксиз қисм группалар (элементлари сони саноқли тўплам элементлари сонидан ортиқ бўлган қисм группалар). Уч ўлчовли фазони қўзғалмас ўқ атрофида буришдан ҳосил қилинган қисм группа узлуксиз қисм группа бўлади.

Мисол. Уч ўлчовли арифметик V_3 фазонинг

$$\bar{e}_1 = (1,0,0),\ \bar{e}_2 = (0,1,0),\ \bar{e}_3 = (0,0,1) \qquad (3)$$

базиси ва

$$\varphi(a_1\ a_2,\ a_3) = (a_1 + a_2,\ a_2 + a_3,\ a_3 + a_1),$$
$$\varphi(a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ a_2,\ a_3)$$

операторлари берилган. φ хосмас оператор, чунки

$$\varphi \bar{e}_1 = (1,\ 0,\ 1) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3,$$
$$\varphi \bar{e}_2 = (1,\ 1,\ 0) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3,$$
$$\varphi \bar{e}_3 = (0,\ 1,\ 1) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3.$$

Демак,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ |A| \neq 0.$$

Шундай қилиб, φ га тескари оператор мавжуд бўлгани ҳолда унинг (3) базисдаги матрицаси ушбудан иборат:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лекин ψ оператор хосдир, чунки унинг матрицаси

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлиб, бу хос матрицадир.

Машқлар

1. Чекли фазода аниқланган чизиқли оператор ранги шу оператор матрицасининг рангига тенглигини исботланг.

2. $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ \ ,\ \bar{e}_n$ система V_n нинг базиси бўлиб, V_n да φ оператор аниқланган бўлсин. $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ \ \bar{e}_k,\ \bar{e}_m,$ $\bar{e}_n$ базисдан $\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ \ ,\ \bar{e}_m,\ \bar{e}_k,\ \ \ ,\ \bar{e}_n$ базисга ўтганда φ оператор матрицаси қандай ўзгаради?

3. Элементар матрицаларнинг хос ёки хосмаслигини аниқланг.

4. φ чизиқли оператор $\bar{a}_1 = (2,\ 3,\ 5)$, $\bar{a}_2 = (0,\ 1,\ 2)$, $\bar{a}_3 = (1,\ 0,\ 0)$ векторларни мос равишда $\bar{b}_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $\bar{b}_2 = (1,\ 1,\ -1)$, $\bar{b}_3 = (2,\ 1,\ 2)$ векторларга акслантирса, φ операторнинг $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3$ базисни $\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \bar{b}_3$ базисга ўтказувчи матрицаси топилсин.

5. φ чизиқли операторнинг

$\bar{e}_1 = (8,\ -6,\ 7)$, $\bar{e}_2 = (-16,\ 7,\ -13)$, $\bar{e}_3 = (9,\ -3,\ 7)$ базисга нисбатан матрицаси

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

(бунда E_{ij} i-сатр ва j-устун элементи 1 дан, қолган элементлари ноллардан иборат бўлган квадрат матрицадир).

3. $\mathscr{P}$ майдон устидаги n ўлчовли V_n фазонинг ҳамма чизиқли операторлари тўпламини T билан белгилайлик:

$$T = \{\varphi,\ \psi,\qquad ,\ \mu,\ \nu\}.$$

72-§ даги 1-натижага мувофиқ майдон устидаги исталган

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица T тўпламга қарашли битта φ операторнинг

$$\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\qquad \bar{e}_n \tag{1}$$

базисдаги матрицасидир. Ҳар бир чизиқли операторга унинг (1) базисдаги матрицаси мос қўйилса, яъни $\varphi \to A$ ва $\psi \to B$ бўлса, $\varphi + \psi \to A + B$, $\varphi \cdot \psi \to A \cdot B$ эканини биламиз. $\forall \beta \in \mathscr{P}$ учун $\varphi \to A$ билан бирга $\beta\varphi \to \beta A$ ҳам бажарилади. Шу сабабли $1 \cdot \varphi \to 1\ A$ дан, $1 \cdot A = A$ га асосан, $1 \cdot \varphi = \varphi$ келиб чиқади. Чизиқли операторларни қўшиш ва $\alpha \in \mathscr{P}$ сонларни уларга кўпайтириш амалига нисбатан T тўплам $\mathscr{P}$ майдон устидаги чизиқли фазони ташкил этади.

Маълумки, T нинг элементлари (операторлар) учун кўпайтириш амали аниқланган ва шу билан бирга чизиқли алгебранинг ҳамма аксиомалари бажарилади. Демак, T фазо $\mathscr{P}$ майдон устидаги чизиқли алгебра бўлади.

4. Ҳақиқий сонлар майдони устида аниқланган кватернионлар алгебраси. R майдон устида аниқланган V_4 чизиқли фазо базиси сифатида $\bar{e}$, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторларни олиб, улар учун кўпайтириш қоидасини қуйидагича киритамиз:

$$\bar{j} = -\bar{j}\quad \bar{i} = \bar{k},\ \bar{j} \cdot \bar{k} = -\bar{k} \cdot \bar{j} = \bar{i},\ \bar{k} \cdot \bar{i} = -\bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j},$$
$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = -\bar{e},\ \bar{e}^2 = \bar{e},\ \bar{e} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{e} = \bar{j},\ \bar{i}\quad \bar{e} =$$
$$= \bar{e}\quad \bar{i} = \bar{i},\ \bar{e}\quad \bar{k} = \bar{k}\quad \bar{e} = \bar{k}.$$

a, b, c, $d \in R$ бўлганда $a + b\bar{i} + c\bar{j} + d\bar{k}$ кўринишдаги ифодани кватернион деб юритамиз.

$$\alpha = a\bar{e} + b\bar{i} + c\bar{j} + d\bar{k} \text{ ва } \beta = a_1\bar{e} + b_1\bar{i} + c_1\bar{j} + d_1\bar{k}$$

кватернионларни кўпайтириш учун қуйидаги жадвалдан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир:

	$\bar{e}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	-1	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$\bar{j}$	$-\bar{k}$	-1	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	-1

Кватернионларни қўшиш эса мос координаталар бўйича бажарилади.

$$\alpha = a\bar{e} + b\bar{i} + c\bar{j} + d\bar{k} \text{ ва } \bar{\alpha} = a\bar{e} - b\bar{i} - c\bar{j} - d\bar{k}$$

кватернионлар ўзаро қўшма деб юритилади. $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ сон эса α кватернион нормаси деб ҳисобланади. $<V_4, +, \ , \{w_\lambda | \lambda \in R\}>$ алгебра кватернионлар алгебраси деб аталади. Бу ерда $w_\lambda : \alpha \to \lambda\alpha$ ($\lambda \in R$) мосликдир.

Кватернионлар алгебраси коммутатив бўлмаган алгебрадир (текшириб кўринг).

2-таъриф. $\mathscr{P}$ майдон устидаги бир хил ўлчовли V ва V' чизиқли алгебралар берилган бўлиб, ҳар бир $\bar{x} \in V$ элемент битта $\bar{x}' \in V'$ элементга (шу билан бирга V нинг ҳамма элементлари V' нинг ҳамма элементларига) ўзаро бир қийматли акслангани ҳолда, қуйидаги **аксиомалар** бажарилса, V ва V' лар *изоморф чизиқли алгебралар дейилади*:

1. $(\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}') \wedge (\bar{y} \xrightarrow{\varphi} \bar{y}') \Rightarrow (\bar{x} + \bar{y} \to \bar{x}' + \bar{y}')$ $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \bar{x}', \bar{y}' \in V')$;
2. $(\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}') \Rightarrow (\alpha\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \alpha\bar{x}')(\forall \bar{x} \in V, \bar{x}' \in V', \forall \alpha \in \mathscr{P})$;
3. $(\bar{x} \xrightarrow{\varphi} \bar{x}') \wedge (\bar{y} \xrightarrow{\varphi} \bar{y}') \Rightarrow (\bar{x} \cdot \bar{y} \to \bar{x}' \cdot \bar{y}')$ $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in V, \bar{x}', \bar{y}' \in V')$.

V ва V' алгебранинг изоморфизми $V \cong V'$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $\mathscr{P}$ майдон устидаги n ўлчовли фазонинг ҳамма ўринли. Фараз қилайлик, (3) тенглик $i = l - 1$ учун ўринли бўлсин. Унинг $i = l$ учун ўринли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \bar{x}_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{y}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \bar{x}_i + \alpha_l \bar{x}_l, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{y}_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i \bar{x}_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{y}_j\right) + \left(\alpha_l \bar{x}_l, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{y}_j\right) = \sum_{i=1}^{l-1} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \beta_j (\bar{x}_i,\right.$$

$$\left.\bar{y}_j)\right) + \alpha_l \sum_{j=1}^{m} \beta_j (\bar{x}_l, \bar{y}_j) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (\bar{x}_i, \bar{y}_j).$$

Демак, (3) тенглик исталган чекли i ва j лар учун ўринли экан.

2-таъриф. $\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$ миқдор $\bar{a} \in V$ векторнинг *нормаси* (*узунлиги*) дейилади ва $\|\bar{a}\|$ орқали белгиланади.

Таърифга кўра $\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$ бўлади.

Мисол. Агар n ўлчовли векторларнинг арифметик фазосида

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \qquad + \alpha_n \bar{e}_n, \bar{b} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \qquad + \beta_n \bar{e}_n$$

векторларнинг скаляр кўпайтмаси $(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \qquad + \alpha_n \beta_n$ бўлса, у ҳолда $\bar{a}$ векторнинг нормаси $\|\bar{a}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \qquad + \alpha_n^2}$ бўлади.

Маълумки, V_3 фазода берилган ихтиёрий икки вектор орасидаги бурчак (2) формула орқали аниқланар эди. Қаралаётган V_n фазо Евклид фазоси бўлганда ҳам ҳар бир n ўлчовли бўлган иккита $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ вектор орасидаги бурчак косинуси учун ҳам (2) формула ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун ихтиёрий ҳақиқий α сон учун $(\alpha\bar{a} - \bar{b}, \alpha\bar{a} - \bar{b}) \geqslant 0$ скаляр кўпайтмани қараймиз. (3) формулага асосан охирги тенгсизликни

$$\alpha^2(\bar{a}, \bar{a}) - 2\alpha(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{b}) \geqslant 0 \tag{4}$$

орқали ёза оламиз.

(4) тенгсизликнинг чап томонидаги квадрат учҳад α нинг ихтиёрий қийматида манфий қийматни қабул қилмайди. Де-

мак, бу квадрат учҳад дискриминанти $(\bar a, \bar b)^2 - (\bar a, \bar a)(\bar b, \bar b)$ бўлган ифода мусбат бўла олмайди, яъни $(\bar a, \bar b)^2 \leqslant (\bar a, \bar a)(b, b)$ бўлади. Охирги тенгсизликнинг иккала томонидан квадрат илдиз чиқарсак,

$$|(\bar a, \bar b)| \leqslant \|\bar a\| \cdot \|\bar b\| \qquad (5)$$

бўлади. (5) тенгсизликка асосан $\frac{|(\bar a, \bar b)|}{\|\bar a\| \cdot \|\bar b\|} \leqslant 1$ бўлиб бу нисбат қандайдир бурчакнинг косинусини ифодалайди. (5) тенгсизлик одатда *Коши-Буняковский тенгсизлиги* деб юритилади.

$\bar a$ ва $\bar b$ векторлар коллинеар бўлгандагина (5) тенгсизлик тенгликка айланади.

Ҳақиқатан, агар $\bar b = \lambda \bar a$ $(\lambda \in R)$ бўлса, $|(\bar a, \bar b)| = |(\bar a, \lambda \bar a)| = |\lambda|\,(\bar a, \bar a) = |\lambda|\,\|\bar a\|^2 = |\lambda|\,\|\bar a\|\;\|\bar a\|$ бўлади.

Энди аксинча, $|(\bar a, \bar b)| = \|\bar a\|\;\|\bar b\|$ бўлсин. Унда (4) квадрат учҳаднинг дискриминати нолга тенг бўлади. Шунинг учун у ҳақиқий илдизга эга бўлиб, бу илдизлар бир хил бўлади. Бу илдизни α_0 орқали белгиласак, у ҳолда

$$\alpha_0^2(\bar a, \bar a) - 2\alpha_0(\bar a, \bar b) + (b, \bar b) = (\alpha_0 \bar a - \bar b, \alpha_0 \bar a - \bar b) =$$
$$= 0 \Rightarrow \alpha_0 \bar a = \bar b$$

келиб чиқади.

Коши-Буняковский тенгсизлиги ёрдамида учбурчак тенгсизлигини ҳосил қилиш мумкин.

Дарҳақиқат, агар учбурчакнинг иккита томонини $\bar a$ ва $\bar b$ векторлардан иборат десак, у ҳолда унинг учинчи томони $\bar a + \bar b$ бўлади. У ҳолда Коши-Буняковский тенгсизлигидан фойдалансак,

$$\|\bar a + \bar b\|^2 = (\bar a + \bar b, \bar a + \bar b) = (\bar a, \bar a) + 2(\bar a, \bar b) + (\bar b, \bar b) \leqslant$$
$$\leqslant \|\bar a\|^2 + 2\|\bar a\| \cdot \|\bar b\| + \|\bar b\|^2 = (\|\bar a\| + \|\bar b\|)^2,$$
$$\|\bar a + \bar b\|^2 \geqslant \|\bar a\|^2 - 2\|\bar a\| \cdot \|\bar b\| + \|\bar b\|^2 = (\|\bar a\| - \|\bar b\|)^2$$

лардан мос равишда

$$\|\bar a + \bar b\| \leqslant \|\bar a\| + \|\bar b\| \qquad (6)$$

ва $\|\bar a + \bar b\| \geqslant |\,\|\bar a\| - \|\bar b\|\,|$ келиб чиқади.

79-§. ЕВКЛИД ФАЗОЛАРИНИНГ ОРТОНОРМАЛЛАНГАН БАЗИСИ

1-таъриф. Евклид фазосидаги нормаси 1 га тенг бўлган векторга *нормалланган* вектор дейилади.

Бу таърифга асосан $\forall \bar{a} \in V \left(\bar{a} \neq \bar{0}\right)$ учун

$$\|\bar{a}\| = 1 \tag{1}$$

бўлса, $\bar{a}$ ни нормалланган вектор деб атаймиз. Демак, n ўлчовли векторларнинг арифметик фазосидаги барча орт векторлар нормалланган векторлардир.

2-таъриф. Евклид фазосининг ҳар бир вектори нормалланган

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \quad , \bar{a}_n \tag{2}$$

ортогонал векторлар системасига ортонормалланган векторлар системаси дейилади. Агар (2) система базисни ташкил этса, унга *Евклид фазосининг ортонормалланган базиси* дейилади.

1-теорема. *Чекли ўлчовли Евклид фазосининг исталган*

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \tag{3}$$

ортогонал базисини доимо ортонормаллаш мумкин.

Исботи. (3) системадаги ҳар бир векторни ўз нормасига бўлиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\bar{a}_1}{\|\bar{a}_1\|}, \frac{\bar{a}_2}{\|\bar{a}_2\|}, \quad , \frac{\bar{a}_n}{\|\bar{a}_n\|}. \tag{4}$$

V_n фазо Евклид фазоси бўлганлиги учун $\bar{e}_i = \frac{\bar{a}_i}{\|\bar{a}_i\|}$ ва $\bar{e}_j = \frac{\bar{a}_j}{\|\bar{a}_j\|}$ векторлар учун

$$\left(\bar{e}_i, \bar{e}_j\right) = \begin{cases} 1, \text{ агар } i = j & \text{бўлса,} \\ 0, \text{ агар } i \neq j & \text{бўлса,} \end{cases} \tag{5}$$

тенгликлар бажарилади. Демак, (4) система ортонормалланган система экан.

Натижа. Агар

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \quad , \bar{e}_n \tag{6}$$

V_n Евклид фазосининг ортонормалланган базиси бўлса, исталган $\bar a \in V_n$ ва $\bar b \in V_n$ векторлар учун $(\bar a, \bar b) = \alpha_1 \beta_1 + + \alpha_2 \beta_2 + \quad + \alpha_n \beta_n$, $\|\bar a\|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \quad , + \alpha_n^2$ бўлади.

Ҳақиқатан, (6) ортонормалланган базис векторлар бўлганлигидан $\bar a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar e_i$, $\bar b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar e_j$ векторлар учун (5) тенгликларга асосан $(\bar a, \bar b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$ ва $\|\bar a\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ бўлади.

2-теорема. *Ҳар қандай иккита n ўлчовли Евклид фазолари изоморф бўлади* (43-§ даги теоремага ўхшаш исботланади).

Мисоллар. 1. Ихтиёрий n ўлчовли V_n Евклид фазосининг ихтиёрий $\bar a$ ва $\bar b$ ўзаро ортогонал векторлари учун $\|\bar a + \bar b\|^2 = \|\bar a\|^2 + \|\bar b\|^2$ тенглик ўринли эканлигини исботланг.

Исботи. Скаляр кўпайтма ва вектор нормаси таърифига асосан $\|\bar a + \bar b\|^2 = (\bar a + \bar b, \bar a + \bar b)$ ўринли. Лекин $(\bar a + \bar b, \bar a + \bar b) = (\bar a, \bar a) + 2(\bar a, \bar b) + (\bar b, \bar b)$ бўлиб, $\bar a$ ва $\bar b$ ларнинг ортогоналлигидан($(\bar a, \bar b) = 0$ эканлигидан) $\|\bar a + \bar b\|^2 = (\bar a + + \bar b, \bar a + \bar b) = (\bar a, \bar a) + (\bar b, \bar b) = \|\bar a\|^2 + \|\bar b\|^2$ хулосага келамиз. Охирги тенглик геометрия курсида одатда Пифагор теоремаси деб юритилади.

2. Ўзаро ортогонал бўлган ва чекли сондаги $\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_n$ векторлар учун $\|\bar a_1 + \bar a_2 + \quad + \bar a_n\|^2 = \|\bar a_1\|^2 + \|\bar a_2\|^2 + + \ldots + \|\bar a_n\|^2$ бўлади.

Ҳақиқатан,

$$\|\bar a_1 + \bar a_2 + \quad + \bar a_n, \bar a_1 + \bar a_2 + \quad + \bar a_n\| = (\bar a_1, \bar a_1) + + (\bar a_2, \bar a_2) + \quad + (\bar a_n, \bar a_n) + 2((\bar a_1, \bar a_2) + (\bar a_1, \bar a_3) + \quad + + (\bar a_{n-1}, \bar a_n)) = (\bar a_1, \bar a_1) + (\bar a_2, \bar a_2) + \quad + (\bar a_n, \bar a_n) = = \|\bar a_1\|^2 + \|\bar a_2\|^2 + \ldots + |\bar a_n\|^2$$ дир.

Машқлар

1. Чекли ўлчовли Евклид фазосининг ихтиёрий базисини ортонормал базисга айлантириш мумкинлигини исботланг.

2. $\bar e_1, \bar e_2, \quad , \bar e_n$ векторлар системаси n ўлчовли Евклид фазосининг ортонормал базиси бўлсин. $\bar a = \alpha_1 \bar e_1 + \alpha_2 \bar e_2 +$

$+ \qquad + \alpha_n \bar{e}_n$ бўлганда $\alpha_i = (\bar{a}, \bar{e}_i)$ эканлигини исботланг.

3. Евклид фазосининг нолмас $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлари учун шундай α сон топилсинки, $\bar{a} + \alpha \bar{b}$ векторнинг узунлиги (нормаси) энг кичик бўлсин ва бундай ҳолда $\bar{a}$ вектор $\bar{b}$ га ортогонал эканлигини кўрсатинг.

4. Евклид фазосининг $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлари учун $|(\bar{a}, \bar{b})| = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$ тенглик $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ лар чизиқли боғлиқ бўлгандагина ўринли эканлигини исботланг.

80-§. ИНВАРИАНТ ҚИСМ ФАЗОЛАР. ЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРНИНГ ХОС ҚИЙМАТЛАРИ ВА ХОС ВЕКТОРЛАРИ. ХАРАКТЕРИСТИК КЎПҲАДЛАР

Комплекс сонлар майдони устида қурилган V_n фазо ва $\varphi : V_n \rightarrow V_n$ чизиқли оператор берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар V_n фазонинг бирор φ чизиқли оператори V_n фазодаги W қисм фазонинг барча векторларини яна шу қисм фазо векторларига акслантирса, W қисм фазо φ *операторга нисбатан инвариант қисм фазо* дейилади.

2-таъриф. $\varphi \bar{x} = \lambda \bar{x} (\forall \bar{x} \in V_n, \ \bar{x} \neq \bar{0}, \ \lambda \in \mathscr{P})$ тенгликни қаноатлантирувчи λ сони φ *операторнинг хос қиймати*, $\bar{x}$ вектор эса λ хос қийматга мос келувчи *хос вектори*, хос қиймат эса *характеристик* сон дейилади.

φ чизиқли операторнинг хос векторлари қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. Ҳар бир хос векторга ягона хос қиймат мос келади.

Исботи. Тескарисини фараз қилайлик, яъни φ операторнинг битта хос векторига иккита ҳар хил λ ва λ_1 хос қийматлар мос келсин. Унда юқоридаги тенглама билан биргаликда $\varphi \bar{x} = \lambda_1 \bar{x}$ тенглама ҳам ўринли бўлади. Бу тенгламаларни ҳадлаб айирсак, $(\lambda - \lambda_1) \bar{x} = 0$ бўлиб, хос векторнинг таърифига кўра охирги тенглик бажарилиши учун $\lambda = \lambda_1$ бўлиши шарт. Демак, фаразимиз нотўғри экан. Бу хоссанинг тескариси тўғри эмас.

2-хосса. Ҳар бир хос қийматга мос келувчи хос векторлар тўплами (ноль вектор билан биргаликда) φ оператор учун инвариант қисм фазони ташкил этади.

Исботи. Аввало $\bar{x}$ вектор λ характеристик сонга мос келувчи хос вектор бўлганда, яъни $\varphi \bar{x} = \lambda \bar{x}$ бўлганда, исталган α сон учун $\alpha\overline{x}$ вектор ҳам λ характеристик сонга мос келувчи хос вектор эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $\varphi(\alpha\overline{x}) = \alpha\varphi\,\overline{x} = \alpha(\lambda\overline{x}) = \lambda(\alpha\overline{x})$ бўлгани учун λ характеристик сонга $\alpha\overline{x}$ вектор мос келади. Энди $\overline{x}_1$ ва $\overline{x}_2$ векторлар φ операторнинг λ характеристик сонига мос келувчи хос векторлар бўлганда $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ ва $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ ҳам хос векторлар эканлигини кўрсатамиз. $\varphi\overline{x}_1 = \lambda\overline{x}_1$, $\varphi\overline{x}_2 = \lambda\overline{x}_2$ тенгламалар ҳамда φ операторнинг чизиқли оператор эканлигига асосан

$$\varphi(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \varphi\overline{x}_1 + \varphi\overline{x}_2 = \lambda\overline{x}_1 + \lambda\overline{x}_2 = \lambda(\overline{x}_1 + x_2).$$

$$\varphi(\overline{x}_1 + x_2) = \lambda(x_1 + \overline{x}_2)$$

ва

$$\varphi(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \varphi(\overline{x}_1 + (-1)\overline{x}_2) = \varphi\,\overline{x}_1 + (-1)\varphi\overline{x}_2 = \varphi\overline{x}_1 -$$
$$-\varphi\overline{x}_2 = \lambda\overline{x}_1 - \lambda\overline{x}_2 = \lambda(\overline{x}_1 - \overline{x}_2),\quad \varphi(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \lambda(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$$

ларни ёза оламиз. Охирги иккита тенглама $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ ва $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ векторлар ҳам λ хос қийматга мос келувчи хос векторлар эканлигини кўрсатади.

Қуйидаги теоремада хос векторларнинг мавжудлиги ва уларни излаш усули баён этилади.

3-теорема. *Комплекс V_n фазонинг ҳар бир φ чизиқли оператори камида битта хос векторга эга.*

Исботи. V_n фазонинг бирор $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \quad ,\overline{e}_n$ базисида $\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \quad + \alpha_n\overline{e}_n$ векторни оламиз. Бу базисга кўра

$$\begin{cases} \varphi\overline{e}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + \qquad + a_{n1}\overline{e}_n, \\ \varphi\overline{e}_2 = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + \qquad + a_{n2}\overline{e}_n, \\ \quad . \qquad\qquad . \qquad\quad . \qquad\qquad\quad . \\ \varphi\overline{e}_n = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + \qquad + a_{nn}\overline{e}_n \end{cases} \tag{1}$$

бўлиб,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

бўлади.

Энди $\varphi\overline{x}$ векторнинг берилган базисдаги координаталарини аниқлаймиз. (1) га асосан:

$$\varphi\bar{x} = \alpha_1\varphi\bar{e}_1 + \alpha_2\varphi\bar{e}_2 + \qquad + \alpha_n\varphi\bar{e}_n = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \qquad + a_{1n}\alpha_n)\bar{e}_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \qquad + a_{2n}\alpha_n)\bar{e}_2 + \qquad + (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \qquad + a_{nn}\alpha_n)\bar{e}_n. \qquad (2)$$

$\bar{x}$ вектор φ операторнинг хос векторини тасвирлаши учун

$$\varphi\bar{x} = \lambda\bar{x} \qquad (3)$$

тенглама нолмас ечимга эга бўлиши лозим. (3) тенгламанинг ўнг томонини қуйидагича ёзамиз:

$$\lambda\bar{x} = \lambda\bar{e}_1\alpha_1 + \lambda\bar{e}_2\alpha_2 + \qquad + \lambda\bar{e}_n\alpha_n. \qquad (4)$$

(3) тенглик бажарилиши учун (2) нинг координаталари (4) нинг мос координаталарига тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \qquad + a_{1n}\alpha_n = \lambda\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \qquad + a_{2n}\alpha_n = \lambda\alpha_2, \\ \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \qquad a_{nn}\alpha_n = \lambda\alpha_n. \end{cases}$$

Бундан

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \qquad + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \qquad + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \qquad + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (5$$

бўлиб, (5) система $\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n$ номаълумларга нисбатан бир жинсли чизиқли тенгламалар системасини билдиради. Система нолмас ечимларга эга бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши шарт, яъни

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Агар (6) детерминантни ҳисоблайдиган бўлсак, у λ га нисбатан n-даражали кўпҳадни ифодалайди. Бу кўпҳад одатда $P(\lambda)$ кўринишда белгиланади ва φ операторнинг λ га мос келувчи характеристик кўпҳади деб юритилади. Бу ерда $P(\lambda) = |A - \lambda E| = (-1)^n(\lambda^n - P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} - P_3\lambda^{n-3} + \qquad + (-1)^n P_n)$ кўринишда бўлиб, $P(\lambda) = 0$ бўлгани учун

$$\lambda^n - P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} - P_3\lambda^{n-3} + . \qquad + (-1)^n P_n \neq 0 \qquad (7)$$

ҳосил бўлади.

(7) тенглама λ га нисбатан комплекс сонлар майдони устидаги n-даражали алгебраик тенглама бўлиб, у n та комплекс $\lambda_1, \lambda_2,\quad, \lambda_n$ илдизларга эга. Бу тасдиқ қўлланманинг иккинчи қисмида исботланади.

λ_i $(i = \overline{1, n})$ илдизлар φ операторнинг характеристик сонлари бўлади. Шундан сўнг ҳар бир λ_i ни (5) тенгламалар системасига қўйиб, бу системанинг ўзаро чизиқли боғланмаган ечимларини танлаб оламиз. Танланган ечимлар хос қийматларга мос келувчи хос векторлар бўлади.

Агар $A - \lambda_i E$ матрицанинг рангини r_i деб белгиласак, φ операторнинг ҳар бири λ_i хос қийматига мос келувчи хос векторлари сони $n - r_i$ га тенглиги бизга маълум (59-§ га қаранг).

4-теорема. φ чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади базисга боғлиқ эмас, яъни φ чизиқли операторнинг ҳар хил базисдаги характеристик кўпҳадлари тенг.

Исботи. φ операторнинг

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \qquad (8)$$

ва

$$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \quad \bar{f}_n \qquad (9)$$

базислардаги матрицасини мос равишда A ва B деб белгилайлик. Унда бу базисларга мос келувчи характеристик кўпҳадлар $|A - \lambda E|$ ҳамда $|B - \lambda E|$ лардан иборатдир. Энди $|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$ эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, $B = C^{-1}AC$ бўлгани туфайли (бу ерда C матрица (8) базисдан (9) базисга ўтиш матрицасидир)

$$|B - \lambda E| = |C^{-1}AC - C^{-1}C\lambda| = |C^{-1}AC - C^{-1}\lambda C| =$$
$$= |C^{-1}|\,|AC - \lambda C| = |C^{-1}|\,|A - \lambda E|\,|C| =$$
$$= |A - \lambda E|\,|C^{-1}|\,|C| = |A - \lambda E| \cdot 1 = |A - \lambda E|,$$
$$|B - \lambda E| = |A - \lambda E|.$$

Теорема исбот бўлди.

81-§. СОДДА СПЕКТРЛИ ОПЕРАТОРЛАР

1-таъриф. V_n фазонинг φ чизиқли операторига қарашли ҳамма хос қийматлар тўплами шу φ операторнинг *спектри* дейилади.

2-таъриф. V_n фазонинг φ чизиқли операторига қарашли ҳамма хос қийматлари ҳар хил бўлса, φ *содда спектрли оператор* дейилади.

1- теорема. *φ чизиқли операторнинг $\lambda_1, \lambda_2, \quad \lambda_n$ спектри ҳар хил қийматлардан тузилган бўлса, уларга тегишли $\bar x_1, \bar x_2, \quad \bar x_n$ хос векторлар системаси V_n фазонинг базисини ташкил этади ва φ операторга мос A матрица диагонал шаклда ифодаланади.*

Исботи. $\bar x_1, \bar x_2, \quad, \bar x_n$ векторлар системасининг чизиқли эркли бўлишини кўрсатамиз.

$n = 1$ қийматда битта хос $\bar x_1 \neq \bar 0$ векторнинг чизиқли эркли эканлиги бизга маълум. Шу сабабли φ нинг $n - 1$ та хос векторини чизиқли эркли система бўлади деб фараз қилиб, унинг n та хос вектори ҳам чизиқли эркли система эканини исботлаймиз.

Бунинг учун

$$\alpha_1 \bar x_1 + \alpha_2 \bar x_2 + \quad + \alpha_i \bar x_i + \quad + \alpha_n \bar x_n = \bar 0 \tag{1}$$

тенглик $\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_i, \quad, \alpha_n$ коэффициентларнинг фақат ноль қийматларидагина бажарилишини кўрсатишимиз кифоя. (1) даги векторларга φ операторни татбиқ этсак, $\varphi \bar x_i = \lambda_i \bar x_i$ га биноан,

$$\alpha_1 \lambda_1 \bar x_1 + \alpha_2 \lambda_2 \bar x_2 + \quad + \alpha_i \lambda_i \bar x_i + \quad + \alpha_n \lambda_n \bar x_n = \bar 0 \tag{2}$$

ҳосил бўлади. (1) ни λ_i га кўпайтириб, натижани (2) дан айирамиз. У ҳолда $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_i) = 0$ га асосан $n - 1$ та $\bar x_1, \bar x_2, \quad \bar x_{i-1}, \bar x_{i+1}, \quad, \bar x_n$ вектор учун

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_i) \bar x_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_i) \bar x_2 + . \quad + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_i) \bar x_n = \bar 0 \tag{3}$$

бажарилади. Индуктив фараз бўйича φ нинг $n - 1$ та хос вектори чизиқли эркли система бўлганидан (3) тенглик $\alpha_i (\lambda_l - \lambda_i) = 0$ шартдагина ўринли эканини топамиз. Теореманинг шартига кўра $\lambda_j \neq \lambda_i$ $(i \neq j)$ дир. Унда охирги тенгликдан $\alpha_i = 0$ келиб чиқади. Демак, (1) дан $\alpha_i x_i = 0$ ни ҳосил қиламиз. $\bar x_i \neq \bar 0$ га асосан $\alpha_i = 0$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, (1) тенглик ҳамма коэффициентлар ноль бўлгандагина бажарилади. Бу эса φ нинг хос векторлари чизиқли эркли система ташкил қилишини билдиради.

Маълумки, n ўлчовли V_n фазонинг n та чизиқли эркли $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \quad , \overline{x_n}$ векторлари базис ташкил этади. Шунингдек,

$$\varphi \overline{x_1} = \lambda_1 \overline{x_1}, \ \varphi \overline{x_2} = \lambda_2 \overline{x_2}, \ , \quad , \ \varphi \overline{x_n} = \lambda_n \overline{x_n}$$

ларга асосан, α нинг шу базисдаги матрицаси қуйидагидан иборатлиги келиб чиқади:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & \cdot & & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2-теорема. *n-тартибли B квадрат матрица берилган бўлиб,$|B - \lambda E|$ характеристик кўпҳаднинг $\lambda_1, \lambda_2,$ λ_n илдизлари ҳар хил бўлса, B матрица*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

диагонал матрицага ўхшаш бўлади.

Исботи Ҳар бир B квадрат матрицага V_n фазонинг бирор $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \quad , \overline{e_n}$ базисга нисбатан қандайдир φ чизиқли оператори мос келиши бизга маълум (72-§ га қаранг).

Маълумки, $|B - \lambda E|$ характеристик кўпҳаднинг ҳар хил $\lambda_1, \lambda_2, \quad , \lambda_n$ илдизлари φ операторнинг хос қийматларини ташкил этади. Шу билан бирга, φ нинг бу хос қийматларга тегишли $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \quad , \overline{x_n}$ хос векторлари, 1-теоремага асосан, V_n нинг базисини ифодалайди ва шу базисда φ га мос матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

дан иборат бўлади. Маълумки, φ нинг турли $\overline{e_1}, \overline{e_2},, \quad , \overline{e_n}$ ва $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \quad , \overline{x_n}$ базислардаги B ва A матрицалари ўхшашдир.

1-натижа. Агар φ операторнинг бирор базисга кўра тузилган матрицаси учбурчак шаклда бўлса, унда φ операторнинг хос қийматлари диагоналдаги элементлар билан уст-ма-уст тушади.

Ҳақиқатан, φ оператор матрицаси чап диагоналининг ўнг ёки чап томони (ёки ҳар иккаласи) ноллардан иборат бўлса, $|A - \lambda E| = (a_{11} - \lambda) \qquad (a_{nn} - \lambda)$ бўлади. Охирги кўпайтма нолга тенг бўлиши учун $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $\quad$, $\lambda_n = a_{nn}$ бўлиши керак.

2-натижа. φ операторнинг барча хос қийматлари йиғиндиси A матрица диагонали элементлари йиғиндисига тенг бўлади. Умуман $|A - \lambda E| = 0$ тенгламани

$$(-\lambda)^n + P_1(-\lambda)^{n-1} + \qquad + P_{n-1}(-\lambda) + P_n = 0 \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Иккинчи томондан, агар λ_1, λ_2, $\quad$, λ_n лар φ операторнинг ҳар хил хос қийматлари бўлса, A матрицани диагонал шаклга келтириш мумкин. Демак,

$$(a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_2) \qquad (a_{nn} - \lambda_n) = 0 \qquad (4)$$

тенглик ўринли. (3) тенгликни

$$\begin{gathered}(-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \qquad + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \\ + (a_{11} \cdot a_{22} + \qquad + a_{11} \cdot a_{nn} + \qquad + a_{n-1\, n-1} \cdot a_{nn})(-\lambda)^{n-2} + \\ + (a_{11}a_{22}a_{33} + \qquad + a_{n-2\, n-2}a_{n-1\, n-1}\, a_{nn})(-\lambda)^{n-3} + \\ + \qquad + a_{11}a_{22} \qquad a_{nn} = 0 \qquad (5)\end{gathered}$$

кўринишда ёза оламиз. (3) ва (5) тенгламалардаги $(-\lambda)$ нинг мос даражалари олдидаги коэффициентларнинг тенглигидан

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \qquad + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \qquad + a_{nn} \qquad (6)$$

тенглик келиб чиқади.

3-теорема. *Агар λ_1, λ_2, $\quad$, λ_n лар φ операторнинг хос қийматлари бўлса, λ_1^2, λ_2^2, $\quad$, λ_n^2 лар φ^2 операторнинг хос қийматлари бўлади. φ операторнинг ҳар бир хос вектори φ^2 учун ҳам хос вектор бўлади.*

Исботи. Айтайлик, λ сон φ нинг хос қиймати бўлсин. У ҳолда

$$\varphi\overline{x} = \lambda\overline{x} \qquad (7)$$

бўлиб, (7) тенгликка биноан

$$\varphi^2\overline{x} = \varphi(\lambda\overline{x}) = \lambda(\varphi\overline{x}) = \lambda \cdot \lambda\overline{x} = \lambda^2\overline{x}, \quad \varphi^2\overline{x} = \lambda^2\overline{x}.$$

Демак, λ^2 сон φ^2 операторнинг $\overline{x}$ хос вакторга мос келувчи хос қиймати экан.

Эслатмалар. 1. λ ва μ сонлар мос равишда φ ва ψ операторларнинг хос қийматлари бўлса, $\lambda\cdot\mu$ сон ҳар доим ҳам $\varphi\psi$ оператор учун хос қиймат бўлавермайди.

2. Ҳар қандай оператор матрицасини ҳам диагонал матрица кўринишига келтиравериш мумкин эмас.

Мисоллар. 1. φ операторнинг $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ базисга нисбатан тузилган матрицаси

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

дан иборат бўлса, шу операторнинг хос вектор ва хос қийматлари топилсин.

Ечиш. Аввало қуйидаги характеристик тенгламани тузиб оламиз:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0-\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda=0,$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda=0.$$

Бу тенгламанинг ечими $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=3$ дан иборат. Энди λ_1 га мос келувчи хос векторни $\overline{a}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}$ кўринишда қидирамиз ва

$$(A-0\cdot E)\overline{a}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

матрицали тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг ечими $x_1=x_2=x_3=1$ дан иборат бўлгани учун $\lambda_1=0$ хос қийматига мос келувчи хос вектор $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$ дан иборат.

$\lambda_2=1$ да эса $(A-E)\overline{y}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$

матрицали тенгламани ечиб, хос вектор $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ эканини аниқлаймиз.

Энди $\lambda_3 = 3$ хос қийматга мос келган хос векторни

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \text{ десак,}$$

$$(A - 3E)\overline{z} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

матрицали тенгламани ечиб, учинчи хос вектор $\overline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ни топамиз. Шундай қилиб, ўзаро чизиқли боғланмаган $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ хос векторларни ҳосил қилдик. Улар ҳақиқий ва ҳар хил бўлганлигидан, шундай $B = C^{-1}AC$ матрица мавжудки, бу матрица A га ўхшаш ва диагонал кўринишдаги матрица бўлади.

Энди B матрицани топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун аввало $\overline{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overline{e_2} = (0, 1, 0)$, $\overline{e_3} = (0, 0, 1)$ базис векторлардан

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

базис векторларга ўтиш матрицасини топамиз.

Бу матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

дан иборат.

Ҳақиқатан,

$$C^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

бўлгани учун

$$B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

бўлади.

2.

$$A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$$

матрица диагонал шаклга келтирилсин.

Ечиш. Аввало

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}7-\lambda & -12 & 6\\ 10 & -19-\lambda & 10\\ 12 & -24 & 13-\lambda\end{vmatrix}=0$$

тенгламанинг илдизларини топайлик.

1-мисолдагидек ҳисоблашлардан сўнг бу илдизлар $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ва $\lambda_3 = -1$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ да

$$(A-E)\overline{x}=\begin{pmatrix}6 & -12 & 6\\ 10 & -20 & 10\\ 12 & -24 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

матрицали тенгламани тузамиз. Бу тенгламадан

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0,\\ x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$$

ҳосил қилиниб, бундан $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламадан $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ векторларни ҳосил қилиб, улар ўзаро чизиқли эркли бўлгани учун уларни хос векторлар деб оламиз.

2) $\lambda_3 = -1$ характеристик сонга мос келувчи хос векторни топамиз.

$$(A + E)\bar{y} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

га асосан

$$\begin{cases} 4y_1 - 6y_2 + 3y_3 = 0, \\ 5y_1 - 9y_2 + 5y_3 = 0, \\ 6y_1 - 12y_2 + 7y_3 = 0 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системанинг ечими $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ дан иборат. Шундай қилиб, берилган матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

кўринишдаги диагонал матрицага келтирилади.

Бу тасдиқни бевосита исботлаш учун $B = C^{-1}AC$ матрицани қараймиз.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ бўлгани учун}$$

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 \\ 6 & -12 & 7 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

бўлади.

Машқлар

1. Бирор базисда қуйидаги матрицаларга эга бўлган чизиқли операторнинг хос вектор ва хос қийматларини топинг:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Қуйидаги матрицаларнинг рационал, ҳақиқий ва комплекс сонлар майдонида бирор диагонал матрицага ўхшаш бўлиши ёки ўхшаш бўлмаслигини аниқланг:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

3. Агар φ ва ψ операторлар бир хил хос векторларга эга бўлса, уларнинг матрицалари кўпайтириш амалига кўра коммутатив эканлигини кўрсатинг.

VII БОБ

ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАЛАРИ

82-§. ҲАМЖОЙЛИ ВА ҲАМЖОЙЛИ БЎЛМАГАН ЧИЗИҚЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАЛАРИ

Мактаб математика курсида учрайдиган баъзи бир тенгсизликларни ечиш масаласи кўпинча чизиқли тенгсизликлар системасини ечишга келтирилади. Бундан ташқари ҳозирги кунда энг муҳим аҳамиятга эга бўлган иқтисодиёт масалаларини ҳал этиш учун ҳам қандайдир чизиқли тенгсизликлар системасини ечишга тўғри келади. Шунинг учун энди биз шу мавзунинг бошланғич тушунчаларини баён этишга ўтамиз. R ҳақиқий сонлар майдони устидаги n та номаълумли чизиқли тенгсизлик деб ушбу

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \qquad + a_nx_n + b \geqslant 0 \tag{1}$$

кўринишдаги ифодани атаймиз.

(1) да $x_1, \ x_2, \qquad x_n$ — номаълумлар ва $a_i, \ b \in R$ $(i = \overline{1, n})$ эса коэффициентлар дейилади.

$b = 0$ қийматда (1) тенгсизликни бир жинсли, $b \neq 0$ қийматда (1) тенгсизликни бир жинсли бўлмаган тенгсизлик дейилади.

Энди, R ҳақиқий сонлар майдони устидаги n та номаълумли m та

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

чизиқли тенгсизликлар системасига мурожаат қиламиз, бу ерда $a_{ij}, \ b_i \in R$ $(i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n})$ ва системани ташкил этувчи тенгсизликларнинг сони m учун $m < n, \ m = n, \ m > n$ лардан бири бўлиши мумкин.

(2) системанинг ҳамма тенгсизликларини қаноатлантирувчи $x_1 = \alpha_1, \ x_2 = \alpha_2, \qquad , \ x_n = \alpha_n$ ҳақиқий сонлар бу системанинг битта $(\alpha_1, \ \alpha_2, \qquad , \ \alpha_n)$ ечимини ташкил этади. Масалан, ҳақиқий сонлар майдони устидаги

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geqslant 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

система учун (4, 2, 5, 1) ечим бўлиб хизмат қилади, чунки

$$\begin{cases} 2\cdot 4 - 3\cdot 2 + 1\cdot 5 - 1 > 0, \\ 4 + 3\cdot 2 - 5 - 3 > 0, \\ 4 - 2 + 2\cdot 5 - 12 \geqslant 0. \end{cases}$$

1-таъриф. (2) системани ташкил этувчи тенгсизликларнинг ҳаммаси бир жинсли бўлса, система ҳам *бир жинсли* дейилади. (2) даги тенгсизликларнинг камида биттаси бир жинсли бўлмаса, у ҳолда (2) система *бир жинсли бўлмаган система* деб аталади.

2-таъриф. Камида битта ечимга эга бўлган (2) система *ҳамжойли система,* битта ҳам ечимга эга бўлмаган (2) система *ҳамжойли бўлмаган система* дейилади.

3-таъриф. (1) тенгсизлик битта ҳам ечимга эга бўлмаса, у *зиддиятли тенгсизлик* деб аталади.

Зиддиятли тенгсизлик

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \qquad + 0\cdot x_n + b \geqslant 0 \quad (b < 0) \tag{3}$$

кўринишда бўлади.

4-таъриф. (2) системанинг исталган $(\alpha_1, \alpha_2, \quad, \alpha_n)$ ечими

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \qquad + a_nx_n + b \geqslant 0 \tag{4}$$

тенгсизлик учун ҳам ечим бўлса, у ҳолда (4) га (2) нинг *натижаси дейилади.*

(2) системанинг биринчи тенгсизлигини $k_1 > 0$ сонга, иккинчисини $k_2 > 0$ сонга, , m-сини $k_m > 0$ сонга кўпайтириб, уларни ҳадма-ҳад қўшамиз. У ҳолда

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{j1} x_1 + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{j2} x_2 + \qquad + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{jn} x_n + $$
$$+ \sum_{j=1}^{m} k_j b_j \geqslant 0 \tag{5}$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

(5) тенгсизлик (2) системанинг чизиқли комбинацияси дейилади.

(5) тенгсизлик (2) системанинг натижаси бўлади, чунки

(2) нинг исталган($\alpha_1, \alpha_2,$, α_n) ечими (5) ни қаноатлантиради:

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{j1}\alpha_1 + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{j2}\alpha_2 + \qquad + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{jn}\alpha_n + \sum_{j=1}^{m} k_j b_j =$$

$$= k_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\alpha_i + b_1\right) + k_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\alpha_i + b_2\right) +$$

$$+ k_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_{mi}\alpha_i + b_m\right) \geqslant k_1\cdot 0 + k_2\ 0 + \qquad + k_m\cdot 0 = 0.$$

Агар берилган тенгсизликлар системаси ҳамжойли бўлмаса, бу система, устида бажарилган элементар алмаштиришлар натижасида зиддиятли тенгсизлик ҳосил бўлади

Масалан,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2 \geqslant 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2 \geqslant 0, \\ 4x_1 - 7x_2 - 12x_3 - 5 \geqslant 0 \end{cases}$$

система тенгсизликларини мос равишда, 2, 3, 1 сонларга кўпайтириб, ҳадма-ҳад қўшсак, зиддиятли $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 3 > 0$ тенгсизлик ҳосил бўлади.

5-таъриф. Бир хил $x_1, x_2,$, x_n номаълумли иккита ҳамжойли тенгсизликлар системасидан бирининг исталган ечими иккинчиси учун ҳам ечим бўлса, ёки иккала система ҳам ҳамжойсиз система бўлса, улар тенг кучли системалар дейилади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

чизиқли тенгсизликлар системаси берилган бўлсин.

Таъриф. Чизиқли тенгсизликлар системасидан номаълумлар сонини биттага камайтириб тузилган янги системани берилган системага *йўлдош система* дейилади.

(S) системанинг ихтиёрий битта тенгсизлигини текширамиз:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \qquad + a_{in}x_n + b_i \geqslant 0 \tag{6}$$

Агар (6) да $a_{in} = 0$ бўлса, бу тенгсизликни ўзгаришсиз қолдирамиз. Агар $a_{in} < 0$ бўлса, у ҳолда $a_{in}x_n$ ҳадни ўнг томонга ўтказамиз ва тенгсизликнинг иккала томонини мусбат сонга бўламиз. Натижада

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \qquad + b_{n-1}x_{n-1} + b'_i \geqslant x_n$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар (6) да $a_{in} > 0$ бўлса, $a_{in}x_n$ дан бошқа барча қўшилувчиларни тенгсизликнинг ўнг томонига ўтказамиз ва иккала томонини a_{in} сонга бўламиз. Натижада

$$x_n \geqslant c_1x_1 + c_2x_2 + \qquad + c_{n-1}x_{n-1} + c_i$$

тенгсизлик ҳосил бўлади.

Демак, берилган системанинг ҳар бир тенгсизлигини мусбат сонга кўпайтириб, тегишли алмаштиришлардан кейин берилган системага тенг кучли қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} P_1 \geqslant x_n, \\ P_2 \geqslant x_n, \\ \cdot \\ P_p \geqslant x_n; \end{cases} \quad \begin{cases} x_n \geqslant Q_1, \\ x_n \geqslant Q_2, \\ \\ x_n \geqslant Q_q \end{cases} \quad \begin{cases} R_1 \geqslant 0, \\ R_2 \geqslant 0, \\ \\ R_r \geqslant 0. \end{cases} \qquad (T)$$

(T) да $P_1, P_2, \quad , P_p, Q_1, \quad Q_q, R_1, \quad ,R_r$ лар

$$d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \qquad + d_{in-1}x_{n-1} + d \geqslant 0$$

кўринишдаги ифодалардир.

Агар (S) системада (6) кўринишдаги тенгсизлик бўлмаса, у ҳолда (T) системада биринчи блок бўлмайди. Шунингдек, агар (S) да $a_{in} > 0$ кўринишдаги тенгсизлик бўлмаса, у ҳолда (T) системада иккинчи блок бўлмайди. Агар (S) системада $a_{in} = 0$ кўринишдаги тенгсизлик бўлмаса (T) системада учинчи блок бўлмайди.

(T) система билан бир вақтда ($n - 1$) та $x_1, x_2, \quad , x_{n-1}$ номаълумли қуйидаги тенгсизликлар системасини текширамиз:

$$\begin{cases} P_\alpha \geqslant Q_\beta, \\ R_\gamma \geqslant 0, \end{cases} \qquad (S')$$

бунда $\alpha = \overline{1, p}$; $\beta = \overline{1\ q}$; $\gamma = \overline{1, r}$ бўлади. (S') системада ($pq + r$) та тенгсизликлар мавжуд. (S') система (S) га нисбатан йўлдош система бўлиб, у (T) системага тенг кучли система бўлади. Агар (T) системада биринчи ва учинчи блоклар ёки иккинчи ва учинчи блоклар бўлмаса, у ҳолда йўлдош система ҳосил бўлмайди.

Энди берилган ва йўлдош системалар ечимлари орасидаги боғланишни кўрайлик.

Теорема. *Агар (S) системанинг ихтиёрий ечимидан x_n номаълумнинг қийматини чиқарсак, у ҳолда (S') йўлдош системанинг бирор ечими ҳосил бўлади, аксинча (S') йўлдош системанинг ихтиёрий ечими учун x_n номаълумнинг шундай қийматини топиш мумкинки, уни (S') нинг ечимига киритилса, берилган (S) системанинг ечими ҳосил бўлади.*

Исботи. (S) системанинг ечими $(\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n)$ терим бўлса, у (Т) системани ҳам қаноатлантиради. Демак, у терим (S') системанинг барча тенгсизликларини ҳам қаноатлантиради. Теореманинг иккинчи қисмини исботлаймиз. (S') системада $P_\alpha \geqslant Q_\beta$ тенгсизлик бажарилсин. $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\quad$, $x_{n-1} = x_{n-1}^0$ сонлар (S') системанинг бирор ечими бўлсин. Бу ечимни $P_1, \quad , P_p, Q_1, \quad , Q_q, R_1, \quad ., R_r$ ифодаларга қўйсак, $P_1^0, \quad , P_p^0, Q_1^0, \quad , Q_q^0, R_1^0, \quad , R_r^0$ сонлар ҳосил бўлади. Бу сонлар учун $P_\alpha^0 \geqslant Q_\beta^0 (\alpha = \overline{1,p};\ \beta = \overline{1,\ q})$, $R_\gamma^0 \geqslant 0$ $(\gamma = \overline{1,\ r})$ тенгсизликлар бажарилади. Ихтиёрий Q_j^0 $(j = \overline{1,\ q})$ сон ихтиёрий $P_i^0 (i = \overline{1,\ p})$ сондан катта эмас. Шунинг учун шундай x_n^0 сон топиладики, у $P_i^0 \geqslant x_n^0 \geqslant Q_j^0$ тенгсизликни қаноатлантиради. Демак, $x_1^0, \quad , x_{n-1}^0, x_n^0$ сонлар (Т) системанинг ечими бўлади. Шунинг учун бу сонлар системаси (S) системанинг ҳам ечими бўлади. Энди йўлдош (S') система фақат $R_j \geqslant 0$ тенгсизликлардан иборат бўлсин, яъни (S') системада биринчи, иккинчи блоклар бўлмасин. (Т) системада биринчи блок бўлмасин. У ҳолда x_n^0 сонни $x_n^0 \geqslant Q_j^0$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган шартга асосан танлаб оламиз. Агар (Т) системада иккинчи блок бўлмаса, $P_i^0 \geqslant x_n^0$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x_n^0 сонни танлаб оламиз. Агар (Т) системада биринчи ва иккинчи блоклар мавжуд бўлмаса, у ҳолда x_n^0 ўрнига ихтиёрий сонни танлаб оламиз.

1-натижа. Чизиқли тенгсизликлар системаси (S) нинг ҳамжойли бўлиши учун унга йўлдош (S') системанинг ҳамжойли бўлиши зарур ва етарли.

2-натижа. Берилган (S) системанинг барча ечимлари (S') йўлдош системанинг ҳар қандай $x_1^0, x_2^0, \quad , x_{n-1}^0$ ечимига $x_n^0 \geqslant Q_l^0$ ва $x_n^0 \leqslant P_l^0$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган ихтиёрий x_n^0 сонни бирлаштиришдан ҳосил бўлади.

Энди номаълумлар сонини кетма-кет камайтириш йўли билан (S) системани ечиш усулини кўрайлик.

$x_1,\ x_2 \qquad x_n$ номаълумли чизиқли тенгсизликларнинг ихтиёрий (S) системаси учун (S') йўлдош системани туздик. (S') системада $x_1,\ x_2, \qquad x_{n-1}$ лар номаълумлар бўлади. $S')$ система учун $x_1,\ x_2, \qquad x_{n-2}$ номаълумлари бўлган (S'') йўлдош системани тузамиз. Шу жараённи давом эттириб, бир неча қадамдан кейин битта x_1 номаълумга эга бўлган (S^{n-1}) системага келамиз. 2- натижага асосан (S) систетема ҳамжойли бўлиши учун (S^{n-1}) система ҳамжойли бўлиши зарур ва етарли. Бир номаълумли система учун унинг ҳамжойли ёки ҳамжойсиз эмаслигини кўрсатиш қийин эмас. Шундай қилиб, (S) системанинг ҳамжойли ёки ҳамжойли эмаслигини ҳисоблаш усулини топдик. (S) система ҳамжойли бўлсин, у ҳолда унинг барча ечимларини топиш учун (S'), (S''), $\quad$, (S^{n-1}) системаларни тузиш керак.

Таъриф. (S) системада биринчи k та номаълумнинг $x_1^0,\ x_2^0, \quad ,\ x_k^0$ қийматлари берилган ва уни (S) системанинг бирор ечимигача тўлдириш мумкин бўлса, яъни

$$x_{k+1}^0,\ x_{k+2}^0, \qquad ,\ x_n^0 \qquad (7)$$

сонлар мавжуд бўлиб, $x_1^0,\ x_2^0, \qquad x_k^0,\ x_{k+1}^0, \qquad x_n^0$ система (S) системанинг ечими бўлса, у ҳолда (7) системага *қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар* дейилади.

(S'), (S''), (S''') ва ҳ. к. системалар тузилган бўлса, қуйидаги имкониятларга эга бўламиз:

1) x_1 номаълумнинг барча қабул қиладиган қийматларини (S^{n-1}) дан топиш;

2) x_1^0 қиймат учун унинг билан биргаликда x_2 номаълумнинг қийматларини (S^{n-2}) дан топиш;

3) $x_1^0,\ x_2^0$ сонлар билан биргаликда x_3 номаълумнинг барча қийматларини (S^{n-3}) дан топиш ва ҳоказо.

Мисол. Ушбу системани ечинг:

$$\begin{cases} x - y + 3 \geqslant 0, \\ 7x + y - 11 \geqslant 0, \\ 3x + 5y + 9 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ечиш. y га нисбатан берилган системани ечамиз:

$$\begin{cases} x+3\geqslant y, \\ y\geqslant -7x+11, \\ y\geqslant -\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}. \end{cases}$$

Бу системага йўлдош система тузамиз. У система қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} x+3\geqslant -7x+11, \\ x+3\geqslant -\frac{3}{5}x-\frac{9}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x\geqslant 8, \\ \frac{8}{5}x\geqslant -\frac{24}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\geqslant -3; \end{cases} \quad x\geqslant 1.$$

$x=1$ бўлганда охирги тенгсизлик бажарилади. Бу қийматни берилган системага қўямиз. У ҳолда

$$\begin{cases} 4\geqslant y, \\ y\geqslant 4 \\ y\geqslant -\frac{12}{5} \end{cases}$$

дан $y=4$ ҳосил бўлади.

Демак, системанинг битта ечими $x=1$, $y=4$ бўлади. Энди зиддиятли тенгсизлик тушунчасини кўрайлик.

$$a_1x_1+a_2x_2+\qquad +a_nx_n+a\geqslant 0 \tag{8}$$

тенгсизликни текширамиз.

(8) даги номаълумлар олдидаги коэффициентлардан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (8) тенгсизлик камида битта ечимга эга бўлади. Масалан, $a_1\neq 0$ бўлса, у ҳолда $x_2=x_3=\qquad =x_n=0$ қийматлар бериб, $a_1x_1+a\geqslant 0$ тенгсизлик ечимга эга. (8) да номаълумлар олдидаги барча коэффициентлар нолга тенг бўлсин. У ҳолда (8) тенгсизлик

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\qquad +0\cdot x_n+a\geqslant 0 \tag{9}$$

кўринишда бўлади.

Агар a сон манфиймас бўлса, номаълумлар қийматларининг ихтиёрий тўплами (9) тенгсизликни қаноатлантиради.

Агар a сон манфий бўлса, (9) тенгсизлик ечимга эга эмас. a сон манфий бўлса, (9) тенгсизликка зиддиятли тенгсизлик дейилади.

Юқоридагилардан қуйидаги хулоса келиб чиқади: (8) тенгсизлик ечимга эга бўлмаслиги учун, унинг зиддиятли бўлиши зарур ва етарли.

Системанинг ҳамжойсизлик аломатини кўрайлик.

$$\begin{cases} L_1 \geqslant 0, \\ L_2 \geqslant 0, \\ \\ L_m \geqslant 0 \end{cases} \qquad (S_1)$$

тенгсизликлар системасини текширамиз. Бу ерда $a_1x_1 + a_2x_2 +$ $+ \quad + a_n x_n + a$ кўринишдаги ифодаларни $L_1, L_2, \quad , L_m$ билан белгиладик. (S_1) системадаги биринчи тенгсизликни манфиймас k_1 сонга, иккинчисини манфиймас k_2 сонга ва ҳоказо m- тенгсизликни манфиймас k_m сонга кўпайтириб, кейин барча тенгсизликларни ҳадлаб қўшиб, қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$k_1L_1 + k_2L_2 + \quad + k_mL_m \geqslant 0.$$

Бу тенгсизликни (S_1) тенгсизликларнинг чизиқли комбинацияси дейилади. Масалан,

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5 \geqslant 0, \\ -2x + 5y - 7 \geqslant 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси берилган бўлса, мумкин бўлган комбинациялардан биттаси $2(3x - 4y + 5) + 3(-2x + 5y - 7) \geqslant 0$ ёки $7y - 11 \geqslant 0$ тенгсизлик бўлади. Тенгсизликларнинг чизиқли комбинацияси таърифидан қуйидаги жумлалар келиб чиқади:

1. (S) системанинг ихтиёрий ечими (S) нинг тенгсизликлари чизиқли комбинацияси бўлган ихтиёрий тенгсизликни ҳам қаноатлантиради.

2. (S) системанинг тенгсизликларидан бир нечта чизиқли комбинацияни тузсак ва бу комбинациялардан яна чизиқли комбинация тузсак, у ҳолда ҳосил бўлган тенгсизлик яна (S) даги тенгсизликларнинг чизиқли комбинацияси бўлади.

Агар (S) тенгсизликларнинг айрим чизиқли комбинацияси зиддиятли тенгсизлик бўлса, у ҳолда система ҳамжойли бўлмаган система бўлади. Бу жумлага тескари жумла ҳам рост бўлади.

Теорема. Чизиқли тенгсизликлар системаси ҳамжойсиз бўлиши учун бу тенгсизликларнинг бирор чизиқли *комбинацияси зиддиятли тенгсизлик бўлиши зарур ва етарли.*

Исботи. Тенгсизликларнинг ҳамжойсиз системасидан ҳамма вақт зиддиятли тенгсизлик тузиш мумкин эканини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги леммани исботлаймиз.

Лемма. Йўлдош системанинг ҳар бир тенгсизлиги берилган тенгсизликлар системасининг чизиқли комбинацияси бўлади.

Ҳақиқатан, йўлдош система (S′) қуйидаги тенгсизликлардан тузилган:

$$P_{\alpha} \geqslant Q_{\beta} \ (\alpha = \overline{1,\ p};\ \beta = \overline{1,\ q}) \qquad (10)$$

ва

$$R_{\gamma} \geqslant 0 \ (\gamma = \overline{1,\ r}). \qquad (11)$$

(10) тенгсизлик $P_{\alpha} \geqslant x_n$ ва $x_n \geqslant Q_{\beta}$ тенгсизликларни қўшиш натижасида ҳосил бўлади. У тенгсизликларнинг ҳар бири берилган (S) системадаги айрим тенгсизликларнинг иккала томонини мусбат сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган. Демак, (10) тенгсизлик, берилган (S) системанинг иккита тенгсизлигининг комбинацияси бўлади. (11) даги тенгсизликларнинг ҳар бири (S) тенгсизликлар системасининг биттасидан иборат.

Шу билан лемма исботланди.

Берилган теореманинг тўғрилигини битта номаълумли система учун исбот қилиш етарли

Ҳақиқатан, (S) система n та номаълумли, зиддиятли чизиқли тенгсизликлар системаси бўлсин. (S) учун (S'), (S'') ва ҳоказо (S^{n-1}) йўлдош системаларни тузамиз. Натижада, (S), (S'), (S'') , (S^{n-1}) системалар кетма-кетлигига эга бўламиз. Бу ерда (S^{n-1}) x_1 номаълумли система бўлади.

Чизиқли тенгсизликлар системасининг ҳамжойли бўлиши учун унга йўлдош система ҳамжойли бўлиши зарур ва етарли, деган жумлага кўра (S) система ҳамжойсиз бўлса, у ҳолда (S^{n-1}) система ҳам ҳамжойсиз система бўлади. Агар теореманинг тўғрилигини бир номаълумли система учун ўринли деб фараз қилсак, ундан (S^{n-1}) тенгсизликлар системасининг бирор чизиқли комбинацияси зиддиятли тенгсизлик бўлиши келиб чиқади. Лекин юқоридаги леммага асосан (S^{n-1}) системанинг ҳар бир тенгсизлиги берилган (S) система тенгсизликларининг комбинацияси бўлади. Демак, (S) система тенгсизликларининг айрим комбинацияси зиддиятли бўлади.

Энди теореманинг тўғрилигини қуйидаги бир номаълумли тенгсизликлар системаси учун текширамиз:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \geqslant 0, \\ a_2x + b_2 \geqslant 0, \\ \\ a_mx + b_m \geqslant 0. \end{cases} \qquad (12)$$

(12) ҳамжойлимас тенгсизликлар системаси бўлсин. Бу системада $0 \cdot x + b \geqslant 0$ (бунда b — манфий сон) кўринишдаги тенгсизлик қатнашмайди деб фараз қиламиз. x нинг олдидаги барча коэффициентларни нолдан фарқли дейиш мумкин. a_1, a_2, , a_n сонлар орасида мусбатлари ҳам, манфийлари ҳам мавжуд. Ҳақиқатан, агар a_1, a_2, , a_n ларнинг барчаси бир хил ишорали бўлса, масалан, мусбат ишорали бўлса, (12) тенгсизликлар системаси

$$\begin{cases} x \geqslant -\frac{b_1}{a_1}; \\ x \geqslant -\frac{b_2}{a_2}, \\ \\ x \geqslant -\frac{b_m}{a_m} \end{cases}$$

кўринишга келиб, система ҳамжойли бўлар эди. Айтайлик, (12) да k та a_1 a_2, a_k сон мусбат, қолган $(m - k)$ та сон манфий бўлсин. У ҳолда (12) система

$$\begin{cases} x \geqslant -\frac{b_1}{a_1}, & x \leqslant -\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\ x \geqslant -\frac{b_2}{a_2}, & x \leqslant -\frac{b_{k+}}{a_{k+2}} \\ \\ x \geqslant -\frac{b_k}{a_k}, & x \leqslant -\frac{b_m}{a_m} \end{cases} \qquad (13)$$

системага тенг кучли бўлади.

Агар (13) да $-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, . \quad , -\frac{b_k}{a_k}$ сонларнинг энг каттасини α; $-\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}, \quad , -\frac{b_m}{a_m}$ сонларнинг энг кичигини β десак, (13) система ечимлар тўплами $[\alpha; \beta]$ кесмада ётади.

Шунинг учун (18) системанинг ҳамжойсиз бўлиши учун $\alpha > \beta$ бўлиши керак.

$$\alpha = -\frac{b_1}{a_1} \text{ ва } \beta = -\frac{b_m}{a_m}$$

бўлсин.

У ҳолда $-\frac{b_1}{a_1} > -\frac{b_m}{a_m}$, бундан

$$b_m a_1 - b_1 a_m 0 < 0 \qquad (14)$$

бажарилади (бунда $a_1 > 0$ ва $a_m < 0$ эканлигини эслаш керак).

Агар (12) системанинг биринчи тенгсизлигини мусбат a_m сонга, охирги тенгсизлигини эса мусбат a_1 сонга кўпайтириб, уларни қўшсак,

$$0 \cdot x + (b_m a_1 - b_1 a_m) \geqslant 0$$

кўринишдаги чизиқли комбинацияга эга бўламиз. Бу тенгсизлик (14) га асосан зиддиятли тенгсизлик бўлади. Демак, битта номаълумли тенгсизликлар системаси учун теорема ўринли. Йўлдош система тушунчасига асосан берилган теорема (п—1) та номаълумли чизиқли тенгсизликлар системаси учун тўғри бўлиб, унинг n номаълумли чизиқли тенгсизликлари системаси учун тўғрилиги келиб чиқади.

2-теорема (Минковский теоремаси). Бир жинсли чизиқли тенгсизликлар системасининг ҳар бир натижаси бу системанинг манфиймас коэффициентли чизиқли комбинациясидан иборат бўлади.

Исботи. Ушбу

$$\begin{cases} \mathscr{P}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + x_{1n}x_n \geqslant 0, \\ \mathscr{P}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n \geqslant 0, \\ \\ \mathscr{P}_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad (15)$$

бир жинсли система ва унинг исталган

$$\mathscr{P} = a_1x_1 + a_2x_2 + \qquad + a_nx_n \geqslant 0 \qquad (16)$$

натижаси берилган бўлсин.

c мусбат сон бўлганда $\mathscr{P} + c < 0$ қатъий тенгсизлик ҳам (15) системанинг натижаси эканлиги равшан, чунки (16) ни қаноатлантирувчи ҳар бир ечим $\mathscr{P} + c > 0$ ни ҳам албатта қаноатлантиради. У ҳолда $\mathscr{P} + c > 0$, $\mathscr{P} + c \leqslant 0$ система ҳамжойсиз бўлади, чунки $\mathscr{P} + c > 0$ нинг ечими бир вақтда $\mathscr{P} + c \leqslant 0$ ни ҳам қаноатлантириши мумкин эмас. (15) системанинг исталган ечими $\mathscr{P} + c > 0$ учун ҳам ечим бўлгани сабабли

$$\mathscr{P}_1 \geqslant 0,\ \mathscr{P}_2 \geqslant 0, \qquad , \mathscr{P}_m \geqslant 0, -\mathscr{P} - c \geqslant 0 \tag{17}$$

система ҳамжойли бўлмаган система бўлади.

1-теоремада берилган ҳамжойсизлик аломатига асосан, манфиймас $k_1, k_2, \qquad , k_m$, k сонлар мавжуд бўлгани ҳолда, (17) системанинг чизиқли

$$k_1\mathscr{P}_1 + k_2\mathscr{P}_2 + \qquad + k_m\mathscr{P}_m + k(-\mathscr{P} - c) \geqslant 0$$

комбинацияси $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \qquad + 0 \cdot x_n + b = 0 + b = b \geqslant 0$ зиддиятли тенгсизликни ифодалайди, бунда $b < 0$. Шундай қилиб,

$$k_1\mathscr{P}_1 + k_2\mathscr{P}_2 + \qquad + k_m\mathscr{P}_m - k\mathscr{P} - kc = 0 + b$$

тенглик бажарилади. Бундан, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\qquad$, $\mathscr{P}_m$, $\mathscr{P}$ лар бир жинсли ифода бўлгани учун (озод ҳади бўлмаган) охирги тенгликдан $-kc - b = 0$ тенглик келиб чиқади. $b < 0$, $c > 0$ бўлгани учун $k > 0$ бўлади. Демак,

$$k_1\mathscr{P}_1 + k_2\mathscr{P}_2 + \qquad + k_m\mathscr{P}_m - k\mathscr{P} = 0, \tag{18}$$

$$\mathscr{P} = \frac{k_1}{k}\mathscr{P}_1 + \frac{k_2}{k}\mathscr{P}_2 + \qquad + \frac{k_m}{k}\mathscr{P}_m, \tag{19}$$

бунда $\frac{k_1}{k} \geqslant 0$, чунки $k_1 \geqslant 0$.

(19) тенгликдан кўринадики, (16) тенгсизлик (15) системанинг чизиқли комбинацияси экан.

83-§. ТЕНГСИЗЛИКЛАР СИСТЕМАСИНИНГ МАНФИЙМАС ЕЧИМЛАРИ

Кўп ҳолларда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + . \quad + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

системанинг

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0 \tag{1'}$$

шартларни қаноатлантирувчи манфиймас ечимларини топиш талаб этилади. Бундай ҳолларда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0. \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \qquad ,\ x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

системани ечиш кифоя эканлиги ўз-ўзидан маълум.

Таъриф. (2) системанинг *манфиймас ечими* деб $x_1 = \alpha_1 \geqslant 0,\ x_2 = \alpha_2 \geqslant 0, \qquad ,\ x_n = \alpha_n \geqslant 0$ сонлардан тузилган $(\alpha_1, \alpha_2, \qquad , \alpha_n)$ ечимга айтилади.

(2) системанинг (1′) қисми фақат манфиймас ечимларгагина эгадир. Демак, (2) система ҳамжойли бўлиши учун унинг

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \qquad + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \qquad + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \qquad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \qquad + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{cases} \tag{3}$$

қисми ҳам манфиймас ечимларга эга бўлиши лозим. Акс ҳолда, яъни (3) нинг манфиймас ечимлари мавжуд бўлмаганда, (2) ҳамжойли бўлмаган системани ифодалайди.

Масалан,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3 \geqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 8 \geqslant 0, \end{cases}$$

система ҳамжойли, чунки унинг манфиймас (2, 0, 6) ечими мавжуд.

Лекин

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1 \geqslant 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - 2 \geqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

система ҳамжойсиз, чунки биринчи иккита тенгсизликдан тузилган системанинг манфиймас ечими йўқ.

Теорема. *(3) тенгсизликлар системасининг манфиймас ечимлари мавжуд бўлмаса, бу тенгсизликларнинг бирор чизиқли комбинацияси шундай*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \qquad + a_nx_n + b \geqslant 0 \tag{4}$$

кўринишга эгаки, бунда $a_i \leqslant 0$ $(i = \overline{1, n})$, $b < 0$ *шартлар бажарилади.*

Исботи. (3) система манфиймас ечимларга эга бўлмаса, (2) ҳамжойсиз системани ифодалайди У ҳолда ҳамжойсизлик аломатига мувофиқ (2) системанинг

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \qquad + 0 \cdot x_n + b \geqslant 0 \tag{5}$$

кўринишдаги зиддиятли чизиқли комбинацияси мавжуд бўлиб, бунда $b < 0$ бўлади.

Маълумки, (5) тенгсизлик қуйидагича ҳосил қилинади: (2) системанинг биринчи m та тенгсизлигини мос равишда $l_1 \geqslant 0$, $l_2 \geqslant 0$, $\qquad l_m \geqslant 0$ сонларга ва кейинги n тасини $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $k_n \geqslant 0$ сонларга кўпайтириб ва сўнгра уларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} l_j a_{j1} + k_1\right)x_1 + \left(\sum_{j=1}^{m} l_j a_{j2} + k_2\right) + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{m} l_j a_{jn} + k_n\right)x_n +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} l_j b_j = (a_1 + k_1)x_1 + (a_2 + k_2)x_2 + \ldots + (a_n + k_n)x_n + b =$$

$$= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + b \geqslant 0$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Демак, $a_i = -k_i \leqslant 0$ $(i = \overline{1, n})$, $b < 0$.

Масалан, юқоридаги иккинчи мисолда келтирилган

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 1 \geqslant 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

системанинг манфиймас ечимларга эга эмаслиги бизга маълум. Энди, масалан, биринчи тенгсизликни 2 га ва иккинчини 3 га кўпайтириб, уларни ҳадма-ҳад қўшсак, қуйидаги чизиқли комбинацияни ҳосил қиламиз:

$$-8x_1 - 7x_2 - 9x_3 - 8 \geqslant 0.$$

Энди, ҳамжойсиз системанинг тенгсизликларини мос равишда 2, 3, 8, 7, 9 ларга кўпайтириб қўшсак, $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 8 \geqslant 0$ чизиқли комбинация келиб чиқади.

84-§. ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИНГ МАНФИЙМАС ЕЧИМЛАРИ

Ушбу

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j \quad (j = \overline{1, m}) \tag{1}$$

тенгламалар системасининг манфиймас, яъни

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \qquad ,\ x_n \geqslant 0, \tag{2}$$

шартни қаноатлантирувчи ечимларини излаш билан шуғулланамиз. Бундай ечимларнинг мавжудлиги

$$\begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \qquad + a_{jn}\, x_n \geqslant b_j, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \qquad + a_{jn}\, x_n \leqslant b_j \end{cases} \tag{3}$$

тенгсизликлар системасининг ҳамжойли бўлишига боғлиқ. (3) системанинг ҳамжойлилик масаласи

$$\begin{cases} a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}\, x_n \geqslant b_j, \\ -a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - \ldots\ - a_{jn}\, x_n \geqslant -b_j \end{cases} \tag{4}$$

системанинг ҳамжойлилик масаласи билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, (1) система манфиймас ечимларга эга бўлса, (4) система ҳамжойли бўлади ва аксинча.

Мисол. Ушбу $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$

система $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$ шартда манфиймас (1, 2, 5) ечимга эга.

Иккинчидан, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geqslant -3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -5, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$

система ҳамжойли, чунки унинг ечимларидан бири (1, 2, 5) бўлади.

85-§. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШ

Чизиқли программалаш математиканинг шундай бўлимики, у бир нечта ўзгарувчили f чизиқли функциянинг (чизиқли форманинг) энг катта (максимум) ёки энг кичик (минимум) қийматини топиш усуллари билан шуғулланади. f функция таркибидаги ўзгарувчилар, чизиқли тенгламалар ёки чизиқли тенгсизликлар системасининг номаълумларини ифодалайди ва f функция ўзгарувчиларининг қийматлари шу системанинг мос равишда танланган манфиймас ечими билан аниқланади. Чизиқли программалаш усулларини қўллаб ечиладиган масалалардан қуйида баъзи бирларини кўриб ўтайлик.

I. **Транспорт масаласи.** M_1, M_2, M_3 кўмир конларида ҳар ойда мос равишда a_1, a_2, a_3 тоннадан кўмир қазиб чиқарилади. Бу кўмир $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ корхоналарга етказиб берилиб, бу корхоналарнинг кўмирга ҳар ойдаги талаби мос равишда b_1, b_2, b_3 тоннани ташкил этади. Бир тонна кўмирни кондан $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$ корхонага етказиб бериш харажатлари C_{ij} сўмни ташкил этади ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$).

Масала қуйидагича қўйилади: кўмирни конлардан корхоналарга ташишнинг умумий харажати энг арзон нархда (энг кичик — минимум) бўлсин.

Конлар ҳар ойда қазилган кўмирни сотишга манфаатдор бўлганлиги сабабли $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ қазилган кўмир миқдори сотилган миқдорга тенг деб ҳисоблаш табиийдир.

M_i кондан $\mathscr{P}_j$ корхонага келтирилган кўмирни x_{ij} тонна десак, кўмир ташиш режаси қуйидаги жадвал бўйича бўлади:

	$\mathscr{P}_1$	$\mathscr{P}_2$	$\mathscr{P}_3$	Ҳамма жўнатилган кўмир
M_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
M_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
M_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	a_3
Ҳамма келтирилган кўмир	b_1	b_2	b_3	

M_i конлардан $\mathscr{P}_j$ корхоналарга жўнатилган кўмир миқдори

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = a_3 \end{cases} \qquad (1)$$

бўлиб, M_i лардан $\mathscr{P}_j$ ларга келтирилган кўмир миқдори эса

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 \end{cases} \qquad (2)$$

бўлади.

Эслатма. (1) ва (2) системаларда $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ бўлиши шарт эмас, лекин $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ тенглик бажарилиши талаб қилинади.

x_{ij} тонна кўмирни ташиш харажати $c_{ij} x_{ij}$ сўм бўлганидан ҳамма $a_1 + a_2 + a_3$ кўмирни ташиш харажати

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdot \quad . + a_{in}x_n \geqslant b_i \ (i = \overline{1,m}) \qquad (1)$$
$$x_k \geqslant 0 \ (k = \overline{1,n}),$$

чекланиш тенгсизликлари ва

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad . + c_n x_n \qquad (2)$$

чизиқли форма берилган бўлсин. Фараз қилайлик, (1) системанинг оптимал ечими учун (2) формани минимумлаштириш лозим бўлсин. (1)—(2) масалани дастлабки масала деймиз.

Яна битта программалаш масаласи берилган бўлиб, у

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \quad . + a_{mj}y_m \leqslant c_j \ (j = \overline{1,m}) \qquad (3)$$
$$y_s \geqslant 0 \ (s = \overline{1,m})$$

чекланиш тенгсизликлари ва

$$\varphi = b_1y_1 + b_2y_2 + \quad . + b_my_m \qquad (4)$$

чизиқли форма воситаси билан ифодалансин. Бу ерда (3) системанинг оптимал ечими учун (4) ни максимумлаштириш талаб қилинади. (3)—(4) масалани дастлабкига нисбатан икки ёқлама масала деб атаймиз.

Дастлабки ва икки ёқлама масалаларнинг матрицалари бир-бирига нисбатан транспонирлангандир, яъни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ва } A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . \, a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . \, . \, a_{m2} \\ & & \\ a_{1n} & a_{2n} & . \, a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(1) системанинг озод ҳадлари (2) форманинг коэффициентларидан ва аксинча, (2) форманинг коэффициентлари (1) системанинг озод ҳадларидан иборатдир.

(1) системанинг ҳамма тенгсизликлари $\geqslant$ маънога ва (3) система эса, аксинча, $\leqslant$ маънога эга.

(1)—(2) масала дастлабки масала, (3)—(4) масала унга икки ёқлама масала, шунинг учун (3) системадаги тенгсизликларнинг маъносини $\leqslant$ дан $\geqslant$ га алмаштирамиз ва φ нинг максимуми ўрнига минимумини, f нинг эса, аксинча, минимуми ўрнига максимумини излашимиз керак. Бунга эришиш учун (1) ва (3) даги ҳамма тенгсизликларнинг икки томонини (—1) га кўпайтириб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$-a_{1j}y_1 - a_{2j}y_2 - \ldots - a_{mj}y_m \geqslant -c_j \ (j = \overline{1,n}),$$

$$-a_{i1}y_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leqslant -b_i \ (i = \overline{1,m}),$$

$$-f = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = \sum_{j=1}^{n}(-c_j)\,x_j,$$

$$-\varphi = -b_1y_1 - b_2y_2 - \ldots - b_my_m = \sum_{i=1}^{m}(-b_i)\,y_i.$$

Демак, бизга min $(-\varphi)$ ва max $(-f)$ ларни аниқлаш талаб қилинади. Бу эса қуйидагини беради:

$$\min(-\varphi) = \min\sum_{i=1}^{m}(-b_i)\,y_i = -\max\sum_{i=1}^{m}b_iy_i =$$
$$= -\max\varphi,\ \min(-\varphi) = -\max\varphi.$$

Шунга ўхшаш

$$\max(-f) = \max\sum_{j=1}^{n}(-c_j)\,x_j = -min\sum_{j=1}^{n}c_jx_j =$$
$$= -\min f,\ \max(-f) = -\min f.$$

Булардан:

$$\max\varphi = -\min(-\varphi),\ \min f = -max\,(-f).$$

1-теорема. *(1) ва (3) системаларнинг исталган ўринли ечимларини мос равишда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ва $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ орқали белгиласак, у ҳолда f ва φ формаларнинг бу ечимлардаги f_0 ва φ_0 қийматлари $f_0 \geqslant \varphi_0$ тенгсизликни қаноатлантиради.*

Исботи. (1), (2), (3), (4) ларга ўринли ечимларни қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 \geqslant b_i \ (i = \overline{1,m}),$$
$$f_0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0 + \ldots + c_nx_n^0, \tag{5}$$

$$a_{1j}y_1^0 + a_{2j}y_2^0 + \ldots + a_{mj}y_m^0 \leqslant c_j \ (j = \overline{1,n}),$$
$$\varphi_0 = b_1y_1^0 + b_2y_2^0 + \ldots + b_my_m^0. \tag{6}$$

(5) тенгсизликларни мос равишда $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ ларга кўпайтириб, сатрлар бўйича қўшсак,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^0 y_i^0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^0 = \varphi_0 \qquad (7)$$

келиб чиқади. Шунингдек, (6) тенгсизликларни мос равишда $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ ларга кўпайтириб, устунлар бўйича қўшсак,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j^0 y_i^0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 = f_0 \qquad (8)$$

ҳосил бўлади. (7) ва (8) лар $f_0 \geqslant \varphi_0$ эканлигини билдиради.

Натижа. Агар $\varphi_0 = f_0$ тенглик бажарилса, $\varphi_0 = \max \varphi$ ва $f_0 = \min f_0$ бўлади, яъни $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ва $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ лар оптимал ечимларни ифодалайди.

Ҳақиқатан, юқоридаги теоремага асосан, исталган ўринли $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ва $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ ечимлар учун $\varphi_0 \leqslant f_0$ бўлгани сабабли f_0 сон φ форма қийматларининг юқори чегараси, φ_0 сон эса f форма қийматларининг қуйи чегараси бўлади. Демак, $\varphi_0 = f_0$ тенглик бажарилганда $\varphi_0 = \max \varphi$ ва $f_0 = \min f$ эканлиги тасдиқланади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \geqslant 4, \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \geqslant 3 \end{cases} \qquad (9)$$

$$f = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

масала ҳамда унга икки ёқлама

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leqslant 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 4, \\ 4y_3 \leqslant 1, \\ y_1 + y_3 \leqslant 1 \end{cases} \qquad (10)$$

ва

$$\varphi = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3$$

масала берилган бўлсин. (9) ва (10) системаларнинг ўринли (1, 0, 5, 3) ва (1, 2, 0) ечимлари учун $f_0 = 2\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1\cdot 5 + 1\cdot 3 = 10$, $f_0 = 10$, $\varphi_0 = 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 0 = 10$, $\varphi_0 = 10$ бўлиб, $\min f = \max \varphi = 10$ дир.

Икки ёқламаликнинг асосий теоремасини қуйида исботсиз келтирамиз.

2-теорема. *Дастлабки масала ечиладиган бўлса, ун-*

га икки ёқлама масала ҳам ечиладиган бўлиб, f форманинг минимуми билан φ форманинг максимуми учун $\min f = \max \varphi$ *тенглик бажарилади. Агар дастлабки масалада f форма қуйидан чегараланмаган бўлса, икки ёқлама масаладаги чекланиш системаси манфиймас ечимларга эга бўлмайди.*

Бу теореманинг исботи бир нечта адабиётда, жумладан, А. С. Солодовниковнинг «Введение в линейную алгебру и линейное программирование» китобида берилган.

87-§. СИМПЛЕКС УСУЛ

Чизиқли программалаш масаласини ечишнинг муҳим усули симплекс усулдир. Бу масалада чекланиш тенгламалари $x_1, x_2, \quad ., x_r$ номаълумларга нисбатан ечилган, яъни

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + a_{1r+2}x_{r+2} + \qquad + a_{1n}x_n), \\ x_2 &= b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + a_{2r+2}x_{r+2} + \qquad + a_{2n}x_n), \\ &\quad \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\ x_r &= b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + a_{rr+2}x_{r+2} + \qquad + a_{rn}x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

кўринишда олинган бўлиб, $b_1 \geqslant 0, \ b_2 \geqslant 0, \quad ., b_r \geqslant 0$ бўлсин.

f чизиқли формада ҳам $x_1, x_2, \qquad x_r$ ларни (1) лар орқали ифодалаб, уни

$$f = \gamma_0 - \gamma_{r+1}x_{r+1} - \gamma_{r+2}x_{r+2} - \cdot \quad \cdot - \gamma_n x_n \qquad (2)$$

кўринишга келтирамиз ва бу форманинг минимумини топиш масаласини қўямиз.

(1) даги $x_1, x_2, \qquad , x_r$ номаълумлар тўплами чизиқли программалаш масаласининг базиси дейилади ва у $M = \{x_1, x_2, \qquad , x_r\}$ кўринишда белгиланади. $x_1, x_2, \qquad , x_r$ ларнинг ўзини базис номаълумлар, $x_{r+1}, x_{r+2}, \qquad , x_n$ ларни эса озод номаълумлар деб атаймиз. $x_{r+1}, x_{r+2}, \qquad x_n$ номаълумларга $x_{r+1}, = x_{r+2} = \qquad = x_n = 0$ қийматни берсак, (1) дан $x_1 = b_1 \geqslant 0, \ x_2 = b_2 \geqslant 0, \qquad , x_r = b_r \geqslant 0$ ларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$(b_1, \ b_2, \qquad , b_r, \ 0, \ 0, \qquad 0) \qquad (3)$$

ечим ҳосил бўлади. f нинг бу ечимдаги қиймати $f = \gamma_0$ га тенг.

Қуйидаги икки ҳол рўй бериши мумкин:

1. (2) да ҳамма $-\gamma_{r+1}, -\gamma_{r+2}, \qquad , -\gamma_n$ сонлар ман-

фиймас, яъни $-\gamma_i \geqslant 0$. У вақтда f форма $x_{r+1} = x_{r+2} = = \quad = x_n = 0$ шартда минимум $f = \gamma_0$ қийматга эришади, яъни M базиснинг (3) ечими оптимал бўлади, чунки бирор $-\gamma_j > 0$ ва $x_j > 0$ лар учун $-\gamma_j x_j > 0$ бўлиб, $f = \gamma_0 - \gamma_j x_j > \gamma_0$, $f > \gamma_0$ келиб чиқади.

II. (2) да $-\gamma_{r+1}, -\gamma_{r+2}, \cdot, -\gamma_n$ сонлар орасида манфийлари бор бўлсин. Масалан, $-\gamma_i < 0$ дейлик. У вақтда $x_{r+1} = \quad = x_{j-1} = x_{j+1} = \quad = x_n = 0$ ва $x_j > 0$ деб олиб, x_j нинг қийматини орттира бориш ҳисобига $f = \gamma_0 - \gamma_j x_j$ нинг қийматини камайтириш мумкин. Лекин бу ишда эҳтиёткорлик керак, чунки бу ҳолда (1) лардан келиб чиқадиган

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j} x_j, \\ x_2 &= b_2 - a_{2j} x_j, \\ &\cdot \\ x_r &= b_r - a_{rj} x_j \end{aligned} \tag{4}$$

тенгламалардаги $x_1, x_2, \quad, x_r$ ларнинг ҳеч қайсиси манфий бўлиб қолмасин.

Бу ерда ҳам қуйидаги иккита ҳол рўй беради:

А. (4) да ҳамма $a_{1j}, a_{2j}, \cdot, a_{rj}$ сонлар мусбатмас. У вақтда $x_j > 0$ учун $-a_{kj} x_j \geqslant 0$ ($k = \overline{1, r}$) бўлганидан $x_k = b_k - a_{kj} x_j \geqslant b_k \geqslant 0$ ($k = \overline{1, r}$) га асосан $x_1 \geqslant b_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant b_2 \geqslant 0$, $\quad$, $x_r \geqslant b_r \geqslant 0$ бўлади. Демак, $f = \gamma_0 - \gamma_j x_j$ да $\gamma_j > 0$ ва $x_j > 0$ бўлгани сабабли x_j ни чексиз орттира бориш билан $\min f = -\infty$ га келамиз. Бундан эса f форманинг минимумга эришмаслиги кўринади.

Б. (4) да $a_{1j}, a_{2j}, \quad, a_{rj}$ сонлар орасида мусбатлари бор. Масалан, $a_{kj} > 0$. У ҳолда $x_k = b_k - a_{kj} x_j$ да x_j га $\frac{b_k}{a_{kj}}$ дан ортиқ қиймат бериш мумкин эмас, чунки акс ҳолда $x_k < 0$ бўлиб қолади. Бунда $\frac{b_k}{a_{kj}} \geqslant 0$ эканлиги равшан. Бундай касрлар орасида энг кичиги $\frac{b_i}{a_{ij}}$ бўлсин. Бунда $a_{ij} > 0$ сон ҳал қилувчи элемент дейилади.

Қисқалик учун $\frac{b_i}{a_{ij}} = \rho$ белгилаш киритайлик. (4) да x_j

ни ρ гачагина орттира оламиз, чунки акс ҳолда $x_i < 0$ бўлишини кўрдик.

Озод номаълумларга

$$\begin{aligned} x_{r+1} = x_{r+2} = \quad &= x_{j-1} = 0,\ x_j = \rho,\ x_{j+1} = \\ = x_{j+2} = \quad &= x_n = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

қийматларни бериб, базис номаълумларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}\rho, \\ x_2 &= b_2 - a_{2j}\rho, \\ & \\ x_i &= b_i - a_{ij}\rho, \\ & \\ x_r &= b_r - a_{rj}\rho. \end{aligned} \qquad (6)$$

Энди қуйидаги янги M' базисга ўтамиз:

$$x_1,\ x_2, \quad ,\ x_{i-1},\ x_j,\ x_{i+1},$$

Бунга мос базис ечим (6) ва (5) лардан тузилади, (1) система ва (2) формани янги базисга мослаб ёзамиз. Бунинг учун (1) даги

$$x_i = b_i - (a_{i_{r+1}} x_{r+1} + \quad + a_{ij} x_j + \quad + a_{in} x_n)$$

тенгламани x_j га нисбатан ечамиз, яъни

$$x_j = \frac{b_i}{a_{ij}} - \left(\frac{a_{ir+1}}{a_{ij}} x_{r+1} + \quad + \frac{1}{a_{ij}} x_i + \quad + \frac{a_{in}}{a_{ij}} x_n \right)$$

ва бу ифодани (1) га қўямиз. Ҳосил бўлган янги системани

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - (a'_{1r+1} x_{r+1} + \quad + a'_{1i} x_i + \quad a'_{1n} x_n), \\ x_2 = b'_2 - (a'_{2r+1} x_{r+1} + \quad + a'_{2i} x_i + \quad a'_{2n} x_n), \\ \\ x_j = b'_j - (a'_{jr+1} x_{r+1} + \quad + a'_{ji} x_i + \quad + a'_{jn} x_n), \\ \\ x_r = b'_r - (a'_{rr+1} x_{r+1} + \quad + a'_{ri} x_i + \quad + a'_{rn} x_n) \end{cases} \qquad (7)$$

кўринишда ёзамиз. Бу базиснинг ифодаларини f га қўйиб, уни

$$f = \gamma'_0 - \gamma'_{r+1} x_{r+1} - \quad - \gamma_i x_i - \quad - \gamma'_n x_n \qquad (8)$$

кўринишга келтирамиз.

Бу билан жараённинг биринчи қадами тугайди. Кейинги қадам яна шу биринчи қадамни, яъни (8) ва (7) ларга нисбатан I ёки II ҳолни, ундан кейин II А ёки II Б ни такрорлашдан иборат бўлади ва ҳ. к.

Шундай қилиб, Симплекс усул қуйидаги жараённи ифодалайди:

1. Чекланиш — тенгламалар системасини (1) га, зиқли формани эса (2) кўринишга келтирамиз.

2. Агар (2) да ҳамма $-\gamma_{r+1}, -\gamma_{r+2}, \quad , -\gamma_n$ коэффициентлар манфиймас бўлса, M базиснинг $(b_1, b_2, \quad , b_r, 0, 0, \quad , 0)$ ечими оптимал бўлиб, бу ечимда f форма $f = \gamma_0$ минимумга эришади.

3. (2) да $-\gamma_{r+1}, -\gamma_{r+2}, \quad , -\gamma_n$ лар орасида манфийлари мавжуд, масалан, $-\gamma_i < 0$ десак, $x_{r+1} = . \quad . = x_{j-1} = 0$, $x_j > 0$, $x_{j+1} = \quad = x_n = 0$ қийматларда (1) система (4) кўринишни олади. Агар (4) да ҳамма $a_{1j}, a_{2j}, \quad ., a_{rj}$ коэффициентлар мусбат бўлса, $\min f = -\infty$ келиб чиқади, яъни f функция минимумга эришмайди.

4. (4) даги $a_{1j}, a_{2j}, \quad , a_{rj}$ коэффициентларнинг мусбатлари мавжуд, яъни $a_{kj} > 0$ десак, $\frac{b_h}{a_{kj}}$ сонлар орасида энг кичиги $\frac{b_i}{a_{lj}}$ ни оламиз. (1) системанинг x_i га нисбатан ёзилган тенгламасидан x_i ни аниқлаб, (1) системани янги $M' = \{x_1, \quad x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \quad , x_r\}$ базисга нисбатан ёзиб, (7) ни ҳосил қиламиз. f формани эса (8) кўринишда ифодалаймиз. Янги озод номаълумлар (5) дан иборат бўлади. (8) ва (7) ларга асосланиб, юқорида баён этилган жараён такрорланади.

Мисоллар. 1.
$$\begin{cases} x_1 = 2 - (2x_3 - 3x_4), \\ x_2 = 1 - (x_3 + 2x_4) \end{cases} \qquad (1)$$

система учун $f = 1 + 4x_3 + 2x_4$ форманинг минимуми топилсин.

Ечиш. x_1 ва x_2 — базис номаълумлар, x_3 ва x_4 эса озод номаълумлар. $x_3 = x_4 = 0$ да (1) дан $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ келиб чиқади. Шундай қилиб, M базиснинг ўринли (2, 1, 0, 0) ечимига эга бўламиз.

f форманинг бу ечимга мос қиймати $f = 1 + 4x_3 + 2x_4 = 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 1$, $f = 1$ бўлади.

Энди, f да $\gamma_3 = 4 > 0$, $\gamma_4 = 2 > 0$ бўлгани учун I ҳолга эгамиз. Масалан, $0 < x_3 < 1$ ва $x_4 = 0$ га мос ўринли ечимда $f = 1 + 4x_3 > 1$, $f > 1$ бўлади. Шу сабабли, f нинг минимуми $f = 1$ бўлиб, унга мос (2, 1, 0, 0) ечим оптималдир.

2. $$\begin{cases} x_1 = 1 - (-x_3 + x_4), \\ x_2 = 2 - (x_3 - 2x_4) \end{cases} \qquad (1)$$

чекланиш тенгламалар берилган бўлиб, $f = 0 - x_3 - x_4$ формани минимумлаштирайлик. Бу ерда $\{x_1, x_2\}$ базис номаълумлар ва x_3, x_4 — озод номаълумлардир. $x_3 = x_4 = 0$ қийматларда (1) дан $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ни ҳосил қиламиз. Демак, (1, 2, 0, 0) ўринли ечимга $f = 0 - 0 - 0 = 0$, $f = 0$ қиймат мос келади. $f = 0 - x_3 - x_4 = 0 - \gamma_3\ x_3 - x_4$ формада, масалан, $x_3 > 0$ ва $x_4 = 0$ деб олсак, (1) дан $x_1 = 1 - (-1)x_3$, $x_2 = 2 - 1 \cdot x_3$ ҳосил бўлади. Бунда $a_{23} = 1$ га кўра II Б ҳолга келамиз. Демак, $\frac{b_r}{a_{23}} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{b_r}{a_{23}} = 2$ бўлиб, 1 сон ҳал қилувчи элементни ифодалайди.

(1) нинг иккинчи тенгламасини x_3 га нисбатан ечиб ва x_3 ни биринчи тенгламага қўйиб, қуйидаги янги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - (x_2 - x_4), \\ x_3 = 2 - (x_2 - 2x_4) \end{cases} \qquad (2)$$

Бунда, $\{x_1, x_3\}$ — янги базис ва x_2, x_4 озод номаълумлар. f нинг бунга мос қуйидаги ифодасини топамиз:

$$f = 0 - x_3 - x_4 = 0 - 2 + x_2 - 2x_4 - x_4 = -2 + x_2 - 3x_4.$$

Энди, $x_2 = 0$ деб, x_4 га исталганча катта мусбат қийматни берсак, $\min f = -\infty$ бўлади, яъни f форма минимумга эришмайди.

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ \qquad x_2 - 3x_3 \qquad\qquad + x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

система ва $f = 2 + 4x_1 - x_2 + x_4$ форма берилган бўлиб, f ни минимумлаштириш талаб қилинади.

Ечиш. (1) нинг иккинчи тенгламасини x_2 га ва биринчисини x_4 га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} x_2 = 2 + 3x_3 - x_5, \\ x_4 = 1 + x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5. \end{cases}$$

Бундан

$$\begin{cases} x_2 = 2 + 3x_3 - x_5, \\ x_4 = 5 + x_1 + 7x_3 \end{cases} \qquad (2)$$

системани ҳосил қиламиз. (2) дан x_2 ва x_4 ларнинг ифодаларини f га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f = 5 + 5x_1 + 4x_3 + x_5. \qquad (3)$$

Энди (2) ни қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - (-3x_3 + x_5), \\ x_4 = 5 - (-x_1 - 7x_3). \end{cases} \qquad (4)$$

$x_1 = x_3 = x_5 = 0$ қийматларда (4) дан $x_2 = 2$, $x_4 = 5$ ларни топамиз. Демак, (4) система ушбу (0, 2, 0, 5, 0) ўринли ечимга эга бўлади. Бу ечимда f нинг қиймати 5 га тенг.

(3) да $\gamma_1 = 5 > 0$, $\gamma_3 + 4 > 0$, $\gamma_5 = 1 > 0$ дир. Шу сабабли $f = 5$ қиймат f нинг минимумини, (0, 2, 0, 5, 0) эса оптимал ечимини ифодалайди.

4. Ушбу

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

системанинг

$$f = x_1 + 2x_2$$

формага максимум қийматни таъминловчи оптимал ечими топилсин.

Ечиш. 86-§ да айтилган $\max f = -\min(-f) = \min \varphi$ дан фойдаланиб, (1) системанинг $\varphi = -f = -x_1 - 2x_2$ формулага минимум қийматни берувчи оптимал ечимини излаймиз.

(1) системада x_3 ва x_4 сунъий номаълумларни киритиб, ундаги тенгсизликлардан қуйидаги тенгламаларга ўтамиз:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 8. \end{cases} \qquad (2)$$

(2) да $x_3 \geqslant 0$ ва $x_4 \geqslant 0$ шарт бажарилиши лозим, чунки 9 ва 8 лардан катта бўлмаган $x_1 + 3x_2$ ва $2x_1 + 2x_2$ ифодалар шу 9 ва 8 ларга тенг бўлиб қолиши учун уларга манфиймас x_3 ва x_4 ларни қўшиш талаб қилинади.

Энди масала (2) системанинг $\varphi = -x_1 - 2x_2$ га минимум қиймат берувчи оптимал ечимини топишдан иборат бўлади.

(2) системани x_3 ва x_4 ларга нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} x_3 = 9 - (x_1 + 3x_2), \\ x_4 = 8 - (2x_1 + 2x_2). \end{cases} \qquad (3)$$

Бу ҳолда $M = \{x_3, x_4\}$ базисни ва x_1, x_2 лар эса озод номаълумларни ташкил этади. $x_1 = x_2 = 0$ қийматларда (3) дан $x_3 = 9$ ва $x_4 = 8$ ларни ҳосил қиламиз. Демак, M базисда φ нинг қиймати 0 бўлади. φ нинг қийматини камайтириш мумкинлигини кўрамиз. $\varphi = -x_1 - 2x_2$ га асосан, x_1 ва x_2 ларнинг қийматлари ортиши билан φ камаяди, яъни $\varphi = -x_1 - 2x_2$ га қараб шуни кўрамизки, $-x_1$ га кўра $-2x_2$ φ ни тезроқ камайтиради. Шу сабабли, $x_1 = 0$ ва $x_2 > 0$ деб олиб, x_2 га $x_2 = 3$ қийматни берамиз (чунки $x_2 > 4$ қийматда (3) дан $x_3 < 0$ бўлиб қолади, аммо биз (3) нинг ҳар вақт манфиймас ечимларинигина излашимиз керак). У ҳолда $x_1 = 0$ ва $x_2 = 3$ қийматларда (3) дан $x_3 = 0$, $x_4 > 0$ келиб чиқади.

Энди, янги $M' = \{x_2, x_4\}$ базисга ўтиш қулай бўлиб, (3) ни x_2, x_4 ларга нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} x_2 = 3 - \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3\right), \\ x_4 = 2 - \left(\frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3\right) \end{cases} \tag{4}$$

Бунда мос $\varphi = -6 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3$ бўлади. Бу ифодада x_1 ортганда φ камаяди, лекин x_3 ортганда φ ҳам ортади. Шунинг учун $x_3 = 0$ деб оламиз ва $x_1 \leqslant \frac{3}{2}$ деймиз, чунки $x_1 > \frac{3}{2}$ шартда (4) нинг иккинчи тенгламасидан $x_4 < 0$ га келамиз. Бундан $M'' = \{x_1, x_2|$ базисга ўтиш лозимлиги маълум бўлиб, (4) да қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4\right) \\ x_2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{4}x_4\right) \end{cases}$$

Бу ҳолда φ нинг кўриниши $\varphi = -\frac{13}{2} + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4$ дан иборат бўлади. Бу ерда $\frac{1}{2} > 0$ ва $\frac{1}{4} > 0$ бўлгани сабабли, x_3 ва x_4 ларга мусбат қийматларни бериш билан φ нинг қийматини камайтириш мумкин эмас. Демак, $x_3 = x_4 = 0$ ва $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$ қийматларда $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0\right)$ оптимал ечимга келамиз ва $\varphi = -\frac{13}{2}$ минимумга эришамиз. Шундай қилиб, $\max f = -\min \varphi = -\frac{13}{2}$ бўлади.

88-§. СИМПЛЕКС ЖАДВАЛЛАР

Бирор масаланинг ечимини симплекс усул ёрдамида топиш бир қанча босқичлардан иборат эканлиги бизга маълум. Шу босқичларнинг ҳаммасини симплекс жадваллар ёрдамида бажариш мумкин. Буни қуйидаги мисолларда кўриб ўтамиз:

1. $$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases} \qquad (1)$$

системанинг манфиймас ечимлари орасида

$$f = x_4 - x_5 \qquad (2)$$

формага минимум қиймат таъминловчи ечим топилсин.

Ечиш. (1) ва (2) ларни биргаликда олиб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \\ f - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

(2) системани x_1, x_2, x_3 ларга кўра осонгина ечиш мумкин. Шунинг учун бу номаълумларни (1) системанинг базис номаълумлари деб қабул қиламиз.

Базис номаълумларни жадвалнинг 1-устунига, озод ҳадларни 2-устунига, x_1 нинг коэффициентларини 3-устунига ва ҳоказо, x_5 нинг коэффициентларини охирги устунига ёзиб. қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

1-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1	−2
x_2	2	0	1	0	−2	①
x_3	3	0	0	1	3	1
f форма	0	0	0	0	−1	1

f формага минимум қийматни берувчи оптимал ечимни топиш учун $\{x_1, x_2, x_3\}$ базисдан бошқа базисга ўтиш лозимлигини биламиз. Бу иш жадваллар ёрдамида қуйидагича бажарилади:

а) f формага мос келувчи сатр элементлари орасида мусбати бўлса, шу элемент жойлашган устун элементларидан мусбатларини белгилаб оламиз. Бизнинг мисолимизда охирги, яъни f форманинг сатрида битта мусбат 1 элемент бор. Бу элемент жойлашган охирги устунда 1 дан ташқари яна иккита мусбат 1, 1 элементлар мавжуд. Улар 2 ва 3-сатрларда жойлашган;

б) ажратилган мусбат 1, 1 элементлар билан битта сатрда жойлашган озод ҳадларнинг шу 1, 1 ларга нисбатларини тузамиз. Бизда бу нисбатлар $\frac{2}{1} = 2$ ва $\frac{3}{1} = 3$ бўлади;

в) тузилган нисбатлардан энг кичигининг махражи ҳал қилувчи элемент бўлади. 1-жадвалда ҳал қилувчи элемент тўгаракча ичига олинган;

г) ҳал қилувчи a элемент 0 га тенг бўлмаса, уни 1 га тенг қилиб олиш мумкин. Бунинг учун шу элемент жойлашган сатрнинг барча элементларини a га бўлиш кифоя;

д) 1-жадвал сатрларининг элементларини шундай ўзгартирамизки, натижада ҳал қилувчи 1 элемент турган устундаги шу элементдан бошқалари 0 ларга айлансин. Бунинг учун 1-жадвалнинг иккинчи сатрини 2, —1, —1 ларга кўпайтириб, мос равишда 1, 3, 4 сатрларга қўшамиз. Бунинг натижасида x_2 жойлашган устуннинг тўртинчи сатрида —1 ҳосил бўлгани учун x_2 ни базисдан чиқариб ташлаб, унинг ўрнига x_5 ни киритамиз. У ҳолда қуйидаги янги жадвал келиб чиқади:

2-жадвал

Базис номаълум	Озод ҳад					
x_1	5	1	2	0	—3	0
x_5	2	0	1	0	—2	1
x_3	1	0	—1	1	⑤	1
f форма	—2	0	—1	0	1	0

e) юқорида қилинган иш натижасида аввалги $\{x_1, x_2, x_3\}$ базисдаги x_2 ўрнига x_5 келади ва 2-жадвалда кўрсатилгандек, янги $\{x_1, x_5, x_3\}$ базис ҳосил бўлади.

2-жадвалнинг охирги сатрида фақатгина битта мусбат элемент мавжуд бўлиб, у x_4 жойлашган устундадир. Шу устунда яна битта мусобат элемент 5 бор. Уни ҳал қилувчи элемент деб ҳисоблаб, учинчи базисга киритамиз. Бу ишнинг натижаси қуйидаги жадвалда кўрсатилгандир:

3-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3		
	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
x_4	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
f форма	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0

3-жадвалнинг охирги сатрида бирорта ҳам мусбат элемент қолмади. Демак, топилган $\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ечим оптимал бўлиб, унга мос келувчи f форманинг минимуми $-\frac{11}{5}$ га тенг, яъни $\min f = -\frac{11}{5}$

2. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$

системанинг ечимлари орасидан $f = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$ формага минимум қиймат таъминловчи ечим топилсин.

Ечиш. Системанинг биринчи тенгламасидан иккинчисини айириб,

$$4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 12$$

тенгламага эга бўламиз. Бундан

$$x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 3.$$

Энди, системанинг иккинчи тенгламасини —5 га кўпайтириб, биринчи тенглама билан иккинчи тенгламани қўшамиз:

$$x_2 - 12x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -20 \Rightarrow x_5 -$$
$$-\frac{1}{4}x_2 + 3x_3 - \frac{3}{4}x_4 = 5.$$

f формани ҳам x_2, x_3 x_4 лар орқали ифодалаб, қуйидаги системага келамиз:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 2x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 3, \\ x_5 - \frac{1}{4}x_2 + 3x_3 - \frac{3}{4}x_4 = 5, \\ f - 8x_2 + 24x_3 - 5x_4 = 28. \end{cases}$$

Энди қуйидаги жадвалларни тузамиз:

4-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар					x_5
	3	1	$-\frac{3}{4}$	②	$-\frac{1}{4}$	0
x_5	5	0	$-\frac{1}{4}$	3	$-\frac{3}{4}$	1
f форма	28	0	-8	24	-5	0

Ҳал қилувчи элемент 2 дан иборат бўлгани учун x_1 ни x_3 билан алмаштириб $\{x_3, x_5\}$ базисга кўра қуйидаги жадвалга ўтамиз:

5-жадвал

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар		x_2		x_4	
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	0
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{7}{8}}$	0	$-\frac{3}{8}$	1
f форма	-8	-12	1	0	-2	0

Ниҳоят, $\frac{7}{8}$ сонга кўра қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

6-жадвал

Базис номаъ-лумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6
x_3	$\frac{12}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
	$\frac{4}{7}$	$\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$
f форма	$-\frac{60}{7}$	$-\frac{72}{7}$	0	0	$-\frac{11}{7}$	$-\frac{8}{7}$

6-жадвалнинг охирги сатри бирорта ҳам нолдан катта сонга эга эмас. Демак, топилган $\left(0, \frac{4}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0\right)$ ечим оптимал бўлади. Бу ечимга мос келувчи $f_{\min} = -\frac{60}{7}$ бўлади.

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

системанинг шундай манфиймас ечими топилсинки, бу ечимда $f = -x_1 - x_2$ форма минимум қийматга эришсин.

Ечиш. Масала қуйидаги системанинг манфиймас ечимларини топишдан иборатдир:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ f + x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Охирги системага мос келувчи қуйидаги жадвални тузамиз:

Базис номаъ-лумлар	Озод ҳадлар		x_2		x_4
x_3	1	—1	1	1	0
x_4	2	0	—2	0	1
f форма	0	1	1	0	0

Янги $\{x_1, x_3\}$ базисга кўра қуйидаги жадвал ҳосил бўлади:

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар				x_4
x_4	3	0	-1	1	1
x_1	2	1	-2	0	1
f форма	-2	0	3	0	-1

f формага мос келувчи сатрда фақатгина битта $3>0$ сон мавжуд бўлиб, у жойлашган устуннинг бошқа сонлари нолдан кичикдир. Бундай ҳолда қўйилган масала оптимал ечимга эга бўлмайди, чунки охирги жадвалга мос системани тузсак, қуйидаги система келиб чиқади:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ f + 3x_2 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Бундан

$$\begin{cases} x_3 = 3 + x_2 - x_4, \\ x_1 = 2 + 2x_2 - x_4, \\ f = -2 - 3x_2 + x_4 \end{cases}$$

бўлиб, f нинг қийматини x_2 ни орттириш ҳисобига камайтириш мумкин. Лекин x_2 ўзгарувчининг ортиши x_4 нинг мусбатлигига таъсир этмайди. Демак, бу ҳолда $\min f = -\infty$ бўлади.

Машқлар

1. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 6 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 16 \leqslant 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12 \leqslant 0, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

системанинг шундай ечими топилсинки, у ечимда $f = 2x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3$ форма минимум қийматга эришсин.

2. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

учун $f_{\min} = -x_1 - x_2 - x_3$ топилсин.

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \geqslant 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

учун $f_{\min} = x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ топилсин.

4. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_i \geqslant 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

системанинг шундай ечими топилсинки, у ечимда

$$f_{\min} = -x_1 - x_4 \text{ бўлсин.}$$

89- §. СИМПЛЕКС УСУЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

Иқтисодий масалаларни ечишда чизиқли системаларнинг манфиймас ечимларини топиш кераклигини кўрдик. Маълумки, ҳар бир чизиқли тенгламалар ва тенгсизликлар системасини матрицали тенглама ёки тенгсизлик шаклида ёзиш мумкин.

Системанинг манфиймас ечимларини топиш усулларидан бири

$$\bar{x} A = \bar{b} \qquad (1)$$

тенгламанинг барча ечимларини топиб, улар орасидаги манфиймасларини ажратиб олишдир. Лекин номаълумлар сони тенгламалар сонидан етарлича катта бўлганда, бу усул анча меҳнат ва вақт талаб қилади. Бу масалани ечишнинг эффектив усулларидан бири уни минималлаштириш масаласига келтиришдан иборат. Агар (1) да $\bar{b}$ векторнинг баъзи координаталари манфий бўлса, уни мусбат ҳолга келтириш мумкин. Бунинг учун системадаги тегишли тенгламаларнинг иккала томонини -1 га кўпайтириш кифоя. Масала қуйидагича қўйилади:

$$\bar{x} \cdot A + \bar{y} = \bar{b} \qquad (2)$$

системанинг ечимлари орасида шундай манфиймас $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ечимлар топилсинки, бу ечимларда

$$f = (\bar{y},\ \bar{v}) \qquad (3)$$

форма минимум қийматга эришсин, бу ерда $\bar{v}$ вектор бирлик вектордир.

Масаланинг шартига асосан $\overline{y}$ манфиймас бўлиб, f форма минимум қийматга эга бўлиши лозим. $\overline{v}$ вектор мусбат бўлганидан f форманинг манфиймас қиймати $\overline{y}$ векторга боғлиқ. Демак, $\overline{y}=\overline{0}$ бўлгандагина форма минимум қийматга эришади. Бундай ҳолда $\overline{x}\geqslant 0$ қўйилган масаланинг ечими бўлади, яъни бу вектор (1) системанинг манфиймас ечимини беради.

Мисол.

$$\begin{cases} x_1-x_3+4x_4=3, \\ 2x_1-x_2=3, \\ 3x_1-2x_2-x_4=1 \end{cases}$$

учун $\overline{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ векторни топайлик.

Ечиш. Янги $\overline{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ вектор ёрдамида бу масалага мос чизиқли программалаш масаласини қуйидагича қўямиз:

$$\begin{cases} x_1-x_3+4x_4+y_1=3, \\ 2x_1-x_2+y_2=3, \\ 3x_1-2x_2-x_4+y_3=1 \end{cases}$$

система учун манфиймас $\overline{x}$ вектор ва $f=y_1+y_2+y_3$ формага минимум қийматни берувчи $\overline{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ вектор топилсин.

Бошланғич жадвалда базис номаълумлар учун $y_1,\ y_2,\ y_3$ ларни олиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} &y_1+x_1-x_3+4x_4=3, \\ &y_2+2x_1-x_2=3, \\ &y_3+3x_1-2x_2-x_4=1, \\ &f+6x_1-3x_2-x_3+3x_4=7 \end{aligned}$$

Бу системага мос симплекс жадвал қуйидаги шаклни олади:

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
y_1	3	1	0	−1	4	1	0	0
y_2	3	2	−1	0	0	0	1	0
y_3	1	③	−2	0	−1	0	0	1
f форма	7	6	−3	−1	−3	0	0	0

Симплекс жадвалларнинг биридан иккинчисига кетма-кет ўтиб, қуйидаги жадвалларни тузамиз:

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
y_1	$\frac{8}{3}$	0	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	1	$\frac{13}{3}$	1	0	0
y_2	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	1	0
	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	1
f форма	5	0	1	—1	5	0	0	0

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар		x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3
x_2	7	0	1	0	2	0	3	—2
x_3	2	0	0	1	—3	—1	2	—1
	5	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{3}{2}$
f форма	0	0	0	0	0	—1	—1	—1

Охирги жадвалнинг охирги сатрида мусбат сон мавжуд эмас. Демак, топилган (5, 7, 3, 0) ечим берилган системанинг манфиймас ечими бўлади. Бу ечимда $f = y_1 + y_2 + y_3$ форманинг минимум қиймати нолга тенг.

АДАБИЁТ

1. **Куликов** Л. Я. Алгебра и теория чисел. М., 1979.
2. **Кострикин** А. И. Введение в алгебру. М., 1977.
3. **Курош** А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.
4. **Проскуряков** И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М., 1967.
5. **Фадеев** Д. К., **Соминский** И. С. Сборник задач по высшей алгебре. М., 1977.
6. **Калужнин** Л. А. Введение в общую алгебру. М., 1973.
7. **Варпаховский** Ф. Л., **Солодовников** А. С., **Стелецкий** И. В. Алгебра, МГЗПИ, М., 1978.
8. **Искандаров** Р., **Назаров** Р. Алгебра ва сонлар назарияси, 1- қисм. Т., 1977.
9. **Столл** Р. Р. Множества, логика, аксиоматические теории. М., 1968.
10. **Ёқубов** Т. Ё. Математик логика элементлари. Т., 1983.

[illegible]
Хидиров

Н 18

Назаров Р. Н. ва бошқ.

Алгебра ва сонлар назарияси: Пед. ин-т ва ун-т физ.-мат. фак. талабалари учун ўқув қўлланма / Р. Н. Назаров, Б. Т. Тошпўлатов, А. Д. Дўсумбетов, 2 қисмли. Қ. I.— Т.: Ўқитувчи, 1993.—320 б.

I. 1,2 Автордош.

Назаров Р. Н. и др. Алгебра и теория чисел. В 2 частях. Ч. 1.

22.14я73

НАЗАРОВ РАСУЛ
ТОШПЎЛАТОВ БАҲОДИР ТОШПЎЛАТОВИЧ
ДУСУМБЕТОВ АБДУЛЛА

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

I қисм

Педагогика институтлари
математика факультетлари
талабалари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1993

Таҳририят мудири *У. Хусанов*
Муҳаррир *С. Бекбоева*
Бадиий муҳаррир *Н. В. Сучкова*
Тех. муҳаррир *Д. Габдраҳмонова*
Мусаҳҳиҳ *А. Иброҳимов*

ИБ № 6078

Теришга берилди 18. 12. 92. Босишга рухсат этилди 07.10.93. Формати $84\times108^{1}/_{32}$ Тип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 16,8. Шартли кр.-отт. 16,96. Нашр. л. 14,58. Нусха 6500. Буюртма 2572.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент—129, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 9—155—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Ташполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1993.

стр 318

АЗИЗ ТАЛАБАЛАР ВА МУҲТАРАМ МУАЛЛИМЛАР!

«Ўқитувчи» нашриёти Сизлар учун 1993—94 йилларда физика ва математика фанларидан ушбу китобларни чоп этади:

1. Р. Бекжонов. Атом ядроси ва зарралар физикаси, 25,0 б.т.
2. Турсунов С., Камолов Ж. Умумий физика курси. Электр ва магнетизм. 16,0 б. т.
3. Ўлмасова М. Х., Тошхонова Ж. Х. Физикадан практикум (механика ва молекуляр физика), 13,0 б. т.
4. Ҳошимов Ё. ва бошқ. Квант механикаси асослари, 20,0 б. т.
5. Назаров Р. ва бошқ. Алгебра ва сонлар назарияси, II қисм, 15,0 б. т.
6. Иброҳимов Р. ва бошқ. Математикадан масалалар тўплами. 8,0 б. т.
7. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, I қисм, 20,0 б. т.
8. Назаров Х. ва бошқ. Геометриядан масалалар тўплами, 2- қисм, 10,0 б. т.